



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Departamento de Astronomia

**Sobre a Integrabilidade dos
Problemas de Euler e Stormer**

Aluno: Luis Antonio Amaro Coelho
Orientadora: Terezinha de Jesus Stuchi (IF/ UFRJ)

Projeto de Final de Curso para a Obtenção do
Título de Astrônomo

*Dedico este trabalho
aos meus pais,
aos meus irmãos
e a minha noiva.*

Agradecimentos

À Deus por tudo.

Aos meus pais, Sérgio e Eliane, e aos meus irmãos, Daniel e Maria Isabela, pelo amor, apoio e tolerância. Graças a vocês este trabalho tornou-se possível. Obrigado!

À minha família, vô Aurélio, vó Sorcita, tia Marli e tio Orlando, por acreditarem em mim.

À minha noiva Elizangela, pelo amor, companheirismo e amizade. Você deu um novo sentido a minha vida.

À minha orientadora Tereza Stuchi pela paciência e dedicação, principalmente na fase final.

À minha primeira orientadora Sueli A. Guillens, pela sua grande contribuição na minha formação acadêmica e moral.

Ao Angelo, Eliete e Júnior, por me acolherem.

Aos meus amigos, por me aturarem todos esses anos.

Resumo

A questão de determinar se um dado sistema de equações diferenciais hamiltonianas é ou não integrável, é uma antiga questão para a Mecânica Clássica. A existência de tais sistemas é importante em si e para a teoria de perturbações. Tratamos aqui de estudar o problema de dois centros fixos inventado e estudado por Euler sob vários pontos de vista no que concerne a sua integrabilidade. Usamos para isto o critério de Morales-Ramis que é o mais recente teorema sobre o assunto, para potenciais homogêneos. Estudamos também, por completeza de metodologia, um outro exemplo, a saber, o problema de Stormer, cujo potencial não é homogêneo. Podemos assim estudar um critério de integrabilidade mais geral, devido a Churchill e Rod e a Morales-Ramis. Abrimos com isto perspectivas para o tratamento de outros problemas fisicamente relevantes e uma possível extensão destes teoremas a classes mais gerais de sistemas.

Conteúdo

0.1	Introdução	3
1	Definição do Problema	9
1.1	O Problema de Euler	9
1.1.1	Descrição do Problema de Três Corpos Restrito	9
1.1.2	Uma relação invariante e a energia total do sistema	12
1.1.3	Equações de movimento em um sistema de coordenadas girante e a integral de Jacobi	14
1.2	Equações de movimento em coordenadas adimensionais	16
1.2.1	Sistema inercial	16
1.2.2	Sistema girante	17
1.3	Montagem da Hamiltoniana do Sistema	19
2	Hamilton-Jacobi e Secção de Poincaré	21
2.1	Solução do Problema de Euler por Hamilton-Jacobi	21
2.2	Secção de Poincaré	26
3	Estudo Numérico do Problema de Euler	29
3.1	Curvas de Velocidade Zero	29
3.2	Secções de Poincaré	31
4	Critério de Integrabilidade para Potenciais Homogêneos	37
4.1	Aplicação do Teorema 1	41
5	Integrabilidade de Potenciais não Homogêneos	43
5.1	Introdução	43

5.2 Descrição do Algoritmo de Kovacic 44

5.3 Problema de Stormer 48

 5.3.1 Aspectos Dinâmicos 49

5.4 Aplicação do Teorema 2 51

6 Conclusão e Perspectivas 61

7 Apêndice 63

Conteúdo

0.1 Introdução

1 Definição do Problema

1.1 O Problema de Kuba

1.1.1 Descrição do Problema

1.1.2 Uma relação Pelliana

1.1.3 Abordagem de resolução

1.2 Espaço de parâmetros

1.2.1 Situação geral

1.2.2 Situação especial

1.3 Estratégia de implementação

2 Implementação e teste de eficiência

2.1 Solução do Problema de Stormer

2.2 Solução de Nagell

3 Estado Matemático do Problema

3.1 Contexto histórico

3.2 Solução de Poincaré

4 Critério de integridade

4.1 Adição de termos

5 Integridade do Teorema

5.1 Introdução

0.1 Introdução

Integrabilidade

Um sistema integrável é caracterizado pelo comportamento regular (periódico e quase-periódico) de todas as condições iniciais e todo o tempo; neste caso, podemos ter informação global do comportamento dos termos de longo período. Sistemas não integráveis tem regiões irregulares, ou *caóticas*; no contexto de sistemas dinâmicos caos significa uma sensibilidade muito grande das soluções às condições iniciais escolhidas, que no caso hamiltoniano é causado pela não integrabilidade.

A noção de integrabilidade, portanto não caoticidade, está relacionada com a existência de integrais primeiras, conforme o teorema de Liouville enunciado abaixo:

Teorema de Integrabilidade de Liouville:

Seja X_H um sistema hamiltoniano real completamente integrável definido sobre o espaço de fase real M de dimensão $2n$

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

onde $i = 1, \dots, n$ e H é uma função real das coordenadas canônicas (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Sejam f_1, f_2, \dots, f_n um conjunto de integrais primeiras em involução, i.e., $\{f_i, f_j\} = 0$ ($\{, \}$ é o colchete de Poisson). Seja $M_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{z} \in M : f_i(\mathbf{z}) = a_i, i = 1, \dots, n\}$, uma variedade de nível não crítica de f_1, \dots, f_n (uma superfície diferenciável de dimensão n). Então:

(a) $M_{\mathbf{a}}$ é uma superfície diferenciável invariante pelo fluxo do sistema hamiltoniano X_H ; se $M_{\mathbf{a}}$ é compacta e conexa, então ela pode ser deformada em um toro de dimensão n por transformações canônicas diferenciáveis.

(b) Numa vizinhança do toro $M_{\mathbf{a}}$ existe um sistema de coordenadas canônicas $(\mathbf{I}, \phi) = (\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_n, \phi_1, \dots, \phi_n)$, $\phi \pmod{2\pi}$, chamadas coordenadas de ângulo-ação. As ações \mathbf{I} correspondem à direção transversal ao toro e ϕ às coordenadas do mesmo. Nessas coordenadas as equações de Hamilton para X_H são:

$$\begin{aligned} \dot{I}_i &= 0, \\ \dot{\phi}_i &= w_i, \end{aligned} \tag{1}$$

$i = 1, \dots, n$, onde as frequências w_i dependem apenas das variáveis de ação, isto é, $w_i = w_i(I_1, \dots, I_n)$, e o sistema hamiltoniano relativo à hamiltoniana H é integrável por quadraturas.

A parte (a) é a parte algébrica do teorema, enquanto a parte (b), a parte de cálculos, é no fundo a teoria de Hamilton-Jacobi.

Esse teorema pode ser estendido ao corpo dos complexos, e então teremos a questão de se as integrais primeiras são meromórficas (funções que são analíticas para todos os valores de z , exceto nos pontos onde existem pólos), analíticas ou algébricas em vez de diferenciáveis ou analíticas.

A questão da integrabilidade pode ser colocada da seguinte forma: como podemos identificar os valores dos parâmetros para os quais as equações de movimento têm (ou não) integrais primeiras? Muitos métodos para a identificação de classes de sistemas integráveis foram desenvolvidos por matemáticos como Poincaré, Liouville, Painlevé, Ziglin e outros.

Nos últimos anos a procura por critérios de integrabilidade para sistemas Hamiltonianos baseados no comportamento das soluções no domínio complexo tem adquirido grande relevância. Em geral esses teoremas consideram, chamemos Γ , uma curva integral $z = z(t)$, que não seja um ponto de equilíbrio, do sistema hamiltoniano X_H . Então pode-se escrever as equações variacionais (EV) ao longo de Γ ,

$$\dot{\eta} = \frac{\partial X_H}{\partial x}(z(t))\eta.$$

Usando-se a integral primeira $dH(z(t))$ correspondente ao sistema linearizado pode-se reduzir as EV's, i.e., eliminar um grau de liberdade e obter o que se chama as equações variacionais normais (EVN). Visto esse conceito de EV e EVN podemos fazer agora um rápido histórico da evolução dos principais teoremas sobre integrabilidade [9].

Poincaré encontrou um critério de não integrabilidade na matriz da EV ao longo de uma curva integral real: se existem k integrais primeiras do sistema Hamiltoniano, independente sobre a curva integral, então k expoentes característicos devem ser zero.

Além disso, se essas integrais primeiras estão em involução entre si, então $2k$ expoentes característicos devem, necessariamente, ser zero.

Além do mais, neste trabalho de Poincaré podemos encontrar também a relação entre integrais primeiras lineares da equação variacional e as soluções da mesma. De fato, os resultados de Poincaré estão intimamente relacionados ao processo de redução da EV para a equação variacional normal (EVN), que é a equação para a variação normal à curva integral.

Em 1888 S.Kowalevski obteve um novo caso de integrabilidade para o sistema do corpo rígido com um ponto fixo, impondo que a solução geral seja uma função meromórfica do tempo complexo. De fato, como parte de seu método, ela provou que, com exceção de algumas soluções particulares, os únicos casos em que a solução geral é uma função meromórfica do tempo são os casos de Euler, Lagrange e Kowalevski. Lyapounov generalizou o resultado de Kowalevski provando que, exceto por algumas soluções particulares, a solução geral é unívoca somente nos três casos mencionados acima. Seu método é baseado na análise da equação variacional ao longo de alguma solução conhecida.

Em 1963 Arnold e Krylov analisaram condições suficientes para a existência de uma integral primeira unívoca (mas não analítica complexa) de uma equação diferencial linear complexa. Esses autores provaram a distribuição uniforme de valores do grupo de monodromia (grupo de matrizes relacionadas à extensão do espaço vetorial formado pelas soluções desta equação) no invariante correspondente. A demonstração deles está baseada nas propriedades de completeza do grupo de monodromia, considerado como grupo de Lie linear. Podemos observar que isto não está tão longe do fato do grupo de Galois de uma equação diferencial linear Fuchsiana (equação que tem suas singularidades regulares) ser a completeza do grupo de monodromia. Observamos que o grupo de matrizes cujos elementos são coeficientes de combinações lineares das soluções dessa equação chama-se grupo de Galois diferencial.

Em 1982 Ziglin provou um teorema sobre não integrabilidade para sistemas Hamiltonianos analíticos complexos. Ele usou os vínculos impostos pela existência de algumas integrais primeiras sobre o grupo de monodromia do sistema, reduzindo as EV's, ao longo de alguma curva integral complexa, às EVN's. Se a evolução das EVN's,

caracterizada pela matriz de monodromia (grupo de monodromia), é suficientemente complicada, demonstra-se que não pode existir integrais primeiras adicionais. Neste caso diz-se que o grupo de monodromia não é Ziglin.

Na segunda metade da década de 80, Yoshida [12] desenvolveu uma versão do teorema de Ziglin para potenciais homogêneos com dois graus de liberdade, expressando as condições deste teorema de forma explícita e operacional, fazendo várias aplicações a sistemas relevantes.

Na década de 90 Morales Ruiz, em sua tese de doutorado, passou a trabalhar com o grupo de Galois diferencial diretamente ao invés do grupo de monodromia. Mais tarde, associado a Ramis desenvolveu dois teoremas cuja condição de integrabilidade é a componente identidade do grupo de Galois das EVN's ser abeliano (comutativo). O primeiro teorema generaliza Yoshida para qualquer número de graus de liberdade, eliminando também a restrição a sistemas não ressonantes. O segundo teorema usando o algoritmo de Kovacic, generaliza o trabalho anterior de Churchill e Rod para EVN's não necessariamente Fuchsianas (i.e., EVN's com singularidades regulares).

Nesta monografia usaremos o Teorema de Morales-Ramis [9] para potenciais homogêneos para completar o estudo do problema de Euler de dois centros fixos. O segundo teorema numa versão operacional de Churchill e Rod [7] será aplicado ao problema de Stormer. Com tal abordagem estamos mostrando a operacionalidade de critérios de integrabilidade cujas demonstrações requerem uma formação matemática especializada, como pudemos ver pelo rápido histórico acima. Nosso objetivo é mostrar que podemos aplicar estes teoremas sem nos aprofundarmos em suas demonstrações e conceitos envolvidos. Veremos, posteriormente que o problema de Stormer não verifica nenhuma das condições estabelecidas pelo segundo teorema, ou seja, podemos confirmar a não integrabilidade sugerida quando da aplicação do método das superfícies de secção de Poincaré. Em contrapartida, o problema de Euler satisfaz ao teorema de Morales-Ramis para potenciais homogêneos, mas isto não é suficiente para garantir a integrabilidade do mesmo.

Problema de dois centros fixos de Euler

O estudo do movimento de uma massa pontual, movendo-se em um campo gravitacional produzido por dois centros de massa, atrativos e fixos, é um problema que foi proposto pela primeira vez no século dezoito por Euler, como um passo intermediário na busca da solução do problema de três corpos. O próprio Euler, em uma série de três artigos, resolveu o problema (integrando as equações de movimento do caso bidimensional, isto é, o caso onde a massa pontual move-se no plano que contém os dois centros atrativos). Quase um século depois Jacobi mostrou que o potencial correspondente ao problema tridimensional completo é separável em coordenadas esféricas. Um século mais tarde, Erikson e Hill encontraram, de forma explícita, a terceira integral de movimento do problema tridimensional completo (além da energia e do momento angular em relação ao eixo passando pelos dois centros).

Apesar da integrabilidade do sistema dinâmico, o comportamento qualitativo das soluções não foi bem entendido, provavelmente pelo fato das soluções serem expressas na forma de funções elípticas.

O problema de dois centros fixos tem sido usado, entre outras aplicações, para calcular a trajetória de satélites no campo gravitacional da Terra, no problema de mecânica quântica do íon positivo da molécula de H_2^+ e na aceleração de elétrons em colisões atômicas. Formas generalizadas do problema também têm sido consideradas, como dipólo finito, dipólo repulsivo e sistema de dois buracos negros carregados (para maiores detalhes ver H.Varvoglis et al. [14] e as referências nele contidas).

Neste trabalho iremos definir o problema de Euler e deduzir sua hamiltoniana, a partir do Problema Restrito de Três Corpos, no primeiro capítulo. No segundo capítulo resolveremos o problema através da equação de Hamilton-Jacobi em coordenadas elípticas: resolver a equação de Hamilton-Jacobi é afirmar que um sistema é integrável pelas funções encontradas. Apresentaremos também nesse capítulo a teoria da secção de Poincaré, que sendo um método numérico nos leva a afirmar que uma secção apresentando caos é uma evidência de não integrabilidade, mas uma secção aparentemente regular não implica em integrabilidade. No terceiro capítulo estudaremos numericamente o problema de Euler utilizando a secção de Poincaré. No quarto capítulo faremos um resumo do teorema de Morales-Ramis para potenciais homogêneos e o aplicaremos ao problema de Euler. No último capítulo introduziremos o algoritmo

de Kovacic que é importante para se determinar a integrabilidade de uma equação fuchsiana. Esta integrabilidade está conectada à integrabilidade de sistemas hamiltonianos quando a fuchsiana em questão é a EVN. Faremos sua aplicação ao problema de eletromagnetismo clássico de Stormer onde uma partícula sofre a ação de um dipolo magnético. Esse problema é uma primeira aproximação para o estudo de partículas no campo magnético terrestre.

Capítulo 1

Definição do Problema

1.1 O Problema de Euler

Neste capítulo iremos deduzir o Problema de Dois Centros inventado e resolvido por Euler. Para isso primeiro definiremos o Problema de Três Corpos Restrito, desenvolvendo suas equações de movimento em coordenadas cartesianas e acharemos uma relação invariante e a energia total do sistema. Em seguida passaremos para coordenadas de um sistema girante, com o objetivo de apresentarmos a integral de Jacobi. Por fim obteremos a hamiltoniana do sistema em coordenadas adimensionais, e colocaremos o problema de Euler neste contexto.

1.1.1 Descrição do Problema de Três Corpos Restrito

Definição: Sejam dois corpos movendo-se em torno de seu centro de massa em órbitas circulares, sob influência de sua atração gravitacional mútua e um terceiro corpo (atraído pelos outros dois mas não influenciando seus movimentos) movendo-se no

plano definido pelo movimento dos outros dois corpos. O Problema Restrito de Três Corpos (PRTC) descreve o movimento deste terceiro corpo.

