

# A Quantização do Campo Escalar em Espaços Curvos

Diogo C. F. Celani

Dissertação de Conclusão do Curso de Graduação em Astronomia

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Observatório do Valongo

Orientado por Nelson Pinto-Neto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

ICRA

... À memória de Bruno Celani e Luiz Celani.

---

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>iv</b>
<b>Notação</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 O Campo Escalar Clássico</b>	<b>6</b>
2.1 Princípio da Ação e Equação de Euler-Lagrange . . . . .	7
2.2 Teorema de Noether . . . . .	7
Tensor Energia-Momento . . . . .	10
2.3 Equação de Klein-Gordon . . . . .	10
Solução Geral . . . . .	11
Limite Não-Relativístico . . . . .	13
Corrente Conservada . . . . .	14
Energia e Momento . . . . .	14
<b>3 A quantização no espaço de Minkowsky</b>	<b>15</b>
3.1 Formalismo de Heisenberg . . . . .	16
3.2 Oscilador Harmônico Unidimensional . . . . .	17
3.3 Quatização do Campo de Klein-Gordon . . . . .	19
3.4 Álgebra de Operadores e Causalidade . . . . .	22
3.5 Causalidade e Antipartículas . . . . .	24
3.6 Criação de Partículas por uma Fonte Externa . . . . .	26
<b>4 A quantização em espaços curvos</b>	<b>28</b>
4.1 Equação de Klein-Gordon . . . . .	29

---

---

4.2	Quantização e Coeficientes de Bogoliubov . . . . .	31
<b>5</b>	<b>O Efeito Unruh</b>	<b>36</b>
5.1	Introdução . . . . .	37
5.2	Movimento Acelerado . . . . .	37
5.3	Referencial Co-movente . . . . .	38
5.4	Quantização no Espaço de Rindler . . . . .	41
5.5	Coeficientes de Bogoliubov . . . . .	42
5.6	Números de Ocupação e a Temperatura Unruh . . . . .	43
5.7	Efeito Hawking . . . . .	44
<b>6</b>	<b>O campo escalar em modelos de Friedmann-Robertson-Walker</b>	<b>47</b>
6.1	Introdução . . . . .	48
6.2	Equação de Klein-Gordon . . . . .	48
6.3	Exemplo de Acoplamento Conforme . . . . .	50
6.4	Exemplo de Acoplamento Mínimo . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Conclusão Final</b>	<b>57</b>
<b>8</b>	<b>Apêndices</b>	<b>59</b>
8.1	Uma Breve Revisão de Relatividade Geral . . . . .	60
8.2	Princípio da Ação em Espaço-Tempos Curvos: Um Exemplo de Cálculo Variacional . . . . .	63
8.3	Efeito Unruh com Partículas Massivas . . . . .	66
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>70</b>

---

# Agradecimentos

Em 2006, fui apresentado ao meu orientador, Nelson Pinto-Neto, no CBPF. Este trabalho é fruto da iniciação científica que fiz desde então.

Agradeço a Jailson Alcaniz, com quem fiz minha primeira iniciação científica e que me apresentou ao Nelson, naquela época eu não estava muito entusiasmado com o tema que estudava, mas mesmo assim ele tinha paciência comigo e foi o primeiro exemplo de pesquisador que eu conheci fora do Valongo; meu orientador Nelson, a quem admiro e respeito, e que sempre teve muita paciência comigo; ao professor Alexandre Lyra do Observatório do Valongo, pelas nossas conversas interessantes a respeito de física e astronomia, e pela sua eterna boa vontade sempre que precisei de referências; ao professor Carlos Rabaça por aceitar com entusiasmo fazer parte da minha banca examinadora, aliás, vi esse entusiasmo em suas aulas também; a Rosa, incansável, por me ajudar a resolver todos os meus pepinos na faculdade.

Agradeço a toda a minha turma, especialmente Fernanda e Bruna, por me emprestarem seus cadernos super organizados quando eu precisava; Pedro Jungle, pelos churrascos de fim de semana, espero que nossa turma continue se reunindo; Silvio Diogo, meu quase xará, e Silvio Bocelito Santos, nossas festas eram as melhores; Aion, que meu recebeu em sua casa no nordeste, foi engraçado te ver tentando surfar; Mariana, que me ajudou em várias listas de exercícios; Bernardo, meu parceiro de viagens internacionais, tem me ajudado bastante no mestrado, valeu, cara, Europe!!

Enfim, agradeço a todas as pessoas que fizeram e fazem parte da minha vida, com quem aprendi e aprendo a caminhar: minha família, meus amigos e meus professores.

Agradeço ao CNPQ que financiou a minha bolsa de iniciação científica e a de muitos outros alunos, contribuindo para o desenvolvimento científico e tecnológico no Brasil.

---

# Notação

Antes de discutir o trabalho propriamente dito, é necessário fixar a notação. As convenções que usaremos aqui infelizmente não são de forma alguma universais.

Em primeiro lugar, exceto quando indicado, usamos um sistema de unidades em que  $\hbar = c = 1$ , onde  $\hbar$  é a constante de Planck e  $c$  é a velocidade da luz.

Um ponto qualquer do espaço-tempo é denotado (em coordenadas cartesianas) por  $x = (t, \vec{x})$  ou  $x = x^\mu$ , com  $\mu = 0, 1, 2$  ou  $3$ . Em duas dimensões, isto é, em um espaço-tempo 1+1 dimensional, o símbolo de vetor na componente espacial é omitido, e escrevemos  $x^\mu = (t, x)$ .

$\eta_{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu}$  denotam respectivamente o tensor métrico de Minkowski e um tensor métrico arbitrário, com assinatura -2 em 4 dimensões. O intervalo entre dois eventos próximos no espaço-tempo,  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$ , é definido como  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ . Quando  $ds^2$  é maior, menor ou igual a zero, dizemos que o intervalo é tipo-tempo, tipo-espaço, ou tipo-luz, respectivamente.

O operador  $\partial_\mu$  representa a derivada parcial com relação a  $x^\mu$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

---

# 1

## Introdução

“Exploration is really the essence of the human spirit.”

Frank Frederick Borman.

---

---

A teoria quântica de campos é considerada uma das mais fundamentais teorias da natureza, sendo o alicerce sobre o qual se edificam o modelo padrão de física de partículas e outras teorias mais modernas, e é atualmente a descrição mais precisa das leis naturais.

O conceito de campo está intrinsecamente ligado ao conceito de partículas. Em mecânica clássica, uma partícula é uma representação de um objeto cujo tamanho, forma, e estrutura são irrelevantes em um dado contexto, precisamente localizado em algum ponto do espaço em cada instante de tempo. A ênfase está nas leis de movimento de massas pontuais sob a influência de forças, não na natureza dos campos de forças. Essa noção de massa pontual é diagonalmente oposta à noção de campo, que, por definição, é algo que se espalha sobre uma região do espaço.

Em contrapartida, os objetos principais de estudo na eletrodinâmica clássica são campos. A noção de campo foi concebida para explicar como as forças elétricas e magnéticas são transmitidas. Maxwell sintetizou os trabalhos de Faraday e outros e originou a teoria do eletromagnetismo, a primeira teoria de campo. O conceito de campo traz consigo naturalmente a noção de causalidade, rejeitando a idéia de ação à distância.

No entanto, a física clássica não é capaz de explicar alguns fenômenos de origem microscópica. O ano de 1900 marca o nascimento da mecânica quântica quando, a fim de explicar o espectro de energia da radiação do corpo negro, Max Planck postulou que os processos de emissão e absorção da radiação por átomos ocorrem descontinuamente em forma de quanta. A partir da lei de radiação de Planck e do efeito fotoelétrico, Albert Einstein introduziu a noção de quanta de luz 5 anos mais tarde, e concluiu que não só o mecanismo atômico de emissão e absorção da radiação é quantizado, mas que a própria radiação eletromagnética consiste de pacotes de energia, os fótons. O efeito Compton confirmou essa interpretação. Foram necessárias mais duas décadas para que Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger e Paul Dirac desenvolvessem o formalismo da então nova teoria quântica.

A passagem da mecânica clássica para a mecânica quântica é bastante drástica. Quantidades físicas ordinárias são representadas por operadores que não comutam necessariamente entre si e o princípio da incerteza de Heisenberg, que limita a precisão de medida de pares de variáveis canonicamente conjugadas, rejeita a completa predictabilidade da física clássica. Uma partícula se comporta ora como uma onda clássica, ora como um corpúsculo clássico. Essa dualidade onda-partícula é completamente anti-intuitiva e combina assim a dicotomia clássica de partículas e campos, uma vez que ondas são exemplos

---



---

de campos.

A mecânica quântica permite o estudo de qualquer sistema dinâmico composto de partículas com forças instantâneas agindo sobre elas, desde que se encontre uma função hamiltoniana adequada. No entanto, a teoria não pode ser aplicada a partículas com velocidades relativísticas, nem pode descrever processos em que partículas são criadas ou destruídas. Naturalmente, isso ocorre porque a mecânica quântica não é consistente com a teoria da relatividade, que implica a equivalência entre massa e energia, donde segue a possibilidade de que novas partículas sejam produzidas quando partículas interagindo possuem uma energia cinética total maior que a massa de repouso total dos produtos da interação.

Essa necessidade de conciliar a teoria relativística com a mecânica quântica culminou com o surgimento da teoria quântica de campos cujas fundações foram postas por Paul Dirac.<sup>1</sup> Neste formalismo, partículas são interpretadas como estados excitados com propriedades bem definidas que dependem da natureza do campo. As interações entre estas partículas são causadas por outros campos cujas excitações são outras partículas. Neste sentido, campos são mais fundamentais que partículas, sendo estas quantidades discretas de energia de um dado campo. Por exemplo, a interação entre elétrons e pósitrons é causada pelo campo eletromagnético e pode ser imaginada como uma troca de fótons. Os elétrons e os pósitrons por sua vez representam o quanta de um campo de elétron-pósitron. A quantização de campos permite a descrição de processos em que há criação ou aniquilação partículas. Estes e outros processos ocorrem através de interações entre os campos.

