UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

OBSERVATORIO DO VALONGO

TRABALHO 34

VERIFICAÇÃO DA APLICABILIDADE DO FORMALISMO TENSORIAL NA ANÁLISE DE SISTEMAS ESTELARES

AUTOR DO PROJETO

REINALDO RAMOS DE CARVALHO

sob a orientação do Prof. JORGE DE ALBUQUERQUE VIEIRA

Rio de Janeiro

Quero agradecer a todos os professores pelo incentivo que me deram em todos os momentos deste trabalho. Ao amigo, Professor JOSÉ AUGUSTO BUARQUE DE NAZARETH, meus agradecimentos por sua colaboração efetiva e indispensável. Agradeço, também a todos os meus colegas e amigos desta instituição por tudo o quanto fizeram para que esse trabalho pudesse se realizar. Ao Professor JORGE DE ALBUQUERQUE VIEIRA, que com seu espírito verdadeiramente científico orientou-me no sentido dos meus próprios ideais, meu muito obrigado.

Reinaldo Ramos de Carvalho

I - INTRODUÇÃO 4

II- ASPECTOS GERAIS DOS PULSARS 5

.1 - Histórico 5

.2 - Propriedades Físicas 6

.3 - Teorias 8

.4 - Propagação de Ondas Através de um meio pouco Ionizado 10

.5 - Rotação de Faraday 17

III- DISPERSÃO E DISTÂNCIA DE UM PULSAR 19

.1 - Introdução 19

.2 - A Equação para a Dispersão 19

IV- REPRESENTAÇÃO GEODÉSICA DE ESPAÇOS FÍSICOS 25

.1 - Introdução 25

.2 - O Tensor Dielétrico 25

.3 - O Tensor Métrico 27

.4 - Análise Gráfica para a escolha de variáveis 30

.4.1 - O Determinante como uma Transformada 30

.4.2 - Simulando Estados Físicos 31

.4.3 - Análise Gráfica 32

.4.4 - Êrros Computacionais 35

.5 - As Equações Geodésicas 37

.6 - Conclusões 40

V- BIBLIOGRAFIA 43

I - INTRODUÇÃO

Este trabalho visa estabelecer condições, as quais possam explicar as características de uma estrêla de neutron através do comportamento de espaços geodésicos. Estes espaços são gerados assumindo o tensor dielétrico como um tensor métrico. Um primeiro estudo do comportamento das soluções para subespaços é feito, e as particularidades introduzidas servem como orientação para uma verificação mais rigorosa das soluções gerais, sendo que estas deverão ser obtidas para o tensor métrico completo.

Os capítulos II e III visam estabelecer um conhecimento geral da física de Pulsars. São tratados assuntos de cunho teórico e observacional no sentido de fornecer ao leitor os elementos necessários para a discussão dos sistemas estelares aqui tratados.

Um resumo deste trabalho foi enviado ao ANUÁRIO do INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS (UFRJ), para publicação.

II- ASPECTOS GERAIS DOS PULSARS

II.1 - Histórico

Dos antigos registros chineses e japoneses sabemos que em julho de 1054 D.C. uma estrêla excessivamente brilhante apareceu no céu. Visível à luz do dia durante 3 semanas e durante 600 noites, aproximadamente. Há também registros de pinturas em cavernas no Canyon Arizona citando o evento. Este fenômeno é agora identificado com a nebulosa do Caranguejo, onde se localiza o Pulsar NP 0532.

Para termos uma melhor idéia do evento, consideremos o aspecto quantitativo do mesmo. A energia liberada durante o fenômeno, por exemplo para uma supernova tipo I, é cêrca de $3,6 \times 10^{49}$ ergs., equivalente à emitida pelo Sol em 300 milhões de anos. A hipótese mais aceita é a do colapso de uma estrêla de grande massa durante os últimos estágios de sua evolução. A discussão deste assunto mereceria um capítulo a parte, porém, tal não é o objetivo deste estudo. Assim sendo, o estabelecimento dos principais fatos sôbre a evolução e a estrutura dos Pulsars, dar-se-á naturalmente no decorrer dos capítulos.

A luminosidade da nebulosa do Caranguejo é atribuida à radiação sincrotônica, emitida por elétrons relativísticos, e se estende sôbre o espectro eletromagnético da região de rádio aos raios-X. Um problema que surge na nebulosa do Caranguejo é o fato de que os elétrons emissores de raios-X terem, no modelo sincrotônico, meia-vida da ordem de um ano, tempo este muito menor que a idade da nebulosa (915 anos). Portanto, precisamos explicar a produção contínua de elétrons energéticos na nebulosa do Caranguejo. A existência de um Pulsar nesta nebulosa forneceu a chave para a solução deste problema.

A descoberta dos Pulsars (1968) deve-se a um grupo de Cambridge que desenvolveu um arranjo para a observação de fontes que possuiam rápidas variações no seu brilho. Quando de 1º de setembro de 1969, trinta e sete Pulsars já tinham sido descobertos. A figura 1 mostra os pulsos ópticos do Pulsar NP 0532; existe um pulso principal seguido por um pulso secundário. Na região óptica, a forma do pulso é constante em relação ao comprimento de onda, mas na região de rádio a forma é dependente do comprimento de onda. Por exemplo, no Pulsar da nebulosa do Caranguejo, o pulso principal sofre o efeito de descontinuidades acentuadas quando observado em 300 MHz e o pulso secundário praticamente desaparece em 60 MHz.

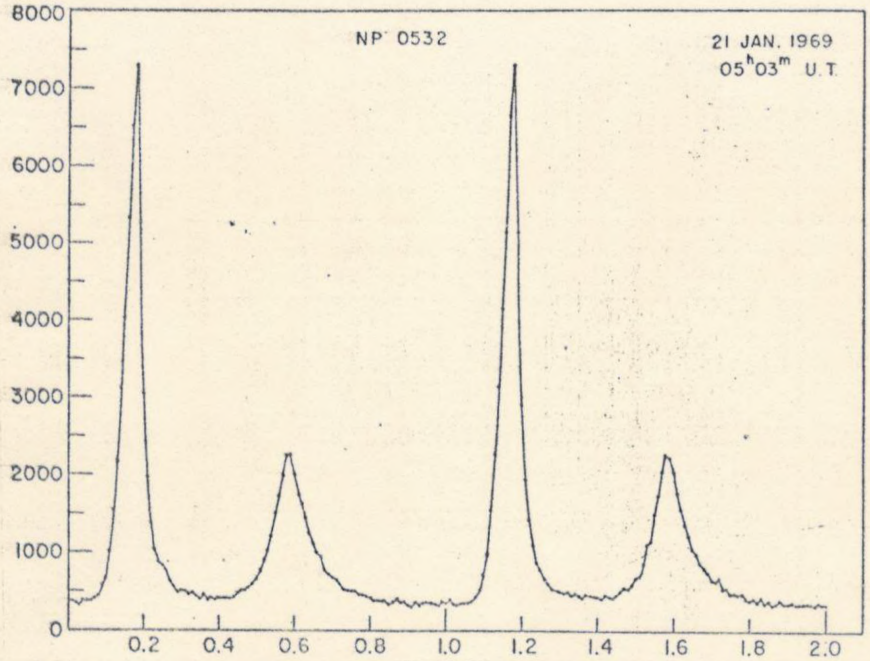


Fig. 1 - Pulsos ópticos do Pulsar da nebulosa do Caranguejo, obtido por R.LYNDS, S.P.MARAN e D.E.TRUMBO com o telescópio de 84 polegadas de Kitt Peak.

II.2 - Propriedades Físicas

O texto que se segue foi condensado do artigo de H.-Y. CHIU (1, pags. 492 a 498).

Definiremos a seguir o objeto de estudo, a estrêla de neutron (Pulsar). As estrêlas de neutron foram propostas por L. Landau (1932), desde então muitos modêlos apareceram tentando justificar as características observacionais que uma dessas estrêlas teria.

Uma estrêla normal, com uma temperatura interior entre 1 e 3 x 10^7 K, usa o hidrogênio como combustível nuclear e o produto final do hidrogênio queimado é o hélio. Após o término do hidrogênio no núcleo, a estrêla inicia a fase de gigante vermelha e a combustão do hélio se dá a uma temperatura de 10^8 K. A combustão do hélio resulta em carbono ou oxigênio (ou ambos). Depois da combustão do hélio, o carbono começará sua combustão quando a temperatura alcançar 6×10^8 K. A exaustão do oxigênio requer uma temperatura mais alta ainda, cêrca de 2×10^9 K. A uma temperatura de 4×10^9 K, os elementos entrarão em equilíbrio e toda fonte de energia nuclear é exaurida. Apartir disto, a evolução estelar procede baseada somente na energia gravitacional. Existem limites de temperatura aliados a processos intrínsecos ao objeto , que proporcionam a quebra do equilíbrio hidrostático da estrêla, e então o colapso estelar ocorre. Outros modêlos para colapsos têm sido propostos por vários pesquisadores e parece haver uma aceitação do fato de que os eventos que se seguem aos colapsos são virtualmente independentes do mecanismo causador do colapso. O processo colapsante continua até que a densidade do núcleo se aproxima da densidade nuclear ($\sim 10^{14}$ g/cm^3) quando então processos nucleares típicos desta fase se tornam imperativos e a explosão da estrêla ocorre liberando matéria para o espaço para formar o que observamos como remanescentes supernovas. O núcleo restante forma então uma estrêla de neutron, ou seja as estrêlas de neutron são realmente formadas em modêlos de colapso de supernova.

Uma estrêla de neutron típica tem um diametro de 10 Km e uma massa da ordem de uma massa solar. Do centro até 9 Km a composição é predominantemente neutrons livres com cêrca de 1% de prótons e elétrons . No próximo Km a composição varia de elementos ricos em neutrons como o Y^{120}, no fundo desta camada, a elementosmais comuns perto da superfície. A composição da superfície parece ser provavelmente Fe^{56}. Somente , nos últimos metros da superfície é que a matéria torna-se não degenerada. A matéria é dita não degenerada quando apesar de submetida à condições anômalas, ainda obedece ao princípio de exclusão de Pauling; caso contrário será dita degenerada. Nestes últimos metros da superfície é que aparece um substancial gradiente de temperatura . A massa do envoltório não degenerado é cêrca de 10^{19}g. A temperatura da superfície é cêrca de 0,01 daquela no interior. Na ausência de um campo magnético intrínseco, uma estrêla de neutron irradia como um corpo negro predominantemente na região do raio-X.

Durante a formação de uma estrêla de neutron, a estrêla original colapsa por um fator de 10^5. Devido a este intenso efeito de contração, parametros como campos magnéticos, rotação e pulsação, tidos como perturbações para a estrutura estelar, podem tornar-se importantes e destes o campo magnético e a rotação são os de maior importância para o estudo da polarização.

II.3 - Teorias

Uma teoria sobre Pulsars deve ser capaz de justificar três pontos principais:

a) O mecanismo de radiação;

b) O mecanismo de relógio ;

c) O mecanismo de farol (brilho).

As correntes de teorias estão baseadas na suposição de que o mecanismo de relógio é estabelecido por uma estrêla de neutron rotativa. Tais estrêlas são produzidas por um colapso gravitacional durante um evento supernova.

Pacini (1967), foi quem primeiro estudou a possibilidade de que uma estrêla de neutron rotativa pudesse fornecer energia à nebulosa do Caranguejo, e isto, mesmo antes dos Pulsars serem descobertos.

Das várias questões existentes sobre os Pulsars, uma parece ser dual por natureza, ou seja, relaciona o aspecto estrutural e evolutivo com o observacional. Onde no Pulsar a radiação pulsada é produzida? Existem duas escolas de pensamento sôbre esta questão. Segundo uma classe de teorias, a radiação se origina na superfície da estrêla de neutron nas vizinhanças dos pólos magnéticos, como na figura 2. O outro ponto de vista toma a radiação como surgindo no cilindro de luz. Êste cilindro tem um raio r, tal que $W.r = c$, onde c é a velocidade da luz e $W = 2\pi/P$, a velocidade angular, P sendo o período do Pulsar. Êste cilindro de luz é visto como a fronteira dentro da qual a corotação do plasma e do campo é possível.

