



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Departamento de Astronomia - Observatório do Valongo

***Dinâmica Caótica da Vizinhança da
Ressonância 3:1 segundo o Problema de
N-Corpos ($N \geq 3$)***

Aluno: Daniel Rodrigues Costa Mello

Orientadora: Profa. Sueli Aparecida Guillens

**Projeto de Final de Curso para a Obtenção do
Título de Astrônomo**

Para minha irmã

Agradecimentos

Aos meus pais, parentes e amigos de longa data da cidade de Cataguases-MG, que tiveram enorme papel de incentivo durante toda essa trajetória.

À professora Sueli Guillens, durante estes anos de aprendizagem no Observatório do Valongo, em que pude contar sempre com seus ensinamentos, tantos os de caráter acadêmico, quanto aos de caráter humano e pessoal, tendo indiscutível importância em toda minha formação.

Aos demais professores e funcionários dessa instituição que de alguma forma colaboraram enormemente para a conclusão de minha graduação.

Ao professor Roberto Martins pelo apoio oferecido, durante os anos de iniciação científica.

Aos meus parentes e amigos da baixada fluminense, que tiveram papel crucial durante meu primeiro ano no Rio de Janeiro e na UFRJ, quando neles pude encontrar com muita satisfação uma segunda família.

Agradeço ainda aos amigos fenomenais que encontrei ao me dirigir para o Alojamento Estudantil, em especial aos que comigo dividiram os momentos de maiores frustrações e festejos, citando os moradores do módulo 326-Bancários (George, Tuba, Fred, Thiers e Jean).

Aos amigos do curso de Astronomia, Rosicler, Tiago, Nadine, Rafael, Graziela, João Paulo e Wladimir e em especial ao amigo Luis Gustavo, companheiro constante no sobe e desce da interminável Ladeira do Valongo.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para que fosse possível este momento de satisfação do trabalho concluído.

Resumo

Há varias características distintas na distribuição dos elementos orbitais dos asteróides do Cinturão Principal. Entre elas, as falhas em semi-eixo maior, denominadas falhas de Kirkwood, são as mais conhecidas e estão associadas a ressonâncias de movimento médio dos asteróides com Júpiter.

Esse trabalho pretende estudar uma das principais falhas, a falha 3:1, através de uma metodologia semi-analítica, que permite-nos conhecer a classificação global do espaço de fase do Problema Restrito de 3 Corpos Médio associado a tal ressonância.

Atentamo-nos ainda no estudo de asteróides reais localizados próximos dos bordos da ressonância 3:1 e procuramos obter informações para um modelo mais realista (onde se inclui a presença de mais corpos perturbadores), através da metodologia semi-analítica mencionada. Um estudo quantitativo da evolução dinâmica de longo período do asteróide (5482), também é feita.

Abstract

There are different characteristics in the orbital elements distribution of the Main Belt Asteroids. One of them is the semi-major axis gap, called Kirkwood Gaps, which are associates at asteroid-Jupiter mean motion resonance.

This work intend to study of the 3:1 resonance across of a semi-analytic methodology, that allow us the global classification of the phase space of Mean 3 Body Restricted Problem associate with 3:1 resonance.

We undertake also for the real asteroids near boundary of the resonance and we try to get information for the realistic model (including more disturbs bodies) across the semi-analytic methodology in mention. Also a quantitative study of the long period dynamic evolution of the asteroid (5482) is done.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv

Índice

Introdução	4
Capítulo 1 - Sobre a Classificação Global do Espaço de Fase através de um Plano Representativo para o Problema Restrito de 3 Corpos Médio	
1.1 Representação Gráfica das Falhas de Kirkwood	9
1.2 A Hamiltoniana Média de Hadjidemetriou para a Ressonância Asteroidal 3:1 (caso Plano)	10
1.3 O Plano Representativo	13
1.4 A Classificação Global do Espaço de Fase	16
1.5 Um Contorno Estimado para a Falha 3:1	21
Capítulo 2 - Estudo do Problema de Vários Corpos com o Problema Restrito de 3 Corpos Médio Plano como Referência	

2.1 Da seleção dos asteróides	24
2.2 Sobre a Metodologia para o Estudo da Evolução Dinâmica com a inclusão de outros Planetas	27
2.3 Evolução Dinâmica dos Asteróides Seleccionados.....	28
 Capítulo 3 - Caracterização da Dinâmica Caótica com a Inclusão de Vênus a Saturno	
3.1 O Processo de Obtenção de Clones do Asteróide (5482)	43
3.2 Sobre Encontros Próximos Planetários	45
3.3 Integração Numérica e Análise dos Resultados	45
 Conclusão	 48
 Apêndice 1 – Método da Superfície de Secção de Poincaré	 50
Apêndice 2 – O Pacote de Tarefas SWIFT	53
 Referências	 58

Introdução

O cinturão de asteróides localizado entre Marte e Júpiter não tem estrutura homogênea. Há várias características distintas na distribuição dos elementos orbitais, sendo as falhas na distribuição do semi-eixo maior, as mais conhecidas. Essas falhas estão associadas a ressonâncias de movimento médio dos asteróides com Júpiter nas razões 4:1, 3:1, 5:2, 7:3 e 2:1 entre outras (Figura 1.1 - Capítulo1). Elas ficaram conhecidas como falhas de Kirkwood, descobertas por D. Kirkwood em 1867. Todas as ressonâncias de movimento médio estão representadas nas falhas, algumas completamente vazias e outras com alguns grupos de asteróides. Uma das principais falhas é aquela cuja comensurabilidade de períodos é 3:1. Até o pioneiro trabalho de Wisdom (1982), havia várias hipóteses em competição: estatística, puramente gravitacional, grandes excentricidades que levariam às colisões, e a hipótese de que as falhas teriam sido sempre vazias. O trabalho de Wisdom (1982) foi capaz de explicar a abertura da falha, ao descartar de suas integrações numéricas os asteróides com excentricidade maior ou igual a 0.3, assumindo a hipótese que os asteróides seriam removidos através de encontros próximos com Marte. Outro aspecto inovador desse trabalho na época, foram as integrações numéricas por longos períodos de tempo (milhões de anos), através da técnica de mapeamento. Esse procedimento, sendo bem mais rápido, permitiu a economia de tempo computacional, fator muito importante há mais de duas décadas atrás. Em seu trabalho posterior, Wisdom (1983), mostra o domínio de trajetórias caóticas num plano de condições iniciais que é cruzado pela maioria das trajetórias. Este plano, denominado *Representativo*, é 'cruzado' quando o ângulo ressonante é igual a π e as diferenças entre as longitudes do periélio do asteróide e de Júpiter $\varpi - \varpi_J$ é zero. Um outro plano de condições iniciais também foi por ele investigado (definido por: ângulo ressonante e $\varpi - \varpi_J$ iguais a π). Os valores da excentricidade e semi-eixo maior na vizinhança da ressonância exata completam o conjunto de centenas de condições iniciais adotadas pelo referido autor. Mais precisamente falando, Wisdom considerou uma 'janela' de 5 graus para caracterizar um cruzamento. Logo depois, Wisdom (1985) elabora uma teoria para explanação da origem do movimento caótico. Vários outros trabalhos foram então realizados nesse sentido, por

exemplo, Koiller, et al (1987), Neishtadt (1987), Henrard e Caranicolas (1990). A idéia central de todos esses trabalhos é mostrar que o movimento caótico é gerado pelo cruzamento “lento” de separatrizes.

A introdução do conceito de caos no Sistema Solar através dos trabalhos de Wisdom anteriormente mencionados acarretou um grande número de trabalhos que buscaram aprofundar seus resultados e obter uma melhor compreensão sobre a dinâmica da ressonância 3:1. Estamos destacando aqui alguns dos trabalhos mais diretamente relacionados ao nosso tema, uma vez que a literatura sobre o estudo de tal ressonância é muita vasta. Assim sendo, é interessante acrescentar que Yoshikawa (1990), Ferraz-Mello e Klafke (1991), Hadjidemetriou (1993) e Morbidelli e Giorgili (1990) evidenciaram a importância do fenômeno de corrotação para grandes excentricidades. Tal fenômeno é caracterizado pelo regime de libração (pequenas oscilações) para ambos os ângulos envolvidos nos modelos simplificados de 2 graus de liberdade (ângulo ressonante e $\varpi - \varpi_j$). Dessa forma, esses trabalhos mostraram então que, além das regiões de caos descobertas por Wisdom, há regiões de curvas invariantes associadas à libração de altas e moderadas excentricidades. É interessante notar que no capítulo 1 desse trabalho, essas regiões de estabilidade podem ser localizadas na região do espaço de fase associado a um sistema dinâmico de dois graus de liberdade válido para altas excentricidades. Também pode ser visto que essas são dominantes em relação às regiões caóticas.

A partir de meados da década de 1990, um novo enfoque começa a surgir, a medida em que novos esquemas computacionais (simpléticos ou não) vão se desenvolvendo e os computadores vão rapidamente se tornando mais potentes e rápidos. Por exemplo, no caso dos *NEAs* (Near Earth Asteroids) ou mais geralmente falando *NEOs* (Near Earth Objects), apenas quando os experimentos numéricos envolvendo escalas de tempo de 1 a 100 milhões de anos (cobrindo os tempos de vida dinâmicos dos mesmos) é que se pode começar a investigar as suas principais rotas evolucionárias (Farinella et al, 1993; Farinella et al, 1994). Assim, foram identificadas as ressonâncias 3:1 e a ressonância secular ν_6 como uma das principais fontes de NEAs e a evidência que colisões com o Sol são relativamente freqüentes não apenas para cometas, como também para os NEAs e que vários mecanismos de ressonância poderiam trazer até o Sol um objeto pequeno no cinturão principal de asteróides.

Os resultados obtidos em (Morbidelli e Moons, 1995) com integrações numéricas mais realistas (inclusão de Vênus a Netuno em alguns casos) mostraram que a comensurabilidade 3:1 é fortemente caótica devido à interação entre várias ressonâncias seculares dentro da região de falha 3:1. Tais ressonâncias acarretam a precessão e deformação da órbita de Júpiter, tendo então como consequência indireta, intensas perturbações no processo de evolução orbital de um asteroide que se encontra na ressonância 3:1. É conveniente mencionar que as ressonâncias seculares ocorrem quando as frequências de precessão (g) e (s), respectivamente da longitude do periélio e do nodo do asteroide são comensuráveis com as frequências g_5 ou g_6 e s_6 , as quais são frequências próprias que aparecem em Teoria Secular Planetária. Em particular, as principais ressonâncias seculares ocorrem quando $g = g_5$, $g = g_6$ ou $s = s_6$ e geralmente são denominadas ressonâncias ν_5 , ν_6 e ν_{16} . O referido trabalho mostrou também que os asteroides em geral atingem excentricidades próximas de 1 e caem no Sol.

O esquema de integração numérica regularizado (swift_rmvs3) de variáveis mistas (Levison, Duncan, 1994), o qual é uma modificação do integrador de variáveis mistas simplético desenvolvido em (Wisdom, Holman, 1991), têm permitido desde então a compilação estatística de milhares de asteroides e cometas desde as regiões onde foram gerados até seu último estado dinâmico (colisão com Sol ou planeta, ou ejeção em órbita hiperbólica). Assim sendo, a partir de meados da década de 1990 tem sido possível investigar a origem, a dinâmica e a distribuição orbital estacionária de meteoróides, NEAs, e cometas de curto período num sentido estatístico quantitativo (Morbidelli, 2002). O apêndice 2 desse trabalho fornece uma descrição geral do programa de integração numérica swift_rmvs3, que está incluído no pacote de tarefas SWIFT.

No final da década de 1990, levantou-se o fato de que haveria mecanismos que abastecesse de objetos a vizinhança da ressonância 3:1. Uma possível explicação seria consequência do efeito Yarkovsky, que poderia trazer continuamente asteroides para ambos os bordos da falha (Vokrouhlický, Broz, 1999). Tal efeito é decorrente da reemissão térmica de um asteroide em rotação, o qual acarretaria um lento deslocamento em semi-eixo maior. Estima-se um desvio de 10^{-4} UA a cada milhão de ano, para corpos com diâmetro da ordem de 1 Km.

Finalmente, mencionaremos as referências, mais interligadas com nosso trabalho.

Em (Guillens, 1998) é mostrada a classificação global do espaço de fase da Hamiltoniana utilizada por Wisdom (1982), valendo-se do conceito e aplicação de Planos Representativos anteriormente mencionados e o estabelecimento de sua conexão com o método das superfícies de secção de Poincaré, quando a projeção dessa é realizada em variáveis adequadas. Essa classificação foi realizada em um único gráfico através de variáveis de fácil interpretação (*semi-eixo maior, excentricidade*). A extensão dessa classificação para conter trajetórias com altas excentricidades é realizada em (Guillens, Viera Martins e Gomes, 2002) onde a Hamiltoniana de Hadjidemetriou (1992) é então utilizada. A partir desse estudo semi-analítico, que será apresentado no capítulo 1, uma estimativa analítica para o contorno da falha 3:1 é obtida. Informações relevantes da dinâmica do Problema Restrito Médio Plano de 3 Corpos estão contidas no parâmetro que caracteriza distância ao contorno em termos de semi-eixo maior. Tal fato, viabilizou um critério de busca de asteróides observados e catalogados (não cruzadores de Marte a priori) e que se tornam instáveis, quando os campos gravitacionais de Vênus a Saturno são considerados. Além disso, foi evidenciado o papel da difusão caótica como um mecanismo de transporte de objetos que estão em regiões vizinhas da ressonância (fora da região de libração) para o interior da falha e que posteriormente serão removidos. A difusão caótica, a princípio, deveria ser considerada juntamente com outros processos de abastecimento de asteróides na ressonância 3:1 (eventos colisionais e efeito Yarkovsky). Devido a isso, Morbidelli e Vokrouhlický (2003) no cálculo do fluxo de asteróides do cinturão principal para regiões de ressonâncias, que são fontes de NEAs, deslocaram os bordos da ressonância 3:1 de 0.015 UA, considerando que o efeito deveria atuar até os limites da região difusiva e não até a região propriamente da ressonância (libração). É conveniente notar que os referidos bordos são obtidos com ajustes dos dados de elementos próprios na projeção (semi-eixo próprio, excentricidade própria).

Organizamos nosso trabalho em três capítulos e dois apêndices. No primeiro capítulo, apresentamos, a já mencionada classificação global do espaço de fase quadrimensional associada à Hamiltoniana de Hadjidemetriou (1992) (Guillens, Vieira Martins, Gomes, 2002) através do Plano Representativo. No Capítulo 2 apresentamos a aplicação dessa metodologia ao estudo de asteróides “reais”, considerando-se as trajetórias correspondentes ao modelo simplificado de 2 graus de liberdade do capítulo 1 como órbitas de referência

para um modelo mais realista que inclui os campos gravitacionais de Vênus a Saturno. No Capítulo 3, buscamos ilustrar a grande sensibilidade às condições iniciais do modelo mais realista e também apresentar algumas questões que surgem quando do estudo da evolução de longo período de um único asteroide real, cuja trajetória tenha sido evidenciada como caótica. Para tanto, “clones” (várias órbitas muito próximas à nominal) para o asteroide (5482) 1990 DX foram construídos e os resultados de suas integrações numéricas (pacote de tarefas SWIFT) apresentadas. É interessante ressaltar que esse asteroide no trabalho de (Guillens, Vieira Martins, 2005) foi descartado da integração por ter atingido o raio de “parada” da integração, que foi considerado como sendo o raio da Terra.

Nos apêndices 1 e 2, apresentamos uma descrição geral do método das Superfícies de Secção de Poincaré e do pacote de integração numérica SWIFT, respectivamente.