A definição de partículas passa então por uma nova modificação, de dualidade onda-partícula para quanta de um campo. Um campo não representa, portanto, uma única partícula mas sim um sistema com um número variável de partículas. Após a quantização, os campos e seus momentos conjugados são operadores. Estes operadores são definidos em cada ponto do espaço-tempo, ou seja, dependem também do tempo, de forma que a representação de Heisenberg é a mais natural em teoria quântica de campos. Um campo de operadores consiste em operadores de criação e de aniquilação de quantum desse campo. Os estados de vários números de partículas podem ser combinados em um mesmo espaço de Hilbert em um formalismo, chamado segunda quantização, onde há um campo de operadores que satisfaz uma equação relativística. Cada partícula tem seu

---

<sup>1</sup> Dirac (1927).

---

---

próprio campo, cada campo com sua equação correspondente. Assim, fótons são quanta do campo eletromagnético, que satisfaz às equações de Maxwell; elétrons são quanta do campo de Dirac, que satisfaz à equação de Dirac; e partículas escalares são quanta do campo de Klein-Gordon, que satisfaz à equação de Klein-Gordon.

A teoria quântica de campos é, portanto, a ferramenta natural para o estudo das partículas e suas interações. Em suma, o modelo padrão de física de partículas busca explicar três das quatro forças conhecidas - a força eletromagnética, a força nuclear forte e a força nuclear fraca - que definem a dinâmica dos constituintes básicos de toda a matéria conhecida no universo.

Contudo, o objetivo deste trabalho não é estudar as interações em si, mas o efeito da gravitação nos campos. Então, vamos considerar somente o mais simples de todos os campos, o campo escalar livre. Com isso, evitamos outras dificuldades associadas, por exemplo, à polarização dos fótons ou ao princípio da exclusão de Pauli que governa os férmions. A teoria quântica de campos em espaços curvos é uma teoria semi-clássica, pois trata da quantização de campos em arenas clássicas, ou seja, os campos são operadores atuando em um espaço de Hilbert, enquanto a geometria do espaço-tempo é determinada pelas equações clássicas de Einstein.

Como tem apenas um componente, o campo escalar descreve partículas escalares, ou seja, de spin zero. Isso significa que o campo escalar é a representação trivial do grupo de Poincaré. Não há nenhuma partícula elementar estável de spin zero conhecida. Entretanto, para os nossos propósitos, partículas escalares podem ser consideradas estáveis em comparação com o tempo de Planck,  $t_p \sim 10^{-44}$  s, ou seja, podemos considerar que em uma escala de tempo tão pequena não há interações. Por exemplo, o principal modo de decaimento do pión neutro é  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ , com uma meia vida de  $\tau_{\pi^0} \sim 10^{-16}$  s. Espera-se que a teoria quântica de campos em espaços curvos seja válida até a escala de Planck, onde os efeitos quânticos da gravitação se tornam importantes.<sup>2</sup>

É interessante observar que a ocorrência de flutuações quânticas do campo gravitacional em escalas subatômicas poderia, em princípio, dificultar e até mesmo impossibilitar a construção de observadores inerciais locais, o que descaracterizaria completamente a teoria da relatividade geral de Einstein. Entretanto, como já foi dito antes, vamos nos limitar somente ao estudo dos efeitos quânticos do campo escalar na presença de campos gravitacionais clássicos. Além disso, não vamos considerar nenhum efeito de perturbação da

---

<sup>2</sup> Birrel & Davies (1982).

métrica, ou seja, o campo escalar é influenciado pela geometria do espaço-tempo, mas não é forte o suficiente para influenciar a mesma.

Começamos no capítulo 2 com um breve estudo do campo escalar segundo o formalismo da teoria clássica de campos. Com isso, apresentamos o princípio da ação, que permite a determinação das equações dinâmicas dos campos, e o teorema de Noether, que permite, por exemplo, a construção do tensor-energia momento. Passamos, então, no capítulo 3 para o estudo da quantização do campo escalar no espaço de Minkowski. Os conceitos apresentados (antipartículas, criação e aniquilação, etc.) serão necessários para a generalização do formalismo em espaços curvos apresentado no capítulo 4. Os capítulos 5 e 6 são aplicações dessa teoria, o efeito Unruh e criação de partículas em um universo em expansão, respectivamente. O capítulo 7 constitui a conclusão do trabalho. Temas não essenciais para uma compreensão geral deste texto estão anexados em um apêndice, o capítulo 8. Este trabalho tem o caráter de review, e os tópicos apresentados podem ser encontrados na literatura citada nas referências.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> A questão da criação de partículas em modelos com ricochete (sessão 6.4) é relativamente recente, entretanto, mais referências podem ser encontradas em Peter & Pinto-Neto (2002).

---

# 2

## O Campo Escalar Clássico

“Life creates it, makes it grow. Its energy surrounds us and binds us. Luminous beings are we, not this crude matter. You must feel the Force around you. Here, between you... me... the tree... the rock... everywhere! Yes, even between this land and that ship!”

Yoda, Star Wars: the Empire strikes back.

---

## 2.1 Princípio da Ação e Equação de Euler-Lagrange

Em teoria de campos, um campo clássico é um sistema dinâmico contínuo cujas equações dinâmicas provêm uma descrição completa de sua evolução. Em cada ponto do espaço-tempo,  $x = (\vec{x}, t)$ , a variável dinâmica é o próprio campo,  $\phi(x)$ , enquanto  $\vec{x}$  e  $t$  são apenas parâmetros.

Como sabemos da mecânica clássica, as equações dinâmicas podem ser derivadas a partir do princípio da ação, um funcional do campo na forma de uma integral no espaço-tempo da densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$ ,<sup>1</sup>

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}[\phi].$$

O princípio afirma que a evolução de um sistema físico ocorre ao longo do “caminho” no espaço de configuração segundo o qual  $S$  é estacionário,  $\delta S = 0$ , com

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi_{,\mu} \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) \right] \delta \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi \right) \right\}, \end{aligned}$$

onde assumimos que  $\mathcal{L}$  é uma função de  $\phi$  e suas primeiras derivadas parciais apenas. Segue do teorema de Gauss que o último termo pode ser transformado em uma integral de superfície sobre o limite da região de integração. Considerando-se apenas variações que se anulem nesta fronteira, este termo de superfície pode ser descartado.<sup>2</sup>  $S$  é estacionário em relação a variações arbitrárias em  $\phi$  se

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0.$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange.

## 2.2 Teorema de Noether

As equações dinâmicas não são suficientes para a descrição de um sistema físico. As características físicas (energia, momento, carga elétrica, etc.) do sistema devem ser expressas em termos das soluções destas equações. O teorema de Noether afirma que para

<sup>1</sup> A partir de agora vamos nos referir a  $\mathcal{L}$  simplesmente como a lagrangiana.

<sup>2</sup> Isto é, assumindo-se que as configurações iniciais e finais do campo são dadas,  $\delta \phi(\vec{x}, t_i) = \delta \phi(\vec{x}, t_f) = 0$ , e considerando-se somente variações que sejam nulas no limite espacial da região de integração

cada simetria da ação, em relação a transformações contínuas dos campos e de suas coordenadas, há uma lei de conservação. O teorema permite a construção de invariantes dinâmicos correspondentes a estas leis.

Considere uma transformação infinitesimal das coordenadas e do campo

$$\begin{aligned}x^\mu &\rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \\ \phi(x) &\rightarrow \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x).\end{aligned}$$

As variações  $\delta x^\mu$  e  $\delta\phi$  podem ser expressas em termos de  $s$  parâmetros infinitesimais arbitrários linearmente independentes

$$\delta x^\mu = \chi_n^\mu \delta\omega^n, \quad \delta\phi = \Phi_n \delta\omega^n, \quad 1 \leq n \leq s.$$

É importante notar que  $\phi'(x')$  e  $\phi(x)$  são comparados em diferentes pontos do espaço-tempo, portanto  $\partial_\mu \delta\phi(x) \neq \delta \partial_\mu \phi(x)$ . Então, a variação funcional em  $\phi$  é definida por

$$\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x),$$

que, em até segunda ordem, assume a forma

$$\bar{\delta}\phi(x) = \delta\phi(x) - \phi_{,\mu}(x)\delta x^\mu = (\Phi_n - \phi_{,\mu}\chi_n^\mu)\delta\omega^n.$$

Por definição,  $\partial_\mu \bar{\delta}\phi(x) = \bar{\delta}\partial_\mu \phi(x)$ .