As massas m_1 e m_2 dos corpos ditos primário e secundário ($m_1 \geq m_2$) são arbitrárias, mas sua distribuição interna é tal que os corpos podem ser considerados massas pontuais. A configuração do Problema Restrito de Três Corpos está mostrada na figura 1.1.

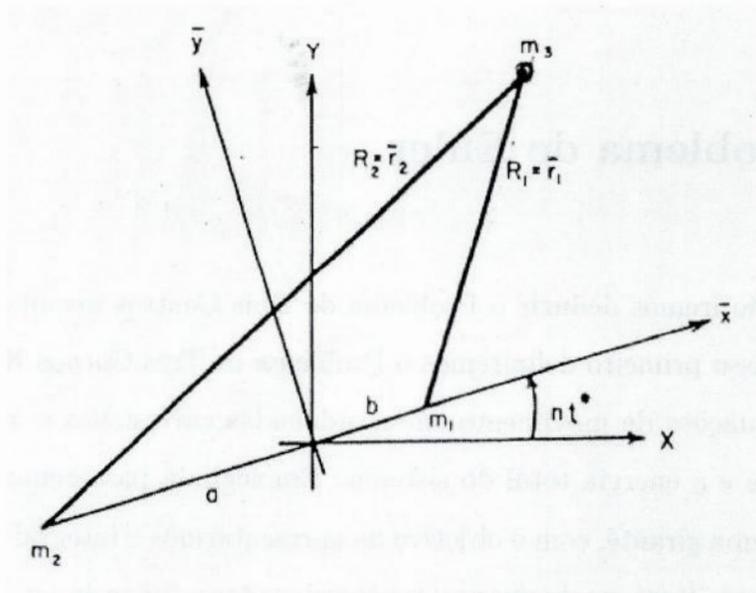


Figura 1.1: Configuração do problema

No equilíbrio entre as forças gravitacional e centrífuga temos

$$\frac{Gm_1m_2}{l^2} = m_2an^2 = m_1bn^2 \quad (1.1)$$

onde G é a constante da gravitação, n é a velocidade angular de m_1 e de m_2 , l é a distância mútua entre m_1 e m_2 , e a e b as distâncias dos corpos massivos ao centro de massa. Temos então que

$$Gm_1 = an^2l^2, \quad Gm_2 = bn^2l^2, \quad G(m_1 + m_2) = n^2l^3 \quad (1.2)$$

sendo a última equação, a terceira lei de Kepler.

Temos também que

$$a = \frac{m_1 l}{M} \quad e \quad b = \frac{m_2 l}{M} \quad (1.3)$$

onde $M = m_1 + m_2$

As equações de movimento de m_3 em um sistema retangular inercial de coordenadas, são

$$\frac{d^2X}{dt^{*2}} = \frac{\partial F}{\partial X} \quad e \quad \frac{d^2Y}{dt^{*2}} = \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (1.4)$$

onde F é negativo do potencial (U) por unidade de massa, dado por

$$F = G\left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2}\right) = -U \quad (1.5)$$

com

$$R_1 = [(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2]^{1/2},$$

onde (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) são as coordenadas dependentes do tempo de m_1 e m_2 e

$$X_1 = b \cos nt^* \quad Y_1 = b \sin nt^* \quad (1.6)$$

$$X_2 = -a \cos nt^* \quad Y_2 = -a \sin nt^* \quad (1.7)$$

A dependência temporal das coordenadas de m_1 e m_2 introduz o tempo explicitamente nas equações de movimento, ou seja,

$$\frac{d^2X}{dt^{*2}} = \frac{\partial F(X, Y, t^*)}{\partial X} \quad \frac{d^2Y}{dt^{*2}} = \frac{\partial F(X, Y, t^*)}{\partial Y} \quad (1.8)$$

1.1.2 Uma relação invariante e a energia total do sistema

Derivaremos agora uma relação invariante, correspondente à conservação de energia, para o problema restrito no sistema inercial. Multiplicando $\frac{d^2X}{dt^{*2}}$ por $\frac{dX}{dt^*}$ e $\frac{d^2Y}{dt^{*2}}$ por $\frac{dY}{dt^*}$, somando, e depois integrando com respeito ao tempo, temos

$$\frac{1}{2}[(\frac{dX}{dt^*})^2 + (\frac{dY}{dt^*})^2] = \int (\frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{dt^*} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{dt^*}) dt^* \quad (1.9)$$

Como a diferencial de F é dada por : $dF = \frac{\partial F}{\partial X} dX + \frac{\partial F}{\partial Y} dY + \frac{\partial F}{\partial t^*} dt^*$

$$\implies \int [dF - \frac{\partial F}{\partial t^*} dt^*] = F - \int \frac{\partial F}{\partial t^*} dt^* \quad (1.10)$$

pelas equações (1.9) e (1.10)

$$\implies \frac{1}{2}V^2 = F - \int \frac{\partial F}{\partial t^*} dt^* \quad (1.11)$$

onde V é a velocidade de m_3 . A energia não é conservada no sistema, pois $\frac{1}{2}V^2 - F$ é uma função do tempo. Podemos interpretar a quadratura

$$\int \frac{\partial F(X, Y, t^*)}{\partial t^*} dt^* \quad (1.12)$$

da seguinte forma: Consideremos a solução dada da forma $X = f(\alpha_i, t^*)$, $Y = g(\alpha_i, t^*)$, onde as constantes $\alpha_i (i = 1, \dots, 4)$ representam as condições iniciais. Substituindo esta solução em (1.12) ficamos com uma função dependente das condições iniciais e do tempo. Temos então que

$$\frac{1}{2}V^2 - F = C(\alpha_i, t^*) \quad (1.13)$$

Uma expressão como a relação (1.11) tem uso limitado pois sua interpretação requer a solução do problema.

Por outro lado, se F não dependesse do tempo, teríamos:

$$\frac{\partial F}{\partial t^*} = 0 \quad e \quad \frac{1}{2}V^2 - F = C(\alpha_i)$$

isto é, a constante de integração dependeria somente das condições iniciais. Vemos então que seria interessante acharmos um sistema de coordenadas em que F não dependesse do tempo.

Uma maneira de vermos que a energia do PRTC não se conserva é calculando a energia total por unidade de massa de m_3 , isto é

$$h_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{dX}{dt^*} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dY}{dt^*} \right)^2 - F \quad (1.14)$$

conforme já vimos não é constante. A energia total das partículas individuais é a soma das suas energias separadas, então

$$E = m_3 h_3 + E_{12} \quad (1.15)$$

onde E_{12} é a energia do sistema formado por m_1 e m_2 , e é dado por

$$E_{12} = \frac{1}{2} n^2 (m_1 b^2 + m_2 a^2) - G \frac{m_1 m_2}{1} \quad (1.16)$$

O primeiro termo é a energia cinética e o segundo a energia potencial. Manipulando as relações (1.1) e (1.2) achamos

$$\frac{1}{2} n^2 (m_1 b^2 + m_2 a^2) = \frac{1}{2} G \frac{m_1 m_2}{1} \implies E_{12} = -\frac{1}{2} G \frac{m_1 m_2}{1} = cte \quad (1.17)$$

E a energia total do sistema formado pelos três corpos fica

$$E = m_3 h_3 - \frac{1}{2} G \frac{m_1 m_2}{1} \neq cte \quad (1.18)$$

A energia total do problema restrito não é constante porque a energia total de m_3 não é constante, enquanto que a do sistema formado por m_1 e m_2 é constante. Portanto a soma não pode ser constante.

Lembremos que a energia total do sistema dinâmico formado pelos três corpos sem qualquer restrição sobre o movimento de m_1 e m_2 possui um potencial que não depende explicitamente do tempo, então sua energia total é conservada.

1.1.3 Equações de movimento em um sistema de coordenadas girante e a integral de Jacobi

Procuramos um sistema de coordenadas no qual a função força não tenha nenhuma dependência temporal explícita. Sendo a dependência temporal consequência do movimento dos primários em um sistema de coordenadas fixo, devemos esperar que um sistema de coordenadas no qual m_1 e m_2 estão fixos retire essa dependência explícita.

A transformação de coordenadas é dada pela rotação

$$X = \bar{x} \cos nt^* - \bar{y} \sin nt^* \quad (1.19)$$

$$Y = \bar{x} \sin nt^* + \bar{y} \cos nt^* \quad (1.20)$$

sendo a notação dada na Figura 1.1.

Podemos facilitar a transformação das equações introduzindo variáveis complexas.

Seja

$$Z = ze^{int^*} \quad (1.21)$$

onde

$$z = \bar{x} + i\bar{y}, \quad Z = X + iY \quad (1.22)$$

As distâncias R_1 e R_2 , são dadas agora por

$$R_1 = |Z - Z_1| \quad e \quad R_2 = |Z - Z_2| \quad (1.23)$$

onde $Z_1 = be^{int^*}$ e $Z_2 = -ae^{int^*}$.

Substituindo as definições de Z , Z_1 e Z_2 , temos então para as distâncias

$$R_1 = |z - b| = [(\bar{x} - b)^2 + \bar{y}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1.24)$$

$$R_2 = |z + a| = [(\bar{x} + a)^2 + \bar{y}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1.25)$$

Derivando Z duas vezes em relação a t^* , temos

$$\frac{d^2Z}{dt^{*2}} = \left(\frac{d^2z}{dt^{*2}} + 2ni \frac{dz}{dt^*} - n^2z \right) e^{int^*} \quad (1.26)$$

Temos então as equações de movimento do sistema girante na forma complexa

$$\frac{d^2z}{dt^{*2}} + 2ni \frac{dz}{dt^*} - n^2z = -G \left[m_1 \frac{(z-b)}{|z-b|^3} + m_2 \frac{(z+a)}{|z+a|^3} \right] \quad (1.27)$$

Separando as partes real e imaginária, temos

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^{*2}} - 2n \frac{d\bar{y}}{dt^*} - n^2\bar{x} = -G \left[m_1 \frac{(\bar{x}-b)}{\bar{r}_1^3} + m_2 \frac{(\bar{x}+a)}{\bar{r}_2^3} \right] \quad (1.28)$$

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^{*2}} + 2n \frac{d\bar{x}}{dt^*} - n^2\bar{y} = -G \left[m_1 \frac{\bar{y}}{\bar{r}_1^3} + m_2 \frac{\bar{y}}{\bar{r}_2^3} \right] \quad (1.29)$$

onde \bar{r}_1 e \bar{r}_2 foram introduzidos no lugar de R_1 e R_2 , para deixar claro que no sistema de coordenadas girante as distâncias não carregam dependência explícita no tempo.

Veremos agora que esse sistema possui uma integral útil, a única que pode ser obtida para o problema restrito.

Como

$$\frac{\partial F^*}{\partial \bar{x}} = n^2\bar{x} - G \left[m_1 \frac{(\bar{x}-b)}{\bar{r}_1^3} + m_2 \frac{(\bar{x}+a)}{\bar{r}_2^3} \right] \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \bar{y}} = n^2\bar{y} - G \left[m_1 \frac{\bar{y}}{\bar{r}_1^3} + m_2 \frac{\bar{y}}{\bar{r}_2^3} \right] \quad (1.31)$$

temos que

$$F^* = \frac{n^2}{2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + G \left(\frac{m_1}{\bar{r}_1} + \frac{m_2}{\bar{r}_2} \right) \quad (1.32)$$

e que

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^{*2}} - 2n \frac{d\bar{y}}{dt^*} = \frac{\partial F^*}{\partial \bar{x}} \quad (1.33)$$

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^{*2}} + 2n \frac{d\bar{x}}{dt^*} = \frac{\partial F^*}{\partial \bar{y}}. \quad (1.34)$$

Multiplicando-se (1.33) por $\frac{d\bar{x}}{dt^*}$, e (1.34) por $\frac{d\bar{y}}{dt^*}$, somando e integrando em relação ao tempo t^* , temos

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\bar{x}}{dt^*}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt^*}\right)^2\right] = \int\left(\frac{\partial F^*}{\partial \bar{x}}d\bar{x} + \frac{\partial F^*}{\partial \bar{y}}d\bar{y}\right) = F^* - \frac{C^*}{2} \quad (1.35)$$

pois

$$dF^* = \frac{\partial F^*}{\partial \bar{x}}d\bar{x} + \frac{\partial F^*}{\partial \bar{y}}d\bar{y} \quad (1.36)$$

Essa integral e a constante C^* são conhecidos como integral de Jacobi e constante de Jacobi, respectivamente. Podemos escrever também

$$\bar{v}^2 = 2F^* - C^* \quad (1.37)$$

onde \bar{v} é a magnitude da velocidade relativa ao sistema de coordenadas girante.

1.2 Equações de movimento em coordenadas adimensionais

1.2.1 Sistema inercial

Usando o seguinte sistema adimensional

$$\xi = X/l, \quad \eta = Y/l, \quad t = nt^*, \quad \mu_1 = m_1/M = a/l \quad (1.38)$$

$$\mu_2 = m_2/M = b/l, \quad \rho_1 = R_1/l, \quad \rho_2 = R_2/l \quad (1.39)$$

As equações de movimento ficam

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad e \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (1.40)$$

onde

$$\phi = \frac{F}{l^2 n^2} = \frac{\mu_1}{\rho_1} + \frac{\mu_2}{\rho_2} \quad (1.41)$$

e

$$\rho_1^2 = (\xi - \mu_2 \cos t)^2 + (\eta - \mu_2 \sin t)^2 \quad (1.42)$$

$$\rho_2^2 = (\xi + \mu_1 \cos t)^2 + (\eta + \mu_1 \sin t)^2 \quad (1.43)$$

Vemos que os únicos parâmetros constantes que permanecem são μ_1 e μ_2 , mas como $\mu_1 + \mu_2 = 1$, se tivermos uma das massas adimensionais achamos a outra, ou seja, teremos o problema dependendo de apenas um parâmetro. Substituindo ϕ em (1.40) temos

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \left[\mu_1 \frac{(\xi - \mu_2 \cos t)}{\rho_1^3} + \mu_2 \frac{(\xi + \mu_1 \cos t)}{\rho_2^3} \right] \quad (1.44)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \left[\mu_1 \frac{(\eta - \mu_2 \sin t)}{\rho_1^3} + \mu_2 \frac{(\eta + \mu_1 \sin t)}{\rho_2^3} \right] \quad (1.45)$$

1.2.2 Sistema girante

Analogamente, tomando as coordenadas adimensionais

$$x = \bar{x}/l, \quad y = \bar{y}/l, \quad t = nt^* \quad (1.46)$$

$$r_1 = \bar{r}_1/l, \quad r_2 = \bar{r}_2/l, \quad \mu_{1,2} = m_{1,2}/M \quad (1.47)$$

As equações de movimento ficam então

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x} \quad (1.48)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y} \quad (1.49)$$

onde os pontos significam derivada com relação ao tempo adimensional (t) e

$$\bar{\Omega} = \frac{F^*}{l^2 n^2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (1.50)$$

$$r_1^2 = (x - \mu_2)^2 + y^2 \quad (1.51)$$

$$r_2^2 = (x + \mu_1)^2 + y^2 \quad (1.52)$$

Para dar uma forma mais simétrica podemos acrescentar uma constante ao potencial, o que não afetará as equações de movimento. Seja

$$\Omega = \bar{\Omega} + \frac{1}{2}\mu_1\mu_2 \quad (1.53)$$

O que leva a

$$\Omega = \frac{1}{2}(\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} = \mu_1 \left(\frac{r_1^2}{2} + \frac{1}{r_1} \right) + \mu_2 \left(\frac{r_2^2}{2} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.54)$$

Sendo as equações de movimento dadas por

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x} \quad (1.55)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y} \quad (1.56)$$

De acordo com as equações (1.33) à (1.37), a integral de Jacobi fica

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\bar{\Omega} - \bar{C} \quad (1.57)$$

e usando Ω ao invés de $\bar{\Omega}$, temos

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C \quad (1.58)$$

sendo $C = \bar{C} + \mu_1\mu_2$.

