

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA - OBSERVATÓRIO DO VALONGO**

**PROJETO DE FIM DE CURSO PARA OBTENÇÃO  
DO TÍTULO DE ASTRÔNOMO**

**UM TERMO SECULAR RESGATADO:  
COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS RESSONANTES DE SEGUNDA ORDEM  
DE SESSIN E DE HENRARD-CARANICOLAS PARA A RESSONÂNCIA  
ASTEROIDAL 3:1**

**ALUNO: CARLOS EDUARDO SANTOS CARDOSO**

**ORIENTADORAS: PROF<sup>a</sup> SUELI A. GUILLENS**

**PROF<sup>a</sup> TERESINHA J. STUCHI**

**JULHO 2007**

Ματαιοτης ματαιοτητων ειπεν ο  
εκκλησιαστης ματαιοτης ματαιοτητων τα  
παντα ματαιοτης (ζερ: 2).

## AGRADECIMENTOS

Às orientadoras deste trabalho: a prof. Suely, com que iniciamos uma jornada de especialização já de alguns anos em quatro cursos, e que com esta convivência próxima, dignou-se premiar-nos com o tema deste trabalho, oriundo, nada mais nada menos, de sua tese de doutorado. Muita paciência e zelo pelo ensino, dos quais abusamos diversas vezes, são notas distintivas de seu caráter acadêmico e pessoal. À prof<sup>a</sup>. Teresa Stuchi, pela leitura de fôlego empreendida nesta monografia em caráter revisional, quando demonstrou todo seu brilho acadêmico em dinamismo, objetividade e pertinência de comentários, aparando as arestas e tornando o texto mais legível – o que nem sempre foi fácil, e certamente subtraiu-lhe parte considerável de seu precioso tempo.

Aos membros da banca examinadora: o prof. Sandro Fernandes, nosso convidado especial, pela solicitude em que anuiu participar como examinador, prestigiando-nos com sua presença – somando-se ainda o ônus da distância envolvida. Relevantes foram as questões por ele levantadas na apresentação deste trabalho, além da lista de correções minuciosas ao texto final, a qual teve a gentileza de elaborar. E o prof. Carlos Rabaça que, embora saibamos mais afeto à dinâmica galáctica, não se furtou em presidir a banca.

Aos professores e funcionários desta instituição, para os quais não há aqui infelizmente espaço suficiente para os pormenores de uma citação nominal detalhada, mas que desde nosso ingresso em 2000, foram responsáveis diretos, os primeiros, pelo nosso aprimoramento intelectual e, os segundos, pelo ambiente agradável que ajudaram a criar com a boa-vontade em que ofereceram presto suporte administrativo – mais de perto e sem compromisso de ordem, os funcionários Elias, Irany, Djalma e Alice e o astrônomo Rundstein.

Não podemos, todavia, resistir à tentação de expressar gratidão particular a dois nomes, que certamente imprimiram suas marcas de forma especial em nossa formação de Astrônomo. O prof. Adolfo de Campos, do qual tivemos o privilégio de cursar a primeira (Astro I) e a última (ao menos teoricamente) matéria da graduação. Ter estado presente na sua longa trajetória docente foi um grande prazer, pelo qual agradecemos as aulas notavelmente didáticas, densas em informações e sempre inquisitivas. E, novamente, ao prof. Carlos Rabaça, também às suas classes presentes que fomos por duas vezes, e do qual não podemos esquecer sua preocupação com o futuro profissional dos graduandos, buscando sempre ensinar também para a vida. Além de professor, uma pessoa boa para se conversar. Memoráveis os laboratórios de Astro II.

Por fim, em especial à prof<sup>a</sup>. Enarnacion e à secretária Rosa, minhas primeiras referências no Valongo, quando aqui ingressava como portador de diploma. Inumeráveis as vezes que pude contar com o gentil auxílio das duas no laborioso processo de isenção de disciplinas, sem falar das diversas conversas de um teor sempre positivo que tivemos. Notáveis, sem dúvida, quando por mais de uma vez recalitrei em seguir a graduação. A elas o meu muito obrigado.

## RESUMO

Esse trabalho envolve a consideração de dois modelos integráveis para a dinâmica de asteróides na ressonância orbital 3:1, no escopo do Problema Restrito de 3 Corpos, em termos de uma representação Hamiltoniana Média original expressa por variáveis e sistema de unidades diferentes. Nosso objetivo principal foi o de introduzir artificialmente uma variável no modelo de Henrard e Caranicolas, retirando a canonicidade das suas variáveis e tornando-o análogo ao outro modelo (Guillens, 1998), cujas soluções analíticas são expressas em termos de um parâmetro associado à uma variável artificialmente introduzida. Com tal procedimento foi possível obter as famílias triviais de pontos de equilíbrio e a conseqüente classificação do espaço de fase em termos das duas integrais primeiras de Henrard e Caranicolas, onde todas as possibilidades de movimentos estão caracterizadas num único gráfico. Assim sendo temos os dois sistemas dinâmicos advindos da abordagem de Sessin e Ferraz-Mello (1984), propiciando uma comparação entre os diagramas, que contém ambas as classificações do espaço de fase, cujas coordenadas são as duas integrais primeiras para cada modelo integrável. Em particular, foi possível mostrar o efeito das hipóteses simplificadoras realizadas em (Guillens, 1998) que são mais restritivas do que àquelas adotadas por Henrard e Caranicolas e, inclusive, não inclui o termo secular da Hamiltoniana original.

## ABSTRACT

Two integrable models for treatment of asteroid dynamics in orbital resonance 3:1 are considered here as baseline, both in the frame of elliptic restricted three-body problem averaged near the mean-motion resonance and written from the same original average Hamiltonian, in despite of expressed in different set of variables and system of units. Our goal was artificially introduce a new variable into the first one (Henrard-Caranicolas, 1990), which leave of being canonical, and becoming it analogous to the other (Guillens, 1998), whose analytical solutions are express in terms of a related parameter toward the artificially introduced variable. This procedure allowed getting trivial families of equilibrium points for Henrard-Caranicolas' method and the consequent phase space classification that depends on two first integrals. Indeed, all the possible movements are characterized by only one diagram. In short, the two dynamic systems obtained are derived from Sessin and Ferraz-Mello (1984) method and contain the same phase space mapping expressed with two first integrals. This approach propitiated a comparison between the presented models and became possible to display the effect of more restrictive hypotheses adopted by (Guillens, 1998), which as a counterpart does not including the secular term into original Hamiltonian.

# ÍNDICE

<b>Capítulo I</b> – Introdução	1
<b>Capítulo II</b> – Método de Sessin para Construção de um Modelo Simplificado para a Ressonância 3:1	
II.1 – Introdução	5
II.2 – Problema restrito de 3 corpos	5
II.3 – Formalismo Hamiltoniano do problema	7
II.4 – Obtenção de um modelo simplificado para a ressonância 3:1	11
II.5 – Estudo da integrabilidade de $F_1$	17
<b>Capítulo III</b> – Classificação do Espaço de Fase do Modelo Integrável de Sessin	
III.1 – Introdução	21
III.2 – Integrais primeiras de $F_{11}$	21
III.3 – Famílias de pontos de equilíbrio do sistema Hamiltoniano reduzido	24
III.4 – Classificação do espaço de fase	26
<b>Capítulo IV</b> – A Hamiltoniana Média de Henrard-Caranicolas para a Ressonância 3:1	
IV.1 – Introdução	30
IV.2 – Obtenção da Hamiltoniana média de Henrard-Caranicolas	30
IV.3 – Modelo fundamental ressonante de segunda ordem	37
<b>Capítulo V</b> – Classificação do Espaço de Fase do Modelo de Henrard-Caranicolas	
V.1 – Introdução	39
V.2 – Processo de parametrização	39
V.3 – Famílias triviais de pontos de equilíbrio no sistema reduzido	43
V.4 – O plano $(\bar{E}_1, \bar{M})$ e a classificação do espaço de fase	49
<b>Capítulo VI</b> – Comparação dos Modelos de Sessin e de Henrard-Caranicolas para a ressonância orbital 3:1	
VI.1 – Introdução	53
VI.2 – Comparação analítica entre os dois métodos	53
VI.3 – Comparação entre os planos definidos pelas integrais primeiras dos dois modelos	56
<b>Conclusão</b>	58
<b>Apêndice I</b> – Classificação do Espaço de Fase de Henrard-Caranicolas pelo Estudo das Raízes dos Polinômios Normalizados	59
<b>Apêndice II</b> - Quadro comparativo de variáveis e equações dos métodos de Sessin e Henrard-Caranicolas	70
<b>Referências</b>	73

## NOTAÇÃO

$M$  = anomalia média =  $l$  (variável de Delaunay);

$\varpi$  = longitude do pericentro;

$n$  = movimento médio sideral ( $2\pi/T$ );

$\lambda$  = longitude média ( $\lambda = M + \varpi = n(t - \tau) + \varpi = nt + \varepsilon$ );

$\varepsilon$  = longitude média à época.

$(a, e, i, \omega, \Omega, \tau_0)$  - elementos keplerianos do Asteróide (problema de 2 corpos).

$a$ : semi-eixo maior;

$e$ : excentricidade orbital;

$i$ : inclinação do plano orbital em relação ao plano de referência;

$\omega$ : argumento do periélio;

$\Omega$ : longitude do nodo ascendente;

$\tau_0$ : tempo de passagem pelo periélio.

### Método de Sessin

$F_I$ :  $F_I = F_{I1} + F_{I2}$  - Hamiltoniana obtida a partir do desenvolvimento de  $\bar{F}$  na vizinhança da ressonância exata;

$F_{I1}$ : parcela integrável de  $F_I$ , que contém qualitativamente todos os argumentos críticos de  $F_I$ .

$F_{I2}$ : parcela integrável de  $F_I$ , que contém os termos secular e de longo período e parte de um argumento crítico.

### Método de Henrard-Caranicolas

$H$ :  $H = H_0 + H_1$  - Hamiltoniana obtida a partir do desenvolvimento de  $\bar{F}$  na vizinhança da ressonância exata.

$H_0$ : expansão da parte não-perturbada da Hamiltoniana original, correspondendo ao problema circular restrito de 3 corpos, incluindo o modelo fundamental ressonante de segunda ordem e o termo secular  $AM$ . Quando  $e' = 0$  descreve o problema de 3 corpos restrito circular plano.

$H_1$ : parte perturbada da Hamiltoniana original, sendo nula quando  $e' = 0$  (problema circular).

## CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

O problema de dois corpos sob ação gravitacional (problema de Kepler) é integrável e bem conhecido. A inclusão de um terceiro corpo consiste em uma maneira de perturbar este problema solúvel. Assim, uma aplicação de métodos perturbativos na Mecânica Celeste ocorre no problema de três corpos elíptico restrito, no qual dois corpos de massa finita se movem em torno do seu centro de inércia em órbitas elípticas, enquanto o terceiro corpo de massa desprezível move-se no campo gravitacional dos dois corpos massivos. Um caso clássico envolve o Sol (corpo primário de massa  $M$ , situado no centro de um sistema de eixos paralelos a um referencial galileano), Júpiter (corpo secundário ou perturbador de massa  $m'$ ) e um asteróide (corpo de massa desprezível  $m$  em órbita kepleriana - problema de 2 corpos - ao redor do Sol, perturbado por Júpiter).

Em 1886, Daniel Kirkwood (1814-1895) constatou que poucos asteróides do cinturão principal tinham período orbital próximo a  $1/2$ ,  $1/3$  e  $2/5$  do período orbital de Júpiter. Estas falhas tornam-se evidentes quando se classifica os asteróides de acordo com o seu período orbital - o qual é proporcional ao semi-eixo orbital médio. Os espaços vazios que aparecem para determinados valores dos semi-eixos maiores dos asteróides situados no cinturão principal, relacionam-se a períodos comensuráveis com Júpiter.

Na Figura 1.1, observa-se que as falhas no cinturão principal de asteróides não se distribuem de forma aleatória, mas correspondem a posições de semi-eixo maior dos asteróides, em que os seus períodos orbitais são divisores ou múltiplos racionais do período orbital de Júpiter, as chamadas ressonâncias. A ressonância 3:1, por exemplo, caracteriza-se por (poucos) asteróides com semi-eixo maior 2,5 UA, o que corresponde a um período orbital de 4 anos, i. e.,  $1/3$  do período orbital de Júpiter

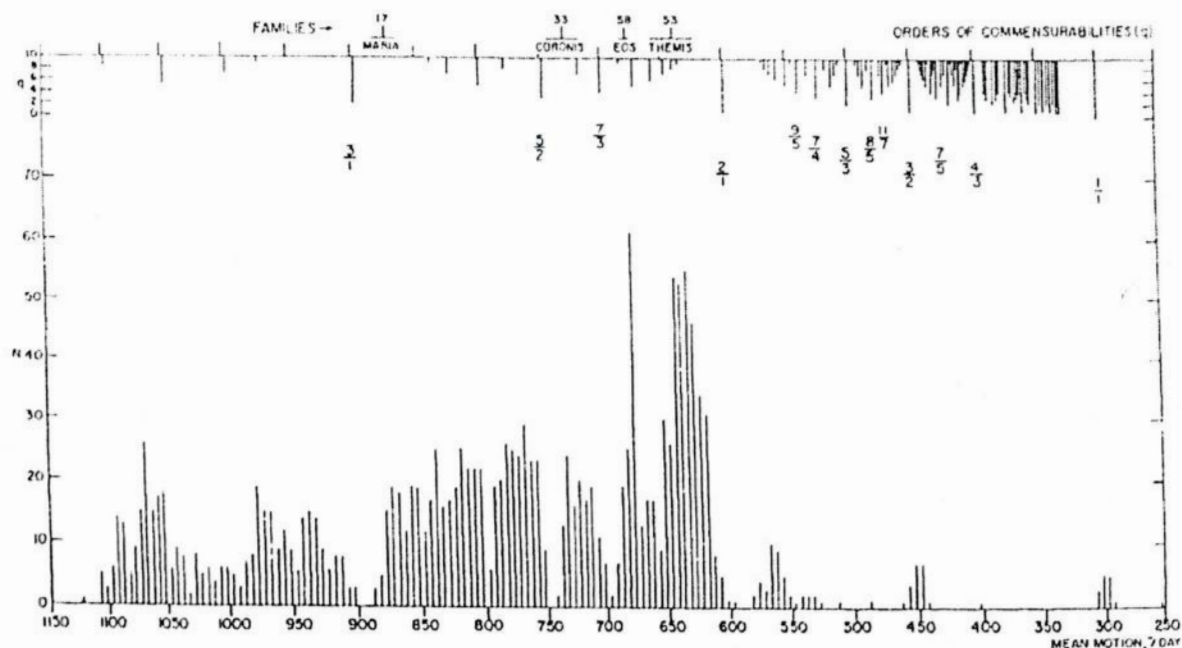


Figura 1.1. Histograma com número de asteróides no cinturão principal em função do semi-eixo maior osculador (Brouwer, 1963).



O estudo das ressonâncias de movimento médio tem-se mostrado de fundamental importância para a compreensão dos mecanismos de formação do sistema solar. Dentre estas ressonâncias, a asteroidal 3:1 tem merecido considerável atenção por parte dos dinamicistas, por consistir em relevante mecanismo de remoção de objetos do cinturão de asteróides.

Embora esse trabalho não tenha enfoque fenomenológico, é oportuno inseri-lo, ainda que brevemente dentro de um contexto mais abrangente, que vem sendo desenvolvido desde a introdução do conceito de dinâmica caótica no Sistema Solar, via o trabalho pioneiro de Wisdom (1982) sobre a ressonância orbital 3:1. Em particular, procuramos mencionar principalmente as que estão mais relacionadas com nosso trabalho diretamente ou àquelas que mais contribuem para justificá-lo.

Em 1982, Wisdom explicou pela primeira vez a abertura da falha, descartando de suas integrações numéricas as condições iniciais que nesse processo atingissem valores de excentricidade  $\leq 0.3$ , partindo do pressuposto que os asteróides seriam conseqüentemente removidos através de encontros próximos com Marte. Com a mesma representação Hamiltoniana (válida para excentricidades  $\leq 0.3$  e com dois graus de liberdade) em 1983, o mesmo autor evidencia o domínio de trajetórias caóticas, adotando dois planos de condições iniciais para suas integrações numéricas, por ele denominados de *representativos*, uma vez que são 'cruzados' pela maioria dos testes efetuados, dentro de um intervalo de tolerância de 5 graus para os dois ângulos da Hamiltoniana que os definem. Com duas variáveis angulares fixas, *semi-eixo maior* e *excentricidade* são as coordenadas desses planos, os quais propiciaram uma investigação sistemática do espaço de fase quadridimensional. Vários trabalhos são então a partir disso elaborados para explicar a origem de movimentos caóticos na ressonância 3:1 (Wisdom, 1985; Koiller et al, 1987; Neishtadt, 1997; Henrard e Caranicolas, 1990). Posteriormente, com representações Hamiltonianas que estendem o domínio de validade da representação clássica da ressonância 3:1 para excentricidades acima de 0.3, Ferraz-Mello e Klafke (1991) e Hadjidemetriou (1993) mostraram a existência de librações de altas e moderadas excentricidades via superfícies de secção de Poincaré.

Há mais de duas décadas a ressonância orbital 3:1 vem sendo investigada e abrange aspectos desde as diversas explicações para a origem dos movimentos caóticos, os quais são responsáveis pela abertura da falha, até a abordagem de mecanismos de reposição de asteróides, uma vez que integrações numéricas mais realistas mostram que os tempos de vida dinâmico (tempo onde os objetos são removidos da ressonância por queda no Sol, escape do Sistema Solar ou por colisões com os planetas) são bem menores que a idade do Sistema Solar (média de 2 milhões de anos segundo Gladman et al, 1997). Por outro lado, é muito importante ressaltar que à medida que novos esquemas computacionais foram se desenvolvendo e os computadores foram ficando mais rápidos, a ressonância 3:1 pode ser identificada como uma das principais fontes de NEAs (*Near Earth Asteroids*) ou em termos mais gerais NEOs (*Near Earth Objects*), sendo que as escalas de tempo envolvidas nas integrações numéricas são no mínimo de 100 milhões de anos.

Atualmente é considerado que uma das principais explicações para o abastecimento de objetos seria conseqüência do efeito Yarkovsky, que pode trazer continuamente asteróides para ambos os bordos da falha (Wokroulický e Brož, 1999;

Morbidelli e Wokroulický, 2003; Wokroulický, Brož, Bottke, Nesvorný e Morbidelli, 2005). Esse efeito é decorrente da re-emissão térmica de um asteroide em rotação, o qual acarretaria um deslocamento em semi-eixo maior de  $10^4$  unidades astronômicas/milhão de anos (Wokroulický e Brož, 1999). A contribuição do processo de difusão caótica como fonte parcial de abastecimento de objetos numa vizinhança de 0.01 UA da região de ressonância foi evidenciada por Guillens, Vieira Martins e Silva Gomes (2002). Tal fato foi levado em conta no trabalho de Morbidelli e Wokroulický (2003) sobre a estimativa do fluxo de asteroides para a região de ressonância 3:1, considerando-se a ação do efeito Yarkovický até a região difusiva e não até a região de ressonância propriamente dita. Wokroulický et al (2005) consideram que a população instável evidenciada por Guillens et al caracterizam uma ‘futura geração’ de NEAs, enfatizando o fato que os autores adotam o efeito Yarkovsky como cenário mais plausível para trazer os asteroides até a região difusiva. Alguns resultados obtidos por Guillens, Vieira Martins e Cordeiro Silva (2007), vem melhor caracterizando esse processo de difusão caótica, considerando uma vizinhança de 0.02 UA da região de ressonância. Uma lei de decaimento dos tempos de vida dinâmico da população de asteroides numerados observados é obtida, mostrando a existência de uma população intrinsecamente estável (contrariando a hipótese estabelecida a priori por Morbidelli e Wokroulický de que ao longo de bilhões de anos a região difusiva estaria completamente esvaziada) e uma população instável que decai exponencialmente. Esse fato viabiliza a estimativa de tempos de ‘meia vida dinâmica’ para a vizinhança à esquerda e à direita da região considerada, uma vez que o processo difusivo atua de forma diferenciada de um lado e de outro. Isso está de acordo com o que é observado: a população de asteroides numerados à direita é 1,5 vezes maior que à esquerda. Os referidos autores também delimitam as regiões onde há maior probabilidade de remoção de asteroides em 100 milhão de anos.

É interessante ressaltar que o conteúdo do nosso trabalho a ser apresentado tem cunho puramente analítico, pois envolve a classificação dos espaços de fases associados a dois modelos integráveis (Guillens, 1998 e Henrard e Caranicolas, 1990) construídos com hipóteses e propósitos diferentes (capítulo II e IV) para representarem numa primeira instância a dinâmica da ressonância 3:1 no escopo do Problema Restrito de 3 Corpos Planar e Médio. Ambos reproduzem características de problemas ressonantes: separatriz, libração e circulação, pontos de equilíbrio estáveis e instáveis. No capítulo IV estamos detalhando um pouco mais, o que é apresentado sucintamente na última referência: as configurações possíveis para o espaço de fase desse modelo integrável segundo os Modelos Fundamentais Ressonantes (Borderies e Goldreich, 1984, Lemaitre, 1984), para o caso das ressonâncias de segunda-ordem, que é o caso da 3:1 ( $p+2/p$ , com  $p=1$ ). É oportuno mencionar que tais modelos são obtidos após o trabalho pioneiro de Sessin e Ferraz-Mello (1984) para a comensurabilidade 2:1 entre dois planetas (ressonância de primeira ordem  $p+1/p$ , com  $p=1$ ).

A obtenção do modelo integrável obtida em (Guillens, 1998) na primeira referência (apresentada no capítulo II) segue o procedimento adotado por Sessin e Ferraz-Mello(1984), onde as variáveis associadas ao modelo integrável não são canônicas. É importante observar que o modelo de Henrard e Caranicolas, o qual é abordado no capítulo II já parte do fato que a excentricidade corresponde a um tipo de “excentricidade livre” para o asteroide, adicionada a uma “excentricidade forçada” relacionada à excentricidade de Júpiter, o que constitui um dos principais resultados obtidos por Sessin e Ferraz-Mello e que podem ser reproduzidos para o caso asteroidal

(Bressane e Sessin, 1988, Stuchi, 1991). A transformação canônica de variáveis que irá propiciar a obtenção de uma Hamiltoniana reduzida já contém essa informação em sua definição.

Finalmente, no capítulo V segue nossa principal contribuição – estabelecer uma comparação entre os dois modelos, classificando o espaço de fase da Hamiltoniana integrável de Henrard e Caranicolas segundo a abordagem de Sessin e Ferraz-Mello e melhor compreendendo o efeito das hipóteses simplificadoras realizadas em (Guillens, 1998), que são ‘menos naturais’ do que aquelas adotadas por Henrard e Caranicolas e não inclui o termo secular da Hamiltoniana original.

Com intuito de melhor contextualizar a motivação para a busca desses modelos integráveis, é oportuno mencionar que Henrard e Caranicolas consideram a Hamiltoniana integrável como Hamiltoniana não-perturbada para um tratamento semi-analítico da Hamiltoniana original via invariantes adiabáticos. O propósito, conforme mencionado previamente, era o de explicar a origem dos movimentos caóticos evidenciada no trabalho de Wisdom (1982). Por outro lado, Guillens (1998) estabelece, a priori, a classificação do espaço de fase da Hamiltoniana integrável, descrita em termos das integrais primeiras, no plano representativo de Wisdom, ou seja, em termos de coordenadas (*semi-eixo maior*, *excentricidade*). Uma vez estabelecida a correspondência entre pontos no plano representativo e pontos sobre a superfície de secção de Poincaré (definida pela condição: ângulo ressonante =  $\pi$ ) dentro do contexto da Hamiltoniana original, foi então possível obter em termos qualitativos uma classificação de trajetórias possíveis para o espaço de fase da Hamiltoniana original num único gráfico, a exemplo do diagrama expresso pelas integrais primeiras que contém a classificação do espaço de fase do modelo integrável.

## CAPÍTULO II – MÉTODO DE SESSIN PARA CONSTRUÇÃO DE UM MODELO SIMPLIFICADO DA RESSONÂNCIA 3:1

### II.1 Introdução

Neste capítulo será inicialmente desenvolvido o processo de obtenção de uma representação Hamiltoniana para movimentos vizinhos à ressonância asteroidal de movimento médio 3:1. Em seguida, será feito o tratamento ressonante com a apresentação da função perturbadora planetária e a obtenção de um núcleo integrável para a mesma.

### II.2 Problema restrito de 3 corpos

Considere-se três massas pontuais  $m_j$ ,  $j = 0,1,2$  localizadas nas coordenadas  $\xi_j$ ,  $\eta_j$  e  $\zeta_j$  (Figura 2.1), em um sistema de coordenadas inercial, sujeitas apenas às atrações gravitacionais mútuas. Sendo a expressão da Lei da Gravitação Universal de Newton dada por:

$$\vec{F} = k^2 \frac{m_i m_j}{r^2} \hat{r} \quad , \quad (2.1)$$

as equações de movimento para a componente  $\xi_j$  são:

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} &= k^2 m_0 m_1 \frac{\xi_1 - \xi_0}{r_{01}^3} + k^2 m_0 m_2 \frac{\xi_2 - \xi_0}{r_{02}^3} \Rightarrow \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = k^2 m_1 \frac{\xi_1 - \xi_0}{r_{01}^3} + k^2 m_2 \frac{\xi_2 - \xi_0}{r_{02}^3} \\ m_1 \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} &= k^2 m_1 m_0 \frac{\xi_0 - \xi_1}{r_{10}^3} + k^2 m_1 m_2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{r_{12}^3} \Rightarrow \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = k^2 m_0 \frac{\xi_0 - \xi_1}{r_{10}^3} + k^2 m_2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{r_{12}^3} \\ m_2 \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} &= k^2 m_2 m_0 \frac{\xi_0 - \xi_2}{r_{20}^3} + k^2 m_1 m_2 \frac{\xi_1 - \xi_2}{r_{21}^3} \Rightarrow \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = k^2 m_0 \frac{\xi_0 - \xi_2}{r_{20}^3} + k^2 m_1 \frac{\xi_1 - \xi_2}{r_{21}^3} \end{aligned} \quad , \quad (2.2)$$

onde, a constante de acoplamento é  $k^2 = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  no SI e o vetor  $\vec{r}_{jk}$ , que liga duas massas  $j$  e  $k$ , tem módulo  $r$ :

$$r_{jk}^2 = (\xi_j - \xi_k)^2 + (\eta_j - \eta_k)^2 + (\zeta_j - \zeta_k)^2 \quad (2.3)$$

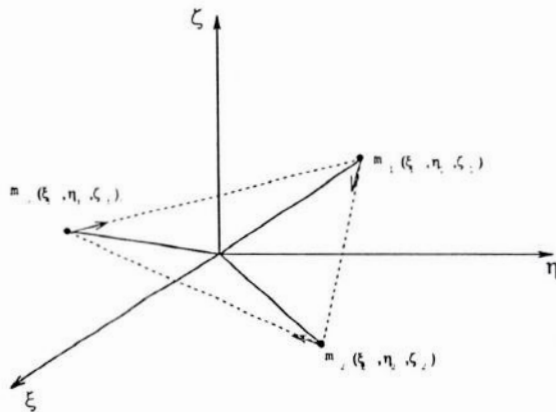


Figura 2.1. Coordenadas retangulares dos três corpos.

Para as componentes  $\eta_j$  e  $\zeta_j$ , equações análogas às (2.2) podem ser escritas. Contudo, em diversas aplicações, é conveniente que a origem do sistema de coordenadas esteja em uma das massas, por exemplo,  $m_0$ . Com isto, o sistema não será mais inercial, e as coordenadas relativas de  $m_1$  e  $m_2$  serão:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) &= (\xi_1 - \xi_0, \eta_1 - \eta_0, \zeta_1 - \zeta_0) \\ (x_2, y_2, z_2) &= (\xi_2 - \xi_0, \eta_2 - \eta_0, \zeta_2 - \zeta_0)\end{aligned}$$

Considerando  $r_1 = r_{01}$ ,  $r_2 = r_{02}$  e  $\Delta = r_{12}$ , e subtraindo a segunda equação das (2.2) da primeira, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -k^2 \left[ \frac{m_0 x_1}{r_1^3} + \frac{m_1 x_1}{r_1^3} \right] + k^2 \left[ \frac{m_2 (\xi_2 - \xi_1)}{\Delta^3} - \frac{m_2 x_2}{r_2^3} \right] = \\ &= -k^2 \left[ \frac{m_0 x_1}{r_1^3} + \frac{m_1 x_1}{r_1^3} \right] + k^2 m_2 \left[ \frac{(\xi_2 - \xi_0) - (\xi_1 - \xi_0)}{\Delta^3} - \frac{x_2}{r_2^3} \right] \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -k^2 (m_0 + m_1) \frac{x_1}{r_1^3} + k^2 m_2 \left[ \frac{x_2 - x_1}{\Delta^3} - \frac{x_2}{r_2^3} \right]\end{aligned}\tag{2.4}$$

Novamente, subtraindo a terceira equação das (2.2) da primeira, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k^2 \left[ \frac{m_0 x_2}{r_2^3} + \frac{m_2 x_2}{r_2^3} \right] + k^2 \left[ \frac{m_1 (\xi_1 - \xi_2)}{\Delta^3} - \frac{m_1 x_1}{r_1^3} \right] = \\ &= -k^2 \left[ \frac{m_0 x_2}{r_2^3} + \frac{m_2 x_2}{r_2^3} \right] + k^2 m_1 \left[ \frac{(\xi_1 - \xi_0) - (\xi_2 - \xi_0)}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right] \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k^2 (m_0 + m_2) \frac{x_2}{r_2^3} + k^2 m_1 \left[ \frac{x_1 - x_2}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right]\end{aligned}\tag{2.5}$$

Para o problema Sol-Júpiter-Asteróide, temos:

Parâmetro	Sol	Júpiter	Asteróide
Massa	$m_0 = M$	$m_1 = m_j$	$m_2 = m$
Vetor posição	----	$\vec{r}_j = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k}$	$\vec{r} = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}$
Módulo	----	$r_j = r_1$	$r = r_2$

Escrevendo a equação (2.4) para as componentes  $\eta_j$  e  $\zeta_j$ , e usando a notação vetorial, temos para equação de Júpiter:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} &= \left( \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \frac{d^2 y_1}{dt^2}, \frac{d^2 z_1}{dt^2} \right) = \\ &= -k^2 (M + m_j) \frac{(x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k})}{r_j^3} + k^2 m \left[ \frac{(x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}) - (x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k})}{\Delta^3} - \frac{(x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k})}{r^3} \right] \\ \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} &= -k^2 (M + m_j) \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} + k^2 m \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{\Delta^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right]\end{aligned}\tag{2.6}$$

Da mesma forma, agora com (2.5), obtém-se a equação de movimento para o asteróide:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k^2 (M + m) \frac{\vec{r}}{r^3} + k^2 m_j \left[ \frac{\vec{r}_j - \vec{r}}{\Delta^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right] \quad (2.7)$$

As equações de movimento para Júpiter (2.6) e para o Asteróide (2.7) são para os problema geral de três corpos no espaço e referencial heliocêntrico. Porém, no problema restrito de três corpos, o movimento de  $M$  e  $m_j$  não é sensivelmente afetado pela massa  $m$ , podendo ser considerado um movimento de dois corpos (órbita kepleriana).

Usando a condição  $m \ll M, m_j$ , chega-se à equação do problema relativo de dois corpos para Sol e Júpiter:

$$\frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} = -\mu_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \quad (2.8)$$

(movimento kepleriano de Júpiter em torno do Sol)

A equação para o asteróide permanece a mesma com a introdução do parâmetro  $\mu$ :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + k^2 m_j \left[ \frac{\vec{r}_j - \vec{r}}{\Delta^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right] \Rightarrow \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = R(\vec{r}), \quad (2.9)$$

onde:

$$\mu_j = k^2 (M + m_j);$$

$$\mu = k^2 (M + m) \approx k^2 M, \text{ e sendo:}$$

$M$  é a massa do Sol (elemento primário – referência do sistema de coordenadas);

$m_j$  é a massa de Júpiter (elemento secundário – corpo perturbador, que descreve uma elipse fixa, sendo seu plano orbital o plano de referência);

$m$  é a massa do Asteróide - corpo perturbado por Júpiter ( $r < r_j$ ), que não exerce ação sobre este último.

O segundo termo da (2.9) é conhecido como função perturbadora planetária.