A variação resultante na ação é dada por

$$\delta S = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int d^4x \mathcal{L}(x),$$

onde

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(\phi'(x'), \phi'_{,\mu}(x')) = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x),$$

e

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi_{,\mu} = \bar{\delta}\mathcal{L} + \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu}\delta x^\mu.$$

$\bar{\delta}\mathcal{L}$  é a variação em  $\mathcal{L}$  devido a variações funcionais em  $\phi$  e  $\phi_{,\mu}$

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\bar{\delta}\phi_{,\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\bar{\delta}\phi \right),$$

onde a última igualdade segue da equação de Lagrange. O elemento de volume  $d^4x'$  é determinado pelo jacobiano da transformação  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ :

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x \approx \left( 1 + \frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right) d^4x.$$

Segue finalmente que

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left\{ \left[ 1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right] [\mathcal{L}(x) + \delta \mathcal{L}(x)] - \mathcal{L}(x) \right\} \\ &= \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right\} \\ &= \int d^4x \delta \omega^n \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} (\Phi_n - \phi_{,\nu} \chi_n^\nu) + \mathcal{L} \chi_n^\mu \right\}.\end{aligned}$$

Se a ação é invariante em relação às transformações definidas acima,

$$\frac{\partial S}{\partial \omega^n} = - \int d^4x \frac{\partial \theta_n^\mu}{\partial x^\mu} = 0,$$

onde

$$\theta_n^\mu(x) = - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} (\Phi_n - \phi_{,\nu} \chi_n^\nu) + \mathcal{L} \chi_n^\mu \right].$$

Como a região de integração é arbitrária,

$$\frac{\partial \theta_n^\mu}{\partial x^\mu} = 0.$$

Isto é, há  $s$  leis de conservação, uma para cada parâmetro. Considere a quantidade

$$C_n = \int_\sigma d\sigma_\mu \theta_n^\mu,$$

onde  $d\sigma_\mu$  é a projeção do elemento de área na superfície tridimensional perpendicular ao eixo  $x^\mu$ . Assumindo que a região de integração é limitada apenas em direções tipo-tempo por superfícies tridimensionais tipo-espaco  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  e que o campo é nulo nos limites do volume espacial, segue do teorema de Gauss que

$$\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \theta_n^\mu - \int_{\sigma_2} d\sigma_\mu \theta_n^\mu = 0.$$

Ou seja, as integrais de superfície  $C_n$  são, na verdade, independentes de  $\sigma$ . No caso particular em que as superfícies são os planos  $\{t = \text{constante}\}$ , a integral é calculada sobre o volume espacial

$$C_n = \int d^3x \theta_n^0 = \text{independente do tempo}.$$

O teorema de Noether acaba de ser demonstrado: a cada simetria de  $S$  em relação a transformações contínuas de  $s$  parâmetros das coordenadas e do campo, correspondem  $s$  invariantes dinâmicos  $C_n$  ( $n = 1, \dots, s$ ).

## Tensor Energia-Momento

Considere translações infinitesimais no espaço-tempo,  $x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}$ , com  $\chi_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}$  e  $\Phi_{\nu} = 0$ . Nesse caso,  $\theta$  assume a forma

$$T_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \phi_{,\nu} - \mathcal{L} \delta_{\nu}^{\mu} \quad \text{ou} \quad T^{\mu\nu} = \eta^{\nu\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \phi_{,\alpha} - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu}.$$

As integrais  $C^{\nu}$  formam o 4-vetor  $P^{\nu} = \int d^3x T^{0\nu}$ , cujas componentes são

$$H = \int d^3x T^{00},$$

$$\vec{P} = \int d^3x T^{0i} \hat{x}_i.$$

Para compreender porque  $T^{\mu\nu}$  é chamado tensor energia-momento, basta lembrar da definição de momento canonicamente conjugado segundo o formalismo hamiltoniano da mecânica clássica. O momento conjugado a  $\phi$  é definido por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}.$$

A densidade hamiltoniana  $\mathcal{H}$  é uma transformada de Legendre da densidade lagrangiana,

$$\mathcal{H} = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L},$$

e é imediato notar que esta é justamente a componente  $T^{00}$  do tensor energia-momento, isto é, que  $T^{00} = \mathcal{H}$ .  $T^{0i}$  é naturalmente associado ao momento<sup>3</sup> uma vez que  $T^{0\mu}$  é um 4-vetor assim como o vetor energia-momento.

## 2.3 Equação de Klein-Gordon

Considere um campo escalar<sup>4</sup>  $\phi(x)$  governado pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ (\partial_t \phi)^2 - (\nabla \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right].$$

A equação de Euler-Lagrange resultante do princípio da ação é dada por

$$\left( \square + m^2 \right) \phi(x) = 0,$$

<sup>3</sup> Não confundir momento linear com momento canonicamente conjugado.

<sup>4</sup> Isto é,  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x)$  sob uma transformação de Lorentz  $x \rightarrow x'$ .



onde  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$  é o operador de d'Alembert. Esta é a equação de Klein-Gordon.<sup>5</sup> Tal equação é interpretada como a relação energia-momento de Einstein,<sup>6</sup> recorrente das substituições  $E \rightarrow i\partial_t$  e  $\vec{p} \rightarrow -i\nabla$ ,

$$\left[ E^2 - \vec{p}^2 - m^2 \right] \phi(x) = 0.$$

É fácil mostrar que a equação de Klein-Gordon é invariante em relação a transformações de Lorentz,  $x \rightarrow x'$ :

$$\begin{aligned} \left[ \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + m^2 \right] \phi(x) &= \left[ \eta^{\mu\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\beta} + m^2 \right] \phi'(x') \\ &= \left[ \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\beta} + m^2 \right] \phi'(x'). \end{aligned}$$

## Solução Geral

A solução geral da equação de Klein-Gordon é uma sobreposição de ondas planas:

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \tilde{\phi}(k) e^{ikx}.$$

Substituindo essa expansão na equação de Klein-Gordon, encontramos

$$\int d^4k \tilde{\phi}(k) (k^2 - m^2) e^{ikx} = 0,$$

o que mostra que  $\tilde{\phi}(k)$  é da forma

$$\tilde{\phi}(k) = \varphi(k) \delta(k^2 - m^2),$$

onde  $\varphi(k)$  é uma função arbitrária. A função delta simplesmente afirma que a solução de onda-plana da equação de Klein-Gordon deve obedecer à relação energia-momento de Einstein,  $k^2 - m^2 = 0$ . Portanto, a integral em  $d^4k$  não é sobre todo o espaço 4-dimensional, mas somente sobre a superfície determinada por

$$k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 = 0,$$

---

<sup>5</sup> Note, no caso de  $m = 0$ , a semelhança entre a equação de Klein-Gordon e a equação do potencial eletromagnético livre,  $A_\mu$ , no gauge de Lorentz. Veja, por exemplo, Griffiths (1981). Assim, a quantização do campo eletromagnético segue de forma análoga à quantização do campo escalar, exceto pela introdução de certos problemas decorrentes dos graus de liberdade adicionais, como a polarização. Veja, por exemplo, Mandl and Shaw (1984).

<sup>6</sup> Isto é, todos os campos físicos conhecidos estão sujeitos a esta equação.

---

onde escrevemos, por conveniência,  $k^0 = k_0$ . Assim, podemos escrever<sup>7</sup>

$$\begin{aligned}\phi(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \varphi(k) \delta(k^2 - m^2) e^{ikx} \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \varphi(k) \delta(k_0^2 - \omega_k^2) e^{ikx} \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \varphi(k) \frac{1}{2\omega_k} [\delta(k^0 - \omega_k) + \delta(k^0 + \omega_k)] e^{ikx} \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left[ \varphi^-(-\omega_k, \vec{k}) e^{-i\omega_k x^0} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \varphi^+(\omega_k, \vec{k}) e^{i\omega_k x^0} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right],\end{aligned}$$

onde  $\omega_k \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ . Considerando somente o campo escalar real, a solução pode ser reescrita:

$$\phi(x) = \int d^3k \left( a_k u_k + a_k^* u_k^* \right),$$

onde  $u_k(x) = [(2\pi)^3 2\omega_k]^{-1/2} e^{-ikx}$ , com  $k^0 = +\omega_k$ .

Os modos  $u_k$  e  $u_k^*$  são chamados modos de frequência positiva e negativa, respectivamente. Estes modos são autofunções do operador  $\partial_t$ :

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = -i\omega_k u_k, \quad \frac{\partial u_k^*}{\partial t} = i\omega_k u_k^*.$$

Esta decomposição em modos de frequência positiva e negativa, básica a todos os campos relativísticos, é enraizada na natureza quadrática da relação energia-momento de Einstein. A base do espaço de soluções,  $\{u_k, u_k^*\}$ , é normalizada em relação ao produto escalar

$$(u_1, u_2) = -i \int d^3x \left( u_1 \overleftrightarrow{\partial}_t u_2^* \right) = -i \int d^3x \left( u_1 \frac{\partial u_2^*}{\partial t} - u_2^* \frac{\partial u_1}{\partial t} \right),$$

de forma que

$$\begin{aligned}(u_k, u_k^*) &= 0, \\ (u_k, u_{k'}) &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \\ (u_k^*, u_{k'}^*) &= -\delta^3(\vec{k} - \vec{k}').\end{aligned}$$

Estas igualdades seguem imediatamente da definição da função delta,

$$(2\pi)^{-3} \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}').$$

<sup>7</sup> Empregamos a seguinte propriedade da função  $\delta$ : seja  $f$  uma função arbitrária de raízes simples  $x_i$ ,

$$\delta(f(x)) = \sum_i \left| \frac{df}{dx}(x_i) \right|^{-1} \delta(x - x_i).$$

Para demonstrar esta relação, basta integrar ambos os lados sobre  $x$  e realizar uma mudança de variável, que gera um jacobiano, que por sua vez explica a origem de  $df/dx$ .

### Limite Não-Relativístico

É importante notar que a equação de Schrödinger é uma aproximação não-relativística da equação de Klein-Gordon,<sup>8</sup> recorrente da relação energia-momento

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Para verificar isso, considere uma solução da equação de Klein-Gordon. Vamos escrever explicitamente  $\hbar$  e  $c$ :

$$\phi(x) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[ (E_K + mc^2) t - \vec{k} \cdot \vec{x} \right] \right\} = \varphi(x) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right),$$

onde vimos a dependência temporal de  $\phi$  em dois termos, com um deles contendo a massa de repouso. No limite não-relativístico, a energia cinética  $E_K$  de uma partícula é pequena em comparação com sua energia de repouso,  $E_K \ll mc^2$ , ou

$$\left| i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| = E_K \varphi \ll mc^2 \varphi,$$

de forma que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} mc^2 \varphi \right) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right) \approx -\frac{i}{\hbar} mc^2 \varphi \exp \left( -\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right),$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} mc^2 \varphi \right) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right) \right] \approx \left( -i \frac{2mc^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right).$$

A substituição de  $\ddot{\phi}$  na equação de Klein-Gordon resulta em

$$-\frac{1}{c^2} \left( i \frac{2mc^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right) = \left( \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi \exp \left( -\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right),$$

ou

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi.$$

Evidentemente, esta é a equação de Schrödinger para uma partícula escalar livre, como já era esperado.