Portanto

$$C = +\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (1.59)$$

A integral de Jacobi no sistema de coordenadas girante relaciona a velocidade relativa adimensional com as coordenadas de posição através da constante de Jacobi.

Para achar a integral de Jacobi no sistema inercial usamos

$$\xi = x \cos t - y \sin t \quad (1.60)$$

$$\eta = x \sin t + y \cos t \quad (1.61)$$

ou $\zeta = ze^{it}$, onde $\zeta = x + iy$.

Então a integral de Jacobi no sistema inercial é dada por

$$-\bar{C} = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + (\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta}) - \frac{\mu_1}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2} - \bar{C} \quad (1.62)$$

É interessante observar que o potencial centrífugo no referencial girante torna-se o potencial de Coriolis no referencial inercial. Ambos são maneiras distintas de expressar o momento angular.

1.3 Montagem da Hamiltoniana do Sistema

Definiremos o problema de Euler a partir da Lagrangeana do sistema restrito. Como sabemos a Lagrangeana, no sistema inercial é dada por

$$L = T - V \quad (1.63)$$

$$L = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \Omega \quad (1.64)$$

onde o ponto indica derivada temporal, e $\Omega = -V$ (V é a energia potencial). Como antes

$$X = x \cos nt - y \sin nt \quad (1.65)$$

$$Y = x \sin nt + y \cos nt \quad (1.66)$$

$$\Omega = \frac{1}{2}\mu_1\mu_2 + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (1.67)$$

Derivando (1.65) e (1.66) com relação ao tempo e substituindo em (1.64), ficamos então com

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + n(xy - y\dot{x}) + \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \Omega \quad (1.68)$$

onde $n(xy - y\dot{x})$ é o termo devido à força de Coriolis e $\frac{n^2}{2}(x^2 + y^2)$ é o termo devido à força centrífuga.

A hamiltoniana do sistema é dada por $H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L$, onde

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - ny \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + nx. \end{aligned}$$

Como $\mu_1 + \mu_2 = 1 \rightarrow \mu_1 = 1 - \mu_2$, se definimos $\mu_2 = \mu$ e $\mu_1 = 1 - \mu$, temos em (8)

$$\Omega = \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (1.69)$$

Substituindo em H, temos

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + n(yp_x - xp_y) - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \quad (1.70)$$

Se o termo devido à força de Coriolis for ignorado, teremos o problema de Euler dos dois centros fixos. Então

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \quad (1.71)$$

é a Hamiltoniana correspondente a tal problema. Ignorar o termo devido à força de Coriolis, fisicamente, implica que os dois corpos primários estariam fixados e sem girar (não terão momento angular) e o terceiro corpo sujeito a atração gravitacional dos mesmos.

Capítulo 2

Hamilton-Jacobi e Secção de Poincaré

2.1 Solução do Problema de Euler por Hamilton-Jacobi

2.1–Nesta seção iremos tratar o problema de dois centros através do método de Hamilton-Jacobi, quer dizer, vamos procurar uma transformação canônica [5]. Essa transformação de variáveis preserva os invariantes de Poincaré-Cartan e conseqüentemente as equações de Hamilton. Queremos que a hamiltoniana $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ seja levada em uma função $K(\mathbf{Q})$ (uma função que depende apenas das novas coordenadas \mathbf{Q}). Temos que em uma transformação canônica as novas variáveis devem preservar a soma das áreas projetadas de cada par conjugado (\mathbf{p}, \mathbf{q}) no espaço de fase, ou seja,

$$\sum \int_R \int \mathbf{p} d\mathbf{q} = \int_R \int \mathbf{P} d\mathbf{Q} \quad (2.1)$$

sobre alguma região fechada R . Pelo teorema de Stokes a integral dupla pode ser substituída por uma integral de linha fechada sobre o contorno L da região R .

$$\oint_L \mathbf{p} d\mathbf{q} = \oint_L \mathbf{P} d\mathbf{Q} \quad (2.2)$$

Iremos considerar como variáveis independentes \mathbf{q} e \mathbf{Q} , neste caso teremos $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$. Temos então que

$$\oint_L [\mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})d\mathbf{q} - \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})d\mathbf{Q}] = 0 \quad (2.3)$$

Para que essa integral fechada seja zero, ela deve ser a integral da diferencial exata de alguma função - chamaremos de $S(\mathbf{Q}, \mathbf{q})$. Podemos escrever agora

$$\oint_L [\mathbf{p}d\mathbf{q} - \mathbf{P}d\mathbf{Q}] = \oint_L dS(\mathbf{Q}, \mathbf{q}) = \oint_L \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{Q}} d\mathbf{Q} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} \right) \quad (2.4)$$

Igualando os coeficientes de $d\mathbf{q}$ e de $d\mathbf{Q}$, temos que

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{Q}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad , \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial S(\mathbf{Q}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{Q}} \quad (2.5)$$

A primeira equação fornece uma relação entre \mathbf{p} e (\mathbf{Q}, \mathbf{q}) , a qual deve ser invertida (o que é possível se $\partial^2 S / \partial \mathbf{q} \partial \mathbf{Q} \neq 0$) para que tenhamos a dependência $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Substituímos esse resultado na segunda equação de (2.5) para obtermos a outra relação $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

A função $S(\mathbf{Q}, \mathbf{q})$ é chamada de função geratriz. Nosso objetivo é encontrar uma função desse tipo que será utilizada para gerar a transformação da antiga hamiltoniana para a nova função $K(\mathbf{Q})$. Para isso resolvemos a equação de Hamilton-Jacobi que é definida por

$$H\left(\frac{\partial S(\mathbf{Q}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right) = K(\mathbf{Q}) \quad (2.6)$$

para a função $S(\mathbf{Q}, \mathbf{q})$. Onde substituímos $\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}$.

O sucesso do método está baseado no emprego de um sistema de coordenadas convenientes.

Neste caso utilizaremos as coordenadas elípticas. Suponhamos que a distância entre a massa que se move e os pontos fixos O_1 e O_2 seja r_1 e r_2 , e a distância entre os pontos seja $2c$ (Figura 2.1). As coordenadas elípticas ξ e η definem-se como a soma e a diferença das distâncias r_1 e r_2 : $\xi = r_1 + r_2$ e $\eta = r_1 - r_2$.

Agora iremos expressar a função de Hamilton através das coordenadas elípticas.

As linhas $\xi = cte$ são elipses com focos em O_1 e O_2 , $\eta = cte$ são hipérbolas com os mesmos focos (Figura 2.2). Estas curvas são ortogonais entre si, então podemos escrever o quadrado do elemento de comprimento, $ds^2 = a^2 d\xi^2 + b^2 d\eta^2$. Determinaremos, agora, os coeficientes a e b . Se projetarmos os elementos dr_1 e dr_2 no elemento de comprimento ds da elipse, então teremos para um movimento ao longo de uma elipse,

$$dr_1 = ds \cos \alpha \quad , \quad dr_2 = -ds \cos \alpha \quad , \quad d\eta = 2 \cos \alpha ds \quad e \quad d\xi = 0 \quad (2.7)$$

No caso do movimento ao longo de uma hipérbole as projeções serão dadas por

$$dr_1 = ds \sin \alpha \quad , \quad dr_2 = ds \sin \alpha \quad , \quad d\xi = 2 \sin \alpha ds \quad e \quad d\eta = 0 \quad (2.8)$$

Portanto, $a = (2 \sin \alpha)^{-1}$ e $b = (2 \cos \alpha)^{-1}$.

A partir do triângulo da figura, encontramos

$$r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos 2\alpha = 4c^2 \quad (2.9)$$

donde

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{4c^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2} \quad (2.10)$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 = \frac{2r_1 r_2}{2r_1 r_2} \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4c^2 - (r_1 - r_2)^2}{4r_1 r_2} \quad e \quad \sin^2 \alpha = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}{4r_1 r_2} \quad (2.12)$$

Vamos agora deduzir a hamiltoniana do sistema nessas coordenadas. Para uma partícula movendo-se sobre uma elipse vimos que o quadrado do elemento de comprimento é dado por $ds = \Sigma a_i^2 dq_i^2$, então a energia cinética é dada por $T = \Sigma \frac{a_i^2 dq_i^2}{2}$, como $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ e $L = T(\dot{q}_i) + V(q_i)$, isso implica que $p_i = a_i^2 \dot{q}_i$.

Para a hamiltoniana temos,

$$H = \Sigma \frac{p_i^2}{2a_i^2} + U \quad (2.13)$$

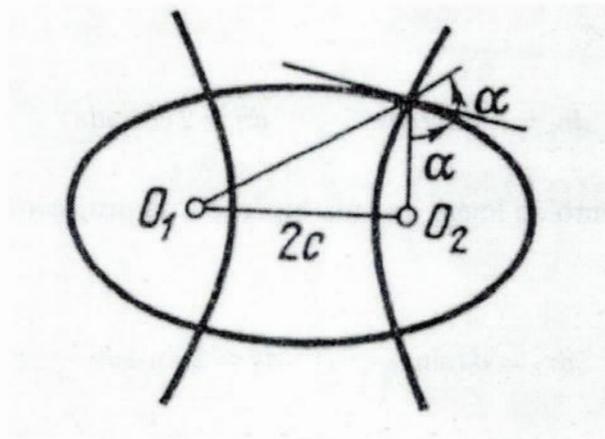


Figura 2.1: Dois centros no plano: Coordenadas Elípticas.

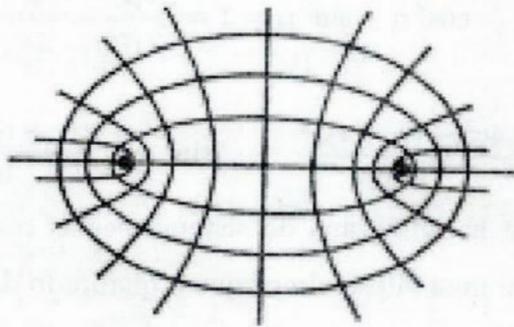


Figura 2.2: Elipses e Hipérbolas cofocais.

Abrindo em componentes, e substituindo a e b , temos

$$H = p_\xi^2 \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}{2r_1 r_2} + p_\eta^2 \frac{4c^2 - (r_1 - r_2)^2}{2r_1 r_2} - \frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2} \quad (2.14)$$

Como $r_1 + r_2 = \xi$, $r_1 - r_2 = \eta$ e $4r_1 r_2 = \xi^2 + \eta^2$, temos

$$H = 2p_\xi^2 \frac{\xi^2 - 4c^2}{\xi^2 - \eta^2} + 2p_\eta^2 \frac{4c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} - \frac{4k\xi}{\xi^2 - \eta^2} \quad (2.15)$$

Agora vamos resolver a equação de Hamilton-Jacobi, substituindo-se $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ na hamiltoniana e igualando-a a $K(\mathbf{Q})$.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 (\xi^2 - 4c^2) + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 (4c^2 - \eta^2) = K(\xi^2 - \eta^2) + 4k\xi \quad (2.16)$$

Podemos separar as variáveis, por exemplo, supondo

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 (\xi^2 - 4c^2) - K\xi^2 - 4k\xi = c_1 \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 (4c^2 - \eta^2) + K\eta^2 = -c_1 \quad (2.18)$$

Chamando $K(\mathbf{Q})$ de c_2 , encontramos a integral total da equação de H-J sob a forma

$$S(\xi, \eta; c_1, c_2) = \int \sqrt{\frac{c_1 + c_2 \xi^2 + 4k\xi}{\xi^2 - 4c^2}} d\xi + \int \sqrt{\frac{-c_1 - c_2 \eta^2}{4c^2 - \eta^2}} d\eta \quad (2.19)$$

onde c_1 e c_2 são os novos momentos conservados, e ξ e η as novas coordenadas procuradas. O teorema de Jacobi facultava-nos agora uma expressão explícita do movimento do problema de dois centros fixos através de integrais elípticas.

Apresentamos agora a formulação de Albouy [1] do problema de Euler no plano (veja Figura 1.1) pode também ser definido pelas equações diferenciais

$$\ddot{x} = -a(x_A, y)x_A - b(x_B, y)x_B, \quad \ddot{y} = -a(x_A, y)y - b(x_B, y)y. \quad (2.20)$$

Nessa formulação os dois centros estão em $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, e a partícula no ponto (x, y) . Definimos $x_A = x - 1$, $x_B = x + 1$,

$$a(\xi, \eta) = m_A(\xi^2 + \eta^2)^{-3/2}, \quad b(\xi, \eta) = m_B(\xi^2 + \eta^2)^{-3/2}.$$

O primeiro passo para a integração do problema é encontrarmos duas integrais primeiras de movimento independentes. Uma integral é a energia

$$H = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 - \tilde{a}(x_A, y) - \tilde{b}(x_B, y),$$

com $\tilde{a}(\xi, \eta) = m_A(\xi^2 + \eta^2)^{-1/2}$, $\tilde{b}(\xi, \eta) = m_B(\xi^2 + \eta^2)^{-1/2}$. A outra, que apresentaremos agora, é a chamada a segunda integral de Euler:

$$G = C_A C_B - 2A_\xi(x_A, y) + 2B_\xi(x_B, y),$$

com $C_A = x_A \dot{y} - y \dot{x}$, $C_B = x_B \dot{y} - y \dot{x}$.

O procedimento de Euler para encontrar a integração do problema foi eliminar a derivada segunda em (2.20) usando as integrais primeiras, e a seguir separar as variáveis.

2.2 Secção de Poincaré

Iremos nesta secção resumir o método da superfície de secção de Poincaré [15].

Seja uma hamiltoniana de 2 graus de liberdade $H(x, p_x, y, p_y) = E$, onde E é a constante de energia.

Temos, então, que é suficiente conhecermos 3 coordenadas no espaço de fase, pois a quarta é obtida se conhecemos o valor da energia(E).

Fixamos uma energia E e escolhemos a condição, digamos $y = 0$. Então dados (x^o, p_x^o) , p_y^o fica determinado (a menos de um sinal) por $E = H(x^o, p_x^o, 0, p_y^o)$.

O método consiste em integrar-se as equações de movimento associadas a H e coletar-se (x, p_x) toda vez que $y = 0$ e $p_y > 0$ (ou $p_y < 0$). Especificamos o sinal de p_y fixando a direção pela qual a trajetória está "furando" o plano $y = 0$, para que a secção seja única.

O conjunto desses pontos coletados (para vários valores iniciais de x^o e p_x^o) é a secção de Poincaré em $y = 0$, para a energia E . Notemos que os pontos $(x, p_x, y = 0, p_y)$ estão sobre uma superfície bidimensional Σ definida por $H(x, p_x, y = 0, p_y) = E$, e não sobre

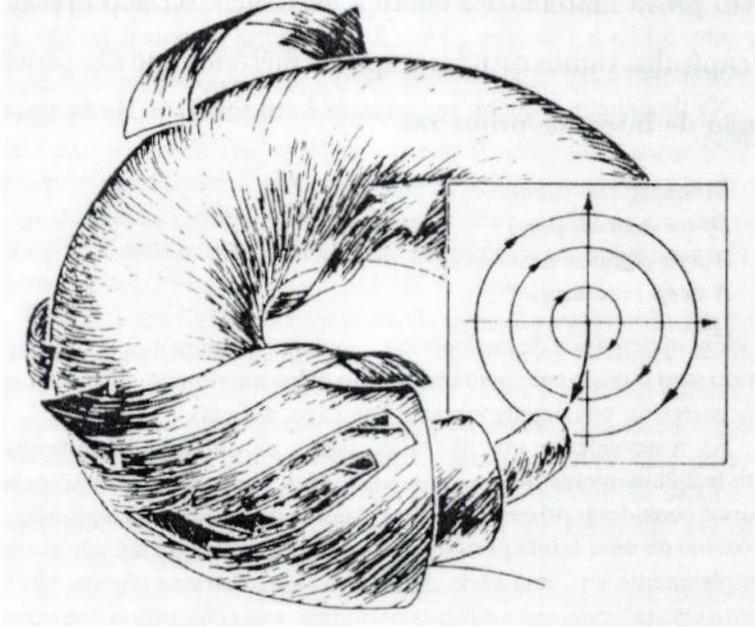


Figura 2.3: Toros e a secção de Poincaré (Σ) .

o plano (x, p_x) , pois em geral, $p_y \neq 0$. Assim, a projeção (x, p_x) é suficiente para investigação numérica, uma vez definido o sentido do cruzamento.

