



Relatório Técnico

**Núcleo de
Computação Eletrônica**

Análise Numérica do Modelo de Kirchhoff-Carrier para Vibrações de Membranas Elásticas com Fronteira Móvel

**Raquel Defelippo Rodrigues
Mauro Antonio Rincon**

NCE - 13/2001

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Análise Numérica do Modelo de Kirchhoff-Carrier para Vibrações de Membranas Elásticas com Fronteira Móvel

Raquel Defelippo Rodrigues e Mauro Antonio Rincon

Resumo

Neste trabalho, estudamos um modelo de vibrações transversais em membranas elásticas que foi desenvolvido por Medeiros e Ferrel como uma extensão do modelo de Kirchhoff-Carrier, uma vez que leva em conta a troca de tamanho da membrana durante a vibração. O modelo de Medeiros e Ferrel não possui solução analítica, então usamos o Método dos Elementos Finitos para a resolução do modelo no espaço e um Método de Diferenças Central, o Método de Newmark, para a resolução do modelo no tempo e assim obtemos a solução aproximada do problema. Alguns exemplos numéricos são apresentados.

Palavras Chave: Equação de Kirchhoff-Carrier, extremidades móveis, solução numérica

1 Introdução

A descrição matemática para pequenas vibrações transversais de cordas elásticas com extremidades fixas é uma velha questão.

Os primeiros resultados matemáticos para o estudo de pequenas vibrações transversais em cordas elásticas foram obtidos por Taylor em 1713 e informações mais precisas datam de 1743 por D'Alembert e posteriormente por Euler.

O modelo proposto por D'Alembert é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

onde $c^2 = \frac{\tau}{m}$, sendo τ a tensão constante durante a vibração e m a massa da corda.

Para obtermos o modelo de D'Alembert é preciso impor algumas restrições ao problema físico.

Outros modelos de problemas físicos de pequenos deslocamentos verticais em cordas elásticas com extremidades fixas foram propostos por Kirchhoff e Carrier. Sendo o modelo de Kirchhoff-Carrier dado por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{2ml} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

É importante observar que o modelo de D'Alembert não considera os pequenos deslocamentos horizontais aqui considerado. Esse pequeno deslocamento horizontal, no modelo matemático, é representado pelo termo não linear.

Em 1999, Medeiros e Ferrel propuseram em [3] um modelo que é uma extensão do modelo de Kirchhoff-Carrier, pois considera a troca de tamanho das cordas elásticas durante a vibração apresentado por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - L_0}{L_0} + \frac{k}{2m\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

Sendo L_0 o tamanho inicial, τ_0 a tensão inicial, m a massa, k o módulo de Young do material vezes a seção transversal da corda e $u(x, t)$ o deslocamento vertical do ponto x da corda no tempo t . As funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ dão o movimento dos extremos da corda durante a vibração sendo $\alpha(t) < \beta(t)$ e $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$.

Em 2000, Medeiros e Ferrel em [4] estenderam o modelo (3) para o caso bidimensional das membranas elásticas com sua fronteira móvel. O modelo para o caso das membranas elásticas é dado por:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \left[\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{K^2(t) - K_0^2}{K_0^2} + \frac{k}{2m\pi K^2(t)} \int_{\Omega_t} |\nabla u(x, t)|^2 dx \right] \Delta u(x, t) = 0 \quad (4)$$

Sendo Ω_t um domínio circular de raio $K(t)$, τ_0 a tensão inicial, m a massa, $k = \frac{E}{2(1-\sigma)}$ onde E é o módulo de Young do material e σ o coeficiente de Poisson. O deslocamento vertical do ponto $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ da membrana no tempo t é representado por $u(x, t)$.

2 Formulação do problema

O modelo para pequenas vibrações transversais de membranas elásticas com fronteira livre foi apresentado como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[a(t) + b(t) \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 dx \right] \Delta u = 0 \quad (5)$$

onde as funções $a(t)$ e $b(t)$ são dadas por

$$a(t) = \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{mK_0^2} (K^2(t) - K_0^2) \quad (6)$$

$$b(t) = \frac{k}{2m\pi K^2(t)} \quad (7)$$

sendo que $a(t)$, $b(t)$ e o domínio de integração Ω_t , um disco com raio $K(t)$, variáveis com o tempo t . Onde $u = u(\mathbf{x}, t)$ representa o pequeno deslocamento vertical do ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ da membrana Ω_t .

Consideremos uma membrana elástica $\Omega \in \mathbb{R}^2$ de raio unitário e centro na origem, isto é

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\} \quad (8)$$

O domínio de integração Ω_t representa a deformação do disco unitário Ω dada pela função $K(t)$, tal que Ω_t é definido $\forall t > 0$ como sendo:

$$\Omega_t = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \mathbf{x} = K(t)\mathbf{y}, \forall \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega\} \quad (9)$$

Observe que Ω_t , para cada $t \geq 0$, é um disco de raio $K(t)$ e centro na origem. Representamos por Ω_0 o disco $K_0\Omega$ onde $K_0 = K(0)$.

Consideremos o domínio não cilíndrico \hat{Q} do \mathbb{R}^2 definido por

$$\hat{Q} = \bigcup_{0 < t < T} \Omega_t \times \{t\} \quad (10)$$

e sua fronteira lateral \hat{E} definida por

$$\hat{E} = \bigcup_{0 < t < T} \Gamma_t \times \{t\} \quad (11)$$

onde Γ_t denota a fronteira de Ω_t . Supondo que Γ_t e \hat{E} são regulares.

Tomando-se o operador diferencial definido pela função real $u(\mathbf{x}, t)$

$$\hat{L}u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \left[a(t) + b(t) \int_{\Omega_t} |\nabla u(\mathbf{x}, t)|^2 dx \right] \Delta u(\mathbf{x}, t) \quad (12)$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são dados por (6) e (7), respectivamente.

O problema que estudaremos será o de determinar uma função $u(\mathbf{x}, t)$, no espaço das soluções $H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t)$, tal que

$$I = \begin{cases} \hat{L}u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \hat{Q} \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \hat{E} \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}), & \Omega_0 = K_0\Omega \end{cases} \quad (13)$$

as equações (13) formam o que chamaremos de Problema (I), onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

3 Problema equivalente

Trabalhar diretamente com o operador $\hat{L}u(x, t)$, apresentado em (12), origina certas dificuldades devido a natureza variável do domínio de integração Ω_t , dado em (9), com relação ao tempo t , o que torna o Problema (I), (13), difícil de ser solucionado diretamente. Passaremos então a transformar o domínio não cilíndrico \hat{Q} num domínio cilíndrico $Q = \Omega \times (0, T)$, onde Ω é o disco unitário de centro na origem definido em (8). Isso é feito por meio da seguinte transformação:

$$\Lambda : \begin{array}{l} \hat{Q} \rightarrow Q \\ (x, t) \mapsto (y, t) \end{array} \quad (14)$$

onde

$$y = \frac{x}{K(t)} \quad (15)$$

e $K : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2([0, T); \mathbb{R})$ satisfazendo as seguintes condições.

Assume-se que $K(t)$ satisfaz as condições:

$$K \in C^2([0, T[; \mathbb{R}), K(t) \geq K_0 \geq 1$$

$$|K''(t)| \leq C_0 \frac{(K')^2}{K}$$

e $0 \leq K'(t) \leq K_1$ para todo $0 \leq t \leq T$. Onde K_1 satisfaz:

$$K_1^2 \leq \frac{\tau_0 - k}{2m} \quad e$$

$$\Upsilon(C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, K_0, K_1) \leq \frac{\delta}{4} \left(\frac{\tau_0 - k}{2m} \right)$$

com $\tau_0 > k$.