---

<sup>8</sup> Entretanto,  $\phi(x)$  não pode ser interpretado como uma amplitude de probabilidade, como veremos logo a seguir. Este fato é uma das razões de ser da teoria quântica de campos: a possibilidade de descrever processos físicos em que o número de partículas não é conservado.

## Corrente Conservada

Assim como a equação de Schrödinger, a equação de Klein-Gordon define uma corrente conservada:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) = \phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \phi \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} = \phi^* \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi^* = \nabla \cdot \left( \phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^* \right),$$

o que pode ser escrito mais concisamente na forma de uma lei de conservação,  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , com

$$j^k = \frac{-i}{2m} \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x^k} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial x^k} \right) \quad \text{e} \quad j^0 = \rho = \frac{i}{2m} \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right).$$

A expressão para a corrente conservada é exatamente igual à expressão da corrente de probabilidade na mecânica quântica não-relativística. No entanto,  $\rho$  pode assumir valores negativos, o que significa que não pode representar uma densidade de probabilidade. Evidentemente, se  $\phi$  é real,  $j^\mu = 0$ .

É possível mostrar que o campo eletromagnético se acopla naturalmente ao campo escalar complexo<sup>9</sup> através de termos adicionais na densidade lagrangeana determinados pela invariância da ação sob transformações de gauge. Tais termos de acoplamento representam a interação entre o campo escalar complexo e o campo eletromagnético.  $\rho$  e  $\vec{j}$  são a densidade e a corrente de cargas elétricas, respectivamente. O campo escalar real por sua vez não interage com o campo eletromagnético, e descreve, portanto, partículas escalares neutras.

## Energia e Momento

Conhecida a lagrangiana  $\mathcal{L}$  e a expressão de  $\phi$  em termos de  $a_k$  e  $a_k^*$ , a energia e o momento associados ao campo podem ser calculados a partir da definição do tensor energia-momento,

$$H = \int d^3x \left[ \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \right] = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ (\partial_t \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] = \int d^3k \frac{\omega_k}{2} \left[ a_k^* a_k + a_k a_k^* \right],$$

$$\vec{P} = - \int d^3x \pi \nabla \phi = \int d^3k \frac{k^i}{2} \left[ a_k^* a_k + a_k a_k^* \right].$$

Aqui,  $a_k$  e  $a_k^*$  são apenas funções e poderíamos escrever  $a_k^* a_k + a_k a_k^* = 2a_k^* a_k$ . Entretanto, após a quantização do campo nos capítulos seguintes,  $a_k$  e  $a_k^*$  serão operadores,  $a_k$  e  $a_k^\dagger$ , e não mais comutarão.

<sup>9</sup> Veja, por exemplo, Ryder (1985).

# 3

## A quantização no espaço de Minkowsky

“Quantum Field Theory underlies the current Standard Model in elementary particle physics, through which our intellectual eyes behold both the microscopic structure of matter and the cosmic events occurring within split seconds of the Big Bang.”

S. Y. Auyang, *How is Quantum Field Theory possible?*



## 3.1 Formalismo de Heisenberg

No formalismo de Schrödinger da mecânica quântica não-relativista, a evolução dinâmica de um sistema físico ocorre de modo que um estado qualquer  $|\psi\rangle$  obedece à equação de Schrödinger,

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle,$$

cuja solução é<sup>1</sup>

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle.$$

$U(t, t_0)$  é o operador evolução temporal, que determina o estado  $|\psi(t)\rangle$  em um instante  $t$  a partir de um estado inicial  $|\psi(t_0)\rangle$  em um instante anterior  $t_0$ .

Sabemos que as previsões da mecânica quântica são expressas em termos de produtos escalares entre bra's e ket's ou em termos de elementos de matrizes dos operadores. Estas quantidades são invariantes em relação a transformações unitárias. A transformação pode ser escolhida de modo a tornar  $|\psi_S(t)\rangle$  um ket independente do tempo.<sup>2</sup> Evidentemente, os observáveis passam a depender do tempo. Este é o formalismo de Heisenberg, em que tempo e espaço são tratados de forma mais simétrica,<sup>3</sup> o que o torna mais adequado em teorias relativistas.

O operador  $U^\dagger(t, t_0)$  transforma um vetor  $|\psi_S(t)\rangle$  em um vetor constante  $|\psi_H\rangle$ ,

$$e^{iH(t-t_0)}|\psi_S(t)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle = |\psi_H\rangle.$$

Isto é, o vetor de estado constante no formalismo de Heisenberg é igual a  $|\psi_S(t)\rangle$  no instante  $t_0$ . A transformada  $Z_H(t)$  de um operador  $Z_S(t)$  pode ser determinada lembrando-se que ambas as descrições devem ser equivalentes. Em particular, o valor esperado de  $Z$  deve ser o mesmo em ambos os casos,

$$\langle\psi_S(t)|Z_S(t)|\psi_S(t)\rangle = \langle\psi_H|e^{iH(t-t_0)}Z_S(t)e^{-iH(t-t_0)}|\psi_H\rangle \equiv \langle\psi_H|Z_H(t)|\psi_H\rangle,$$

de forma que

$$Z_H(t) = U^\dagger(t, t_0)Z_S(t)U(t, t_0).$$

<sup>1</sup> Assumimos que o operador hamiltoniano  $H$  não depende explicitamente do tempo.

<sup>2</sup> Nesta sessão, vamos atribuir o índice  $S$  aos kets e aos operadores no formalismo Schrödinger e o índice  $H$  àqueles no formalismo de Heisenberg. Nas próximas sessões, somente o formalismo de Heisenberg será considerado, e o índice  $H$  deverá estar subentendido.

<sup>3</sup> Pois toda a dependência no espaço e no tempo está contida somente no operador.

Note que  $Z_H(t)$  em geral depende do tempo ainda que  $Z_S(t)$  seja constante. Entretanto, se  $[Z_S, H] = 0$ , então  $Z_H(t) = Z_S(t)$ . Em particular, o operador hamiltoniano é invariante,  $H_H = H_S = H$ .

Agora, os vetores de estado são constantes. A evolução é descrita por uma equação que governa a dinâmica dos operadores, a equação de Heisenberg: basta derivar a relação entre  $Z_H(t)$  e  $Z_S(t)$  para encontrar

$$\frac{dZ_H}{dt} = -i[Z_H, H] + \left(\frac{\partial Z_S}{\partial t}\right)_H.$$

## 3.2 Oscilador Harmônico Unidimensional

O oscilador harmônico simples é provavelmente o exemplo mais importante de um sistema físico com solução analítica exata. Seu estudo é a base da teoria quântica de campos, uma vez que a expansão em série de Fourier de um campo corresponde a uma soma infinita de osciladores harmônicos, cujas excitações são interpretadas como partículas. Já em teoria de matéria condensada, cristais podem ser descritos aproximadamente como um conjunto de osciladores harmônicos acoplados, cujas excitações correspondem aos chamados fônons, que descrevem o quantum de vibração. De fato, o oscilador harmônico descreve, pelo menos em primeira aproximação, qualquer sistema oscilatório, como átomos em um sólido, cordas, detectores de ondas gravitacionais, etc.

Na física clássica, um exemplo de oscilador harmônico é uma partícula de massa  $m$  a mover-se em uma certa direção  $x$  presa a uma mola de constante elástica  $k$ , de modo que a força exercida sobre a partícula é  $F = -kx$ . A função hamiltoniana é

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

onde  $p$  é o momento linear e  $k = m\omega^2$ .

A passagem da teoria clássica para a teoria quântica consiste na postulação das equações dinâmicas e da álgebra dos operadores, e na construção e interpretação física dos estados quânticos e observáveis. Em vez de resolver a equação de Schrödinger em termos de polinômios de Hermite, é mais conveniente trabalhar na representação de Heisenberg e definir as variáveis

$$a = x\sqrt{\frac{m\omega}{2}} + ip\sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \quad \text{e} \quad a^\dagger = x\sqrt{\frac{m\omega}{2}} - ip\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}.$$

$x$  e  $p$  agora são operadores,  $[x, p] = i$  e  $[x, x] = [p, p] = 0$ . Note que  $a \neq a^\dagger$ , isto é,  $a$  não é hermitiano, portanto, não representa um observável. Segue das relações de comutação de  $x$  e  $p$  que  $[a, a^\dagger] = 1$  e  $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$ . O operador hamiltoniano assume a forma

$$H = \frac{\omega}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a) = \omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right).$$

Portanto, um autovetor de  $H$  é também um autovetor do operador hermitiano  $N = a^\dagger a$ , e segue da álgebra de  $a$  e  $a^\dagger$  que  $[N, a^\dagger] = a^\dagger$  e  $[N, a] = -a$ . Agora vamos determinar o espectro de  $N$ .

Seja  $|n\rangle$  um autoestado normalizado de  $N$  com autovalor  $n$ ,  $N|n\rangle = n|n\rangle$ , temos

$$Na^\dagger|n\rangle = (a^\dagger N + a)|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle,$$

$$Na|n\rangle = (aN - a)|n\rangle = (n-1)a|n\rangle.$$

Isto é,  $a^\dagger|n\rangle$  é um autovetor de  $N$  com autovalor  $n+1$ ;  $a|n\rangle$  é um autovetor de  $N$  com autovalor  $n-1$ . Considere agora a norma do estado  $a|n\rangle$ ,

$$0 \leq \|a|n\rangle\|^2 = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = n\langle n|n\rangle,$$

segue que  $n \geq 0$ .  $n$  deve ser um número inteiro maior que ou igual a zero. Isto significa que a aplicação consecutiva do operador  $a$  em um estado qualquer  $|n\rangle$  eventualmente produz um vetor tal  $a|0\rangle = 0$ .  $|0\rangle$  é o chamado estado fundamental e não deve ser confundido com  $0$ , o vetor zero no espaço de Hilbert. Todo o espectro de  $N$  (ou  $H$ ) pode ser construído a partir de  $|0\rangle$  com aplicações consecutivas de  $a^\dagger$ .