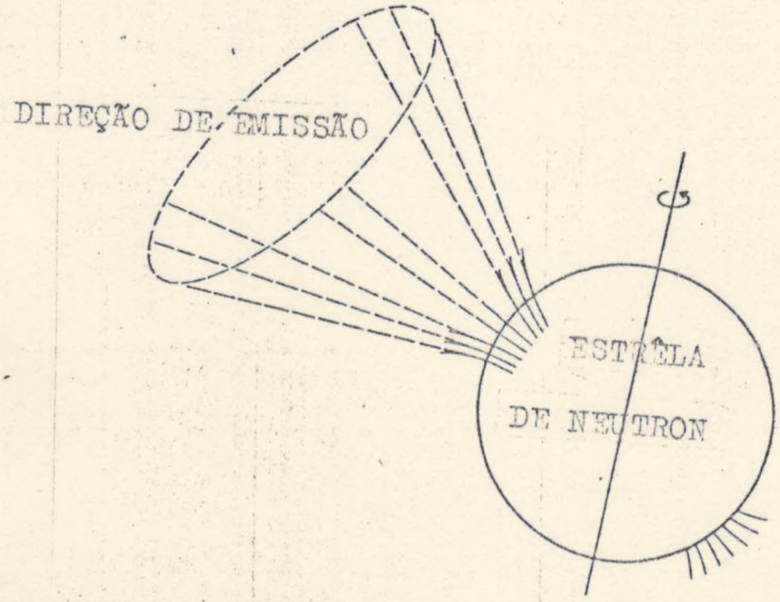


Fig. 2 - Concepção artística da geometria envolvida na teoria sobre Pulsars, desenvolvida por H.CHIU, V.CANUTO, L.FASSIO-CANUTO e F.OCCHIANERO.

Os Pulsars estão de certa forma enfraquecendo, e vários mecanismos de frenagem têm sido sugeridos. Dentre êles: perda de momento angular em um vento estelar (Michel e Tucker,1969), radiação de dipolo magnético (Pacini,1968; Gunn e Ostriker,1969) e radiação de quadripolo gravitacional (Ostriker e Gunn,1969).

Uma característica peculiar da radiação de um Pulsar é sua polarização: a radiação é linearmente polarizada. Em uns poucos Pulsars, o plano de polarização é uniforme, reproduzível por rotação no ângulo de posição do plano de polarização, durante o pulso. A presença da polarização linear está em acordo com um processo sincrotônico e a rotação do plano de polarização durante o pulso é consistente com o aspecto rotacional da fonte. A diferença em ângulo de posição, a uma dada fase de um pulso, quando observada em diferentes frequências foi estudada no Pulsar Vela, e revelou ser inteiramente devida à rotação de Faraday interestelar.

II.4 - Propagação de Ondas Através de um Meio Pouco Ionizado

Consideremos um meio ionizado sem campo elétrico e magnético, externos. Tomemos este meio como tênue, tal que as colisões binérias entre íons e elétrons sejam raras. Então para pequenos afastamentos da posição de equilíbrio, os campos elétricos residentes na onda eletromagnética ,a qual é gerada no Pulsar, aceleram os elétrons do meio em relação aos íons de maior massa. A equação de movimento de um elétron é

$$m \ddot{\underset{\sim}{r}} = e\underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{r},t) \quad , \qquad (1)$$

onde e e m são carga e massa do elétron e $\underset{\sim}{E}$ o campo elétrico associado , com a onda eletromagnética.

Seja a onda eletromagnética da forma

$$\underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{r},t) = \text{Re}\ (E''(\underset{\sim}{r})\exp(iwt)) \qquad (2)$$

onde $E''(\underset{\sim}{r})$ é a amplitude da onda e w é a frequência da onda eletromagnética. O deslocamento do elétron de sua posição de equilíbrio é, então,

$$\underset{\sim}{F} = m \ddot{\underset{\sim}{r}} \quad ; \quad \underset{\sim}{F} = q\underset{\sim}{E}$$

e

$$\ddot{\underset{\sim}{r}} = -w^2\underset{\sim}{r}$$

assim temos,

$$q\underset{\sim}{E} = -mw^2\underset{\sim}{r}$$

logo

$$\underset{\sim}{r} = - e\underset{\sim}{E}/mw^2.$$

Sabemos que para um oscilador harmônico

$$\underset{\sim}{F} = -K\underset{\sim}{r}$$

onde

$$w^2 = K/m$$

logo

$$\underset{\sim}{r} = -e\underset{\sim}{E}/mw^2. \qquad (3)$$

Isto satisfaz ambas equações (1) e (2). O deslocamento do elétron efetivamente forma um conjunto de dipolos, que dá origem a um campo de polarização $\underset{\sim}{P}$. Se n é a densidade do número de elétrons, o campo de polarização é expresso como uma soma de dipolos individuais produzidos pela onda que atravessa o meio:

$$\underset{\sim}{P} = ne\underset{\sim}{r} = -ne^2\underset{\sim}{E}/mw^2. \qquad (4)$$

Por definição, temos que o campo de polarização é dado por W.K.H. Panofsky, M. Phillips (8,pag. 29)

$$\underset{\sim}{P} = (\underset{\sim}{D}-\underset{\sim}{E})/4\pi = (\epsilon-1)\underset{\sim}{E}/4\pi \ .$$

Então a equação (4) nos diz que a constante dielétrica do meio deve ser:

$$\epsilon = 1-(4\pi ne^2)/mw^2. \qquad (5)$$

Já que a velocidade de fase é inversamente proporcional ao índice de refração, $n_w = \epsilon^{1/2}$, na frequência w, a velocidade de fase no plasma será maior do que a velocidade da luz, mas nenhuma informação e nenhuma energia é transmitida nesta velocidade. Portanto nenhuma violação da relatividade especial é envolvida. A mais significativa, a velocidade de grupo, é sempre menor do que a velocidade da luz.

Como a frequência é proporcional ao número de onda, e a velocidade de fase inversamente proporcional ao índice de refração, temos, da onda

$$f = f'' \cos(kx \pm wt) \ ,$$

a seguinte expressão,

$$w = kc/n_w = kc/\epsilon^{1/2} \ .$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros e substituindo-se dado por (5), temos

$$w^2 = k^2c^2(1-(4\pi ne\ /mw\ )) \ , \qquad (6)$$

onde a equação (5) foi tomada com $\mu = 1$. Com a finalidade de esclarescer as discussões futuras consideremos a particular escolha de . é a permeabilidade absoluta do meio, e diz-se que um meio é permeável quando não tem momento magnético na ausência de correntes externas e no qual existe um momento magnético proporcional ao campo produzido por uma corrente externa.

Reescrevendo a equação (6), temos

$$w^2 = k^2c^2 + 4\pi ne^2/m = k^2c^2 + w_p^2 \quad ,$$

onde w_p , a frequência de plasma, é igual a

$$w_p = (4\pi ne^2/m)^{1/2} \sim 5,6 \times 10^4 \; n^{1/2} \text{ Hz.} \qquad (7)$$

Calculando agora a velocidade de grupo U, temos

$$U = dw/dk = c/(1+(w_p^2/c^2k^2))^{1/2}, \qquad (8)$$

Portanto, a velocidade de propagação é dependente da frequência. No caso dos Pulsars, se o pulso emitido contem uma faixa de componentes de frequência, o tempo de chegada destas frequências à Terra será mais atrasado para as menores frequências.

Podemos então escrever a equação (8) como

$$U = c/(1+ w_p^2/(w^2-w_p^2))^{1/2}.$$

O tempo de chegada de um pulso que tenha atravessado uma distância S é S/U, e a dependência em frequência, do tempo de chegada, será dt/dw. Temos então:

$$t = \frac{S}{U} = \frac{S}{c}\,(1+ w_p^2/(w^2-w_p^2))^{1/2}$$

$$dt/dw = (-Sw_p^2w/c)/(w^2/(w^2-w_p^2))^{1/2}((w^2-w_p^2)^4)^{1/2}.$$

No caso em que w é muito maior que w_p,

$$dt/dw = -Sw_p^2/cw^3 \;.$$

Sabendo-se que $w = 2\pi\nu$, $w_p = 2\pi\nu_p$, temos

$$d\nu/dt = -c\nu^3/S\nu_p^2 \;. \qquad (9)$$

Do ponto de vista da observação, a equação (9) se revela funda mental, pois que a razão de variação da frequência no tempo se relaciona com a densidade de elétrons interestelar, logo o conhecimento destas variações nos levá a determinação do quanto nossa observação é afetada pelo meio interestelar.

Observações de Pulsars mostram que o tempo de chegada é dependente da frequência e o atraso observado no tempo de chegada toma a forma da equação (9). Portanto concluímos que o atraso no tempo, tem lugar em um meio cuja frequência de plasma é muito menor do que a frequência da radiação.

Assim, pode-se ver que a dispersão interestelar é um importante efeito: elétrons livres no meio interestelar afetam a propagação da radiação.

Sabendo-se que ν_p é proporcional a $N_e^{1/2}$ onde N_e é a densidade de elétrons, e S a distância ao Pulsar, temos que a integral da concentração de elétrons ao longo de uma linha de visada, denominada MEDIDA DE DISPERSÃO, é definida como

$$DM = \int_0^S N_e \, ds \;, \tag{10}$$

Temos também que o valor médio de N_e é dado por :

$$(N_e)_{med} = \left(\int_0^S N_e \, ds \right)/S \;, \quad (\S)$$

donde

$$DM = S \, (N_e)_{med} \;. \tag{11}$$

Usando novamente a expressão (9), temos

$$d\nu/dt = -c\nu^3 / \int_0^S \nu_p^2 \, ds \;. \tag{12}$$

Esta última expressão é justificada pelo fato de ν_p^2 ser proporcional a N_e, e portanto podemos fazer ν_p^2 proporcional a N_e.

A medida de dispersão dos Pulsars, mostra uma larga faixa de valores para aqueles que repousam perto do plano galático, enquanto que para altas latitudes esses valores são pequenos (fig.3). Esta distribuição é característica de objetos que estão perto do disco galático, ou no próprio disco (S.P.Maran,1970)

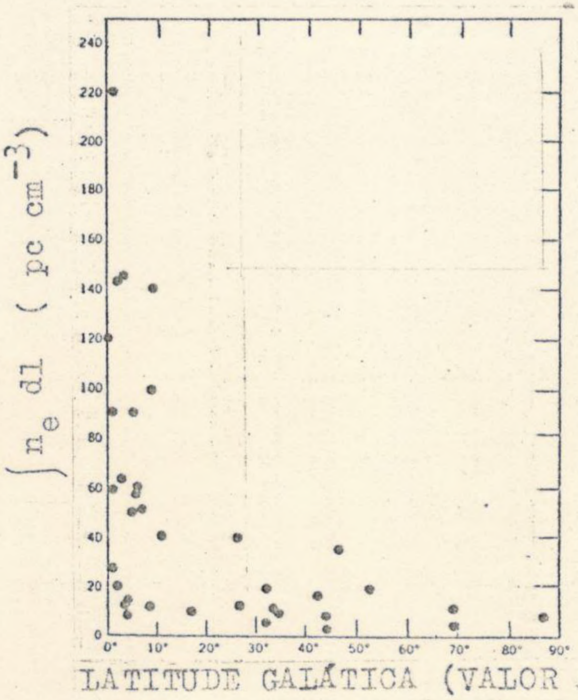


Fig. 3 - Medida de dispersão dos Pulsars versus latitude galática.

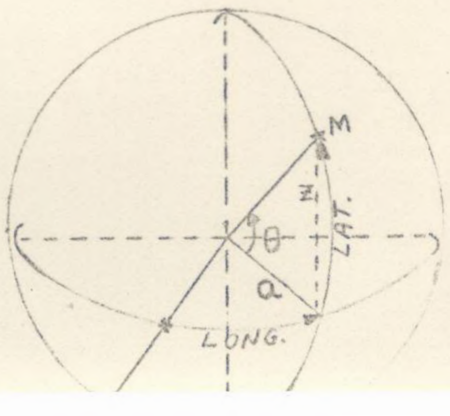
É interessante notar o modêlo estudado por Mills(1969), que é fundamentado em termos de um modêlo para gases (elétrons) no meio interestelar, no qual N_e depende da distância normal ao plano galático (z) de acordo com a expressão

$$N_e(z) = N_e(0) \;/\; (1+ (z/a)^2) \;. \qquad (13)$$

Usando esta aproximação para a interpretação da medida de dispersão de três Pulsars distantes, a quantidade $\underline{N_e(0).\ a}$ foi encontrada como aproximadamente igual a 12 pc.cm^{-3}.