Capítulo 1:

Sobre a Classificação Global do Espaço de Fase através de um Plano Representativo para o Problema Restrito de 3 Corpos Médio

1.1 Representação das Falhas de Kirkwood

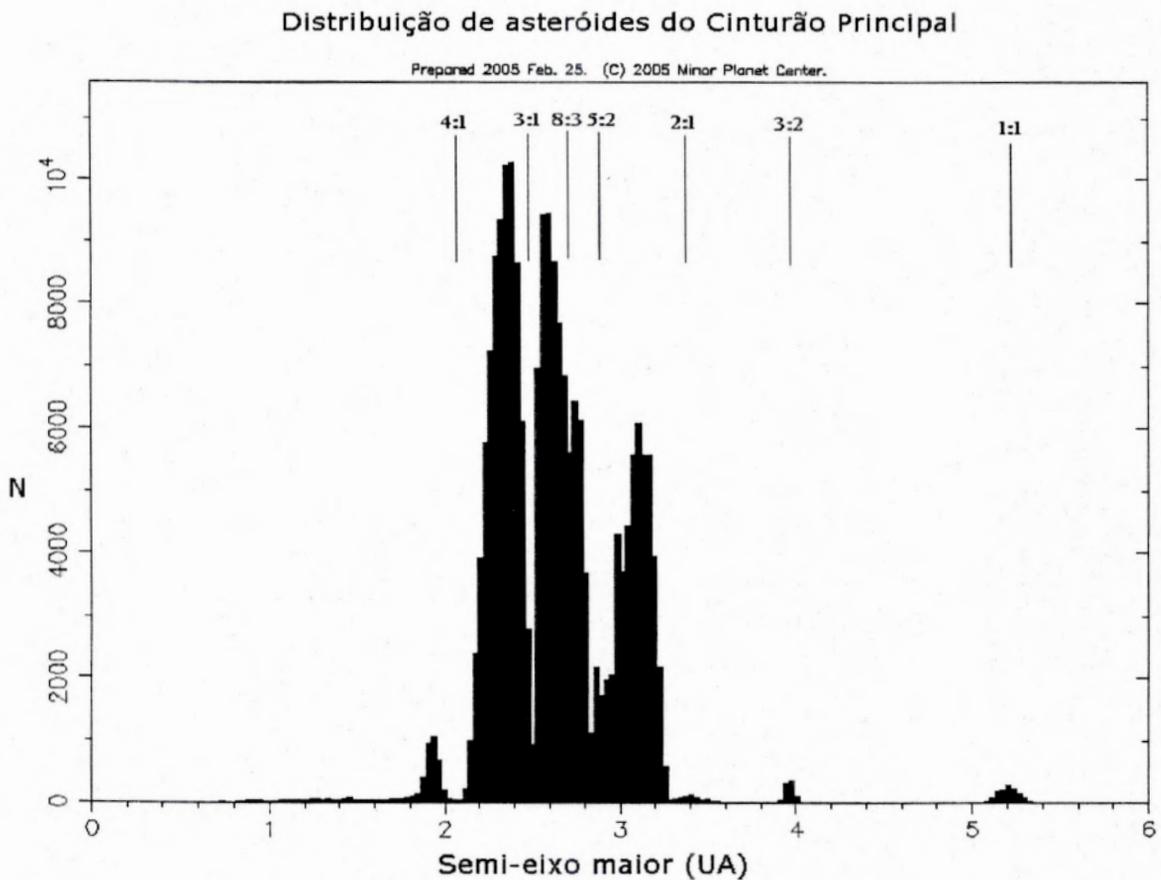


Figura 1.1 - Distribuição dos semi-eixos maiores dos asteróides do Cinturão Principal, mostrando as falhas de Kirkwood e indicando as ressonâncias de movimento médio mais importantes.

1.2 – A Hamiltoniana Média de Hadjidemetriou para a Ressonância Asteroidal 3:1 (caso Plano)

No estudo da ressonância 3:1, a modelagem dessa *Hamiltoniana* é realizada em termos das variáveis canônicas:

$$S = \sqrt{(1-\mu)a} (1 - \sqrt{1-e^2}), \quad \sigma = \frac{1}{2}(3\lambda_J - \lambda) - \varpi \quad (1)$$

$$N = \sqrt{(1-\mu)a} (3 - \sqrt{1-e^2}), \quad \nu = -\frac{1}{2}(3\lambda_J - \lambda) - \varpi_J$$

onde μ é a massa de Júpiter em unidades da soma das massas de Júpiter e do Sol e a, e, λ, ϖ são respectivamente o semi-eixo maior, a excentricidade, longitude média e longitude do periélio do asteroide. Os elementos com subscrito são referentes a Júpiter, cuja órbita é considerada uma elipse kepleriana fixa. A longitude média, por sua vez é definida por:

$$\lambda = \varpi + M$$

onde M é a anomalia média, um ângulo associado ao movimento circular uniforme e que aparece no escopo do Problema de Dois Corpos (Elíptico) :

$$M = n(t-T), \quad (2)$$

sendo T o tempo de passagem pelo periélio e n , a frequência angular constante (igual a $2\pi/P$), denominada movimento médio.

A Hamiltoniana no caso é dita média, pois os termos de curto período, que são os que contêm o ângulo M no potencial perturbador foram retirados, exceto os que contêm a

combinação envolvendo o ângulo $\theta = (\lambda - 3\lambda_J)$, o qual é denominado crítico, pois sua derivada temporal, segundo o Problema de 2 Corpos é dada por:

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \left(\frac{1}{P} - \frac{3}{P_J} \right) = n - 3n_J, \quad (3)$$

onde P e P_J são respectivamente os períodos orbitais do asteróide e de Júpiter e n e n_J correspondem a seus respectivos movimentos médios. Quando esse valor é nulo, pela 3ª Lei de Kepler, obtém-se o valor do semi-eixo associado à ressonância exata. Por outro lado, tal valor nulo gera pequenos divisores em teorias clássicas de perturbações. Por exemplo, as equações planetárias de Lagrange, descritas em termos de seis elementos orbitais, não poderiam ser utilizadas. Por outro lado, o denominado ângulo ressonante, sempre conterá o ângulo θ , uma vez que a informação da comensurabilidade orbital no sistema dinâmico simplificado está representada nos termos que os contém. No caso da ressonância 3:1, o ângulo ressonante é:

$$\theta + 2\varpi = \pi$$

As órbitas denominadas libradoras apresentam tal ângulo oscilando em torno de π durante a evolução temporal do mesmo.

A Hamiltoniana média de Hadjidemetriou (1992) é então colocada sob a forma:

$$H = H_0(N, S) + \mu H_1(N, S, \sigma) + \mu e_J H_2(N, S, \sigma, \nu) + H_c \quad (4)$$

sendo:

$$\begin{aligned}
H_0 &= -2(1 - \mu)^2 / (N - S)^2 - 3/2(N - S) \\
H_1 &= 2FS - (bS/N) \cos 2\sigma \\
H_2 &= \sqrt{2S} [G \cos(\sigma + \nu) + D \cos(\sigma - \nu)] + 2\mu e_J K \cos 2\nu \\
H_c &= -3.4\mu [1 - 6.4e_J \cos(\sigma + \nu)] S^3
\end{aligned}
\tag{5}$$

onde:

$b = 2.392398$, $D = 2.656407$, $F = -0.205070$, $K = -0.181477$, $G = 0.198705$, e o valor excentricidade de Júpiter é fixada em 0.048.

O termo H_0 contém o termo do problema de dois corpos e o termo correspondente à extensão do espaço de fase. É importante salientar que o processo de média é feito após a extensão do espaço de fase, pois o potencial perturbador é dependente da posição de Júpiter, a qual varia com o tempo. Para tornar o sistema conservativo, o parâmetro λ_J é transformado em coordenada generalizada e um novo momento conjugado é introduzido. O processo de média, em particular, retira os termos que contém λ_J , mas o termo correspondente ao seu momento conjugado permanece em H_0 , uma vez que a derivada temporal de λ_J no Problema de 2 Corpos é n_J .

A parcela H_c é o termo da Hamiltoniana, que Hadjidemetriou (1992) adicionou empiricamente para torná-la válida para altas excentricidades, ajustando-o de forma que a mesma se tornasse compatível com a existência de famílias de órbitas periódicas com altas excentricidades no Problema Restrito de 3 Corpos Plano (não médio) por ele investigadas. As constantes b , D , F , K e G , advém de funções do semi-eixo maior que são calculadas na ressonância exata, cujo valor nominal é 2.5004UA.

Desta forma, a representação da Hamiltoniana aqui colocada constitui uma representação mais simplificada do sistema dinâmico correspondente ao Problema de 3 Corpos Restrito Médio (Plano), que fica então reduzido a dois graus de liberdade.

1.3 O Plano Representativo

Como mostrado por Wisdom (1983), muitas das órbitas interceptam o semi-plano (a, e) (um semi-plano desde que $e \geq 0$) definido por:

$$\theta + 2\varpi = \pi \pmod{2\pi}$$

$$\varpi - \varpi_J = 0 \pmod{2\pi}$$

As órbitas que não interceptam este semi-plano, interceptam um outro, definido por:

$$\theta + 2\varpi = \pi \pmod{2\pi}$$

$$\varpi - \varpi_J = \pi \pmod{2\pi}$$

Podemos colocar esses dois semi-planos sob a forma:

$$\theta + 2\varpi = \pi$$

$$\text{sen}(\varpi - \varpi_J) = 0$$

onde, as coordenadas $(a, \text{ecos}(\varpi - \varpi_J))$ representam um plano único, (o denominado “Plano Representativo” segundo Wisdom).

Com o intuito de simplificar a notação eles serão denotados por Planos 1 e 2 e o gráfico único será representado pelas coordenadas já mencionadas. Sem perda de generalidade, pode-se considerar $\varpi_J = 0$, ou seja uma nova origem de contagem para o ângulo ϖ . Desse modo, os Planos 1 e 2:

Plano 1

$$\theta = \pi$$

$$\varpi = 0$$

Plano 2

$$\theta = \pi$$

$$\varpi = \pi$$

Lembrando que, $\theta = (\lambda - 3\lambda_J)$.

Embora os elementos orbitais não sejam canônicos, a princípio podemos pensar no espaço de fase quadridimensional associado à hamiltoniana H representado pelos elementos (a, e, θ, ϖ) , sendo que:

$$H(a, e, \theta, \varpi) = c$$

sendo c a constante da energia. As curvas de energia constante nos dois planos estão representadas na figura 3.

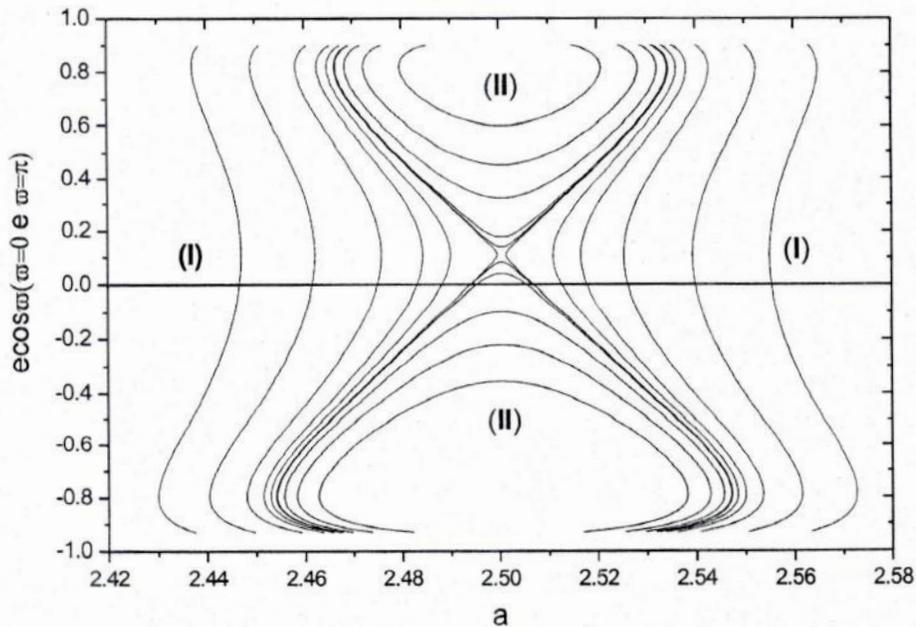


Figura 1.2 – Curvas de energia constante no Plano Representativo

É possível estabelecer (Guillens,1998) e (Guillens ,Vieira Martins ,Gomes, 2002) uma associação entre o plano representativo, curvas de energia constante e superfície de secção de Poincaré (apêndice 1). A condição adotada para a definir a superfície de secção é:

$$\theta + 2\varpi = \pi$$

Esta superfície de secção está contida no espaço quadridimensional (a, e, θ, ϖ) , e podemos expressá-la por:

$$H = H(a, e, \pi - 2\varpi, \varpi) = c \text{ ou } H = H(a, e, \varpi) = c \quad (6)$$

Se tal superfície for projetada convenientemente em termos de $(\cos \varpi, \sin \varpi)$, então, os pontos sobre esta projeção com $\varpi = 0$ e $\varpi = \pi$ correspondem respectivamente aos pontos sobre os Planos 1 e 2, uma vez que a condição que a define, é $\theta + 2\varpi = \pi$ (modulo 2π) em ambos os casos.

As curvas isoenergéticas do tipo (I) e (II) na Figura 1.2, são as que estão diretamente envolvidas com a questão da busca de estimativa para o contorno da ressonância, conforme abordaremos mais adiante. Assim, para um nível de energia correspondente a uma curva desse tipo, as Figuras 1.3(a) e 1.3(b) apresentam as secções correspondentes aos sentidos positivo e negativo de cruzamento, com $a < a_r$ e $a > a_r$, respectivamente, onde a_r é o valor do semi-eixo nominal da ressonância 3:1.