Se o estado  $|n\rangle$  é normalizado, o quadrado da norma de  $a^\dagger|n\rangle$  é

$$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|a^\dagger a + 1|n\rangle = n+1,$$

O primeiro estado excitado normalizado é  $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$ ; o segundo estado excitado normalizado é  $|2\rangle = (\sqrt{2})^{-1}a^\dagger a^\dagger|0\rangle$ , e assim por indução,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle.$$

O estado fundamental é o estado com  $n = 0$  e energia  $\omega/2$ . O primeiro estado excitado corresponde a  $n = 1$ , e assim por diante. O espectro de  $H$  é discreto e dado por  $\omega(n+1/2)$ . Os níveis de energia são espaçados uniformemente com separação  $\omega$ , isto é, os operadores  $a^\dagger$  e  $a$  são operadores de criação e de destruição de um quantum de energia  $\omega$ , respectivamente.

---



O hamiltoniano pode ser redefinido como  $H' = H - \omega/2$ , e suas excitações podem ser interpretadas como partículas de massa  $m = \omega$  com velocidades desprezíveis. O estado fundamental é o estado em que não há partículas presentes, não há energia. Já o estado de  $n$  excitações,  $|n\rangle$ , apresenta  $n$  partículas, cada uma com energia  $m$ .  $a^\dagger$  transforma  $|n\rangle$  em  $|n+1\rangle$ , a energia do sistema aumenta em  $m$ .  $a^\dagger$  cria uma partícula. Similarmente,  $a$  transforma  $|n+1\rangle$  em  $|n\rangle$ .  $a$  destrói uma partícula. O operador número,  $N = a^\dagger a$ , conta o número de partículas. Se  $a$  atua no vácuo,  $|0\rangle$ , onde não há nenhuma partícula a ser destruída, o resultado deve ser zero,  $a|0\rangle = 0$ .

### 3.3 Quatização do Campo de Klein-Gordon

Em analogia com a mecânica quântica, são postuladas as relações de comutação entre o campo escalar e seu momento conjugado

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}),$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = 0.$$

Embora estas relações sejam definidas no mesmo instante de tempo, o que parece contrariar os princípios da relatividade, note que  $x^\mu$  e  $y^\mu$  são separados por uma distância tipo-espaço,  $(x - y) < 0$ , que é preservada sob transformações de Lorentz. Isso significa que a causalidade é respeitada, pois a medida de um observável não pode alterar a medida de outro em pontos do espaço-tempo separados por uma distância tipo-espaço.

Com estas relações e o operador hamiltoniano,

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ (\partial_t \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right],$$

são derivadas as equações de Heisenberg<sup>4</sup>

$$\dot{\phi}(x) = -i[\phi, H] = \pi(x),$$

$$\dot{\pi}(x) = -i[\pi, H] = (\nabla^2 - m^2)\phi(x).$$

A primeira equação acima é simplesmente a definição do momento conjugado; a segunda é a própria equação de Klein-Gordon.

<sup>4</sup> Para obter o operador  $\nabla^2$ , a relação de comutação entre  $\phi$  e  $\pi$  foi diferenciada,  $[\pi(x, t), \nabla' \phi(x', t)] = \nabla' [\pi(x, t), \phi(x', t)] = -i \nabla' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ , seguida de uma integração por partes.

Com o objetivo de construir e interpretar os estados físicos, expandimos o campo escalar em termos das soluções clássicas da equação de Klein-Gordon,

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left( a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right).$$

$\phi(x)$  agora é um operador, assim como os coeficientes  $a_k$  e  $a_k^\dagger$ , e  $\pi(x)$  é dado pela derivada de  $\phi(x)$  com relação ao tempo,

$$\pi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left( -i\omega_k a_k e^{-ikx} + i\omega_k a_k^\dagger e^{ikx} \right).$$

Agora, para escrever  $a_k$  e  $a_k^\dagger$  em termos de  $\phi(x)$  e  $\pi(x)$ , podemos inverter a expansão em série de Fourier da solução, notando que

$$\begin{aligned} & \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left[ \omega_k \phi(x) + i\pi(x) \right] = \\ & \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \left\{ (\omega_k + \omega_{k'}) a_{k'} e^{-ik'x} + (\omega_k - \omega_{k'}) a_{k'}^\dagger e^{ik'x} \right\} = \\ & (2\pi)^{3/2} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \left\{ (\omega_k + \omega_{k'}) a_{k'} e^{-i\omega_{k'}t} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') + (\omega_k - \omega_{k'}) a_{k'}^\dagger e^{i\omega_{k'}t} \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') \right\} = \\ & (2\pi)^{3/2} (2\omega_k)^{1/2} a_k e^{-i\omega_k t}, \end{aligned}$$

portanto,

$$a_k = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx} \left[ \omega_k \phi(x) + i\pi(x) \right].$$

Os comutadores de  $\phi$  e  $\pi$  determinam a álgebra de  $a_k$  e de  $a_k^\dagger$ :

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}^\dagger] &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k}} \int \frac{d^3y}{\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{ikx} e^{-ik'y} \left[ \omega_k \phi(\vec{x}, t) + i\pi(\vec{x}, t), \omega_{k'} \phi(\vec{y}, t) - i\pi(\vec{y}, t) \right] \\ &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned}$$

Similarmente,  $[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0$ .

A função hamiltoniana em termos de  $a_k$  e  $a_k^\dagger$  é dada por

$$H = \int d^3k \frac{\omega_k}{2} \left[ a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger \right] = \int d^3k \omega_k \left[ a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right].$$

Como podemos ver,  $H$  corresponde a uma soma contínua de hamiltonianos de osciladores harmônicos, um oscilador para cada  $k$ . O campo de Klein-Gordon equivale a uma soma de infinitos osciladores. O termo divergente, proporcional a  $\int d^3k \omega_k$ , é resultado da soma das energias do estado fundamental de cada oscilador em cada ponto do espaço-tempo.

Comparando os comutadores de  $a_k$  e  $a_k^\dagger$  com os comutadores do oscilador harmônico, observamos que  $a_k^\dagger$  é um operador de criação, enquanto  $a_k$  é um operador de destruição.  $a_k^\dagger$  cria uma partícula de energia  $\omega_k$  e momento  $\vec{k}$ ;  $a_k$  aniquila tal partícula. O estado fundamental,  $|0\rangle$ , é o vetor no espaço de estados tal que  $a_k|0\rangle = 0$ : não há partículas presentes.<sup>5</sup>  $a_k^\dagger|0\rangle$  apresenta uma partícula com energia  $\omega_k$  e momento  $\vec{k}$ , e assim por diante. Um estado normalizado arbitrário,  $\langle i n_{k_r} | j n_{k_s} \rangle = \delta_{ij} \delta_{k_r k_s}$ , com  ${}^1 n$  partículas com momento  $k_1$ ,  ${}^2 n$  partículas com momento  $k_2$ , etc., tem a forma

$$|{}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots\rangle = ({}^1 n! {}^2 n! \dots)^{-1/2} (a_{k_1}^\dagger)^{{}^1 n} (a_{k_2}^\dagger)^{{}^2 n} \dots |0\rangle = \prod_{i_n} (i_n!)^{-1/2} (a_{k_i}^\dagger)^{i_n} |0\rangle.$$

Esta representação do espaço de Hilbert é chamada representação de Fock.<sup>6</sup> Como no caso do oscilador harmônico, definimos o operador número de partículas no modo  $k$ ,

$$N_k = a_k^\dagger a_k,$$

que determina a quantidade de partículas com energia  $\omega_k$  e momento  $\vec{k}$ ,

$$\langle 0 | N_k | 0 \rangle = 0, \quad \forall k,$$

$$\langle {}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots | N_{k_i} | {}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots \rangle = i n.$$

Evidentemente, o número total de partículas, representado pelo operador

$$N_k = \int d^3 k a_k^\dagger a_k,$$

é

$$\langle N \rangle = \sum_i i n.$$

<sup>5</sup> Neste estado, o valor esperado de um operador de campo é nulo,  $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = 0$ . Entretanto, a média quadrática do operador é diferente de zero,  $\langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle \neq 0$ . Esta média quadrática, ou flutuação quântica do vácuo, é responsável por efeitos físicos observáveis, como o efeito Cassimir no caso do campo eletromagnético.

<sup>6</sup> No caso de campos de spin inteiro, as relações de comutação não determinam nenhum limite sobre os valores de  $n_k$ . Qualquer número de partículas pode ocupar o mesmo modo. Estas partículas são chamadas bósons. Já no caso de campos de spin semi-inteiro, as relações de (anti) comutação determinam que a aplicação consecutiva de dois operadores de criação correspondentes ao mesmo modo resulta em zero,  $a_k^\dagger a_k^\dagger |\psi\rangle = 0$ , onde  $|\psi\rangle$  é um estado qualquer. Portanto, é impossível criar mais de uma partícula no mesmo modo, e  $n_k$  pode assumir apenas os valores 0 ou 1. Este é o princípio da exclusão de Pauli, válido apenas para estas partículas de spin semi-inteiro chamadas férmions. É interessante lembrar ainda que  $a_k^\dagger$  cria uma partícula com momento bem definido, portanto, sua localização, pelo princípio da incerteza, é completamente desconhecida.