Sabemos de ν_p^2 é proporcional a N_e , portanto podemos escrever

$$\nu_p^2 = \nu_p^2(0)\ \cos^2\theta .$$



Assim, obtemos a expressão:

$$N_e(z) = N_e(0)\cos^2\theta \quad ,$$

ou

$$N_e(z) = N_e(0)/(1+ tg^2\theta) \; .$$

Finalmente,

$$N_e(z) = N_e(0)/(1+ (z/a)^2).$$

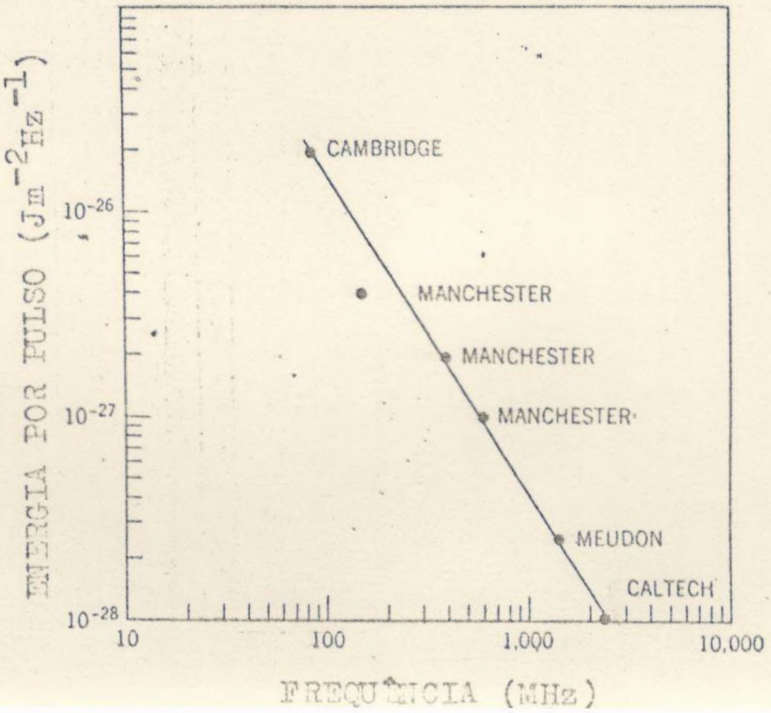
Observações da absorção interestelar para a radiação de 21 cm fornece a medida de dispersão do hidrogênio

$$HM = \int N_H \, ds \quad ,$$

onde N_H = densidade de átomos de hidrogênio neutro.

A razão DM/HM fornece o grau de ionização e assim determina a temperatura do meio interestelar.

A figura 4 mostra o rádio-espectro de CP 0808. A agradável linearidade deste espectro, não é contudo típica. Muitos Pulsars apresentam altas frequências (5 GHz) e alguns têm baixas frequências (40 MHz). O espectro de NP 0532 se estende da região de rádio até a região de raio-X, e mostra duas componentes distintas. Não existe teoria, por mais ampla que seja, que possa justificar as duas componentes.



Os períodos dos Pulsars variam de 0,03 seg. até 3,7 seg. (S.P. Maran,1970). Em todos os casos de variação da medida do período, a velocidade do pulso, ou seja a variação do período no tempo, diminuiu. A única excessão para esta regra geral foi o extraordinário evento que ocorreu no Pulsar (PSR 0833-45), supernova remanescente, no início de 1969. O período abruptamente diminuiu em cêrca de uma parte em 10^6 e então começou novamente a aumentar a uma velocidade que era cêrca de 1% maior do que era antes do decréscimo da velocidade. Várias teorias engenhosas foram propostas para explicar o fato. Ruderman (1970) sugeriu que a camada externa de uma estrêla de neutron fôsse cristalina e capaz de suportar uma certa tensão, solidificando-se em uma época em que a estrêla de neutron girava de forma muito mais rápida que atualmente, achatando-se a crosta devido a fôrça centrífuga. Como a estrêla gira cada vez mais devagar, a forma de equilíbrio varia e os esforços e tensões sôbre a crosta aumentam até a estrêla colapsar. Neste "terremoto o momento de inércia é reduzido e a velocidade orbital ("spin") da estrêla é maior. Temos também a hipótese de F. Dyson, de que o material, submetido a altas temperaturas e pressões no interior da estrêla, faz um buraco na superfície transformando-se num vulcão. O material expelido se acumularia na superfície da estrêla e seu pêso faria com que esta colapsasse. Ainda G. Greenstein e A.G.W. Cameron propuseram uma outra teoria, a qual relata o caso de Vela como uma instabilidade hidrodinâmica.

A dificuldade de encontrar novos e mais distantes Pulsars é devido à dispersão interestelar, a qual aumenta com a distância. Modernas técnicas para remover a dispersão, para compensar a alta dispersão do meio interestelar, dão esperanças de descobertas de novos Pulsars. Neste trabalho serão tratados novos desenvolvimentos, bem como revisões de observações e teorias passadas, à luz de novos conhecimentos.

II. 5 - Rotação de Faraday

Informação acêrca da densidade de elétrons no meio cósmico pode também ser obtida da rotação de Faraday do plano de polarização de uma onda. Para compreender este efeito, considere um elétron movendo-se em um plano perpendicular a direção de um campo magnético $\underset{\sim}{B}$. Êle será então defletido por uma fôrça $\underset{\sim}{G}$ dada por

$$\underset{\sim}{G} = e\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{B}/c$$

Se o elétron está também sob a influência de uma onda eletromagnética, experimentará uma fôrça devido ao campo $\underset{\sim}{E}$. Finalmente, a rotação sob a influência combinada destes campos deve ser balanceada por uma força centrífuga dirigida para fora. A relação entre estas forças é dada por:

$$e\underset{\sim}{E} \pm (eBw\underset{\sim}{r})/c = mw^2\underset{\sim}{r}$$

Os sinais $\pm$ são devidos à rotação do elétron ser no sentido dos ponteiros do relógio, ou inversa, quando vista ao longo da direção do campo $\underset{\sim}{B}$. Este é o movimento induzido por uma onda eletromagnética com polarização circular propagando-se paralelamente a $\underset{\sim}{B}$. Notemos, contudo que o valor de e é negativo para o elétron. Resolvendo para $\underset{\sim}{r}$, temos:

$$\underset{\sim}{r} = - e\underset{\sim}{E}/(mw^2+(eBw/c)) \qquad (14)$$

A polarização dielétrica $\underset{\sim}{P} = ne\underset{\sim}{r}$, dá origem a uma constante dielétrica.

$$\epsilon(w) = 1- 4\pi ne^2/(mw(w+w_c)) \qquad (15)$$

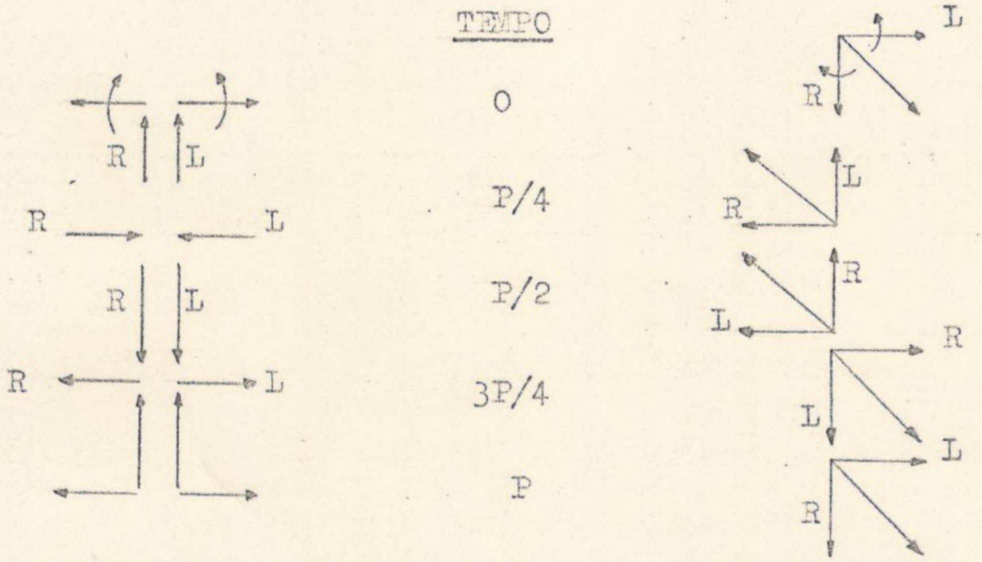
onde

$$w_c = eB/mc,$$

e w_c = frequência de cíclotron.

Já que o índice de refração $\epsilon^{1/2}$ não é constante, segue que a radiação polarizada se propagará com diferentes velocidades, através do meio ionizado.

Se uma onda é inicialmente plano-polarizada com uma dada direção de polarização, o angulo de polarização pode ser expresso como uma superposição de duas ondas circularmente polarizadas de dada fase O_o e amplitudes iguais. Durante a propagação há uma diferença de fase entre as duas ondas, ou seja, uma onda se propaga atrás da outra e a direção de polarização gira. O vetor $\underset{\sim}{E}$ estará, algumas vezes em fase, e outras vezes fora de fase.



A figura acima mostra dois conjuntos de ondas circularmente polarizadas (opostamente) superpostas. A primeira, à esquerda, tem O_o=180º, a primeira da direita tem O_o=90º. Os vetores $\underset{\sim}{E}$ e sua soma são mostrados em diferentes tempos durante um período da onda.

Esta apresentação não pretendeu ser estensa, embora o assunto assim o permita, mas apenas colocar os elementos necessários para uma análise qualitativa dos dados observacionais.

Assim sendo atenção deve ser dispensada à figura acima, pois ela, além de útil, revela toda uma descrição do mecanismo gerador da polarização.

III- DISPERSÃO E DISTÂNCIA DE UM PULSAR

III.1 - Introdução

É de importância fundamental para os astrônomos o conhecimento das distâncias dos objetos celestes. Os Pulsars, neste particular, se revelam como objetos de difícil determinação de suas distâncias, e isto porque o conhecimento da dispersão devido ao meio interestelar é ainda muito precário. A dispersão (D) e a latitude galática (b^{II}) são os parametros mais importantes na determinação das distâncias dos Pulsars. A figura 1 mostra a relação entre esses dois parametros.

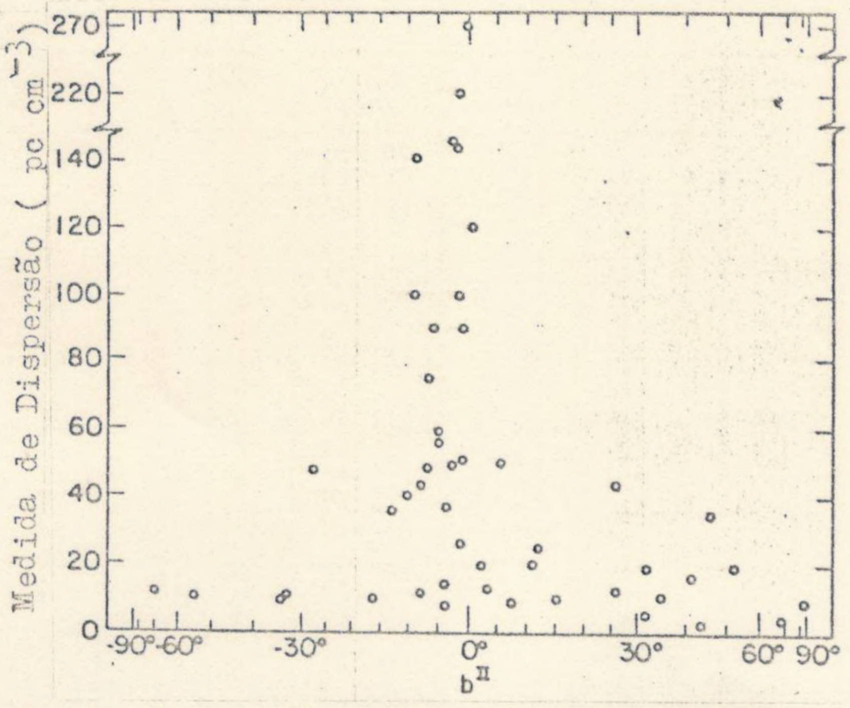


Fig. 1- A relação entre a medida de dispersão e a latitude galática.