Observação: As constantes C_1, C_2, C_3, C_4 são definidas como

$$C_1 = |v_1|^2 + \frac{\tau_0}{mK_0^2} \|v_0\|^2 + \frac{k}{m\pi K_0^2} \|v_0\|^4;$$

$$\|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2 |\Delta\varphi|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_3 |\Delta v|_{L^2(\Omega)}$$

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|^2 d\Gamma \leq C_4 |\Delta u|$$

O parâmetro $\delta > 0$. A função Υ é definida por:

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \frac{\delta}{4} [C_3(C_2 + C_0 + 2) + 2 + C_0] K_1^2 + \frac{(C_0 + 1)^2 C_4}{4K_0} K_1^2 \\ &+ \frac{2C_2^2(1 + C_0)}{K_0^2} K_1^3 + \frac{4(C_3 + C_2)^2 + (1 + C_0)^2(C_3 + C_2)^2}{\delta K_0^2} \\ &\leq \frac{\delta}{4} \frac{\tau_0 - k}{2m} \end{aligned}$$

Maiores detalhes em [4].

Aplicando a transformação Λ definida em (14) no operador $\hat{L}u(x, t)$, dado em (12), obtemos o operador $Lv(y, t)$.

$$Lv(y, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \bar{a}(t)\Delta v + b_{ij}(y, t)\frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} + c_i(y, t)\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y_i} + e_i(y, t)\frac{\partial v}{\partial y_i} \quad (16)$$

onde

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{K^2} \left(a(t) + b(t) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dy \right) \quad (17)$$

$$b_{ij}(y, t) = \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right) y_i y_j \quad (18)$$

$$c_i(y, t) = -2 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right) y_i \quad (19)$$

$$e_i(y, t) = \left[2 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 - \frac{K''(t)}{K(t)} \right] y_i \quad (20)$$

A transformação Λ dada pela seguinte proposição.

Proposição 1: *O operador $Lv(y, t)$, definido em (16), é obtido a partir do operador $\hat{L}u(x, t)$, definido em (12), por meio da mudança de variável dada pela transformação (14).*

Obtemos assim, em um domínio retangular $Q = \Omega \times (0, T)$, o problema equivalente de determinar no espaço das soluções $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, uma função $v = v(y, t)$, com $y = (y_1, y_2)$, tal que,

$$II = \begin{cases} Lv(y, t) = g(y, t), & (y, t) \in Q \\ v(y, t) = 0, & y \in \hat{E} \\ v(y, 0) = v_0(y), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = v_1(y), & y \in \Omega \end{cases} \quad (21)$$

as equações (21) formam o que chamaremos de Problema equivalente (II).

Em [4], provou-se a existência e unicidade de solução do Problema equivalente (II). Como a transformação Λ , dada em (14), é um isomorfismo então a solução $v(y, t)$ do Problema (II) é transformada na solução $u(x, t)$ do Problema (I).

Por conveniência a análise numérica usando elementos finitos no espaço e diferenças finitas no tempo será baseada no Problema equivalente (II) de domínio cilíndrico, ou seja, determinaremos a solução aproximada do Problema equivalente (II).

4 Método dos Elementos Finitos

Formulação Variacional

Como o Método dos elementos finitos não é aplicável diretamente ao Problema (II), (21), passaremos a construção da formulação variacional.

Seja $D(\Omega)$ o espaço das funções teste, infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω e $w \in D(\Omega)$. Multiplicando a primeira equação do Problema (II), (21), por w e integrando em

$$\Omega = \{(y_1, y_2)/y_1^2 + y_2^2 < 1\}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dy - \int_{\Omega} \bar{a}(t) \Delta v w dy + \int_{\Omega} b_{ij}(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} w dy \\ & + \int_{\Omega} c_i(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y_i} w dy + \int_{\Omega} e_i(y, t) \frac{\partial v}{\partial y_i} w dy = \int_{\Omega} g(y, t) w dy \end{aligned} \quad (22)$$

Método de Galerkin

Consideremos $V_m \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ um subespaço de dimensão finita gerado pelos m primeiros elementos da base do espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, ou seja

$$V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m]$$

onde $[\varphi_i]_{i \in \mathbf{N}}$ é uma base de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Agora passamos a buscar uma solução aproximada $v^h(y, t)$ do Problema (II) no subespaço V_m .

Problema Aproximado

Aproximamos o Problema (II), (21), pelo problema de determinar no espaço das soluções V_m , uma função $v^h = v^h(y, t)$, com $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, tal que,

$$III = \begin{cases} Lv^h(\mathbf{y}, t) = g(\mathbf{y}, t) & (\mathbf{y}, t) \in Q \\ v^h(\mathbf{y}, t) = 0 & \mathbf{y} \in \hat{E} \\ v(\mathbf{y}, 0) = v_0(\mathbf{y}), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{y}, 0) = v_1(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega \end{cases} \quad (23)$$

As equações (23) formam o que chamaremos de Problema (III).

Substituindo $v^h = v^h(\mathbf{y}, t) \in V_m$ em (16) temos o operador $Lv^h(\mathbf{y}, t)$ dado por:

$$Lv^h(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial^2 v^h}{\partial t^2} - \bar{a}(t) \Delta v^h + b_{ij}(y, t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial y_i \partial y_j} + c_i(y, t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial t \partial y_i} + e_i(y, t) \frac{\partial v^h}{\partial y_i} \quad (24)$$

onde $v^h(\mathbf{y}, t) \in V_m$ é uma solução aproximada de $v(\mathbf{y}, t)$, e $\bar{a}(t)$, $b_{ij}(y, t)$, $c_i(y, t)$ e $e_i(y, t)$ são dados por (17), (18), (19) e (20), respectivamente.

Assim, (22) é agora dada por

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v^h}{\partial t^2} w dy - \int_{\Omega} \bar{a}(t) \Delta v^h w dy + \int_{\Omega} b_{ij}(\mathbf{y}, t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial y_i \partial y_j} w dy \\ & + \int_{\Omega} c_i(\mathbf{y}, t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial t \partial y_i} w dy + \int_{\Omega} e_i(\mathbf{y}, t) \frac{\partial v^h}{\partial y_i} w dy = \int_{\Omega} g(\mathbf{y}, t) w dy \end{aligned} \quad (25)$$

Aplicando o teorema da divergência na segunda e na terceira integrais, e lembrando que $b_{ij}(\mathbf{y}, t)$ é dado em (18), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v^h}{\partial t^2} w dy + \bar{a}(t) \int_{\Omega} \nabla v^h \nabla w dy - 3 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 \int_{\Omega} y_i \frac{\partial v^h}{\partial y_i} w dy \\ & - \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 \int_{\Omega} y_i y_j \frac{\partial v^h}{\partial y_i} \frac{\partial w}{\partial y_j} dy + \int_{\Omega} c_i(\mathbf{y}, t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial t \partial y_i} w dy \\ & + \int_{\Omega} e_i(\mathbf{y}, t) \frac{\partial v^h}{\partial y_i} w dy = \int_{\Omega} g(\mathbf{y}, t) w dy \end{aligned} \quad (26)$$

Com $v^h(\mathbf{y}, t) \in V_m$ podemos escrever $v^h(\mathbf{y}, t)$ da seguinte maneira

$$v^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{k=1}^m d_k(t) \varphi_k(\mathbf{y}), \quad \varphi_k(\mathbf{y}) \in V_m \quad (27)$$

Para obtermos a solução aproximada $v^h(\mathbf{y}, t) \in V_m$ é necessário determinar os coeficientes $d_k(t)$.