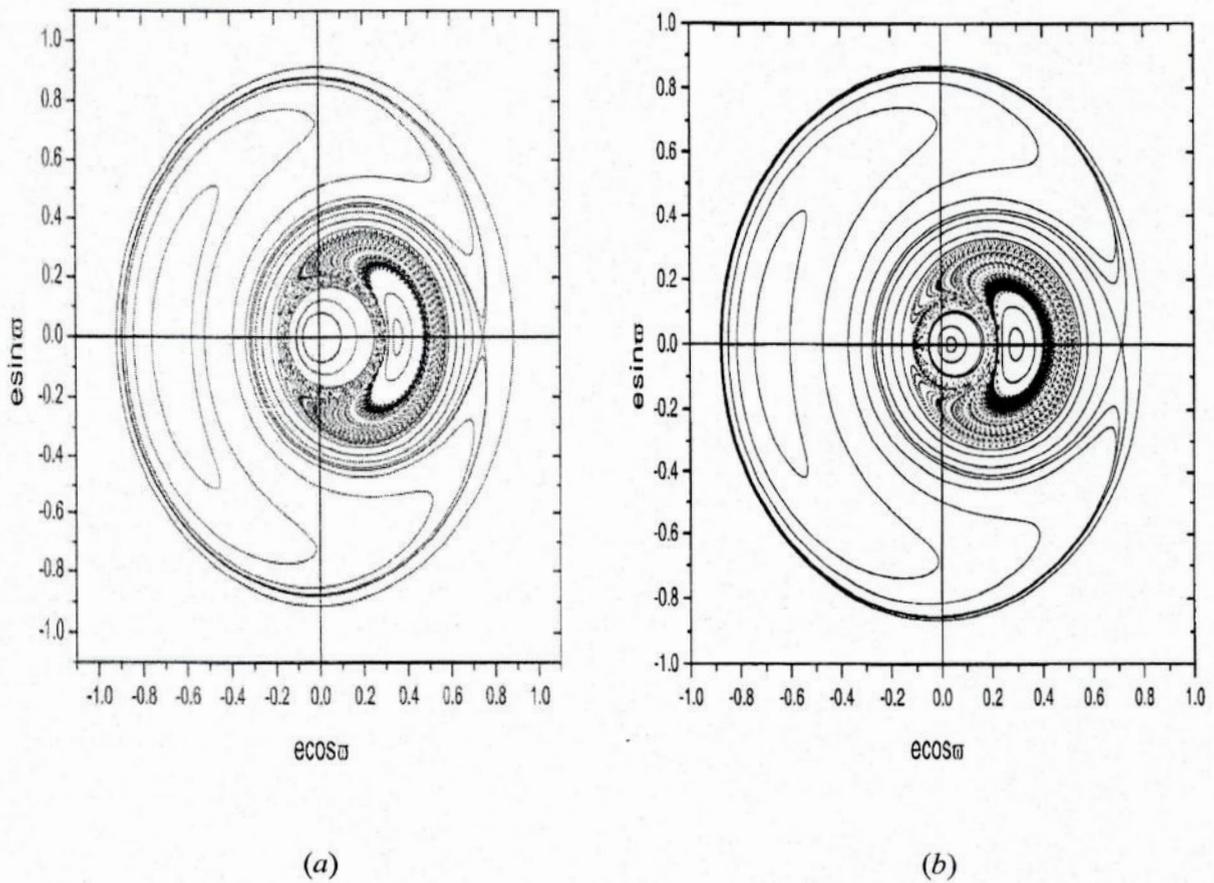


Figura 1.3 – As projeções $(e\cos\varpi, e\sin\varpi)$ com a derivada temporal do ângulo ressonante > 0 em (a) e < 0 em (b) correspondendo à $(a < a_r)$ e $(a > a_r)$, respectivamente. No caso, $c = -3.118159$

1.4- Classificação Global das órbitas no Espaço de Fase

As informações obtidas com essa associação aqui apresentada entre o Plano Representativo e superfície de secção conduzem a uma estrutura de pontos fixos nos Planos Representativos (Guillens, 1998, Guillens, Vieira Martins, Gomes, 2002), sobre as curvas de energia constante da Figura 1.2, quando da integração do sistema Hamiltoniano apresentado em (1.2) e a consideração dos ‘cruzamentos’ com os planos 1 e 2, com uma

“janela” de 2 graus. Essa metodologia aplicada no processo de integração numérica do sistema dinâmico associado à Hamiltoniana anteriormente mencionada, permite uma classificação global do espaço de fase, descrito em termos de semi-eixo maior e excentricidade, através de um único gráfico.

Apresentaremos aqui, para o nível de energia associado aos dois sentidos da secção mostrada nas Figuras 1.3(a) e 1.3(b), a tabela de símbolos que contém todas as possibilidades de movimento na “representação global plana” do espaço de fase:

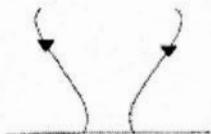
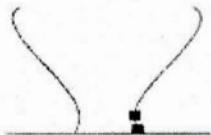
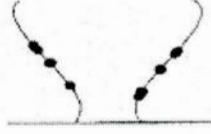
Símbolo	Caracterização e tipo de órbita	
▲		$\theta + 2\varpi$ - circulação
		ϖ - circulação
▼		$\theta + 2\varpi$ - libração
		ϖ - circulação
✕		$\theta + 2\varpi$ - libração
		ϖ - libração
■		$\theta + 2\varpi$ - circulação
		ϖ - libração
●		caótica

Figura 1.4 – Classificação dos tipos possíveis de órbitas. Na segunda coluna o eixo vertical corresponde à excentricidade e o eixo horizontal ao semi-eixo maior.

É importante observar que a referida tabela corresponde a um único nível de energia sobre o Plano Representativo 1, (caracterizado por $\varpi = 0$ e $\theta = \pi$). As órbitas caóticas não têm uma estrutura padrão, ou seja, um número constante de pontos fixos sobre o Plano Representativo. O número de pontos fixos é variável segundo as condições iniciais (a_0, e_0) sobre o plano representativo.

Com o objetivo de tornar claro a conexão entre secção e o Plano Representativo, estamos reproduzindo o nível de energia adotado na secção mostrada na Figura 1.3, indicando ilustrativamente a correspondência entre os pontos fixos no Plano Representativo e as órbitas da secção (Figura 1.5).

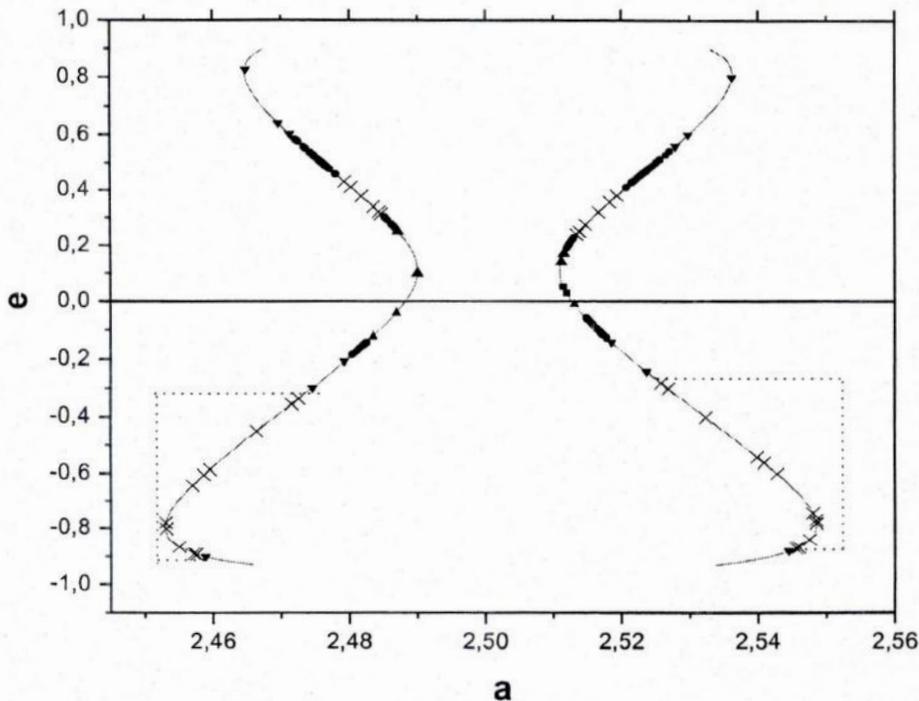
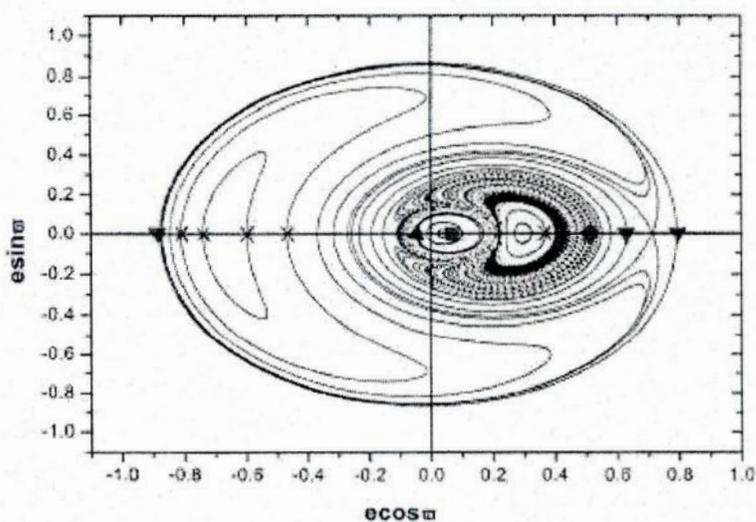
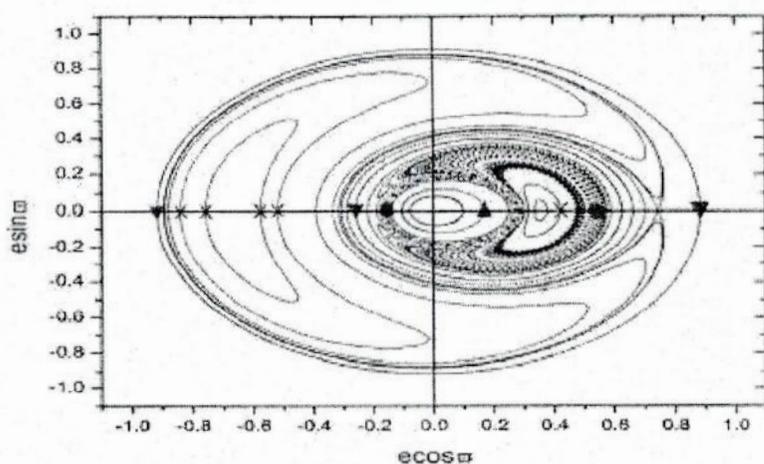


Figura 1.5 – Órbitas isoenergéticas no Plano Representativo, para as curvas do tipo (I) da Figura 1.2 e o valor correspondente às secções da Figura 1.3. O ramo esquerdo associa-se ao à Figura 1.3(a) e o direito à Figura 1.3(b). O nível foi selecionado, uma vez que contém todas as possibilidades de movimentos.

É importante observar que a região delimitada na Figura 1.5 corresponde à corrotação para altas excentricidades e a mesma ocorre apenas no Plano 2. Agora, estamos retomando a Figura 1.3, indicando os símbolos que correspondem ao cruzamento das soluções numéricas do sistema Hamiltoniano simplificado com o Plano Representativo, gerando as estruturas de pontos fixos.



Para as órbitas do tipo \blacktriangle , quando $a_o < a_r$, não há pontos correspondentes no outro sentido da secção e vice-versa. Por isso, são caracterizadas por um único ponto fixo.

A classificação global do espaço de fase é então viabilizada quando se repete tal procedimento ilustrado na Figura 1.5 para vários outros níveis de energia da Figura 1.2. É desta forma que as informações relevantes do sistema quadrimensional sobre esses vários níveis de energia se encontram num único gráfico.

O mesmo procedimento indicado para as curvas de energia constante do tipo I foi realizado para as curvas do tipo (II) na Figura 1.2. Nesse último caso, a metodologia do Plano Representativo torna-se mais significativa, uma vez que a secções são difíceis de serem obtidas, já que a derivada temporal do ângulo ressonante torna-se muito próxima de zero, inviabilizando a aplicação do método das superfícies de secção. É importante notar que todos os níveis passam pelo valor da ressonância exata, onde então a referida derivada é nula.

A figura obtida então com tal procedimento esta representada na Figura 1.6.

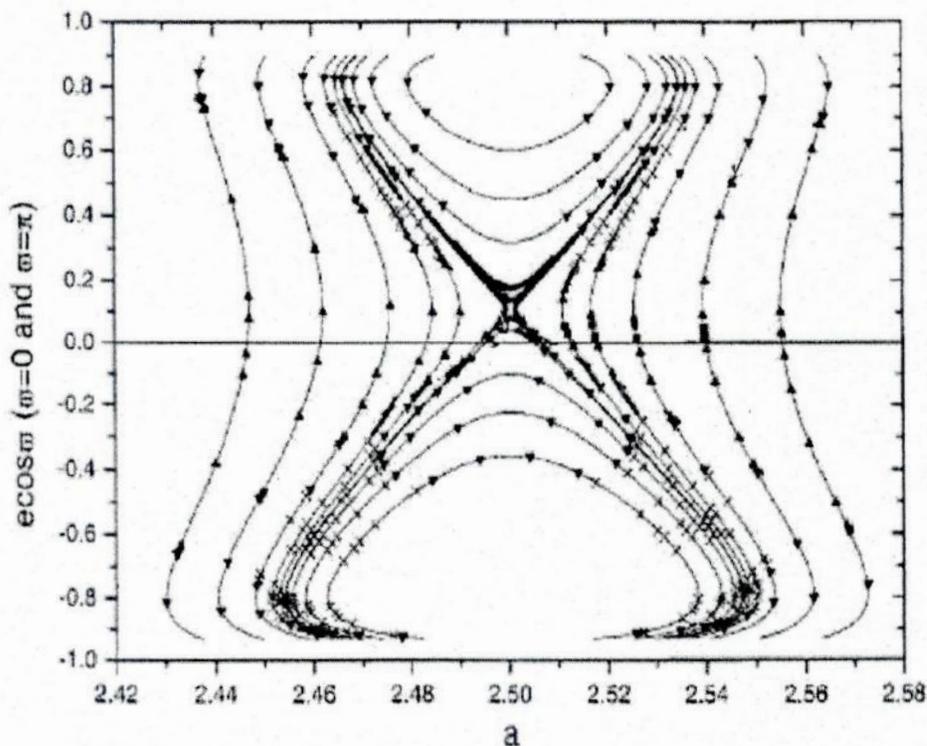


Figura 1.6 – A classificação global do espaço de fase associado ao Problema Restrito de 3 Corpos Médio Plano sobre o Plano Representativo.

1.5 - Um Contorno Estimado para a Falha 3:1

Na Figura 1.6, pode-se observar que o ângulo ressonante no regime de circulação é dominante para curvas mais externas do tipo (I), ao passo que as órbitas libradoras ou caóticas são mais densas nas curvas mais internas do tipo (I) e em todas as curvas do tipo (II) da Figura 1.2. Porém, sabe-se que a inclusão de Saturno e as perturbações devido a outros planetas, desestabilizam as regiões ressonantes, e sob o efeito das ressonâncias seculares nas órbitas asteroidais, faz com que muitas atinjam excentricidades próximas de 1 e caiam no Sol (Morbidelli, Moons, 1995). O trabalho de Gladman, et al, (1997), mostrou que para uma população de objetos uniformemente distribuída dentro da ressonância 3:1, 70% desta colide com o Sol e 28% é ejetada em órbita hiperbólica.

Desse modo, a delimitação da região de circulações propicia uma estimativa do contorno para a falha 3:1, onde através de polinômios de baixa ordem, podem então ser obtidas expressões analíticas para os contornos à esquerda e à direita da região de ressonância (Guillens, Vieira Martins, Gomes, 2002). Os erros em semi-eixo maior são menores que 0.001 e menores que 0.01 para excentricidades. Para ilustrar esse procedimento, a Figura 1.7 reproduz a Figura 1.6 incluindo os bordos estimados para a ressonância. A Figura 1.8 foi construída para deixar bem claro que a região caótica não é dominante no espaço de fase quadrimensional do sistema dinâmico associado à Hamiltoniana de Hadjidemetriou.