III.2 - A Equação para a Dispersão

A equação de Appleton-Hartree fornece a raiz quadrada do índice refrativo complexo em um meio magneto-iônico (RATCLIFFE, 1959). Para o meio interestelar muitos dos termos da equação são desprezíveis e podemos usar a aproximação para a parte real do índice de refração, n , como:

$$n^2 \sim 1 - X/1 \pm Y \quad , \qquad (1)$$

onde

$$X = e^2 n_e / 4\pi^2 \epsilon m^2 = \nu_p^2/\nu^2$$

n_e - densidade de elétrons.

e - carga do elétron.

ϵ_o - permitividade do espaço livre.

m - massa do elétron.

ν - frequência da onda.

ν_p - frequência de plasma.

μ_o - permeabilidade do espaço livre.

H - intensidade do campo magnético.

ν_H - giro-frequência.

Tomando a raiz de n^2 e usando a expansão binomial, aproximamos o índice de refração por

$$n \sim 1 - X/2 \quad , \qquad (2)$$

onde desprezamos os termos de 2ª ordem da expansão binomial quando aplicados ao meio interestelar (Y. TERZIAN, 1970). Contudo, para um pulso de rádio que viaja à velocidade de grupo v_g, o índice refrativo de grupo pode ser escrito como

$$n_g = c/v_g$$

onde

$$v_g = dw/dk \quad , \qquad w = kv,$$

onde k é o número de onda.

$$v_g = v + k(dv/dk)$$

mas sabemos que

$$dv/dk = (dv/dw)(dw/dk) = v_g(dv/dw),$$

usando

$$v = c/n$$

temos

$$dv/dw = -(c/n^2)\, dn/dw$$

portanto

$$v_g = -((v_g kc)/n^2)(dn/dw).$$

Resolvendo para v_g, obtemos

$$v_g + (v_g ck/n^2)(dn/dw) = v \ ,$$

ou

$$v_g(1+(ck/n^2)(dn/dw)) = v \ ,$$

e assim,

$$v_g = v/(1+(ck/n^2)(dn/dw)).$$

Mas $k = w/v = wn/c$, e então

$$v_g = v/(1+(w/n)(dn/dw)),$$

ou

$$v_g = c/(n+ w(dn/dw)) \ ,$$

donde

$$n_g = n + w(dn/dw) \ , \qquad (3)$$

onde c é a velocidade da luz, $w = 2\pi\nu$ e $k = 2\pi/\lambda$, λ sendo o comprimento de onda. Usando as equações (1),(2) e (3), obtém-se

$$n \sim 1 - (\nu_p^2/2\nu^2) \sim 1 -(\nu_p^2 4\pi^2/2w^2) \ ,$$

ou

$$n \sim 1 - (2\pi^2\nu_p^2/w^2) \ .$$

Mas,

$$dn/dw = 4\pi^2\nu_p^2/w^3$$

então,

$$n_g = 1 - (2\pi^2\nu_p^2/w^2) + (4\pi^2\nu_p^2/w^2) \ ,$$

donde

$$n_g = 1 + (\nu_p^2/2\nu^2). \qquad (4)$$

A variação no tempo de trânsito das ondas de rádio pode ser escrita como (Y. TERZIAN, 1970)

$$t = \left(\int_0^s (n_g - 1)\,ds \right)/c \,. \qquad (5)$$

Substituindo (4) em (5), temos

$$t = \left(\int_0^s \nu_p^2 \,ds \right)/2c\nu^2 \,. \qquad (6)$$

Diferenciando (6) com relação a t, temos

$$(d\nu/dt)_{pulso} = -\,c\nu^3/\int_0^s \nu_p^2 \,ds \,. \qquad (7)$$

A frequência de plasma é uma função da densidade de elétrons, como pode ser visto da equação (1) e, portanto, informações observacionais sobre a variação $(d\nu/dt)$, podem determinar o número total de elétrons por cm^2 ao longo de uma linha de visada, para uma fonte pulsante. Na prática contudo, prefere-se usar em lugar de $d\nu/dt$, o tempo de chegada entre duas frequências ν_1 e ν_2.

Integrando (7) e calculando as constantes para a frequência de plasma

$$\nu_p^2 = e^2 n_e/4\pi^2 \epsilon_0 m \,,$$

vem

$$d\nu/dt = -\,c\nu^3/\int_0^s (e^2 n_e/4\pi^2 \epsilon_0 m)\,ds \,.$$

Sabendo que $4\pi^2\epsilon_0 m/e^2 = 1{,}24\mathrm{x}10^4$, escrevemos

$$\left(\int_0^s n_e \,ds \right)/(d\nu/dt) = -4\pi^2 \epsilon_0 m c\nu^3/e^2 \,,$$

ou

$$\left(\int_0^s n_e \,ds \right)\left(\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu/\nu^3 \right) = -\,1{,}24\mathrm{x}10^4\, c \int_{t_1}^{t_2} dt \,,$$

ou ainda

$$\left(\int_0^s n_e \,ds \right)\left((1/\nu_1^2)-(1/\nu_2^2)\right) = 1{,}24\mathrm{x}10^4\, c(t_1 - t_2) \,,$$

e assim

$$\int_0^s n_e \,ds = 1{,}24\mathrm{x}10^4\, c(t_1 - t_2)/\left((1/\nu_1^2)-(1/\nu_2^2)\right) \,. \qquad (8)$$

A dispersão é fato fundamental na estimativa das distâncias dos Pulsars, o que tem dificultado a pesquisa de Pulsars em outras galáxias.

De grande importância cosmológica é o conhecimento da densidade intergalática. A descoberta de Pulsars em outras galáxias pode fornecer informações diretas sobre o meio intergalático por sua contribuição para a dispersão de tais Pulsars. No entanto, tal contribuição deve ser baixa devido à pequena densidade intergalática em comparação à densidade galática.

Devido à dispersão ser usada para a determinação, de distâncias dos Pulsars e densidade de elétrons no meio interestelar, recentes trabalhos têm sido voltados para a obtenção de resultados mais acurados da dispersão. Davidson (1969) e Terzian (1972) concluíram de estudos estatísticos da dispersão, que a densidade média de elétrons no meio interestelar é aproximadamente 0,03-0,04 cm^{-3}. Contudo, a densidade interestelar na direção do centro galático deve ser aproximadamente 0,1 cm^{-3} (Y. TERZIAN, 1976) e nas regiões entre os braços espirais e em algumas regiões do anticentro deve ser aproximadamente 0,01 cm^{-3}. Davidson, Terzian, Prentice e Ter Haar, (1969), têm sugerido que as determinações de distâncias dos Pulsars, baseadas no conhecimento da densidade média de elétrons no meio interestelar, não são realísticas, visto que cada direção deve ser considerada separadamente, tendo em vista a anisotropia na distribuição de densidade do meio.

Recentes dados têm mostrado que 21 Pulsars têm dispersão menor ou igual a 20 $cm^{-3}pc$ (Y. TERZIAN, 1976) e muitos desses Pulsars estão à distâncias menores que 1 Kpc do Sol. As menores dispersões são da ordem de 3 $cm^{-3}pc$. Vinte e oito Pulsars têm dispersões maiores ou igual a 200 $cm^{-3}pc$, e estão próximos ao plano galático, com b^{II} menor ou igual a $\pm 1,4°$. A maior dispersão observada é devido ao Pulsar PSR 1641-45 com 450 $cm^{-3}pc$. A figura 1 mostra a distribuição dos Pulsars em coordenadas galáticas e indica que as mais altas dispersões são normalmente vistas perto do plano galático.

Para melhor interpretarmos o efeito da dispersão, decomponhamo-la em 3 componentes :

$$D_x = D \operatorname{sen} l \cos b \ ,$$

$$D_y = -D \cos l \cos b \ ,$$

$$D_z = D \operatorname{sen} b,$$

a fim de que possamos ter uma idéia mais concreta da distribuição espacial. Assim, temos

$$D^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 \ .$$

Se agora tomarmos D e b como dispersão e latitude galática do Pulsar, e se supusermos que $n_e = n_e(z)$, teremos

$$D_z = \int_{z_\odot}^{z_p} n_e(z)\, dz \qquad ,$$

onde z_p é a distância do Pulsar ao plano galático e $z_\odot$ é nossa própria distância do plano galático. Dos dados fornecidos por 144 Pulsars, a relação entre a dispersão e o número de Pulsars, indica que os elétrons livres se estendem a maiores distâncias do plano galático do que os Pulsars.

IV- REPRESENTAÇÃO GEODÉSICA DE ESPAÇOS FÍSICOS

IV.1 - Introdução

Este capítulo é dedicado a apresentação de uma formulação teórica dos aspectos físicos ligados à polarização. Tal característica será explicitamente indicada no decorrer deste trabalho, portanto, nenhum detalhamento profundo será feito nesta introdução. É importante frisarmos que a estrutura da formulação é semi-empírica ou seja, existem fatos os quais são justificados apenas pela sua aplicabilidade como método eficaz na solução de algum problema.

Em face a essas características, este modêlo pretende acima de tudo estabelecer uma linha adequada e firme de apresentação e estudo de sistemas físicos através de geometrizações de grandezas físicas. Partindo então de algumas idéias simples, justificadas de maneira clara mas não aprofundada, este trabalho se propõe a encontrar um meio formal (mas não rigoroso) de se estudar a polarização através do espaço gerado pelo tensor dielétrico, o qual será definido no próximo ítem, considerando-o como tensor métrico, cuja definição também se segue, associado a um certo sistema de coordenadas.

IV.2 - O Tensor Dielétrico

A estrêla de neutron será considerada como um meio, constituído de um plasma neutro e esta neutralidade é uma das propriedades mais importantes do plasma. Além disto o plasma é considerado frio no sentido de que a potência eletromagnética gerada pelo processo Bremsstrahlung térmico é baixa. Assim o tensor dielétrico para um tal plasma, sujeito a um campo magnético uniforme pode ser escrito como (Stix, 1962):

$$K = \begin{Vmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{Vmatrix}$$

onde

$$S = (1/2)(R + L) \quad , \quad D = (1/2)(R - L) \quad ,$$

e

$$R = 1 - \sum_K (\pi_k^2 / w^2)(w/(w+\epsilon_k\Omega_k)) \quad ,$$

$$L = 1 - \sum_K (\pi_k^2 / w^2)(w/(w-\epsilon_k\Omega_k)) \quad ,$$

$$P = 1 - \sum_K (\pi_k^2 / w^2) \quad ,$$

onde

$$\pi_k^2 = 4\pi n_k Z_k^2 e^2/m_k \quad ,$$

é a frequência de plasma para as partículas do tipo k, e

$$\Omega_k = \left| Z_k eB_o/m_k c \right| \quad ,$$

é a frequência de cíclotron para as partículas do tipo k.

Valores típicos destas quantidades pertinentes a um estrêla de neutron são:

$$\pi_e = 10^{16}\text{Hz} \ , \quad \pi_i = 10^{14}\text{Hz} \quad , \quad \Omega_e = 10^{19}\text{Hz} \quad \text{e} \quad \Omega_i = 10^{16}\text{Hz}.$$

O tensor dielétrico é adimensional e rigorosamente envolve integrais sobre espaço e tempo, mas através de uma análise de Fourier, envolvendo suas transformadas, podemos trabalhar somente com expressões algébricas (Stix, 1962). Para duas componentes (elétrons e íons), temos:

$$R = 1 - (\pi_e^2/w^2)(w/(w-\Omega_e)) - (\pi_i^2/w^2)(w/(w+\Omega_i)) \ ,$$

$$L = 1 - (\pi_e^2/w^2)(w/(w+\Omega_e)) - (\pi_i^2/w^2)(w/(w-\Omega_i)) \ ,$$

e

$$P = 1 - (\pi_e^2/w^2) - (\pi_i^2/w^2) \ .$$

Tendo detalhado a estrutura algébrica do tensor dielétrico, passaremos a considerar a maneira pela qual ele pode ser manipulado em termos da métrica de um bem definido espaço. Para tanto examinaremos no próximo ítem o conceito de tensor métrico e a seguir o correlacionaremos ao tensor dielétrico.

IV.3 - O Tensor Métrico

Seja um conjunto de coordenadas x^i. O índice i será tomado variando de 1 a n e a convenção do somatório de Einstein será adotada por todo o decorrer deste trabalho.