### II.3 Formalismo Hamiltoniano do problema

O sistema de equações (2.8) e (2.9) pode ser convertido em um sistema Hamiltoniano. Como é bem conhecido, a órbita kepleriana envolve os seguintes elementos orbitais:

$a$ : semi-eixo maior;

$e$ : excentricidade orbital;

$i$ : inclinação do plano orbital em relação ao plano de referência;

$\omega$ : argumento do periélio;

$\Omega$ : longitude do nodo ascendente;

$\tau_0$ : tempo de passagem pelo periélio.

Desta forma, os elementos keplerianos do Asteróide serão denotados por  $(a, e, i, \omega, \Omega, \tau_0)$  e os de Júpiter com sub-índice  $j$ .

Definimos agora o conjunto de variáveis  $l, g$  e  $h$  e seus momentos  $L, G$  e  $H$  canonicamente conjugados, conhecidos como variáveis de Delaunay:

$$\left[ \begin{array}{lll} L = \sqrt{\mu a} & , & l = nt + l_0 \quad \text{anomalia média} \\ G = L\sqrt{1-e^2} & , & g = \omega \quad \text{argumento do periélio} \\ H = G \cos i & , & h = \Omega \quad \text{longitude dos nodos} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Por sua vez, os movimentos médios  $(2\pi/T)$  de Júpiter e do Asteróide são dados pela terceira lei de Kepler:

$$n_j = \sqrt{\frac{\mu_j}{a_j^3}} \quad , \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (2.11)$$

Com isto, as equações Hamiltonianas que descrevem o movimento do asteróide são:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(L, G, H) = \frac{\partial F^*}{\partial(l, g, h)} \\ \frac{d}{dt}(l, g, h) = -\frac{\partial F^*}{\partial(L, G, H)} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Nestas equações,  $F^*$  é a função Hamiltoniana para o problema de três corpos dada por:

$$F^* = \frac{\mu^2}{2L^2} + \mathfrak{R} \quad , \quad (2.13)$$

onde  $\mathfrak{R}(L, G, H, l, g, h)$  é a função perturbadora planetária e o primeiro termo é a parte kepleriana.

Para termos as equações (2.8) e (2.9) na forma (2.12) é necessário que a função perturbadora seja desenvolvida em termos de elementos orbitais.

Levando em conta (2.13), o sistema de equações Hamiltonianas (2.12) para o asteróide pode ser escrito explicitando a função perturbadora como:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(L, G, H) = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial(l, g, h)} \\ \frac{d}{dt}(l) = n - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial L} \\ \frac{d}{dt}(g, h) = -\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial(G, H)} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$$\text{Pois, } n = \mu^2 L^{-3} = -\frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{\mu^2}{2L^2} \right)$$

A função perturbadora é em geral desenvolvida em série de cossenos nas variáveis angulares  $\lambda$ ,  $\varpi$  e  $\Omega$ , ou seja:

$$\mathfrak{R} = \sum_j C_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5} \cdot \cos(j_1 \lambda + j_2 \varpi + j_3 \Omega + j_4 \lambda' + j_5 \omega' + j_6 \Omega') \quad , \quad (2.15)$$

com os coeficientes  $C_j$ 's sendo funções de  $(a, e, i, a', e')$  e, devido à invariância de  $\mathfrak{R}$  por rotação do sistema de coordenadas em torno do eixo z:  $j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 = 0$ .

Antes de desenvolvermos esta função, voltemos ao Hamiltoniano (2.13), escrevendo-o em outra notação, visando à solução do problema ressonante de interesse, isto é:

$$F^* = F_0^* + F_1 \quad (2.16)$$

$$\text{com, } \begin{cases} F_0^* = \frac{\mu^2}{2L^2} \\ F_1 = k^2 m_j \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r}_j \cdot \vec{r}}{r_j^3} \right] \end{cases}$$

Nesta expressão,  $F^*$  é a representação Hamiltoniana nas variáveis de Delaunay para o problema restrito de três corpos até a segunda ordem nas excentricidades,  $F_0^*$  corresponde à energia do movimento elíptico ( $\mu/2a$ ) com sinal trocado e  $F_1$  à função perturbadora planetária.

Todavia, o sistema Hamiltoniano obtido até agora não é autônomo, devido à presença do parâmetro tempo em  $F_1$  (2.16), que aparece explicitamente em  $\vec{r}_j = (x_j(t), y_j(t), z_j(t))$  e, portanto,  $F^*$  não é uma quantidade conservada. A fim de contornar este problema é necessária a expansão do espaço de fase, definindo-se uma nova variável  $\Phi_j$ , como conjugada à anomalia média de Júpiter  $l_j$  ( $n_j = \dot{l}_j$ ). Desta forma, as equações (2.12) tornam-se:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(L, G, H, \Phi_j) = \frac{\partial F}{\partial(l, g, h, l_j)} \\ \frac{d}{dt}(l, g, h, l_j) = -\frac{\partial F}{\partial(L, G, H, \Phi_j)} \end{cases} \quad (2.17)$$

Agora,  $F$  é constante de movimento e  $F = F_0 + F_1$ , com  $F_0$  redefinido como:

$$F_0 = \frac{\mu^2}{2L^2} - n_j \Phi_j \quad (2.18)$$



Antes de escrevermos  $F_j$ , particularizemos, a título de simplificação, as órbitas no plano orbital Sol-Júpiter, isto é,  $i = 0$  (problema plano). Como neste caso, há indeterminação de  $\Omega$ , usa-se em seu lugar o “ângulo quebrado”  $\varpi = \omega + \Omega$ , medido a partir do eixo  $x$  até a linha do periélio.

Assim, o novo conjunto de variáveis, que define um sistema canônico no plano será:

$$\left[ \begin{array}{lll} L = \sqrt{\mu a} & , & \lambda = l + \varpi & \text{longitude média do Asteróide} \\ G - L = L(\sqrt{1 - e^2} - 1) & , & \varpi & \text{longitude do periélio do Asteróide} \\ \Phi_j & , & \lambda_j = l_j + \varpi_j & \text{longitude média de Júpiter} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Neste conjunto,  $L$ ,  $G$  e  $\Phi_j$  têm dimensão de ação e as equações canônicas definindo o problema restrito planar de 3 corpos serão:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(L, G - L, \Phi_j) = \frac{\partial F}{\partial(\lambda, \varpi, \lambda_j)} \\ \frac{d}{dt}(\lambda, \varpi, \lambda_j) = -\frac{\partial F}{\partial(L, G - L, \Phi_j)} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

sendo:

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} - n_j \Phi_j + \mathfrak{R}(L, G - L, \Phi_j, \lambda, \varpi, \lambda_j) \quad (2.21)$$

O tratamento ressonante clássico consiste em se obter uma Hamiltoniana média  $\bar{F}$  para o problema a partir do desenvolvimento de  $F_j$  na vizinhança da ressonância exata e posterior eliminação dos termos de curto período.

Desenvolvendo-se  $\mathfrak{R}$  em variáveis de Delaunay até segunda ordem nas excentricidades, para um secundário (Júpiter) exterior ( $\alpha = a/a_j < 1$ ), tem-se (Murray & Dermott, 1999):

$$\begin{aligned}
\Re = & \frac{m_j}{M+m_j} \frac{\mu_j^2}{L_j^2} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{8} (e^2 + e_j^2) (D - 4j^2 + D^2) \right] b'_{l/2}(\alpha) \cos[j(\lambda - \lambda_j)] + \right. \\
& + \frac{e}{2} (-2j - D) b'_{l/2}(\alpha) \cos[(j-1)\lambda - j\lambda_j + \varpi] + \frac{e_j}{2} (1 + 2j + D) b'_{l/2}(\alpha) \cos[j\lambda - (j+1)\lambda_j + \varpi_j] + \\
& + \frac{e^2}{8} (-5j - 3D + 4j^2 + 4jD + D^2) b'_{l/2}(\alpha) \cos[(j-2)\lambda - j\lambda_j + 2\varpi] + \\
& + \frac{e_j^2}{8} (4 + 9j + 5D + 4j^2 + 4jD + D^2) b'_{l/2}(\alpha) \cos[j\lambda - (j+2)\lambda_j + 2\varpi_j] + \\
& + \frac{ee_j}{4} (-2j - D - 4j^2 - 4jD - D^2) b'_{l/2}(\alpha) \cos[(j-1)\lambda - (j+1)\lambda_j + \varpi + \varpi_j] + \\
& + \frac{ee_j}{4} (2j - D + 4j^2 - D^2) b'_{l/2}(\alpha) \cos[(j+1)\lambda - (j+1)\lambda_j - \varpi + \varpi_j] + \left( -\alpha + \frac{\alpha^2}{2} e_j^2 \right) \cos(\lambda - \lambda_j) - \\
& - \frac{1}{2} \alpha e \cos(2\lambda - \lambda_j - \varpi) + \frac{3}{2} \alpha e \cos(\lambda_j - \varpi) - 2\alpha e_j \cos(\lambda - 2\lambda_j + \varpi_j) - \frac{1}{8} \alpha e^2 \cos(\lambda + \lambda_j - 2\varpi) - \\
& - \frac{3}{8} \alpha e^2 \cos(3\lambda - \lambda_j - 2\varpi) - \alpha e e_j \cos(2\lambda - 2\lambda_j + \varpi + \varpi_j) + 3\alpha e e_j \cos(2\lambda_j - \varpi - \varpi_j) - \\
& \left. - \frac{1}{8} \alpha e_j^2 \cos(\lambda + \lambda_j - 2\varpi_j) - \frac{27}{8} \alpha e_j^2 \cos(\lambda - 3\lambda_j + 2\varpi_j) \right\}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Nesta expressão, uma vez que  $\frac{m_j}{M+m_j} = \frac{M}{M+m_j} \frac{m_j}{M}$ ,  $m_j/M$  será o pequeno parâmetro,

$D$  são os operadores diferenciais e  $b_x^{(j)}$  os coeficientes de Laplace, definidos por (Brouwer & Clemence, 1961):

$$D = \alpha \frac{d}{d\alpha}, \quad D^2 = \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} + \varepsilon \alpha \frac{d}{d\varepsilon}, \tag{2.23}$$

$$\frac{1}{2} b_x^{(j)} = \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot j} \cdot \alpha^j \left[ 1 + \frac{s(s+j)}{1(j+1)} \alpha^2 + \frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{1 \cdot 2(j+1)(j+2)} \alpha^4 + \dots \right] \tag{2.24}$$

Os termos cujos argumentos contêm a longitude média são denominados termos de curto período, caso contrário, são ditos termos de longo período. Os termos nos quais não aparecem cossenos são chamados de termos seculares.

## II.4 Obtenção de um modelo simplificado para a ressonância 3:1

A essência da possibilidade de aplicação de todo método perturbativo é a existência de um núcleo integrável. A busca de tal núcleo requer um tratamento da expressão (2.22), que será descrito a seguir, seguindo Gillens (1998). O processo de obtenção de uma Hamiltoniana ressonante 3:1 pode ser dividido nos seguintes passos:

- i) Uma transformação canônica de Mathieu ( $\sum p_i dq_i = \sum P_i dQ_i$ ) para definir a variável  $\theta$ , que é o ângulo crítico e engloba os movimentos médios ressonantes. Este ângulo é dado de forma genérica por  $\theta = j_1 n_1 + j_2 n_2$  ( $j_1, j_2$  inteiros). Havendo

comensurabilidade entre dois movimentos médios ou períodos orbitais. os argumentos trigonométricos nos quais o ângulo crítico se anula dão os termos ressonantes. Desta forma, para a ressonância 3:1, em função das longitudes médias, e com ângulo crítico:

$$\theta = \lambda - 3\lambda_j \quad , \quad (2.25)$$

temos uma transformação de Mathieu que define um novo conjunto de variáveis  $(x, y, \varphi_j, \lambda, \varpi, \theta)$ , em que os momentos se relacionam aos anteriores  $L, G$  e  $\Phi_j$  (2.19) por:

$$\left[ \begin{array}{lll} x = L + \frac{1}{3}\Phi_j = \sqrt{\mu a} + \frac{1}{3}\Phi_j & , & \lambda = l + \varpi \quad \text{longitude média do Asteróide} \\ y = G - L = L(\sqrt{1-e^2} - 1) & , & \varpi \quad \text{longitude do periélio do Asteróide} \\ \varphi_j = -\frac{1}{3}\Phi_j & , & \theta = \lambda - 3\lambda_j \quad \text{ângulo crítico} \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Note-se que as variáveis  $\lambda$  e  $\varpi$  permanecendo inalteradas de (2.19) para (2.26). Com auxílio desta última,  $\Phi_j = -3\varphi_j$  e  $L = x - \Phi_j/3 = x + \varphi_j$  e, retomando à expressão de  $F_0$  (2.18), tem-se agora:

$$F_0 = \frac{\mu^2}{2L^2} - n_j \Phi_j = \frac{\mu^2}{2(x + \varphi_j)^2} + 3n_j \varphi_j \quad , \quad (2.27)$$

Em lugar de (2.20), o novo sistema de equações canônicas de movimento será:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(x, y, \varphi_j) = \frac{\partial F}{\partial(\lambda, \varpi, \theta)} \\ \frac{d}{dt}(\lambda, \varpi, \theta) = -\frac{\partial F}{\partial(x, y, \varphi_j)} \end{array} \right. \quad , \quad (2.28)$$

sendo:

$$F = \frac{\mu^2}{2(x + \varphi_j)^2} + 3n_j \varphi_j + F_1(x, y, \varphi_j, \lambda, \varpi, \theta) \quad (2.29)$$

E, a condição de ressonância exata é dada por:

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial F_0}{\partial \varphi_j} = \frac{\mu^2}{(x + \varphi_j)^3} - 3n_j = n - 3n_j = 0 \quad (2.30)$$

ii) Representação do problema por uma Hamiltoniana média, isto é:

$$\bar{F} = F_o + \bar{\mathfrak{R}}(x, \varphi_j, y, \theta, \varpi) \quad (2.31)$$

na qual não aparecem os termos de curto período, isto é, os argumentos que dependam explicitamente da longitude média do asteróide  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \bar{F} = & 3n_j \varphi_j + \frac{\mu^2}{2(x + \varphi_j)^2} + \frac{m_j}{M} \left( \frac{1}{2} \frac{M}{M + m_j} \frac{\mu^2}{L_j^2} \right) \cdot \left\{ A_0^0 + \frac{1}{2} (A_1^0 + A_2^0) (e^2 + e_j^2) + \right. \\ & + e^2 \left( \frac{21}{4} A_0^3 + \frac{5}{2} A_1^3 + \frac{1}{2} A_2^3 \right) \cos(\theta + 2\varpi) + e_j^2 \left( \frac{17}{4} A_0^1 + \frac{5}{2} A_1^1 + \frac{1}{2} A_2^1 \right) \cos(\theta + 2\varpi_j) - \\ & \left. - ee_j (10A_0^2 + 5A_1^1 + A_2^2) \cos(\theta + \varpi + \varpi_j) + ee_j (A_0^1 - A_1^1 - A_2^1) \cos(\varpi - \varpi_j) \right\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde:

$$\begin{cases} A_p^k = \frac{\alpha^p}{p!} \frac{d^p}{d\alpha^p} b_{1/2}^{(k)}(\alpha) \\ A_0^k = b_{1/2}^{(k)}(\alpha) \\ A_1^k = \alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^{(k)}(\alpha) = D b_{1/2}^{(k)}(\alpha) \\ A_2^k = \frac{\alpha^2}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^{(k)}(\alpha) = \frac{1}{2} (D^2 - D) b_{1/2}^{(k)}(\alpha) \end{cases} \quad (2.33)$$

O novo sistema (2.28), que possui 4 variáveis e uma constante de integração  $x$ , tem 2 graus de liberdade, uma vez que  $\lambda$  é variável cíclica (pela (2.28),  $\dot{x} = 0$ ).

iii) Finalmente, o desenvolvimento de  $\bar{F}$  na vizinhança da ressonância exata, com a hipótese quantitativa de que esta vizinhança é da ordem da raiz quadrada do pequeno parâmetro, isto é:

$$\frac{\partial F_o}{\partial \varphi_j} = -n + 3n_j = O\left(\sqrt{\frac{m_j}{M}}\right) \quad (2.34)$$

Diante disto, é feita a transformação  $(\varphi_j, \theta) \rightarrow (\varphi_j', \theta)$ , de modo que:

$$\varphi_j = \varphi_j' + \varphi_{jR} \quad (2.35)$$

e  $\varphi_{jR}$  se refere ao ponto em que ocorre a ressonância exata, isto é,  $\left( \frac{\partial F_o}{\partial \varphi_j'} \right)_{\varphi_j'=0} = 0$ .

O raio desta vizinhança é suposto da ordem de  $\left(\frac{\varphi_j}{\varphi_j'}\right) = O\left(\sqrt{\frac{m_j}{M}}\right)$  (2.36)

De acordo com (2.35), obtém-se as seguintes relações a partir de (2.26):

$$\begin{aligned} L &= x - \frac{1}{3}\Phi_j = x + \varphi_j = x + \varphi_j' + \varphi_{jR} \\ \Phi_j &= -3(\varphi_j' + \varphi_{jR}) \\ e^2 &= 1 - \left(1 - \frac{y}{(x + \varphi_j' + \varphi_{jR})}\right)^2 \\ \alpha &= \frac{a}{a_j} = \frac{M + m_j}{M} \left(\frac{x + \varphi_j' + \varphi_{jR}}{L_j}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Na ressonância exata,  $\varphi_j' = 0$ , (2.38)

e estes elementos serão denominados, respectivamente,  $L_R$ ,  $\varphi_{jR}$ ,  $e_R^2$  e  $\alpha_R$ , os quais, em função de  $M$ ,  $m_j$ ,  $k$  e  $n_j$ , escrevem-se como:

$$\begin{aligned} L_R &= \sqrt[3]{\frac{\mu^2}{3n_j}} \\ \varphi_{jR} &= L_R - x = \sqrt[3]{\frac{\mu^2}{3n_j}} - x \\ e_R^2 &= 1 - \left(1 - \frac{y}{L_R}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{y}{(x + \varphi_{jR})}\right)^2 = 1 - \left(1 - \left(\sqrt[3]{\frac{3n_j}{\mu^2}}\right)y\right)^2 \\ \alpha_R &= \frac{a}{a_j} = \sqrt{\frac{1}{9} \left(\frac{M}{M + m_j}\right)} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Levando em conta a condição (2.38) na primeira das equações (2.37), tem-se ainda:

$$\left. \begin{aligned} L &= x + \varphi_j' + \varphi_{jR} \\ L_R &= x + \varphi_{jR} \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = L_R + \varphi_j' \Rightarrow \varphi_j' = L - L_R \quad (2.40)$$

Deve-se, agora, desenvolver as relações (2.37) em potências de  $\varphi_j'/L_R$ , considerando:

$$\frac{\varphi_j'}{L_R} \approx O\left(\sqrt{\frac{m_j}{M}}\right) \quad (2.41)$$

A Hamiltoniana do problema de dois corpos não-perturbado (2.27) pode ser desenvolvida em potências de  $\varphi_j'/L_R$  como:

$$F_0 = 3n_j \varphi_{jR} + \frac{3\mu^2}{2L_R^2} \left( \frac{\varphi_j'}{L_R} \right)^2 - \frac{2\mu^2}{L_R^2} \left( \frac{\varphi_j'}{L_R} \right)^3 + \dots \quad (2.42)$$

Supondo que  $e^2 \approx e_R^2 \approx e_j \approx O(\sqrt{m_j/M})$ , e ordenando a Hamiltoniana (2.32) em potências do pequeno parâmetro, tem-se:

$$\bar{F} = F_1 + F_{3/2} + F_2 + \dots \quad (2.43)$$

onde, as parcelas  $F_{3/2} + F_2 + \dots$  correspondem à perturbação sobre a órbita de referência  $F_1$ , a qual constitui uma representação Hamiltoniana de primeira ordem para a ressonância 3:1.

$$\begin{aligned} F_1 = & \frac{3}{\alpha_R} \left( \frac{\varphi_j'}{L_R} \right)^2 + \frac{m_j}{M} \left\{ \frac{1}{2} \cdot (A_1^0 + A_2^0) (e_R^2 + e_j^2) + e_R^2 \left( \frac{21}{4} A_0^3 + \frac{5}{2} A_1^3 + \frac{1}{2} A_2^3 \right) \cos(\theta + 2\varpi) \right. \\ & + e_j^2 \left( \frac{17}{4} A_0^1 + \frac{5}{2} A_1^1 + \frac{1}{2} A_2^1 \right) \cos(\theta + 2\varpi_j) - e_R e_j (10A_0^2 + 5A_1^1 + A_2^2) \cos(\theta + \varpi + \varpi_j) + \\ & \left. + e_R e_j (A_0^1 - A_1^1 - A_2^1) \cos(\varpi - \varpi_j) \right\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

No desenvolvimento acima:

- os coeficientes  $A_i^j$  são calculados na ressonância exata, isto é,  $A_i^j = A_i^j(\alpha_R)$ ;
- $e_R^2 = -2y/L_R$  é o termo de ordem  $\sqrt{m_j/M}$  no desenvolvimento de  $e$  em torno da ressonância exata, onde  $y$  é variável conjugada de  $\varpi$ ;
- Foram omitidos de  $F_1$  os termos constantes  $3n_j \varphi_{jR}$  e  $(m_j/M)A_0^0$ ;

Em relação à expressão de  $\bar{F}$  (2.32), a (2.44) não apresenta o fator multiplicativo  $Q = \left( \frac{1}{2} \frac{M}{M+m_j} \frac{\mu^2}{L_j^2} \right)$ , devido a uma mudança de escala de tempo, isto é:

$$t^* = Qt \quad (2.45)$$

A expressão (2.44) ainda pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} F_1 = & \frac{A_1}{2} \left( \frac{\varphi_j'}{L_R} \right)^2 + A_2 (e_R^2 + e_j^2) + A_3 e_R e_j \cos(\varpi - \varpi_j) + A_4 e_R^2 \cos(\theta + 2\varpi) + \\ & + A_5 e_R e_j \cos(\theta + \varpi + \varpi_j) + A_6 e_j^2 \cos(\theta + 2\varpi_j) \end{aligned} \quad (2.46)$$

com os coeficientes  $A_j'$  dados por (2.33):

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{6}{\alpha_R} & A_4 &= \frac{m_j}{M} \left( \frac{21}{4} A_0^3 + \frac{5}{2} A_1^3 + \frac{1}{2} A_2^3 \right) \\
 A_2 &= \frac{m_j}{2M} (A_1^0 + A_2^0) & A_5 &= -\frac{m_j}{M} (10A_0^2 + 5A_1^1 + A_2^2) \\
 A_3 &= \frac{m_j}{M} (A_0^1 - A_1^1 - A_2^1) & A_6 &= \frac{m_j}{M} \left( \frac{17}{4} A_0^1 + \frac{5}{2} A_1^1 + \frac{1}{2} A_2^1 \right)
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

As equações canônicas de movimento correspondentes à  $F_1(y, \varphi_j', \varpi, \theta)$  são:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\varphi_j', y) = \frac{\partial F_1}{\partial(\theta, \varpi)} \\ \frac{d}{dt}(\theta, \varpi) = -\frac{\partial F_1}{\partial(\varphi_j', y)} \end{cases}, \tag{2.48}$$

com as seguinte variáveis canonicamente conjugadas (cf. (2.26) e (2.35)):

$$\begin{cases} y = G - L = L(\sqrt{1 - e^2} - 1) \\ \varphi_j' = \varphi_j - \varphi_{jR} \end{cases}, \quad \begin{cases} \varpi \\ \theta = \lambda - 3\lambda_j \end{cases}, \tag{2.49}$$

que, explicitadas em (2.48), fornecem:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_j'}{dt} = -[A_4 e_R^2 \sin(\theta + 2\varpi) + A_5 e_R e_j \sin(\theta + \varpi + \varpi_j) + A_6 e_j^2 \sin(\theta + 2\varpi_j)] \\ \frac{dy}{dt} = -[A_3 e_R e_j \sin(\varpi - \varpi_j) + 2A_4 e_R^2 \sin(\theta + 2\varpi) + A_5 e_R e_j \sin(\theta + \varpi + \varpi_j)] \\ \frac{d\theta}{dt} = -A_1 \left( \frac{\varphi_j'}{L_R} \right) \\ \frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{e_R L_R} [2A_2 e_R + A_3 e_j \cos(\varpi - \varpi_j) + 2A_4 e_R \cos(\theta + 2\varpi) + A_5 e_j \cos(\theta + \varpi + \varpi_j)] \end{cases} \tag{2.50}$$

No sistema acima, a variável independente é na verdade  $t^*$  (2.45), representada apenas como  $t$ , para efeito de simplificação de notação. A Hamiltoniana  $F_1(y, \varphi_j', \varpi, \theta)$ , (2.46), corresponde ao problema elíptico plano, com espaço de fase 4-D e descreve o movimento de um asteróide nas vizinhanças da ressonância 3:1 em primeira ordem.

Este mesmo sistema foi estudado por Wisdom (1982), que mostrou que a inclusão de  $e_j \neq 0$  quebra a integrabilidade do movimento circular plano. Sessin e Ferraz-Mello (1984) encontraram uma maneira de integrar uma parte deste modelo para a ressonância 2:1.

## II.5 Estudo da integrabilidade de $F_1$

A inclusão da excentricidade de Júpiter ( $e_j \neq 0$ ) torna  $F_1$ , (2.46), não-integrável. Guillens (1998) considera apenas a parcela integrável de  $F_1$ , denotada  $F_{11}$ , a qual reproduz as características de movimentos ressonantes, e cujo modelo mais simples é dado pelo espaço de fase do pêndulo, isto é, regiões de librações, circulações e uma separatriz entre os dois regimes.

A idéia do trabalho de Guillens (1998) é escrever  $F_1$ , (2.46), como a soma de duas parcelas, as quais sejam separadamente integráveis, ou seja:

$$F_1 = F_{11} + F_{12} \quad (2.51)$$

Para isto será necessária uma série de transformações não-canônicas de variáveis. A primeira será:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\theta}{2} + \varpi \\ \sigma_j &= \frac{\theta}{2} + \varpi_j \\ \Theta &= \frac{\varphi_j'}{L_R} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Com isto, o sistema auxiliar de Hori, (2.50), pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{1}{L_R} [A_4 e_R'^2 \sin(2\sigma) + A_5 e_R' e_j \sin(\sigma + \sigma_j) + A_6 e_j^2 \sin(2\sigma_j)] \\ \frac{dy}{dt} = -[A_3 e_R' e_j \sin(\sigma - \sigma_j) + 2A_4 e_R'^2 \sin(2\sigma) + A_5 e_R' e_j \sin(\sigma + \sigma_j)] \\ \frac{d\sigma_j}{dt} = -\frac{A_1}{2L_R} \Theta \\ \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{A_1}{2L_R} \Theta + \frac{1}{e_R' L_R} [2A_2 e_R' + A_3 e_j \cos(\sigma - \sigma_j) + 2A_4 e_R' \cos(2\sigma) + A_5 e_j \cos(\sigma + \sigma_j)] \end{cases} \quad (2.53)$$

Com o objetivo de eliminar a singularidade da equação para  $d\varpi/dt$ , (2.50), e conseqüentemente para  $d\sigma/dt$  quando  $e_R$  tende a zero será feita uma nova transformação não-canônica:

$$\begin{aligned} h &= e_R' \sin \sigma = e_R' \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varpi\right) & k &= e_R' \cos \sigma = e_R' \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varpi\right) \\ h_j &= e_j \sin \sigma_j = e_j \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varpi_j\right) & k_j &= e_j \cos \sigma_j = e_j \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varpi_j\right) \end{aligned} \quad (2.54)$$



Além disto, há uma nova mudança de escala de tempo, ou seja:

$$\Lambda = \frac{1}{L_R}(t - t_o) \quad (2.55)$$

Com isto, o sistema (2.53) torna-se:

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{d\Lambda} = -2A_4hk - A_5(hk_j + kh_j) - 2A_6h_jk_j \\ \frac{dh}{d\Lambda} = -\frac{A_1}{2}k\Theta + 2(A_2 + A_4)k + (A_3 + A_5)k_j \\ \frac{dh_j}{d\Lambda} = -\frac{A_1}{2}k_j\Theta \\ \frac{d\sigma_j}{d\Lambda} = -\frac{A_1}{2}\Theta \\ \frac{dk}{d\Lambda} = \frac{A_1}{2}\Theta h - 2(A_2 - A_4)h + (A_3 - A_5)h_j \\ \frac{dk_j}{d\Lambda} = \frac{A_1}{2}h_j\Theta \end{cases} \quad (2.56)$$

Logo, a partir de (2.46), a “Hamiltoniana”  $F_1(\Theta, h, h_j, k, k_j)$  escrita em termos de variáveis não-canônicas será:

$$\begin{aligned} F_1 = & \frac{1}{2}A_1\Theta^2 + (A_2 - A_4)h^2 + (A_2 + A_4)k^2 + (A_2 - A_6)h_j^2 + \\ & + (A_2 + A_6)k_j^2 + (A_3 + A_5)kk_j + (A_3 - A_5)hh_j \end{aligned} \quad (2.57)$$

e a expressão anterior é integrável desde que  $e_j = 0$ , isto é  $h_j$  e  $k_j$  nulos (Yokoyama e Sato, 1986):

$$F_1 = \frac{1}{2}A_1\Theta^2 + (A_4 + A_2)k^2 - (A_4 - A_2)h^2 \quad (2.58)$$

Deseja-se agora obter uma parcela  $F_{11}$  de (2.57) análoga à (2.58) e que contenha qualitativamente todos os argumentos críticos de  $F_1$ , mediante considerações acerca dos coeficientes  $A_i$ . Para isto, considere-se uma nova mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} k &= a_1K + a_2K_j \\ k_j &= b_1K + b_2K_j \\ h &= \frac{1}{(a_1b_2 - a_2b_1)}(b_2H - b_1H_j) \\ h_j &= -\frac{1}{(a_1b_2 - a_2b_1)}(a_2H - a_1H_j) \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$  são coeficientes que devem ser calculados de modo que  $F_1$  para  $e_j \neq 0$  seja similar a  $e_j = 0$ . Isto vale caso sejam satisfeitas as relações:

$$(A_3 - A_5)^2 = 4A_4A_6 \quad \text{e} \quad (A_3 + A_5)^2 = 4A_4A_6 \quad , \quad (2.60)$$

o que é verdade apenas em duas hipóteses:

$$A_3 = 0 \rightarrow A_5 = \pm 2\sqrt{A_4A_6} \quad \text{ou} \quad A_5 = 0 \rightarrow A_3 = \pm 2\sqrt{A_4A_6} \quad (2.61)$$

Considerando-se a primeira delas, tem-se  $A_3 = 0$ ,  $A_5 = -2\sqrt{A_4A_6}$  e também  $A_2 = 0$ , e  $F_1$ , de (2.57), se escreve como:

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{2}A_1\Theta^2 + (-A_4)h^2 + (A_4)k^2 + (-A_6)h_j^2 + (A_6)k_j^2 + (-2\sqrt{A_4A_6})kk_j + (-2\sqrt{A_4A_6})hh_j = \\ &= \frac{1}{2}A_1\Theta^2 + (-A_4h^2 - 2\sqrt{A_4A_6})hh_j - A_6h_j^2 + (A_4k^2 - 2\sqrt{A_4A_6})kk_j + A_6k_j^2 = \\ &= \frac{1}{2}A_1\Theta^2 - (\sqrt{A_4}h - \sqrt{A_6}h_j)^2 + (\sqrt{A_4}k - \sqrt{A_6}k_j)^2 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Considerando-se  $A_5 = -2\sqrt{A_4A_6} + A_7$ , os termos contendo  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_7$  são então deslocados para a outra parcela  $F_{12}$  (2.51). Finalmente:

$$F_{11} = \frac{1}{2}A_1\Theta^2 + K^2 - H^2 \quad , \quad (2.63)$$

sendo,

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{A_4}k - \sqrt{A_6}k_j & K_j &= \sqrt{A_6}k + \sqrt{A_4}k_j \\ H &= \sqrt{A_4}h - \sqrt{A_6}h_j & H_j &= \sqrt{A_6}h + \sqrt{A_4}h_j \end{aligned} \quad (2.64)$$

Retornando à hipótese de que  $F_1 = F_{11} + F_{12}$  (2.51), tem-se as seguintes parcelas individualmente integráveis:

$$\left[ \begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{2}A_1\Theta^2 - H^2 + K^2 \\ F_{12} &= A_2(h^2 + k^2 + h_j^2 + k_j^2) + A_3(kk_j + hh_j) + A_7(kk_j - hh_j) \end{aligned} \right. \quad , \quad (2.65)$$

com  $F_{12}$  sem a transformação (2.64). As parcelas (2.65) podem ser escritas em termos das variáveis  $(\Theta, \gamma, \theta, \varpi)$ , considerando-se as transformações (2.54) e (2.64). Para  $F_{11}$ , desenvolvendo  $(K^2 - H^2)$  temos:

$$K^2 - H^2 = A_4 e_R'^2 \cos(\theta + 2\varpi) + A_6 e_J^2 \cos(\theta + 2\varpi_J) - 2\sqrt{A_4 A_6} e_R' e_J \cos(\theta + \varpi + \varpi_J) \quad (2.66)$$

Substituindo-se (2.66) em  $F_{11}$  de (2.65) e procedendo analogamente para  $F_{12}$ , tem-se:

$$\left[ \begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 + A_4 e_R'^2 \cos(\theta + 2\varpi) + A_6 e_J^2 \cos(\theta + 2\varpi_J) - 2\sqrt{A_4 A_6} e_R' e_J \cos(\theta + \varpi + \varpi_J) \\ F_{12} &= A_2 (e_R'^2 + e_J^2) + A_3 e_R' e_J \cos(\varpi - \varpi_J) + A_7 e_R' e_J \cos(\theta + \varpi + \varpi_J) \end{aligned} \right. \quad (2.67)$$

A parcela  $F_{12}$  contém os termos secular  $A_2 (e_R'^2 + e_J^2)$ , de longo período  $A_3 e_R' e_J \cos(\varpi - \varpi_J)$  e parte de um dos argumentos críticos  $A_7 e_R' e_J \cos(\theta + \varpi + \varpi_J)$ , e é integrável diretamente por quadraturas. Esta parcela não será utilizada neste trabalho.