Como no decorrer do trabalho será utilizado o parâmetro definido pela distância ao contorno da ressonância (em termos de semi-eixo maior), então as equações envolvidas nos ajustes do contorno são apresentadas a seguir:

Para o lado direito:

$$a = \{2.5087 - 0.1060e - 0.0058e^2, \text{ se } e \in [-1, 0.01]\};$$

$$a = \{2.5091 - 0.1518e + 0.088e^2 + 15.987e^3 - 63.293e^4, \text{ se } e \in [0.01, 0.1062]\};$$

$$a = \{2.4944 + 0.0998e, \text{ se } e \in [0.1062, 1]\}.$$

Para o lado esquerdo:

$$a = \{2.4970 - 0.1004e, \text{ se } e \in [-1, -0.0715]\};$$

$$a = \{2.4982 + 0.0756e - 0.7311e^2 - 0.8025e^3 + 14.2777e^4 - 27.9914e^5, \\ \text{ se } e \in [-0.0715, 0.2741]\};$$

$$a = \{2.5043 - 0.0509e - 0.0909e^2 + 0.0534e^3, \text{ se } e \in [0.2741, 1]\}.$$

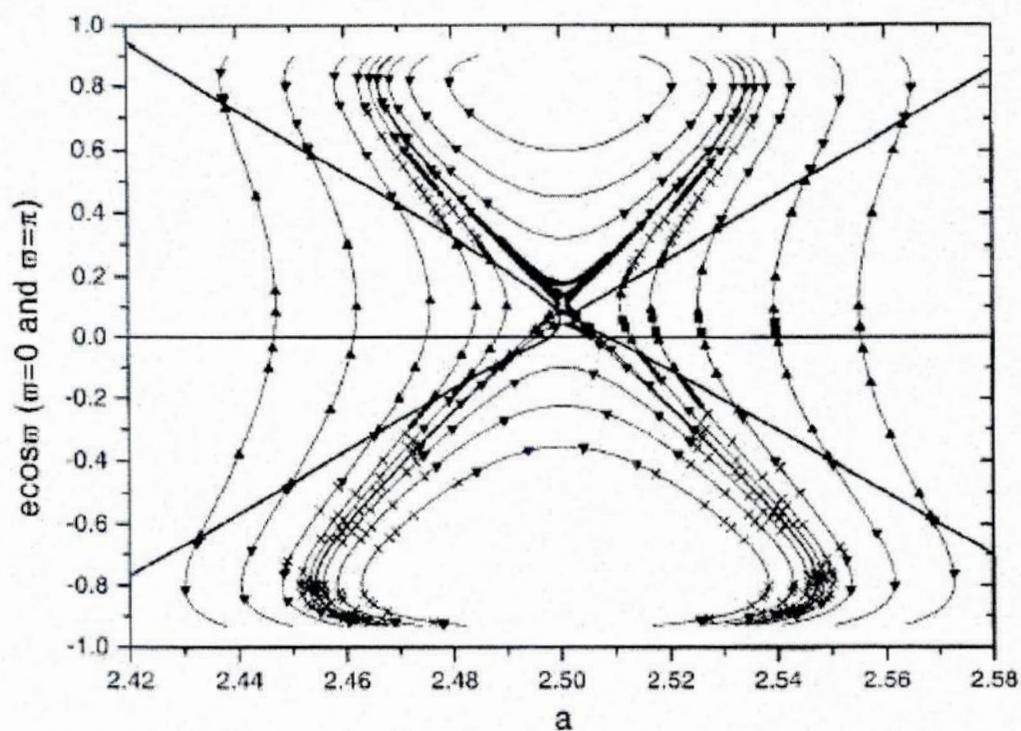


Figura 1.7 – Representação dos bordos da ressonância na Figura 1.6.

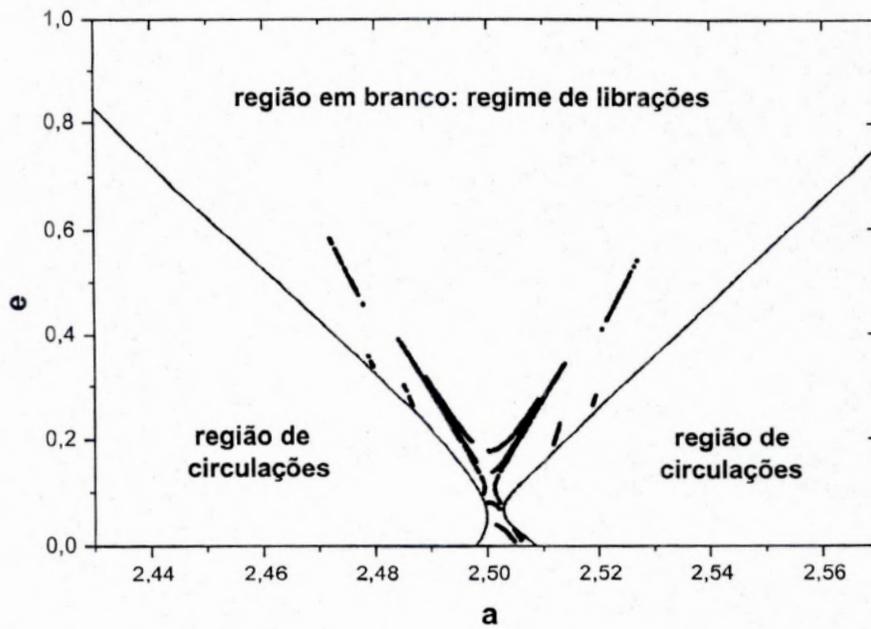


Figura 1.8 – Regimes com relação ao ângulo ressonante, distinguindo as órbitas caóticas sobre o Plano Representativo I e o contorno estimado para a falha 3:1.

Capítulo 2

Evolução Dinâmica de Asteróides Reais - Aplicação da Metodologia do Plano Representativo a um Problema de Vários Corpos

2.1- Da seleção dos asteróides

Os asteróides foram selecionados dentro de uma amostra de 594 asteróides integrados numericamente com a inclusão de Vênus a Saturno por (Guillens, Vieira Martins, 2005), a qual é baseada no banco de dados de asteróides do Observatório de Lowell (<ftp://ftp.lowell-1.edu/pub/elgb>) e *Bureau des Longitudes* (<http://www.bdl.fr>) para a obtenção das coordenadas cartesianas heliocêntricas de posição e velocidade dos planetas para uma época fixa padrão: 18/11/1999.

Ainda com relação à tal referência, estão sendo considerados os seguintes critérios: $2.42 \leq a \leq 2.58$, $i < 10^\circ$ e $e < 0.3$ (exceto os que já se encontram na ressonância) e o esquema *rmvs3* do pacote SWIFT para as integrações numéricas.

O limite em excentricidade se justifica, pois o objetivo é uma melhor compreensão do processo de difusão caótica no transporte de asteróides para a região da ressonância 3:1. O limite em inclinação é devido ao fato que os asteróides são selecionados segundo o Problema Restrito de 3 Corpos Médio Plano.

Em nosso estudo, a partir da amostra acima mencionada, foi selecionada uma sub-amostra com 5 asteróides, segundo os seguintes critérios:

- 1- Um NEA catalogado: (887) Alinda;
- 2- Dois asteróides, em lados opostos da ressonância, cujas excentricidades osculadoras são menores que 0.2 (não cruzadoras de nenhuma órbita planetária a priori) e que a partir de um certo instante de tempo, se caracterizaram como NEAs e posteriormente são removidos da falha.

- 3- Dois asteróides não removidos da integração e que se mantêm um à esquerda e outro à direita do contorno, durante o tempo total de integração (100 milhões de anos).

A tabela 2.1 apresenta dados referentes aos asteróides por nós seleccionados.

Asteróide	$a(t_0)$ (UA)	$e(t_0)$	$i(t_0)$	$apl(t_0)$ (UA)	$epl(t_0)$	delta(UA)	Tempo 10^6 anos	Estado Final
887	2.4855	0.56292	9.30616	2.4600	0.57923	-0.00535	1.400	Escapa
5482	2.5208	0.19146	4.34119	2.5286	0.26203	0.00800	22.087	Terra
6623	2.4825	0.13675	4.54404	2.4783	0.21778	0.01181	47.336	Sol
30439	2.4829	0.11333	6.19480	2.4821	0.17663	0.01311	100.000	Estável
38807	2.5190	0.16352	6.76796	2.5188	0.16421	0.00799	100.000	Estável

Tabela 2.1 – Apresentamos aqui os asteróides estudados. A primeira coluna contém a numeração destes asteróides e nas três colunas seguintes são mostrados os valores iniciais de seus elementos osculadores ($a(t_0)$, $e(t_0)$, $i(t_0)$). Na quinta e sexta coluna, as correspondentes coordenadas iniciais (semi-eixo e excentricidade) do Plano Representativo 1, apl e epl . Incluímos também o parâmetro delta na coluna seguinte, que é a distância ao contorno, em termos da coordenada semi-eixo do Plano Representativo (o valor de delta negativo corresponde a pontos dentro do contorno da ressonância 3:1). Completa a tabela, o tempo em que o asteróide permanece na integração, e o Estado Final de cada um.

A Tabela 2.1, apesar do pouco número de objetos, evidencia o resultado obtido por Guillens, et al. (2002) e (Guillens, Vieira Martins, 2005), onde não há correlação entre a distância ao contorno e o tempo de vida. Ressaltamos que o valor (apl , epl) em tal tabela, refere-se aos valores registrados durante o primeiro cruzamento com o Plano Representativo 1 (caracterizado pelas condições : $\theta + 2\varpi = \pi$, $(\varpi - \varpi_J) = 0$), durante o processo de integração numérica das equações canônicas de movimento associadas à Hamiltoniana de Hadjidemetriou (Capítulo 1, ítem 1.2). Agora, por se tratar de uma aplicação a objetos reais, ϖ_J assume o valor correspondente à época considerada. As condições iniciais são calculadas a partir dos elementos orbitais osculadores de 18/11/1999

(t_0), que é a data fixada em (Guillens, Vieira Martins, Gomes, 2002) e também na amostra de 594 asteróides em (Guillens, Vieira Martins, 2005).

A título de ilustração, a figura que apresentaremos a seguir contém algumas informações apresentadas no capítulo 2. A Figura 2.1 foi construída mostrando as curvas de energia constante, assim como a estrutura de pontos fixos das órbitas dos asteróides 'reais' obtidas sobre o plano representativo I durante a integração numérica do Problema Restrito de 3 Corpos Médio Plano para nossa amostra. Para os símbolos e os números de pontos para cada órbita, segue a classificação adotada na Figura 1.4.

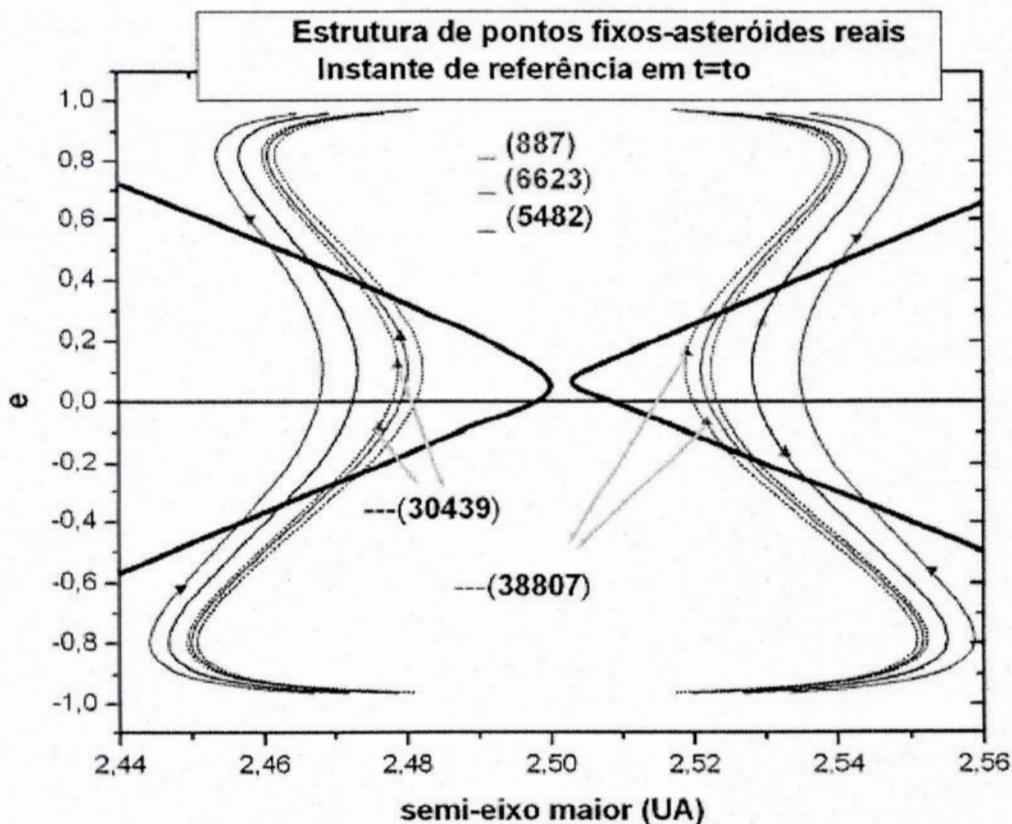


Figura 2.1 – Estrutura de pontos fixos para os asteróides reais no instante de referência $t = t_0$

2.2 – Sobre a Metodologia para o Estudo da Evolução Dinâmica com a inclusão de outros Planetas

O processo adotado envolve as seguintes etapas:

- a- Utilização do arquivo de saída dos elementos orbitais do SWIFT, o qual contém 10 mil pontos se o asteroide não for removido (valor adotado para o intervalo de tempo da saída de dados-apêndice 2) e o arquivo de saída de elementos orbitais para Júpiter. Quando da consideração de ambos os arquivos no instante $t = 0$, obtém-se a figura 2.1, correspondendo à soluções numéricas do Problema Restrito de 3 Corpos Médio sobre o Plano Representativo I , conforme já mencionado no item 2.1. Para cada instante de tempo t os elementos correspondentes de tais arquivos serão considerados como dados de entrada para a aplicação da metodologia do Plano Representativo.
- b- Durante a integração numérica do sistema hamiltoniano de Hadjidemetriou, o programa será interrompido após o primeiro cruzamento com o Plano Representativo I . Como conhecemos a estrutura global do espaço de fase sobre o mesmo, basta apenas um ponto para se classificar as possíveis trajetórias.
- c- Quando então se esgotar todas as linhas do arquivo de elementos orbitais (saída do SWIFT de um dado asteroide, mencionada em (a)), obtém-se uma conjunto de pontos $(apr(t), epr(t))$, que corresponde à evolução temporal resultante da inclusão de mais planetas perturbadores. Isso significa que estamos considerando instantaneamente o Problema Restrito de 3 Corpos Médio Plano como órbitas de referência.

Podemos então, desse modo, para cada instante registrar as informações que temos da classificação global do espaço de fase (Capítulo 1) em um único gráfico. A exemplo do que

foi mencionado quando da conexão entre Plano Representativo e Secção de Poincaré, podemos afirmar que se o arquivo de elementos orbitais do SWIFT contiver n linhas, então estamos resgatando informações relevantes de n secções de Poincaré instantâneas para cada asteróide considerado.

No próximo item, a questão metodológica, será mais enfaticamente abordada no caso do asteróide (6623), devido à sua maior riqueza de detalhes.

É importante ressaltar que devido a natureza fortemente caótica dos objetos que já se encontram ou podem ser transportados para a ressonância 3:1, os resultados de integração numérica não podem ser interpretados como previsões determinísticas sobre longos intervalos de tempo.

2.3- Evolução Dinâmica dos Asteróides

a) (6623) 1979MY2

Asteróide que se localiza inicialmente no lado esquerdo da falha, tendo excentricidade moderada.

A Figura 2.2 mostra a evolução dinâmica do asteróide no Plano Representativo, mostrando a saída deste da ressonância direcionando-se para o Sistema Solar interior, onde depois da evolução de 47.3 milhões de anos, cai no Sol. Quanto à esta figura e as demais que serão apresentadas posteriormente, observemos que, a idéia da evolução temporal está na interligação dos sucessivos pontos de cada gráfico.