Define-se a distância infinitesimal ds entre pontos adjacentes cujas coordenadas em qualquer sistema são x^i e x^i+dx^i, pela relação

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j \, , \qquad (1)$$

onde os coeficientes g_{ij} são funções das coordenadas x^i. A forma diferencial no segundo membro de (1) é chamada uma métrica Riemanniana, e um espaço que é caracterizado por uma tal métrica é denominado um espaço de Riemannian. Já que os dx^i são componentes de um vetor contravariante e a quantidade ds^2 um invariante escalar, as funções g_{ij} devem ser as componentes de um tensor covariante de 2ª ordem. O conjunto $\{x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n\}$ pode ser interpretado como um ponto do espaço n-dimensional V_n, ou seja, cada n-upla define um ponto em V_n. A totalidade dos pontos, cujas coordenadas são expressas como funções de k parametros independentes, é chamada uma variedade ou subespaço de V_n de k dimensões e é denotado por V_k. Se $k = n-1$, V_k é chamado uma hipersuperfície de V_n.

Seja agora um V_n referido por x^j. Para um certo valor fixo i as hipersuperfícies $x^i=$ const. formam uma família de hipersuperfícies coordenadas. Cada uma destas é um subespaço de V_n de n-1 dimensões.

Introduziremos agora um conceito que será de muita importância quando da formação das equações diferenciais das geodésicas,

$$\delta S = \int_A^B \delta \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = 0$$

a serem obtidas posteriormente. Se em um V_n existem n famílias de hipersuperfícies, tal que em cada ponto cada hipersuperfície é ortogonal às n-1 hipersuperfícies das outras famílias, então as hipersuperfícies são ditas formarem um sistema de hipersuperfícies n-uplamente ortogonais. Pode se demonstrado que se as hipersuperfícies coordenadas formam um tal sistema, segue-se que

$$g^{ij} = 0 \quad , \qquad (2)$$

e nenhuma das quantidades g^{ii} são iguais a zero. Portanto

$$g_{ij} = 0 \quad ,$$

enquanto que nenhuma das quantidades g_{ii} são iguais a zero. Assim, quando as hipersuperfícies coordenadas constituem um sistema n-uplamente ortogonal, a forma fundamental

$$\phi = g_{ij} dx^i dx^j \quad ,$$

se reduz a

$$\phi = g_{ii}(dx^i)^2 \quad , \qquad (3)$$

e inversamente, quando a forma fundamental é dada por (3), as relações (2) são estabelecidas, e as hipersuperfícies coordenadas formam um sistema n-uplamente ortogonal. Quando as hipersuperfícies coordenadas formam um tal sistema e se i, j e k são diferentes, podemos mostrar que os símbolos de Christoffel de primeira e segunda espécies reduzem-se aos seguintes casos particulares:

$$[i,jk] = 0 \ , \quad [i,ij] = -[j,ii] = (1/2)(\partial g_{ii}/\partial x^j) \quad ,$$

$$\begin{Bmatrix} i \\ j\ k \end{Bmatrix} = 0 \ , \quad \begin{Bmatrix} j \\ i\ i \end{Bmatrix} = (-1/2g_{jj})(\partial g_{ii}/\partial x^j) \quad ,$$

$$\begin{Bmatrix} i \\ i\ j \end{Bmatrix} = (1/2)(\partial \log g_{ii}/\partial x^j) \ , \quad \begin{Bmatrix} i \\ i\ i \end{Bmatrix} = (1/2)(\partial \log g_{ii}/\partial x^i) \ ,$$

$$[i,ii] = (1/2)(\partial g_{ii}/\partial x^i) \quad .$$

Devido aos fatos expostos até agora tomaremos o tensor dielétrico como o tensor métrico do espaço cujas coordenadas devem ser tiradas do conjunto $A=\left\{\pi_i, \pi_e, \Omega_i, \Omega_e, w\right\}$. O problema da escolha das variáveis mais significativas será tratado adiante; agora no entanto, mostraremos que para o tensor dielétrico K completo, as equações diferenciais das geodésicas, se tornam intratáveis do ponto de vista da solução analítica. Para melhor vermos este fato, consideremos a equação diferencial citada acima

$$\frac{d^2x^\ell}{ds^2} + \left\{ {\ell \atop j\ k} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \quad . \qquad (4)$$

Já que o tensor dielétrico, sob o ponto de vista estrutural, não forma um sistema de hipersuperfícies n-uplamente ortogonal, devemos tomar o somatório implícito no símbolo de Christoffel de primeira espécie, o que faz com que a equação se estenda não só no número de termos mas também no grau de dificuldade quanto a solução (até mesmo numericamente). Sendo assim a escolha de um subespaço que ainda seja significativo do ponto de vista das informações geométricas, parece uma boa alternativa em face ao problema, mesmo porque os resultados obtidos podem nos fornecer uma melhor posição quanto a resolução do problema para o espaço completo K. Então, tomaremos o subespaço que será indicado por K_{ab}.

$$K_{ab} = \begin{Vmatrix} S & 0 \\ 0 & P \end{Vmatrix} \quad .$$

Quando da definição do tensor métrico ficou explícito o fato de que o número de variáveis estabelece o tamanho da matriz que representa o tensor e vice-versa. Logo se o tensor tem as componentes

$$K_{11} = S \ , \ K_{12}=K_{21}= 0 \ , \ K_{22}= P$$

então só podemos ter duas variáveis independentes. Portanto do conjunto de variáveis, A, devemos escolher apenas duas variáveis que serão tomadas para a estrutura do problema ser consistente. Estabelecemos então o critério que se segue. Tomaremos a função determinante

$$f : M_{2,2} \longrightarrow R \ ,$$

e faremos combinações de valores das variáveis, duas a duas, obtendo para cada par um valor da função determinante. Assim fazendo para tôdas as possíveis combinações, dois a dois, do conjunto A, poderemos escolher as variáveis independentes baseados no comportamento gráfico das funções assim obtidas. Este ponto se fará mais claro na seção seguinte onde discutiremos alguns aspectos da análise feita sobre os gráficos obtidos.

No ítem que se segue, não só uma análise dos gráficos obtidos é feita mas também uma estimativa qualitativa dos êrros cometidos é fornecida.

IV.4 - Análise Gráfica para a escolha de Variáveis

Nesta fase, alguma arbitrariedade não pode ser evitada, visto que uma análise baseada num comportamento gráfico introduz critérios subjetivos, que só podem ser justificados rigorosamente quando postos em prática.

IV.4.1 - O Determinante como uma Transformada

Consideremos novamente o tensor K_{ab}.

$$K_{ab} = \begin{Vmatrix} S & 0 \\ 0 & P \end{Vmatrix} ,$$

onde S e P são dados por expressões algébricas obtidas através da análise de Fourier,Bekefi(1966). Seja então, S o resultado de uma transformada de Fourier sobre uma certa função, o mesmo acontecendo para P. Assim, o determinante é o produto de duas transformadas e este produto é matematicamente a transformada da convolução das funções sobre as quais a transformada atua. Assim sendo uma análise gráfica baseada neste conhecimento e na simulação de variações dos parametros ($\pi_i,\pi_e,\Omega_i,\Omega_e$), pode melhor indicar as características das variáveis, vistas agora não apenas como um conjunto de variáveis, mas também como representativas de um estado fisico do meio. Assim, quando denotamos o determinante como função teste para o conjunto de variáveis, apenas introduzimos uma forma comum de aplicarmos este conjunto a uma forma analítica fixa.

IV.4.2 - Simulando Estados Físicos

O processo de simulação foi feito da seguinte maneira: inicializamos o conjunto A com valores típicos de uma estrêla de neutron, sendo w escolhido igual a 10 GHz, por se tratar de uma frequência típica de observação. Faremos variar todos os elementos de A, exceto w, de dois em dois, ou seja, fixaremos dois e faremos combinações dos outros dois. Fixaremos agora o fato que quando citado um certo par de variáveis, por exemplo (Ω_i, Ω_e), a primeira variável pertence à 1ª declaração DO e a segunda variável à segunda declaração DO. Um trecho do programa FORTRAN para variações de Ω_e e Ω_i é dado abaixo.

```
-----------
DO 12 I=1,5
WH=WH+100
DO 11 J=1,100
N=N+1
WMH=WMH+100
-----------
-----------
```

Com este procedimento estamos gerando os possíveis estados físicos que pode assumir o meio de uma estrêla de neutron. O conjunto de todas as quíntuplas $(\Pi_i, \Pi_e, \Omega_i, \Omega_e, w)$, para w fixo, no nosso caso fornecerá um espaço de "fase" para uma certa frequência de observação. Teríamos então, para um conjunto de w fixos, um conjunto de possíveis comportamentos físicos do meio, ou seja, dado que observamos uma fonte numa certa frequência w_o, o conjunto de todas as quádruplas nos forneceria os possíveis estados físicos que o meio poderia assumir. Todos os gráficos relacionam o determinante com os possíveis pares de $(\Pi_i, \Pi_e, \Omega_i, \Omega_e)$ para uma certa frequência de observação. Faremos agora então, um breve comentário sobre cada gráfico, para então concluírmos a escolha de nossas variáveis.

IV.4.3 - Análise Gráfica

Este comentário tem por objetivo apenas ressaltar certas características que podem ser fundamentais para uma tal análise. Os pares serão citados na ordem em que participam no programa FORTRAN, como referi anteriormente.

a) (π_i, Ω_i) - Nota-se pela figura 1 que o comportamento linear é imposto pelas variações de Ω_i, enquanto as descontinuidades são provocadas pelas variações de $\pi_i (10^5)$. Esta característica de π_i pode estar associada à natureza das partículas que ela representa.

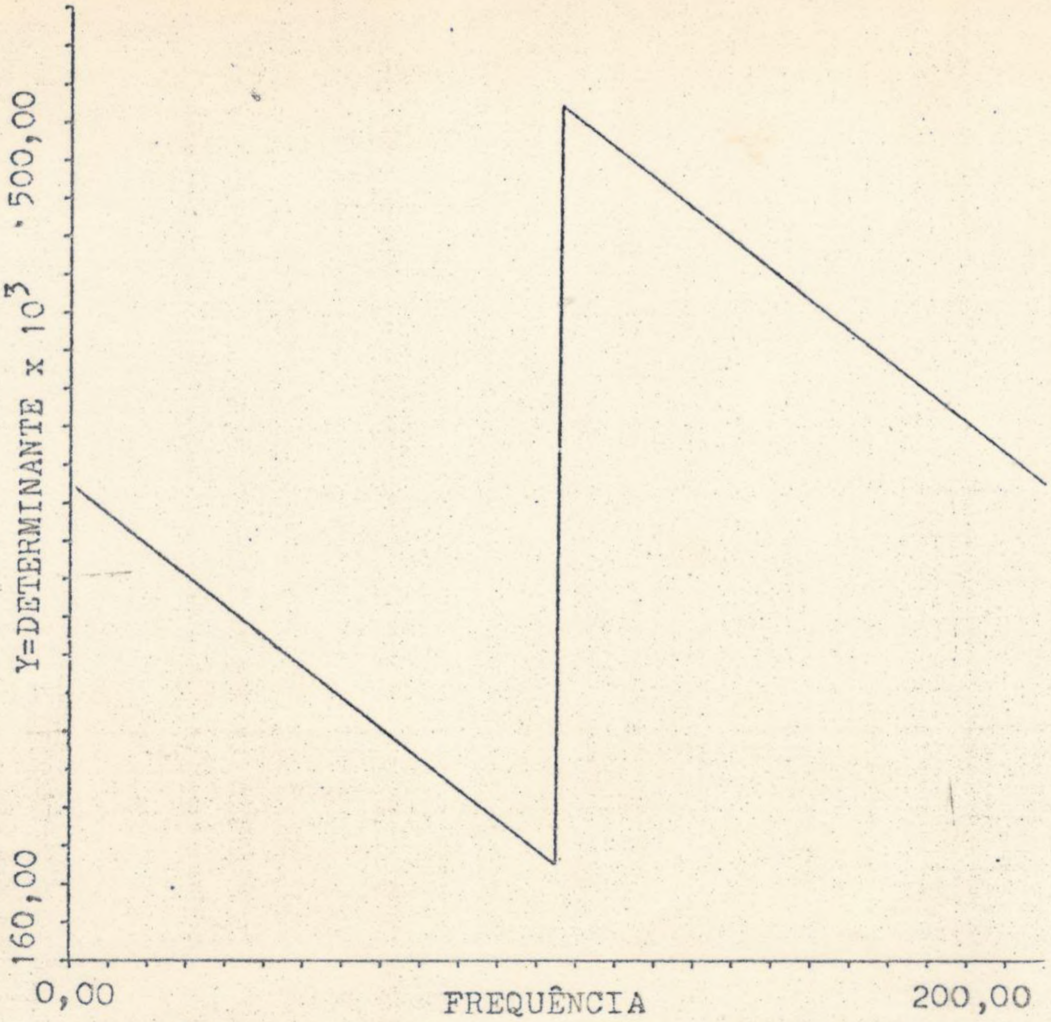
b) (Ω_e, Ω_i) - Estas frequências respondem às variações em frequência muito lentamente, ou seja Ω_i é feita variar de 10^4 GHz para uma variação de 10^2 GHz de Ω_e e, no entanto, seu comportamento é linear, o que nos indica uma lenta variação no determinante (figura2). Outro fato importante é que pequenas variações em Ω_e, como está feita para cada ciclo da declaração DO, não alteram significativamente a função determinante. Este comportamento não indica funcionalidade mas mostra a resposta deste conjunto de variáveis à pequenas flutuações.

c) (π_e, Ω_i) - Neste também a linearidade se nos apresenta, mas, no entanto, a ordem de grandeza da variação para $\pi_e (10^8)$ é muito grande em relação à variação de π_i. Esta relação entre as ordens de grandeza das variações de π_e e π_i pode servir como indicador forte na escolha das variáveis. A figura 3 mostra as variações de π_e.