Substituindo (27) em (26) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left(\ddot{d}_k \varphi_k(\mathbf{y}) \right) w dy + \bar{a}(t) \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left(d_k \nabla \varphi_k(\mathbf{y}) \right) \nabla w dy \\ & - 3 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 \int_{\Omega} y_i \sum_{k=1}^m \left(d_k \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{y})}{\partial y_i} \right) w dy \\ & - \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 \int_{\Omega} (y_i y_j) \sum_{k=1}^m \left(d_k \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{y})}{\partial y_i} \right) \frac{\partial w}{\partial y_j} dy \\ & + \int_{\Omega} c_i(\mathbf{y}, t) \sum_{k=1}^m \left(\dot{d}_k \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{y})}{\partial y_i} \right) w dy + \int_{\Omega} e_i(\mathbf{y}, t) \sum_{k=1}^m \left(d_k \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{y})}{\partial y_i} \right) w dy \\ & = \int_{\Omega} g(\mathbf{y}, t) w dy \end{aligned} \quad (28)$$

Observemos que a função $g(\mathbf{y}, t)$ pode ser interpolada pela função $\varphi_a(\mathbf{y})$ obtendo-se

$$g(\mathbf{y}, t) = \sum_{k=1}^m g_k(t) \varphi_k(\mathbf{y})$$

onde $g(\mathbf{y}_k, t) = g_k(t)$, para $k = 1, 2, \dots, m$

Além do mais, tomando em particular $w = \varphi_l(\mathbf{y}) \in V_m$ em (28) obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^m \left\{ \ddot{d}_k \left(\int_{\Omega} \varphi_k(\mathbf{y}) \varphi_l(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) + \bar{a}(t) d_k \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_k(\mathbf{y}) \nabla \varphi_l(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \right. \\
& - 3 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 d_k \left(\int_{\Omega} y_i \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_l(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \\
& - \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 d_k \left(\int_{\Omega} (y_i y_j) \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_l(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{y} \right) \\
& \left. + \dot{d}_k \left(\int_{\Omega} c_i(\mathbf{y}, t) \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_l(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) + d_k \left(\int_{\Omega} e_i(\mathbf{y}, t) \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_l(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \right\} \\
& = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left(g_k(t) \varphi_k(\mathbf{y}) \right) \varphi_l(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \tag{29}
\end{aligned}$$

para $l = 1, 2, \dots, m$

5 Discretização do Domínio

Consideremos uma partição do domínio Ω em subregiões Ω_e , de tal forma a satisfazer as condições:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{Nel} \Omega_e, \quad \Omega_e \cap \Omega_k = \emptyset, \quad e \neq k$$

onde Nel é o número total de elementos. Na partição do domínio definimos os nós globais A , $A = 1, 2, \dots, Nnos$, onde $Nnos$ é o número total de nós da malha. Tal partição é necessária para que possamos encontrar a solução $v^h(\mathbf{y}, t)$ do Problema (III).

A malha utilizada está apresentada na Figura 1, onde está apresentada uma membrana circular dividida em 73 nós e 128 elementos

Optamos por trabalhar com subregiões Ω_e triangulares devido a geometria do domínio, considerando assim 3 nós locais em cada elemento finito Ω_e .

Como estabelecemos um mapeamento biunívoco entre a numeração global e a numeração local dos nós é possível obter a solução em todo Ω a partir das soluções locais em Ω_e .

Para cada elemento finito $\Omega_e(\mathbf{y})$, define-se as funções de interpolação local φ_a^e com as seguintes propriedades:

$$\varphi_a^e(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{y} = \mathbf{y}_a^e \in \Omega_e \\ 0, & \mathbf{y} = \mathbf{y}_b^e \in \Omega_e, \quad b \neq a \\ 0, & \mathbf{y} \notin \Omega_e \end{cases} \tag{30}$$

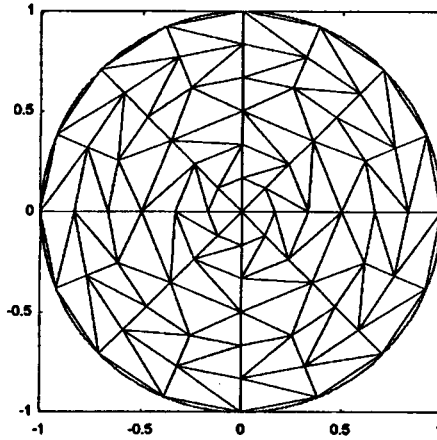


Figure 1: Membrana dividida em 73 nós e 128 elementos

onde \mathbf{y}_a^e e \mathbf{y}_b^e são as coordenadas locais de Ω_e . Pela aplicação do Método de Galerkin, vimos em (27) que a solução aproximada $v^h(\mathbf{y}, t)$ é dada por

$$v^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{k=1}^m d_k(t) \varphi_k(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega$$

Localmente a solução aproximada é dada por

$$v_e^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{a=1}^3 d_a^e(t) \varphi_a^e(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_e \quad (31)$$

Desta forma a solução aproximada $v^h(\mathbf{y}, t)$ do Problema (III), (23), é dada por

$$v^h(\mathbf{y}, t) = \bigcup_{e=1}^{Nel} v_e^h(\mathbf{y}, t) \quad (32)$$

onde $Nel = m$ é o número de elementos finitos.

Considerando a notação acima passamos a definir (29) em termos de cada elemento

$$\begin{aligned}
& \sum_{a=1}^3 \left\{ \ddot{d}_a^e \left(\int_{\Omega_e} \varphi_a^e(\mathbf{y}) \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) + \bar{a}(t) d_a^e \left(\int_{\Omega_e} \nabla \varphi_a^e(\mathbf{y}) \nabla \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \right. \\
& - 3 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 d_a^e \left(\int_{\Omega_e} y_i \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \\
& - \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 d_a^e \left(\int_{\Omega_e} (y_i y_j) \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_b^e(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{y} \right) \\
& \left. + \dot{d}_a^e \left(\int_{\Omega_e} c_i(\mathbf{y}, t) \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) + d_a^e \left(\int_{\Omega_e} e_i(\mathbf{y}, t) \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \right\} \\
& = \sum_{a=1}^3 \int_{\Omega_e} g_a^e(t) \varphi_a^e(\mathbf{y}) \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \tag{33}
\end{aligned}$$

para $b = 1, 2, 3$ e $e = 1, 2, \dots, Nel$.

A equação (33) é de difícil solução devido a existência das funções $c_i(\mathbf{y}, t)$, $e_i(\mathbf{y}, t)$, y_i e y_j nas integrais.

Com o conceito local apresentado anteriormente e assumindo que a área de cada elemento Ω_e é suficientemente pequena passaremos a considerar as funções $c_i(\mathbf{y}, t)$, $e_i(\mathbf{y}, t)$, y_i e y_j constantes em cada elemento finito Ω_e .

Para isso, consideramos

$$y_i^e = \frac{1}{3} (y_i^1 + y_i^2 + y_i^3)^e \tag{34}$$

para $1 \leq i, j \leq 2$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{a=1}^3 \left\{ \ddot{d}_a^e \int_{\Omega_e} \varphi_a^e(\mathbf{y}) \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + d_a^e \bar{a}(t) \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_a^e(\mathbf{y}) \nabla \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right. \\
& - 3 d_a^e \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 y_i^e \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
& - d_a^e \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 (y_i^e y_j^e) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_b^e(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{y} \\
& \left. + \dot{d}_a^e c_i^e(t) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + d_a^e e_i^e(t) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\} \\
& = \sum_{a=1}^3 g_a^e(t) \int_{\Omega_e} \varphi_a^e(\mathbf{y}) \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y}
\end{aligned}$$

para $b = 1, 2, 3$ e $e = 1, 2, \dots, Nel$.