A energia associada ao estado de vácuo,  $|0\rangle$ , a soma das energias de ponto-zero de cada oscilador harmônico, é divergente,

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k.$$

Isto é, uma vez que  $\omega$  não tem um limite superior, a energia do estado fundamental pode ser infinita. Essa divergência pode ser simplesmente removida, já que a energia absoluta não pode ser medida, ao subtrair-se da escala de energia a constante infinita,  $H \rightarrow H - \langle 0|H|0\rangle$ . A energia de ponto-zero surge quando os operadores de criação e de aniquilação são comutados na hamiltoniana. Conseqüentemente, subtrair essa constante infinita equivale a mover todos os operadores de criação a esquerda dos operadores de aniquilação. Este procedimento é chamado “ordenamento normal”, e é geralmente indicado com dois pontos em ambos os lados de qualquer produto de operadores,

$$: a_k a_k^\dagger : = : a_k^\dagger a_k : = a_k^\dagger a_k.$$

Com o ordenamento normal,

$$H \rightarrow :H: = \int d^3k \omega_k a_k^\dagger a_k,$$

e o valor esperado da energia do vácuo é igual a zero,  $\langle 0|:H:|0\rangle = 0$ .

### 3.4 Álgebra de Operadores e Causalidade

Na sessão anterior, as relações de comutação entre os campos de operadores foram postuladas em instantes de tempo iguais, mas com a expansão de  $\phi$  em termos de  $a$  e  $a^\dagger$ , o cálculo de  $[\phi(x), \phi(y)]$  em instantes distintos é imediato:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} \int \frac{d^3q}{\sqrt{2\omega_q}} \left\{ e^{-ipx+iqy} [a_p, a_q^\dagger] + e^{+ipx-iy} [a_p^\dagger, a_q] \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \left[ e^{-ip(x-y)} - e^{+ip(x-y)} \right] \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\omega_p} \text{sen } p(x-y) \\ &\equiv i\Delta(x-y). \end{aligned}$$

Vejam algumas propriedades da função  $\Delta$ ,

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \left[ e^{-ipx} - e^{ipx} \right].$$

1.  $\Delta(x)$  é claramente invariante de Lorentz, pois  $px = p_\mu x^\mu$  e  $\omega_p^{-1} d^3p$  são invariantes.
2.  $\Delta(x)$  é uma função ímpar:  $\Delta(-x) = -\Delta(x)$ .
3.  $\Delta(x)$  é solução da equação de Klein-Gordon, pois é uma soma de suas soluções.
4.  $\Delta(x) = 0$  se  $x$  é tipo-espaço. Esta propriedade é conseqüência das duas primeiras. Se  $x$  é tipo-espaço, há um sistema de coordenadas em que  $x^{0'} = 0$ . A invariância de Lorentz exige que  $\Delta(x) = \Delta(x')$ . Se  $x' = (0, \vec{x}')$ , há uma rotação espacial que transforma  $\vec{x}'$  em  $-\vec{x}'$ , de forma que

$$\Delta(x) = \Delta(x') = \Delta(-x') = -\Delta(x') = 0.$$

$\phi(x)$  e  $\phi(y)$  comutam quando  $x$  e  $y$  são separados por intervalos tipo-espaço. Esta propriedade, chamada microcausalidade, significa que nenhuma perturbação pode se propagar com uma velocidade maior que a velocidade da luz. Ou seja, podemos fazer medidas simultâneas precisas dos campos nestes pontos,  $x$  e  $y$ , sem que uma medida perturbe a outra. Note que isso é verdade somente porque há uma soma de ondas planas com frequências positivas e negativas. Se ignorássemos as ondas com frequências negativas,  $\Delta$  não seria mais nulo em separações do tipo espaço, e seria possível propagar sinais mais velozes que a luz. A invariância de Lorentz também é importante: significa que o método da quantização canônica é covariante.

É interessante aqui definir uma nova função, que será útil em breve,

$$\Delta_R(x - y) = \theta(x^0 - y^0)\Delta(x - y), \quad \text{onde } \theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x^0 - y^0 > 0 \\ 0, & \text{se } x^0 - y^0 < 0 \end{cases}.$$

$\Delta_R(x)$  é igual a  $\Delta(x)$  em regiões no interior do cone de luz futuro e se anula em outras regiões. Observe que

$$\begin{aligned}
\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right]\Delta_R(x-y) &= -\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right]i\theta(x^0-y^0)[\phi(x),\phi(y)] \\
&= -i\theta(x^0-y^0)\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right][\phi(x),\phi(y)] + \\
&\quad -i[\phi(x),\phi(y)]\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\theta(x^0-y^0) + \\
&\quad -2i\eta^{\mu\nu}\left[\partial_\mu\theta(x^0-y^0)\right]\left[\partial_\nu[\phi(x),\phi(y)]\right] \\
&= -i[\phi(x),\phi(y)]\partial_t^2\theta(x^0-y^0) + \\
&\quad -2i\left[\partial_t\theta(x^0-y^0)\right]\left[\partial_t[\phi(x),\phi(y)]\right] \\
&= -i\partial_t\left[[\phi(x),\phi(y)]\delta(x^0-y^0)\right] + \\
&\quad +i\delta(x^0-y^0)[\pi(x),\phi(y)] - 2i\delta(x^0-y^0)[\pi(x),\phi(y)] \\
&= -\delta^4(x-y).
\end{aligned}$$

Isto é,  $\Delta_R(x-y)$  é uma função de Green do operador de Klein-Gordon, chamada função de Green retardada porque é nula para  $x^0 < y^0$ .

### 3.5 Causalidade e Antipartículas

A introdução da invariância de Lorentz na mecânica quântica traz consigo a noção de causalidade. Operadores locais que representam quantidades fisicamente mensuráveis devem comutar em separações tipo-espaço. As soluções de ondas com frequências negativas não podem ser ignoradas, o que, por sua vez, introduz as chamadas antipartículas e os fenômenos de criação e aniquilação de partículas.

Entretanto, precisamos interpretar o que seria uma partícula com energia negativa. Além disso, o espectro de energia não possui um limite inferior. Uma partícula poderia emitir uma quantidade infinita de energia, saltando para estados de energia cada vez mais negativa. Evidentemente, isso não acontece. Considere a onda plana de energia negativa

$$e^{i(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{x})}.$$

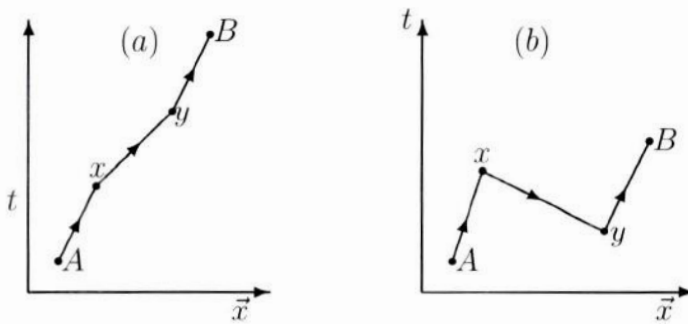
Observe que se a direção do tempo for invertida,  $t \rightarrow -t$ , as soluções de energia negativa se tornam soluções de energia positiva. Então, para evitar o problema da energia negativa, as soluções de frequência negativa devem se propagar somente voltando no tempo. Matematicamente, é exatamente isso que acontece. O propagador de Feynman do operador de

Klein-Gordon é dado por<sup>7</sup>

$$\begin{aligned}\Delta_F(x-x') &= -i\theta(t-t')(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} e^{-ip(x-x')} \\ &\quad -i\theta(t'-t)(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} e^{ip(x-x')}.\end{aligned}$$

Isto é, as soluções de energia positiva se propagam avançando no tempo, mas as soluções de energia negativa se propagam voltando no tempo.

Certos atributos de uma partícula mudam quando o sentido de propagação no tempo é invertido. Por exemplo, um elétron voltando no tempo equivale a um pósitron avançando no tempo. Assim, partículas com energia negativa voltando no tempo podem ser reinterpretadas como partículas com energia positiva de mesma massa, mas carga elétrica e outros números quânticos opostos, avançando no tempo. As soluções de frequência negativa descrevem matematicamente antipartículas. Considerando o campo escalar real, que descreve partículas eletricamente neutras, partículas e antipartículas são indistinguíveis. Entretanto, a introdução do conceito de antipartículas permite uma reinterpretação da densidade conservada na equação de Klein-Gordon para o campo escalar complexo como uma densidade de carga elétrica. Obviamente, o fato de que essa densidade pode assumir valores negativos é consistente com a existência de cargas elétricas positivas e negativas.



**Figura 3.1:** (a) Estado intermediário entre  $x$  e  $y$  envolve uma partícula. (b) Estado intermediário entre  $x$  e  $y$  envolve uma antipartícula.

Em relação a processos de criação e de destruição de partículas, considere a propagação de uma partícula, que interage duas vezes no caminho, entre os pontos A e B como ilustrado na figura 3.1. Em 3.1(a), há somente uma partícula em qualquer instante de tempo. Em 3.1(b), há inicialmente uma partícula, em  $y$  ocorre a criação de um par

<sup>7</sup> Veja, por exemplo, Kaku (1993).

partícula-antipartícula, e em  $x$  ocorre uma aniquilação: entre os instantes  $y^0$  e  $x^0$  há duas partículas e uma antipartícula; após o instante  $x^0$ , há novamente apenas uma partícula. Considere especificamente a propagação da partícula com energia negativa de  $x$  a  $y$  na figura 3.1(b). Esta partícula se propaga voltando no tempo:  $\phi(x)$  a emite em  $x$ ,  $\phi(y)$  a absorve em  $y$ . A criação de uma partícula com energia negativa reduz a energia do sistema, assim como a aniquilação de uma partícula com energia positiva. A propagação de partículas com energia negativa é, portanto, inteiramente equivalente à propagação de antipartículas com energia positiva, e nada mais é que uma descrição matemática das antipartículas. As soluções de frequência negativa estão associadas a operadores de aniquilação de partículas: ao destruir partículas, o efeito do operador de aniquilação é reduzir a energia do sistema. Evidentemente, não há partículas livres com energia negativa na natureza.<sup>8</sup>

Note que o hamiltoniano do campo de Klein-Gordon é sempre maior ou igual a zero,

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ (\partial_t \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right],$$

apesar das soluções de energia negativa. Diz-se que os campos são mais fundamentais que as partículas em teoria quântica de campos. De fato, o conceito de partícula, representações do Grupo de Poincaré no espaço-tempo de Minkowski, não é bem definido na presença de campos gravitacionais, como veremos nos capítulos seguintes.