Se o sistema Hamiltoniano que estamos tratando for integrável, então seu espaço de fase será folheado por toros invariantes que quando cortados pela secção de Poincaré se apresentam como curvas fechadas.

Órbitas periódicas podem aparecer como pontos fixos do mapa de Poincaré P (órbitas simples como uma oval por exemplo) ou de potências do mapa P^s . Um ponto fixo de P^s corresponde a uma órbita que se fecha após dar s voltas e "furar" s vezes a secção.

Mas se não existir nenhuma outra integral primeira além de E (sistemas Hamiltonianos não integráveis), todo ponto iniciado dentro desta região pode, em princípio, preencher todo o espaço disponível fixado por E , ou seja, o movimento não estará restrito à superfície do toro e os pontos sobre a secção de Poincaré não estarão sobre uma curva (curva invariante).

Através deste processo podemos ter indícios da existência ou não de uma integral primeira num determinado problema. Mas como é um processo numérico, tal procedimento não constitui prova matemática sobre a existência ou não dessas integrais.

Nos próximos capítulos vamos estudar e aplicar métodos que são provas matemáticas da existência ou não de integrais primeiras.

Capítulo 3

Estudo Numérico do Problema de Euler

Neste capítulo iremos discutir os resultados obtidos através das secções de Poincaré para o problema de dois centros fixos.

3.1 Curvas de Velocidade Zero

Para escolhermos as condições iniciais das órbitas para as quais serão feitas as secções, desenhamos as curvas de velocidade zero. Para isso simplesmente tomamos a velocidade do corpo como zero e ficamos com o potencial igual ao valor escolhido para a hamiltoniana, que chamaremos de E :

$$V = -\frac{1}{2\sqrt{(x-0.5)^2 + y^2}} - \frac{1}{2\sqrt{(x+0.5)^2 + y^2}} = E.$$

Lembremos que o problema de dois centros fixos com massas iguais $\mu_1 = \mu_2$, segundo a nossa notação do Capítulo 1, os centros estarão a 0.5 unidades à esquerda e direita da origem.

Para fazer os contornos de E constante, escolhemos basicamente três regimes: um com a partícula tendo seu movimento confinado a um dos corpos (menor energia, curvas menores internas); outro com a partícula podendo transitar entre os dois corpos (energia média, curva de velocidade zero tipo oito); e, finalmente, um com a partícula

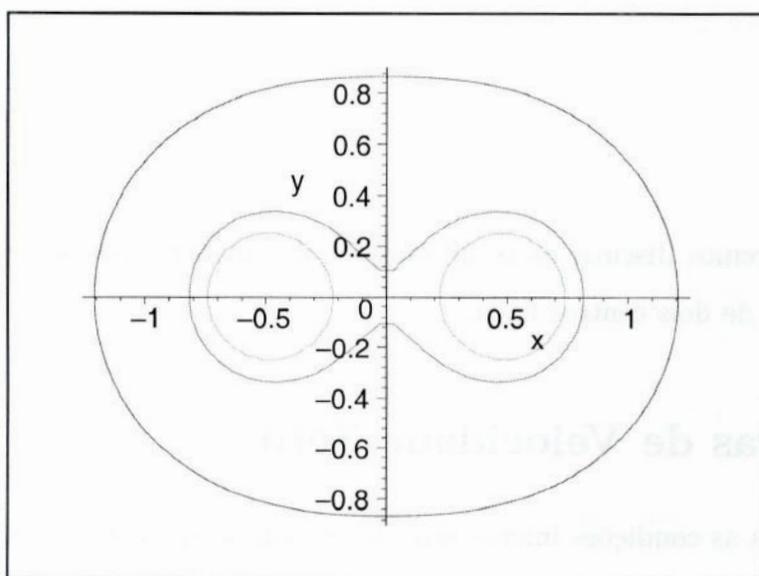


Figura 3.1: Curvas de Velocidade Zero .

com alta energia (curva maior externa). Essas curvas de velocidade zero são mostradas na Figura 3.1, correspondendo aos valores $E = -2.50$, $E = -1.96$ e $E = -1.00$, respectivamente. Trataremos também a energia $E = -0.50$, caso em que a partícula também "vê" os dois centros como um único centro, e em primeira aproximação seria um problema de Kepler. Essa curva de velocidade zero não é mostrada para que não se perca detalhe da figura. Trata-se de uma curva tipo $E = -1.00$, ocupando uma região bem maior do que a exibida na Figura 3.1.

3.2 Secções de Poincaré

Nesta seção estudaremos as secções de Poincaré (cuja teoria foi explicada no capítulo 2) para os regimes definidos na seção anterior. Foi escolhida a superfície $y = 0$, com $\dot{y} > 0$. Portanto as figuras que seguem têm como coordenadas, (x, p_x) . Como já explicado não usamos a variável p_y , mas apenas essa projeção.

Para energia $E = -2.50$, temos na figura 3.1 duas curvas isoladas, e é exatamente o que vemos na figura 3.2 e 3.3. Na Figura 3.2 vemos que a a partícula fica confinada a um dos dois centros de força, dependendo do lado em que está a condição inicial em relação à origem, ficando aprisionada a um ou outro centro de força localizado no ponto -0.50 ou $+0.50$. Isto se pode notar claramente no fato dos iterados da secção não se tocarem. Cada condição inicial desenha uma linha em torno do centro que são as repetidas passagens da trajetória pela secção. Isto é característico dos sistemas integráveis.

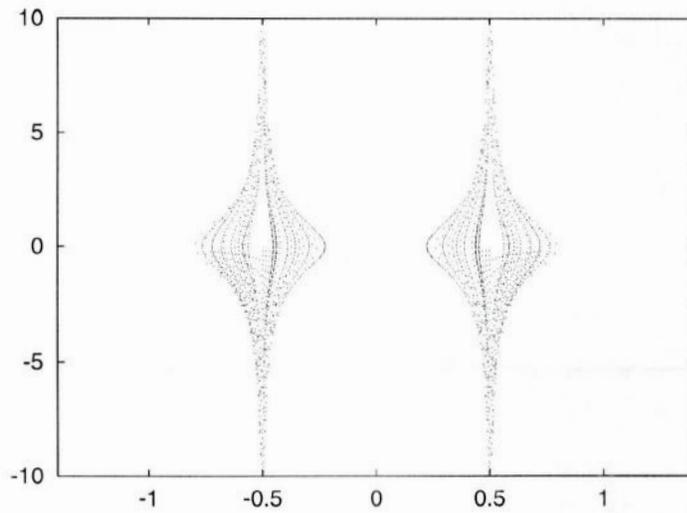
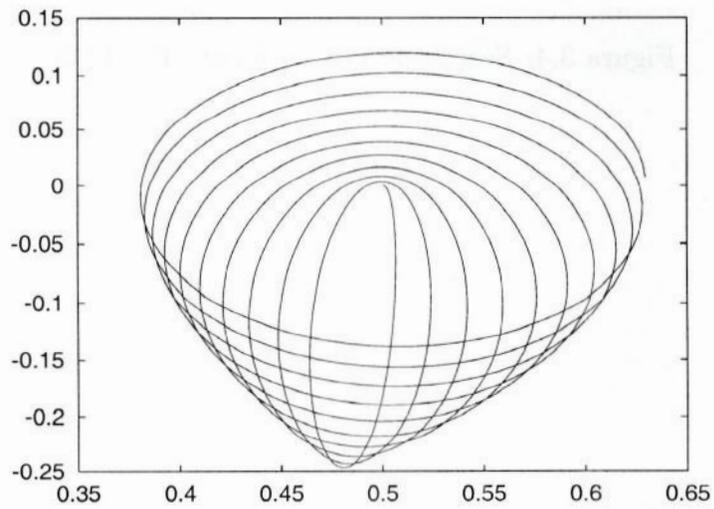
Antes de discutir as próximas figuras cabe salientar que as equações de movimento não foram regularizadas. Note que à medida que o ponto sobre uma trajetória se aproxima do centro o momento cresce muito. Fizemos um corte para interromper os cálculos toda vez que $p > p_c$ para garantir o bom funcionamento do integrador numérico. Um estudo mais acurado requereria técnicas de regularização para evitar esta divergência. Na Figura 3.2 mostramos uma dessas órbitas interrompida um pouco antes do choque em $x = 0.5$.

Como exemplo de uma curva de velocidade zero tipo oito escolhemos $E = -1.96$. Para esta energia a partícula pode tanto pode ser capturada por um dos centros de força como pode transitar de um a outro. Na Figura 3.4 vemos a secção de Poincaré para esta energia. Observemos que existem pontos de ligação entre um centro e outro correspondendo a trajetórias que transitam de um centro a outro. Notemos que para a maioria das condições iniciais temos o confinamento das trajetórias.

Para o círculo mais externo, energias mais altas, escolhemos $E = -1$. Como exemplo de uma trajetória que circula de um centro a outro escolhemos a posição inicial $x = 1.2$. Essa órbita pode ser vista na Figura 3.5 em projeção na configuração (x, y) . Nesta energia, relativamente alta, a partícula pode apresentar todos os movimentos

descritos acima. Nas energias mais altas, como $E = -0.5$ que será descrito abaixo, também há órbitas na qual os dois corpos são percebidos como um único centro de força. Na Figura 3.6 podemos ver a secção de Poincaré, sem nenhum caos como era de se esperar. Cabe observar também o aumento do “gargalo” que permite o trânsito de um centro a outro. Se estivessemos lidando com, por exemplo, estrelas binárias isto significaria a transferência de massa do disco de acreção de uma estrela a outra.

Para a energia anteriormente mencionada, $E = -0.5$, exibimos uma trajetória que sempre circunda os dois centros “vendo-os” como um único centro (Figura 3.7). Na Figura 3.8 vemos a secção desta energia, e as trajetórias deste tipo são as curvas em torno do ponto fixo (da secção) localizados em aproximadamente 1.0 e -1.0 . Seria interessante examinar para qual valor da energia surgem estes pontos fixos, embora não o faremos aqui. Esse tipo de órbita é, em primeira aproximação, kepleriana. Órbitas externas às ilhas bem desenhadas correspondem a trajetórias que ultrapassam o nosso valor de momento de corte, p_c , isto é, órbitas que colidem com um dos centros.

Figura 3.2: Secção de Poincaré para $E = -2.5$.Figura 3.3: Projeção da órbita no espaço de configuração (x, y) para $E = -2.50$.

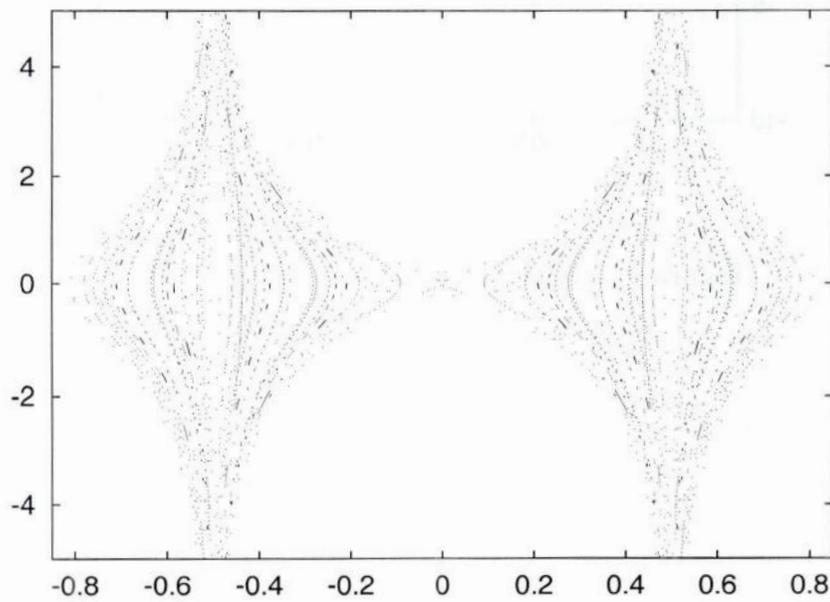


Figura 3.4: Secção de Poincaré para $E = -1.96$.

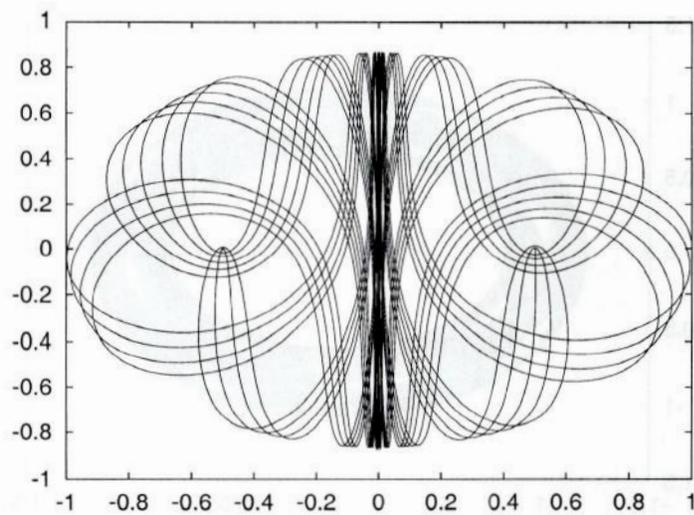


Figura 3.5: Projeção da órbita no plano x-y para $E=-1.00$.

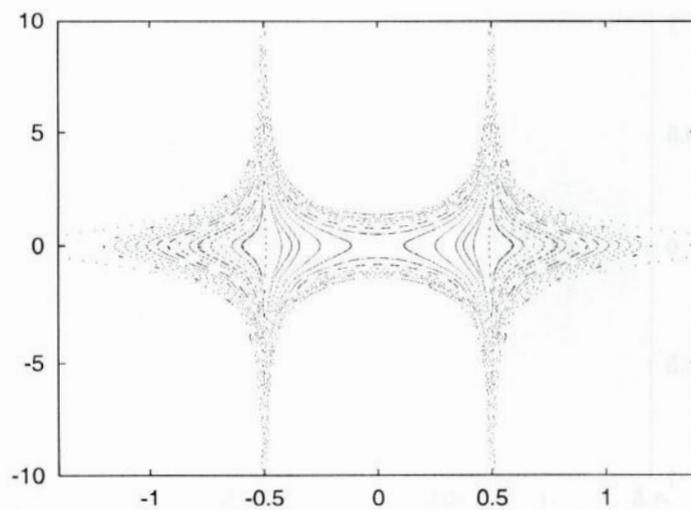


Figura 3.6: Secção de Poincaré para $E=-1$.

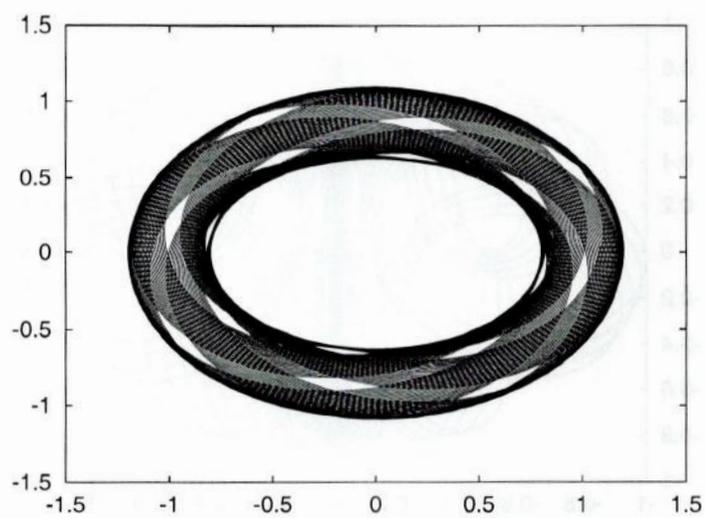


Figura 3.7: Projeção da órbita no plano x-y para $E = -0.5$.