Nesta altura é importante esclarescer que os gráficos devem ser considerados sempre à luz de seus valores numéricos da imagem, pois devido à diferença na ordem de grandeza das variações das quantidades envolvidas em todos os gráficos, não é possível estabelecer uma escala que possa mostrar todas as flutuações num quadro bem definido.

d) (π_i, π_e) - Este par mostra variações bastante acentuadas embora linear, sendo que o processo de discretização de π_e é totalmente anulado pelo de π_i, o qual é muito mais significativo. Este último resul

FIGURA 1



- O gráfico acima ilustra o comportamento da função teste para o par (π_i,Ω_i).-

FIGURA 2

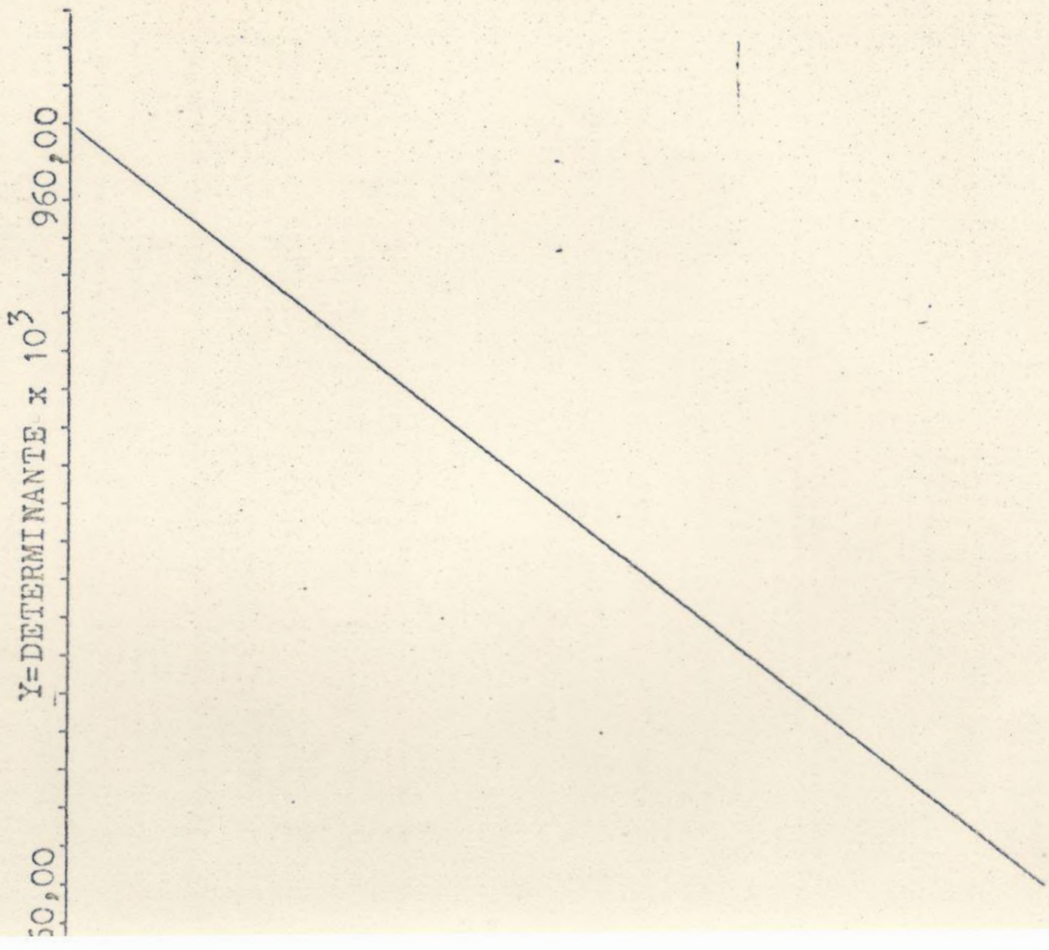
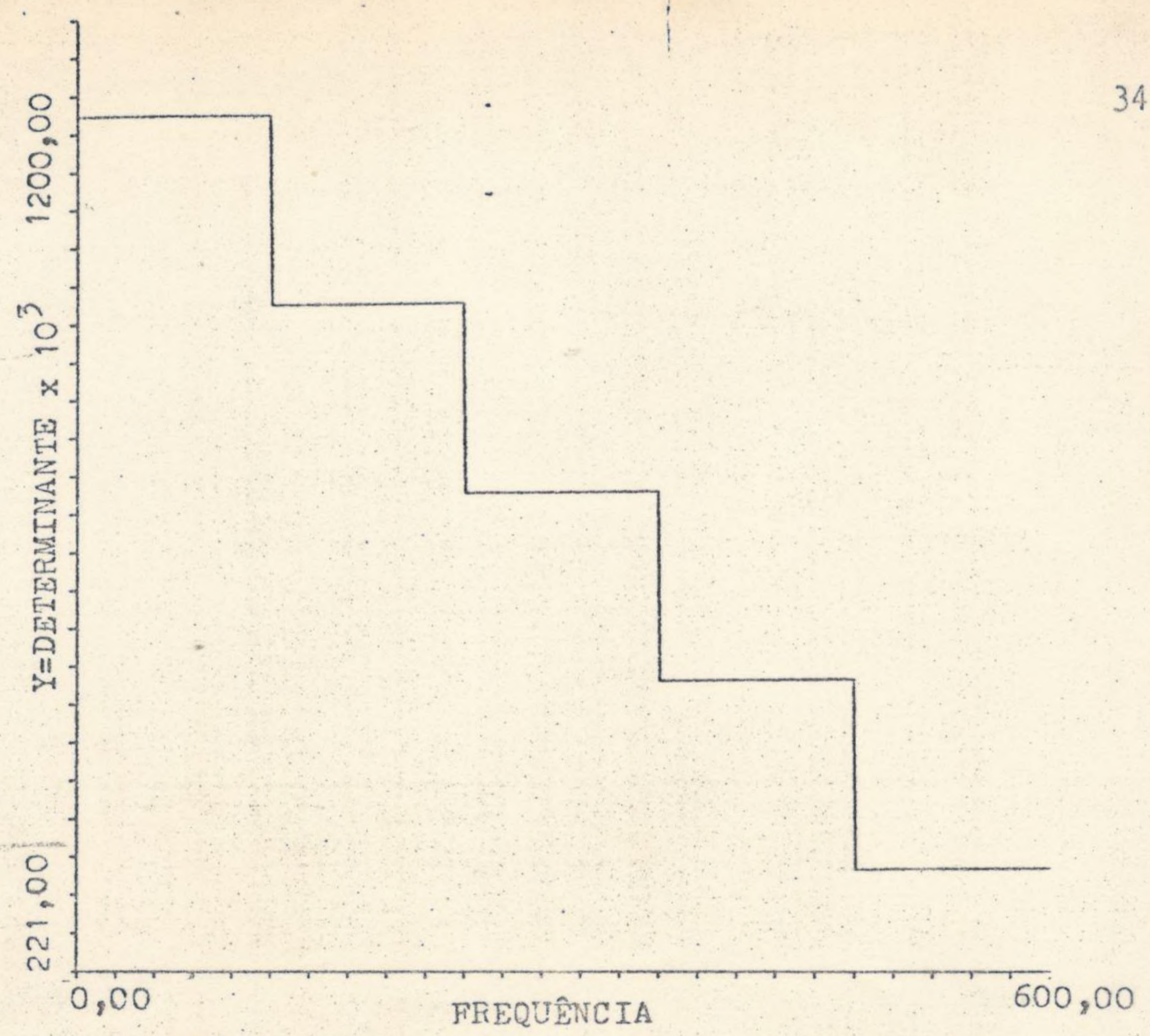
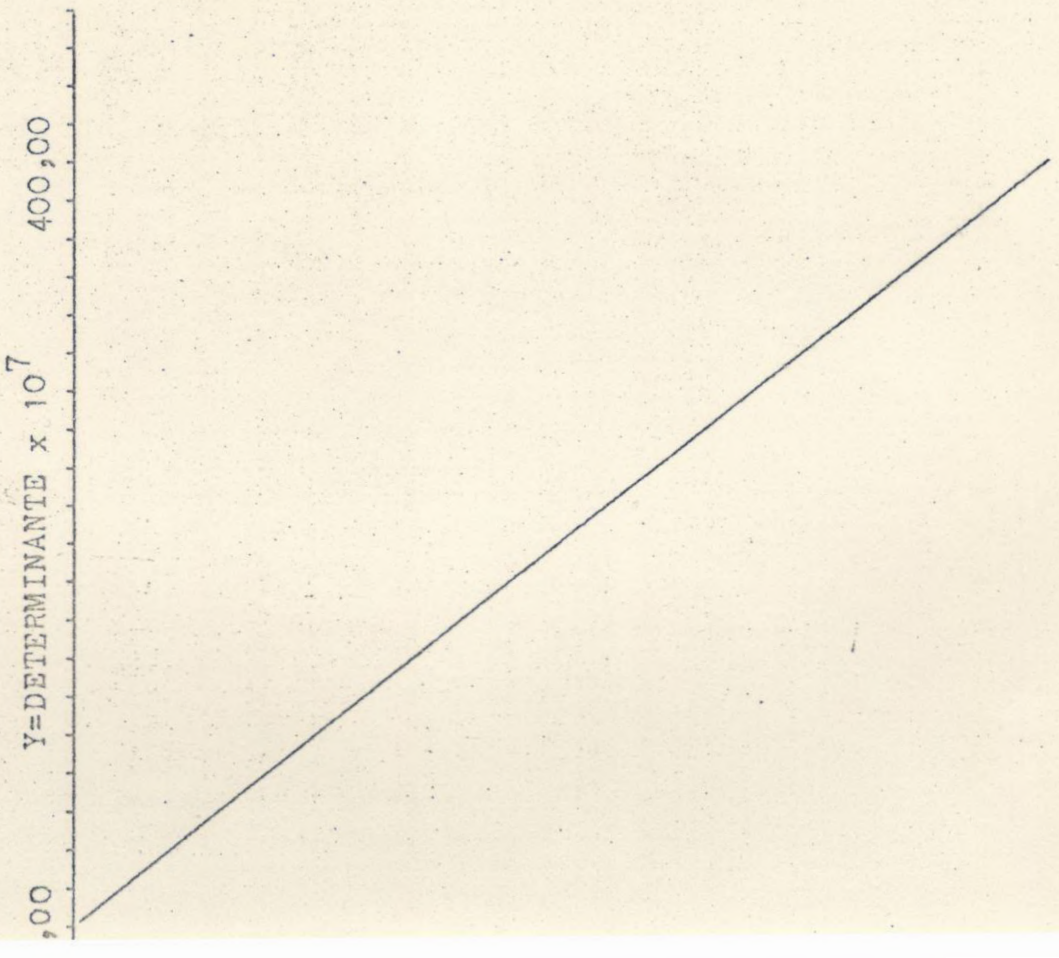


FIGURA 5



- O gráfico acima mostra o comportamento da função teste para o par (π_e, Ω_i). -

FIGURA 4



tado decorre do fato que no geral Π_e é feita variar cerca de 0,005% de seu valor típico para uma estrêla de neutron, enquanto Π_i varia cerca de 10% do seu valor típico. Isto deve ser levado em conta quando da escolha das variáveis, ou seja, seu nível de variação e sua resposta a este nível. A figura 4 mostra o comportamento do determinante para este par.

e) (Ω_i, Π_e) - Estas variações apresentam uma taxa de variação constante e da ordem de 8×10^8, a cada incremento de 100 GHz em Π_e. A variação de 100 GHz em Ω_i não alterou significativamente a função teste. Este gráfico não é apresentado, visto que seu comportamento segue o de outros já apresentados, apenas que sua linearidade não é alterada por nenhum salto descontínuo. Para termos uma ordem de grandeza da variação da função teste, depois do primeiro ciclo do DO (o mais externo) ser cumprido, a função variou seu valor de - 1000221010238,80 para o valor -1002142146974,88.

f) (Π_e, Π_i) - A listagem de valores mostra a mesmo comportamento mostrado na figura 4, diferindo apenas em ordem de grandeza, ou seja suas variações são menores.