Por outro lado, a parcela  $F_{11}$  contém qualitativamente todos os argumentos críticos de  $F_1$ , o que permite a redução do espaço de fase ao plano  $(H, K)$ . No capítulo III mostraremos sua aplicabilidade.

# CAPÍTULO III – CLASSIFICAÇÃO DO ESPAÇO DE FASE DO MODELO INTEGRÁVEL DE SESSIN

## III.1 Introdução

Neste capítulo será feita a redução da parcela integrável  $F_{11}$  (2.65) a um grau de liberdade, com a finalidade de permitir sua integração. Esta parcela, que reproduz características do sistema ressonante por conter qualitativamente todos os argumentos críticos, é mais rica em informação sobre o sistema do que  $F_{12}$  (2.65) e, portanto, será a escolhida para representá-lo.

## III.2 Integrais primeiras de $F_{11}$

Com auxílio da transformação (2.64), cujas variáveis contêm a excentricidade de Júpiter, Sessin (1981) conseguiu reduzir e classificar o espaço de fase para a ressonância 2:1. Continuaremos aqui a seguir o trabalho de Guillens (1998).

Multiplicando-se na (2.64)  $K$  e  $H$  por  $\sqrt{A_4}$  e  $K_j$  e  $H_j$  por  $\sqrt{A_6}$ , tem-se, após manipulações algébricas, as inversas de (2.64):

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{A_4}}{(A_4 + A_6)} K + \frac{\sqrt{A_6}}{(A_4 + A_6)} K_j & k_j &= -\frac{\sqrt{A_6}}{(A_4 + A_6)} K + \frac{\sqrt{A_4}}{(A_4 + A_6)} K_j \\ h &= \frac{\sqrt{A_4}}{(A_4 + A_6)} H + \frac{\sqrt{A_6}}{(A_4 + A_6)} H_j & h_j &= -\frac{\sqrt{A_6}}{(A_4 + A_6)} H + \frac{\sqrt{A_4}}{(A_4 + A_6)} H_j \end{aligned} \quad (3.1)$$

Aplicando-se as relações (3.1) nas equações de movimento (2.56) associadas a  $F_{11}$ , obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{d\Lambda} = -2HK \\ \frac{dH}{d\Lambda} = -\frac{1}{2} A_1 \Theta K + 2A_4 K \\ \frac{dH_j}{d\Lambda} = -\frac{1}{2} A_1 \Theta K_j \\ \frac{dK}{d\Lambda} = \frac{1}{2} A_1 \Theta H + 2A_4 H \\ \frac{dK_j}{d\Lambda} = \frac{1}{2} A_1 \Theta H_j \end{cases} \quad (3.2)$$

Lembrando ainda da terceira expressão do sistema (2.50), da definição da variável  $\Theta$  em (2.52) e do reescalonamento de tempo feito em (2.55), tem-se, a menos de um fator  $L_R$ :

$$\frac{d\theta}{dt} = -A_1 \left( \frac{\varphi_j}{L_R} \right) = -A_1 \Theta \Rightarrow \frac{d\theta}{d\Lambda} = -A_1 \Theta \quad (3.3)$$

Com auxílio de (3.3), as equações de  $dH_j/d\Lambda$  e  $dK_j/d\Lambda$  em (3.2) podem ser agrupadas como:

$$\begin{aligned} \frac{dH_j}{d\Lambda} &= \frac{dH_j}{d\theta} \frac{d\theta}{d\Lambda} = \frac{dH_j}{d\theta} (-A_1 \Theta) = -\frac{1}{2} A_1 \Theta K_j \Rightarrow \frac{dH_j}{d\theta} = \frac{1}{2} K_j \\ \frac{d^2 H_j}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{2} K_j \right) = \frac{1}{2} \frac{dK_j}{d\Lambda} \frac{d\Lambda}{d\theta} = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} A_1 \Theta H_j \right) \cdot \left( -\frac{1}{A_1 \Theta} \right) = -\frac{1}{4} H_j \\ \frac{d^2 H_j}{d\theta^2} + \frac{1}{4} H_j &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

cuja solução para  $H_j$  e, em analogia, para  $K_j$ , é:

$$\begin{aligned} H_j &= \rho \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi_o\right) \\ K_j &= \rho \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varphi_o\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

com as seguintes constantes de integração:

$$\begin{aligned} \rho &= [H_{j0}^2 + K_{j0}^2]^{1/2} \\ \varphi_o &= -\frac{1}{2} \theta_o + \text{tg}^{-1} \left( \frac{H_{j0}}{K_{j0}} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sejam, agora, as identidades:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\Lambda} (H^2 \mp K^2) = H\dot{H} \mp K\dot{K} \quad (3.7)$$

Usando a primeira e substituindo-se  $\dot{H}$  e  $\dot{K}$  de (3.2), vem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\Lambda} (H^2 - K^2) &= H \left[ \frac{dH}{d\Lambda} \right] - K \left[ \frac{dK}{d\Lambda} \right] = H \left[ -\frac{1}{2} A_1 \Theta K + 2A_4 K \right] - K \left[ \frac{1}{2} A_1 \Theta H + 2A_4 H \right] = \\ &= -A_1 \Theta HK = \frac{1}{2} A_1 \Theta \frac{d\Theta}{d\Lambda} = \frac{1}{4} A_1 \frac{d\Theta^2}{d\Lambda} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\Lambda} \left[ \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\Lambda} (H^2 - K^2) - \frac{1}{2} \frac{d}{d\Lambda} \left[ \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 \right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{d\Lambda} \left\{ (H^2 - K^2) - \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 \right\} = 0 \quad (3.8)$$

Portanto, a integral da energia, associada à  $F_{11}$  será:

$$E_1 = \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 + K^2 - H^2 \quad (3.9)$$

Retornando à (3.7), agora com a segunda identidade:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\Lambda} (H^2 + K^2) &= H \left[ \frac{dH}{d\Lambda} \right] + K \left[ \frac{dK}{d\Lambda} \right] = H \left[ -\frac{1}{2} A_1 \Theta K + 2A_4 K \right] + K \left[ \frac{1}{2} A_1 \Theta H + 2A_4 H \right] = \\ &= 4A_4 HK = -2A_4 \frac{d\Theta}{d\Lambda} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\Lambda} (H^2 + K^2) + 2A_4 \frac{d\Theta}{d\Lambda} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{d\Lambda} \{ (H^2 + K^2) + 4A_4 \Theta \} = 0 \quad , \quad (3.10)$$

temos uma nova integral  $G$  para o sistema:

$$(H^2 + K^2) + 4A_4 \Theta = G \Rightarrow H^2 + K^2 = -4A_4 (\Theta + G) \quad (3.11)$$

Rearranjando a (3.9) e adicionando à (3.11), pode-se determinar  $K$  e  $H$  em função das duas integrais primeiras  $E_1$  e  $G$ , isto é:

$$\begin{cases} K^2 - H^2 = E_1 - \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 \\ K^2 + H^2 = -4A_4 (\Theta + G) \end{cases}$$

$$2K^2 = E_1 - \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 - 4A_4 (\Theta + G) \Rightarrow K = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 - E_1 + 4A_4 (\Theta + G) \right]}$$

$$2H^2 = -E_1 + \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 - 4A_4 (\Theta + G) \Rightarrow H = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 - E_1 - 4A_4 (\Theta + G) \right]} \quad (3.12)$$

Considerando  $K = \sqrt{-P_1(\Theta)/2}$  e  $H = \sqrt{+P_2(\Theta)/2}$ , tem-se:

$$P_1(\Theta) = \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 + 4A_4 \Theta + (4A_4 G - E_1) \quad (3.13)$$

$$P_2(\Theta) = \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 - 4A_4 \Theta - (4A_4 G + E_1) \quad (3.13a)$$

A possibilidade de movimento se dá conforme as variáveis  $(K, H)$  sejam reais, ou seja,  $-P_1(\Theta) \geq 0$  e  $P_2(\Theta) \geq 0$  simultaneamente.

Retornando às (3.12), o produto  $HK$  será:

$$\begin{aligned}
 HK &= \sqrt{-\frac{1}{2}\left[E_1 - \frac{1}{2}A_1\Theta^2 + 4A_4(\Theta + G)\right]} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left[E_1 - \frac{1}{2}A_1\Theta^2 - 4A_4(\Theta + G)\right]} \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{-\left[\left(\frac{1}{4}A_1^2\right)\Theta^4 - (A_1E_1 + 16A_4^2)\Theta^2 - (32A_4^2G)\Theta + (E_1^2 - 16A_4^2G^2)\right]}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Reparando que (3.11) implica em  $HK = \frac{1}{2}\sqrt{-P(\Theta)}$ , a primeira das (3.2) pode ser escrita na forma:

$$\frac{d\Theta}{d\Lambda} = -2 \cdot \left[\frac{1}{2}\sqrt{-P(\Theta)}\right] = \sqrt{-P(\Theta)} \quad , \tag{3.15}$$

onde:

$$P(\Theta) = \left(\frac{1}{4}A_1^2\right)\Theta^4 - (A_1E_1 + 16A_4^2)\Theta^2 - (32A_4^2G)\Theta + (E_1^2 - 16A_4^2G^2) \tag{3.16}$$

### III.3 Famílias de pontos de equilíbrio do sistema Hamiltoniano reduzido

Supondo  $\bar{u} = (\Theta, K, H)$ , podem-se expressar os pontos de equilíbrio, referentes à condição  $d\bar{u}/dt = 0$ , em termos de  $E_1$  e  $G$ .

Inicialmente consideremos a condição de equilíbrio  $d\Theta/d\Lambda = 0$  na primeira das equações (3.2), ou seja:

$$\frac{d\Theta}{d\Lambda} = -2HK = 0 \Rightarrow \Theta = cte \tag{3.17}$$

A partir disto há três possibilidades que resultam em produto nulo, satisfazendo  $d\bar{u}/dt = 0$ :

1.  $H = 0$  e  $K = 0$

Usando (3.9) e (3.11) no sentido de escrever  $G$  em função de  $E_1$ , tem-se:

$$\left. \begin{aligned}
 E_1 = \frac{1}{2}A_1\Theta^2 + K^2 - H^2 = \frac{1}{2}A_1\Theta^2 &\Rightarrow \Theta^2 = \frac{2}{A_1}E_1 \\
 K^2 + H^2 = -4A_4(\Theta + G) = 0 &\Rightarrow \Theta = -G
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow G^2 = \frac{2}{A_1}E_1 \tag{3.18}$$

A condição (3.18) dá famílias de pontos de equilíbrio associados à  $\Theta$ , em termos das integrais primeiras, para órbitas periódicas ( $\Theta \neq 0$ ), ou ponto de equilíbrio ( $\Theta = 0$ ).

2.  $H = 0$  e  $K \neq 0$

Olhando para as equações de movimento em  $\Theta$ ,  $H$  e  $K$  (3.2), com a condição  $d\bar{u}/dt = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{d\Lambda} = -2HK \\ \frac{dH}{d\Lambda} = -\frac{1}{2}A_1\Theta K + 2A_4K \Rightarrow H = \left(-\frac{1}{2}A_1\Theta K + 2A_4K\right)t + cte = 0 \rightarrow \Theta = 4\frac{A_4}{A_1} \\ \frac{dK}{d\Lambda} = \frac{1}{2}A_1\Theta H + 2A_4H \Rightarrow K = cte \end{cases} \quad (3.19)$$

Usando novamente as (3.9) e (3.11):

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{2}A_1\Theta^2 + K^2 - H^2 = \frac{1}{2}A_1\Theta^2 + K^2 \Rightarrow K^2 = E_1 - \frac{1}{2}A_1\Theta^2 = E_1 - \frac{1}{2}A_1\left[4\frac{A_4}{A_1}\right]^2 = E_1 - 8\frac{A_4^2}{A_1} \\ K^2 + H^2 = K^2 = -4A_4(\Theta + G) = 0 \Rightarrow \Theta = -G - \frac{K^2}{4A_4} = \left[4\frac{A_4}{A_1}\right] \rightarrow K^2 = 4A_4\left[-G - 4\frac{A_4}{A_1}\right] \\ K^2 = E_1 - 8\frac{A_4^2}{A_1} = 4A_4\left[-G - 4\frac{A_4}{A_1}\right] \Rightarrow E_1 - 8\frac{A_4^2}{A_1} = -4A_4G - 16\frac{A_4^2}{A_1} \Rightarrow G = -\frac{E_1}{4A_4} - 2\frac{A_4}{A_1} \end{cases} \quad (3.20)$$

3.  $H \neq 0$  e  $K = 0$

Olhando-se novamente para as equações de movimento em  $\Theta$ ,  $H$  e  $K$ , (3.2), com a condição  $d\bar{u}/dt = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{d\Lambda} = -2HK \\ \frac{dH}{d\Lambda} = -\frac{1}{2}A_1\Theta K + 2A_4K \Rightarrow H = cte \\ \frac{dK}{d\Lambda} = \frac{1}{2}A_1\Theta H + 2A_4H \Rightarrow K = \left(\frac{1}{2}A_1\Theta H + 2A_4H\right)t + cte = 0 \rightarrow \Theta = -4\frac{A_4}{A_1} \end{cases} \quad (3.21)$$

Mais uma vez, com as (3.9) e (3.11):

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{2}A_1\Theta^2 + K^2 - H^2 = \frac{1}{2}A_1\Theta^2 - H^2 \Rightarrow H^2 = -E_1 + \frac{1}{2}A_1\Theta^2 = -E_1 + \frac{1}{2}A_1\left[-4\frac{A_4}{A_1}\right]^2 = -E_1 + 8\frac{A_4^2}{A_1} \\ K^2 + H^2 = H^2 = -4A_4(\Theta + G) = 0 \Rightarrow \Theta = -G - \frac{H^2}{4A_4} = \left[-4\frac{A_4}{A_1}\right] \rightarrow H^2 = 4A_4\left[-G + 4\frac{A_4}{A_1}\right] \\ H^2 = -E_1 + 8\frac{A_4^2}{A_1} = 4A_4\left[-G + 4\frac{A_4}{A_1}\right] \Rightarrow -E_1 + 8\frac{A_4^2}{A_1} = -4A_4G + 16\frac{A_4^2}{A_1} \Rightarrow G = \frac{E_1}{4A_4} + 2\frac{A_4}{A_1} \end{cases} \quad (3.22)$$



As três famílias de pontos de equilíbrio obtidas acima podem ser normalizadas da seguinte forma:

$$1. \quad G^2 = \frac{2}{A_1} E_1 \quad \Rightarrow \quad G = \pm \sqrt{\frac{2}{A_1} E_1} \quad \Rightarrow \quad \bar{G} = \pm \sqrt{\bar{E}_1} \quad , \quad (3.23)$$

$$2. \quad G = -\frac{E_1}{4A_4} - 2\frac{A_4}{A_1} \quad \Rightarrow \quad \bar{G} = -\frac{\bar{E}_1}{2} - 1 \quad \text{e.} \quad (3.24)$$

$$3. \quad G = +\frac{E_1}{4A_4} + 2\frac{A_4}{A_1} \quad \Rightarrow \quad \bar{G} = +\frac{\bar{E}_1}{2} + 1 \quad , \quad (3.25)$$

onde, os valores normalizados  $\bar{E}_1$  e  $\bar{G}$  relacionam-se, respectivamente, a  $E_1$  e  $G$  por:

$$\bar{E}_1 = \frac{2}{A_1} E_1 = \frac{A_1}{4A_4^2} E_1 \quad \text{e} \quad \bar{G} = \frac{A_1}{2A_4} G.$$

A normalização também pode ser aplicada aos polinômios (3.13) e (3.13a), ou seja:

$$\bar{P}_1(\bar{\Theta}) = 0,5\bar{\Theta}^2 + 4\bar{\Theta} + (8\bar{G} - 4\bar{E}_1) \quad (3.26)$$

$$P_2(\bar{\Theta}) = 0,5\bar{\Theta}^2 - 4\bar{\Theta} - (8\bar{G} + 4\bar{E}_1) \quad , \quad (3.26a)$$

onde,

$$\bar{\Theta} = \frac{A_1}{A_4} \Theta \quad (3.27)$$

$$P_1(\Theta) = \frac{A_4^2}{A_1} \bar{P}_1(\bar{\Theta}) \quad (3.28)$$

$$P_2(\Theta) = \frac{A_4^2}{A_1} \bar{P}_2(\bar{\Theta}) \quad (3.28a)$$

#### III.4 Classificação do espaço de fase

O diagrama que permite a divisão do plano de integrais primeiras  $(\bar{E}_1, \bar{G})$  é obtido através das expressões (3.23) até (3.25). Este diagrama  $(\bar{E}_1, \bar{G})$  é apresentado na Figura 3.1.

As expressões  $K = \sqrt{-\bar{P}_1(\bar{\Theta})/2}$  e  $H = \sqrt{+\bar{P}_2(\bar{\Theta})/2}$  nos permitem entender qual o tipo de movimento que ocorre em cada região.

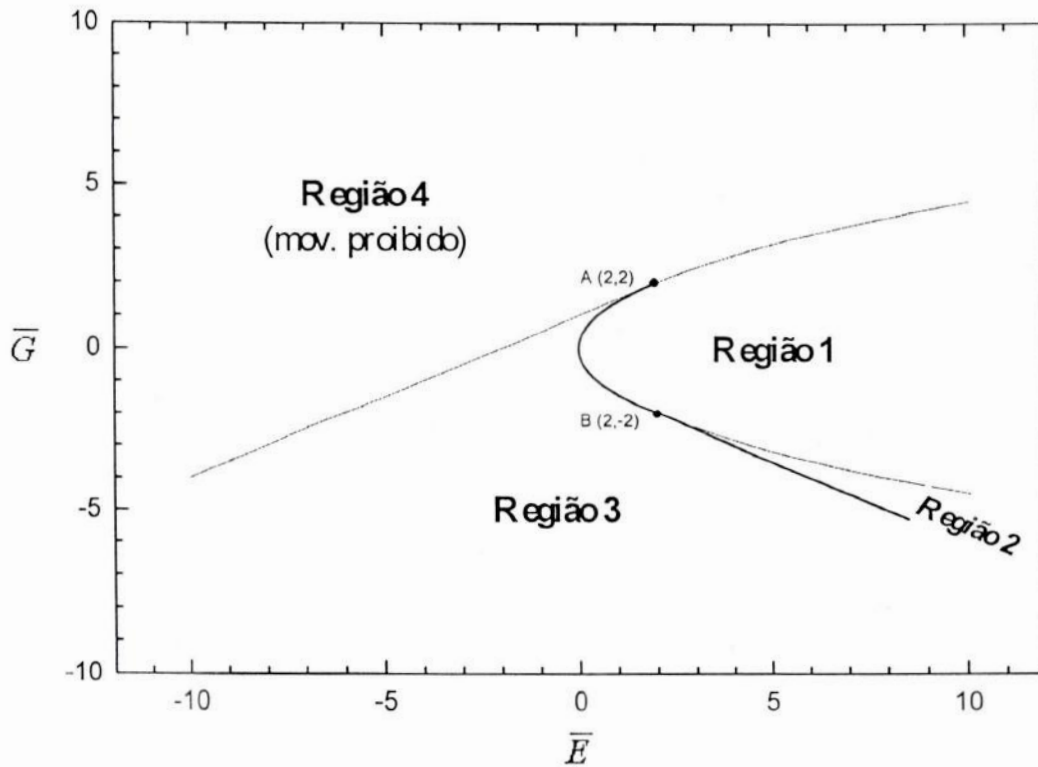


Figura 3.1. Possibilidades de movimento no plano  $(\bar{E}_1, \bar{G})$  pelo método de Sessin.

Na Figura 3.1, a separatriz aparece com contorno reforçado, e os pontos de interseção entre as retas e os ramos superior e inferior da parábola são, respectivamente,  $A(2,2)$  e  $B(2,-2)$ . As regiões 1, 2, 3 e 4 seguem a seguinte classificação:

- A região 1 sempre corresponde à circulação em torno da origem;
- A região 2 apresenta sempre duas possibilidades de movimento: circulação externa *ou* interna;
- A região 3 corresponde à librações em torno de 2 centros;
- A região 4 corresponde ao movimento proibido.

A fim de justificar a classificação acima, retornemos às definições das variáveis  $K = \sqrt{-\bar{P}_1(\bar{\Theta})/2}$  e  $H = \sqrt{+\bar{P}_2(\bar{\Theta})/2}$ , com  $\bar{P}_1(\bar{\Theta})$  e  $\bar{P}_2(\bar{\Theta})$  dados por (3.26) e (3.26a). Podem-se escolher arbitrariamente valores para o par de integrais primeiras  $(\bar{E}_1, \bar{G})$  na Figura 3.1, gerando-se gráficos de  $K(\bar{E}_1, \bar{G})$  contra  $H(\bar{E}_1, \bar{G})$  para as três regiões de movimento possível, isto é:

**Região 1:** Apresenta sempre o movimento de circulação em torno da origem. Os gráficos a seguir, elaborados para  $\bar{G} = 0$ , mostram as circulações referentes aos níveis de energia  $\bar{E}_1 = 3$  e  $\bar{E}_1 = 1$  - a circulação mais externa correspondendo à maior energia. O valor  $\bar{E}_1 = 0$  corresponde à zona limítrofe entre a região 1 e a região 3,

para  $\bar{G} = 0$ . Finalmente,  $\bar{E}_1 = -1$  já diz respeito à região 3, mostrado aqui como ilustração.

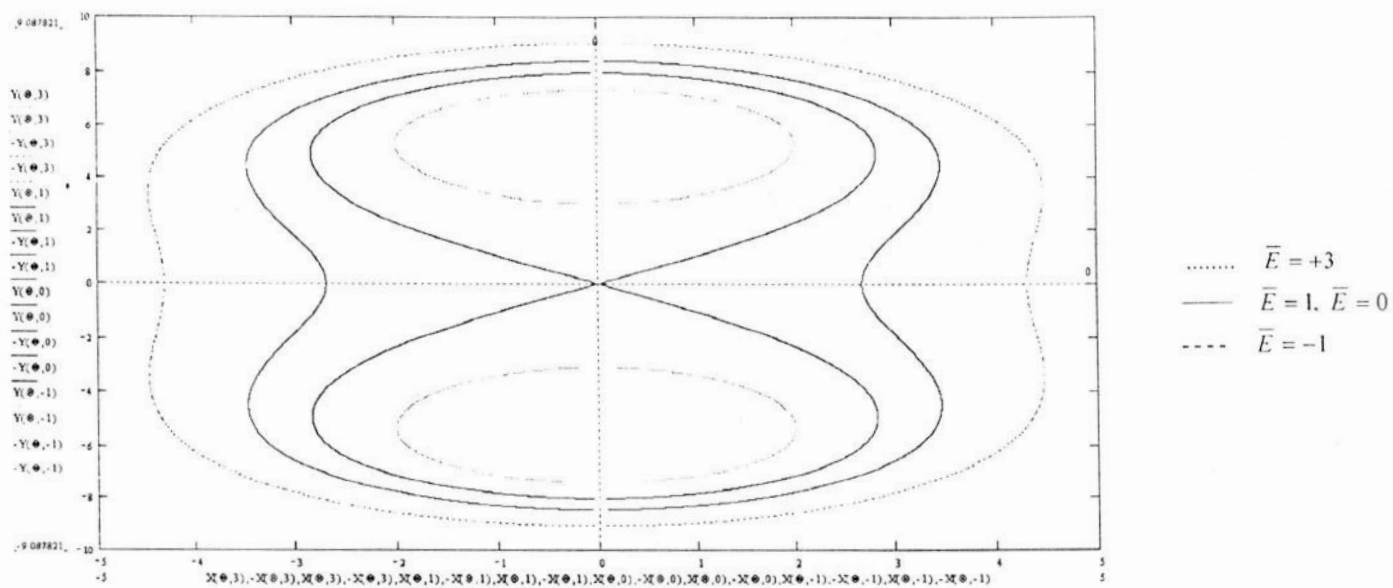


Figura 3.2. Gráfico de  $K(\bar{E}_1, \bar{G})$  contra  $H(\bar{E}_1, \bar{G})$  para a região 1 de movimento com  $\bar{G} = 0$ .

**Região 2:** Apresenta sempre duas possibilidades de movimento: circulação externa ou interna. Os gráficos a seguir, elaborados para  $\bar{G} = -5$ , mostram os pares de circulações referentes aos níveis de energia  $\bar{E}_1 = 12$  e  $\bar{E}_1 = 9$  - cada circulação mais externa correspondendo à mais interna. O valor  $\bar{E}_1 = 8$  corresponde à zona limítrofe entre a região 1 e a região 3, para  $\bar{G} = -5$ .

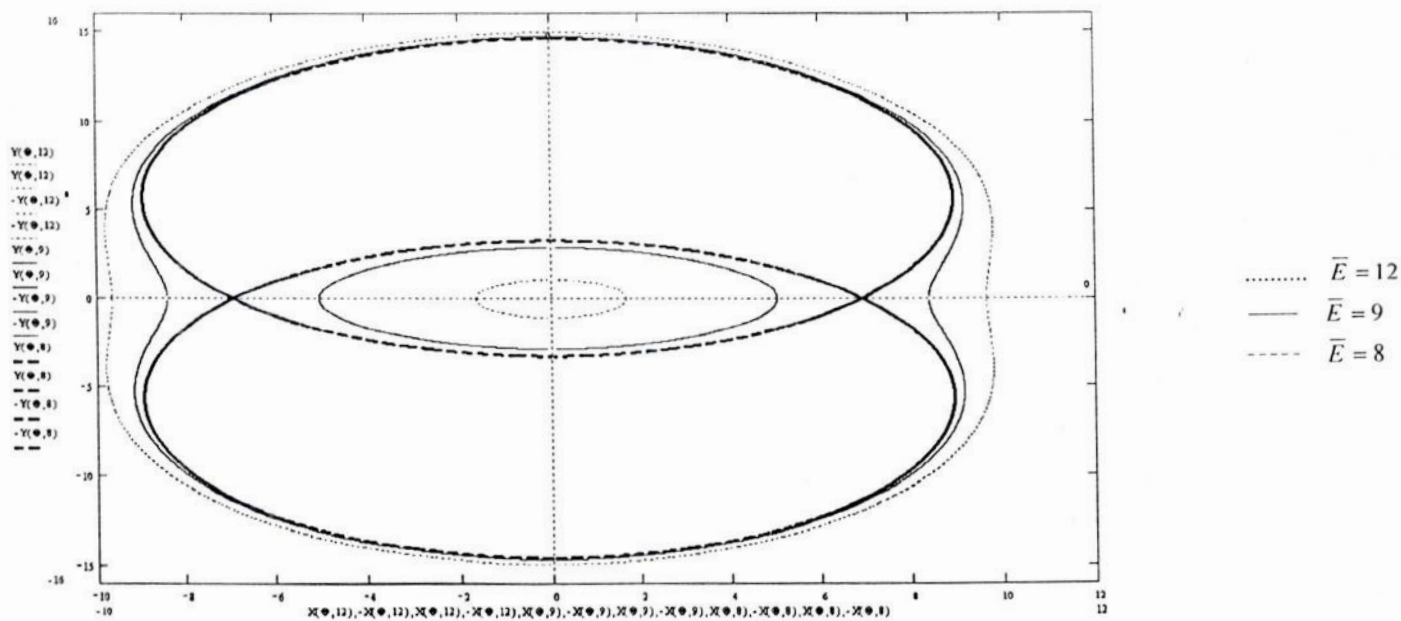


Figura 3.3. Gráfico de  $K(\bar{E}_1, \bar{G})$  contra  $H(\bar{E}_1, \bar{G})$  para a região 2 de movimento com  $\bar{G} = -5$ .

**Região 3:** Corresponde à librações em torno de 2 centros fixos. Os gráficos a seguir, elaborados para  $\bar{G} = -5$ , mostram as librações referentes aos níveis de energia  $\bar{E}_1 = -10$  e  $\bar{E}_1 = -5$  - as mais externas referentes à maior energia. O valor  $\bar{E}_1 = 8$  corresponde ao ponto de separação entre a regiões 3 e 2, para o valor  $\bar{G} = -5$ .

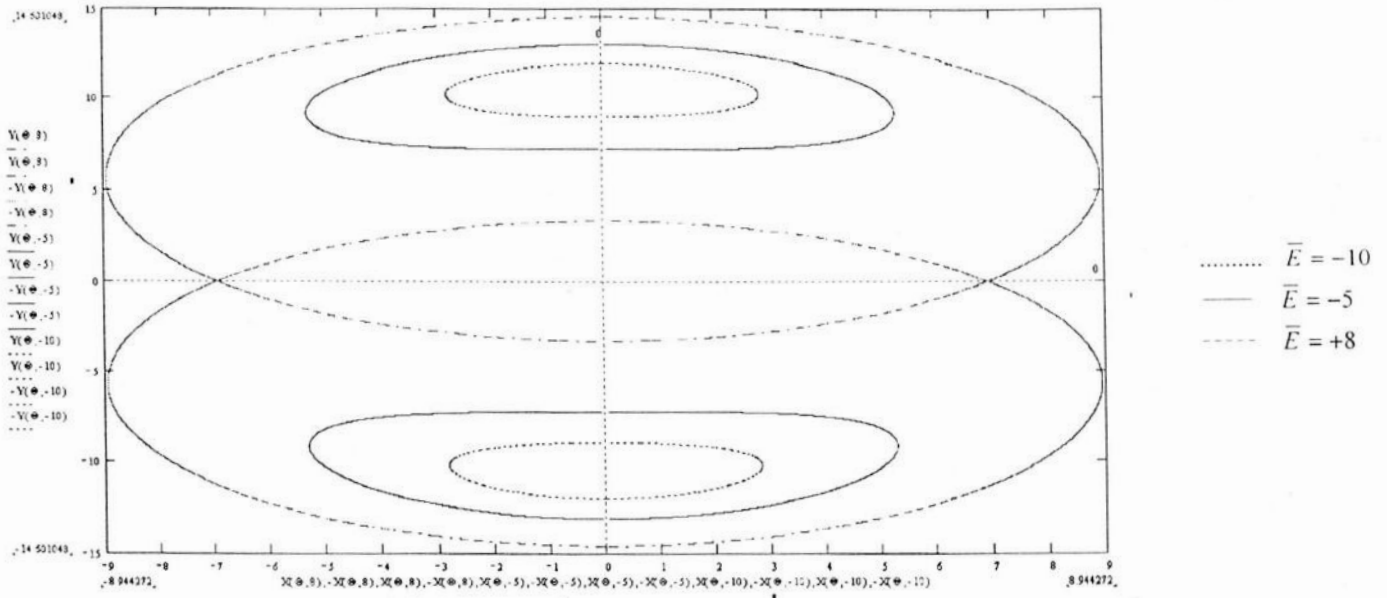


Figura 3.4. Gráfico de  $K(\bar{E}_1, \bar{G})$  contra  $H(\bar{E}_1, \bar{G})$  para a região 3 de movimento com  $\bar{G} = -5$ .

**Região 4:** Corresponde à região de movimento proibido, não havendo, portanto representação gráfica.

No capítulo seguinte, faremos um tratamento para a representação Hamiltoniana de Henrard-Caranicolas (1990), que difere do adotado neste capítulo por um termo de longo período. Cabe salientar que o feito de Sessin sempre foi criticado pela omissão deste termo, cujo efeito pretendemos estudar.