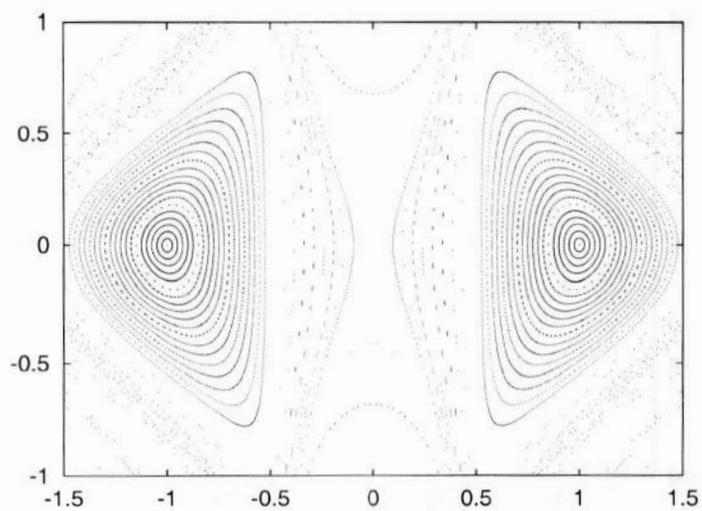


Figura 3.8: Secção de Poincaré para $E = -0.5$.

Capítulo 4

Critério de Integrabilidade para Potenciais Homogêneos

No presente capítulo vamos resumir um teorema devido a Morales-Ramis que generaliza a visão de Yoshida do Teorema de Ziglin. A versão de Yoshida permite tratar apenas potenciais com dois graus de liberdade e sem ressonâncias.

Em seguida faremos uma aplicação ao problema de dois centros fixos de Euler, que já sabemos ser integrável. Veremos que, neste caso o teorema não é eficiente por tratar-se de uma condição necessária, ou seja, sua verificação, não necessariamente, quer dizer que o problema seja integrável, pois só podemos afirmar algo quando o critério falha, e neste caso, o sistema é não integrável.

Seja $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{T}(\mathbf{p}) + \mathbf{V}(\mathbf{q})$, onde $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ e $V(\mathbf{q})$ um potencial homogêneo de grau k , ou seja, se a é uma constante, $V(a\mathbf{q}) = a^k V(\mathbf{q})$. Como consequência da homogeneidade do potencial as equações de Hamilton

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad , \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.1)$$

têm uma solução particular do tipo

$$q_i = c_i f(t) \quad , \quad p_i = c_i \dot{f}(t) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

que definem um plano invariante; $f(t)$ é uma solução da equação diferencial não linear

$$\frac{d^2f}{dt^2} + f^{k-1} = 0 \quad (4.3)$$

e o vetor constante c_i é uma solução da equação algébrica

$$c_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} |_{(c_1, \dots, c_n)} \quad (4.4)$$

Esta é a solução em torno da qual calculamos as equações variacionais (tangencial e normal).

Fixando as condições iniciais da equação diferencial (4.3) para $f(t)$, como

$$f(0) = 1 \quad , \quad \frac{df}{dt} |_{t=0} = 0, \quad (4.5)$$

e integrando a equação para f utilizando as condições iniciais acima, temos

$$\left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = 1 - f^k$$

Agora iremos deduzir as equações variacionais lineares relativas as equações de Hamilton em torno dessa solução particular.

Como é bem conhecido, dado o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx_r}{dt} = X_r(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (4.6)$$

as equações para uma vizinhança δx_r de uma solução arbitrária $x_r(t)$ são dadas por

$$\frac{d(x_r + \delta x_r)}{dt} = X_r(x_1 + \delta x_1, \dots, x_n + \delta x_n, t) \quad (4.7)$$

As equações variacionais de primeira ordem são definidas como os termos de primeira ordem dessa série de Taylor em n variáveis

$$\frac{d(\delta x_r)}{dt} = \frac{\partial X_r}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial X_r}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial X_r}{\partial x_n} \delta x_n. \quad (4.8)$$

Utilizaremos esta idéia geral para deduzirmos as equações variacionais do nosso sistema para o qual $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Temos, então

$$\frac{d(\delta q_i)}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta q_j + \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_j \quad (4.9)$$

$$\frac{d(\delta p_i)}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_j + \frac{\partial}{\partial p_j} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta p_j \quad (4.10)$$

Chamando $\delta q_i = \xi_i$ e $\delta p_i = \eta_i$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \eta_j \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -f^{k-2} \mathbf{V}_{ij} \xi_j \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = -f^{k-2} \mathbf{V}_{ij} \xi_j \quad (4.11)$$

onde $\mathbf{V}_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}$ é a matriz Hessiana calculada na solução escolhida, no nosso caso são as equações (4.2), ou seja \mathbf{V}_{ij} é calculada em $q_i = c_i$.

Como \mathbf{V}_{ij} é simétrica, podemos diagonalizar a equação (4.11) através de uma mudança de variáveis

$$\xi_i = U_{ij} \xi'_i \quad , \quad \eta_i = U_{ij} \eta'_i \quad (4.12)$$

sendo U_{ij} uma matriz ortogonal. Esta diagonalização nos permite reduzir a EV à equação variacional normal em torno da solução particular. Podemos, então, expressar a equação variacional como uma soma direta de equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2 \xi'_i}{dt^2} = -f^{k-2} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \xi'_j \quad (4.13)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de \mathbf{V}_{ij} . Como o vetor velocidade da curva solução de uma equação diferencial é sempre uma solução particular da equação variacional em torno dessa solução, $\xi_i = c_i \dot{f}(t) = p_i(t)$ é sempre uma solução particular da equação (4.11). Portanto o vetor constante \mathbf{c} é um autovetor de \mathbf{V}_{ij} com autovalor $\lambda = k - 1$, que chamaremos λ_n .

Portanto, no caso de uma hamiltoniana de dois graus de liberdade, existe apenas um autovalor não trivial dado pela expressão

$$\lambda = \text{Tr}[\mathbf{V}_{ij}(c_1, c_2)] - (k - 1) \quad (4.14)$$

e a equação (4.11) pode ser dividida em duas,

$$\frac{d^2 \xi_1'}{dt^2} + \lambda f^{k-2} \xi_1' = 0 \quad (4.15)$$

e

$$\frac{d^2 \xi_2'}{dt^2} + (k-1) f^{k-2} \xi_2' = 0 \quad (4.16)$$

onde a equação (4.15) é chamada equação variacional normal (EVN) e a equação (4.16), equação variacional tangencial (EVT). A segunda equação está na direção da solução particular, e não acrescenta informação sobre o sistema. Já a EVN nos dirá como a dinâmica ortogonal à solução particular se comporta.

Por esta razão a quantidade λ terá um papel fundamental nas próximas discussões, e será chamado de *Coefficiente de Integrabilidade*.

O seguinte teorema devido a Morales-Ramis estabelece condições sobre os λ 's e o grau de homogeneidade k para que o sistema seja integrável.

Teorema1 Uma condição necessária para um sistema Hamiltoniano, com um potencial homogêneo de grau k , ser completamente integrável, é a que o par (k, λ_i) pertença a um caso da lista seguinte (com exceção do caso trivial $k = 0$):

- (1) $(k, p + p(p-1)k/2)$,
- (2) $(2, \text{número complexo arbitrário})$,
- (3) $(-2, \text{número complexo arbitrário})$,
- (4) $(-5, \frac{49}{40} - \frac{1}{40}(\frac{10}{3} + 10p)^2)$,
- (5) $(-5, \frac{49}{40} - \frac{1}{40}(4 + 10p)^2)$,
- (6) $(-4, \frac{9}{8} - \frac{1}{8}(\frac{4}{3} + 4p)^2)$,
- (7) $(-3, \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(2 + 6p)^2)$,
- (8) $(-3, \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(\frac{3}{2} + 6p)^2)$,
- (9) $(-3, \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(\frac{6}{5} + 6p)^2)$,
- (10) $(-3, \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(\frac{12}{5} + 6p)^2)$,
- (11) $(3, -\frac{1}{24} + \frac{1}{24}(2 + 6p)^2)$,
- (12) $(3, -\frac{1}{24} + \frac{1}{24}(\frac{3}{2} + 6p)^2)$,
- (13) $(3, -\frac{1}{24} + \frac{1}{24}(\frac{6}{5} + 6p)^2)$,

$$(14) (3, -\frac{1}{24} + \frac{1}{24}(\frac{12}{5} + 6p)^2),$$

$$(15) (4, -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}(\frac{4}{3} + 4p)^2),$$

$$(16) (5, -\frac{9}{40} + \frac{1}{40}(\frac{10}{3} + 10p)^2),$$

$$(17) (5, -\frac{9}{40} + \frac{1}{40}(4 + 10p)^2),$$

$$(18) (k, \frac{1}{2}(\frac{k-1}{k} + p(p+1)k)),$$

onde p é um inteiro arbitrário.

4.1 Aplicação do Teorema 1

Como vimos nos capítulos 1 e 3, o potencial do sistema é dado por

$$V = -\frac{1}{2\sqrt{(x-0.5)^2 + y^2}} - \frac{1}{2\sqrt{(x+0.5)^2 + y^2}}.$$

Este potencial é homogêneo se definirmos as variáveis $r_1^2 = (x - \mu_2)^2 + y^2$ e $r_2^2 = (x + \mu_1)^2 + y^2$

$$V = -\frac{1}{2r_1} - \frac{1}{2r_2}. \quad (4.17)$$

Vemos claramente, que o grau de homogeneidade k é -1 .

Calcularemos agora c_1 e c_2 , tal que

$$c_1 = \frac{\partial V}{\partial r_1} |_{(c_1, c_2)} \quad c_2 = \frac{\partial V}{\partial r_2} |_{(c_1, c_2)}. \quad (4.18)$$

Ficamos, então, com duas equações e duas incógnitas

$$c_1 - \frac{1}{2c_1^2} = 0 \quad c_2 - \frac{1}{2c_2^2} = 0. \quad (4.19)$$

cuja solução é $c_1^3 = c_2^3 = 1/2$.

$$c_1 = 0.7937005260, -0.3968502630 + 0.6873648188 I, -0.3968502630 - 0.6873648188 I$$

$$c_2 = 0.7937005260, -0.3968502630 + 0.6873648188 I, -0.3968502630 - 0.6873648188 I.$$

A matriz Hessiana do nosso potencial em $r_1 = c_1$ e $r_2 = c_2$ é

$$Hess = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2c_1^3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2c_2^3} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Substituindo os valores de c_1^3 e c_2^3 encontrados, temos a equação para o coeficiente de integrabilidade:

$$\lambda = -\frac{1}{2c_1^3} - \frac{1}{2c_2^3} - (k - 1), \quad (4.21)$$

e como grau do nosso potencial é $k = -1$, temos

$$\lambda = -2. \quad (4.22)$$

Agora, a aplicação do Teorema 1 consiste em procurarmos na lista de casos (de 1 a 18), quais casos tem o k igual ao nosso, ou arbitrário. No nosso caso $k = -1$, vemos então, que apenas os casos 1 e 18 (substituindo $k = -1$) devem ser analisados. Esta análise consiste em igualarmos o polinômio encontrado a cada λ , e verificar se existe p inteiro para o qual a igualdade é verdadeira.

Para o caso 1, temos que

$$\lambda = p - \frac{p(p-1)}{2} = -2 \quad (4.23)$$

se realiza para $p = -1$ e $p = 4$.

Para o caso 18,

$$\lambda = \frac{1}{2}(2 - p(p+1)) = -2 \quad (4.24)$$

é verdadeira para $p = -3$ e $p = 2$.

Vemos que os dois casos se verificam para $\lambda = -2$. O Teorema 1 afirma que se o problema é integrável, basta que um caso se verifique. Entretanto, note que a condição é apenas necessária, isto é, a existência do par (λ, k) satisfazendo o teorema não implica em integrabilidade. Somente se não tivéssemos esta verificação do teorema é que poderíamos afirmar que o sistema seria não integrável. Portanto, estes critérios são eficientes quando falham, e poderíamos dizer que é um critério de não integrabilidade. Se não encontrássemos p inteiro para algum caso o problema seria não integrável.

Capítulo 5

Integrabilidade de Potenciais não Homogêneos

5.1 Introdução

Se o potencial não é homogêneo usaremos um critério que estabelece se o grupo de monodromia é ou não Ziglin. Este critério é baseado em teoremas que usam a existência de soluções para equações diferenciais de segunda ordem, essa a equação diferencial é, neste caso, a nossa EVN, e o grupo de monodromia é Ziglin se, e somente se, a EVN for solúvel por tal critério. Um desses teoremas é devido a Churchill e Rod [7] para casos fuchsianos e outro devido a Morales-Ramis sem tal restrição. Ambos empregam o algoritmo de Kovacic [8], o qual nos dá um método para computar a extensão de Picard-Vessiot (isto é, um sistema fundamental de soluções) de uma equação diferencial de segunda ordem, contanto que esta equação seja integrável. Mas se esta equação não for integrável, então o grupo de monodromia não é Ziglin.

No presente caso, as equações variacionais serão computadas usando um plano invariante do sistema hamiltoniano em estudo, como no capítulo anterior. A essa equação variacional será aplicado o algoritmo de Kovacic, conforme, explicaremos a seguir [3].

5.2 Descrição do Algoritmo de Kovacic

Seja uma equação de segunda ordem

$$\ddot{z} + p(x)\dot{z} + q(x)z = 0, \quad \cdot = \frac{d}{dx}, \quad (5.1)$$

sobre a esfera de Riemann P^1 , que pode ser colocada na sua forma normal.

$$\ddot{y} = r(x)y, \quad r(x) = -[q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}\dot{p}(x)], \quad (5.2)$$

As equações (5.1) e (5.2) são fuchsianas se e somente se temos

$$p(x) = \sum_{j=1}^k \frac{A_j}{(x - a_j)}, \quad q(x) = \sum_{j=1}^k \frac{B_j}{(x - a_j)^2} + \sum_{j=1}^k \frac{C_j}{(x - a_j)}, \quad \sum_{j=1}^k C_j = 0, \quad (5.3)$$

e

$$r(x) = \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{(x - a_j)^2} + \sum_{j=1}^k \frac{\delta_j}{(x - a_j)}, \quad \sum_{j=1}^k \delta_j = 0, \quad (5.4)$$

onde os a_j são os polos de $p(x)$ e $q(x)$, e consequentemente polos de $r(x)$. Isto quer dizer que se (5.1) é fuchsiana, (5.2) também é. Temos então as seguintes relações:

$$\beta_j = \frac{1}{4}[(1 - A_j)^2 - 4B_j - 1], \quad (5.5)$$

$$\delta_j = -C_j + \frac{1}{2}A_j \left[\sum_{i \neq j}^k \frac{A_i}{a_j - a_i} \right], \quad (5.6)$$

É necessária também, a definição dos seguintes coeficientes:

$$A_\infty = \sum_{j=1}^k A_j$$

$$B_\infty = \sum_{j=1}^k (B_j + C_j a_j)$$

e,

$$\beta_\infty = \sum_{j=1}^k (\beta_j + \delta_j a_j),$$

$$\beta_\infty = \frac{1}{4}[(1 - A_\infty)^2 - 4B_\infty - 1] . \quad (5.7)$$

Com o auxílio das definições acima temos o seguinte algoritmo:

Teorema 2: O grupo de monodromia da equação variacional normal do sistema é Ziglin se e somente se um dos casos I, II, ou III, descritos abaixo, é satisfeito.

Caso I: Considere os expoentes característicos, já modificados, da equação (5.2)

$$\alpha_j^\pm = \frac{1}{2}[1 \pm (1 + 4\beta_j)^{1/2}] , \text{ se } \beta_j \neq 0 ; \quad (5.8)$$

$$\alpha_j = 1 \text{ se } \beta_j = 0 , \delta \neq 0 ; \alpha_j = 0 \text{ se } \beta_j = 0 = \delta_j ; \quad (5.9)$$

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2}[1 \pm (1 + 4\beta_\infty)^{1/2}] , \text{ se } \beta_\infty \neq 0 ; \quad (5.10)$$

$$\alpha_\infty^+ = 0 \text{ e } \alpha_\infty^- = 1 \text{ se } \beta_\infty = 0. \quad (5.11)$$

Para cada $j = 1, \dots, k$, nós definimos k pares $E_j^I = \{\alpha_j^-, \alpha_j^+\}$ e o par $E_\infty^I = \{\alpha_\infty^-, \alpha_\infty^+\}$. Para termos o Caso I é necessário e suficiente que as condições seguintes sejam verdadeiras:

(1) Existe uma escolha de $e_j \in E_j^I$, $j = 1, \dots, k$ e $e_\infty \in E_\infty^I$, tal que

$$d = [e_\infty - \sum_{j=1}^k e_j] \quad (5.12)$$

seja um inteiro não negativo;

(2) Existe um único polinômio mônico (polinômio no qual o coeficiente do termo de maior ordem é unitário) P de grau d (que pode ser achado pelo método dos coeficientes indeterminados) satisfazendo

$$\ddot{P} + 2w\dot{P} + (\dot{w} + w^2 - r)P = 0 \quad (5.13)$$

onde $w(x) = \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{x - a_j}$, e

(3) $\theta = w + \frac{\dot{P}}{P}$, tal que $y = e^{(\int \theta)}$, $\theta \in C(x)$ é uma solução do sistema normalizado.