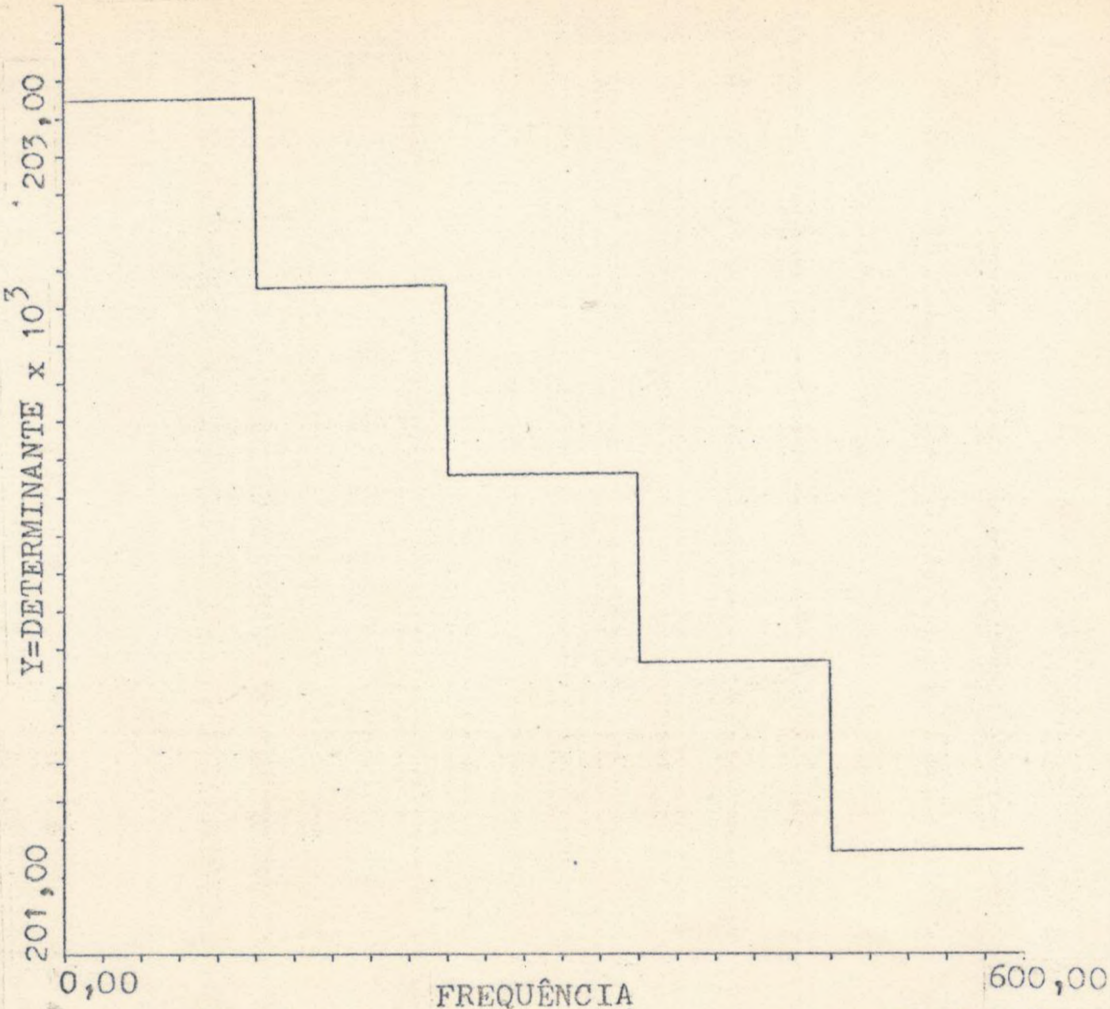
g) (Π_i, Ω_e) - A figura 5 mostra o efeito das pequenas variações sobre este par, ou melhor, ao longo do patamar a função teste mostra-se constante a menos de uma flutuação que não representa nada de importante em termos quantitativos.

h) (Ω_e, Π_e) - Como nos outros casos onde aparecem Π_e, as variações ponto a ponto são grandes e evidenciam o caráter variacional de Π_e em relação às outras variáveis.

i) (Π_e, Ω_e) - O gráfico mostrado na figura 3 bem reflete o comportamento deste par e seus valores numéricos diferem por uma quantidade não significativa. A diferença entre os patamares ainda permanece a mesma, o que caracteriza finalmente a variável Π_e.

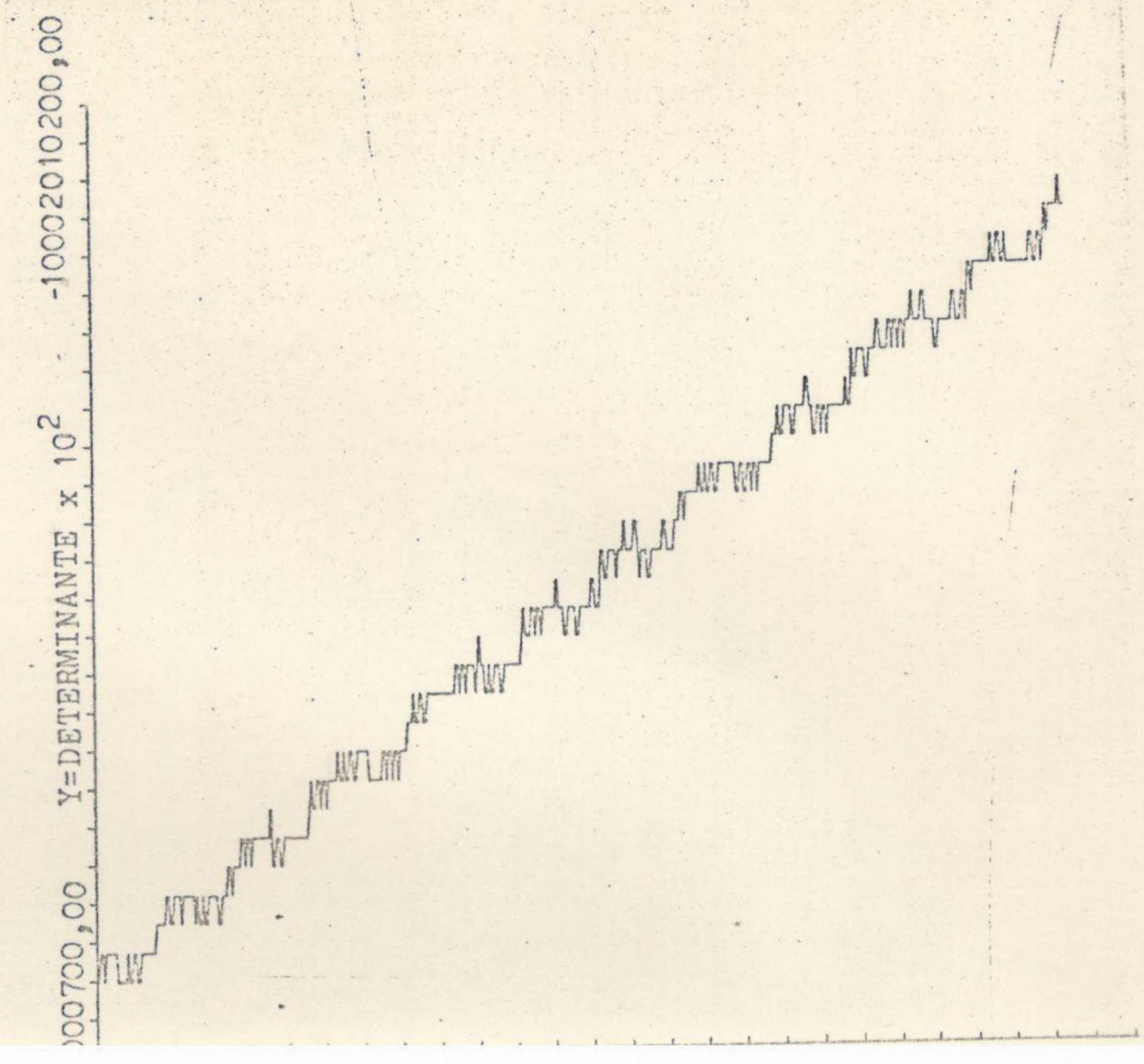
IV.4.4 - <u>Êrros Computacionais</u>

FIGURA 5



- O gráfico acima mostra o comportamento da função teste para o par (π_i, Ω_e). -

IGURA 6



Para que tenhamos uma idéia do grau de confiabilidade do método computacional empregado, analisemos os dados obtidos segundo dois formatos usados em FORTRAN.

a) Real - Para o par (Ω_e, Ω_i) o método descrito anteriormente foi realizado com as quantidades numéricas sendo expressas como números reais, e o gráfico obtido é mostrado na figura 6.

b) Precisão Dupla - Para o mesmo par de variáveis a fig. 2 ilustra a função determinante.

Apenas o comportamento gráfico é o bastante para mostrar-nos o êrro cometido ao trabalharmos com quantidades reais. O caráter oscilatório irregular evidencia o êrro de arredondamento para os valores típicos usados para as variáveis, para a função teste utilizada e ainda para o algoritmo usado no cálculo do determinante. Assim se faz necessária uma observação referente a precisão obtida nos gráficos contidos neste trabalho. A precisão dupla do sistema B6700 fornece as quantidades numéricas com 24 algarismos, onde então nos baseamos para a presente análise.

O par (π_e, π_i) não apresentou nenhuma alteração significativa no seu comportamento gráfico quando feito em precisão dupla, o que nos indica um certo grau de estabilidade, pelo menos mais acentuado do que para o par (Ω_i, Ω_e).

Nossa escolha voltou-se principalmente para a fato de que o par (π_e, π_i) não só é mais estável em relação ao método computacional, mas também, e principalmente, porque as variações intrínsecas deste par são mais significativas. Portanto, tal característica pode revelar-se fundamental na análise última das soluções das equações geodésicas para π_e e π_i.