# CAPÍTULO IV – A HAMILTONIANA MÉDIA DE HENRARD-CARANICOLAS PARA A RESSONÂNCIA 3:1

## IV.1 Introdução

Seguindo Henrard-Caranicolas (1990), descrevemos o modelo médio para a ressonância 3:1 destes autores. Em seguida, apresentamos uma analogia entre este e o modelo fundamental ressonante de segunda ordem.

## IV.2 Obtenção da Hamiltoniana média de Henrard-Caranicolas

Considere-se o problema elíptico de três corpos no plano. A Hamiltoniana deste problema pode ser escrita em coordenadas modificadas de Delaunay  $(\lambda, L, p, P)$  como:

$$H = -\frac{1-\mu}{2a} - \mu \cdot \left\{ \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r'^3} \right\} \quad (4.1)$$

Na expressão anterior,  $\mu$  e  $1-\mu$  são, respectivamente, as massas reduzidas de Júpiter e do Sol (no sistema de coordenadas em que a soma das massas é normalizada a 1),  $a$  é o semi-eixo maior do asteróide, e  $\bar{r}$  e  $\bar{r}'$  são os vetores posição heliocêntricos do asteróide e de Júpiter. A distância Júpiter-asteróide é dada por  $\Delta = |\bar{r} - \bar{r}'|$ . Note-se que a expressão (4.1) é análoga à (2.16), sendo, porém, esta última escrita no sistema Gaussiano de unidades, onde  $\mu = k^2(M+m) \approx k^2M$  é a massa reduzida do binário Sol-asteróide.

Por outro lado, os pares canônicos de Delaunay  $(\lambda, L)$  e  $(p, P)$  são:

$$\begin{aligned} \lambda &= \text{longitude média do asteróide} & L &= \sqrt{(1-\mu)a} \\ p &= -(\text{longitude do seu pericentro}) & P &= L(1 - \sqrt{1-e^2}) \end{aligned}, \quad (4.2)$$

com  $n'$  e  $n$ , sendo, respectivamente, os movimentos médios de Júpiter e do asteróide relacionados entre si pela condição de ressonância 3:1, isto é:

$$3n' - n \approx 0 \quad (4.3)$$

A terceira lei de Kepler (2.11) pode ser aplicada para Júpiter ( $n'^2 a'^3 = 1$ ) e para o asteróide ( $n^2 a^3 = 1 - \mu$ ). Dividindo-se a segunda pela primeira, obtém-se:

$$\frac{n^2 a^3}{n'^2 a'^3} = 1 - \mu \Rightarrow \left( \frac{2\pi/T}{2\pi/T'} \right)^2 \cdot \left( \frac{a}{a'} \right)^3 = 1 - \mu \Rightarrow \left( \frac{T'}{T} \right)^2 \cdot \left( \frac{a}{a'} \right)^3 = 1 - \mu \quad (4.4)$$

Aplicando-se a condição de ressonância 3:1 exata (4.3), isto é ( $T' = 3T$ ), em (4.4) e considerando ainda o sistema de unidades em que o semi-eixo de Júpiter é unitário ( $a' = 1$ ), o valor do semi-eixo maior do asteróide na ressonância exata,  $a_R$ , será:

$$a_R = \left( \frac{1-\mu}{9} \right)^{1/3} = 0,4805969 \approx 2,50 \text{ UA} \quad (4.5)$$

Considerando-se agora as longitudes médias e as longitudes do periélio de Júpiter e do asteróide ( $\lambda'$  e  $\lambda$ ) e ( $\varpi'$  e  $\varpi$ ), definem-se as variáveis ressonantes de Poincaré como:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{3\lambda' - \lambda + 2\varpi}{2} & S &= P \\ \nu &= -\frac{3\lambda' - \lambda + 2\varpi'}{2} & N &= 2L + P - 2\sqrt{(1-\mu)a_R} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Quando a Hamiltoniana (4.1) é escrita nestas novas variáveis e expandida em termos de potências das excentricidades de Júpiter e do asteróide ( $e', e$ ) e da diferença ( $a - a_R$ ), vem:

$$\begin{aligned} H &= C(N - S)^2 + A'S + 2D'S \cos 2\sigma + 2F'e'^2 \cos 2\nu + \\ &+ e'\sqrt{2S}[E' \cos(\sigma - \nu) + G' \cos(\sigma + \nu)] + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde, os valores numéricos dos coeficientes ( $C, A', D', F', E', G'$ ) são dados no trabalho de Henrard-Caranicolas (1990):

$$\begin{aligned} C &= -1,623564 & A' &= -0,410139\mu \\ D' &= -0,863158\mu & F' &= -0,181477\mu \\ E' &= 2,65407\mu & G' &= 0,198705\mu \end{aligned} \quad (4.8)$$

Considerem-se, agora,  $b = -E'/2D'$  como em Henrard e Lemaître (1986), e a transformação canônica utilizada por Henrard-Caranicolas (1990), com os pares de momentos conjugados ( $x, y$ ) e ( $M, \nu$ ):

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2R} \cos r = \sqrt{2S} \cos \sigma - be' \cos \nu \\ y &= \sqrt{2R} \sin r = \sqrt{2S} \sin \sigma + be' \sin \nu \\ \nu &= \nu \\ M &= N - \frac{A'}{2C} - be' \sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) + \frac{1}{2} b^2 e'^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Esta transformação redutora foi proposta pelos referidos autores com o intuito de apresentar  $H = H(S, N, \sigma, \nu)$ , seguindo o procedimento proposto por Sessin (1981) e Sessin e Ferraz-Mello (1984). A definição das variáveis  $x$  e  $y$  seguia a idéia de Poincaré para tratamento ressonante por meio de uma rotação no espaço de fase, com  $r$  e  $R$  sendo variáveis canonicamente conjugadas. Nesta transformação, também utilizada por Wisdom (1986),  $\sqrt{2R}$

em lugar de  $\sqrt{2S} \approx e$  (Schubart, 1966), representa a excentricidade livre, e  $be'$ , a excentricidade forçada.

A transformação (4.9) será a seguir aplicada à Hamiltoniana (4.7). Para isto, consideremos, inicialmente, que a partir desta pode-se escrever:

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{2R} \cos r)^2 + (\sqrt{2R} \sin r)^2 = 2R(\sin^2 r + \cos^2 r) = 2R \quad (4.10)$$

Logo,

$$\begin{aligned} R &= \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{2} \left[ (\sqrt{2S} \cos \sigma - be' \cos \nu)^2 + (\sqrt{2S} \sin \sigma + be' \sin \nu)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2S \cos^2 \sigma + b^2 e'^2 \cos^2 \nu - 2be' \sqrt{2S} \cos \sigma \cos \nu + (2S \sin^2 \sigma + b^2 e'^2 \sin^2 \nu + 2be' \sqrt{2S} \sin \sigma \sin \nu) \right] , \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2S (\cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma) + b^2 e'^2 (\cos^2 \nu + \sin^2 \nu) + 2be' \sqrt{2S} (\sin \sigma \sin \nu - \cos \sigma \cos \nu) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2S + b^2 e'^2 - 2be' \sqrt{2S} (\cos(\sigma + \nu)) \right] \end{aligned}$$

ou,

$$R = S + \frac{1}{2} b^2 e'^2 - be' \sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) \quad , \quad (4.11)$$

onde  $S$  pode ser associada com excentricidade livre e  $R$  com excentricidade forçada, devida à presença de Júpiter.

Por outro lado, com auxílio da expressão de  $R$  em (4.11) e da transformação de  $M$  em (4.9), tem-se:

$$\begin{aligned} M &= N - \frac{A'}{2C} - be' \sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) + \frac{1}{2} b^2 e'^2 \\ \Rightarrow M - R &= \left( N - \frac{A'}{2C} - be' \sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) + \frac{1}{2} b^2 e'^2 \right) - \left( S + \frac{1}{2} b^2 e'^2 - be' \sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) \right) \\ M - R &= (N - S) - \frac{A'}{2C} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Isto é:

$$(N - S) = (M - R) + \frac{A'}{2C} \quad (4.13)$$

Com a expressão (4.13), os dois primeiros termos de  $H_o$  (4.7) escrevem-se como:

$$\begin{aligned} E_{2C}^* &= C(N - S)^2 + A'S = \\ &= C \left[ (M - R) + \frac{A'}{2C} \right]^2 + A'S = \\ &= C(M - R)^2 + A'M + \left[ A'(S - R) + \frac{A'^2}{4C} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Mas de (4.13):

$$(S - R) = N - M - \frac{A'}{2C}, \quad (4.15)$$

que, substituída em (4.14), resulta em:

$$\begin{aligned} E_{2C}^* &= C(M - R)^2 + A'M + \left[ A \left( N - M - \frac{A'}{2C} \right) + \frac{A'^2}{4C} \right] = \\ &= C(M - R)^2 + A'M + A'N - A'M - \frac{A'^2}{2C} + \frac{A'^2}{4C} = \\ &= C(M - R)^2 + A'N - \frac{A'^2}{4C} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Por outro lado, da última relação das transformações (4.9), tem-se:

$$N = M + \frac{A'}{2C} + be'\sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) - \frac{1}{2}b^2e'^2 \quad (4.17)$$

Esta expressão substituída em (4.14) resulta:

$$\begin{aligned} E_{2C}^* &= C(M - R)^2 + A' \left[ M + \frac{A'}{2C} + be'\sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) - \frac{1}{2}b^2e'^2 \right] - \frac{A'^2}{4C} = \\ &= C(M - R)^2 + A'M + \left[ A'be'\sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) - \frac{1}{2}A'b^2e'^2 + \frac{A'^2}{4C} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Vejamos agora os primeiros dois primeiros termos da função perturbadora planetária na expressão da Hamiltoniana (4.7), isto é,  $2D'S\cos 2\sigma + 2F'e'^2\cos 2\nu$ . Para desenvolvê-los precisamos de expressões para  $\cos 2\sigma$  e  $\cos 2\nu$ .

Voltando à transformação canônica (4.9) e, multiplicando-se  $x$  por  $\cos \sigma$  e  $y$  por  $\sin \sigma$ , tem-se:

$$\begin{aligned} x \cdot \cos \sigma &= \sqrt{2R} \cos r \cos \sigma = \sqrt{2S} \cos^2 \sigma - be' \cos \nu \cos \sigma \\ y \cdot \sin \sigma &= \sqrt{2R} \sin r \sin \sigma = \sqrt{2S} \sin^2 \sigma + be' \sin \nu \sin \sigma \end{aligned} \quad (4.19)$$

Logo,

$$\begin{aligned} x \cdot \cos \sigma - y \cdot \sin \sigma &= \sqrt{2R} (\cos r \cos \sigma - \sin r \sin \sigma) \\ &= \sqrt{2S} (\cos^2 \sigma - \sin^2 \sigma) - be' (\cos \nu \cos \sigma + \sin \nu \sin \sigma) \\ x \cdot \cos \sigma - y \cdot \sin \sigma &= \sqrt{2R} \cos(r + \sigma) = \sqrt{2S} \cos 2\sigma - be' \cos(\sigma - \nu) \end{aligned} \quad (4.20)$$

E, portanto,

$$\sqrt{2S} \cos 2\sigma = \sqrt{2R} \cos(r + \sigma) + be' \cos(\sigma - \nu) \quad (4.21)$$



Analogamente, de novo de (4.9), multiplicando-se  $x$  por  $\cos v$  e  $y$  por  $\sin v$ , tem-se:

$$\begin{aligned} x \cdot \cos v &= \sqrt{2R} \cos r \cos v = \sqrt{2S} \cos \sigma \cos v - be' \cos^2 v \\ y \cdot \sin v &= \sqrt{2R} \sin r \sin v = \sqrt{2S} \sin \sigma \sin v + be' \sin^2 v \end{aligned} \quad (4.22)$$

Logo,

$$\begin{aligned} x \cdot \cos v - y \cdot \sin v &= \sqrt{2R} (\cos r \cos v - \sin r \sin v) \\ &= \sqrt{2S} (\cos v \cos \sigma - \sin v \sin \sigma) - be' (\cos^2 v + \sin^2 v) , \\ x \cdot \cos v - y \cdot \sin v &= \sqrt{2R} \cos(r + v) = \sqrt{2S} \cos(\sigma + v) - be' \end{aligned} \quad (4.23)$$

e, ainda:

$$\begin{aligned} x \cdot \cos v + y \cdot \sin v &= \sqrt{2R} (\cos r \cos v + \sin r \sin v) \\ &= \sqrt{2S} (\cos v \cos \sigma + \sin v \sin \sigma) - be' (\cos^2 v - \sin^2 v) \\ x \cdot \cos v + y \cdot \sin v &= \sqrt{2R} \cos(r - v) = \sqrt{2S} \cos(\sigma - v) - be' \cos 2v \end{aligned} \quad (4.24)$$

Juntando-se (4.23) e (4.24), tem-se:

$$x \cdot \cos v \mp y \cdot \sin v = \sqrt{2R} \cos(r \pm v) = \sqrt{2S} \cos(\sigma \pm v) - be' \cos(v \mp v) , \quad (4.25)$$

ou,

$$\sqrt{2S} \cos(\sigma \pm v) = \sqrt{2R} \cos(r \pm v) + be' \cos(v \mp v) \quad (4.26)$$

Substituindo-se (4.24) na Hamiltoniana (4.7), e levando-se em conta  $E_{2C}^*$  de (4.18):

$$H = C(N - S)^2 + A'S + 2D'S \cos 2\sigma + 2F'e'^2 \cos 2v + e' \sqrt{2S} [E' \cos(\sigma - v) + G' \cos(\sigma + v)] + \dots$$

$$\begin{aligned} H = & \left\{ C(M - R)^2 + A'M + \left[ A'be' \sqrt{2S} \cos(\sigma + v) - \frac{1}{2} A'b^2 e'^2 + \frac{A'^2}{4C} \right] \right\} + \\ & + D' \sqrt{2S} [\sqrt{2R} \cos(r + \sigma) + be' \cos(\sigma - v)] + 2F'e'^2 \cos 2v + e' \sqrt{2S} [E' \cos(\sigma - v) + G' \cos(\sigma + v)] + \dots \end{aligned} \quad (4.27)$$

Simplificando, obtemos:

$$\begin{aligned} H = & C(M - R)^2 + A'M + \left[ \frac{A'^2}{4C} - \frac{1}{2} A'b^2 e'^2 \right] + \\ & + [A'b + G'] \cdot e' \sqrt{2S} \cos(\sigma + v) + [D'b + E'] \cdot e' \sqrt{2S} \cos(\sigma - v) + , \\ & + D' \sqrt{2S} \sqrt{2R} \cos(r + \sigma) + 2F'e'^2 \cos 2v + \dots \end{aligned} \quad (4.28)$$

Com o objetivo de eliminar a variável de Poincaré  $\sigma$  da expressão anterior, deve-se expandir o último termo em  $\cos(r+\sigma)$  de modo a não incluir  $\sigma$ . Para isto, retornemos à expressão (4.21) e busquemos uma expressão para  $\cos 2\sigma$ . Novamente, da transformação canônica (4.9), desenvolvamos  $x^2 - y^2$ :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2R \cdot (\cos^2 r - \sin^2 r) \equiv 2R \cos 2r \\ 2R \cos 2r &= \left( \sqrt{2S} \cos \sigma - be' \cos \nu \right)^2 - \left( \sqrt{2S} \sin \sigma + be' \sin \nu \right)^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

obtendo:

$$2R \cos 2r = 2S \cos 2\sigma - 2\sqrt{2S}be' \cos(\sigma - \nu) + b^2 e'^2 \cos 2\nu \quad , \quad (4.30)$$

ou,

$$2S \cos 2\sigma = 2R \cos 2r + 2\sqrt{2S}be' \cos(\sigma - \nu) - b^2 e'^2 \cos 2\nu \quad , \quad (4.31)$$

Rearranjando (4.21) e substituindo-se a (4.31) nela, tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{2R} \cos(r + \sigma) &= \sqrt{2S} \cos 2\sigma - be' \cos(\sigma - \nu) \\ &= (1/\sqrt{2S}) \cdot [2R \cos 2r + 2\sqrt{2S}be' \cos(\sigma - \nu) - b^2 e'^2 \cos 2\nu] - be' \cos(\sigma - \nu) \\ &= (1/\sqrt{2S}) \cdot [2R \cos 2r - b^2 e'^2 \cos 2\nu] + be' \cos(\sigma - \nu) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Usando-se  $\cos(\sigma - \nu)$  de (4.21) nesta última, obtém-se uma expressão para  $\cos(r + \sigma)$  independente de  $\sigma$ , qual seja:

$$\begin{aligned} \sqrt{2R} \cos(r + \sigma) &= (1/\sqrt{2S}) \cdot [2R \cos 2r - b^2 e'^2 \cos 2\nu] + be' \frac{[\sqrt{2R} \cos(r - \nu) + be']}{\sqrt{2S}} \cdot \cos 2\nu \\ &= (1/\sqrt{2S}) \cdot \{ [2R \cos 2r - b^2 e'^2 \cos 2\nu] + be' \sqrt{2R} \cos(r - \nu) + b^2 e'^2 \cdot \cos 2\nu \} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Finalmente, substituindo-se as expressões para  $\cos(\sigma + \nu)$  e  $\cos(\sigma - \nu)$  de (3.29) na Hamiltoniana (4.28):

$$\begin{aligned} H &= C(M - R)^2 + A'M + \left[ \frac{A'^2}{4C} - \frac{1}{2} A'b^2 e'^2 \right] + [A'b + G'] \cdot be'^2 \\ &+ [A'b + G'] \cdot e' \sqrt{2R} \cos(r + \nu) + [D'b + E'] \cdot e' \sqrt{2R} \cos(r - \nu) + \\ &+ [(D'b + E')b + 2F'] \cdot e'^2 \cos 2\nu + D' \sqrt{2S} \sqrt{2R} \cos(r + \sigma) + \dots \end{aligned} \quad (4.34)$$

Usando-se (4.33) na expressão anterior e agrupando os termos:

$$\begin{aligned}
 H = & C(M - R)^2 + A'M + \left[ \frac{A'^2}{4C} + \left( \frac{1}{2} A' + G' \right) \cdot b^2 e'^2 \right] + 2D'R \cos 2r + D'b^2 e'^2 \cdot \cos 2v + \\
 & + [A'b + G'] \cdot e' \sqrt{2R} \cos(r + v) + [D'b + E'] \cdot e' \sqrt{2R} \cos(r - v) + \\
 & + [(D'b + E')b + 2F'] \cdot e'^2 \cos 2v - D'b^2 e'^2 \cos 2v + D'be' \sqrt{2R} \cos(r - v) + \dots
 \end{aligned} \quad (4.35)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
 H = & C(M - R)^2 + A'M + \left[ \frac{A'^2}{4C} + \left( \frac{1}{2} A' + G' \right) \cdot b^2 e'^2 \right] + 2D'R \cos 2r \\
 & + [A'b + G'] \cdot e' \sqrt{2R} \cos(r + v) + [2D'b + E'] \cdot e' \sqrt{2R} \cos(r - v) + \\
 & + [(D'b + E')b + 2F'] \cdot e'^2 \cos 2v + \dots
 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 H = & C(M - R)^2 + AM + [A_1 + A_2 \cdot e'^2] + 2DR \cos 2r + 2F \cdot e'^2 \cos 2v + \\
 & + G \cdot e' \sqrt{2R} \cos(r + v) + J \cdot e' \sqrt{2R} \cos(r - v) + \dots
 \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde,

$$\begin{aligned}
 A & \equiv A' = -0,410139\mu \\
 D & \equiv D' = -0,863158\mu \\
 G & \equiv (A'b + G') = -0,432405\mu \\
 J & \equiv (2D'b + E') = -0,002336724\mu \\
 2F & \equiv ((D'b + E')b + 2F') = 1,6772524\mu \Rightarrow F = +0,838626\mu \\
 b & = -\frac{E'}{2D'} = -\frac{2,656407\mu}{2 \cdot (-0,863158\mu)} = 1,538772 \\
 A_1 & = \frac{A'^2}{4C} = -0,02590197\mu^2 \\
 A_2 & = \left( \frac{1}{2} A + G' \right) \cdot b^2 = -0,015069\mu
 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Em (4.38) podemos ver que o coeficiente  $J$  é duas ordens de grandeza e os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  uma ordem de grandeza menor que os demais. Henrard e Caranicolas (1990) desprezam-nos e consideram a Hamiltoniana (4.37) de seu modelo integrável como:

$$\begin{aligned}
 H & = H_o + H_1 + \dots \\
 \left[ \begin{aligned}
 H_o & = C(M - R)^2 + AM + 2DR \cos 2r \\
 H_1 & = Ge' \sqrt{2R} \cos(r + v) + 2Fe'^2 \cos 2v
 \end{aligned} \right. \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

Na expressão anterior,  $H_0$  possui apenas um grau de liberdade, corresponde à parte não-perturbada da Hamiltoniana original. Quando  $e' = 0$  (problema circular), tem-se  $H_1 = 0$  e  $H_0$  descreve o problema de 3 corpos restrito circular plano.

### IV.3 Modelo fundamental ressonante de segunda ordem

A expressão de  $H_0$  em (4.39) corresponde à Hamiltoniana do problema circular restrito de três corpos, a qual foi analisada por Borderies e Goldreich (1984) e por Lemaître (1984), no contexto de ressonâncias de segunda ordem. Esses autores consideram que, para ressonâncias de ordem genérica  $j+k : j$ , pode-se escrever uma Hamiltoniana com um grau de liberdade  $R$ , da seguinte forma:

$$H_k = (2k - 5)(1 + k\delta)R + kR^2 - (3 - k)^{(1+k)/2} R^{k/2} \cos kr \quad , \quad (4.40)$$

onde,  $\delta$  é um parâmetro que define a topologia no espaço de fase. Para ressonâncias de segunda ordem ( $k = 2$ ), (3.43) se escreve como:

$$H_2 = -(1 + 2\delta)R + 2R^2 - 2R \cos 2r \quad (4.41)$$

Esta expressão pode ser comparada com o  $H_0$  de Henrard-Caranicolas (4.39), notando-se, porém, que possui dois pontos críticos em  $\delta = 0$  e  $\delta = -1$ , nos quais ocorre mudança de possibilidades de movimento:

$$\begin{aligned} \delta = 0 &\Rightarrow H_2 = -R + 2R^2 - 2R \cos 2r = 2R^2 - R(\cos 2r + 1) \\ \delta = -1 &\Rightarrow H_2 = +R + 2R^2 - 2R \cos 2r = 2R^2 - R(\cos 2r - 1) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Desenvolvendo-se  $H_0$  de (4.39), tem-se:

$$\begin{aligned} H_0 &= C(M - R)^2 + AM + 2DR \cos 2r = C(M^2 - 2MR + R^2) + AM + 2DR \cos 2r \\ H_0 &= (A + CM)M - 2CMR + CR^2 + 2DR \cos 2r \quad , \end{aligned} \quad (4.43)$$

expressão esta que pode ser comparada com a forma padrão para ressonâncias de segunda ordem  $H_2$  de (4.41), resultando em:

$$-2CM / 2D = -(1 + 2\delta) \Rightarrow M = \frac{D}{C}(1 + 2\delta) \quad (4.44)$$

Com isto, os pontos críticos de (4.42) serão:

$$\begin{aligned} \delta = 0 &\Rightarrow M = +D/C \\ \delta = -1 &\Rightarrow M = -D/C \end{aligned} \quad (4.45)$$

A Figura 4.1 mostra o espaço de fase para  $H_2$  em termos das coordenadas canônicas cartesianas  $x = (2R)^{1/2} \sin r$  e  $y = (2R)^{1/2} \cos r$ . Note-se que os eixos aparecem invertidos em relação aos apresentados no Capítulo III deste trabalho, devido ao fato de que lá os eixos horizontal e vertical são definidos em termos de cosseno e seno, respectivamente.

A região de ressonância é mostrada sombreada. O diagrama (a), para  $M < -D/C$  ou  $\delta < -1$ , mostra um ponto estável na origem. Quando  $\delta = -1$  surge a primeira órbita homoclínica, sendo a origem agora um ponto de bifurcação. O diagrama (b) da mesma figura, para  $-M/C < M < +D/C$  ou  $-1 < \delta < 0$ , mostra um ponto instável na origem e dois pontos de equilíbrio no interior das regiões de estabilidade. O espaço de fase tem uma região de circulação externa e uma ressonante. Para  $\delta = 0$ , surge uma nova bifurcação, aparecendo agora uma região de circulação interna. Finalmente no diagrama (c), para  $M > +D/C$  ou  $\delta > 0$ , há um ponto estável na origem e mais quatro pontos instáveis – dois deles no interior das regiões ressonantes e dois nas bifurcações.

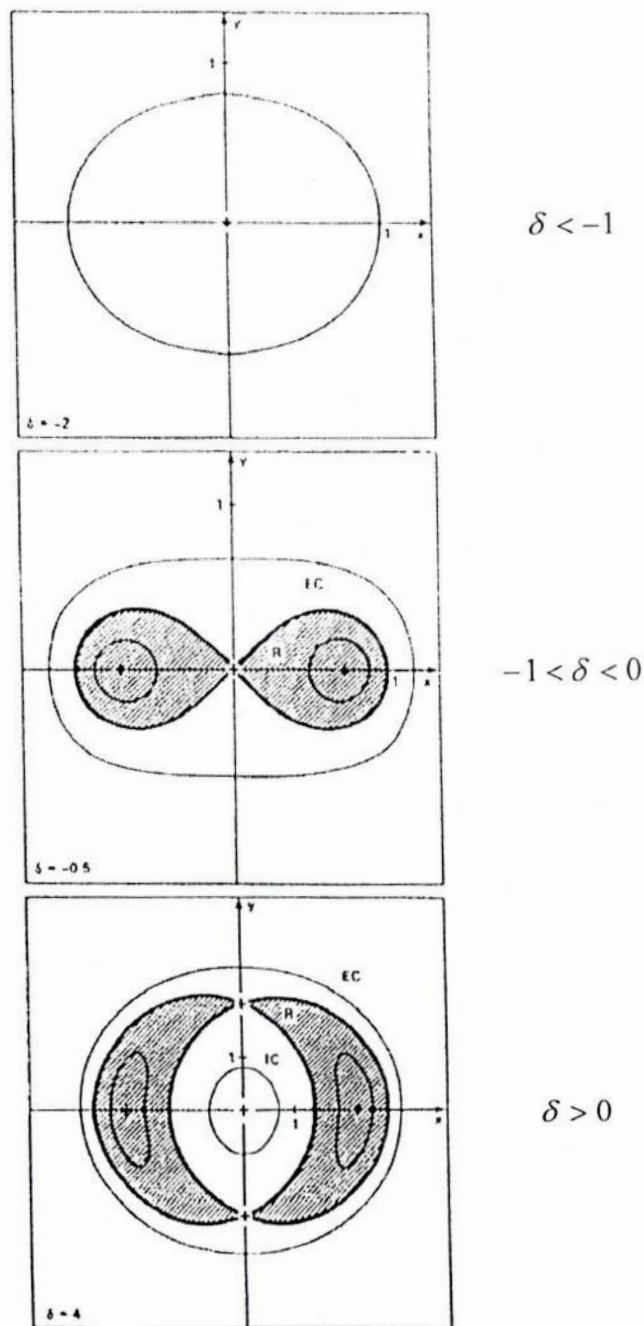


Figura 4.1. Topologia do espaço de fases para a Hamiltoniana  $H_2$  (4.41) (Borderies and Goldreich, 1984)

# CAPÍTULO V – CLASSIFICAÇÃO DO ESPAÇO DE FASE DO MODELO DE HENRARD-CARANICOLAS

## V.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado o principal objetivo deste trabalho – aplicar a metodologia de Sessin (capítulo II) ao sistema reduzido de Henrard-Caranicolas (capítulo IV), com a correspondente Hamiltoniana escrita em termos de  $(M, x, y)$ , onde  $M$  é a integral primeira e  $(x, y)$  são variáveis canonicamente conjugadas. Para tanto, uma variável “redundante” é artificialmente introduzida a fim de propiciar soluções parametrizadas  $(x(\Theta^*), y(\Theta^*))$ , bem como a classificação global do espaço de fase do sistema reduzido associado à  $H_o(\Theta^*, x, y)$ , em termos das integrais primeiras  $E_1(\Theta^*, x, y)$  e  $M(\Theta^*, x, y)$ .

## V.2 Processo de parametrização

Inicialmente é oportuno retornarmos alguns tópicos relevantes que foram abordados no capítulo IV.

Henrard e Caranicolas (1990) obtiveram uma representação para a Hamiltoniana média associada à vizinhança da ressonância 3:1 sob a forma:

$$H = H_o + \varepsilon' H_1 ,$$

onde:

a) a notação está enfatizando que todos os termos em  $H_1$  estão fatorados pela excentricidade de Júpiter. Essa parcela é considerada uma perturbação sobre  $H_o$ ;

b) o sistema dinâmico associado à  $H_o$  é integrável, uma vez que foi reduzido a um grau de liberdade através da conveniente transformação canônica:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2R} \cos r &= \sqrt{2S} \cos \sigma - be' \cos \nu \\ y &= \sqrt{2R} \sin r &= \sqrt{2S} \sin \sigma + be' \sin \nu \\ \nu &= \nu \\ M &= N - \frac{A'}{2C} - be' \sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) + \frac{1}{2} b^2 e'^2 \end{aligned}$$

A expressão para  $H_o$  em termos de  $(M, R, r)$  é dada por:

$$H_o = C(M - R)^2 + AM + 2DR \cos 2r$$

O primeiro passo do processo de parametrização é a representação de  $H_o$  em termos de  $(M, R, r)$ . Observando que:  $R = \frac{x^2 + y^2}{2}$  e  $2R \cos 2r = x^2 - y^2$ , obtém-se:

$$H_o = \frac{C}{4} \cdot (x^2 + y^2)^2 + (D - CM)x^2 - (D + CM)y^2 + AM + CM^2 \quad (5.1)$$

Logo, as equações de Hamilton serão  $\partial H_o / \partial x = +\dot{y}$  e  $\partial H_o / \partial y = -\dot{x}$ , isto é:

$$\begin{cases} \dot{x} = -[C(x^2 + y^2) - 2(D + CM)] \cdot y \\ \dot{y} = +[C(x^2 + y^2) + 2(D - CM)] \cdot x \end{cases} \quad (5.2)$$

que, combinadas, resultam em:

$$\left. \begin{cases} \frac{\dot{x}}{y} = -C(x^2 + y^2) + 2(D + CM) \\ \frac{\dot{y}}{x} = +C(x^2 + y^2) + 2(D - CM) \end{cases} \right\} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{x} + \frac{\dot{x}}{y} = 4D \Rightarrow x\dot{x} + y\dot{y} - 4Dxy = 0 \quad (5.3)$$

Por outro lado, lembrando que  $A \equiv A'$ , (4.38), a equação (4.15) pode ser escrita como:

$$M = (N - S) + R - \frac{A}{2C} \quad (5.4)$$

Lembrando que  $R = (x^2 + y^2)/2$ , obtém-se:

$$M = (N - S) + \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{A}{2C} \quad (5.5)$$

Porém, de (4.6) com (4.5), sendo  $L_R = \sqrt{(1 - \mu)a_R}$ , tem-se:

$$(N - S) = 2(L - L_R) \quad (5.6)$$

Introduzindo a variável  $(N - S) = 2\varphi_j = 2L_R\Theta$  e substituindo-se em (5.4):

$$M = \left( 2L_R\Theta - \frac{A}{2C} \right) + \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{A}{2C} \quad (5.7)$$

Fazendo-se agora:

$$2L_R\Theta^* = \left( 2L_R\Theta - \frac{A}{2C} \right) \Rightarrow \Theta^* = \Theta - \frac{A}{4L_R C} \quad (5.8)$$

observamos que o parâmetro  $A$  corresponde ao coeficiente do termo secular da Hamiltoniana  $H_o$  original do capítulo IV. Desta forma:

$$M = M(x, y, \Theta^*) = 2L_R\Theta^* + \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (5.9)$$

$$\text{e,} \quad M - R = 2L_R\Theta^* \quad (5.10)$$

$M$  é uma 2ª integral primeira do sistema reduzido de Henrard, obtida diretamente pela transformação redutora. Observe-se que  $M$  é análogo à  $G$  (capítulo III), ficando evidente que a variável  $\Theta^*$  está embutindo o termo secular ausente na metodologia de Sessin.