Colocando em evidência os termos comuns, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{a=1}^3 \left\{ \ddot{d}_a^e \left[\int_{\Omega_e} \varphi_a^e(\mathbf{y}) \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right] + d_a^e \left[c_i^e(t) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right] \right. \\
& + d_a^e \left[\bar{a}(t) \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_a^e(\mathbf{y}) \nabla \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy - 3 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 y_i^e \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 (y_i^e y_j^e) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_b^e(\mathbf{y})}{\partial y_j} dy + e_i^e(t) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right] \right\} \\
& = \sum_{a=1}^3 \left\{ g_a^e(t) \left(\int_{\Omega_e} \varphi_a^e(\mathbf{y}) \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right) \right\} \tag{35}
\end{aligned}$$

para $b = 1, 2, 3$ e $e = 1, 2, \dots, Nel$.

O que é equivalente a

$$\begin{aligned}
& \sum_{a=1}^3 \left\{ \ddot{d}_a^e \left[\int_{\Omega_e} \varphi_a^e(\mathbf{y}) \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right] + d_a^e \left[-2 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right) y_i^e \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right] \right. \\
& + d_a^e \left[\bar{a}(t) \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_a^e(\mathbf{y}) \nabla \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy - 3 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 y_i^e \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right. \\
& \left. - \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 (y_i^e y_j^e) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_b^e(\mathbf{y})}{\partial y_j} dy \right. \\
& \left. + \left(2 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 - \frac{K''(t)}{K(t)} \right) y_i^e \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right] \right\} \\
& = \sum_{a=1}^3 \left\{ g_a^e(t) \left(\int_{\Omega_e} \varphi_a^e(\mathbf{y}) \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right) \right\}
\end{aligned}$$

para $b = 1, 2, 3$ e $e = 1, 2, \dots, Nel$.

Logo,

$$\begin{aligned}
& \sum_{a=1}^3 \left\{ \ddot{d}_a^e \left[\int_{\Omega_e} \varphi_a^e(\mathbf{y}) \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right] + d_a^e \left[-2 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right) y_i^e \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right] \right. \\
& + d_a^e \left[\bar{a}(t) \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_a^e(\mathbf{y}) \nabla \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy - \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 (y_i^e y_j^e) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_b^e(\mathbf{y})}{\partial y_j} dy \right. \\
& \left. + \left(- \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 - \frac{K''(t)}{K(t)} \right) y_i^e \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right] \right\} \\
& = \sum_{a=1}^3 \left\{ g_a^e(t) \left(\int_{\Omega_e} \varphi_a^e(\mathbf{y}) \varphi_b^e(\mathbf{y}) dy \right) \right\} \tag{36}
\end{aligned}$$

para $b = 1, 2, 3$ e $e = 1, 2, \dots, Nel$.

Denotando por M , a matriz de ordem $(Nel \times Nel)$ denominada matriz massa, C , a matriz de ordem $(Nel \times Nel)$ denominada matriz de amortecimento e K , a matriz de ordem $(Nel \times Nel)$ denominada matriz de rigidez e G o vetor de ordem $(Nel \times 1)$ denominado vetor força. Definimos

$$M = \sum_{e=1}^{Nel} M_{ab}^e, \quad C = \sum_{e=1}^{Nel} C_{ab}^e, \quad K = \sum_{e=1}^{Nel} K_{ab}^e \quad e \quad G = \sum_{e=1}^{Nel} G_a^e \quad (37)$$

onde M_{ab}^e , C_{ab}^e e K_{ab}^e são matrizes de ordem (3×3) , e o vetor G_a^e é de ordem (3×1) .

As matrizes M_{ab}^e , C_{ab}^e e K_{ab}^e extraídas de (36) são dadas por:

$$M_{ab}^e = \int_{\Omega_e} \varphi_a^e(\mathbf{y}) \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (38)$$

$$C_{ab}^e = c_i^e(t) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} K_{ab}^e &= \left(\bar{a}(t) \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_a^e(\mathbf{y}) \nabla \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \\ &- \left(\left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 (y_1^e y_2^e) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_b^e(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{y} \right) \\ &+ \left(\left(- \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 - \frac{K''(t)}{K(t)} \right) y_i^e \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \\ K_{ab}^e &= \left(\bar{a}(t) \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_a^e(\mathbf{y}) \nabla \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) - \left(\bar{b}_{ij}^e(t) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_b^e(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{y} \right) \\ &+ \left(\bar{f}_i^e(t) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

onde $\bar{a}(t)$ é dada em (17)

Denotando

$$\begin{aligned} \bar{b}^e(t) &= \sum_{i,j=1}^2 \bar{b}_{ij}^e(t) = \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 \sum_{i,j=1}^2 (y_i^e y_j^e) \\ &= \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 \left(y_1^e y_1^e + 2y_1^e y_2^e + y_2^e y_2^e \right) \\ &= \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 \left(y_1^e + y_2^e \right)^2 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}^e(t) &= \sum_{i=1}^2 \bar{f}_i^e(t) = \left[- \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 - \frac{K''(t)}{K(t)} \right] \sum_{i=1}^2 y_i^e \\ &= \left[- \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 - \frac{K''(t)}{K(t)} \right] \left(y_1^e + y_2^e \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Assim, K_{ab}^e é dada por

$$K_{ab}^e = \left(\bar{a}(t) \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_a^e(\mathbf{y}) \nabla \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) - \left(\bar{b}^e(t) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_b^e(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{y} \right) + \left(\bar{f}^e(t) \int_{\Omega_e} \frac{\partial \varphi_a^e(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \quad (43)$$

Restringindo o vetor força G a cada elemento finito Ω_e , temos

$$G_a^e = g_a^e(t) \int_{\Omega_e} \varphi_a^e(\mathbf{y}) \varphi_b^e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (44)$$

para $1 \leq a, b \leq 3$

6 Função de Interpolação

Consideremos um triângulo $\Omega_e \subset \Omega$ representado na Figura 2.

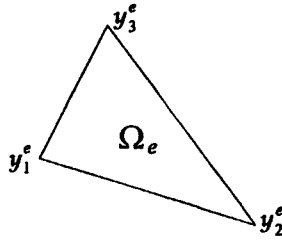


Figure 2: Elemento triangular Ω_e

Para cada Ω_e definiremos as funções de interpolação φ_a^e contínuas no interior de cada elemento de fronteira Γ_e , onde $a = 1, 2, 3$ são os nós de cada triângulo e $e = 1, 2, \dots, N_e$ são os elementos da malha.

Para cada lado do triângulo definimos uma função de interpolação φ_a^e onde as seguintes condições serão impostas:

$$\varphi_a^e(\mathbf{y}_b^e) = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases} \quad (45)$$

onde $1 \leq a, b \leq 3$ e $\mathbf{y}_b^e = ((y_1)_b^e, (y_2)_b^e)$.

Observação: Para simplificar, passaremos a utilizar a seguinte notação

$$\mathbf{y} = (x, y) \Leftrightarrow \mathbf{y} = (y_1, y_2) \quad (46)$$

É importante fazer a distinção entre as soluções $u(x, t)$, onde $x = (x_1, x_2)$ e $v(y, t)$, onde $y = (y_1, y_2) = (x, y)$ dos Problemas (I) e (II), respectivamente.

Assim, de (46) em (45), temos que $y_b^e = (x_b^e, y_b^e)$.

Queremos determinar $\varphi_1^e(y)$, $\varphi_2^e(y)$ e $\varphi_3^e(y)$, interpoladores satisfazendo (45).

Em particular, quando Ω_e é o triângulo retângulo apresentado na Figura 3, a função de interpolação $\varphi_a(x, y)$ pode ser definida como a seguinte função linear

$$\varphi_1^e(x, y) = 1 - x - y \quad (47)$$

$$\varphi_2^e(x, y) = x \quad (48)$$

$$\varphi_3^e(x, y) = y \quad (49)$$

onde $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ e $\varphi_3(y)$ são obtidas nas respectivas coordenadas:

$$y_1 = (0, 0), \quad y_2 = (1, 0), \quad y_3 = (0, 1)$$

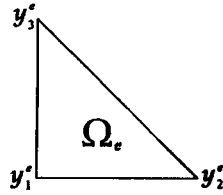


Figure 3: Elemento triangular Ω_e

Como $\varphi_a^e(x, y)$ é uma função linear por partes esta pode ser representada como na Figura 4.