### 3.6 Criação de Partículas por uma Fonte Externa

Até aqui, consideramos somente o campo escalar livre. Encerramos este capítulo com um exemplo simples de criação de partículas por um campo externo. Considere o campo escalar, inicialmente no estado de vácuo, acoplado a uma fonte clássica  $j(x)$ ,

$$\left[ \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right] \phi(x) = j(x),$$

onde  $j(x)$  é uma função conhecida e diferente de zero somente em um intervalo finito de tempo. A solução nesse caso é dada pela solução da equação homogênea correspondente

---

<sup>8</sup> Em teoria quântica de campos, uma interação ocorre em um único ponto do espaço-tempo. Portanto, perguntar em quanto tempo ocorre uma certa interação é tão sem sentido quanto perguntar o caminho percorrido por uma partícula em mecânica quântica não-relativística. Veja, por exemplo, Berestetskii, Lifshitz & Pitaevskii (1982). Neste exemplo em particular, as partículas podem ser consideradas livres exceto nos pontos  $x$  e  $y$ .

---



somada à solução construída a partir da função de Green retardada:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_0(x) - (2\pi)^{3/2} \int d^4y \Delta_R(x-y) j(y) \\ &= \phi_0(x) + i(2\pi)^{-3/2} \int d^4y \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \theta(x^0 - y^0) \left[ e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right] j(y),\end{aligned}$$

onde a constante  $(2\pi)^{3/2}$  foi inserida no segundo termo por conveniência e

$$\phi_0(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx}).$$

Quando a fonte  $j(x)$  é desligada,  $\theta = 1$  e a solução assume a forma

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ \left[ a_p + \frac{i}{\sqrt{2\omega_p}} \tilde{j}(p) \right] e^{-ipx} + \left[ a_p^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2\omega_p}} \tilde{j}^*(p) \right] e^{ipx} \right\},$$

onde  $\tilde{j}(p) = \int d^4y j(y) \exp(ipy)$  é avaliado em  $p^2 = m^2$ .

A função hamiltoniana é dada por<sup>9</sup>

$$H = \int d^3p \omega_p \left[ a_p^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2\omega_p}} \tilde{j}^*(p) \right] \left[ a_p + \frac{i}{\sqrt{2\omega_p}} \tilde{j}(p) \right],$$

A energia do sistema após a fonte ser desligada é

$$\langle 0|H|0\rangle = \int \frac{d^3p}{2} |\tilde{j}(p)|^2.$$

$(2\omega_p)^{-1} |\tilde{j}(p)|^2$  pode ser interpretado como a densidade de probabilidade de criação de uma partícula com energia  $\omega_p$  e momento  $\vec{p}$ . O número esperado de partículas produzidas é

$$N = \int \frac{d^3p}{2\omega_p} |\tilde{j}(p)|^2.$$

É interessante notar que somente os componentes de Fourier de  $j(x)$  em ressonância com as ondas de Klein-Gordon ( $p^2 = m^2$ ) são responsáveis pela produção de partículas. Isso já era esperado, pois toda partícula real está sujeita a essa condição,  $p^2 = m^2$ .

---

<sup>9</sup> Basta substituir  $a_p$  por  $a_p + i(2\omega_p)^{-1/2} \tilde{j}(p)$  na hamiltoniana do caso livre, ou simplesmente calcular a partir da densidade lagrangiana que gera a equação de campo,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ (\partial_t \phi)^2 - (\nabla \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right] + j(x) \phi(x).$$


---

# 4

## A quantização em espaços curvos

“You can’t blame gravity for falling in love.”

Albert Einstein.

---

## 4.1 Equação de Klein-Gordon

Em um espaço-tempo curvo, a generalização mais simples da lagrangiana do campo escalar é dada por<sup>1</sup>

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{g}}{2} \left[ g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - (m^2 + \xi R) \phi^2 \right]$$

onde  $g = |\det g^{\mu\nu}|$ ,  $R$  é o escalar de curvatura e  $\xi$  é um número adimensional chamado de termo de acoplamento entre o campo escalar e o campo gravitacional. Este termo viola o princípio da equivalência forte, segundo o qual nenhum efeito local da gravidade pode ser detectado por um observador inercial. Entretanto, a curvatura não é nula em um referencial inercial<sup>2</sup> e, portanto, influencia o comportamento dos campos acoplados. Não há como determinar o valor de  $\xi$  teoricamente, mas podemos tomar  $\xi$  simplesmente como um parâmetro que especifique nosso modelo, assim como  $m$ . Somente observações poderão determinar o valor de  $\xi$ .

A equação de Klein-Gordon resultante da lagrangiana acima é

$$\left( \square + m^2 + \xi R \right) \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu})_{,\nu} + (m^2 + \xi R) \phi = 0.$$

$\xi$  induz uma correção de massa proporcional ao escalar de curvatura. O caso particular em que  $\xi = 0$  é chamado de acoplamento mínimo. Outro caso de especial importância ocorre quando

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{n-2}{n-1},$$

onde  $n$  é a dimensão do espaço-tempo. Neste caso, dizemos que o acoplamento é conforme, pois a equação de Klein-Gordon se torna invariante<sup>3</sup> sob transformações conformes, quando  $m = 0$ . Uma transformação conforme é uma transformação do tipo  $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x)$ , onde  $\Omega$  é uma função arbitrária contínua. Evidentemente, em modelos de duas dimensões,  $n = 2$ , não há diferença entre acoplamento mínimo e acoplamento conforme. A simetria conforme simplifica o estudo de campos em um espaço-tempo conformemente plano, em que a métrica pode ser escrita na forma  $g_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu}$ , como o universo de Friedmann, por exemplo.

Como no espaço de Minkowski, as soluções da equação de Klein-Gordon em um espaço

<sup>1</sup> Lembre-se que a primeira derivada covariante de um campo escalar é igual à sua derivada comum.

<sup>2</sup> A curvatura é uma propriedade intrínseca do espaço-tempo e não depende do observador

<sup>3</sup> Veja, por exemplo, Birrel & Davies (1984).

curvo definem um produto escalar,

$$\begin{aligned}(u, v) &= -i \int d\Sigma^\mu \sqrt{g_\Sigma} \left( u \overleftrightarrow{\partial}_\mu v^* \right) \\ &= -i \int d\Sigma^\mu \sqrt{g_\Sigma} (u v_{,\mu}^* - u_{,\mu} v^*),\end{aligned}$$

onde  $d\Sigma^\mu = \eta^\mu d\Sigma$ , sendo  $d\Sigma$  o elemento de volume em uma hipersuperfície tipo-espaço  $\Sigma$ ,  $\eta^\mu$  é um vetor unitário orientado para o futuro e ortogonal a  $\Sigma$ , e  $g_\Sigma$  é o determinante da parte espacial da métrica em  $\Sigma$ . O produto interno de duas soluções da equação de Klein-Gordon é conservado, isto é, não depende de  $\Sigma$ ,

$$(u, v)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}.$$

A demonstração dessa propriedade é imediata. Sejam  $u$  e  $v$  duas soluções que se anulam no infinito espacial (se o espaço for compacto, podemos impor fronteiras tipo-tempo em que  $u = v = 0$ ), e seja  $V$  o volume limitado por  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , podemos escrever

$$(u, v)_{\Sigma_1} - (u, v)_{\Sigma_2} = -i \oint_{\partial V} d\Sigma^\mu \sqrt{g_\Sigma} (u \overleftrightarrow{\partial}_\mu v^*) = -i \int_V dV g^{\mu\nu} (u \overleftrightarrow{\partial}_\mu v^*)_{;\nu},$$

onde o último passo segue da lei de Gauss<sup>4</sup>. Como  $u$  e  $v$  são soluções da equação de campo, este integrando é nulo,

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu} (u \overleftrightarrow{\partial}_\mu v^*)_{;\nu} &= g^{\mu\nu} (u v_{,\mu}^* - u_{,\mu} v^*)_{;\nu} \\ &= u g^{\mu\nu} v_{;\mu;\nu}^* - v^* g^{\mu\nu} u_{;\mu;\nu} \\ &= -u (m^2 + \xi R) v^* + v^* (m^2 + \xi R) u \\ &= 0,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

Uma outra propriedade importante da equação de Klein-Gordon é que o problema de Cauchy com dados iniciais  $(\phi, \pi)$  em uma superfície de Cauchy  $\Sigma$  está bem colocado.<sup>5</sup> De fato, podemos escrever

$$\phi(t, \vec{x}) = - \int_\Sigma d^{n-1}y \left[ G(x, y) \pi(0, \vec{y}) - \sqrt{g} g^{0\mu}(y) \frac{\partial}{\partial y^\mu} G(x, y) \phi(0, \vec{y}) \right],$$

<sup>4</sup> Veja, por exemplo, Hawking & Ellis (1973).