IV.5 - Às Equações Geodésicas

Dado então o sistema de coordenadas formado por π_e e π_i, podemos escrever as equações diferenciais que descrevem as geodésicas, bastando para isso desenvolvermos a equação (4). Assim fazendo, obtemos facilmen- o par de equações:

$$\frac{d^2\pi_e}{ds^2} + \left\{ {1 \atop 1\ 1} \right\} \left[\frac{d\pi_e}{ds} \right]^2 + 2 \left\{ {1 \atop 1\ 2} \right\} \frac{d\pi_e}{ds} \frac{d\pi_i}{ds} + \left\{ {1 \atop 2\ 2} \right\} \left[\frac{d\pi_i}{ds} \right]^2 = 0 \ . \qquad (5)$$

e

$$\frac{d^2\pi_i}{ds^2} + \left\{ {2 \atop 1\ 1} \right\} \left[\frac{d\pi_e}{ds} \right]^2 + 2 \left\{ {2 \atop 1\ 2} \right\} \frac{d\pi_i}{ds} \frac{d\pi_e}{ds} + \left\{ {2 \atop 2\ 2} \right\} \left[\frac{d\pi_i}{ds} \right]^2 = 0 \ . \qquad (6)$$

Tomaremos inicialmente a equação (5) e desenvolvamos os seus termos. Para os símbolos de Christoffel temos:

$$\left\{ {1 \atop 1\ 1} \right\} = (1/2g_{11})(\partial g_{11}/\partial \pi_e) \quad ,$$

$$\left\{ {1 \atop 1\ 2} \right\} = (1/2g_{11})(\partial g_{11}/\partial \pi_i) \quad ,$$

e

$$\left\{ {1 \atop 2\ 2} \right\} = -(1/2g_{11})(\partial g_{22}/\partial \pi_e) \quad .$$

Temos ainda que os elementos do tensor K_{ab} são dados pelas seguintes expressões:

$$g_{11} = 1 - (\pi_e)^2/(w^2-\Omega_e^{\ 2}) - (\pi_i)^2/(w^2-\Omega_i^{\ 2}) \quad ,$$

e

$$g_{22} = 1 - (\pi_e)^2/w^2 - (\pi_i)^2/w^2 \quad ,$$

onde tomaremos, por simplicidade,

$$K_o = 1/(w^2-\Omega_e^{\ 2}) \ , \ K_1 = 1/(w^2-\Omega_i^{\ 2}) \ , \ K_2 = 1/w^2 \ .$$

Assim, obtemos as derivadas necessárias para os símbolos de Christoffel que se seguem:

$$\partial g_{11}/\partial \pi_e = -2K_o\pi_e \quad , \quad \partial g_{11}/\partial \pi_i = -2K_1\pi_i \quad ,$$

$$\partial \varepsilon_{22}/\partial \pi_i = -2K_2\pi_i \quad , \quad \partial \varepsilon_{22}/\partial \pi_e = -2K_2\pi_e \quad .$$

Substituindo as equações anteriores nas equações (5) e (6), obtemos:

$$\varepsilon_{11}\frac{d^2\pi_e}{ds^2} - K_o\pi_e\left[\frac{d\pi_e}{ds}\right]^2 - 2K_1\pi_i\frac{d\pi_i}{ds}\frac{d\pi_e}{ds} + K_2\pi_e\left[\frac{d\pi_i}{ds}\right]^2 = 0 \,, \qquad (7)$$

$$\varepsilon_{22}\frac{d^2\pi_i}{ds^2} + K_1\pi_i\left[\frac{d\pi_e}{ds}\right]^2 - 2K_2\pi_e\frac{d\pi_i}{ds}\frac{d\pi_e}{ds} - K_2\pi_i\left[\frac{d\pi_i}{ds}\right]^2 = 0 \quad . \qquad (8)$$

Multiplicando-se a equação (7) por π_i, a equação (8) por π_e e somando-se membro a membro as equações, obtemos:

$$\varepsilon_{22}\,\pi_e\frac{d^2\pi_i}{ds^2} + \varepsilon_{11}\,\pi_i\frac{d^2\pi_e}{ds^2} + (K_1 - K_o)\pi_i\,\pi_e\left[\frac{d\pi_e}{ds}\right]^2 - (K_2\pi_e^2 + K_1\pi_i^2)x$$

$$x\,\left(\frac{d\pi_i}{ds}\frac{d\pi_e}{ds}\right) = 0 \,.$$

Consideremos agora as funções $F_1(s) = \exp(g(s))$ e $F_2(s) = \exp(h(s))$ e tomemos suas derivadas primeira e segunda. Verificaremos sob que circunstâncias podemos ter $F_1(s)$ e $F_2(s)$ como soluções da equação (9). Substituindo as duas funções e suas derivadas na equação (9), teremos:

$$(1-K_2((\exp(2g(s))+\exp((2h(s)))(\frac{d^2h}{ds^2} + \left[\frac{dh}{ds}\right]^2) + (1-K_o\exp(2g(s))-$$

$$+ K_1\exp(2h(s)))(\frac{d^2g}{ds^2} + \left[\frac{dg}{ds}\right]^2) + (K_1-K_o)(\exp(2g(s))\left[\frac{dg}{ds}\right]^2 -$$

$$+ (K_2\exp(2g(s)) + K_1\exp(2h(s)))\,\frac{dh}{ds}\frac{dg}{ds} = 0 \quad . \qquad (10)$$

Se tomarmos agora ,

$$g(s) = (1/2)\,\mathrm{Ln}(s)^{K_1} \quad , \quad h(s) = (1/2)\,\mathrm{Ln}(s)^{K_o} \quad ,$$

podemos, através do conhecimento das derivadas das funções acima e substituindo na equação (10), reduzir esta à forma abaixo:

$$(1-K_2(\,s^{K_1} + s^{K_o}))((K_o^2)/4)-(K_o/2)) + (1-K_o s^{K_1} - K_1 s^{K_o})(-(K_1^2/4)+$$

$$+ K_1/2 + (K_1-K_o)\,K_1^2\,s^{K_1}/4 \; - (K_2 s^{K_1} + K_1 s^{K_o})\,K_oK_1/4 = 0 \,. \qquad (11)$$

Introduziremos aqui uma particularidade que torna o problema direcionado para o lado aplicado, visando principalmente uma verificação a qual põe em cheque a teoria desenvolvida e os conceitos adotados.

Assim, fixaremos a faixa de frequência de observação a qual nos possibilita resolver a equação diferencial através de processos aproximados que são postos em prática nesta altura, visto que adotamos uma certa função como solução e estamos verificando se esta escolha foi boa ou não. Seja $w = 10^8$ GHz (raio-X). A faixa de frequência onde ainda permanece válida a solução obtida, se estende até o infravermelho próximo, portanto, toda uma família de geodésicas pode ser levantada.

Desenvolvendo cada membro da equação com os valores de K_o, K_1 e K_2, e verificando o valor de toda expressão para uma faixa a mais ampla possível da variável s, podemos tomar F_1 e F_2 como funções que, quantitativamente, satisfazem a equação diferencial que descreve as configurações geodésicas. Portanto,

$$\begin{aligned} \pi_e(s) &= s^{K_1/2} \\ \pi_i(s) &= s^{K_o/2} \quad . \end{aligned} \tag{12}$$

Uma representação mais adequada destas funções pode ser obtida através do uso de uma escala logaritmética e assim, substituindo os valores de K_o e K_1 e fazendo variar a frequência tal que não se estenda além da faixa permitida pela aproximação imposta ao problema, obtemos todas as famílias de geodésicas que descrevem o sistema. A figura (7) mostra a configuração geodésica obtida para as condições do problema.

IV.6 - Conclusões

É importante notar a natureza das funções F_1 e F_2 em relação às soluções gerais da equação (9). F_1 e F_2 não são soluções num sentido exato como estas são interpretadas, embora descrevam numericamente a equação diferencial; no entanto são fortes indicadores das possíveis soluções, as quais deverão ser obtidas de maneira formal e rigorosa. A configuração descrita por F_1 e F_2 mostra a aplicabilidade do tensor métrico definido, não só quantitativamente, mas também qualitativamente. A coerên-

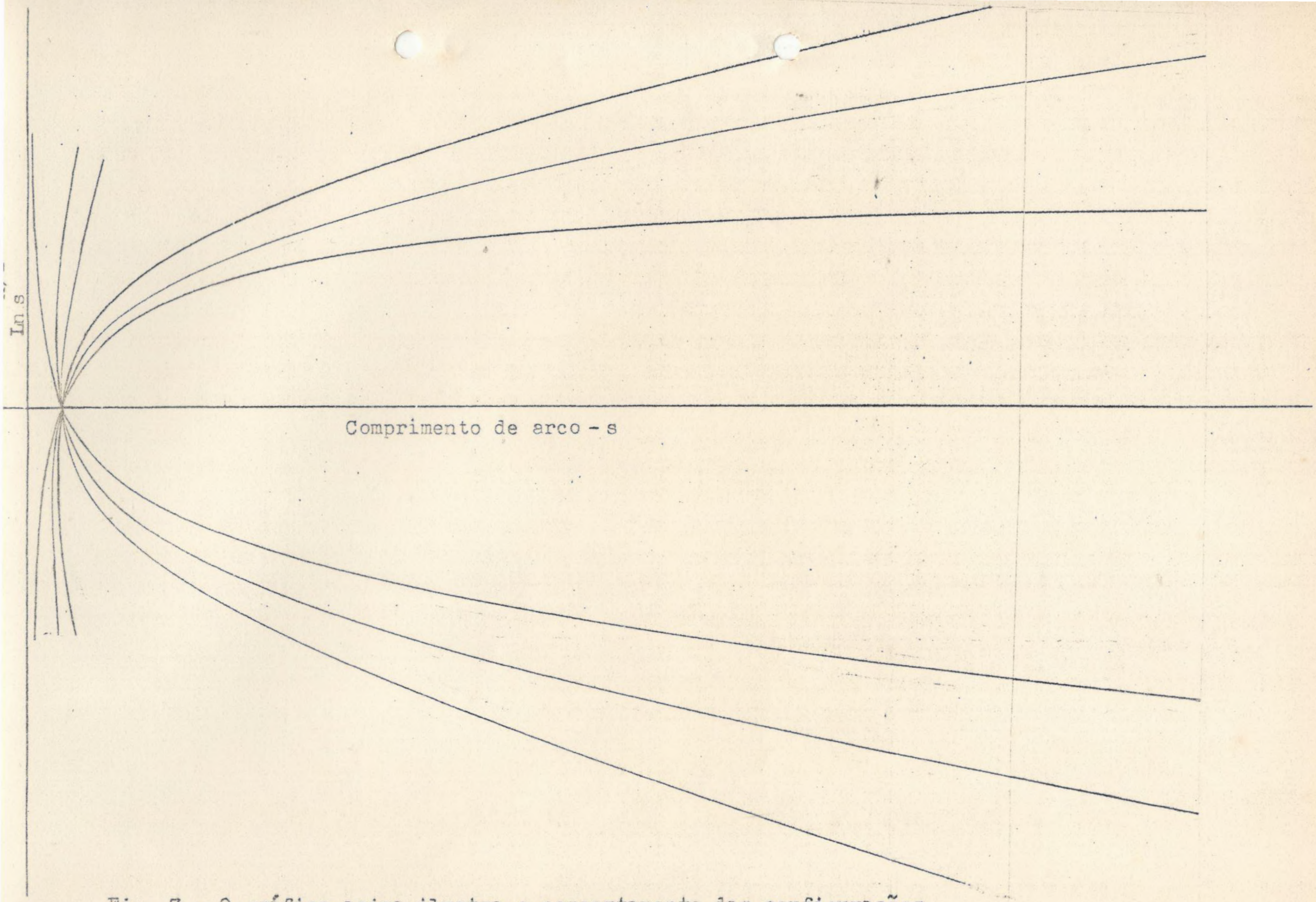


Fig. 7 - O gráfico acima ilustra o comportamento das configurações geodésicas obtidas neste trabalho.

mo aqui apresentado. Uma análise subsequente deve acima de tudo estabelecer funções que sejam soluções da equação (9) e que gerem uma configuração de acordo com os aspectos observacionais conhecidos da fonte . Neste sentido as funções F_1 e F_2 são consideradas fortes indicadores , pois podem estar refletindo a natureza das soluções gerais ou seja funções lentamente crescentes no caso de F_1 e decrescentes no caso de F_2. O estudo de tal comportamento pode inclusive estabelecer uma classe de funções características, que sejam identificadas pela forma da equação diferencial aqui tratada. Assim sendo toda uma análise, baseada no comportamento das soluções em presença de condições reais, deverá ser feita. Permanece também a questão quanto as modificações introduzidas se tomarmos quaisquer outros pares de variáveis em lugar daqueles aqui usados.

V- BIBLIOGRAFIA

1- Chiu,H.-Y. , Pub.A.S.P. 82,486. 1970.

2- Chiu,H.-Y. , in "The Physics of Pulsars", A.M.Lenchek, 1970, eds. (Gordon and Breach, Science publishers), pags 135 a 150.

3- Levi-Civita,T. " The Absolute differential calculus". Trans. by Miss M.Long, Blackie and Son, London,1927.

4- Weatherburn,C.E. , "An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus" , University Press, Cambridge,1963.

5- Brillouin,L. " Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité, Masson et C[ie], Éditeurs,Paris,1960.

6- Stix,T.H., " The theory of plasma waves", McGraw-Hill Book Company , Inc.,New York,1962.

7- Bekefi,G., " Radiation Processes in Plasma ", John Wiley and Sons,Inc.,New York,1966.

8- W.K.H. Panofsky, M. Phillips, " Classical Electricity and Magnetism" , Reading,Mass.: Addison-Wesley, 1962.