Por outro lado, da expressão para  $x^2 - y^2$ , (4.29), e de (5.9), tem-se:

$$\begin{cases} 2DR \cos 2r = D(x^2 - y^2) \\ AM = A \left[ 2L_R \Theta^{\cdot} + \frac{x^2 + y^2}{2} \right] = 2AL_R \Theta^{\cdot} + \frac{A(x^2 + y^2)}{2} \end{cases} \quad (5.11)$$

Substituindo-se as parcelas de (5.10) e (5.11) em  $H_o$  expressa em (4.39):

$$\begin{aligned} H_o &= C(M - R)^2 + AM + 2DR \cos 2r \\ &= C(2L_R \Theta^{\cdot})^2 + \left[ 2AL_R \Theta^{\cdot} + \frac{A(x^2 + y^2)}{2} \right] + D(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

$$H_o = H_o(x, y, \Theta^{\cdot}) = 4CL_R^2 \Theta^{\cdot 2} + 2AL_R \Theta^{\cdot} + \left( \left( D + \frac{A}{2} \right) x^2 - \left( D - \frac{A}{2} \right) y^2 \right) \quad (5.12)$$

Derivando  $\Theta^{\cdot}$  de (5.10) em relação ao tempo, e usando  $(x\dot{x} + y\dot{y})$  de (5.3):

$$\frac{d\Theta^{\cdot}}{dt} = -\frac{\dot{R}}{2L_R} = -\frac{2D}{L_R} xy \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Theta^{\cdot}}{dt} = B_o xy \quad , \text{ com } B_o = -\frac{2D}{L_R} \quad (5.13)$$

Retornando agora às equações (5.3), com auxílio de (4.10), tem-se:

$$\dot{x} = [-C(x^2 + y^2) + 2(D + CM)]y = (-2CR + 2D + 2CM)y \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = +2[C(M - R) + D]y \quad (5.14)$$

$$\dot{y} = [C(x^2 + y^2) + 2(D - CM)]x = (2CR + 2D - 2CM)x \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = +2[C(M - R) - D]x$$

Substituindo-se  $R = M - 2L_R \Theta^{\cdot}$  de (5.10) nestas equações:

$$\dot{x} = +2[C(M - M + 2L_R \Theta^{\cdot}) + D]y = +2[2CL_R \Theta^{\cdot} + D]y \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 4CL_R \Theta^{\cdot} y + B_1 y \quad , \text{ com } B_1 = 2D$$

$$\dot{y} = -2[C(M - M + 2L_R \Theta^{\cdot}) - D]x = -2[2CL_R \Theta^{\cdot} - D]x \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = -4CL_R \Theta^{\cdot} x + B_1 x \quad (5.15)$$

Resumindo, então, os resultados até agora obtidos:

**Tabela 5.1.**

Capítulo III	Capítulo V
$H_o = H_o(\Theta, K, H)$	$H_o = H_o(\Theta^{\cdot}, x, y)$
$\begin{cases} \frac{d\Theta}{d\Lambda} = -2HK \\ \frac{dH}{d\Lambda} = -\frac{1}{2} A_1 \Theta K + 2A_4 K \\ \frac{dK}{d\Lambda} = \frac{1}{2} A_1 \Theta H + 2A_4 H \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{d\Theta^{\cdot}}{dt} = B_o xy \quad , \quad \text{ com } B_o = -\frac{2D}{L_R} \\ \frac{dx}{dt} = +4CL_R \Theta^{\cdot} y + B_1 y \\ \frac{dy}{dt} = -4CL_R \Theta^{\cdot} x + B_1 x \quad , \quad \text{ com } B_1 = 2D \end{cases}$



Das equações (5.15) é possível escrever  $x = \pm\sqrt{-P_1^*(\Theta^*)}$  e  $y = \pm\sqrt{+P_2^*(\Theta^*)}$ . Para isto, deve-se escrever  $x$  e  $y$  em função de duas constantes de movimento, em analogia ao feito no capítulo II, onde foram encontrados  $H$  e  $K$  em função de  $E_I$  e  $G$ . Veja-se, agora, que as duas constantes serão  $M$  e  $E_I = H_o$ . A partir das equações (5.9) e (5.12), essas são dadas por:

$$\begin{cases} E_1' = 4CL_R^2\Theta^{*2} + AM + D(x^2 - y^2) \\ M = 2L_R\Theta^* + \frac{x^2 + y^2}{2} \end{cases} \quad (5.16)$$

Isolando-se as parcelas  $(x^2 - y^2)$  da primeira e  $(x^2 + y^2)$  da segunda das (5.16), tem-se:

$$\begin{cases} (x^2 - y^2) = \frac{E_1'}{D} - \frac{4CL_R^2\Theta^{*2}}{D} - \frac{AM}{D} \\ (x^2 + y^2) = 2M - 4L_R\Theta^* \end{cases} \quad (5.17)$$

Adicionando-se as duas relações (5.17):

$$\begin{aligned} 2x^2 &= \frac{E_1'}{D} - \frac{4CL_R^2\Theta^{*2}}{D} - \frac{AM}{D} + 2M - 4L_R\Theta^* = -\frac{4CL_R^2}{D}\Theta^{*2} - 4L_R\Theta^* + \left[ \frac{E_1'}{D} + M\left(2 - \frac{A}{D}\right) \right] \\ x &= \pm\sqrt{-\left\{ \left( \frac{2CL_R^2}{D} \right) \Theta^{*2} + (2L_R)\Theta^* - \left[ M\left(1 - \frac{A}{2D}\right) + \frac{E_1'}{2D} \right] \right\}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Deste modo, temos  $x = \pm\sqrt{-P_1^*(\Theta^*)}$ , com:

$$P_1^*(\Theta^*) = \frac{2CL_R^2}{D}\Theta^{*2} + 2L_R\Theta^* - \left[ M\left(1 - \frac{A}{2D}\right) + \frac{E_1'}{2D} \right] \quad (5.19)$$

Analogamente, subtraindo-se as duas relações (5.17):

$$\begin{aligned} -2y^2 &= \frac{E_1'}{D} - \frac{4CL_R^2\Theta^{*2}}{D} - \frac{AM}{D} - 2M + 4L_R\Theta^* = -\frac{4CL_R^2}{D}\Theta^{*2} + 4L_R\Theta^* + \left[ \frac{E_1'}{D} - M\left(2 + \frac{A}{D}\right) \right] \\ y &= \pm\sqrt{\left\{ \left( \frac{2CL_R^2}{D} \right) \Theta^{*2} - (2L_R)\Theta^* + \left[ M\left(1 + \frac{A}{2D}\right) - \frac{E_1'}{2D} \right] \right\}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Assim,  $y = \pm\sqrt{+P_2^*(\Theta^*)}$ , com:

$$P_2^*(\Theta^*) = \frac{2CL_R^2}{D}\Theta^{*2} - 2L_R\Theta^* + \left[ M\left(1 + \frac{A}{2D}\right) - \frac{E_1'}{2D} \right] \quad (5.21)$$

Dado que  $\frac{d\Theta^*}{dt} = B_o xy$ , a multiplicação de  $P_1^*(\Theta^*)$  por  $P_2^*(\Theta^*)$  nos leva à expressão para  $\frac{d\Theta^*}{dt}$  como um polinômio de 4º grau em  $\Theta^*$ .

$$\begin{aligned}
xy &= \sqrt{-\left\{\left(\frac{2CL_R^2}{D}\right)\Theta^{*2} + (2L_R)\Theta^* - \left[M\left(1 - \frac{A}{2D}\right) + \frac{E_1}{2D}\right]\right\}} \cdot \sqrt{\left\{\left(\frac{2CL_R^2}{D}\right)\Theta^{*2} - (2L_R)\Theta^* + \left[M\left(1 + \frac{A}{2D}\right) - \frac{E_1}{2D}\right]\right\}} \\
&= \left\{-\left\{\left(\frac{2CL_R^2}{D}\right)^2\Theta^{*4} - \left[4L_R^2 + \left(\frac{2CL_R^2}{D^2}\right)[AM + E_1]\right]\Theta^{*2} + (4L_R)M\Theta^* + \left[M\left(1 - \frac{A}{2D}\right) + \frac{E_1}{2D}\right]\left[M\left(1 + \frac{A}{2D}\right) - \frac{E_1}{2D}\right]\right\}^{1/2}\right\}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Logo, a (5.13) pode ser escrita como:

$$\frac{d\Theta^*}{dt} = B_o \sqrt{-P^*(\Theta^*)} \quad , \tag{5.23}$$

onde:

$$P^*(\Theta^*) = \left(\frac{2CL_R^2}{D}\right)^2\Theta^{*4} - \left[4L_R^2 + \left(\frac{2CL_R^2}{D^2}\right)[AM + E_1]\right]\Theta^{*2} + (4L_R)M\Theta^* + \left[\left(M^2 - \frac{E_1^2}{4D^2}\right) + \frac{AM}{4D}\left(E_1 - \frac{A}{D}\right)\right] \tag{5.24}$$

Correlacionando os resultados até agora obtidos com os do capítulo III, tem-se:

**Tabela 5.2.**

<i>Capítulo III</i>	<i>Capítulo V</i>
$H_o = H_o(\Theta, K, H)$	$H_o = H_o(\Theta^*, x, y)$
$K = \pm \sqrt{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}A_1\Theta^2 - E_1 + 4A_4(\Theta + G)\right]}$	$x = \pm \sqrt{-\left\{\left(\frac{2CL_R^2}{D}\right)\Theta^{*2} + (2L_R)\Theta^* - \left[M\left(1 - \frac{A}{2D}\right) + \frac{E_1}{2D}\right]\right\}}$
$H = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}A_1\Theta^2 - E_1 - 4A_4(\Theta + G)\right]}$	$y = \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{2CL_R^2}{D}\right)\Theta^{*2} - (2L_R)\Theta^* + \left[M\left(1 + \frac{A}{2D}\right) - \frac{E_1}{2D}\right]\right\}}$
$P_1(\Theta) = \frac{1}{2}A_1\Theta^2 + 4A_4\Theta + (4A_4G - E_1)$	$P_1^*(\Theta^*) = \frac{2CL_R^2}{D}\Theta^{*2} + 2L_R\Theta^* - \left[M\left(1 - \frac{A}{2D}\right) + \frac{E_1}{2D}\right]$
$P_2(\Theta) = \frac{1}{2}A_1\Theta^2 - 4A_4\Theta - (4A_4G + E_1)$	$P_2^*(\Theta^*) = \frac{2CL_R^2}{D}\Theta^{*2} - 2L_R\Theta^* + \left[M\left(1 + \frac{A}{2D}\right) - \frac{E_1}{2D}\right]$

Assim, do ponto de vista formal, a análise torna-se a mesma feita anteriormente por Sessin.

### V.3 Famílias triviais de pontos de equilíbrio no sistema reduzido

Condensando-se  $\bar{u}^* = (\Theta^*, x, y)$ , pode-se expressar os pontos de equilíbrio, referentes à condição  $d\bar{u}^*/dt = \bar{0}$ , em termos de  $E_1$  e  $M$ . Reescrevendo as equações de movimentos anteriormente obtidas:

$$\begin{cases} \frac{d\Theta^*}{dt} = B_0 xy & , \quad \text{com } B_0 = \frac{2D}{L_R} \\ \frac{dx}{dt} = +4CL_R \Theta^* y + B_1 y & , \quad \text{com } B_1 = 2D \\ \frac{dy}{dt} = -4CL_R \Theta^* x + B_1 x \end{cases} \quad (5.25)$$

Pela expressão  $\frac{d\Theta^*}{dt} = B_0 xy$ , há 3 casos triviais, onde  $d\vec{u}^* / dt = (0,0,0)$ :

1.  $x = 0$  e  $y = 0$

Retornando às expressões (5.16), no sentido de escrever  $M$  em função de  $E_1^*$ , tem-se:

$$(a) E_1^* = D \cdot (x^2 - y^2) + 4CL_R^2 \Theta^{*2} + AM \equiv 4CL_R^2 \Theta^{*2} + AM$$

$$\Theta^{*2} = \frac{E_1^* - AM}{4CL_R^2}$$

$$(b) x^2 + y^2 = 2M - 4L_R \Theta^* \equiv 0$$

$$\Theta^* = M / 2L_R$$

$$\left( \frac{M}{2L_R} \right)^2 = \frac{E_1^* - AM}{4CL_R^2}$$

e, portanto, 
$$M = -\frac{A}{2C} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4C^2} + \frac{E_1^*}{C}} \quad , \quad (5.26)$$

com ambas as determinações incluídas.

A condição (5.26) fornece a família de pontos de equilíbrio associados à condição  $x = y = 0$ .

2.  $x \neq 0$  e  $y = 0$

Reescrevendo as equações para  $d\vec{u}^* / dt = \vec{0}$ :

$$\begin{cases} \frac{d\Theta^*}{dt} = B_0 xy \equiv 0 \\ \frac{dx}{dt} = +4CL_R \Theta^* y + B_1 y \equiv 0 \\ \frac{dy}{dt} = -4CL_R \Theta^* x + B_1 x \equiv 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{array}{l} x \text{ é constante: } x_1 = x_{10} \\ y_1 = (-4CL_R \Theta^* x_{10} + B_1 x_{10})t + y_{10} = 0, \end{array}$$

onde,  $x_{10}$  e  $y_{10}$  são constantes.

Como  $y_1 = 0$ , então 
$$\Theta^* = \frac{B_1}{4CL_R} \quad (5.27)$$

Retornando às expressões (5.16), tem-se:

$$(a) E_1' = D \cdot (x^2 - y^2) + 4CL_R^2 \Theta'^2 + AM \equiv Dx^2 + 4CL_R^2 \Theta'^2 + AM$$

$$\Theta'^2 = \frac{E_1' - Dx^2 - AM}{4CL_R^2} \equiv \left( \frac{B_1}{4CL_R} \right)^2$$

$$(b) x^2 + y^2 = 2M - 4L_R \Theta' \equiv x^2$$

$$\Theta' = \frac{M}{2L_R} - \frac{x^2}{4L_R} \equiv \frac{B_1}{4CL_R}$$

Então,

$$E_1' - Dx_1^2 - AM = \frac{B_1^2}{4C} \Rightarrow Dx_1^2 = E_1' - AM - \frac{B_1^2}{4C}$$

$$x_1^2 = 2M - \frac{B_1}{C}$$

$$D \left[ 2M - \frac{B_1}{C} \right] = E_1' - AM - \frac{B_1^2}{4C}$$

e, portanto, 
$$M = \frac{E_1'}{(A+2D)} - \frac{B_1}{(A+2D)C} \left( \frac{B_1}{4} - D \right) \quad (5.28)$$

Lembrando que  $B_1 = 2D$ :

$$M = \frac{E_1'}{(A+2D)} - \frac{B_1}{(A+2D)C} \left( \frac{B_1}{4} - D \right) = \frac{E_1'}{(A+2D)} + \frac{D^2}{(A+2D)C} \quad (5.28a)$$

3.  $x = 0$  e  $y \neq 0$

Reescrevendo as equações para  $d\vec{u}^* / dt = \vec{0}$ :

$$\begin{cases} \frac{d\Theta^*}{dt} = B_o xy \equiv 0 \\ \frac{dx_1}{dt} = +4CL_R \Theta^* y + B_1 y \equiv 0 \\ \frac{dy_1}{dt} = -4CL_R \Theta^* x + B_1 x \equiv 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_1 = +[4CL_R \Theta^* y + B_1 y]t + x_{10} = 0 \\ y \text{ é constante: } y_1 = y_{10}, \end{cases}$$

onde,  $x_{10}$  e  $y_{10}$  são constantes.

Como  $x_1 = 0$ , então 
$$\Theta^* = -\frac{B_1}{4CL_R} \quad (5.29)$$

Retornando às expressões (5.16), tem-se:

$$(a) E_1' = D \cdot (x^2 - y^2) + 4CL_R^2 \Theta'^2 + AM \equiv -Dy_1^2 + 4CL_R^2 \Theta'^2 + AM$$

$$\Theta'^2 = \frac{E_1' + Dy_1^2 - AM}{4CL_R^2} \equiv \left( \frac{B_1}{4CL_R} \right)^2$$

$$(b) x^2 + y^2 = 2M - 4L_R \Theta' \equiv y^2$$

$$\Theta' = \frac{M}{2L_R} - \frac{y^2}{4L_R} \equiv -\frac{B_1}{4CL_R}$$

Então,

$$E_1' + Dy_1^2 - AM = \frac{B_1^2}{4C} \Rightarrow Dy_1^2 = AM + \frac{B_1^2}{4C} - E_1'$$

$$y_1^2 = 2M + \frac{B_1}{C}$$

$$D \left[ 2M + \frac{B_1}{C} \right] = AM + \frac{B_1^2}{4C} - E_1'$$

e, portanto, 
$$M = \frac{E_1'}{(A-2D)} - \frac{B_1}{(A-2D)C} \left( \frac{B_1}{4} - D \right) \quad (5.30)$$

Lembrando que  $B_1 = 2D$ , então:

$$M = \frac{E_1'}{(A-2D)} - \frac{B_1}{(A-2D)C} \left( \frac{B_1}{4} - D \right) = \frac{E_1'}{(A-2D)} + \frac{D^2}{(A-2D)C} \quad (5.30a)$$

Assim, as três famílias de pontos de equilíbrio do sistema reduzido são dadas por:

$$1. \quad M = -\frac{A}{2C} \pm \sqrt{\left( \frac{A}{2C} \right)^2 + \left( \frac{E_1'}{C} \right)} \quad (x=0 \text{ e } y=0) \quad (5.31)$$

$$2. \quad M = \frac{E_1'}{(A+2D)} + \frac{D^2}{(A+2D)C} \quad (x \neq 0 \text{ e } y=0) \quad (5.32)$$

$$3. \quad M = \frac{E_1'}{(A-2D)} + \frac{D^2}{(A-2D)C} \quad (x=0 \text{ e } y \neq 0) \quad (5.33)$$

Estas curvas dividem o plano  $(E_1', M)$  em 4 regiões sobre as quais é realizada a classificação global do espaço de fase, segundo o valor numérico da integral extra  $M$ , analogamente ao feito no capítulo IV.

Para a obtenção da classificação do espaço de fase, é conveniente escrever tais famílias em termos de parâmetros normalizados. Multiplicando-se as expressões (5.31), (5.32) e (5.33) por  $(2C/D)$ , tem-se.

$$\frac{2C}{D}M = -\frac{A}{D} \pm \frac{2C}{D} \sqrt{\left(\frac{A}{2C}\right)^2 + \left(\frac{E_1'}{C}\right)} \Rightarrow \frac{2C}{D}M = -\frac{A}{D} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{D}\right)^2 + 4\left(\frac{C}{D^2}E_1'\right)}$$

$$\frac{2C}{D}M = \frac{2C}{D} \frac{E_1'}{(A+2D)} + \frac{2}{(A+2D)D} \Rightarrow \frac{2C}{D}M = \left(\frac{C}{D^2}E_1'\right) \frac{2D}{(A+2D)} + \frac{2D}{(A+2D)}$$

$$\frac{2C}{D}M = \frac{2C}{D} \frac{E_1'}{(A-2D)} + \frac{2}{(A-2D)D} \Rightarrow \frac{2C}{D}M = \left(\frac{C}{D^2}E_1'\right) \frac{2D}{(A-2D)} + \frac{2D}{(A-2D)}$$

Ou seja:

$$1. \bar{M} = -\frac{A}{D} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{D}\right)^2 + 4\bar{E}_1'} \quad (5.31a)$$

$$2. \bar{M} = \frac{2D}{(A+2D)} \bar{E}_1' + \frac{2D}{(A+2D)} \quad (5.32a)$$

$$3. \bar{M} = \frac{2D}{(A-2D)} \bar{E}_1' + \frac{2D}{(A-2D)}, \quad (5.33a)$$

onde:

$$\bar{M} = \left(\frac{2C}{D}\right)M \quad \text{e} \quad \bar{E}_1' = \left(\frac{C}{D^2}\right)E_1' \quad (5.34)$$

Quando o termo secular é nulo ( $A = 0$ ), as condições anteriores tornam-se:

$$1. \bar{M} = \pm 2\sqrt{\bar{E}_1'} \quad (5.31b)$$

$$2. \bar{M} = +\bar{E}_1' + 1 \quad (5.32b)$$

$$3. \bar{M} = -\bar{E}_1' - 1 \quad (5.33b)$$

A simetria das equações (5.32b) e (5.33b). Essa simetria é consistente com os resultados descritos no capítulo III, onde os pontos de interseção são diferentes devido às normalizações não serem idênticas. O efeito da inclusão do termo secular é a quebra da simetria existente no plano  $(\bar{E}_1', \bar{G})$ , na metodologia de Sessin.

Considere-se, agora, a multiplicação de  $P_1^*(\Theta^*)$  e  $P_2^*(\Theta^*)$  por  $(2C/D)$ :

$$\frac{2C}{D}P_1^*(\Theta^*) = \frac{4C^2L_R^2}{D^2}\Theta^{*2} + \frac{4C}{D}L_R\Theta^* - \frac{2C}{D}\left[M\left(1 - \frac{A}{2D}\right) + \frac{E_1'}{2D}\right]$$

$$\frac{2C}{D}P_2^*(\Theta^*) = \frac{4C^2L_R^2}{D^2}\Theta^{*2} - \frac{4C}{D}L_R\Theta^* + \frac{2C}{D}\left[M\left(1 + \frac{A}{2D}\right) - \frac{E_1'}{2D}\right]$$

Fazendo-se  $\bar{\Theta}^* = (2CL_R / D)\Theta^*$  nestas expressões, tem-se:

$$\bar{P}_1^*(\bar{\Theta}^*) = \bar{\Theta}^{*2} + 2\bar{\Theta}^* - \frac{2C}{D} \left[ M \left( 1 - \frac{A}{2D} \right) + \frac{E_1}{2D} \right] \quad (5.34)$$

$$\bar{P}_2^*(\bar{\Theta}^*) = \bar{\Theta}^{*2} - 2\bar{\Theta}^* + \frac{2C}{D} \left[ M \left( 1 + \frac{A}{2D} \right) - \frac{E_1}{2D} \right] . \quad (5.35)$$

onde,  $\bar{P}_1^*(\bar{\Theta}^*) = \frac{2C}{D} P_1^*(\Theta^*)$  e  $\bar{P}_2^*(\bar{\Theta}^*) = \frac{2C}{D} P_2^*(\Theta^*)$ .

As expressões (5.34) e (5.35) devem agora ser escritas em termos de  $(\bar{E}_1, \bar{M})$ . Para isto, retornemos às relações (5.34), de forma que  $\bar{E}_1$  e  $\bar{M}$  serão dados por:

$$M = \left( \frac{D}{2C} \right) \bar{M} \quad \text{e} \quad E_1 = \left( \frac{D^2}{C} \right) \bar{E}_1 \quad (5.36)$$

Substituindo-se em  $\bar{P}_1^*(\bar{\Theta}^*)$  e  $\bar{P}_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , tem-se, finalmente:

$$\bar{P}_1^*(\bar{\Theta}^*) = \bar{\Theta}^{*2} + 2\bar{\Theta}^* - \frac{2C}{D} \left[ \left( \frac{D}{2C} \right) \bar{M} \left( 1 - \frac{A}{2D} \right) + \left( \frac{D^2}{C} \right) \frac{\bar{E}_1}{2D} \right] = \bar{\Theta}^{*2} + 2\bar{\Theta}^* - \left[ \bar{M} \left( 1 - \frac{A}{2D} \right) + \bar{E}_1 \right] \quad (5.37)$$

$$\bar{P}_2^*(\bar{\Theta}^*) = \bar{\Theta}^{*2} - 2\bar{\Theta}^* + \frac{2C}{D} \left[ \left( \frac{D}{2C} \right) \bar{M} \left( 1 + \frac{A}{2D} \right) - \left( \frac{D^2}{C} \right) \frac{\bar{E}_1}{2D} \right] = \bar{\Theta}^{*2} - 2\bar{\Theta}^* + \left[ \bar{M} \left( 1 + \frac{A}{2D} \right) - \bar{E}_1 \right] \quad (5.38)$$

A tabela seguinte mostra as expressões dos polinômios normalizados nas duas metodologias, lembrando que o termo secular, desconsiderado na metodologia de Sessin, faz-se representado pela constante  $A \neq 0$  nas expressões de Henrard.

**Tabela 5.3.**

<i>Capítulo III</i>	<i>Capítulo V</i>
$H_o = H_o(\Theta, K, H)$	$H_o = H_o(\Theta^*, x, y)$
$P_1(\bar{\Theta}) = \frac{1}{2}\bar{\Theta}^2 + 4\bar{\Theta} + (8\bar{G} - 4\bar{E}_1)$	$\bar{P}_1^*(\bar{\Theta}^*) = \bar{\Theta}^{*2} + 2\bar{\Theta}^* - \left[ \bar{M} \left( 1 - \frac{A}{2D} \right) + \bar{E}_1 \right]$
$P_2(\bar{\Theta}) = \frac{1}{2}\bar{\Theta}^2 - 4\bar{\Theta} - (8\bar{G} + 4\bar{E}_1)$	$\bar{P}_2^*(\bar{\Theta}^*) = \bar{\Theta}^{*2} - 2\bar{\Theta}^* + \left[ \bar{M} \left( 1 + \frac{A}{2D} \right) - \bar{E}_1 \right]$

#### V.4 O plano $(\bar{E}_1, \bar{M})$ e a classificação do espaço de fase

O diagrama das integrais primeiras do movimento é obtido levando-se em conta, não apenas as regiões delimitadas pelas expressões normalizadas (5.31a), (5.32a) e (5.33a), mas também ao já mencionado estudo das raízes dos polinômios  $\bar{P}_1^*(\bar{\Theta}^*)$  e  $\bar{P}_2^*(\bar{\Theta}^*)$  de (5.37) e (5.38). O Apêndice I deste trabalho contém uma ilustração deste estudo de raízes e respectiva classificação. Levando-se isto em consideração, o diagrama  $(\bar{E}_1, \bar{M})$  é apresentado a seguir:

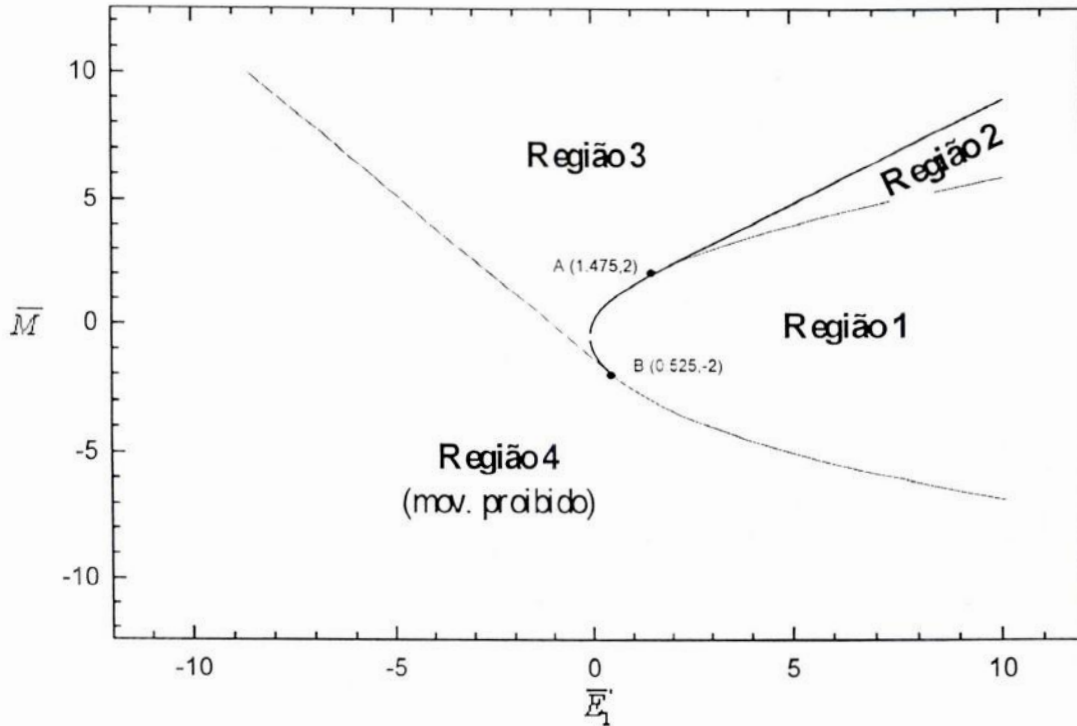


Figura 5.1. Possibilidades de movimento no plano  $(\bar{E}_1, \bar{M})$  pelo método de Henrard.

No gráfico anterior, a separatriz aparece com contorno reforçado, e os pontos de interseção entre as retas e os ramos superior e inferior da parábola são, respectivamente,  $(1+A/D, +2)$  e  $(1-A/D, -2)$ , correspondendo aproximadamente aos pontos  $A(\bar{E}_1, \bar{M}) = (1.475, +2)$  e  $B(\bar{E}_1, \bar{M}) = (0.525, -2)$ . As regiões 1, 2, 3 e 4 seguem a mesma classificação apresentada no capítulo II, como se verá a seguir.

Retornando às definições das variáveis  $x$  e  $y$  de Henrard, pelas expressões (5.18) e (5.20), tem-se, após a normalização,  $x = \pm\sqrt{-P_1^*(\bar{\Theta}^*)}$  e  $y = \pm\sqrt{+P_2^*(\bar{\Theta}^*)}$ , respectivamente, onde  $P_1^*(\bar{\Theta}^*)$  e  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  são dados por (5.37) e (5.38).

Escolhendo-se arbitrariamente valores para o par  $(\bar{E}_1, \bar{M})$  na Figura 5.1, é possível gerar gráficos de  $y$  contra  $x$  para as 3 regiões de movimento possível, quais sejam:



**Região 1:** Apresenta sempre o movimento de circulação em torno da origem. Os gráficos a seguir, elaborados para  $\bar{M} = 0$ , mostram as circulações referentes aos níveis de energia  $\bar{E}_1 = 3$  e  $\bar{E}_1 = 1$  - a circulação mais externa correspondendo à maior energia. O valor  $\bar{E}_1 = 0$  corresponde à zona limítrofe entre a região 1 e a região 3, para  $\bar{M} = 0$ . Finalmente,  $\bar{E}_1 = -1$  já diz respeito à região 3, mostrado aqui como ilustração.

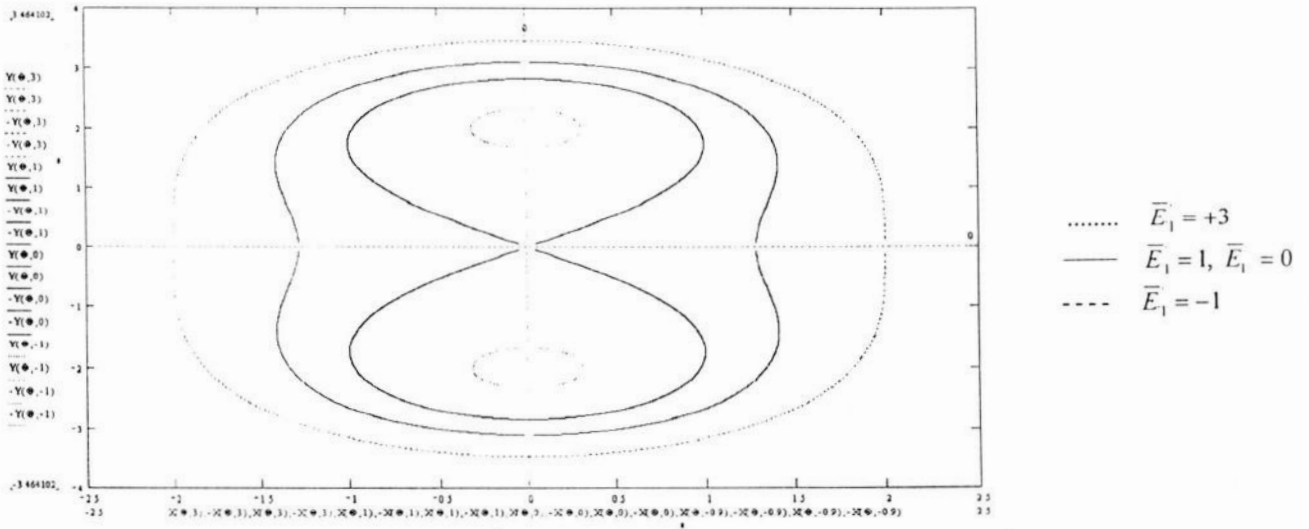


Figura 5.2. Gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  para a Região 1 de movimento com  $\bar{M} = 0$ .

**Região 2:** Apresenta sempre duas possibilidades de movimento: circulação externa *ou* interna. Os gráficos a seguir, elaborados para  $\bar{M} = 5$ , mostram os pares de circulações referentes aos níveis de energia  $\bar{E}_1 = 7$  e  $\bar{E}_1 = 6$  - cada circulação mais externa correspondendo à mais interna. O valor aproximado  $\bar{E}_1 = 5.188$  corresponde à zona limítrofe entre a região 1 e a região 3.