Observação 1: No passo (1) se $A_j \pm 2e_j$, não são todos racionais, o caso I não precisa ser considerado, pois existe um corolário do teorema 2 que garante que nestes

casos o grupo de monodromia não é Ziglin. Neste caso somente os casos II e III devem ser examinados.

Caso II: Considere os conjuntos seguintes

$$E_j = \{2 + e(1 + 4\beta)^{1/2} \mid e = 0, \pm 2\} \cap \mathbf{Z} \text{ se } \beta_j \neq 0; \quad (5.14)$$

$$E_j = \{4\} \text{ se } \beta_j = 0, \delta_j \neq 0; \quad (5.15)$$

$$E_j = \{0\} \text{ se } \beta_j = \delta_j = 0; \quad (5.16)$$

e

$$E_\infty = \{2 + e(1 + 4\beta_\infty)^{1/2} \mid e = 0, \pm 2\} \cap \mathbf{Z} \text{ se } \beta_\infty \neq 0, \quad (5.17)$$

$$E_\infty = \{0, 2, 4\} \text{ se } \beta_\infty = 0. \quad (5.18)$$

Se o caso I não se verificar, existe uma solução de (5.2) da forma $y = e^{\int w}$ (onde w é algébrico sobre $C(x)$ e tem grau 2) se, e somente se

(1) Existe uma escolha de $e_k \in E_k$ e $e_\infty \in E_\infty$, que não sejam todos inteiros pares, onde

$$d = \frac{1}{2} \left[e_\infty - \sum_{j=1}^k e_j \right] \quad (5.19)$$

é um inteiro não negativo; e

(2) Existe um Polinômio mônico P de grau d (que também pode ser achado pelo método dos coeficientes indeterminados) que satisfaz

$$\ddot{P} + 3\theta\ddot{P} + (3\theta^2 + 3\dot{\theta} - 4r)\dot{P} + (\ddot{\theta} + 3\theta\dot{\theta} + \theta^3 - 4r\theta - 2\dot{r})P = 0 \quad (5.20)$$

onde $\theta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{e_j}{x - a_j}$.

Precisamente, para P como em (5.20) se tomarmos $\phi = \theta + (\dot{P}/P)$ e escolhermos uma solução w do tipo

$$w^2 + \phi\theta + \left[\frac{1}{2}\dot{\phi} + \frac{1}{2}\phi^2 - r \right] = 0; \quad (5.21)$$

então, $y = e^{\int w}$ será a solução da equação (5.2) acima mencionada. Neste caso dizemos que o grupo é Ziglin.

Observação 2: Voltamos a dizer que se $A_j \pm 2e_j$ não são todos racionais, então somente os casos I e III precisam ser examinados, pois existe um corolário do teorema que garante que nestes casos o grupo de monodromia não é Ziglin.

Observação 3: Diz respeito à condição necessária para aplicar o caso II: deve existir pelo menos um $\beta_j \neq 0$, isto é, se todos os $\beta_j = 0$ somente os casos I e III devem ser examinados.

Caso III: Neste caso a aplicação do algoritmo exige a construção dos seguintes conjuntos, onde $n = 4, 6$, ou 12 :

$$F_j = \left\{ 6 + \frac{12e}{n}(1 + 4\beta_j)^{1/2} \mid e = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{n}{2} \right\} \cap \mathbf{Z} \text{ se } \beta_j \neq 0; \quad (5.22)$$

$$F_j = \{12\} \text{ se } \beta_j = 0, \delta_j \neq 0; \quad (5.23)$$

$$F_j = \{0\} \text{ se } \beta_j = \delta_j = 0; \quad (5.24)$$

e

$$F_\infty = \left\{ 6 + \frac{12e}{n}(1 + 4\beta_\infty)^{1/2} \mid e = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{n}{2} \right\} \cap \mathbf{Z}, \quad (5.25)$$

independentemente de $\beta_j = 0$.

O grupo de monodromia é Ziglin se todas as condições seguintes são satisfeitas (e os casos I e II não são satisfeitos):

(1) Se Tomarmos, por exemplo $n = 4$, e dentre todas as possibilidades dos conjuntos $f_j \in F_j(n)$ e $f_\infty \in F_\infty(n)$, para os quais exista

$$d = \frac{n}{12} \left[f_\infty - \sum_{j=1}^k f_j \right] \quad (5.26)$$

que seja um inteiro não negativo;

2) Para cada um destes casos, seja $\theta = \frac{n}{12} \sum_{j=1}^k \frac{f_j}{x - a_j}$ e $S = \prod(x - a_j)$, (onde o produto é tomado somente sobre aqueles a_j que são polos de $r(x)$), determinar (pelo método dos coeficientes indeterminados) se existe um polinômio mônico P de grau d , tal que, se definimos $P_n = -P$, temos, recursivamente

$$P_{i-1} = -S\dot{P}_i + [(n-i)\dot{S} - S\theta]P_i - (n-i)(i+1)S^2rP_{i+1} \quad (5.27)$$

$i = n, n - 1, \dots, 0$. Então $P_{-1} = 0$.

(3) Repetir os passos (1) e (2) com $n = 6$ e $n = 12$; e

(4) Se tal polinômio P for encontrado em (2) para $n = 2, 6$, ou 12 então o grupo de monodromia é Ziglin. Neste caso a solução w da equação $\sum_{i=0}^n ((\dot{S}P_i)/(n-i)!)w^i = 0$ dará a solução $y = e^{\int w}$ para a equação diferencial em estudo.

Observação 4: Novamente, se $(1 + 4\beta_j)^{1/2}$ e $(1 + 4\beta_\infty)^{1/2}$ não são todos racionais, então somente os casos I e II precisam ser examinados.

5.3 Problema de Stormer

Nesta seção iremos apresentar o problema de Stormer, que considera o movimento de uma partícula carregada num campo de dipolo magnético. Seguiremos [3].

Considere uma carga q , de massa m , movendo-se no campo produzido por um dipolo magnético μ situado na origem do sistema de coordenadas Cartesianas, ao longo da direção z . A hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 \quad (5.28)$$

onde $m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{P} - q\mathbf{A}$, \mathbf{r} é a posição da carga, \mathbf{P} , o seu momento conjugado, e $\mathbf{A} = (0, 0, \mu)$ o potencial vetor do dipolo. A hamiltoniana em coordenadas Cartesianas é dada por

$$H(x, y, z, P_x, P_y, P_z) = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \frac{q\mu(yP_x - xP_y)}{mr^3} + \frac{q^2\mu^2(x^2 + y^2)}{mr^6}. \quad (5.29)$$

Fixando $M_3 = xP_y - yP_x = p_\phi$, tomando coordenadas cilíndricas para fazer com que a simetria em ϕ fique evidente, e ainda fazendo $m = 1$ e $\mu q = 1$, a hamiltoniana toma a seguinte forma

$$H_c = \frac{P_\rho^2}{2} + \frac{p_\phi^2 + P_z^2}{2} + \frac{p_\phi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\rho^2}{2(\rho^2 + z^2)^3} \quad (5.30)$$

onde chamamos $a = \mu q$. Como o movimento ocorre em ρ e em z podemos olhar $H(\rho, z, P_\rho, P_z; p_\phi = cte)$ como uma hamiltoniana reduzida descrevendo o movimento num plano (ρ, z) bi-dimensional.

Agora, se deixarmos a hamiltoniana adimensional através da transformação de Stormer: $\mathbf{r} = \mathbf{u}C_1$, $vt = sC_1$, onde $C_1 = (2E)^{-1/4}$, onde v é a velocidade da carga e $p_\phi = C_1 p_\phi$, ficamos com

$$\frac{1}{2} = \frac{p_\rho^2 + p_z^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_\phi}{\rho} - \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2. \quad (5.31)$$

Notemos que a hamiltoniana nestas variáveis tem valor 1/2 e o parâmetro dinâmico agora é p_ϕ .

As equações de Hamilton do sistema são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{p}_\rho &= \frac{p_\phi(\rho^2 + z^2)^{3/2} - \rho^2)(p_\phi(\rho^2 + z^2)^{5/2} - 2\rho^4 + \rho^2 z^2)}{\rho^3(\rho^2 + z^2)^4} \\ \dot{p}_z &= -3 \frac{z(p_\phi(\rho^2 + z^2)^{3/2} - \rho^2)}{(\rho^2 + z^2)^4} \\ \dot{\rho} &= p_\rho \\ \dot{z} &= p_z \end{aligned} \quad (5.32)$$

Tomando $z = 0$ e $p_z = 0$ temos o único plano invariante da dinâmica completa do problema de Stormer.

Para cada valor de p_ϕ existe uma curva no espaço de fase $(\rho(t), p_\rho(t) = \dot{\rho}(t))$, que não é um ponto de equilíbrio, dada por

$$\dot{\rho} = \sqrt{1 - 2V_{p_\phi}}, \quad (5.33)$$

onde

$$V_{p_\phi}(\rho) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_\phi}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right)^2. \quad (5.34)$$

Este plano invariante será utilizado na aplicação do algoritmo de Kovacic.

5.3.1 Aspectos Dinâmicos

A título de ilustração iremos mostrar curvas de velocidade zero e algumas secções para o problema de Stormer.

As curvas de velocidade zero foram calculadas usando o Maple [3]. Como antes, são obtidas fazendo-se potencial igual ao valor da hamiltoniana:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{p_\phi}{\rho} - \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2,$$

cujas expressões são dadas por:

$$z_1(\rho; p_\phi) = \sqrt{\frac{\rho^{4/3}}{(p_\phi + \rho)^{3/2}} - \rho^2} \quad z_2(\rho; p_\phi) = \sqrt{\frac{\rho^{4/3}}{(p_\phi - \rho)^{3/2}} - \rho^2}. \quad (5.35)$$

Na Figura 5.1 a segunda curva (da esquerda para a direita) é a linha de campo, ou também chamada centro de giro, é dada pela equação:

$$z_f(\rho; p_\phi) = \sqrt{\frac{\rho^{4/3}}{p_\phi^{2/3}} - \rho^2}. \quad (5.36)$$

Esta é uma linha de pontos de equilíbrio centro-parabólicos. Isto quer dizer que um dos autovalores das equações linearizadas é zero, enquanto o outro é puramente imaginário. O ponto no qual a terceira e a quarta linha se encontram, $\rho = 1$ corresponde a um ponto de equilíbrio do tipo centro-sela: dois autovalores reais e dois imaginários puros (conjugados). O centro-sela ocorre para $p_\phi = 2$. Para $p_\phi < 2.0$ existe uma superfície folheada por órbitas periódicas. Nesse intervalo as trajetórias na sua maioria são não confinadas, ou seja o espaço de fase não é compacto porque as curvas de velocidade zero são abertas. Isto pode ser visto na Figura 5.2.

Na Figura 5.3 vemos que as equações (5.35) definem uma região fechada em torno da linha de campo. As regiões externas a esta "meia-lua" são proibidas. O movimento só é possível, outra vez, à direita da curva aberta na extremidade direita da figura. Na região de movimento compacto, podemos fazer secções de Poincaré através do plano $z = 0$ e $\dot{z} > 0$. Na Figura 5.4, mostramos duas secções: para $p_\phi = 2.1$ (acima) e $p_\phi = 3.0$ (abaixo). Os eixos são obviamente (ρ, p_ρ) . O sistema parece não integrável visto que os pontos varrem quase toda superfície de energia. Contudo, note que o caos total para $p_\phi = 2.1$ torna-se um pouco mais regular quando p_ϕ cresce. Observemos que as trajetórias mais externas estão sobre curvas invariantes na Figura 5.3, abaixo.

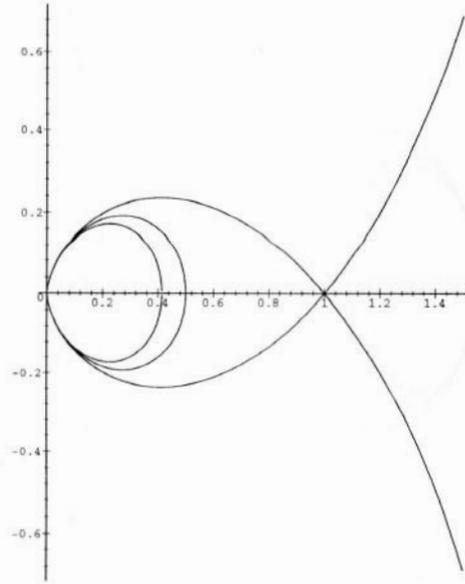


Figura 5.1: Curvas de velocidade zero: $p_\phi = 2$: o centro-sela em $\rho = 1$. Na curva mais à esquerda está o limite das trajetórias fechadas

Na Figura 5.5 (acima) mostramos a seção para $p_\phi = 5.0$. Como já observamos a regularidade cresce com o momento angular. Na Figura 5.5 (abaixo) mostramos duas órbitas dessa seção: uma mais externa e uma próxima à linha de campo. Note que as órbitas sobem e descem ao longo da linha de campo girando em torno da mesma. Veremos na próxima seção que este problema é não integrável para todos os valores de p_ϕ , através da aplicação de um teorema de integrabilidade para potenciais não homogêneos.