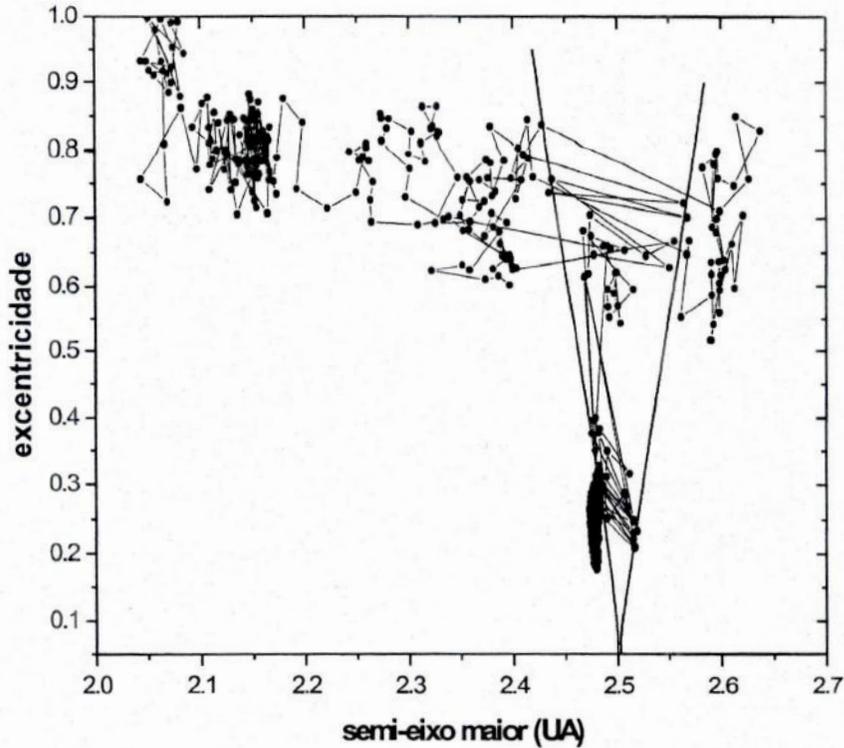


Fig 2.2 – Asteróide (6623) no Plano Representativo

A Figura 2.3 mostra a evolução do asteróide, adotando-se as soluções sobre Plano Representativo como referência e o cruzamento de várias regiões destas. Observamos a passagem imediata pelas regiões de caos, logo assim que o asteróide cruza o contorno. Chamamos a atenção, pelo fato de muitos pontos da referida figura se situarem nessas regiões caóticas e também nas regiões de libração do ângulo ressonante, onde a excentricidade se encontra com valores acima de 0.6 (suficientes para fazer com que o asteróide tenha encontros próximos com a Terra). Há menos pontos na região de libração nos dois ângulos (corrotação), $\theta + 2\varpi = \pi$ e $\varpi - \varpi_J = 0$. Nas regiões onde as curvas isoenergéticas são do tipo II (Figura 1.2), seria praticamente impossível de se fazer secções de Poincaré instantâneas, devido ao problema de transversalidade, causado pelos baixos valores da derivada temporal do ângulo ressonante.

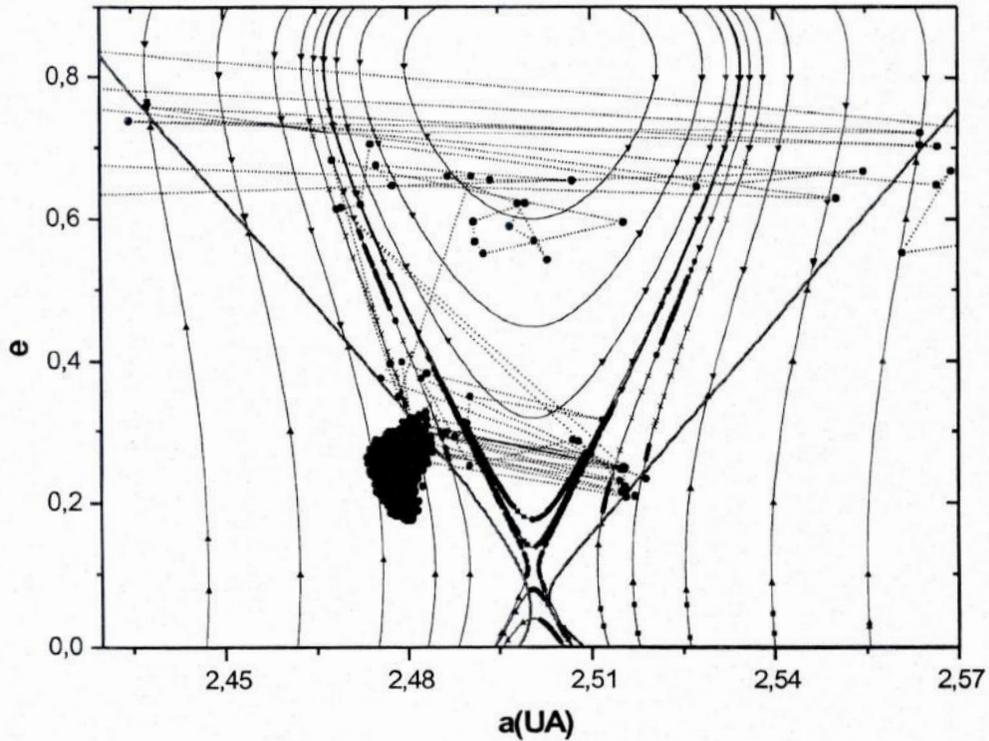


Figura 2.3 – Asteróide (6623) no Plano Representativo mostrando o cruzamento de regiões de órbita caótica durante a evolução dinâmica.

Um asteróide NEA se caracteriza por possuir distância periélica q e distância afélica Q entre os seguintes valores:

$$q < 1.3UA \quad \text{e} \quad Q > 0.983 UA$$

Na Figura 2.4, o plano (q, Q) para o asteróide (6623), mostra que este se torna um NEA, quando de seu transporte (também mostrada na Figura 2.5) para as regiões internas do Sistema Solar.

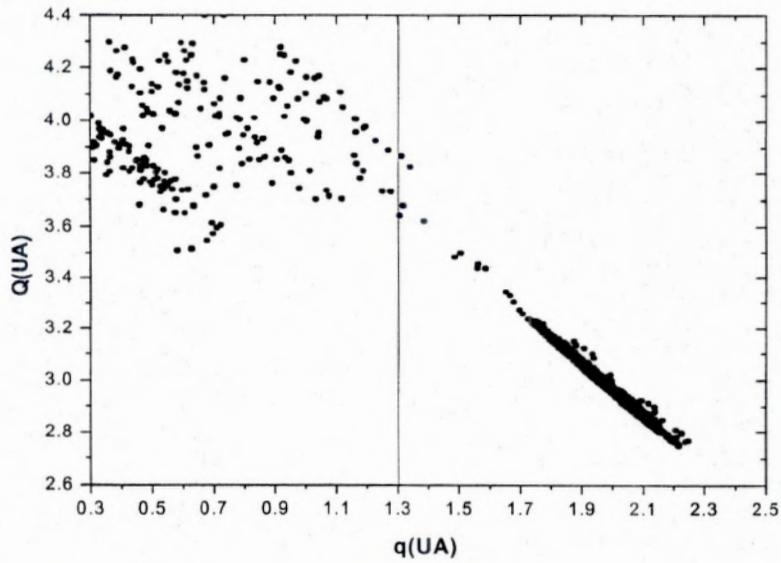


Figura 2.4 – (6623) em seu estágio de NEA a partir do valor $q < 1.3$ UA.

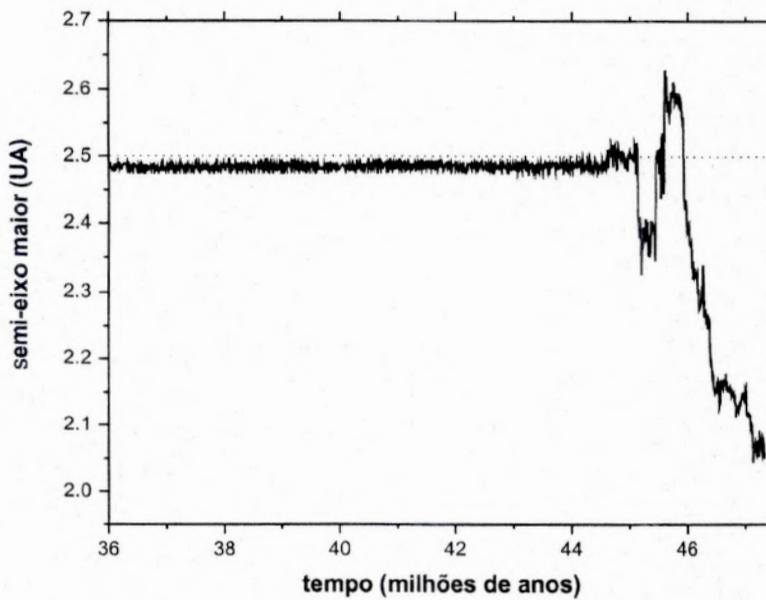


Figura 2.5 – Evolução do semi-eixo maior do asteróide (6623), e o valor nominal da ressonância 3:1. O intervalo de tempo decorrido entre o primeiro estágio de entrada na ressonância e seu estado final evolutivo (colisão solar) é de cerca de 3 milhões de anos.

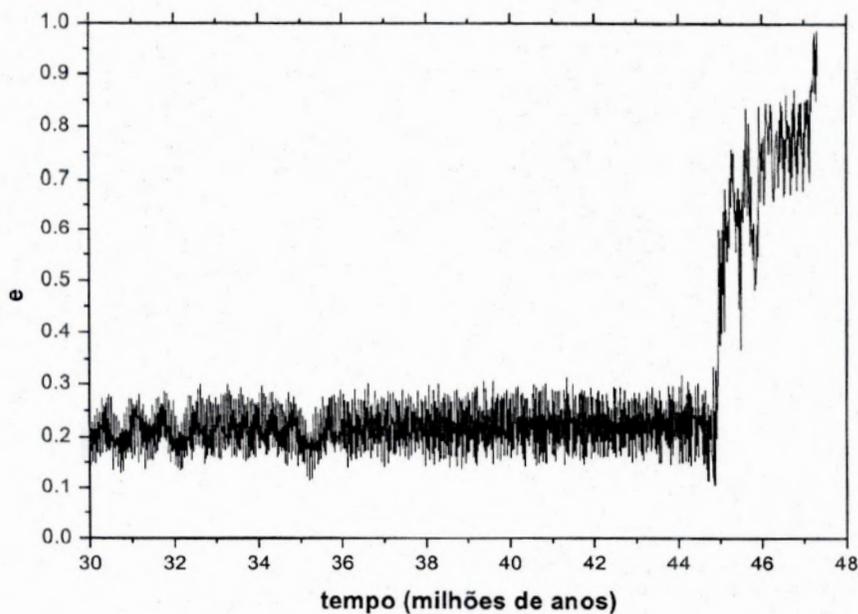


Figura 2.6 – Evolução orbital da excentricidade do asteroide (6623). Por volta de 45 milhões de anos, o asteroide se torna um cruzador da órbita de Marte.

b) (5482) 1990DX

Assim como no caso do asteroide anterior, no instante t_0 , o asteroide (5482) possui excentricidade osculadora inicial moderada (Tabela 2.1) e situa-se na região de circulação do ângulo ressonante, porém à direita da falha. A seguir, apresentaremos primeiramente a evolução orbital no plano osculador (a, e).

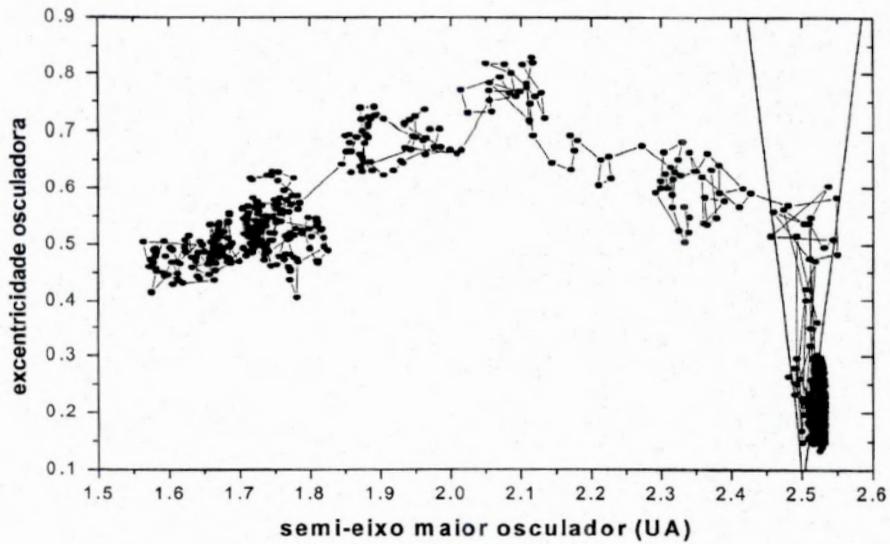


Fig 2.7 - Evolução dinâmica completa no plano (a,e) osculador mostrando a remoção do asteróide (5482) da ressonância 3:1.

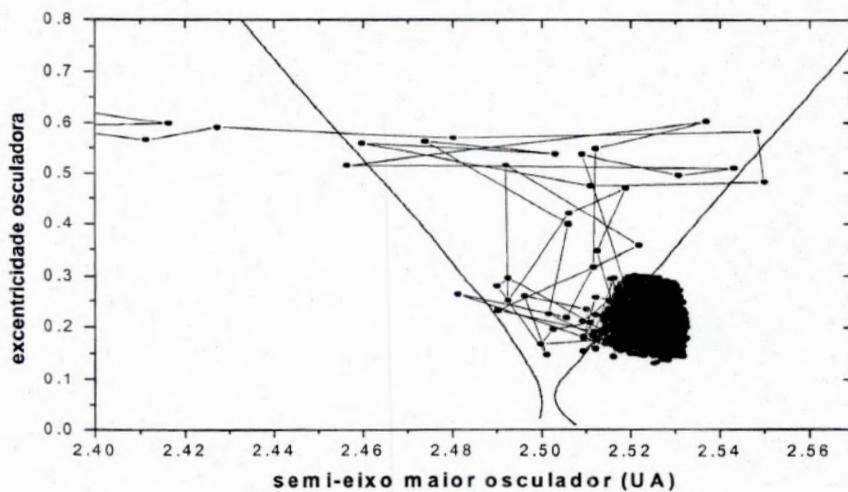


Figura 2.8 – Ilustração da remoção do asteróide (5482) da ressonância 3:1.

As próximas Figuras (2.9 e 2.10) ilustram o processo evolutivo, porém agora, com a metodologia do item 2.2.

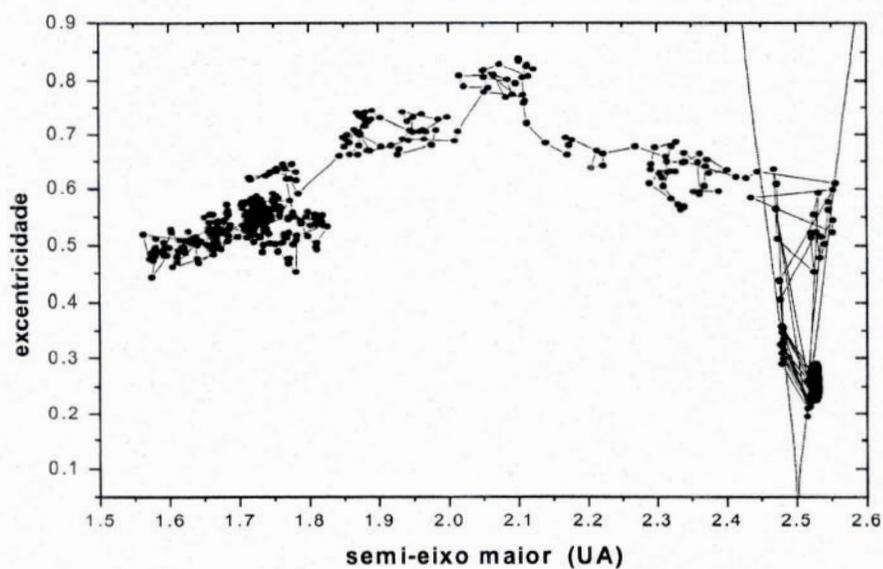


Figura 2.9 – Asteróide (5482) no Plano Representativo

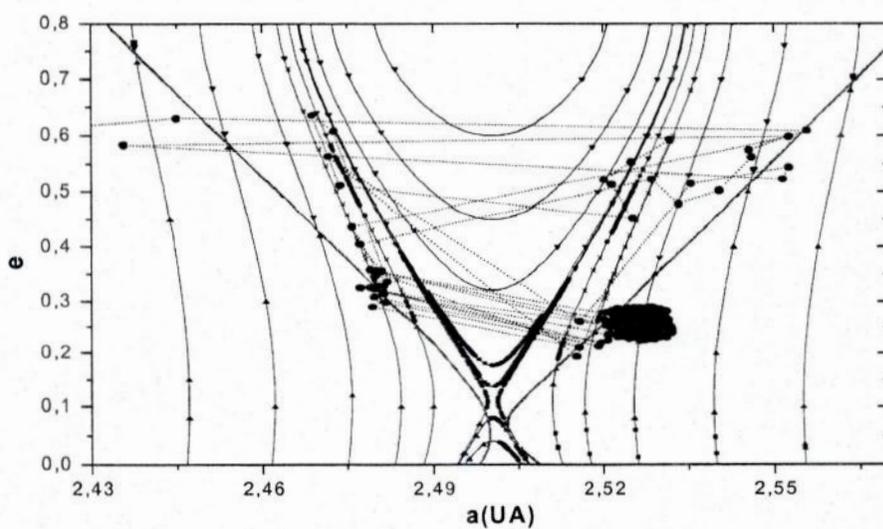


Figura 2.10 – Regiões do Espaço de fase sobre o Plano Representativo onde as órbitas instantâneas de referência estão localizadas.