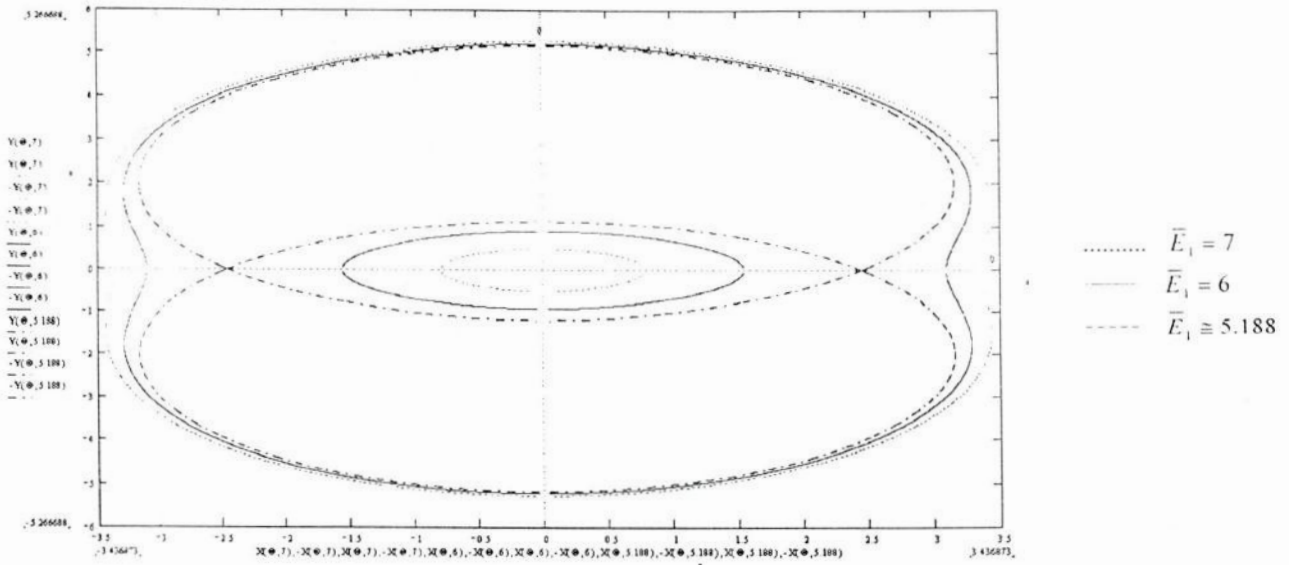


Figura 5.3. Gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  para a Região 2 de movimento com  $\bar{M} = 5$ .

**Região 3:** Corresponde à librações em torno de 2 centros fixos. Os gráficos a seguir, elaborados para  $\bar{M} = 5$ , mostram as librações referentes aos níveis de energia  $\bar{E}_1 = -3$  e  $\bar{E}_1 = 0$  - as mais externas referentes à maior energia.. O valor aproximado  $\bar{E}_1 \cong 5.188$  corresponde ao ponto de separação entre a regiões 3 e 2, para  $\bar{M} = 5$ .

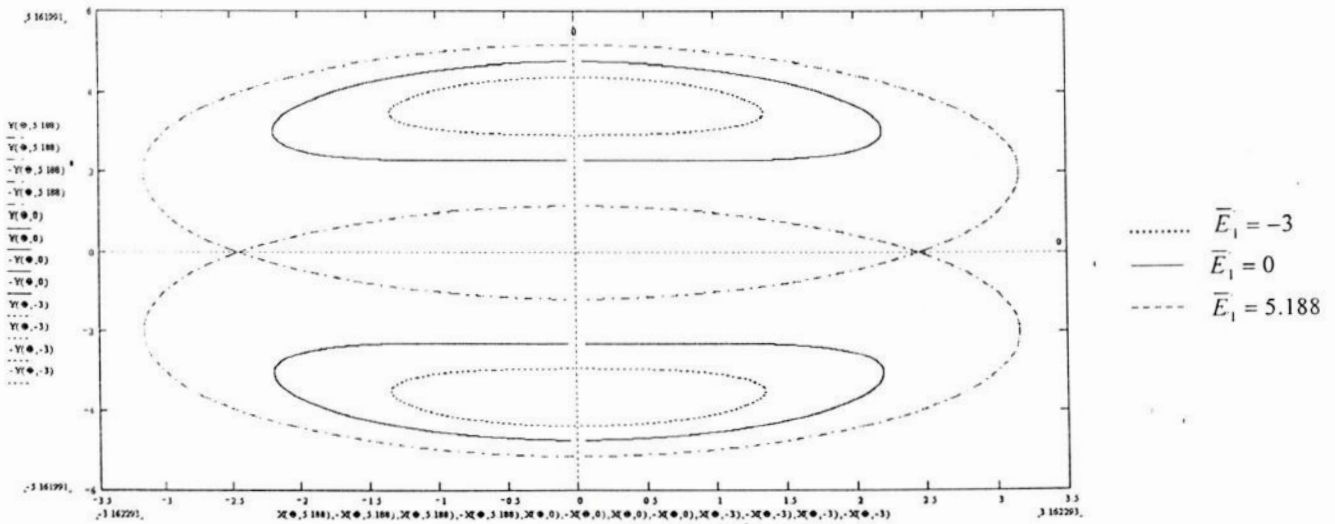


Figura 5.5. Gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  para a região 3 de movimento com  $\bar{M} = 5$ .

**Região 4:** Corresponde à região de movimento proibido, não havendo, portanto representação gráfica.

**Separatrizes:** As duas figuras a seguir apresentam os gráficos referentes aos níveis das separatrizes  $\bar{M} = 2$  e  $\bar{M} = -2$ .

A Figura 5.5 mostra a passagem das circulações externas da Região 1 ( $\bar{E}_1 = 5$  e  $\bar{E}_1' = 3$ ) para os pares de librações da Região 3 ( $\bar{E}_1 = -2$ ), ressaltando a separatriz no ponto  $\bar{E}_1 = 1 + A/D$ .

A Figura 5.6 mostra novamente a Região 1 ( $\bar{E}_1 = 7$ ,  $\bar{E}_1 = 5$  e  $\bar{E}_1' = 3$ ) até a sua fronteira com a Região 4 de movimento proibido, e portanto sem representação gráfica, ressaltando o ponto limítrofe  $\bar{E}_1 = 1 - A/D$ .

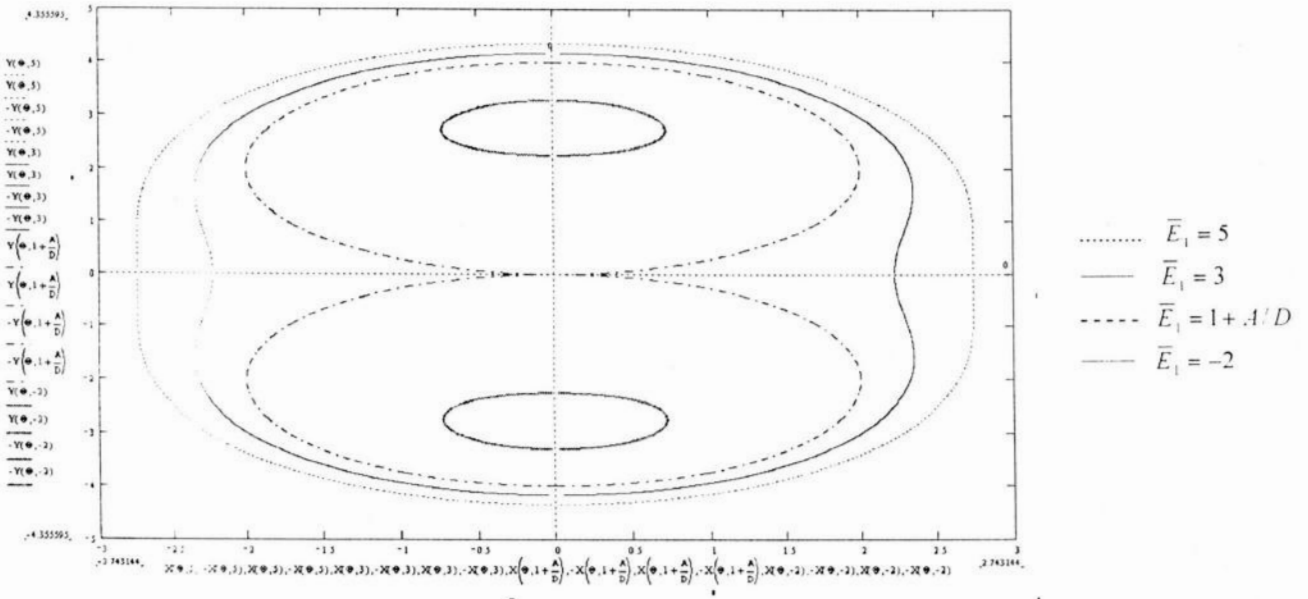


Figura 5.5. Gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  no nível da separatriz  $\bar{M} = 2$ .

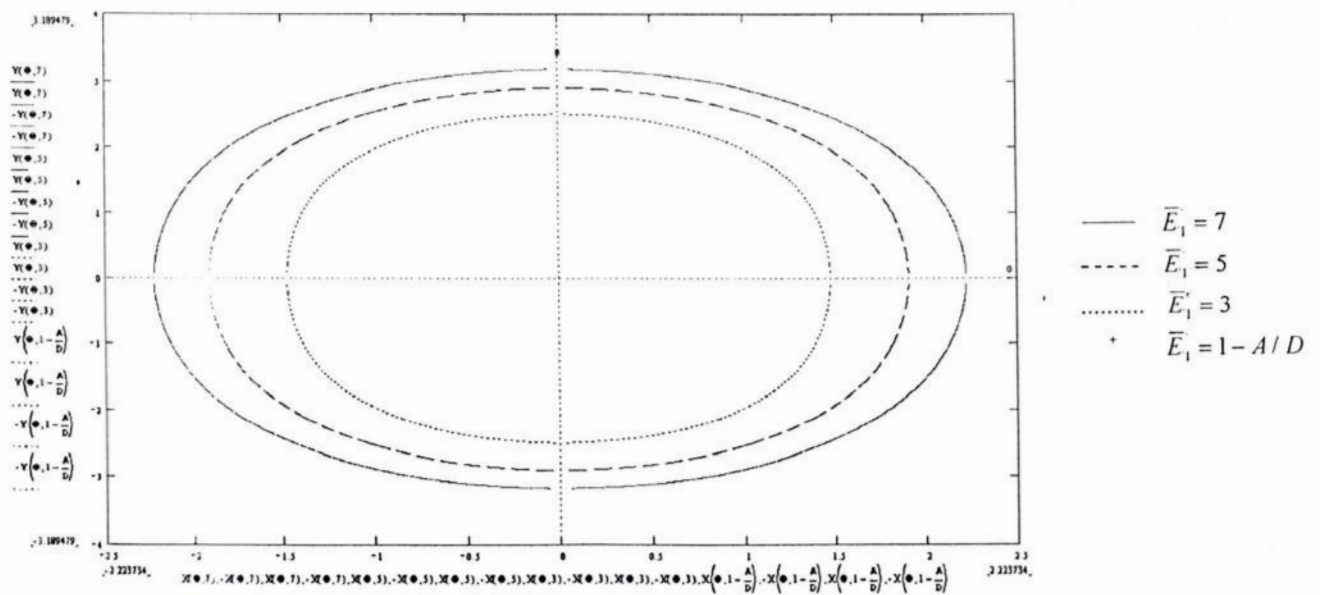


Figura 5.6. Gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  no nível da separatriz  $\bar{M} = -2$ .

# CAPÍTULO VI – COMPARAÇÃO DOS MODELOS DE SESSIN E DE HENRARD-CARANICOLAS PARA A RESSONÂNCIA ORBITAL 3:1

## VI.1 Introdução

Neste capítulo será efetuada uma comparação entre os procedimentos adotados pelos métodos de Sessin (capítulos II e III) e Henrard-Caranicolas (capítulos IV e V), com vistas a realçar diferenças, semelhanças e vantagens de cada um. Inicialmente, a análise dar-se-á em termos da parte analítica propriamente dita de ambos, escrevendo-se as duas representações no mesmo conjunto de ângulos de Sessin. Em seguida, será discutida a classificação do movimento no plano das integrais primeiras.

## VI.2 Comparação analítica entre os dois métodos

Ambos os modelos de Sessin e de partem de uma representação Hamiltoniana média para o problema restrito de 3 corpos –  $\bar{F}$ , (2.31), e  $H$ , (4.7), respectivamente – na qual não aparecem os termos de curto período.

Os sistemas de unidades e de coordenadas são diferentes para ambos: massa reduzida e variáveis de Delaunay, para Sessin; sistema Gaussiano e variáveis de Poincaré para Henrard.

Contrastemos as Hamiltonianas reduzidas dos dois métodos. Pelo método de Sessin,  $F_1$  – não integrável devido à inclusão da excentricidade de Júpiter  $e_j$  – é escrita como a soma de duas parcelas, as quais, por sua vez, são separadamente integráveis, isto é:

$$F_1 = F_{11} + F_{12} \quad (6.1)$$

Estas parcelas são dadas por (2.67):

$$\left[ \begin{array}{l} F_{11} = \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 + A_4 e_R^2 \cos(\theta + 2\varpi) + A_6 e_j^2 \cos(\theta + 2\varpi_j) - 2\sqrt{A_4 A_6} e_R e_j \cos(\theta + \varpi + \varpi_j) \\ F_{12} = A_2 (e_R^2 + e_j^2) + A_3 e_R e_j \cos(\varpi - \varpi_j) + A_7 e_R e_j \cos(\theta + \varpi + \varpi_j) \end{array} \right. \quad (6.2)$$

e são obtidas por meio de uma série de transformações não-canônicas – a primeira em (2.52), de forma que o ângulo ressonante é dado por  $\theta + 2\varpi = \pi$ . O uso de variáveis de Poincaré para a ressonância  $(\sigma, \nu)$  é fundamental para que o processo adotado por Henrard, que corresponde a um tipo de rotação do espaço de fase, pudesse ser efetuado diretamente via transformações canônicas. Ao contrário do que se vê no capítulo II, onde as coordenadas são: ângulo crítico  $\theta$  e longitude do periélio  $\varpi$ , cabendo lembrar aqui que  $\sigma = -\theta - \varpi/2$  e  $\nu = -(-\theta) - \varpi/2$ .

Por outro lado, lembrando a expressão (4.39) do modelo integrável de Henrard-Caranicolas:

$$\begin{aligned}
 H &= H_o + H_1 + \dots \\
 \left[ \begin{aligned}
 H_o &= C(M - R)^2 + AM + 2DR \cos 2r \\
 H_1 &= Ge' \sqrt{2R} \cos(r + \nu) + 2Fe'^2 \cos 2\nu
 \end{aligned} \right. \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

Com o uso de (4.12),  $H_o$  torna-se:

$$H_o = C(N - S)^2 + \frac{A^2}{4C} - A(N - S) + AM + 2DR \cos 2r \quad (6.4)$$

Considerando que  $L_R = \sqrt{(1 - \mu)a_R}$ , temos, a partir de (4.6),  $N = S + 2(L - L_R)$ , que substituída na expressão de  $M$  da transformação canônica (4.9), resulta em:

$$\begin{aligned}
 M &= N - \frac{A'}{2C} - be' \sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) + \frac{1}{2} b^2 e'^2 \\
 &= [S - 2(L - L_R)] - \frac{A'}{2C} - be' \sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) + \frac{1}{2} b^2 e'^2
 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Sendo assim, podemos escrever  $H_o$  de (6.4) como:

$$\begin{aligned}
 H_o &= C(2(L - L_R))^2 + \frac{A^2}{4C} - A(2(L - L_R)) + \\
 &+ A \left[ [S - 2(L - L_R)] - \frac{A'}{2C} - be' \sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) + \frac{1}{2} b^2 e'^2 \right] + 2DR \cos 2r
 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Inserindo a expressão para o termo  $2R \cos 2r$  de (4.30) e desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
 H_o &= 4C(L - L_R)^2 + A \left\{ \frac{A}{4C} (1 - 2A) + S + \frac{1}{2} b^2 e'^2 \right\} - Abe' \sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) + 2DS \cos 2\sigma - \\
 &- 2D \sqrt{2S} be' \cos(\sigma - \nu) + Db^2 e'^2 \cos 2\nu
 \end{aligned} \quad (6.7)$$

A correlação entre os ângulos  $(\sigma + \nu)$ ,  $(\sigma - \nu)$ ,  $2\sigma$  e  $2\nu$  presentes na última expressão com os usados por Sessin, é obtida a partir das variáveis de Poincaré-Schubart (4.6), isto é:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma &= \frac{3\lambda' - \lambda + 2\varpi}{2} \\
 \nu &= -\frac{3\lambda' - \lambda + 2\varpi'}{2}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 \sigma + \nu &= \frac{2p - 2p'}{2} = p - p' \Leftrightarrow \varpi - \varpi', \\
 \sigma - \nu &= \frac{6\lambda' - 2\lambda + 2(p + p')}{2} = (3\lambda' - \lambda) + p - p' \Leftrightarrow \theta + \varpi + \varpi', \\
 2\sigma &= 3\lambda' - \lambda + 2p \Leftrightarrow \theta + 2\varpi \\
 2\nu &= -3\lambda' + \lambda - 2p \Leftrightarrow \theta + 2\varpi',
 \end{aligned} \right. \quad (6.8)$$

E, portanto:

$$H_0 = 4C(L - L_R)^2 + C_0 + 2DS \cos(\theta + 2\varpi) + Db^2 e'^2 \cos(\theta + 2\varpi_j) - be' \sqrt{2S} [2D \cos(\theta + \varpi + \varpi_j) + A \cos(\varpi - \varpi_j)] \quad (6.9)$$

onde,  $C_0 = A \left\{ \frac{A}{4C} (1 - 2A) + S + \frac{1}{2} b^2 e'^2 \right\}$ .

Retornando à expressão (6.3), e aplicando para a parcela  $H_1$  o termo  $\sqrt{2R} \cos(r + \nu)$ , obtido de (4.26):

$$\begin{aligned} H_1 &= Ge' \sqrt{2R} \cos(r + \nu) + 2Fe'^2 \cos 2\nu = Ge' [\sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) - be'] + 2Fe'^2 \cos 2\nu = \\ &= Ge' \sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) + 2Fe'^2 \cos 2\nu - Gbe'^2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Usando a correlação entre os argumentos de (6.8) na expressão anterior:

$$\begin{aligned} H_1 &= Ge' \sqrt{2S} \cos(\sigma + \nu) + 2Fe'^2 \cos 2\nu - Gbe'^2 = \\ &= Ge' \sqrt{2R} \cos(\varpi - \varpi_j) + 2Fe'^2 \cos(\theta + 2\varpi_j) - Gbe'^2 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Finalmente, as expressões de  $F_{11}$  e  $F_{12}$  (6.2) podem ser comparadas, respectivamente, às de  $H_0$  (6.9) e  $H_1$  (6.11):

$$\left[ \begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{2} A_1 \Theta^2 + A_4 e_R'^2 \cos(\theta + 2\varpi) + A_6 e_j'^2 \cos(\theta + 2\varpi_j) - 2\sqrt{A_4 A_6} e_R' e_j' \cos(\theta + \varpi + \varpi_j) \\ F_{12} &= A_2 (e_R'^2 + e_j'^2) + A_3 e_R' e_j' \cos(\varpi - \varpi_j) + A_7 e_R' e_j' \cos(\theta + \varpi + \varpi_j) \end{aligned} \right. ,$$

e

$$\left[ \begin{aligned} H_0 &= 4C(L - L_R)^2 + 2DS \cos(\theta + 2\varpi) + Db^2 e'^2 \cos(\theta + 2\varpi_j) - 2Dbe' \sqrt{2S} \cos(\theta + \varpi + \varpi_j) + \\ &\quad + \{C_0 - Abe' \sqrt{2S} \cos(\varpi - \varpi_j)\} \\ H_1 &= Ge' \sqrt{2R} \cos(\varpi - \varpi_j) + 2Fe'^2 \cos(\theta + 2\varpi_j) - Gbe'^2 \end{aligned} \right.$$

Pelas expressões anteriores, vê-se que  $H_0$  é mais completo que  $F_{11}$ , contendo em adição o termo secular  $C_0$ , bem como o termo em  $\cos(\varpi - \varpi_j)$ , ambos ausentes em  $F_{11}$ . Por outro lado, este último termo,  $\cos(\varpi - \varpi_j)$ , que no método de Sessin aparece apenas em  $F_{12}$ , encontra-se dividido no método de Henrard-Caranicolas entre  $H_0$  e  $H_1$ . Inversamente, o termo  $\cos(\theta + \varpi + \varpi_j)$ , que aparece apenas em  $H_0$ , encontra-se dividido entre  $F_{11}$  e  $F_{12}$  no método de Sessin.

### VI.3 Comparação entre os planos definidos pelas integrais primeiras dos dois modelos

Para um estudo comparativo entre os métodos de Sessin e Henrard, no que diz respeito às possibilidades de movimento, e devido às diferentes convenções de sinais para as equações de Hamilton, é conveniente olhar, no método de Henrard, o plano  $\bar{E}_1$  contra  $-\bar{M}$ , relativamente ao plano  $(\bar{E}_1, \bar{G})$  do capítulo II. Assim, trocando-se  $\bar{M}$  por  $-\bar{M}$  no gráfico da Figura 5.1, tem-se:

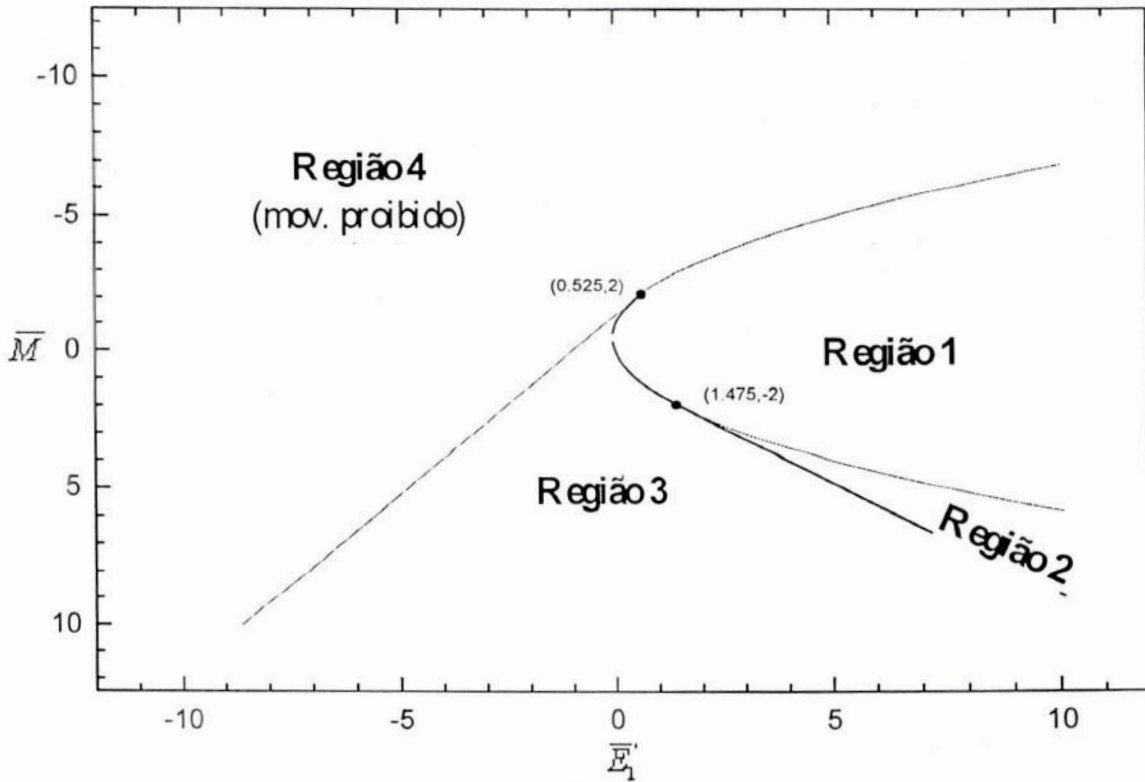


Figura 6.1. Possibilidades de movimento no plano  $(\bar{E}_1, -\bar{M})$  pelo método de Henrard.

Pela figura anterior, vê-se, conforme já ressaltado, a correlação entre as 4 regiões delimitadas pelo plano  $(\bar{E}_1, -\bar{M})$  de Henrard, e as regiões assinaladas no plano  $(\bar{E}_1, \bar{G})$  de Sessin (Figura 3.1). Assim, as hipóteses adotadas neste último, incluindo a desconsideração do termo secular, não alteram classificação dos movimentos possíveis.

Uma vez que o método de Sessin não leva em conta o termo secular, é instrutivo desconsiderá-lo no método de Henrard, com a finalidade de se entender o seu efeito no plano  $(\bar{E}_1, \bar{M})$ . Para isto, o gráfico da Figura 6.2 mostra o plano  $(\bar{E}_1, \bar{M})$  de Henrard, gerado pelos contornos (5.31a) a (5.33a), no caso geral ( $A \neq 0$ ), e por (5.31b) a (5.33b), quando o termo secular é nulo ( $A = 0$ ). As regiões de movimento estão demarcadas para o caso  $A \neq 0$ .

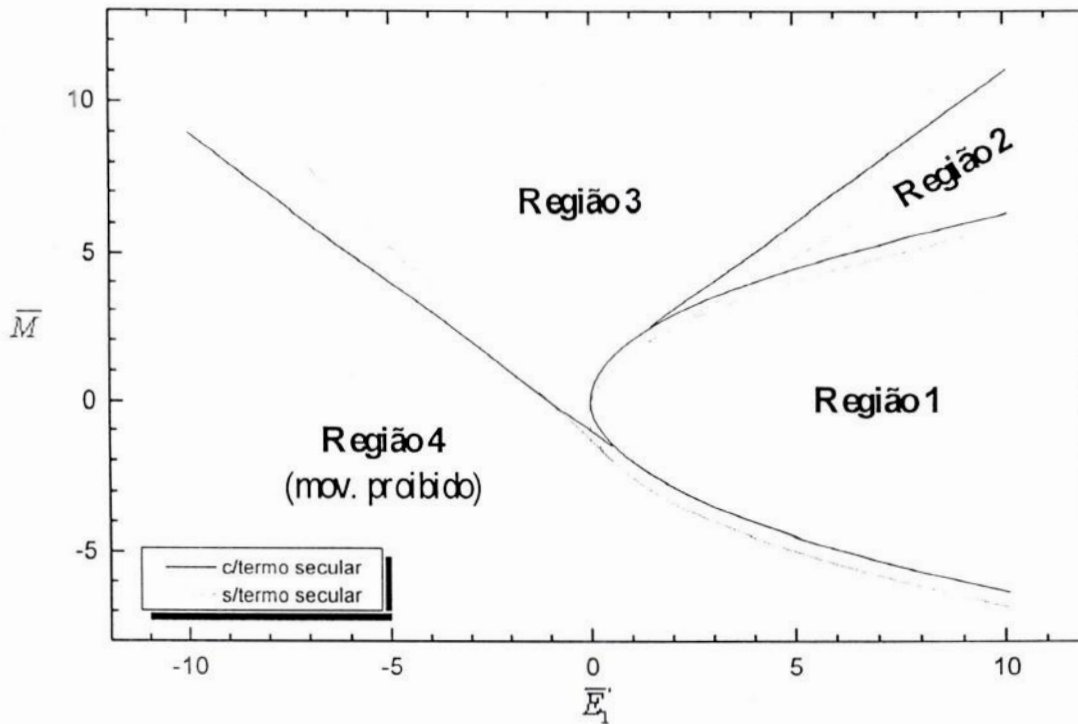


Figura 6.2. Comparação entre as regiões de movimento no plano  $(\bar{E}_1, \bar{M})$  pela metodologia de Henrard: com termo secular ( $A \neq 0$ ), linha cheia, e sem termo secular ( $A = 0$ ), linha tracejada.

Pelo gráfico anterior, nota-se que o termo secular não altera a classificação do espaço de fase, mas apenas a extensão de algumas regiões, em virtude da quebra de simetria entre os pontos de interseção com a parábola, existente quando  $A = 0$ . Nesta situação,  $A(\bar{E}_1, \bar{M}) = (1, 2)$  e  $B(\bar{E}_1, \bar{M}) = (1, -2)$ .



## CONCLUSÃO

A ressonância de movimento médio 3:1 é de importância relevante como causa de remoção de asteróides do cinturão principal. Para o seu estudo analítico, é necessária a adoção de um modelo matemático descritivo da mesma, o qual passa inicialmente pela obtenção de um modelo integrável de parâmetros médios que a represente em sua vizinhança, bem como a classificação de seu correspondente espaço de fase.

Sendo assim, para o estudo do espaço de fase da ressonância 3:1, efetuou-se um paralelismo entre duas metodologias de tratamento da mesma – objetivo primordial deste trabalho – discutindo-se as vantagens de cada uma delas individualmente consideradas.

A primeira, devida a Sessin (1981), faz uso da inserção de uma variável adicional, que permite a classificação global do espaço de fase em termos de suas integrais primeiras ( $E, G$ ), embora com o ônus de um tratamento Hamiltoniano não-canônico e a desconsideração do termo ressonante secular. O detalhamento do espaço de fase para as possibilidades de movimento teve por base o trabalho de Guillens (1998).

Por outro lado, a segunda metodologia, devida a Henrard-Caranicolas (1990), desenvolve-se canonicamente com uma Hamiltoniana mais completa, que inclui o termo secular, embora, no trabalho destes autores, tenha sido destinada originariamente ao tratamento perturbativo via invariantes adiabáticos – assunto este não abordado aqui. Em acréscimo, despreocupam-se eles da classificação do espaço de fase, simplesmente reproduzindo-a dos trabalhos de Borderies e Goldreich (1984) e de Lemaître (1984).

Não obstante ao fato de ambas as representações Hamiltonianas corresponderem ao modelo circular plano, quando a excentricidade de Júpiter não é considerada ( $e_j = e'_j = 0$ ), a união entre a visão física propiciada pelo método de Sessin ao formalismo mais completo do método de Henrard-Caranicolas, com a inclusão do termo secular, foi o ponto basilar deste trabalho, desenvolvendo-se a partir da introdução de uma variável adicional neste último método ( $\varphi_j$  entre 5.6 e 5.7), em analogia ao primeiro, o que permitiu o estudo detalhado do plano representativo, como desenvolvido por Guillens (1998).

Assim, o modelo de Sessin, que favorece à intuição física do problema pela classificação das regiões limítrofes no plano das integrais primeiras, possui a desvantagem de efetuar a separação dos termos de forma menos natural que o de Henrard-Caranicolas, estando os mesmos distribuídos de acordo com uma relação entre os coeficientes da Hamiltoniana, a qual permite que o núcleo integrável seja escrito de modo análogo ao Modelo Circular Plano.

É notável, porém, que, ao se introduzir no modelo de Henrard-Caranicolas uma variável adicional – consoante ao o que é feito por Sessin –, variável esta que “desanoniza” o sistema, obteve-se igualmente as três possibilidades de movimento no modelo da 3:1, isto é: libração, circulação e impossibilidade, as quais resultam em quatro regiões no plano das integrais primeiras, devido à fronteira entre elas (libração e circulação). Logo, a desconsideração do termo secular feita por Sessin, tendo sido na época objeto de crítica, não altera a classificação dos movimentos possíveis.

# APÊNDICE I– CLASSIFICAÇÃO DO ESPAÇO DE FASE DE HENRARD-CARANICOLAS PELO ESTUDO DAS RAÍZES DOS POLINÔMIOS NORMALIZADOS

## Introdução

Conforme assinalado na seção V.4 do capítulo V deste trabalho, será efetuado a seguir um estudo das raízes dos polinômios  $\bar{P}_1^*(\bar{\Theta}^*)$  e  $\bar{P}_2^*(\bar{\Theta}^*)$  do método de Henrard-Caranicolas, com a finalidade de exemplificar os tipos de movimentos possíveis em cada uma das regiões do plano  $(\bar{E}_1, \bar{M})$ .