5.4 Aplicação do Teorema 2

Nessa seção repetiremos em detalhes o resultado de [11], embora sigamos um caminho próprio. Lembrando que dado um sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d(\delta q_i)}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta q_j + \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_j \quad (5.37)$$

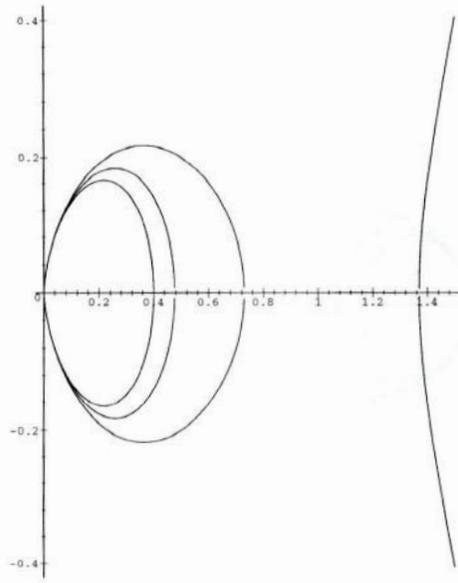


Figura 5.2: $p_\phi > 2.0$ ($p_\phi = 2.1$): as curvas de velocidade zero dividem-se em três curvas, as duas curvas à esquerda limitam o movimento compacto.

$$\frac{d(\delta p_i)}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_j + \frac{\partial}{\partial p_j} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta p_j \quad (5.38)$$

calcularemos as equações variacionais para o problema de Störmer, que tem como coordenadas (ρ, z) ,

$$\frac{d(\delta z)}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial p_z} \right) \delta z + \frac{\partial}{\partial p_z} \left(\frac{\partial H}{\partial p_z} \right) \delta p_z + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial H}{\partial p_z} \right) \delta \rho + \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left(\frac{\partial H}{\partial p_z} \right) \delta p_\rho \quad (5.39)$$

$$\frac{d(\delta p_z)}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial H}{\partial z} \right) \delta z + \frac{\partial}{\partial p_z} \left(-\frac{\partial H}{\partial z} \right) \delta p_z + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\frac{\partial H}{\partial z} \right) \delta \rho + \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left(-\frac{\partial H}{\partial z} \right) \delta p_\rho \quad (5.40)$$

$$\frac{d(\delta \rho)}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial p_\rho} \right) \delta z + \frac{\partial}{\partial p_z} \left(\frac{\partial H}{\partial p_\rho} \right) \delta p_z + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial H}{\partial p_\rho} \right) \delta \rho + \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left(\frac{\partial H}{\partial p_\rho} \right) \delta p_\rho \quad (5.41)$$

$$\frac{d(\delta p_\rho)}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial H}{\partial \rho} \right) \delta z + \frac{\partial}{\partial p_z} \left(-\frac{\partial H}{\partial \rho} \right) \delta p_z + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\frac{\partial H}{\partial \rho} \right) \delta \rho + \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left(-\frac{\partial H}{\partial \rho} \right) \delta p_\rho. \quad (5.42)$$

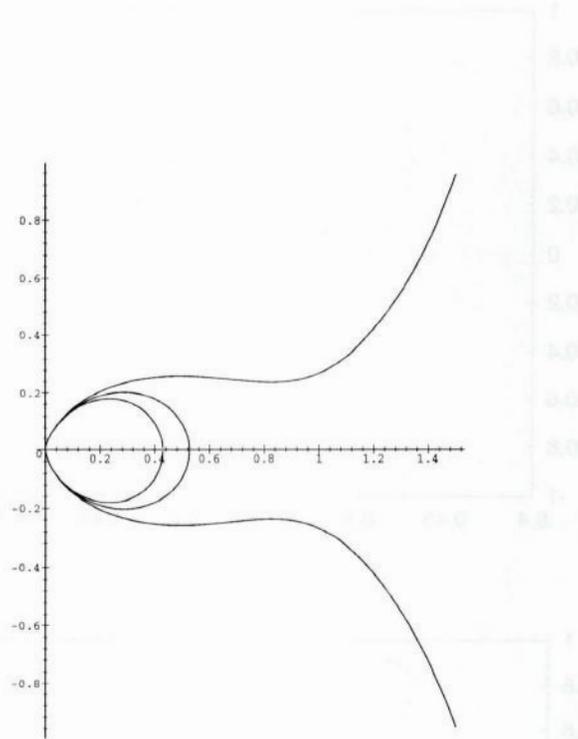


Figura 5.3: $p_\phi = 1.9$: a curva à direita junta-se com a curva mais à esquerda e o movimento não é mais confinado. A linha dos pontos fixos parabólicos é a segunda curva da esquerda para a direita e representa as linhas de campo.

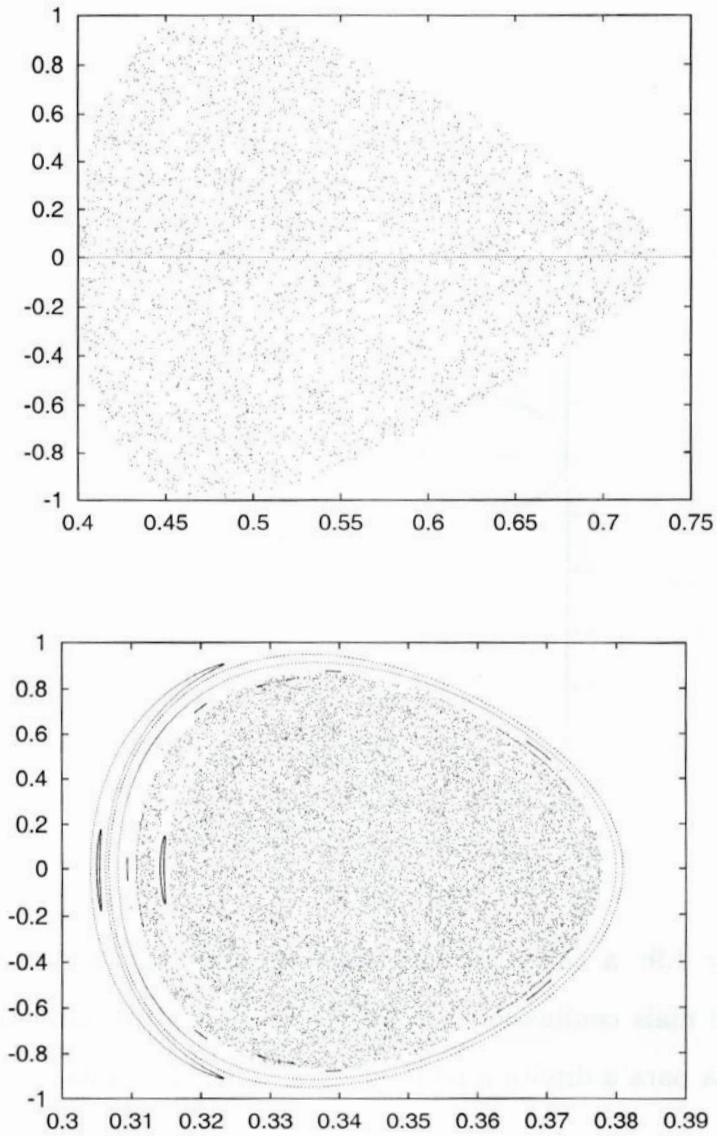


Figura 5.4: Secção de Poincaré para $p_\phi = 2.1$ and 3.0 , mostrando claramente a não integrabilidade.

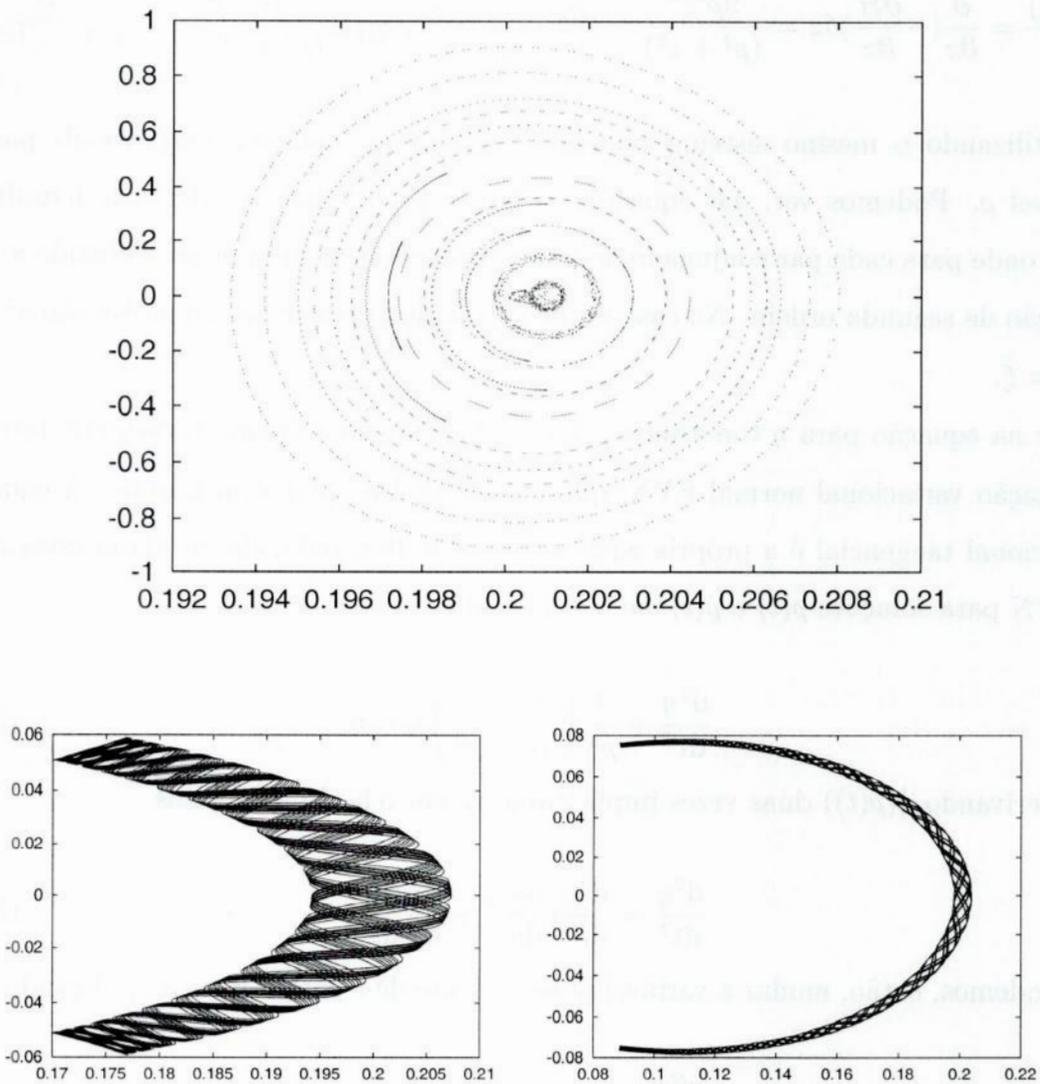


Figura 5.5: (acima) Secção de Poincaré para $p_\phi = 5.0$. Observe que o caos diminui quando p_ϕ cresce; (abaixo) duas órbitas sendo uma na borda da secção e outra próxima à linha de centros.

Para z ficamos com

$$\frac{d(\delta z)}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_z} \left(\frac{\partial H}{\partial p_z} \right) \delta p_z = \delta p_z \quad (5.43)$$

$$\frac{d(\delta p_z)}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial H}{\partial z} \right) \delta z = \frac{9\rho^2 z^2}{(\rho^2 + z^2)} - \left(\frac{p_\phi}{\rho} - \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) \left(\frac{15z^2 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{7/2}} + \frac{3\rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \right). \quad (5.44)$$

Utilizando o mesmo sistema podemos calcular as equações variacionais para a variável ρ . Podemos ver, das equações acima, a propriedade de sistemas hamiltonianos, onde para cada par conjugado de EV de primeira ordem pode ser reduzido a uma equação de segunda ordem. No caso do problema de Stormer tais equações são $\delta \ddot{z} = \ddot{\eta}$ e $\delta \ddot{\rho} = \ddot{\xi}$.

Se na equação para η tomarmos $z = p_z = 0$, redução ao plano invariante, teremos a equação variacional normal EVN, que é ortogonal ao plano invariante. A equação variacional tangencial é a própria equação de Hamilton reduzida ao plano invariante. A EVN para soluções $\rho(t)$ e $\dot{\rho}(t)$ em $z = p_z = 0$ é:

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{3}{\rho^4} \left(\frac{p_\phi}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \eta = 0, \quad (5.45)$$

Derivando $\eta(\rho(t))$ duas vezes implicitamente em relação a t , temos

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = \frac{d^2 \eta}{d\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{d\eta}{d\rho} \frac{d^2 \rho}{dt^2}. \quad (5.46)$$

Podemos, então, mudar a variável independente de t para a variável ρ , ficando com

$$\frac{d^2 \eta}{d\rho^2} + p(\rho) \frac{d\eta}{d\rho} + q(\rho) \eta = 0 \quad (5.47)$$

onde

$$p(\rho) = \frac{\ddot{\rho}}{\dot{\rho}^2} = -\frac{2}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{p_\phi + 2\rho}{\rho^2 + p_\phi \rho - 1} + \frac{1}{2} \frac{-p_\phi + 2\rho}{\rho^2 - p_\phi \rho + 1} \quad (5.48)$$

e

$$q(\rho) = 3 \frac{p_\phi}{\rho} + 3 \frac{p_\phi}{\rho^2} - \frac{3(p_\phi^2 + p_\phi \rho + 1)}{2(\rho^2 + p_\phi \rho - 1)} - \frac{3(-p_\phi^2 + p_\phi \rho + 1)}{2(\rho^2 - p_\phi \rho + 1)} \quad (5.49)$$

As raízes, que são os polos de $p(\rho)$, são dadas resolvendo a equação $\rho(\rho^2 + p_\phi\rho - 1)(-\rho^2 + p_\phi - 1) = 0$, que corresponde ao denominador da simplificação da equação (5.48). Analogamente, os polos de $q(\rho)$ são achados resolvendo a equação $\rho^2(\rho^2 + p_\phi\rho - 1)(-\rho^2 + p_\phi - 1) = 0$. Encontradas essas raízes, podemos expandir $p(\rho)$ e $q(\rho)$ em frações parciais, e comparar com a equação (5.3) para obtermos os polos a_j , e os coeficientes A_j , B_j e os C_j . Fazendo isso ficamos com

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 &= 1/2 p_\phi + 1/2 \sqrt{u}, \\ a_3 &= 1/2 p_\phi - 1/2 \sqrt{u}, \\ a_4 &= -1/2 p_\phi + 1/2 \sqrt{v}, \\ a_5 &= -1/2 p_\phi - 1/2 \sqrt{v} \end{aligned} \tag{5.50}$$

onde $u = \sqrt{p_\phi^2 - 4}$ e $v = \sqrt{p_\phi^2 + 4}$, com coeficientes dados por

$$\mathbf{A} = [-2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2], \quad \mathbf{B} = [3, 0, 0, 0, 0], \tag{5.51}$$

e os C_j são:

$$\begin{aligned} C_1 &= 3p_\phi, \\ C_2 &= \frac{-3(p_\phi^3 - \sqrt{u}p_\phi^2 - 4p_\phi + 2\sqrt{u})}{4u}, \\ C_3 &= \frac{-3(p_\phi^3 + \sqrt{u}p_\phi^2 - 4p_\phi - 2\sqrt{u})}{4u}, \\ C_4 &= \frac{-3(p_\phi^3 + \sqrt{v}p_\phi^2 + 4p_\phi + 2\sqrt{v})}{4v}, \\ C_5 &= \frac{-3(p_\phi^3 - \sqrt{v}p_\phi^2 + 4p_\phi - 2\sqrt{v})}{4v}, \end{aligned} \tag{5.52}$$

cuja soma é zero, como imposto pela condição da equação variacional normal ser fuchsiana. Os valores de A_∞ e B_∞ são zero.

De acordo com (5.4) encontramos β_j , e δ_j , $j = 1 \dots 5$

$$\beta_j = [-1, -3/16, -3/16, -3/16, -3/16] \text{ e } \beta_\infty = 0$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= -3p_\phi + \frac{1}{p_\phi + u} + \frac{1}{p_\phi - u} + \frac{1}{-p_\phi + v} + \frac{1}{-p_\phi - v} \\
\delta_2 &= \frac{3}{4}\left(p_\phi + \frac{2 - p_\phi^2}{u}\right) - \frac{1}{p_\phi + u} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{p_\phi + u - v} + \frac{1}{p_\phi + u + v}\right) \\
\delta_3 &= \frac{3}{4}\left(p_\phi + \frac{p_\phi^2 - 2}{u}\right) - \frac{1}{p_\phi - u} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{p_\phi - u - v} - \frac{1}{p_\phi - u + v}\right) \\
\delta_4 &= \frac{3}{4}\left(p_\phi + \frac{p_\phi^2 + 2}{v}\right) - \frac{1}{-p_\phi + v} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{-p_\phi + v - u} + \frac{1}{-p_\phi + v + u}\right) \\
\delta_5 &= \frac{-3}{4}\left(-p_\phi + \frac{p_\phi^2 + 2}{v}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{-p_\phi - v - u} - \frac{1}{-p_\phi + v + u}\right)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Tendo calculado todos os parâmetros da EVN fuchsiana examinaremos os casos previstos pelo Teorema 2, para decidir se ela é integrável, isto é, se seu grupo de monodromia é ou não Ziglin.

Observemos que se um sistema hamiltoniano é integrável então o grupo de monodromia das EVN's associadas é Ziglin. Então se não pudermos satisfazer o Teorema 2, o sistema hamiltoniano é não integrável. A afirmação inversa não é verdadeira.