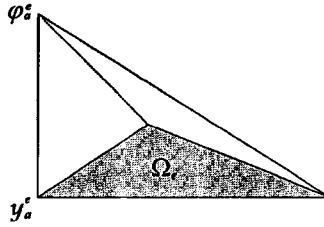


Figure 4: Representação geométrica $\varphi_a^e(x, y)$

Podemos observar que o polinômio interpolador $\varphi_a(x, y)$, $a = 1, 2, 3$ no elemento padrão Ω_b é bem mais simples, assim é conveniente fazer uma parametrização entre os diferentes elementos Ω_e para um único elemento Ω_b , onde por Ω_b estamos denotando o triângulo retângulo apresentado na Figura 5.

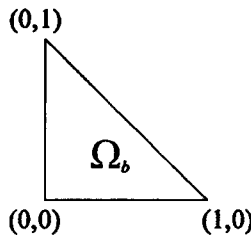


Figure 5: Elemento triângulo padrão Ω_b

7 Transformação Isoparamétrica

Trabalhar diretamente com os elementos triangulares Ω_e tornaria o processo muito complicado, uma vez que as funções de interpolação deveriam ser calculadas para cada elemento. Assim, é conveniente trabalhar com elementos triangulares padrões Ω_b , que foram apresentados anteriormente.

Consideremos então a seguinte aplicação:

$$(\xi, \eta) \in \Omega_b \mapsto (x, y) \in \Omega_e$$

definida por

$$x(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^3 \varphi_a(\xi, \eta) x_a^e \quad (50)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^3 \varphi_a(\xi, \eta) y_a^e \quad (51)$$

As funções (50) e (51) são biunívocas entre o triângulo Ω_e e o triângulo retângulo Ω_b .

Definindo

$$(\xi_1, \eta_1) = (0, 0) \quad (\xi_2, \eta_2) = (1, 0) \quad (\xi_3, \eta_3) = (0, 1) \quad (52)$$

$$x(\xi_b, \eta_b) = \sum_{a=1}^3 \varphi_a(\xi_b, \eta_b) x_a^e = \begin{cases} x_a^e, & \text{se } a = b \\ 0, & \text{se } a \neq b \end{cases}$$

$$y(\xi_b, \eta_b) = \sum_{a=1}^3 \varphi_a(\xi_b, \eta_b) y_a^e = \begin{cases} y_a^e, & \text{se } a = b \\ 0, & \text{se } a \neq b \end{cases}$$

Mostramos a transformação geometricamente na Figura 6, onde $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\xi) = (x, y)$ e $\xi = \xi(\mathbf{y}) = (\xi, \eta)$.

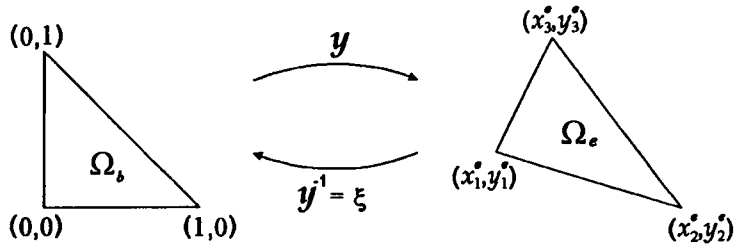


Figure 6: Transformação Isoparamétrica

Para verificar a existência da função

$$\mathbf{y}^{-1} = \xi : \Omega_e \mapsto \Omega_b$$

usaremos o Teorema da Função Inversa. A função φ_a é diferenciável e portanto $\mathbf{y}(\xi)$ é diferenciável. Assim podemos calcular o Jacobiano da transformação isoparamétrica, dado por

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} > 0$$

Como $\mathbf{y} : \Omega_b \mapsto \Omega_e$ é bijetora e de classe C^1 e o Jacobiano é positivo, então, o Teorema da Função Inversa garante a existência da função $\mathbf{y}^{-1} = \xi : \Omega_e \mapsto \Omega_b$,

com \mathbf{y}^{-1} de classe C^1 . Assim temos um mapeamento entre os elementos finitos Ω_b e Ω_e .

A função $\mathbf{y}(\xi)$ pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= (x_2^e - x_1^e)\xi + (x_3^e - x_1^e)\eta + x_1^e \\ y(\xi, \eta) &= (y_2^e - y_1^e)\xi + (y_3^e - y_1^e)\eta + y_1^e \end{aligned} \quad (53)$$

Cálculo do Jacobiano

De $\mathbf{y}(\xi)$ definido em (53), podemos calcular o Jacobiano da transformação entre Ω_b e Ω_e , ou seja

$$\begin{aligned} J &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} (x_2^e - x_1^e) & (x_3^e - x_1^e) \\ (y_2^e - y_1^e) & (y_3^e - y_1^e) \end{bmatrix} \\ J &= (x_2^e - x_1^e)(y_3^e - y_1^e) - (x_3^e - x_1^e)(y_2^e - y_1^e) \end{aligned} \quad (54)$$

A função de interpolação $\varphi_a(\xi)$ pode ser representada em Ω_b na seguinte forma

$$\varphi_a(\xi) = \begin{cases} \varphi_1(\xi) = 1 - \xi - \eta \\ \varphi_2(\xi) = \xi \\ \varphi_3(\xi) = \eta \end{cases} \quad (55)$$

Daí, temos que a derivada da função $\varphi_a(\xi)$ é dada por

$$\frac{\partial \varphi_a(\xi)}{\partial \xi} \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} = -1, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = -1 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = 1, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} = 0, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} = 1 \end{cases} \quad (56)$$

Assim, o gradiente da função $\varphi_a(\xi)$, é dado por

$$\nabla \varphi_a(\xi) = \begin{cases} \nabla \varphi_1(\xi) = (-1, -1) \\ \nabla \varphi_2(\xi) = (1, 0) \\ \nabla \varphi_3(\xi) = (0, 1) \end{cases} \quad (57)$$

Temos que

$$\begin{aligned} \xi : \Omega_e &\rightarrow \Omega_b \\ (x, y) &\mapsto \xi(x, y) = (\xi, \eta) \end{aligned}$$

A função $\xi(y)$ pode ser dada como

$$\xi(x, y) = \frac{1}{J} \left[(y_3^e - y_1^e)x + (x_1^e - x_3^e)y + (x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e) \right] \quad (58)$$

$$\eta(x, y) = \frac{1}{J} \left[(y_1^e - y_2^e)x + (x_2^e - x_1^e)y + (x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e) \right] \quad (59)$$

Sendo $\xi(y)$ uma função linear que satisfaz

$$\begin{aligned}\xi(x_1, y_1) &= 0 & \eta(x_1, y_1) &= 0 \\ \xi(x_2, y_2) &= 1 & \eta(x_2, y_2) &= 0 \\ \xi(x_3, y_3) &= 0 & \eta(x_3, y_3) &= 1\end{aligned}$$

Com as matrizes globais M , C , K , e o vetor força global G montados a partir das matrizes locais e do vetor força local é possível, agora, escrever (36) numa forma matricial dada por:

$$M\ddot{d}(t) + C\dot{d}(t) + Kd(t) = G \quad (60)$$

onde a matriz de massa global M é simétrica e a matriz de amortecimento global C é anti-simétrica. Sendo $d = [d_1, d_2, \dots, d_{m+1}]^t$ o vetor incógnita.

8 Método de Newmark

Matematicamente, a equação (60) representa um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e, em particular, a solução das equações não são simples já que as matrizes dependem de y em cada instante de tempo. E os procedimentos usualmente propostos para a solução de sistemas gerais de equações diferenciais podem ser muito caros se a ordem das matrizes for grande.