Analisando-se as Figuras 2.8 e 2.10, podemos notar que dentro da região de maior interesse que corresponde à ressonância 3:1 (dentro do contorno), há diferenças significativas entre a evolução temporal mostrada nos planos (a,e) osculador e no plano representativo. Isso não ocorre para as regiões fora da ressonância.

Com a Figura 2.10, foi possível evidenciar a partir do Plano Representativo, duas regiões distintas dentro da ressonância:

- 1- Uma região bem delimitada onde a excentricidade do asteroide apresenta oscilações regulares que os leva a periodicamente a cruzar a órbita de Marte. Podemos observar que esse comportamento se mantém até que a excentricidade atinja valores próximos de 0.35 (Nesvorný et al, 2002). Tal fato não é evidente, quando se considera a evolução no plano osculador (a,e) , conforme Figura 2.8;
- 2- Uma outra região mais larga e ampla, onde a evolução da excentricidade é fortemente caótica, atingindo rapidamente valores muito altos.

Sobre o efeito dos encontros com Marte, os corpos na primeira região, podem facilmente ser direcionados para a região do bordo da ressonância e rapidamente se tornarem NEAs. Segundo o trabalho de Gladman, et al (1997), para uma população inicial uniformemente distribuída dentro da ressonância, o tempo médio requerido para cruzar a órbita da Terra é cerca de 1 milhão de anos e o tempo de vida médio é de aproximadamente 2 milhões de anos.

Por outro lado, o asteroide (5482) não estava inicialmente dentro da ressonância, conforme está evidenciado na Figura 2.11, podemos constatar que o mesmo se mantém fora da ressonância por mais de 18 milhões de anos (correspondente a região mais densa de concentração de pontos, das Figuras 2.8 e 2.10). Lembrando que seu tempo de vida é de aproximadamente 22 milhões de anos, o tempo de permanência dentro da ressonância propriamente dita, é cerca de 3 a 4 milhões de anos. Os fatos acima mencionados

caracterizam o papel da difusão caótica na injeção de objetos na ressonância 3:1, conforme foi evidenciado em (Guillens et al ,2002).

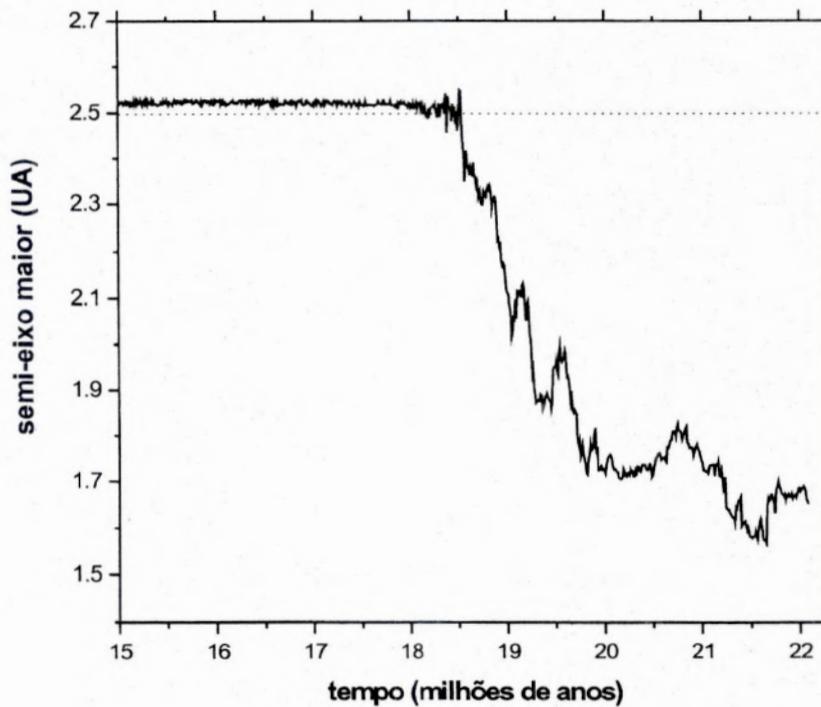


Figura 2.11 - Evolução do semi-eixo maior para o asteroide (5482), caracterizando a remoção do asteroide da ressonância, antes do encontro próximo com a Terra. Essa figura contém também o valor de semi-eixo nominal da ressonância 3:1.

O estado final nesse caso é a colisão com a Terra (Tabela 2.1) e o asteroide se torna um NEA, após ter saído definitivamente da ressonância (Figura 2.12).

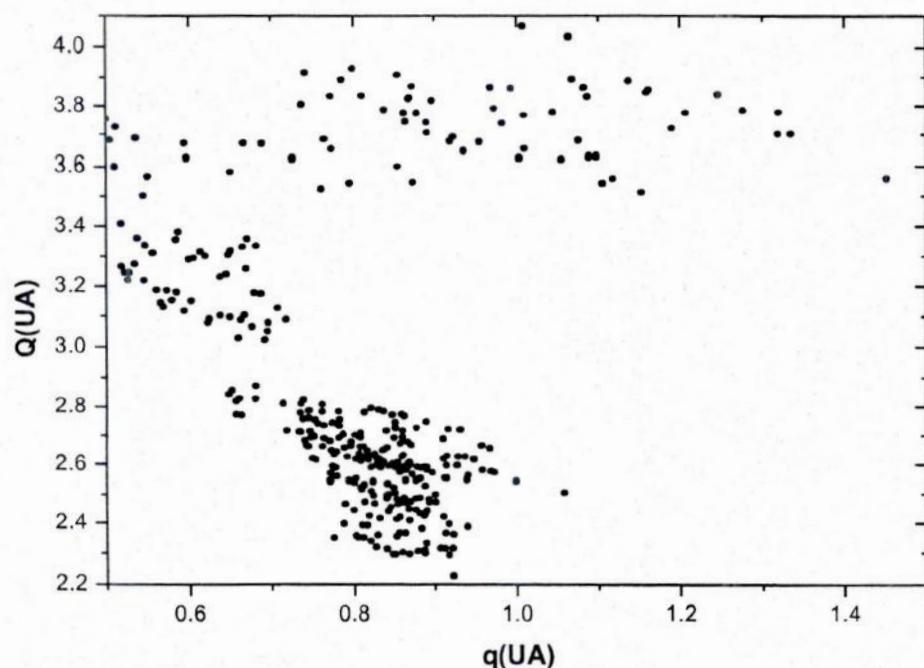


Figura 2.12 – Caracterização do asteróide (5482) como NEA na etapa final de sua evolução orbital.

É interessante lembrar que, conforme mencionado no item 2.2, não necessariamente o asteróide (5482) colidirá com a Terra. A dinâmica de um asteróide real deverá ser tratada estatisticamente através da integração de órbitas que se assemelhem a órbita deste asteróide, ou seja, órbitas fictícias em uma vizinhança muito próxima da órbita nominal (clones). Embora a evolução dinâmica de longo período de asteróides reais tratados individualmente não seja objetivo desse trabalho, no Capítulo 3, algumas considerações sobre o procedimento adequado a tal situação serão abordadas.

A título de ilustração, apresentamos a evolução temporal da excentricidade desse asteróide na Figura 2.13.

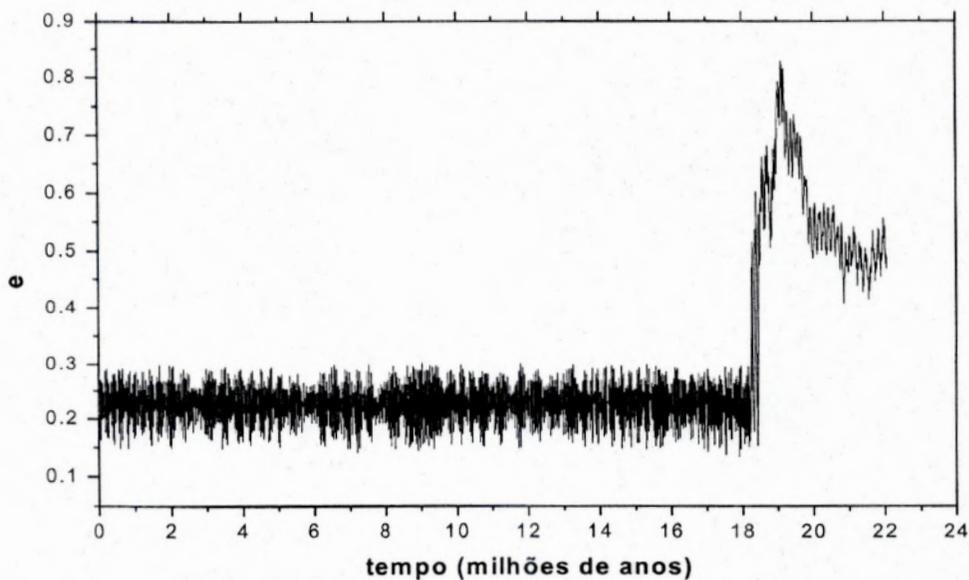


Figura 2.13 – Evolução da excentricidade para o asteroide (5482)

Observamos que até cerca de 18 milhões de anos, a excentricidade se mantém com valor abaixo de 0.3 e nas proximidades de 19.5 milhões de anos, a excentricidade atinge seu valor máximo.

c) (887) Alinda 1918DB

Analisamos o asteroide (887) Alinda, catalogado como NEA e que se encontra na ressonância 3:1. Podemos constatar isso na Figura 2.14, onde relacionamos Q contra q .

Posteriormente, apresentaremos a evolução dinâmica deste asteroide, segundo as trajetórias de referências instantâneas no Plano Representativo, conforme Figura 2.15.

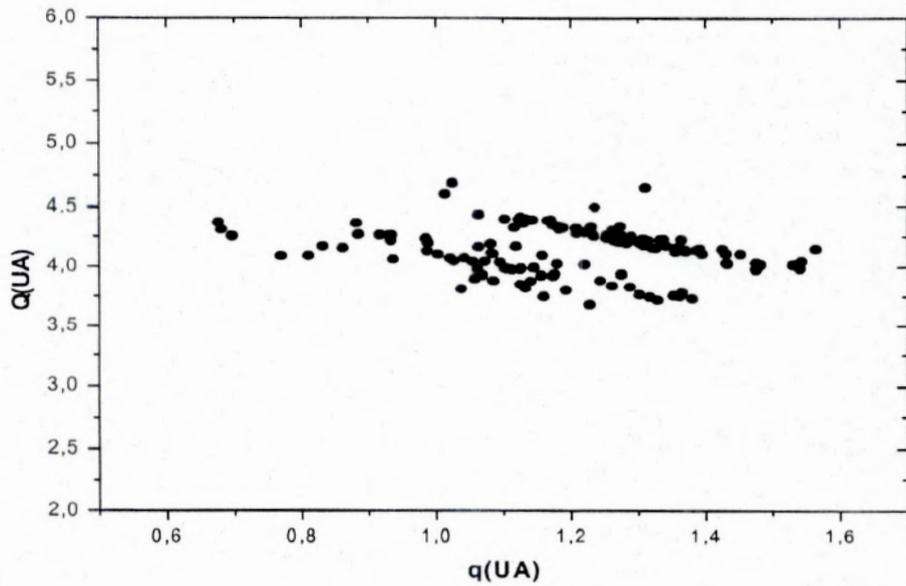


Figura 2.14 – Asteróide (887) Alinda, um NEA catalogado.

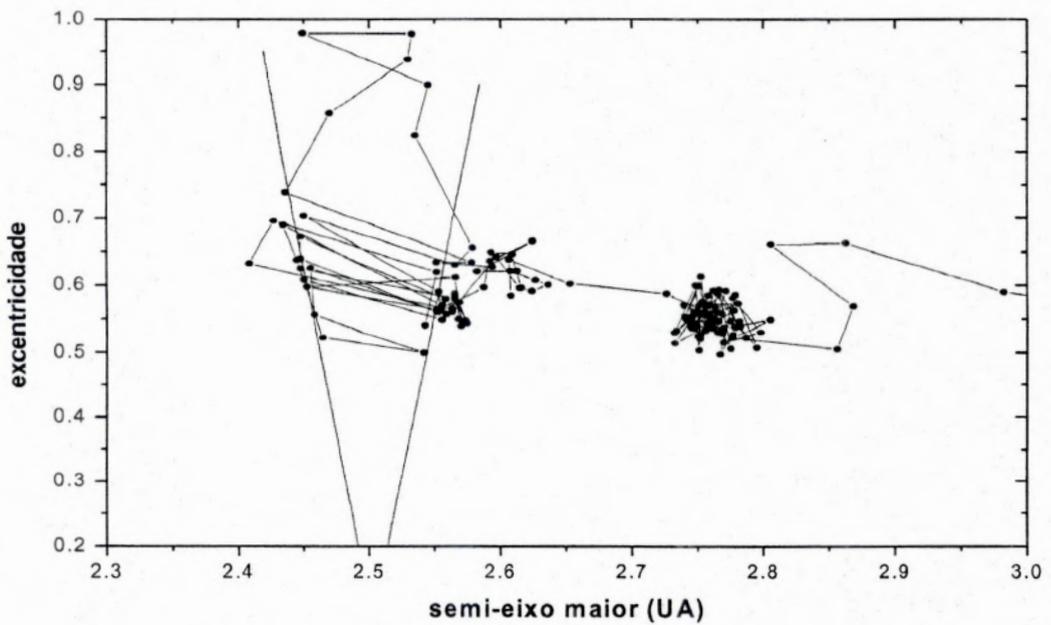


Figura 2.15 – evolução dinâmica do asteróide (887) Alinda no Plano Representativo

Nos primeiros intervalos de tempo o semi-eixo maior oscila em torno do valor da ressonância exata, ou seja, temos temporariamente um regime de libração. Quando da consideração de teorias analíticas ou integrações numéricas com tempo menor que 10^6 anos, tal asteróide seria considerado um típico librador. Particularmente, um exemplo desse fato, está no item 2.1 (Figura 2.1), onde foram consideradas as estruturas de pontos fixos para os asteróides reais selecionados. Observemos que, segundo a classificação efetuada no Capítulo 1, esse asteróide se encontra na região de libração (do tipo \blacktriangledown - especificação na Figura 1.4). Nessa situação, o asteróide se manteria durante toda sua evolução, já que as estruturas de pontos fixos estão associadas às curvas invariantes na superfície de secção adotada no Capítulo 1.