Caso I:

Como temos $\beta_j \neq 0$ teremos para os expoentes característicos modificados

$$\alpha_1^\pm = \frac{1}{2}[1 \pm (1 + 4\beta_j)^{1/2}] = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) \tag{5.54}$$

$$\alpha_j^+ = \frac{1}{2}[1 + (1 + 4\beta_j)^{1/2}] = \frac{3}{4} \tag{5.55}$$

$$\alpha_j^- = \frac{1}{2}[1 - (1 + 4\beta_j)^{1/2}] = \frac{1}{4} \tag{5.56}$$

Sendo o conjunto $E_j^I = \{E_1^I, E_2^I, E_3^I, E_4^I, E_5^I\}$, onde cada E_j^I é um conjunto $\{\alpha_j^-, \alpha_j^+\}$, por exemplo, $E_1^I = \{\alpha_1^-, \alpha_1^+\}$, temos então

$$E_j^I = \left\{ \left[\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \right], \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right], \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right], \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right], \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \right\} \text{ e } E_\infty^I = [0, 1].$$

Analisando a condição (5.12), vemos que

$$d = e_\infty - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \tag{5.57}$$

onde e_∞ pode ser 0 ou 1, e_1 pode ser $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ ou $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$, e assim em diante (pois $e_j \in E_j^I$, $j = 1\dots k$ e $e_\infty \in E_\infty^I$); temos que percorrer todas as combinações. Vemos, então, que e_1 será sempre um número complexo pois o conjunto e_1 é formado somente por números complexos, e a condição (5.12) nunca será satisfeita, o que implica que o caso 1 nunca é satisfeito.

Caso II:

Para este caso temos $E_\infty = [0, 2, 4]$ e $E_1 = [2, 2(1+i\sqrt{3}), 2(1-i\sqrt{3})]$ e $E_j = [1, 2, 3]$, $j = 2, 3, 4, 5$. Como d tem que ser um número positivo inteiro (incluindo zero), podemos simplesmente verificar se $e_\infty(\text{máximo}) \geq \sum e_j(\text{mínimo,real})$, pois se $e_\infty(\text{máximo})$ for menor que $\sum e_j(\text{mínimo,real})$ então d será negativo e a condição (5.12) não será satisfeita.

Calculando, vemos que $e_\infty(\text{máximo}) = 4$ e $\sum e_j(\text{mínimo,real}) = (2+1+1+1+1) = 6$, temos então que d é um número negativo, isto implica que o caso 2 não é satisfeito.

Caso III:

Utilizaremos, neste caso, o mesmo raciocínio. Como $\beta_\infty = 0$, temos que $f_\infty(\text{máximo}) = 12$ para $n = 4, 6, 12$. Calculando $\sum f_j(\text{mínimo})$ vemos que $\beta_1 = -1$ deixa o somatório complexo, então temos que fazê-lo com $e = 0$ para $j = 1$, isso nos leva a $f_1(\text{mínimo,real}) = 6$

Vemos que para todos os subcasos ($n = 4, 6, 12$), $f_j(\text{mínimo}) = 3$ para $j = 2, 3, 4, 5$ e tomando $e = -2, -3, -6$, respectivamente para cada caso, nos leva a $d = 12 - (6 + 3 + 3 + 3 + 3) = -6$, temos então que para todos os subcasos a condição (5.12) não é satisfeita, o que leva o caso 3 não ser satisfeito.

Concluimos então que o grupo de monodromia da equação (5.47) não é Ziglin, ou seja, o Problema de Stormer não é integrável.

Para este problema em especial, poderíamos ter chegado a esta mesma conclusão analisando as observações 1, 2 e 4.

Capítulo 6

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho estudamos o problema de dois centros fixos de Euler: sua formulação, aspectos numéricos e integrabilidade. Aplicamos um dos critérios mais recentes de integrabilidade para potenciais homogêneos. Este critério, como já esperado, não foi conclusivo pois ele só é eficiente quando não se realiza a condição necessária. No entanto, foi útil para o entendimento do teorema.

Também descrevemos um critério de integrabilidade mais geral que foi aplicado ao problema de Stormer. Neste caso o critério foi bem sucedido confirmando a não integrabilidade evidenciada pelas secções de Poincaré. Dizemos que o critério é bem sucedido quando ele falha, pois nesse caso podemos afirmar a não integrabilidade. Caso o critério se realizasse, não poderíamos afirmar que o sistema é integrável porque, como no caso anterior, o critério consiste apenas de condições necessárias.

A nossa intenção foi mostrar a aplicação de teoremas sofisticados que envolvem grupo de Galois diferencial e monodromia. No entanto, o enunciado e aplicação do primeiro teorema (Morales-Ramis) é bastante fácil para físicos e astrônomos. Já para o segundo teorema usamos o trabalho de Almeida e Stuchi que é uma forma operacional do teorema de Churchill e Rod que o torna relativamente fácil de ser aplicado para saber se uma dada hamiltoniana (onde é conhecido um plano invariante) é ou não integrável. Para maiores informações consultar as referências aqui citadas.

Pretendemos aplicar esses teoremas a problemas físicos relevantes como é o caso [4]. Seria interessante também ver a aplicação do teorema para potenciais homogêneos

para o problema de dois centros em três dimensões, como aprendizado, pois já sabemos que resultado não será conclusivo.

Existe uma classe de sistemas reversíveis não hamiltonianos (a rigor, nem sequer potenciais) inventados por A.Albouy [1]. Esses sistemas como visto em [1] se comportam como hamiltonianos quase-integráveis. Uma idéia interessante é tentar generalizar os teoremas estudados para serem aplicados a essa classe de sistemas.

Capítulo 7

Apêndice

Este apêndice servirá como um pequeno dicionário para uma melhor compreensão dos capítulos e referências, contendo algumas definições importantes.

Função Meromórfica: É uma função (por exemplo da variável $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$) que é analítica para todos os valores de z , exceto nos pontos onde existem pólos.

Exemplo: por causa de sua periodicidade, $\cotang(z)$ possui um pólo simples em cada ponto $z = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), então ela é analítica para todos os valores $z \neq \infty$ (onde $z = \infty$ é um ponto limite para os pólos) exceto nos pontos isolados onde existem pólos.

Função Racional: Uma função analítica que não tem, no plano estendido, outras singularidades além dos pólos, ou seja, as únicas singularidades de uma função racional são seus pólos, e eles são finitos.

Homotopia: Homotopia é uma relação de equivalência. Seja l um caminho contínuo. Se mantemos os extremos fixos e substituimos um pedaço desse caminho por uma outra curva contínua l_1 , mantendo a continuidade de l , só que de maneira diferente; dizemos que o novo caminho contínuo l' criado desta maneira foi obtido por deformações elementares a partir de l .

Agora, suponha l e l' duas curvas arbitrárias que unem dois pontos a e b . Se l' pode ser obtida a partir de l por um número finito de deformações elementares, então l é dito ser homotópico a l' . Como homotopia é uma relação de equivalência, o conjunto de todos os caminhos podem ser decompostos em classes de equivalência disjuntos,

formados por caminhos homotópicos mútuos. Essas classes são chamadas classes de homotopia.

Grupo de Monodromia: Seja a equação diferencial de segunda ordem

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{6} z \frac{dy}{dz} + \frac{1}{6} y = 0 \quad (7.1)$$

Seus coeficientes são polinômios em $z \in \mathbf{C}$. Duas soluções desta equação são $z^{1/2}$ e $z^{1/3}$. Além disso, $B_1 := [z^{1/2}, z^{1/3}]$ é uma base ordenada do espaço de soluções da equação. Podemos estender $z^{1/2}$ e $z^{1/3}$ analiticamente no plano complexo C em torno de zero. Se fizermos isso ao longo de qualquer caminho positivamente orientado, então B_1 torna-se $[z^{1/2}, e^{2\pi i/3} z^{1/3}]$. O efeito do caminho em B_1 pode ser representado pela multiplicação à esquerda pela matriz

$$\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} \end{pmatrix}$$

Ao invés de focalizarmos um caminho específico, podemos considerar todas as curvas fechadas em torno de zero em C . Cada caminho nos dá uma matriz representando a mudança de base a partir de B_1 . Cada matriz é igual γ^n , onde n é o número de deformação do caminho em torno de zero. Todas as matrizes que são obtidas desta maneira formam um grupo, que é gerado por γ . Este grupo é conhecido como *grupo de monodromia* da equação (7.1). As soluções $z^{1/2}$ e $z^{1/3}$ são raízes dos polinômios $T^2 - z = 0$ e $T^3 - z = 0$, respectivamente, e são então exemplos típicos de funções algébricas. Por isso (7.1) é um exemplo de equação diferencial algébrica. Generalizando: soluções algébricas sobre $C(z)$ são funções que satisfazem uma equação polinomial com coeficientes em $C(z)$, onde $C(z)$ é o conjunto de funções racionais com coeficientes complexos.

Involução: Uma função f é uma integral primeira de X_H se, e somente se,

$$\{H, f\} = 0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

onde (dizemos que essa função e H estão em involução, ou que elas comutam)

Teoria de Galois Diferencial: Nesta teoria existe um bom conceito de integrabilidade, isto é, soluções fechadas: uma equação é integrável se a sua solução geral é obtida através de uma combinação de funções algébricas (sobre o campo dos coeficientes), exponenciais de quadraturas, ou quadraturas. Toda informação sobre a integrabilidade da equação está codificada na componente identidade do seu grupo de Galois: a equação é integrável se, e somente se, a componente identidade do seu grupo de Galois for solúvel. É uma teoria poderosa no sentido de que, para equações diferenciais de segunda ordem, é possível construir algoritmos para determinar quando uma dada equação diferencial linear é integrável ou não.

Campos diferenciais e seu grupo de Galois

Os coeficientes da equação diferencial linear

$$L = 0; \quad L = \partial^n + f_1 \partial^{n-1} + \dots + f_n, \quad f_i \in F \quad (7.2)$$

são escolhidos sobre um campo diferencial (F) , que consiste de um campo F equipado com um mapa:

$$\begin{aligned} \partial : F &\rightarrow F \\ \partial(f + g) &= \partial f + \partial g \\ \partial(gf) &= f \partial g + g \partial f \end{aligned}$$

Temos que F_1 e F_2 são diferencialmente isomórficos se existe um isomorfismo de campo: $\phi: F_1 \rightarrow F_2$, tal que, $\phi \circ \partial_1 = \partial_2 \circ \phi$, o mapa é chamado isomorfismo diferencial. Se $F_1 = F_2$, é chamado automorfismo.

Um campo diferencial $(\mathfrak{S}, \partial')$ é chamado uma extensão diferencial de (F, ∂) se $F \subset \mathfrak{S}$ e ∂' restringido a F coincide com ∂ . (F, ∂) é chamado um subcampo de (\mathfrak{S}, ∂) .

O menor subcampo diferencial de $(\mathfrak{S}, \partial')$ que contém F e os elementos u_1, \dots, u_r (as soluções da equação diferencial (7.2)) obtido juntando ao F os elementos u_1, \dots, u_r e suas derivadas; e é denotado por: $F \langle u_1, \dots, u_r \rangle$.

Definição de extensão Picard-Vessiot (PV): Seja a equação diferencial linear (7.2), temos que as suas soluções normalmente não estão em F , então procuramos extensões de (F, ∂) que contenham as soluções e suas derivadas, ou seja, uma extensão diferencial que obedeça a:

$$1- C_{\mathfrak{S}} = C_F.$$

2- \mathfrak{S} contém n soluções lineares independentes y_1, \dots, y_n de (7.2) e $\mathfrak{S} = F \langle y_1, \dots, y_n \rangle$.

Definição de Grupo de Galois: Seja (\mathfrak{S}, ∂) uma extensão PV de (7.2). O grupo de Galois diferencial de (7.2) é definido como o grupo de todos os automorfismos diferenciais $\phi: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$, tal que, $\phi f = f, \forall f \in F$, ou seja, quando aplicado a um elemento de F é a identidade. Notação: $Gal_{\partial}(\mathfrak{S}/F)$.

Seja $\phi \in Gal_{\partial}(\mathfrak{S}/F)$ e y uma solução de (7.2). Como ϕ fixa F (pois o elemento f que pertencer a F deverá satisfazer $\phi f = f$) temos $0 = \phi(Ly) = L(\phi y)$, pois um automorfismo diferencial implica que $\phi \circ \partial_1 = \partial_2 \circ \phi$, ou seja, $\phi L(y) = 0 = L\phi(y)$. Então y também é solução de (7.2), isso implica que os elementos $Gal_{\partial}(\mathfrak{S}/F)$ atuam como mapas C_F lineares no espaço vetorial de n dimensões das soluções de (7.2). Qualquer mapa linear em $GL(V)$ que respeite todas as relações polinomiais sobre F entre as soluções e suas derivadas, é um elemento de $Gal_{\partial}(\mathfrak{S}/F)$

Seja τ o conjunto dos polinômios $Q \in F[\partial_1^{(0)}y_1, \dots, \partial_n^{(0)}y_n, \partial_1^{(1)}y_1, \dots, \partial_n^{(n-1)}y_n]$, ou seja, todas as combinações lineares possíveis entre as soluções de (7.2) e suas derivadas com coeficientes pertencentes a F , tal que, $Q(\dots, \partial^j y_i, \dots) = 0, \forall Q \in \tau$. Então:

$$Gal_{\partial}(\mathfrak{S}/F) = (g_{ik} \in GL(n, C_F) \mid Q(\dots, \partial^j (\sum_{k=1}^n g_{ik} y_k), \dots) = 0, \forall Q \in \tau (k, i = 1, \dots, n)).$$

O Algoritmo de Kovacic:

O algoritmo de Kovacic nos dá um método para computar a extensão de Picard-Vessiot (isto é um sistema fundamental de soluções) de uma equação diferencial de segunda ordem, contanto que a equação seja integrável. Mas se a equação não for integrável, o algoritmo falha, sendo, então, um critério de não integrabilidade da equação diferencial de segunda ordem. A beleza do teorema de Morales-Ramis está em conectar a solubilidade (comutabilidade) da EVN à integrabilidade do sistema hamiltoniano e a solução particular que a gerou. Lembremos que o teorema de Liouville requer a existência de constantes de movimento em involução (que comutam entre si).

[Faint, mirrored text from the reverse side of the page, likely bleed-through from the next page. The text is illegible due to low contrast and mirroring.]

Bibliografia

- [1] A.Albouy, T.J.Stuchi, *Quasi-integrability in a class of systems generalizing the problem of two fixed centers*, arxiv, Los Alamos, 2002.
- [2] M.A.Almeida, I.C.Moreira and F.C.Santos, *On the Ziglin-Yoshida analysis for some classes of homogeneous Hamiltonian systems*, Revista Brasileira de Física.
- [3] M.A.Almeida, T.J.Stuchi, *The non-integrability of the anisotropic Störmer problem with angular momentum* - pre-print 2003, to appear in Physica D.
- [4] M.A.Almeida, A.Lopez-Castillo, T.J.Stuchi, *The non-integrability of the frozen planetary approximation for the Helium atom*, J.Phys.A, ,2003.
- [5] V.I.Arnold, *Mathematical methods in classical mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [6] F. Beukers, Differential Galois Theory, *From Number Theory to Physics*, W.Waldschmidt, P.Moussa, J.-M.Luck, C.Itzykson Ed., Springer-Verlag, Berlin 1995, 413-43.
- [7] R. C. Churchill, D.L.Rod, *On the Determination of Ziglin Monodromy Groups*, SIAM J. MATH. ANAL., Vol 22, no.6, pp 1790-1802, 1991.
- [8] J.J. Kovacic, *An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations*, J.Symbolic Computation,2,(1986),3-43.
- [9] J.J. Morales-Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-integrability of Hamiltonian Systems. Progress in Math.*, Birkhäuser-Verlag, Basel.

- [10] R.Nevanlinna, V.Paatero, *Introduction to complex analysis. Addison-Wesley Series in Math.*, Birkhäuser-Verlag, Basel,1964.
- [11] A.W.Sáenz, M.Kummer, *Nonintegrability of the Störmer problem*, Physica D, 86, (1995), 363-372.
- [12] H. Yoshida, *A criterion for the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with a homogeneous potential*, Physica D,29,(1987),128-142.
- [13] H.A. van der Waal, *Lamé equations with finite monodromy* Tekst.-Proefschrift Universiteit Utrecht, 2002
- [14] H.Varvoglis, Ch.Vozikis, K.Wodnar, E.Dimitriadou, *The two fixed centers problem revisited*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2000.
- [15] Sueli A. Guillens, *Notas de Aula de Mecânica Celeste*, Departamento de Astronomia, Observatório do Valongo, Rio de Janeiro.