## Movimentos no plano $(\bar{E}_1, \bar{M})$ pela análise de sinais dos polinômios normalizados

O estudo dos diversos tipos de movimento possíveis nas regiões do plano  $(\bar{E}_1, \bar{M})$  relaciona-se às possibilidades de solução da equação  $d\bar{\Theta}^*/dt = B_0 xy$  (5.13), onde  $x = \pm\sqrt{-P_1^*(\bar{\Theta}^*)}$  e  $y = \pm\sqrt{+P_2^*(\bar{\Theta}^*)}$ , com  $\bar{P}_1^*(\bar{\Theta}^*)$  e  $\bar{P}_2^*(\bar{\Theta}^*)$  dados, respectivamente, por (5.34) e (5.35). Assim, uma análise de sinais individual destes polinômios normalizados, bem como do seu produto,  $P^*(\bar{\Theta}^*) = -P_1^*(\bar{\Theta}^*) \cdot P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , permite determinar as possibilidades de movimento nas diversas regiões do plano  $(\bar{E}_1, \bar{M})$ , e será feito a seguir de forma gráfica. Por conveniência, reproduz-se novamente o gráfico da Figura 5.1, acrescido dos pontos de coordenadas  $(\bar{E}_1, \bar{M})$ ,  $a(1,0)$ ,  $b(7,5)$ ,  $c(-3,5)$ ,  $d(-6,-2)$ ,  $e(3,-4,5)$ ,  $f(0,-4,5)$ , nos quais será apresentado o estudo dos sinais e das raízes dos polinômios em questão.

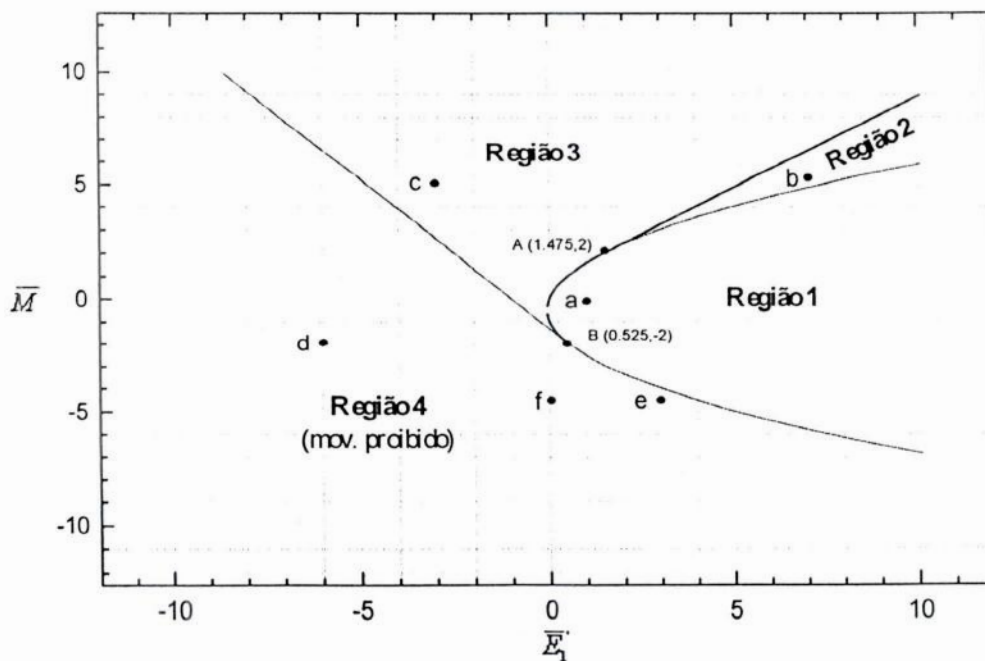
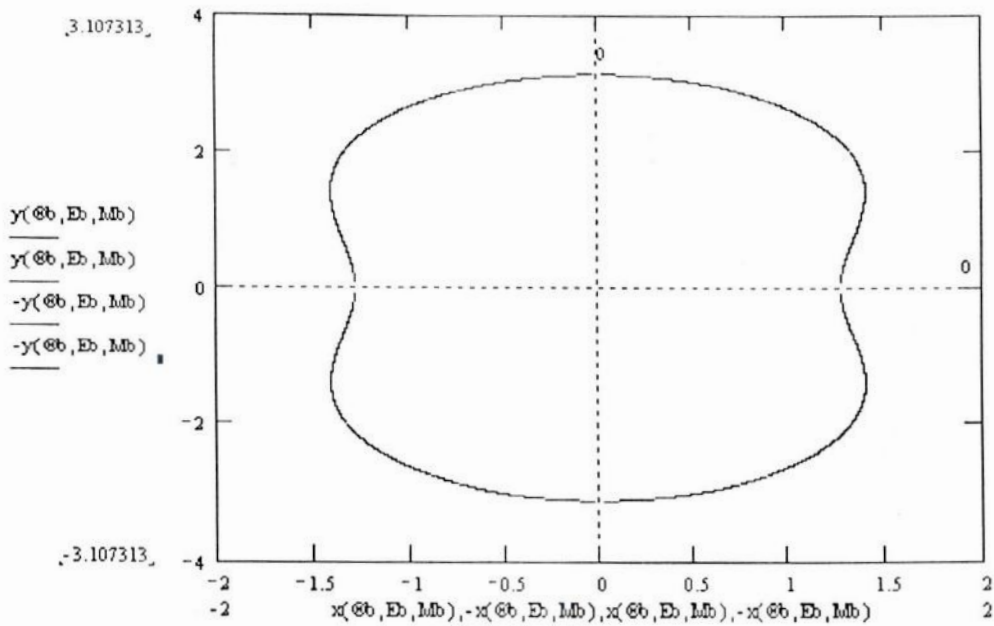


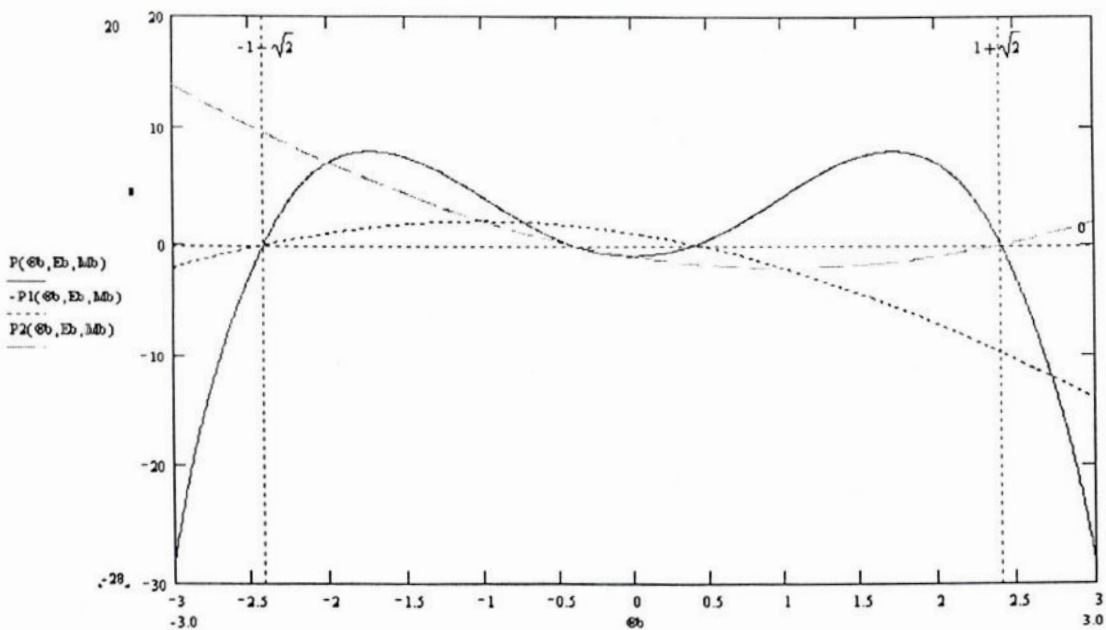
Figura 1. Possibilidades de movimento no plano  $(\bar{E}_1, \bar{M})$  pelo método de Henrard-Caranicolas.

**Região 1:** Como exemplo, tomemos o ponto **a** da Figura 1, no qual  $\bar{M} = 0$  e  $\bar{E}_1 = 1$ .  
Reportando-se à Figura 4.2, o gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  será:



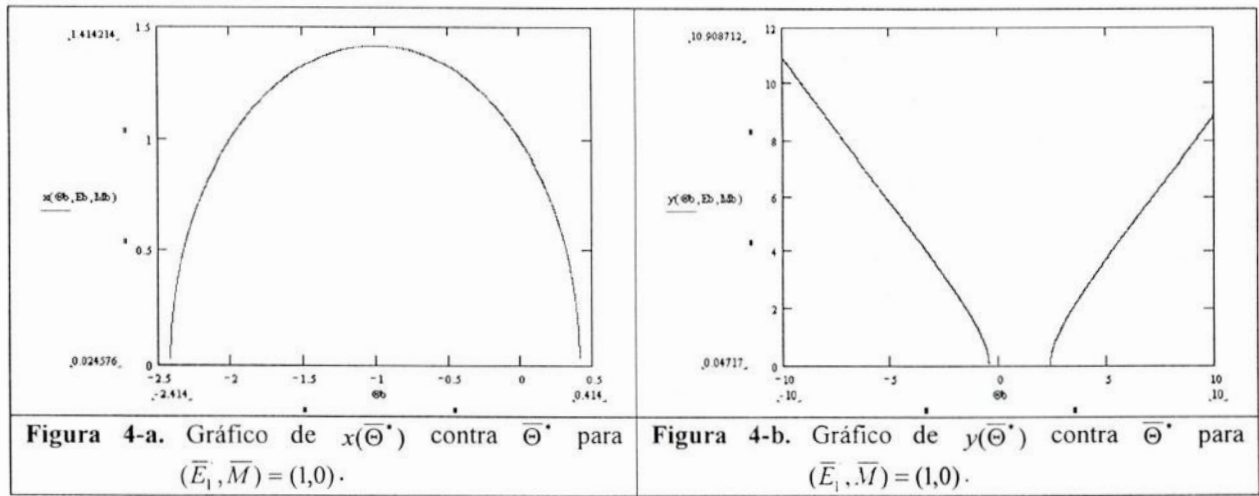
**Figura 2.** Gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  para a Região 1 de movimento com a condição  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (1,0)$ .

O gráfico dos polinômios  $-P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ ,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e  $P^*(\bar{\Theta}^*)$  é apresentado a seguir.



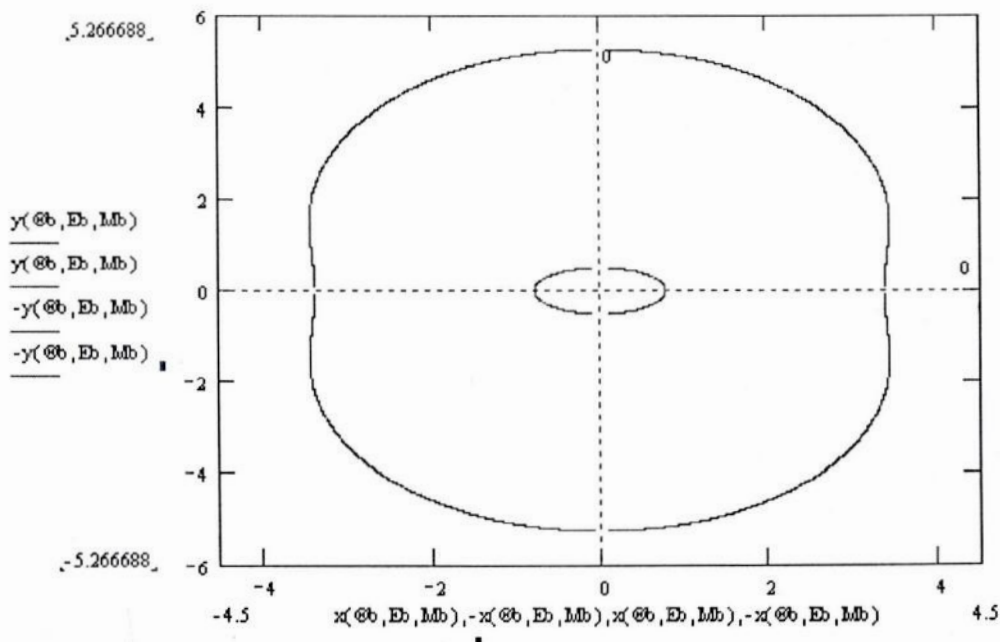
**Figura 3.** Gráfico dos polinômios  $-P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ ,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e de  $P^*(\bar{\Theta}^*) = -P_1^*(\bar{\Theta}^*) \cdot P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , tendo como abscissa  $\bar{\Theta}^*$ , para a Região 1 de movimento com  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (1,0)$ .

A figura anterior mostra que  $P^*(\bar{\Theta}^*)$  possui quatro raízes reais, quais sejam,  $-1-\sqrt{2}$  e  $-1+\sqrt{2}$  para  $P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ , e  $1-\sqrt{2}$  e  $1+\sqrt{2}$  para  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , que também podem ser vistas nos gráficos a seguir de  $x(\bar{\Theta}^*)$  e  $y(\bar{\Theta}^*)$  contra a variável  $\bar{\Theta}^*$ .



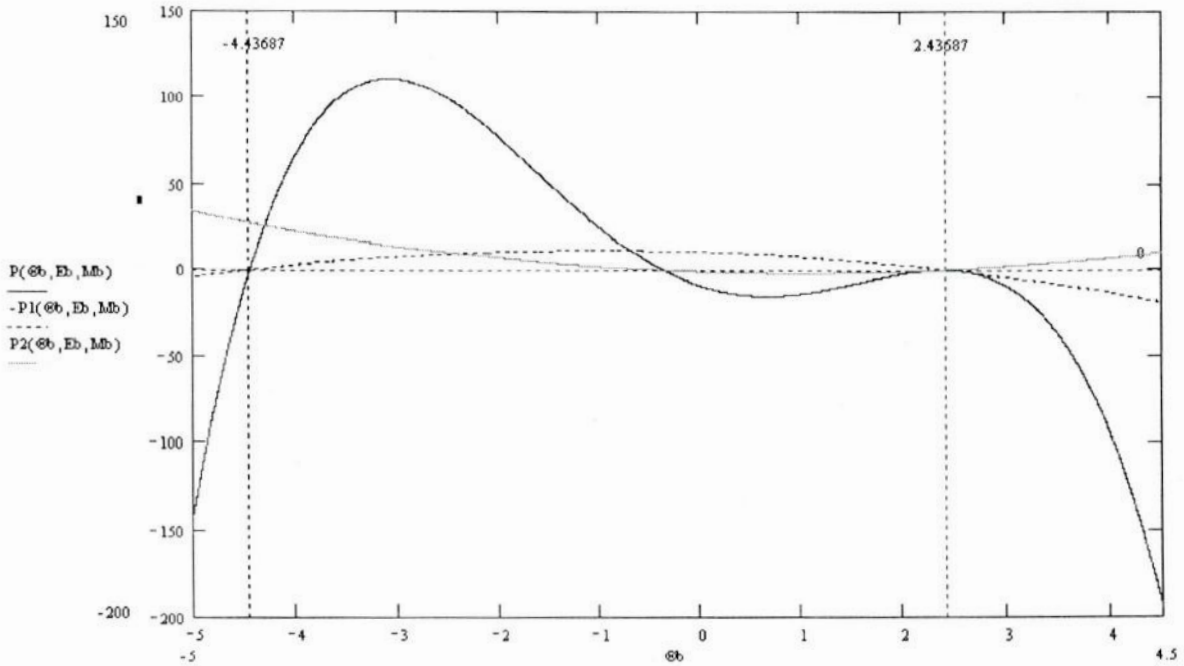
Conforme mostra a Figura 3, há movimento possível em duas regiões onde  $P^*(\bar{\Theta}^*) > 0$ , isto é, entre as raízes  $-1-\sqrt{2}$  e  $-1+\sqrt{2}$ , depois entre  $-1+\sqrt{2}$  e  $1+\sqrt{2}$ . Não há movimento entre  $1-\sqrt{2}$  e  $-1+\sqrt{2}$ , quando  $P^*(\bar{\Theta}^*) < 0$ . Assim, o asteróide na região 1 apresenta sempre movimento de circulação externa em torno da origem, conforme a Figura 2.

**Região 2:** Como exemplo, tomemos o ponto **b** da Figura 1, no qual  $\bar{M} = 5$  e  $\bar{E}_1 = 7$ . Reportando-se à Figura 4.3, o gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  será:



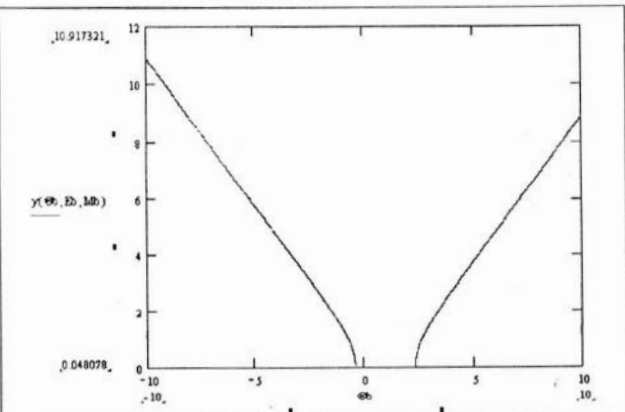
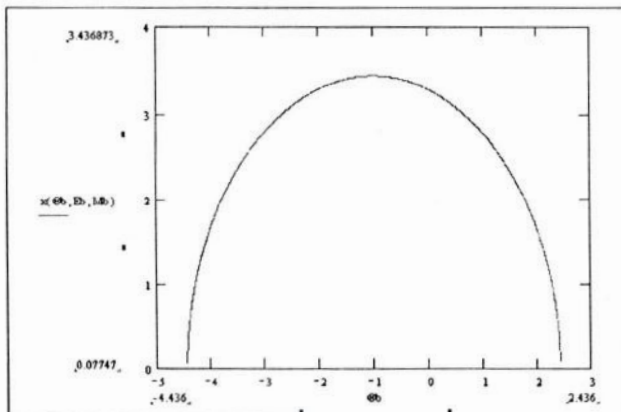
**Figura 5.** Gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  para a Região 2 de movimento com a condição  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (7,5)$ .

O gráfico dos polinômios  $-P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ ,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e  $P^*(\bar{\Theta}^*)$  é apresentado a seguir.



**Figura 6.** Gráfico dos polinômios  $-P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ ,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e de  $P^*(\bar{\Theta}^*) = -P_1^*(\bar{\Theta}^*) \cdot P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , tendo como abscissa  $\bar{\Theta}^*$ , para a Região 2 de movimento com  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (7,5)$ .

A figura anterior mostra que  $P^*(\bar{\Theta}^*)$  possui quatro raízes reais, aproximadamente,  $-4,43687$  e  $2,43687$  para  $P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ , e  $-0,34614$  e  $2,34614$  para  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , que também podem ser vistas nos gráficos a seguir de  $x(\bar{\Theta}^*)$  e  $y(\bar{\Theta}^*)$  contra a variável  $\bar{\Theta}^*$ .

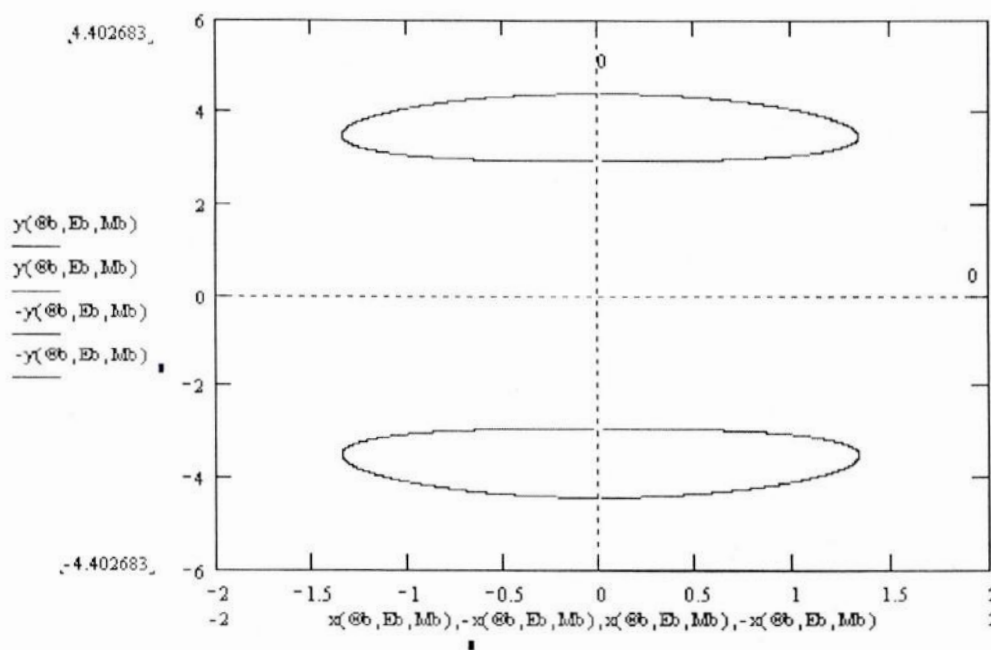


**Figura 7-a.** Gráfico de  $x(\bar{\Theta}^*)$  contra  $\bar{\Theta}^*$  para  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (7,5)$ .

**Figura 7-b.** Gráfico de  $y(\bar{\Theta}^*)$  contra  $\bar{\Theta}^*$  para  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (7,5)$ .

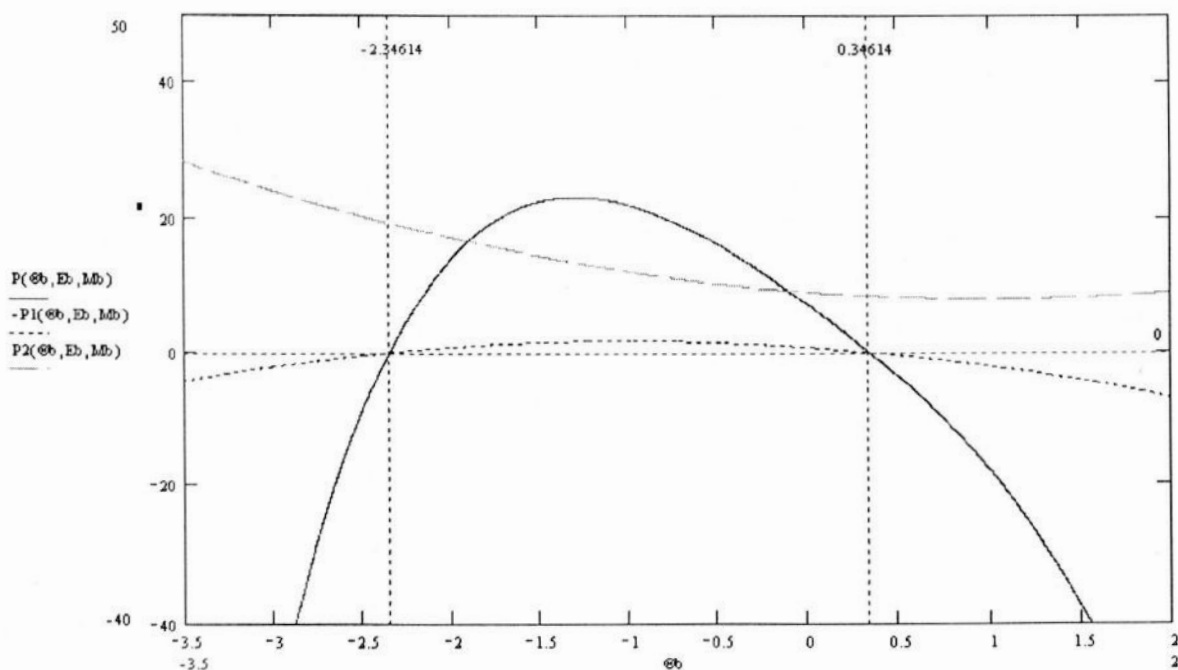
Conforme mostra a Figura 6, há movimento possível em duas regiões onde  $P^*(\bar{\Theta}^*) > 0$ , isto é, entre as raízes  $-4,43687$  e  $-0,34614$ , correspondendo à circulação externa e entre  $2,34614$  e  $2,43687$ , correspondendo à circulação interna. Não há movimento possível entre  $-0,34614$  e  $2,34614$ , quando  $P^*(\bar{\Theta}^*) < 0$ . Assim, o asteróide na região 2 apresenta duas possibilidades de movimento: circulação externa *ou* interna, conforme a Figura 5.

**Região 3:** Como exemplo, tomemos o ponto  $c$  da Figura 1, no qual  $\bar{M} = 5$  e  $\bar{E}_1 = -3$ .  
 Reportando-se à Figura 4.4, o gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  será:



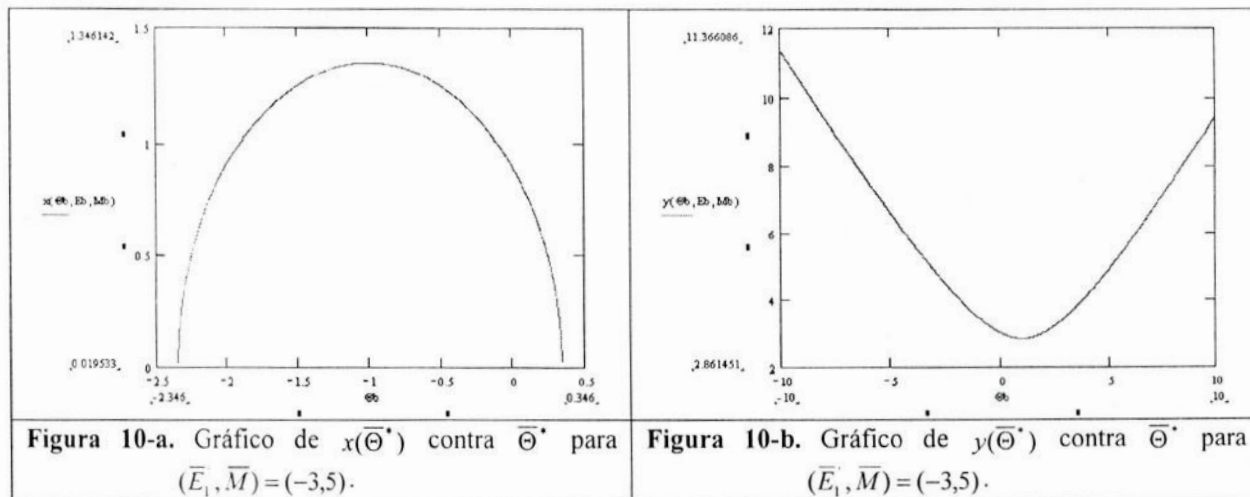
**Figura 8.** Gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  para a Região 3 de movimento com a condição  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (-3, 5)$ .

O gráfico dos polinômios  $-P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ ,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e  $P^*(\bar{\Theta}^*)$  é apresentado a seguir.



**Figura 9.** Gráfico dos polinômios  $-P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ ,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e de  $P^*(\bar{\Theta}^*) = -P_1^*(\bar{\Theta}^*) \cdot P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , tendo como abscissa  $\bar{\Theta}^*$ , para a Região 3 de movimento com  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (-3, 5)$ .

A figura anterior mostra que  $P^*(\bar{\Theta}^*)$  possui duas raízes reais e duas complexas, quais sejam, aproximadamente,  $-2,34614$  e  $0,34614$  para  $P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ , e  $(1 - 2,86145i)$  e  $(1 + 2,86145i)$  para  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , que também podem ser vistas nos gráficos a seguir de  $x(\bar{\Theta}^*)$  e  $y(\bar{\Theta}^*)$  contra a variável  $\bar{\Theta}^*$ .



Conforme mostra a Figura 9, o movimento só é possível entre as raízes  $-2,34614$  e  $0,34614$ , onde  $P^*(\bar{\Theta}^*) > 0$ , correspondendo à librações em torno de dois centros fixos, conforme a Figura 8.

**Região 4:** Como nesta região o movimento é proibido, não há gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$ . Porém, é instrutivo analisar o comportamento dos polinômios em alguns pontos desta região, no caso, os pontos **d**, **e**, **f**.

A situação mais óbvia de impossibilidade de movimento é quando o polinômio  $P^*(\bar{\Theta}^*)$  possui quatro raízes complexas conjugadas duas a duas, de forma que sempre  $P^*(\bar{\Theta}^*) < 0$ . Isto ocorre, por exemplo, no ponto **d** da Figura 1, no qual  $\bar{M} = -2$  e  $\bar{E}_1 = -6$ , com as raízes sendo aproximadamente  $(-1 \pm 2,55437)$  para  $P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ , e  $(1 \pm 1,58897)$  para  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ . O gráfico de,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e  $P^*(\bar{\Theta}^*)$  contra  $\bar{\Theta}^*$  é apresentado a seguir.

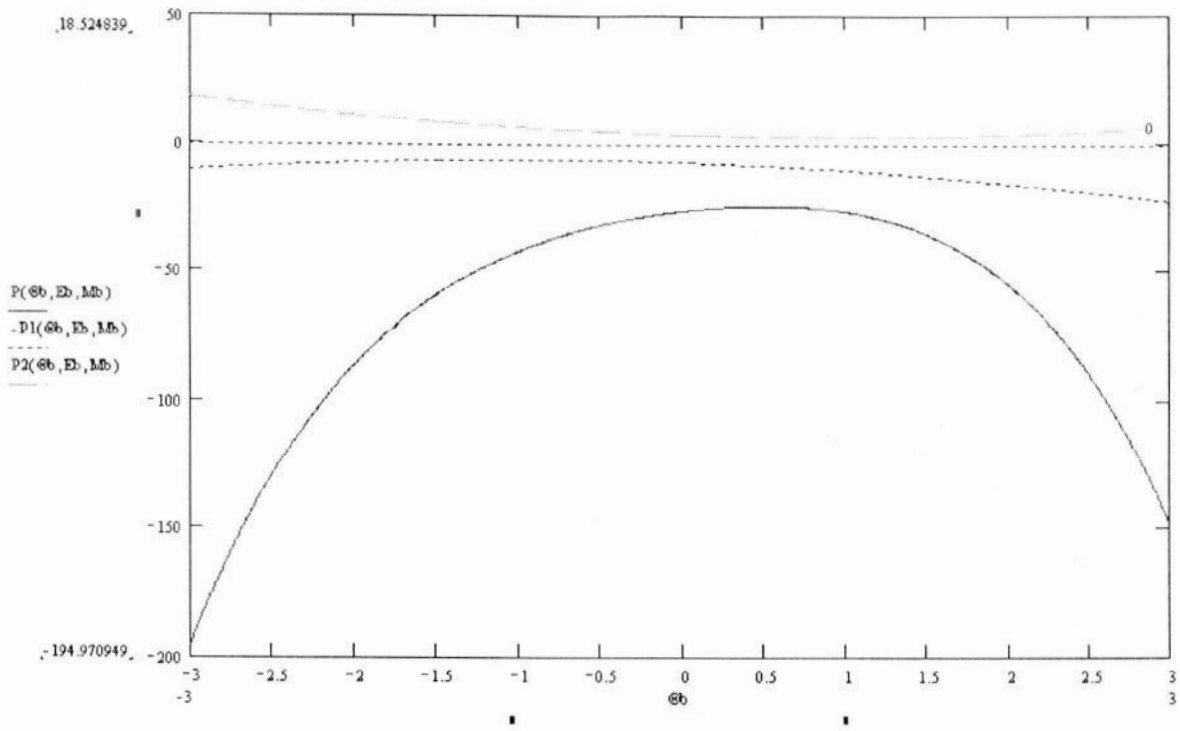
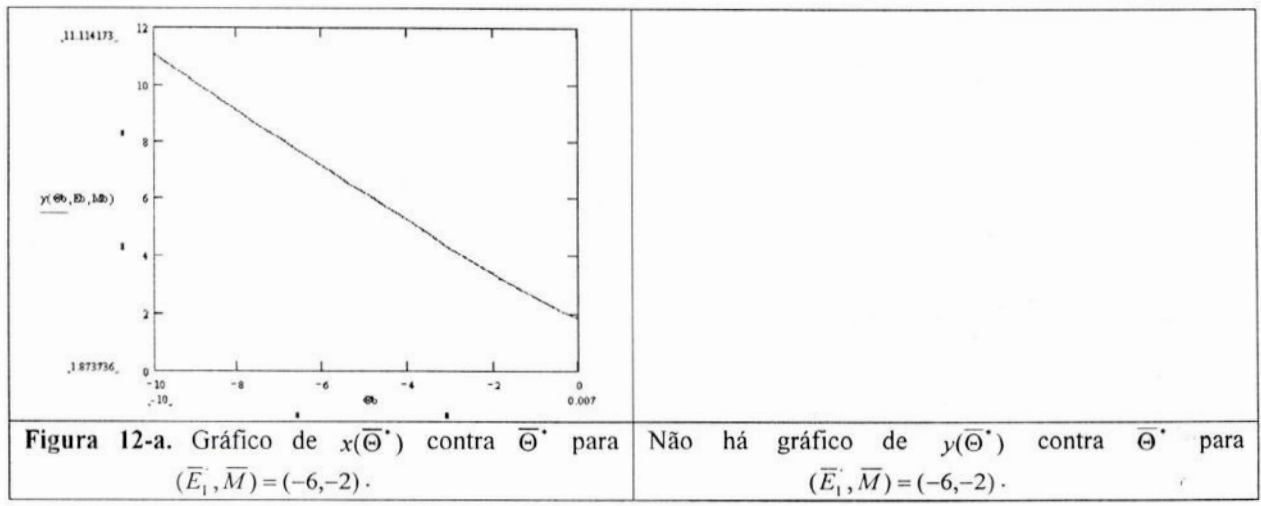


Figura 11. Gráfico dos polinômios  $-P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ ,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e de  $P^*(\bar{\Theta}^*) = -P_1^*(\bar{\Theta}^*) \cdot P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , tendo como abscissa  $\bar{\Theta}^*$ , para a Região 4 de movimento com  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (-6, -2)$ .