O Método de Newmark foi escolhido para resolver o sistema de equações diferenciais de segunda ordem representado pela equação (60). Este método é um Método de Diferenças Finitas que foi apresentado por Newmark em 1959, e a partir de então vem sendo largamente utilizado para a resolução de problemas dinâmicos.

O método de Newmark nos dá a solução no final de um passo do tempo expressada por uma série de Taylor aproximado por:

$$d(t + \Delta t) = d(t) + \Delta t \dot{d}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\xi) \ddot{d}(t) + 2\xi \ddot{d}(t + \Delta t) \right] \quad (61)$$

$$\dot{d}(t + \Delta t) = \dot{d}(t) + \Delta t \left[(1 - \delta) \ddot{d}(t) + \delta \ddot{d}(t + \Delta t) \right] \quad (62)$$

onde ξ e δ são parâmetros livres que determinam a estabilidade e precisão características do algoritmo considerado. A especificação dessas constantes nos fornece uma variedade de métodos conhecidos como Família de Métodos de Newmark.

O problema de valor inicial para (23) consiste em encontrar um deslocamento $d(t)$ tal que,

$$IV = \begin{cases} M\ddot{d}(t) + C\dot{d}(t) + Kd(t) = G \\ d(0) = d_0 \\ \dot{d}(0) = \dot{d}_0 \end{cases} \quad (63)$$

onde $d(0)$ e $\dot{d}(0)$ são os deslocamentos e as velocidades iniciais dos nós da corda conhecidos. As equações (63) formam o que chamaremos de Problema (IV).

Do Problema (III), (23), temos ainda as condições de fronteira dadas pela segunda equação de (23) que devem ser respeitadas, ou seja,

$$d(t) = 0 \quad \text{para } y = 0 \text{ e } y = 1 \quad (64)$$

Como $\dot{d}(t)$ corresponde a velocidade nodal e $\ddot{d}(t)$ a aceleração nodal, faremos a seguinte associação $\dot{d}(t) = v(t)$ e $\ddot{d}(t) = a(t)$. Assim de (60), (61) e (62) temos, para cada instante de tempo $t_n = n\Delta t$, o seguinte sistema iterativo:

$$\begin{aligned} Ma_{n+1} + Cv_{n+1} + Kd_{n+1} &= G \\ d_{n+1} &= d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\xi)a_n + 2\xi a_{n+1}] \\ v_{n+1} &= v_n + \Delta t [(1 - \delta)a_n + \delta a_{n+1}] \end{aligned} \quad (65)$$

onde a_n , v_n e d_n representam $\ddot{d}(t_n)$, $\dot{d}(t_n)$ e $d(t_n)$ respectivamente.

De (65) temos três equações para determinarmos três incógnitas a_{n+1} , v_{n+1} e d_{n+1} .

Neste trabalho, escolhemos trabalhar com $\xi = 0$ e $\delta = \frac{1}{2}$ o que corresponde a um Método de Diferença Central. Assim (65) pode ser reescrita como:

$$Ma_{n+1} + Cv_{n+1} + Kd_{n+1} = G \quad (66)$$

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} a_n \quad (67)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t}{2} (a_n + a_{n+1}) \quad (68)$$

Implementação

Existem várias possibilidades para a implementação deste método, assim escolhemos a seguinte forma.

- Dados Iniciais

Para $t_n = 0$, as matrizes de massa global M , de amortecimento global C e rigidez global K , e o vetor global G são montados como foi apresentado anteriormente utilizando o Método dos Elementos Finitos.

De (63) temos que o deslocamento inicial d_0 e a velocidade inicial v_0 são dados. A partir daí é possível calcular a aceleração inicial a_0 diretamente de (66), ou seja:

$$Ma_0 = G - Cv_0 - Kd_0 \quad (69)$$

resolvendo o sistema linear (69) nós obtemos a aceleração inicial a_0 .

- Demais instantes de tempo

Para cada t_n , as matrizes globais M , C e K , e o vetor global G são montados como foi apresentado utilizando o Método dos Elementos Finitos.

Substituindo (67) e (68) em (66) temos

$$M a_{n+1} + C \left(v_n + \frac{\Delta t}{2} (a_n + a_{n+1}) \right) + K \left(d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} a_n \right) = G \quad (70)$$

Separando em (70) no lado esquerdo da equação o que for relativo ao tempo t_{n+1} e do lado direito o que for relativo ao tempo t_n , obtemos

$$M a_{n+1} + C \frac{\Delta t}{2} a_{n+1} = G - C \left(v_n + \frac{\Delta t}{2} a_n \right) - K \left(d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} a_n \right) \quad (71)$$

$$\left(M + C \frac{\Delta t}{2} \right) a_{n+1} = G - C \left(v_n + \frac{\Delta t}{2} a_n \right) - K \left(d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} a_n \right) \quad (72)$$

Definimos os preditores como sendo:

$$\tilde{d}_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} a_n \quad (73)$$

$$\tilde{v}_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t}{2} a_n \quad (74)$$

Logo as equações (67) e (68) podem ser reescritas como:

$$d_{n+1} = \tilde{d}_{n+1} \quad (75)$$

$$v_{n+1} = \tilde{v}_{n+1} + \frac{\Delta t}{2} a_{n+1} \quad (76)$$

Substituindo (73) e (74) em (72) temos que a relação recursiva para determinar a_{n+1} é dada por

$$\left(M + \frac{\Delta t}{2} C \right) a_{n+1} = G_{n+1} - C \tilde{v}_{n+1} - K \tilde{d}_{n+1} \quad (77)$$

As equações (75) e (76) serão utilizadas para calcularmos d_{n+1} e v_{n+1} , respectivamente.

Logo, para cada instante de tempo $t_n = n\Delta t$ com $0 \leq t_n \leq T$ obtem-se d_n , com $n \in \mathcal{N}$.

Da equação (27) temos que

$$v^h(y, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y), \quad \varphi_i \in V_m$$

Com os deslocamentos nodais d_{n+1} calculados encontramos $v^h(y, t)$ dado pela relação (27). Assim temos a solução do Problema (III).

Mas, vimos anteriormente que resolver o Problema (III) implica em encontrar uma solução aproximada para o Problema (II). E como a transformação Λ , dada em (14), é um isomorfismo podemos afirmar que resolver o Problema (II) é equivalente a resolver o Problema (I).

9 Solução Global

Para a obtenção da solução global $v(\mathbf{y}, t)$, para o problema cilíndrico definido em (13) Medeiros e Ferrel introduziram uma viscosidade $\delta v'(\mathbf{y}, t)$, onde δ é uma constante positiva fixada, ou seja, que a força deve ser proporcional a velocidade do deslocamento. Assim, o problema penalizado é dado pelo seguinte problema cilíndrico:

$$V = \begin{cases} Lv(\mathbf{y}, t) + \delta v'(\mathbf{y}, t) = g(\mathbf{y}, t), & (\mathbf{y}, t) \in Q \\ v(\mathbf{y}, t) = 0, & \mathbf{y} \in \hat{E} \\ v(\mathbf{y}, 0) = v_0(\mathbf{y}), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{y}, 0) = v_1(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega \end{cases} \quad (78)$$

onde v_0 e v_1 são conhecidos e $Lv(\mathbf{y}, t)$ é o operador definido em (16)

$$Lv(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \bar{a}(t)\Delta v + b_{ij}(\mathbf{y}, t)\frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} + c_i(\mathbf{y}, t)\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y_i} + e_i(\mathbf{y}, t)\frac{\partial v}{\partial y_i}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{a}(t) &= \frac{1}{K^2} \left(a(t) + b(t) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dy \right) \\ b_{ij}(\mathbf{y}, t) &= \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right) y_i y_j \\ c_i(\mathbf{y}, t) &= -2 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right) y_i \\ e_i(\mathbf{y}, t) &= \left[2 \left(\frac{K'(t)}{K(t)} \right)^2 - \frac{K''(t)}{K(t)} \right] y_i \end{aligned}$$

A introdução da viscosidade $\delta v'(\mathbf{y}, t)$ se faz necessária para o estudo da solução global. Em [4] Medeiros e Ferrel fizeram toda a sua análise do modelo utilizando essa viscosidade.