No caso em questão, podemos observar o intervalo de tempo envolvido antes de sua saída definitiva da ressonância 3:1 é muito pequeno, devido a pouca densidade de pontos na região onde a excentricidade atinge pela primeira vez um valor próximo de 0.75. Antes de ser ejetado do Sistema Solar como vemos na Figura 2.16, esse asteróide fica temporariamente próximo da ressonância 5:2, cujo semi-eixo nominal é de 2.82 UA.

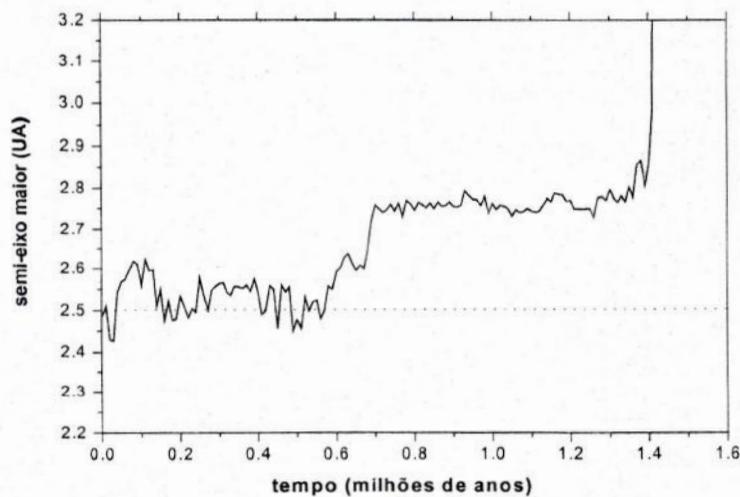


Figura 2.16 – Evolução do semi-eixo maior no tempo do asteróide (887) Alinda. Para um tempo aproximado de 1.4 milhão de anos, o asteróide se dirige para regiões remotas do Sistema Solar.

É conveniente notar que o que está representado na Figura 2.15, corresponde a um dos comportamentos padrões que pode ser exibido por outros asteróides que já são catalogados como NEAs. Com relação aos asteróides que atualmente não são NEAs, a referida figura pode evidenciar um possível tipo de estágio evolutivo a partir do momento em que esses asteróides passam a ser cruzadores da órbita da Terra, como visto nos casos dos asteróide (6623) e (5482), em seus processos de aumento da excentricidade.

d) (30439) Moe 2000MB e (38807) 2000RM68

Asteróides que na classificação sobre o Plano Representativo corresponde ao regime de circulação à esquerda e à direita da ressonância respectivamente. No processo de integração numérica mais realista, os mesmos não cruzam a ressonância (se mantêm estáveis), no sentido de não serem ejetados desta. Na Figura 2.17 mostramos os dois asteróides no Plano Representativo.

Deve-se ressaltar que a condição de classificarmos a órbita ou não como caótica, quando estamos numa vizinhança não imediata da ressonância, está ligado ao tempo envolvido na integração. A princípio, poderiam ocorrer mudanças no comportamento de tais asteróides, se estendêssemos o tempo de integração.

Assim como no caso do asteróide (5482), se quiséssemos investigar a evolução dinâmica individual, deveríamos adotar o procedimento brevemente descrito no capítulo 3.

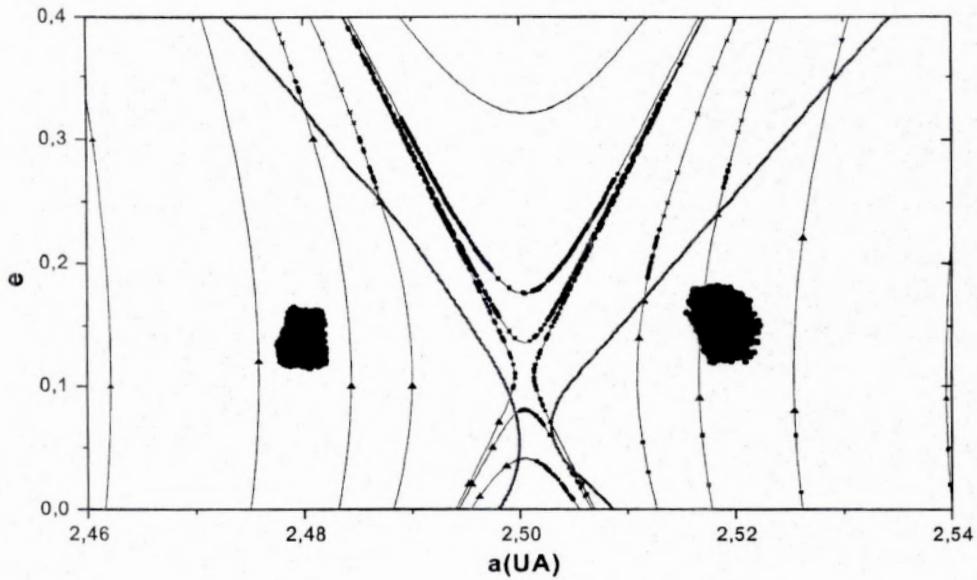


Figura 2.18 – Asteróides (30439) e (38807) que se mantêm durante a evolução temporal nos lados esquerdo e direito, respectivamente, sem cruzar a ressonância.

É conveniente ressaltar que não esgotamos aqui, os padrões possíveis de evolução dinâmica de objetos que são transportados da vizinhança para o interior da ressonância propriamente dita e todos os estágios evolutivos a partir de tal ocorrência.

Capítulo 3

Caracterização da Dinâmica Caótica com a Inclusão de Vênus a Saturno

3.1 - O Processo de Obtenção de Clones do Asteróide (5482)

Nesse capítulo apresentaremos alguns resultados obtidos a partir da integração numérica de 12 clones do asteróide (5482) 1990 DX, abordado no capítulo anterior. A evolução da órbita nominal do asteróide em questão mostrou-o como candidato a NEA, com um tempo de vida dinâmico de aproximadamente 22 milhões de anos, conforme resultados obtidos em (Guillens, Vieira Martins, 2005). Como descrito anteriormente, clones são órbitas ligeiramente modificadas da órbita nominal.

O intuito é mostrar que essas pequenas alterações nas condições iniciais podem afetar substancialmente a evolução orbital de cada clone, assim como a necessidade de um tratamento estatístico para o estudo da evolução dinâmica do asteróide original (Michel P. et al, 1999). Tal tratamento não será objetivo de nosso trabalho, uma vez que o asteróide em estudo nesse capítulo, no momento atual não se caracteriza como um NEA, ao contrário do asteróide da referência citada: 1036 Ganymed, que é o maior NEA conhecido (diâmetro entre 30 a 40 km).

Pretende-se apenas levantar as questões que devem ser consideradas, quando do estudo da evolução dinâmica de longo período de um único asteróide real em particular.

Apresentaremos a seguir a órbita original (nominal) do asteróide (5482) com seus elementos osculadores: semi-eixo maior, excentricidade, inclinação, nodo ascendente, longitude do periélio e anomalia média.

(5482) 1990 DX

Época: 22/11/2002

a (UA)	e	i	Ω	ω	M
2.52123558	0.19092978	4.341300	303.220654	296.189455	12.661674

A confecção dos clones está ilustrada na Tabela 3.1. Os mesmos foram numerados para facilitar a análise dos resultados.

Clone	a (UA)	e	i	Ω	ω	M
1	2.5212355 <u>9</u>	0.19092978	4.341300	303.220654	296.189455	12.661674
2	2.52123558	0.1909297 <u>9</u>	4.341300	303.220654	296.189455	12.661674
3	2.52123558	0.19092978	4.34130 <u>1</u>	303.220654	296.189455	12.661674
4	2.52123558	0.19092978	4.341300	303.22065 <u>5</u>	296.189455	12.661674
5	2.52123558	0.19092978	4.341300	303.220654	296.18945 <u>6</u>	12.661674
6	2.52123558	0.19092978	4.341300	303.220654	296.189455	12.66167 <u>5</u>
7	2.5212355 <u>7</u>	0.19092978	4.341300	303.220654	296.189455	12.661674
8	2.52123558	0.1909297 <u>7</u>	4.341300	303.220654	296.189455	12.661674
9	2.52123558	0.19092978	4.341 <u>299</u>	303.220654	296.189455	12.661674
10	2.52123558	0.19092978	4.341300	303.22065 <u>3</u>	296.189455	12.661674
11	2.52123558	0.19092978	4.341300	303.220654	296.18945 <u>4</u>	12.661674
12	2.52123558	0.19092978	4.341300	303.220654	296.189455	12.66167 <u>3</u>

Tabela 3.1 – Elementos orbitais dos 12 clones do asteroide (5482). As variações em tais elementos são feitas na ultima casa decimal e podem ser observadas em destaque na tabela.

Feitas as integrações com o `swift_rmvs3`, apresentaremos posteriormente uma tabela mostrando o estado final da trajetória de cada clone, tempo de vida dinâmico, o planeta que os remove e o número de encontros próximos dos clones com cada um dos planetas considerados. É importante observar que o arquivo de saída `discard.out` (apêndice 2) fornece esses dados. Assim sendo, esse capítulo também constitui uma ilustração de alguns tipos de informações que podem ser obtidas com o uso de tal esquema de integração.

3.2 - Sobre Encontros Próximos Planetários

Abordaremos brevemente a questão dos encontros próximos planetários. Um parâmetro que nos permite determinar um encontro próximo é a esfera de Hill, ou simplesmente *raio de Hill* (ΔH) definido por:

$$\Delta H = a_p \left(\frac{1}{3} \mu_2 \right)^{1/3},$$

onde μ_2 é dado por:

$$\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

sendo m_1 , a massa do Sol, m_2 , a massa do planeta próximo e a_p o semi-eixo do planeta. Tal expressão surge quando da consideração da aproximação de Hill para o Problema de 3 Corpos. Essa aproximação é caracterizada por um sistema de equações que descreve o movimento da partícula na vizinhança da massa secundária (Murray, Dermott, 1999).

A esfera de Hill estabelece uma distância planetocêntrica, a partir da qual, a influência gravitacional desse planeta sobre o asteroide se torna dominante em relação à influência do Sol, que passa ser o corpo secundário. Desse modo, o encontro próximo é caracterizado pela entrada na esfera de Hill.

3.3 Integração Numérica e Análise dos Resultados

Os resultados obtidos com as integrações dos clones do asteroide (5482) estão apresentados na Tabela 3.2.

Clone	Tempo (milhão de anos)	Planeta Removedor	Número de Encontros Próximos					Estado Final
			J	S	M	T	V	
1	26.02	T	0	0	1	6	0	Sol
2	-	-	-	-	-	-	-	Permanece
3	35.34	T	0	0	3	22	1	Sol
4	70.37	T	0	0	123	698	173	Sol
5	33.25	S	354	38	7	19	19	Escapa
6	63.89	J	51	0	16	40	11	Sol
7	34.04	T	0	0	74	49	19	Sol
8	15.92	V	0	0	9	22	12	Sol
9	23.60	J	10	0	3	11	3	Sol
10	-	-	-	-	-	-	-	Permanece
11	47.10	M	58	0	16	40	11	Sol
12	34.51	M	0	0	19	18	6	Sol

Tabela 3.2 – Resultados das integrações numéricas no modelo mais realista dos 12 clones do asteróide (5482). O tempo de vida dinâmico está representado na coluna 2. Para a coluna do planeta Removedor e a coluna do número de encontros próximos, a simbologia para cada planeta é a seguinte: (J-Júpiter, S-Saturno, M-Marte, T-Terra, V-Vênus). A última coluna indica o que ocorreu particularmente com cada clone.

O planeta removedor é aquele com o qual o asteróide teve um último encontro próximo e é responsável pelos estados finais mostrados na última coluna da tabela acima. A simbologia para cada planeta obedece a seqüência J, S, M, T, V (Júpiter, Saturno, Marte, Terra, Vênus). Pela Tabela 3.2, fica claro que os clones que não foram removidos da integração não sofreram encontros próximos com nenhum planeta.

Com relação à evolução dinâmica de tais clones, exceto o clone 5, que é enviado para regiões remotas do Sistema Solar e dos clones 2 e 10 que não são removidos durante o tempo de integração, todos os outros clones são atraídos para a região interna do Sistema Solar, sofrendo inúmeros encontros próximos com os planetas terrestres incluídos na integração: Marte, Terra e Vênus.

Observando a Tabela 3.2, vemos que 9 dos 12 clones caem no Sol. É oportuno lembrar aqui, que a maioria dos asteróides investigados na ressonância 3:1 tem seu destino final a queda no Sol (Farinella, et al, 1994), (Gladman, et al, 1997), (Guillens, et al, 2002).

É interessante também mencionar o fato de a Terra ser o mais eficiente planeta removedor e ser aquele com quem os clones têm o maior número de encontros próximos (Figura 3.1).

Nosso objetivo aqui é apenas fornecer um quadro geral do que se deve levar em conta quando se investiga a evolução de longo período de asteróides individuais, em particular, os de interesse imediato, que são os NEAs. Para um estudo mais refinado, é necessário o uso de:

- a. Um número maior de clones.
- b. Duas máquinas diferentes para realizar a integração numérica.
- c. Dois integradores diferentes.

Tal procedimento envolve um número muito maior de dados (Michel, et al, 1999).

Na Figura 3.1, vemos o número de encontros próximos com a Terra em relação ao tempo de vida de cada clone.

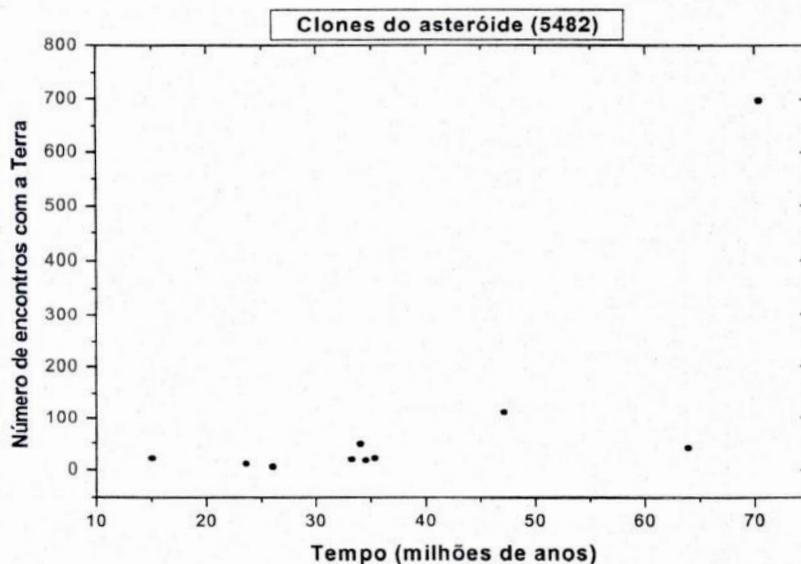


Figura 3.1 – Número de encontros próximos com a Terra para todos os clones da integração.

Conclusão

O que norteou esse trabalho foi uma busca do estabelecimento de uma ponte entre o Problema Restrito de 3 Corpos Médio (2 graus de liberdade) e as integrações numéricas envolvendo os planetas de Vênus a Saturno. Embora o primeiro seja insuficiente para se estudar a evolução dinâmica de asteróide por longos períodos de tempo, a classificação global do espaço de fase pode fornecer subsídios para a análise dos dados que saem das integrações numéricas mais realistas.

Dentro da proposta acima colocada, o Capítulo 2, através de uma amostra de cinco asteróides reais e fazendo o uso do suporte semi-analítico descrito no Capítulo 1, propiciou a constatação de alguns resultados estabelecidos na literatura sobre a origem e evolução de NEAs, além de permitir a visualização do papel da difusão caótica na injeção de objetos para a região de ressonância e sua posterior evolução para NEAs.