Haverá gráfico para  $y(\bar{\Theta}^*)$ , mas não para  $x(\bar{\Theta}^*)$ , que é sempre complexo:



Uma outra circunstância em que o movimento é impossível ocorre quando o polinômio  $P^*(\bar{\Theta}^*)$ , embora possuindo quatro raízes reais, é sempre negativo. Isto ocorre, por exemplo, no ponto e da Figura 1, no qual  $\bar{M} = -4,5$  e  $\bar{E}_1 = 3$ . com as raízes sendo aproximadamente  $(-1,75543$  e  $-0,24560)$  para  $P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ , e  $(-2,09339$  e  $4,09398)$  para  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ . O gráfico de  $-P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ ,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e  $P^*(\bar{\Theta}^*)$  contra  $\bar{\Theta}^*$  é apresentado a seguir.



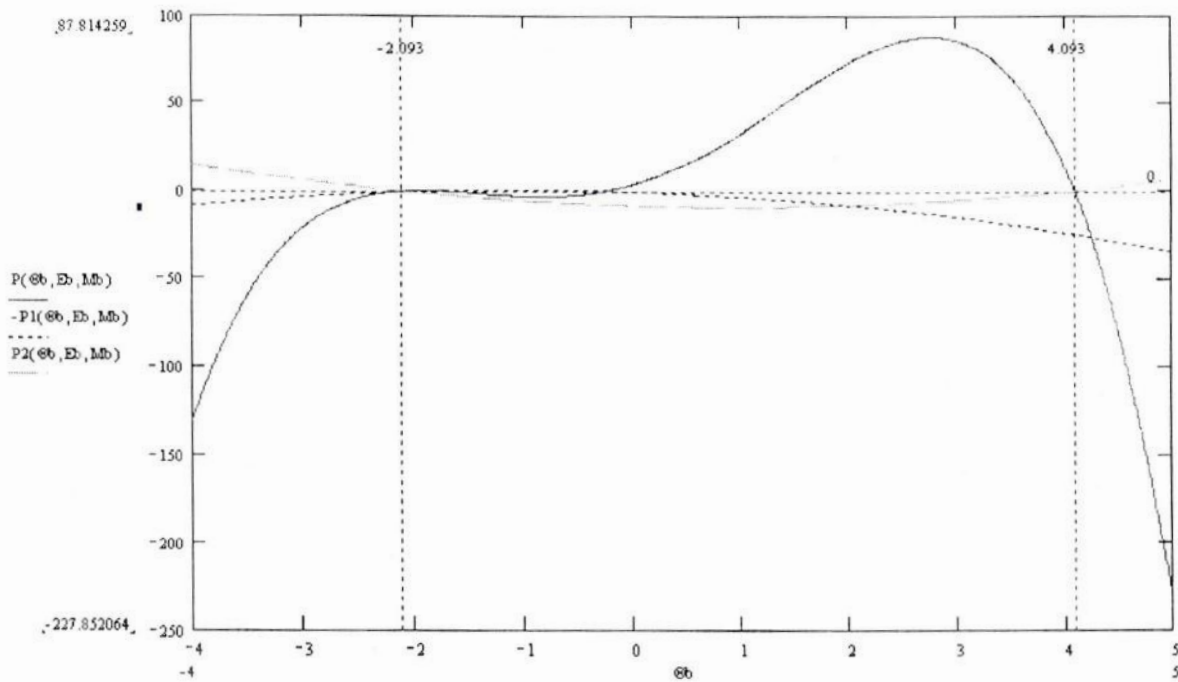


Figura 13. Gráficos dos polinômios  $-P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ ,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e de  $P^*(\bar{\Theta}^*) = -P_1^*(\bar{\Theta}^*) \cdot P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , tendo como abscissa  $\bar{\Theta}^*$ , para a Região 4 de movimento com  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (3, -4, 5)$ .

Neste caso, há gráficos tanto para  $x(\bar{\Theta}^*)$ , como para  $y(\bar{\Theta}^*)$ , isto é:

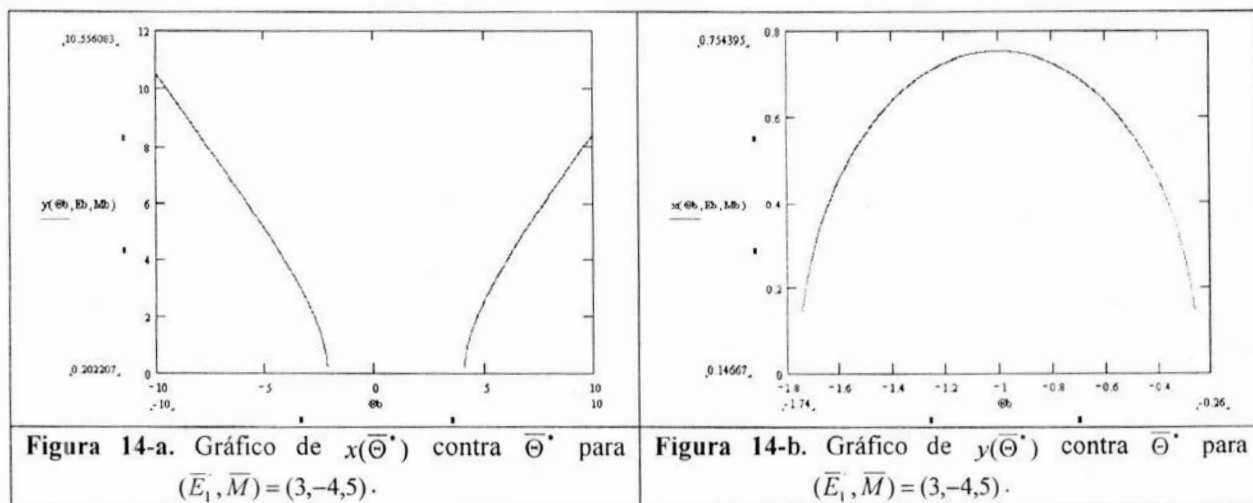


Figura 14-a. Gráfico de  $x(\bar{\Theta}^*)$  contra  $\bar{\Theta}^*$  para  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (3, -4, 5)$ .

Figura 14-b. Gráfico de  $y(\bar{\Theta}^*)$  contra  $\bar{\Theta}^*$  para  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (3, -4, 5)$ .

Finalmente, no ponto **f** da Figura 1, no qual  $\bar{M} = -4,5$  e  $\bar{E}_1 = 0$ ,  $P^*(\bar{\Theta}^*)$  possui duas raízes complexas conjugadas e duas raízes distintas, sendo elas, aproximadamente,  $(-1 \pm 1,55913)$  para  $P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ , e  $(-1,56302$  e  $3,56302)$  para  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ . O gráfico de,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e  $P^*(\bar{\Theta}^*)$  contra  $\bar{\Theta}^*$  é apresentado a seguir.

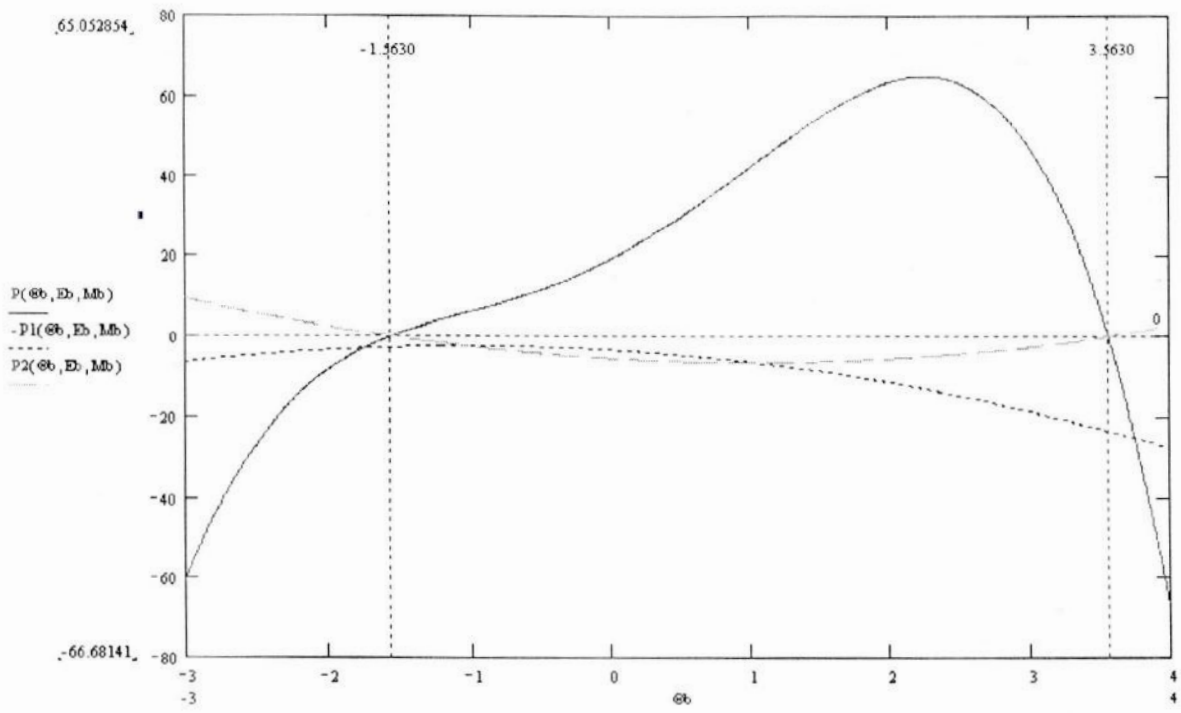
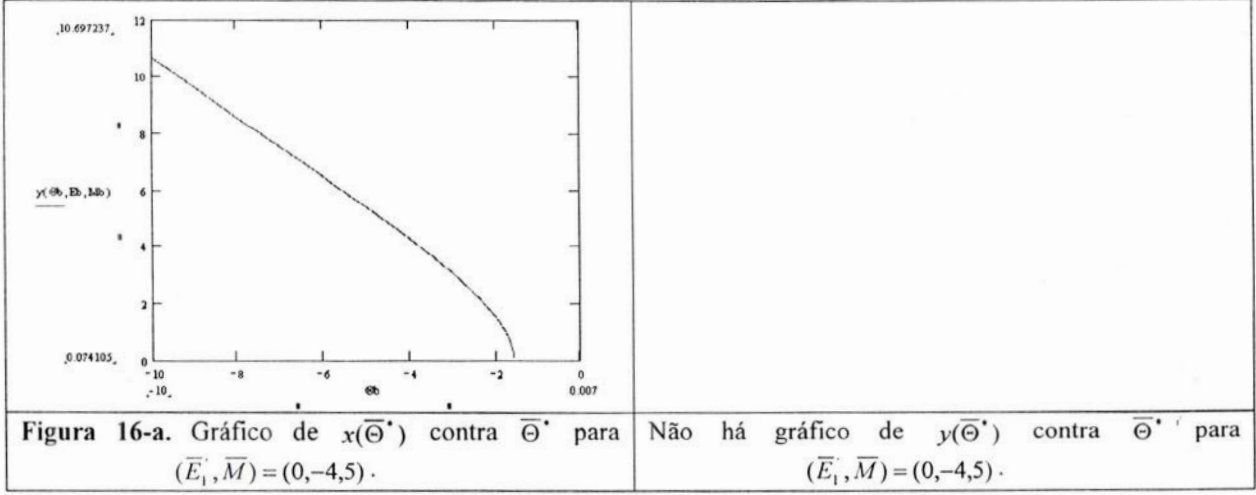


Figura 15. Gráficos dos polinômios  $-P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ ,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e de  $P^*(\bar{\Theta}^*) = -P_1^*(\bar{\Theta}^*) \cdot P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , tendo como abscissa  $\bar{\Theta}^*$ , para a Região 4 de movimento com  $(\bar{E}_1, \bar{M}) = (0, -4, 5)$ .

Neste caso, novamente há gráfico para  $y(\bar{\Theta}^*)$  contra a variável  $\bar{\Theta}^*$ , mas não para  $x(\bar{\Theta}^*)$ , que é sempre complexa:



**Separatrizes:** Conforme a Figura 1, as duas separatrizes corresponderão aos pontos A e B e, portanto, aos níveis  $\bar{M} = -2$  e  $\bar{M} = 2$ . A título de exemplo mostremos apenas uma separatriz, referente ao ponto A, isto é,  $\bar{M} = 2$  e  $\bar{E}_1 = 1 + A/D \cong 1,475$ . Reportando-se à Figura 4.5, o gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  será:

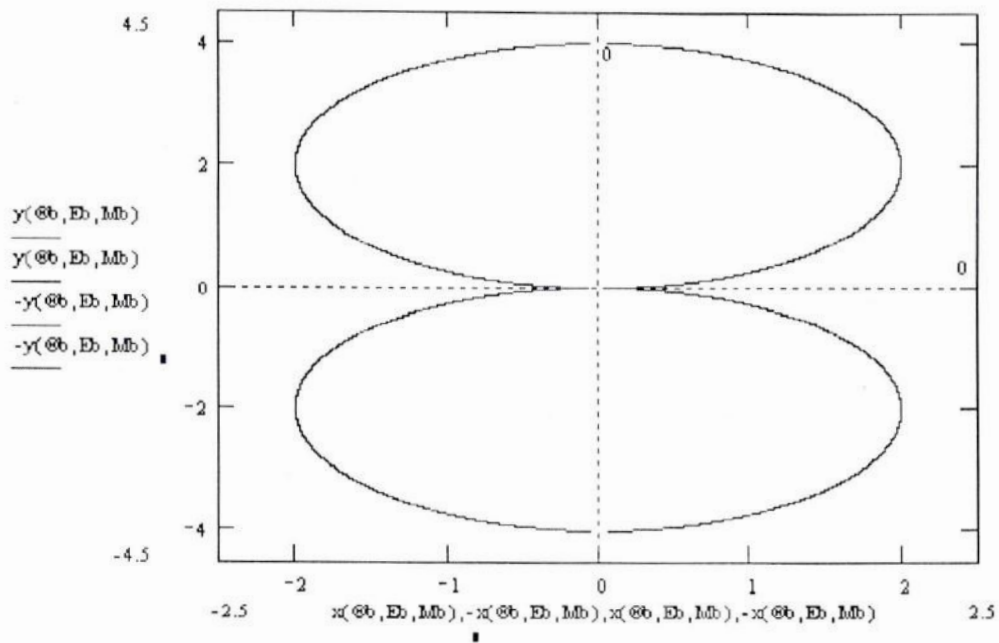


Figura 17. Gráfico de  $y(\bar{E}_1, \bar{M})$  contra  $x(\bar{E}_1, \bar{M})$  para a separatriz  $(\bar{E}_1, \bar{M}) \cong (1,475,2)$ .

O gráfico dos polinômios  $-P_1^*(\bar{\Theta}^*)$  e  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , bem como do produto  $P^*(\bar{\Theta}^*) = -P_1^*(\bar{\Theta}^*) \cdot P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , com respeito à variável  $\bar{\Theta}^*$  é apresentado a seguir.

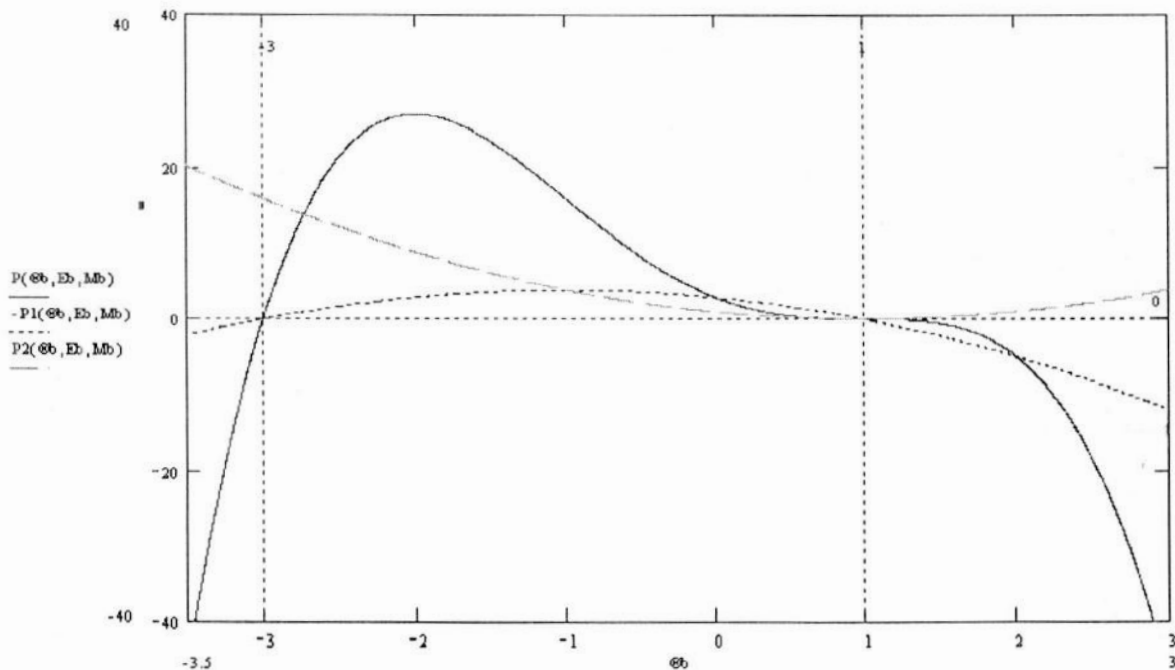
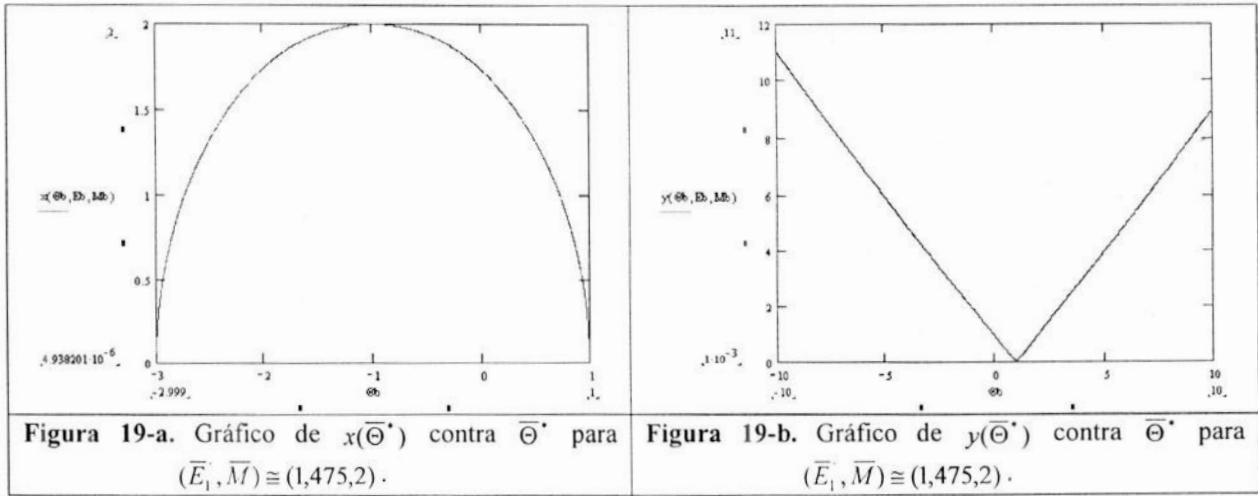


Figura 18. Gráficos dos polinômios  $-P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ ,  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$  e de  $P^*(\bar{\Theta}^*) = -P_1^*(\bar{\Theta}^*) \cdot P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , tendo como abscissa  $\bar{\Theta}^*$ , para a separatriz de  $(\bar{E}_1, \bar{M}) \cong (1,475,2)$ .

A figura anterior mostra que  $P^*(\bar{\Theta}^*)$  possui quatro raízes reais – uma sendo raiz tripla, quais sejam, -3 e 1 para  $P_1^*(\bar{\Theta}^*)$ , e 1 como raiz dupla para  $P_2^*(\bar{\Theta}^*)$ , que também podem ser vistas nos gráficos a seguir de  $x(\bar{\Theta}^*)$  e  $y(\bar{\Theta}^*)$  contra a variável  $\bar{\Theta}^*$ .



Conforme mostra a Figura 18, só há movimento possível na região entre as raízes -3 e 1, onde  $P^*(\bar{\Theta}^*) > 0$ , correspondendo à fronteira entre circulações externas da Região 1 e librações em torno de dois centros fixos da Região 3 de movimento.

## APÊNDICE II – QUADRO COMPARATIVO DE VARIÁVEIS E EQUAÇÕES DOS MÉTODOS DE SESSIN E HENRARD-CARANICOLAS

**Tabela 1.** Analogia entre as variáveis dos capítulos III e V.

Sessin Capítulos II e III	Henrard-Caranicolas Capítulo V
$H_o = H_o(\Theta, K, H)$	$H_o = H_o(\Theta^*, x, y)$
$K$	$x$
$H$	$y$
$\varphi_j'$	$M$
$\Theta = \frac{L - L_R}{L_R} = \frac{\varphi_j'}{L_R}$	$\dot{v}$
$2\varphi_j' = 2(L - L_R) = 2L_R\Theta$	$(N-S)$
$\Theta$	$\Theta^* = \Theta - \frac{A'}{4L_R C}$
$K = \pm\sqrt{-P_1(\Theta)/2}$	$x = \pm\sqrt{-P_1^*(\Theta^*)}$
$H \pm\sqrt{+P_2(\Theta)/2}$	$y = \pm\sqrt{+P_2^*(\Theta^*)}$
$K = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}A_1\Theta^2 - E_1 + 4A_4(\Theta + G)\right]}$	$x = \pm\sqrt{-\left\{\left(\frac{2CL_R^2}{D}\right)\Theta^{*2} + (2L_R)\Theta^* - \left[M\left(1 - \frac{A}{2D}\right) + \frac{E_1}{2D}\right]\right\}}$
$H = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}A_1\Theta^2 - E_1 - 4A_4(\Theta + G)\right]}$	$y = \pm\sqrt{\left\{\left(\frac{2CL_R^2}{D}\right)\Theta^{*2} - (2L_R)\Theta^* + \left[M\left(1 + \frac{A}{2D}\right) - \frac{E_1}{2D}\right]\right\}}$

**Tabela 2.** Analogia entre as equações e polinômios normalizados dos capítulos III e V.

	<b>Método de Sessin (Capítulo III)</b>	<b>Método de Henrard-Caranicolas (Capítulo V)</b>
<b>Equações</b>	$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\Lambda} &= -2HK \\ \frac{dH}{d\Lambda} &= -\frac{1}{2}A_1\Theta H + 2A_4K \\ \frac{dK}{d\Lambda} &= \frac{1}{2}A_1\Theta H + 2A_4H \end{aligned} \right. \quad (3.2)$ $\frac{d\Theta}{d\Lambda} = \sqrt{-P(\Theta)} \quad (3.15)$	$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Theta^*}{dt} &= B_0 xy, & B_0 &= -\frac{2D}{L_R} \\ \frac{dx}{dt} &= +4CL_R\Theta^*y + B_1y \\ \frac{dy}{dt} &= -4CL_R\Theta^*x + B_1x, & B_1 &= 2D \end{aligned} \right. \quad (5.25)$ $\frac{d\Theta^*}{dt} = B_0\sqrt{-P^*(\Theta^*)} \quad (5.23)$
<b>Polinômios normalizados</b>	$\bar{P}_1(\bar{\Theta}) = 0,5\bar{\Theta}^2 + 4\bar{\Theta} + (8\bar{G} - 4\bar{E}_1) \quad (3.26)$ $P_2(\bar{\Theta}) = 0,5\bar{\Theta}^2 - 4\bar{\Theta} - (8\bar{G} + 4\bar{E}_1) \quad (3.26a)$ $\bar{\Theta} = \frac{A_1}{A_4}\Theta$ $P_1(\Theta) = \frac{A_4^2}{A_1}\bar{P}_1(\bar{\Theta})$ $P_2(\Theta) = \frac{A_4^2}{A_1}\bar{P}_2(\bar{\Theta})$	$\bar{P}_1^*(\bar{\Theta}^*) = \bar{\Theta}^{*2} + 2\bar{\Theta}^* - \left[ \bar{M} \left( 1 - \frac{A}{2D} \right) + \bar{E}_1 \right] \quad (5.37)$ $\bar{P}_2^*(\bar{\Theta}^*) = \bar{\Theta}^{*2} - 2\bar{\Theta}^* + \left[ \bar{M} \left( 1 + \frac{A}{2D} \right) - \bar{E}_1 \right] \quad (5.38)$ $\bar{\Theta}^* = (2CL_R / D)\Theta^*$ $\bar{P}_1^*(\bar{\Theta}^*) = \frac{2C}{D}P_1^*(\Theta^*)$ $\bar{P}_2^*(\bar{\Theta}^*) = \frac{2C}{D}P_2^*(\Theta^*)$
<b>Normalização</b>	$\bar{G} = \frac{A_1}{2A_4}G$	$\bar{M} = \left( \frac{2C}{D} \right) M$

**Tabela 3.** Analogia entre as condições normalizadas de pontos de equilíbrio dos Métodos de Sessin e de Henrard-Caranicolas.

Condição	<i>Método de Sessin (Capítulo III)</i>	Condição	<i>Método de Henrard-Caranicolas (Capítulo V)</i>
$K = 0$ $H = 0$	$\bar{G} = \pm \sqrt{\bar{E}_1}$ (3.23)	$x = 0$ $y = 0$	$\bar{M} = -\frac{A}{D} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{D}\right)^2 + 4\bar{E}_1}$ (5.31a)
$K \neq 0$ $H = 0$	$\bar{G} = -\frac{\bar{E}_1}{2} - 1$ (3.24)	$x \neq 0$ $y = 0$	$\bar{M} = \frac{2D}{(A+2D)}\bar{E}_1 + \frac{2D}{(A+2D)}$ (5.32a)
$K = 0$ $H \neq 0$	$\bar{G} = +\frac{\bar{E}_1}{2} + 1$ (3.25)	$x = 0$ $y \neq 0$	$\bar{M} = \frac{2D}{(A-2D)}\bar{E}_1 + \frac{2D}{(A-2D)}$ (5.33a)

## REFERÊNCIAS

- Borderies, N., and Goldreich, P.: 1984, "A simple derivation of capture probabilities", *Celest. Mech.*, **32**, 127-136.
- Brouwer, D. and Clemence, G. M.: 1961, "Methods of celestial mechanics", Academic Press, New York.
- Brouwer, D.: 1963, "The problem of the Kirkwood gaps in the asteroid belt", *Astron. Journal*, **68**, 152-158
- Ferraz-Mello, S. e Sessin, W.: 1984, "A note on resonance in regular variables and averaging", *Celestial Mechanics.*, **34**, 453-457.
- Ferraz-Mello, S. 1987, "Averaging the elliptic asteroidal problem near a first order resonance", *Astron. Journal*, **94**, no.1, 208-212.
- Ferraz-Mello, S. e Klafke, J. C.: 1991, "Predictability, stability and chaos in n body dynamical systems" (A.E. Roy, ed.), Plenum Press, New York, 177-184.
- Ferraz-Mello, S. e Michtchenko, T.: 1995, "Comparative study of the asteroidal motion in the 3:1 and 2:1 resonances with Jupiter", *Astron. Astrophys.*, **303**, 945-963.
- Ferraz-Mello, S. e Michtchenko, T.: 1996, "Chaos and the dynamics of resonant asteroids", *Rev. Mex. Astron.*, **4**, 27-34.
- Ferraz-Mello, S. e Michtchenko, T.: 1996, "Comparative study of the asteroidal motion in the 3:1 and 2:1 resonances with Jupiter", *Astron. Astrophys.*, **310**, 1021-1035.
- Gladman, B. J., Migliorini, F., Morbidelli, A., Zappala, V., Michel, P., Cellino, A., Froeschle, C., Levison, H. F., Bailey, M., Duncan, M.: 1997, "Dynamical lifetimes of objects injected into asteroid belt resonances" *Science*, **277**, 197.
- Guillens, S. A.: 1998, "Um estudo do espaço de fase para a ressonância orbital 3:1", Tese de Doutorado, *Instituto Tecnológico da Aeronáutica*, São José dos Campos.
- Guillens, S. A., Vieira Martins, R., Silva Gomes, R.: 2002, "A global study of the 3:1 resonance neighborhood: a search for unstable asteroids", *Astron. Journal*, **124**, no.1, 2322-2331.
- Hadjidemetriou, J. D.: 1993, "Asteroid motion near the 3:1 resonance", *Celest. Mech.*, **56**, 563-599.
- Henrard, J. e Caranicolas, N. D.: 1990, "Motion near the 3/1 resonance of the planar elliptic restricted three body problem", *Celest. Mech.*, **47**, 99-121.
- Henrard, J. e Lemaitre, A.: 1986, "The reducing transformation and apocentric librators", *Celest. Mech.*, **38**, 335-344.



- Henrard, J. e Lemaître, A.: 1986, "A perturbation method for problems with two critical arguments", *Celest. Mech.* **39**, 213-238.
- Hirayama, H.: 1918, "Groups of asteroids probably of common origin", *Astron. Journal*, **31**, n.743, 185-188.
- Hirayama, H.: 1923, "Families of asteroids", *Annales de l'Observatoire astronomique de Tokyo* **11**, 55-93.
- Koiller, J., Balthazar, J. M., Yokoyama, T.: 1987, "Relaxation-chaos phenomena in celestial mechanics. I. On wisdom's model for the 3/1 Kirkwood gap", *Physics D.*, **26**, 85.
- Lemaître, a.: 1984, "High order resonances in the restricted three-body problem" *Celest. Mech.*, **32**, 109-126.
- Milani, A. and Nobili, A.: 1984, "Resonance structure of the outer asteroid belt" *Celest. Mech.*, **34**, 343-355.
- Morbidelli, A. and Wokroulický, D.: 2003, "The Yarkovsky-driven of near-Earth asteroids" *Icarus*, **163**, 120-134.
- Murray, C. D.: 1996, "Real and imaginary Kirkwood gaps", *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **279**, 978-986.
- Murray, C. D. e Dermott, S. F.: 1999, "Solar system dynamics", Cambridge University Press.
- Neishtadt, A.: 1997, "Scattering by resonances" *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **65**, 1-20.
- Stuchi, T. J.: 1992, "Mappings for the first order asteroidal resonance", *IAUS*, **152**, 391-394.
- Sessin, W., Bressane, L. B. R.: 1988, "A simplified model for the first-order resonance applied to the Hilda Group and to Thule", *Icarus*, **75**, 97.
- Vokrouhlický, D., Brož, M.: 1999, "An improved model of the seasonal Yarkovsky force for regolith-covered asteroid fragments" *Astron. Astrophys.*, **350**, 1079-1084.
- Vokrouhlický, D., Brož, M., Bottke, W.F., Nesvorný, D., Morbidelli, A.: 2005, "Dynamics of Populations of Planetary Systems", *Proceedings of IAU Colloquium #197*, Eds., Z. Knezevic and A. Milani; Cambridge University Press, p.145-156.
- Wisdom, J.: 1982, "The origin of the Kirkwood's gaps: A mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability", *Astron. J.*, **85**, 112-1133.
- Wisdom, J.: 1982, "Canonical solution of the two critical argument problem", *Celest. Mech.*, **38**, 175-180.

- Wisdom, J.: 1983, "Chaotic behaviour and the origin of the 3/1 Kirkwood gap" *Icarus*, **56**, 51-289.
- Wisdom, J.: 1985, "A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability" *Icarus*, **63**, 272.
- Yokoyama, T. and Sato, M.: 1986, "On the 3:1 planar and circular resonant problem" *Celest. Mech.*, **37**, 1-25.