Desde que $u(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{y}, t)$, com

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{K(t)}$$

então:

$$\frac{\partial v(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = \left(\frac{K'(t)}{K(t)} x_i \right) \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

por consequência

$$\hat{L}u(\mathbf{x}, t) + \delta \left[\left(\frac{K'(t)}{K(t)} x_i \right) \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] = f(\mathbf{x}, t) \quad (79)$$

Assim, o seguinte problema não-cilíndrico é obtido, equivalente ao problema (78):

$$\begin{cases} \hat{L}u(\mathbf{x}, t) + \delta \left[\left(\frac{K'(t)}{K(t)} x_i \right) \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] = f(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in \hat{Q} \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 & (\mathbf{x}, t) \in \hat{E} \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega_0 \end{cases} \quad (80)$$

Portanto, encontrando a solução global de (78), obtém-se uma solução global para o problema misto (80) associado às vibrações de uma membrana elástica com extremidades móveis, devido a equivalência dos problemas mostrado na seção 2.

10 Simulações Numéricas

Exemplos numéricos serão mostrados nesta seção para ilustrar algumas características do modelo para pequenas vibrações transversais de membranas elásticas com fronteira livre.

Vimos que resolver o Problema III, (23), ou seja, encontrar $v^h(\mathbf{y}, t)$ implica em encontrar uma solução aproximada do Problema (II), (21), e assim resolver o Problema (I), (13), ou seja, encontrar $u(\mathbf{y}, t)$ já que o Problema (I) é equivalente ao Problema (II).

Para os exemplos numéricos consideraremos uma membrana elástica subdividida em 73 nós e 128 elementos finitos e o passo do tempo utilizado será $\Delta t = 0,0025$.

10.1 Exemplo 1

Consideraremos a posição inicial da membrana e a velocidade inicial dadas por:

$$v^h(\mathbf{y}, 0) = 0 \quad (81)$$

$$\frac{\partial v^h(\mathbf{y}, 0)}{\partial t} = (1 - x^2 - y^2) \frac{1}{\pi} \quad (82)$$

O crescimento do raio da membrana, apresentado no gráfico 7, é dado por:

$$K(t) = \frac{t}{35} + 1 \quad (83)$$

Assim como para as cordas elásticas a força externa aplicada na membrana elástica é normalmente considerada nula, mas primeiramente nós construiremos um exemplo numérico onde a força externa não é nula, com o intuito de confirmarmos que a solução está sendo obtida corretamente.

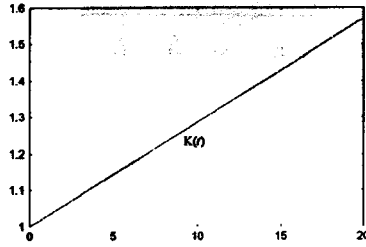


Figure 7: Crescimento do raio da membrana

Para isso, passamos a considerar a solução exata do Problema III como sendo:

$$v^h(\mathbf{y}, t) = (1 - x^2 - y^2) \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi t) \quad (84)$$

Observemos que a solução exata (84) possui as condições iniciais (81) e (82). Para construirmos a força externa basta substituímos (84) em (23). Consideremos as seguintes características físicas da membrana:

$$\frac{\tau_0}{m} = 5 \quad \text{e} \quad \frac{k}{m} = 1$$

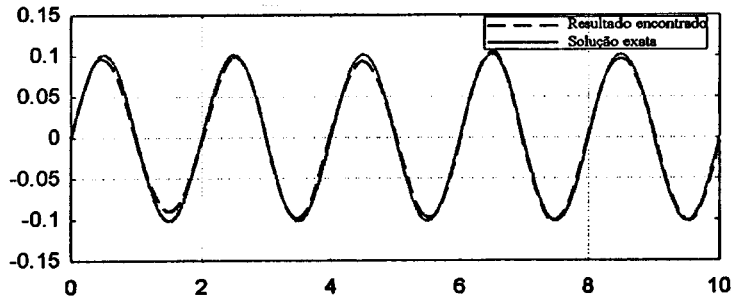


Figure 8: $v^h(0, 0, t)$ e a solução exata

O gráfico 8 mostra o movimento encontrado do nó central da membrana e a solução exata para o mesmo ponto. Assim, temos que a solução aproximada encontrada para o Problema III está bem próxima da solução exata conhecida. A partir desse resultado temos a segurança que a solução do Problema III está sendo obtida corretamente, assim passamos a estudar o movimento da membrana elástica quando a força externa é nula.

O gráfico apresentado em 9 representa o movimento do nó central da membrana quando a força externa é nula:

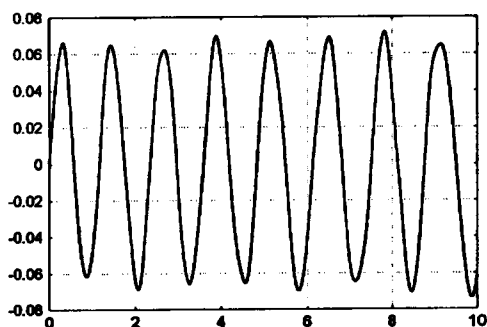


Figure 9: $v^h(0, 0, t)$ quando a força externa é nula

Apesar do modelo estar sendo resolvido corretamente, o que foi comprovado através do gráfico 8, quando tomamos a força externa nula o amortecimento esperado para a membrana em vibração não acontece como mostra o gráfico 9.

Em [4], Medeiros e Ferrel fizeram toda a análise do modelo para pequenas vibrações transversais de membranas elásticas com fronteira livre considerando a penalização apresentada na seção 9. Assim, encontramos a solução para o exemplo 1 considerando a força externa nula quando tomamos $\delta = 0,5$, o que está apresentado no gráfico 10.

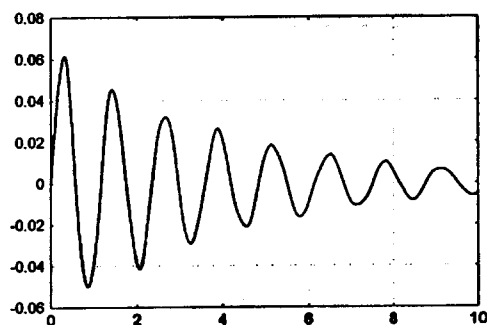


Figure 10: $v^h(0, 0, t)$ quando a força externa é nula

10.2 Exemplo 2

Consideraremos a posição inicial da membrana e a velocidade inicial dadas por:

$$v^h(y, 0) = (1 - x^2 - y^2) \frac{1}{\pi^2} \quad (85)$$

$$\frac{\partial v^h(\mathbf{y}, 0)}{\partial t} = 0 \quad (86)$$

O crescimento do raio da membrana, apresentados no gráfico 11, é dado por:

$$K(t) = 2 - e^{-0,05t} \quad (87)$$

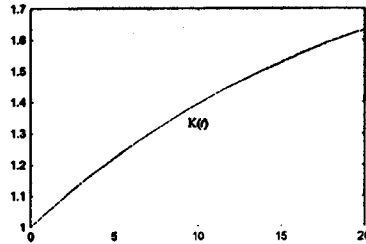


Figure 11: Crescimento do raio da membrana

O gráfico 12 apresenta o movimento do nó central da membrana quando a força externa é nula, $\delta = 1$ e as características físicas da membrana consideradas como:

$$\frac{\tau_0}{m} = 10 \text{ e } \frac{k}{m} = 1$$

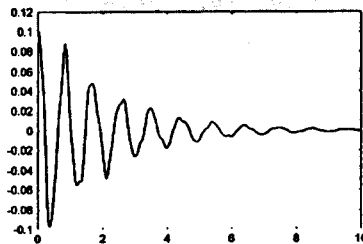


Figure 12: $u(0, 0, t)$ quanto tomamos $\delta = 1$

Apresentamos na Figura 13 as posições da membrana para os tempos

$$t = 0 ; 0,25 ; 0,5 ; 0,75 ; 1 ; 1,25$$

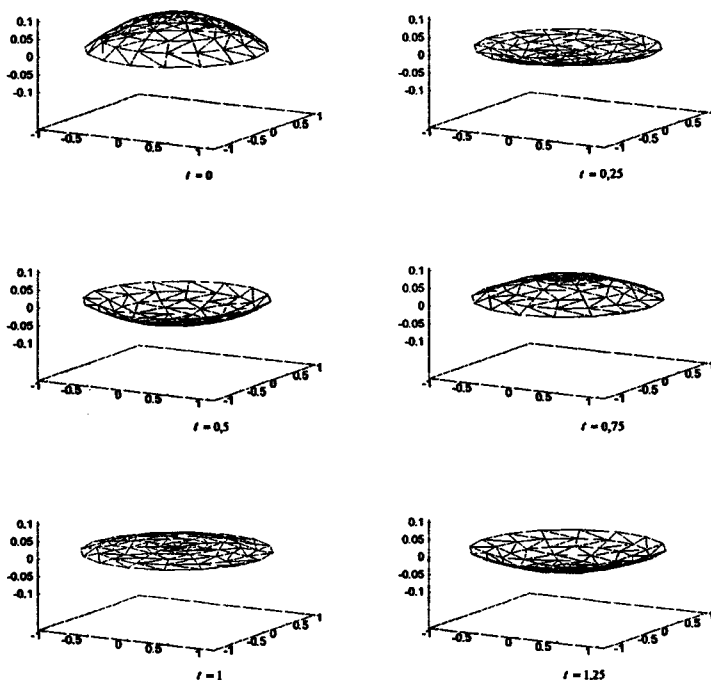


Figure 13: $u(\mathbf{y}, t)$ quanto tomamos $\delta = 1$

10.3 Exemplo 3

Consideraremos a mesma posição inicial e a mesma velocidade inicial da membrana consideradas no exemplo 2 dadas em (85) e (86):

$$v^h(\mathbf{y}, 0) = (1 - x^2 - y^2) \frac{1}{\pi^2}$$

$$\frac{\partial v^h(\mathbf{y}, 0)}{\partial t} = 0$$

O crescimento do raio da membrana, apresentados no gráfico 14, é dado por:

$$K(t) = 1,1 - 0,1 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) \quad (88)$$

Nos exemplos anteriores tomamos $K(t)$ crescente. Verificaremos através do corrente exemplo o que ocorre quando tomamos uma função $K(t)$ que não é sempre crescente.

Observamos, através do gráfico 14, quando t varia de 0 a 5 instantes de tempo a membrana cresce até atingir o seu tamanho máximo em $t = 5$ quando

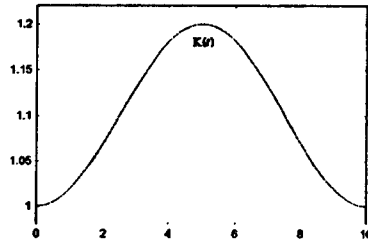


Figure 14: $K(t)$ – crescimento do raio da membrana

o raio chega ao tamanho 1,2 , quando t varia de 5 a 10 instantes de tempo a membrana decresce até atingir o seu tamanho inicial com raio igual a 1.

Apresentamos em 15 o movimento do nó central da membrana quando a força externa é nula, $\delta = 0,8$ e as características físicas da membrana consideradas como:

$$\frac{\tau_0}{m} = 8 \text{ e } \frac{k}{m} = 1$$

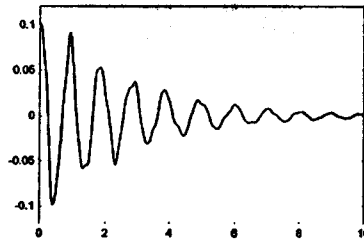


Figure 15: $u(0,0,t)$

O gráfico 15 não nos mostra claramente o movimento de crescimento e decrescimento da membrana, já que o modelo necessita da viscosidade para ser resolvido, o que consequentemente provoca um amortecimento no movimento de vibração da membrana.

Apresentamos em 16 a posição da membrana e sua projeção no plano xy quando tomamos $t = 0, 5, 10$.

Observemos que, apesar de tomarmos uma função $K(t)$ que não é sempre crescente, foi possível resolver o Problema I.

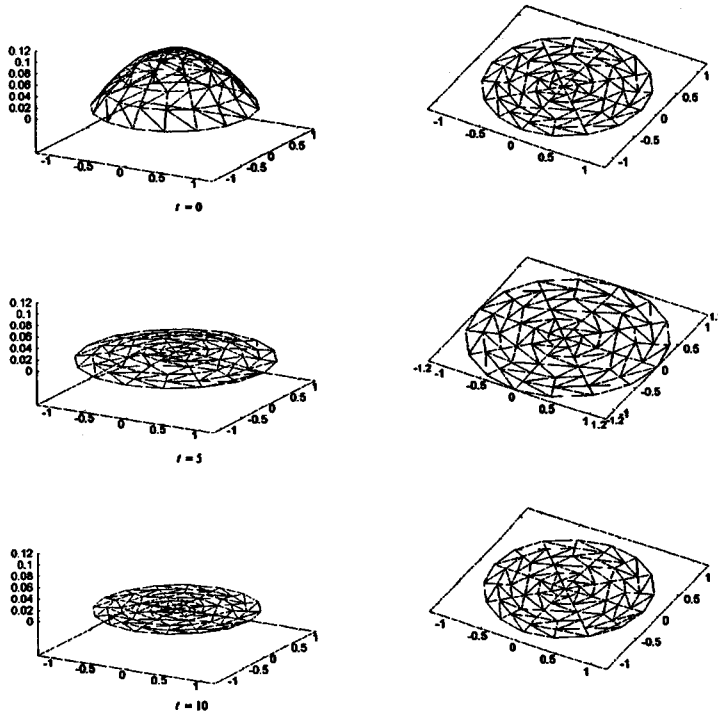


Figure 16: $u(y, t)$ e sua projeção no plano xy

References

- [1] CARRIER, C. E.; *On the vibration problem of elastic string*, Q. J. Appl. Math., 151-165 (1953)
- [2] HUGLES, T. J. R.; *The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall (1987)
- [3] MEDEIROS, L. A.; FERREL, J. L.; *Kirchhoff-Carrier elastic string in non cylindrical domains*, Portugaliae Mathematica, Vol. 56 Fas. 465-500 (1999)
- [4] MEDEIROS, L. A.; FERREL, J. L.; *Vibrations of elastic membranes with moving boundaries*, Pre-print, a aparecer no Nonlinear Analysis (2000)
- [5] LIU, I-SHIH; RINCON, M. A.; *Kirchhoff-Carrier String with Moving Ends: Numerical Simulations*, Submetido Applied Mathematics and Computation (2000)
- [6] LIU, I-SHIH; RINCON, M. A.; *Non Linear Model of Vibrating String with Moving Ends*, SIAM - Annual Meeting (2000)

- [7] LIU, I-SHIH; RINCON, M. A.; *Introdução ao Método dos Elementos Finitos - Análise e Aplicações*, Editora IM/UFRJ (2001)