A forte dinâmica caótica do sistema mais completo, inviabiliza predições determinísticas e assim sendo, dentro de um enfoque estatístico qualitativo , passa a ser considerada em termos de uma gama de padrões possíveis de comportamento, a partir de uma amostra de condições iniciais o mais completa possível. Nesse sentido, o Capítulo 2 evidenciou dois destes padrões, quando da retina de uma amostra mais ampla previamente investigada, uma sub-amostra, onde se considerou um NEA catalogado; dois asteróides inicialmente fora da região que caracteriza a ressonância (um à esquerda e outro à direita) e que posteriormente evoluem para NEAs e finalmente, outros dois asteróides nas mesmas condições dos mencionados anteriormente e que durante todo o tempo de integração (100 milhões de anos) se mantém numa vizinhança à direita e esquerda, ou seja, não há cruzamentos da “separatriz” que corresponde ao contorno estimado pela metodologia do Plano Representativo.

Em contrapartida, o Capítulo 3 enfatiza a necessidade de um enfoque estatístico quantitativo, quando se focaliza um único asteróide, através da consideração de várias órbitas muito próximas (clones) à órbita nominal. Devido à forte sensibilidade às condições iniciais, uma amostra constituída por ”clones” do asteróide considerado, pôde caracterizar

aspectos gerais da evolução dinâmica de uma amostra maior de objetos distintos, conforme foi evidenciado nos estados evolutivos finais dos clones do asteroide 5482. A escolha desse asteroide foi motivada pelo fato que, dentro do contexto da amostra mais ampla já mencionada, o mesmo evoluiu para NEA, depois de removido da ressonância 3:1 e cujo estado final foi a colisão com a Terra.

Apêndice 1

Método da Superfície de Secção de Poincaré

Seja uma função Hamiltoniana qualquer H (dois graus de liberdade), independente do tempo, descrita, por exemplo, em termos de coordenadas cartesianas (x,y) e suas respectivas variáveis conjugadas (p_x, p_y) :

$$E = H(x, y, p_x, p_y) = U(x, y) + \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 \quad (\text{A1.1})$$

onde E é a constante da energia.

Uma vez fixando-se um valor de energia e escolhendo, por exemplo, a condição $y = 0$, então dados (x^o, y^o) , o valor de p_y^o fica determinado (a menos de um sinal) a partir de:

$$E = H(x^o, p_x^o, 0, p_y^o), \quad (\text{A1.2})$$

que constitui uma superfície bidimensional. Se definirmos o sentido do cruzamento da superfície de secção pelo sinal do valor inicial p_y^o , então a metodologia é baseada na integração das equações de movimento associadas à $H(x,y, p_x, p_y)$ em (A1.1), coletando-se o par (x, p_x) , toda vez que durante a evolução da trajetória: $y = 0$ e o sinal de p_y for igual ao de p_y^o .

Tal metodologia é então aplicada a várias condições iniciais de mesma energia, representando assim a projeção da secção de Poincaré para um valor de E fixado. Quando do processo de exploração numérica dos Sistemas Hamiltonianos, vários valores de E devem ser considerados, com o objetivo de permitir um quadro qualitativo de seus espaços de fases correspondentes.

Observamos que uma vez definido um único sentido para o cruzamento da secção, o valor de p_y , pode ser univocamente determinado a partir de $H(x, p_x, y = 0, p_y)$. É devido a isso que é suficiente considerarmos (x, p_x) , para a representação dos tipos possíveis de trajetórias no espaço de fase. A representação em (x, p_x) é usualmente denominada secção de Poincaré.

Por outro lado, para explanar o conceito de curvas invariantes, consideremos o fluxo de soluções determinado pelas equações de movimento do sistema, o qual induz um mapeamento \mathbf{P} de um conjunto \mathbf{S} em si mesmo:

$$P: S \rightarrow S \quad (A1.3)$$

$$S = \{(y, p_y) / U(0, y) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) = E\}$$

Através da equação (A1.1), pode-se escrever a relação:

$$E \geq U(0, y) + \frac{1}{2} p_y^2 \quad (A1.4)$$

a qual define uma área correspondente a intersecção do volume associado à:

$$E \geq U(x, y) + \frac{1}{2} p_y^2,$$

com o plano $x = 0$.

Caso não exista nenhuma outra constante (integral primeira) independente além da energia E , todo ponto iniciado dentro dessa região, pode a princípio, preencher todo o seu interior quando submetido sucessivamente ao mapeamento \mathbf{P} . Se toda região delimitada

pela área da equação (A1.4) for preenchida pelo mapeamento, dizemos que \mathbf{P} é ergódico. Se os graus de liberdade ‘interagem’, podemos dizer que \mathbf{P} caótico.

Suponhamos agora que exista outra constante além da energia:

$$E' = G(x, y, p_x, p_y)$$

Sobre a superfície de secção, temos:

$$E = H(0, p_x, y, p_y)$$

(A1.5)

$$E' = G(0, p_x, y, p_y)$$

As equações em (A1.5) permitem a eliminação da variável p_x , ou seja:

$$F = F(0, y, p_y) \quad (\text{A1.6})$$

que é a equação da projeção da superfície de secção, ou conforme mencionado da secção de Poincaré.

Em \mathbf{S} os pontos (y, p_y) não se distribuem aleatoriamente, mas se encontram sobre uma curva definida na equação (A1.6). Essa é a denominada curva invariante, já que todo ponto tomado sobre ela, estará sobre ela.

Apêndice 2

O Pacote de tarefas SWIFT

O SWIFT é um pacote de subrotinas designado para integração de vários corpos sob mutua interação gravitacional: partículas massivas com pequenos objetos (massas desprezíveis). Trata-se de um software de domínio público (Levison, Duncan, 1994), disponível em <http://www.boulder.swri.edu/~hal/swift.html>. Dentro deste pacote, a sub-rotina mais indicada pelos autores e pela literatura em geral sobre a evolução dinâmica de longo período dos pequenos corpos no Sistema Solar é o `swift_rmvs3`. Há ainda no SWIFT outras sub-rotinas disponíveis, mas que não são adequadas para situações de encontros próximos planetários.

O Integrador “Simplético” RMVS3

Esse integrador é baseado no algoritmo simplético de Wisdom e Holman (1991), com substanciais modificações para comportar encontros próximos planetários. O passo de integração inicial (e máximo) é primeiramente diminuído por um fator 5, quando a órbita considerada está distante de 3 raios de Hill de um planeta. Uma vez penetrando dentro da esfera de Hill de fato, o passo fica reduzido por um fator 10 em relação ao valor original, e a parte Kepleriana da Hamiltoniana, assume que o planeta (ao invés do Sol) é o corpo primário. Isso caracteriza um tipo de processo de regularização. Após este estágio, a parte Kepleriana é rearranjada novamente e o processo de integração é continuado (Michel, et al, 1999). Isso é importante, pois durante o encontro próximo é possível acompanhar com maior detalhe o processo dinâmico. A desvantagem é que reduzindo o passo e alterando a Hamiltoniana, esse esquema regularizado de variáveis mistas não mantém totalmente as propriedades de estabilidades dos algoritmos simpléticos (Stuchi, 2002), de tal forma que

uma sequência de encontros próximos pode, a princípio, produzir resultados enganosos na evolução orbital do objeto. No entanto, no principal domínio de aplicação desse programa (asteróides, cometas e meteróides), o esquema proposto é altamente satisfatório (Morbidelli, 2002).

Ainda que tal esquema seja altamente recomendado na literatura, podemos observar que as coordenadas planetárias variam suavemente quando da consideração de diferentes amostras de asteróides. Ainda com tal restrição, o esquema em termos estatísticos preserva globalmente as propriedades de uma amostra representativa de asteróides.

Subrotinas e arquivos de entrada

O Swift contém dezenas de subrotinas, cada qual com várias tarefas. Elas estão divididas em vários diretórios e sub-diretórios particulares a cada função.

Os arquivos de entrada se encontram no arquivo *mvs.in*, que contém os arquivos essenciais que designam os parâmetros de integração (*param.in*), coordenadas para planetas (*pl.in*) e objetos (*tp.in*), sendo no nosso caso, asteróides.

PARAM.IN – contém os parâmetros como tempo inicial, tempo final, passo e variáveis lógicas que indicarão tarefas a serem executadas pelo programa fonte. Inclui ainda as condições de interrupção de integração, tal como distâncias heliocêntricas mínimas e máximas a serem consideradas.

Os parâmetros estão colocados na forma:

t0, tstop, dt
dtout, dtdump
L1 L2 L3 L4 L5 L6
rmin, rmax, rmaxu, qmin, lclose
arquivo binário de saída
“status_flag_for_open_statements”

t_0 - tempo inicial para integração;

t_{stop} - tempo de parada;

dt - passo da integração;

dt_{out} , dt_{dump} - intervalo entre saída de dados;

r_{min} - distância heliocêntrica mínima, em que o corpo terá impacto com o Sol. ($r_{min} = 0.0047UA$);

r_{max} - distância heliocêntrica em que a ação do corpo central se torna desprezível ($r_{max} = 1000UA$);

A integração é interrompida toda vez que os limites de raios heliocêntricos mínimo e máximo são alcançados.

As variáveis lógicas indicam tarefas a serem executadas pelo SWIFT. A escolha delas dependerá obviamente do tipo de enfoque que se queira dar ao trabalho realizado. Para nosso caso, o status de cada variável lógica é apresentado a seguir.

L1 - Leva em conta o achatamento planetário (status = F);

L2 - Indica encontros das partículas (asteróides) com o Sol ou planetas. (status = T);

L3 - Computa a integral de Jacobi (referenciais girantes) (status = F);

L4 - Calcula a energia e o momento angular do sistema e armazena os dados no arquivo *energy.out*. (status = T);

L5 - Escreve os elementos orbitais osculadores das partículas e planetas em um arquivo binário de saída. (status = T);

L6 - Como o L5, computa os elementos nas variáveis inteiras. (status = F).

PL.IN - número de planetas considerados, incluindo também o Sol (primeiro corpo), coordenadas cartesianas de posição e velocidade, além da massa e o raio de "parada" (considerado o raio do planeta de fato, tomado com esférico) para a situação de encontros próximos. A identificação dos planetas é feita com base na posição (m) em que estes estiverem dispostos em tal arquivo, obedecendo ao esquema $(-2, \dots, -m)$, sendo $m = k + 1$, onde k é o número de planetas do arquivo.

TP.IN – número de partículas testes consideradas (massa desprezível) e suas coordenadas de posição e velocidade.

Arquivos de saída

Descrevemos aqui os principais arquivos de saída de nosso interesse.

FOLLOW.OUT - O arquivo binário (*bin.dat*) é transformado para variáveis reais no executável *follow*, o qual gerará o arquivo de saída *follow.out* com elementos orbitais osculadores para cada partícula ou objeto, com intervalo de saída de dados de acordo com aquele estipulado no parâmetro *dtout* do arquivo *param.in*. Ao gerar os elementos entramos com os respectivos arquivos de parâmetros (*param.in*), planetas (*pl.in*) e objetos (asteróides no nosso caso) (*tp.in*) e informamos *on line* no executável, os objetos os quais desejamos obter os elementos.

DISCARD.OUT – Mostra em uma seqüência de parâmetros o estado da partícula, quando esta é descartada da integração devido à ocorrência de condições mostradas no arquivo dos parâmetros. Exemplificamos a seguir a seqüência: $[T, N, 1, EF, P_R, (eP_1, eP_2, \dots, eP_K)]$.

T - tempo em que a partícula foi removida (tempo de vida);

N – número da partícula descartada;

1- estado que indica que a partícula esta inativa na integração;

EF – Estado Final da evolução orbital da partícula. (*EF* = - 4) para corpos que têm queda no Sol; - 3, para corpos que são ejetados do Sistema Solar e *n*, no caso de entrada no raio de parada do planeta *n*;

P_R – Planeta removedor *n*, ou seja, o planeta com a qual a partícula teve último encontro que resultou na remoção;

$(eP_1, eP_2, \dots, eP_K)$ – indicam o número de encontros próximos que a partícula teve com cada planeta (*P₁, P₂, ..., P_K*) considerado, obedecendo a seqüência em que estes estão dispostos

no arquivo *pl.in*. O arquivo fornece ainda as coordenadas de posição e velocidade das partículas e dos planetas para o tempo T de remoção da integração numérica.

ENERGY.OUT – Contém valores de energia e momento angular para o sistema de corpos na integração.

Os arquivos *dump_tp.dat*, *dump_pl.dat* e *dump_param.dat*, armazenam durante todo o tempo de integração as coordenadas e informações de todos os corpos, de modo que se a integração for interrompida por algum motivo, os dados não são perdidos e tais arquivos poderão ser utilizados na continuidade da integração até o instante desejado, como novos arquivos de entrada. Nesse caso a última linha do arquivo *param.in* deve ser “append”.

Há um exemplo de todos os arquivos no README principal do SWIFT, apresentando o planeta Plutão e os arquivos de entrada, constituindo um exemplo ilustrativo do processo de integração.

Referências

- Farinella, P., et al., (1994) *Nature*, 371, 314-315
- Farinella, P., et al, (1993) *Astron. Astrophys*, 257, 329-330
- Ferraz-Mello, S. Milani, A. et all (eds.). *Asteroids, Comets, Meteors*. 1993, 175
- Foschini, L. et al (2000) *Astron. Astrophys*, 353, 797-812
- Gladman, B. J. et al (1997) *Science*, 227, 197-201
- Guillens, S. A., Vieira Martins, R., Gomes, R. S. 2002, *AJ*, 124, 2322
- Guillens, S. A. (Notas de aula Mec.Celeste I e II-UFRJ)
- Guillens, S. A. PhD tesis , (1998) (Instituto Tecnológico da Aeronáutica)
- Guillens, S. A., Vieira Martins, R., (2005) – *trabalho a ser submetido*
- Hadjidemetriou, J. D. 1992, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 53, 151
- Henrard, J., Caranicolas, N. D. (1990) *CMeDA*, 47, 99-121
- Koiller, J., et al ,(1987), *LPN*, 278, 22
- Levison, H. F., Duncan, M. J. 1994, *Icarus*, 108, 18-36
- Michel, P. et al. (1999) *Astron. Astroph.* 347, 711-719
- Moons, M., Morbidelli, A. (1995) *Icarus*, 114, 33-50
- Morbidelli, A. Nesvorný, D. (1999) *Icarus*, 139, 295-308
- Morbidelli, A. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* 2002, 30, 89
- Morbidelli A., Moons, M. 1995, *Icarus*, 115, 60
- Morbidelli, A. et al, (1999). *Asteroids III*- editado por Bottke, Celino, Paolicchi e Binzel
- Morbidelli, A., Giorgili, A. (1990), *CeMDA*, 47, 173
- Morbidelli, A., Vokrouhlický, D. (2003), *Icarus*, 163, 120-134
- Murray, C. D., Dermott, S. T., 1999. *Solar System Dynamics-pre-print* (British Library)
- Neishtadt, A. et al (1987), *PhLA*, 145, 25
- Nesvorný, D., Ferraz-Mello S., Holman M., et al, (2002), *In Asteroids III* (W. Bottke, eds).
- Roig, F. Nesvorný, D. Ferraz-Mello, S. (2002), *MNRAS*, 335, 417-431
- Stuchi, T. (2002), *Braz. J. Phys.*, vol.32, no.4, 958-979.
- Vokrouhlický D., Farinella, P. 2000, *Nature.*, 407, 606
- Vokrouhlický, D. Broz, M., (1999) *A&A*, 350, 1079

- Wisdom, J. (1982), *AJ*, 87, 577
- Wisdom, J. (1983), *Icarus*, 56, 51
- Wisdom, J. (1985), *Nature*, 315, 731-733
- Wisdom, J., Holman, M. (1991) *AJ*, 102, 1528-1538
- Yoshikawa, M. (1990), *Icarus*, 87, 78