<sup>5</sup> Uma superfície de Cauchy é uma superfície tipo-espaço interceptada exatamente uma vez por cada curva causal inextensível em  $\mathcal{M}$ . Um espaço-tempo que possui uma superfície de Cauchy é denominado globalmente hiperbólico (Fulling, 1989). Um espaço-tempo globalmente hiperbólico de dimensão  $n + 1$  pode ser folheado em subvariedades  $n$ -dimensionais descritas por um único parâmetro, que podemos chamar de tempo (Misner, Thorne and Wheeler, 1973). Isto é, podemos assumir que superfícies de Cauchy são representadas localmente por equações do tipo  $t = \text{constante}$ .

onde  $G$  satisfaz a igualdade

$$(\square + m^2 + \xi R) G = \frac{\delta(x - y)}{\sqrt{g}}.$$

Isto é, os valores iniciais de  $\phi$  e  $\pi$  arbitrariamente especificados em uma superfície  $\Sigma$  determinam a evolução subsequente de  $\phi$ . As soluções dependem continuamente destes dados iniciais: pequenas variações nos dados iniciais produzem pequenas variações correspondentes na solução em qualquer região do espaço-tempo. Além disso, a causalidade é respeitada: uma variação dos dados iniciais em uma região externa a  $\Sigma$  não afeta a solução em  $J^+(\Sigma)$ , o futuro causal de  $\Sigma$ .<sup>6</sup>

## 4.2 Quantização e Coeficientes de Bogoliubov

A construção de uma teoria quântica em um espaço-tempo curvo segue analogamente o formalismo no espaço-tempo de Minkowsky: o estudo das equações dinâmicas e da álgebra dos operadores; a construção e a interpretação física dos estados e dos observáveis.

A dinâmica do campo escalar é governada pela densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\left[g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - (m^2 + \xi R)\phi^2\right],$$

de forma que equação de Klein-Gordon segue do princípio da ação. O momento canonicamente conjugado a  $\phi(x)$  é dado por

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\phi_{,0})} = \sqrt{g}g^{0\mu}\phi_{,\mu}.$$

A álgebra dos operadores agora é dada por

$$[\phi(x^0, x^i), \phi(x^0, x'^i)]_{\Sigma} = [\pi(x^0, x^i), \pi(x^0, x'^i)]_{\Sigma} = 0,$$

$$[\phi(x^0, x^i), \pi(x^0, x'^i)]_{\Sigma} = i\delta^{n-1}(x^i - x'^i), \quad \text{onde} \quad \int d\Sigma\delta^{n-1}(x^i - x'^i) = 1.$$

As relações de comutação não dependem da superfície tipo-espaço  $\Sigma$  escolhida. A construção do espaço de Fock segue como no espaço-tempo de Minkowski.

Existe, entretanto, uma ambigüidade inerente a este formalismo, referente à escolha de uma representação particular. As relações de comutação definem o conjunto de variáveis

---

<sup>6</sup> O futuro causal de  $\Sigma$  é o conjunto de todos os pontos ligados a partir de  $\Sigma$  por uma curva tipo-tempo ou tipo-luz apontada para o futuro.

canônicas para um problema particular, são relações algébricas independentes da função hamiltoniana, isto é, da dinâmica. Estas variáveis definem completamente o sistema a cada momento, no sentido de que qualquer quantidade física pode ser expressa em termos das mesmas. Entretanto, a fim de determinar a evolução dinâmica, é necessário representar as variáveis canônicas como operadores em um espaço de Hilbert sujeitos às equações de Heisenberg.

Em mecânica quântica não relativística, isto é, para sistemas com um número finito de graus de liberdade, a escolha da representação é irrisória, uma vez que todas as representações irredutíveis das relações canônicas de comutação são unitariamente equivalentes. Este é o famoso teorema de Von Neumann. A escolha de uma representação particular se reduz a uma questão de conveniência.

Em sistemas com infinitos de graus de liberdade, como na teoria quântica de campos, o teorema de Von Neumann não se aplica, e a escolha de uma representação particular da álgebra de campos de operadores pode ter um significado físico, devido à existência de representações não equivalentes.

As transformações de Bogoliubov são transformações lineares entre bases de expansão de um campo de operadores de tal forma que as relações canônicas de comutação sejam preservadas, sendo por isso também chamadas de transformações canônicas. O cálculo dos coeficientes de Bogoliubov é um meio analítico de verificar a equivalência, ou não, entre duas representações, particularmente, entre estados de vácuo em relação a dois observadores distintos.

Considere, portanto, dois conjuntos ortonormais completos,  $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$  e  $\{v_i(x), v_i^*(x)\}$ , a princípio distintos, de forma que o campo  $\phi(x)$  possa ser expandido em uma ou outra base,<sup>7</sup>

$$\phi(x) = \sum_i \left[ a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x) \right] \quad \text{e} \quad \phi(x) = \sum_j \left[ b_j v_j(x) + b_j^\dagger v_j^*(x) \right].$$

Cada decomposição define um estado de vácuo,  $|0\rangle$  e  $|\bar{0}\rangle$ , isto é,

$$a_i |0\rangle = 0, \forall i \quad \text{e} \quad b_j |\bar{0}\rangle = 0, \forall j, \quad \text{e, em geral,} \quad b_j |0\rangle \neq 0 \quad \text{e} \quad a_i |\bar{0}\rangle \neq 0.$$

Assim, podemos construir dois espaços de Fock a princípio distintos. Como os conjuntos  $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$  e  $\{v_j(x), v_j^*(x)\}$  são completos, podemos escrever os modos  $\{v_j(x), v_j^*(x)\}$

<sup>7</sup> Evidentemente, deve estar subentendido que, no caso de índices contínuos, a soma deve ser substituída por uma integral.

como combinações lineares dos modos  $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ ,

$$v_j(x) = \sum_i \left[ \alpha_{ji} u_i(x) + \beta_{ji} u_i^*(x) \right] \quad \text{e, inversamente,} \quad u_i(x) = \sum_j \left[ \alpha_{ji}^* v_j(x) - \beta_{ji} v_j^*(x) \right].$$

Estas são as transformações de Bogoliubov e os elementos das matrizes  $\alpha_{ij}$  e  $\beta_{ij}$  são os coeficientes de Bogoliubov, que podem ser calculados a partir dos produtos internos entre os modos,

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= (v_i, u_j) \\ \beta_{ij} &= - (v_i, u_j^*). \end{aligned}$$

Os coeficientes de Bogoliubov têm as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \sum_k \left( \alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^* \right) &= \delta_{ij} \\ \sum_k \left( \alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Com estes coeficientes podemos escrever os operadores  $a_j$  e  $a_j^\dagger$  como combinações lineares de  $b_j$  e  $b_j^\dagger$ :

$$\begin{aligned} \sum_i \left[ a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x) \right] &= \sum_j \left[ b_j v_j(x) + b_j^\dagger v_j^*(x) \right] \\ &= \sum_j \left\{ b_j \sum_i \left[ \alpha_{ji} u_i(x) + \beta_{ji} u_i^*(x) \right] + b_j^\dagger \sum_i \left[ \alpha_{ji}^* u_i^*(x) + \beta_{ji}^* u_i(x) \right] \right\} \\ &= \sum_{i,j} \left[ \left( \alpha_{ji} b_j + \beta_{ji}^* b_j^\dagger \right) u_i(x) + \left( \beta_{ji} b_j + \alpha_{ji}^* b_j^\dagger \right) u_i^*(x) \right], \end{aligned}$$

de forma que

$$a_i = \sum_j \left( \alpha_{ik} b_j + \beta_{ji}^* b_j^\dagger \right) \quad \text{e, analogamente,} \quad b_j = \sum_i \left( \alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji}^* a_i^\dagger \right).$$

Segue imediatamente que os espaços de Fock gerados por  $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$  e  $\{v_i(x), v_i^*(x)\}$  não são equivalentes se  $\beta_{ji} \neq 0$ . Em particular, o estado de vácuo dos modos  $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ ,  $|0\rangle$ , não corresponde ao estado de vácuo dos modos  $\{v_i(x), v_i^*(x)\}$ ,  $|\bar{0}\rangle$ ,

$$a_i |\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji}^* b_j^\dagger |\bar{0}\rangle \neq 0.$$

O valor esperado do operador número de partículas associadas aos modos  $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ ,  $N_i = a_i^\dagger a_i$ , no estado  $|\bar{0}\rangle$  é

$$\langle \bar{0} | N_i | \bar{0} \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2,$$

o que significa que o vácuo associado aos modos  $\{v_i(x), v_i^*(x)\}$  contém  $\sum_j |\beta_{ji}|^2$  partículas associadas aos modos  $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ . Quando algum  $\beta_{ij} \neq 0$ ,  $v_j(x)$  contém uma mistura dos modos de frequência positiva e negativa,  $u_i(x)$  e  $u_i^*(x)$ , e o observador associado a base  $\{v_i(x), v_i^*(x)\}$  detectará a presença de partículas onde para o observador associado a  $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$  há apenas vácuo. Naturalmente, quando os coeficientes  $\beta_{ij} = 0$ , os estados de vácuo  $|0\rangle$  e  $|\bar{0}\rangle$  são equivalentes. Neste caso,  $b_i|0\rangle = 0$  da mesma forma que  $a_j|\bar{0}\rangle = 0$ , e ambas as representações compartilham o mesmo estado de vácuo.

O campo deve ser decomposto em componentes de frequência positiva e negativa antes de se definir os operadores de criação e de aniquilação. Essa decomposição é diferente para observadores não equivalentes, embora sejam relacionadas por uma transformação de Bogoliubov. Isso explica porque os números de partículas, definidos em termos dos operadores de criação e de aniquilação, são diferentes em uma ou outra representação.

No espaço-tempo de Minkowski, o grupo de Poincaré permite uma escolha natural da representação da álgebra de operadores: os modos  $u_k(x)$  associados aos observadores de Lorentz, isto é, autofunções do vetor de Killing  $\partial/\partial t$ , ortogonal a superfícies  $\{t = \text{constante}\}$ . Estes observadores, os observadores de Lorentz, formam uma classe de equivalência, uma vez que o estado de vácuo é invariante em relação ao grupo de Poincaré.

Em um espaço-tempo curvo, entretanto, o grupo de Poincaré não é mais um grupo de simetria do espaço-tempo. Em geral, não há sequer vetores de Killing para com os quais definir modos de frequência positiva e, mesmo quando existe uma simetria que nos permita definir estes modos, o princípio da covariância não nos permite considerar um sistema de coordenadas particular. Sistemas de coordenadas são fisicamente irrelevantes. Conseqüentemente, o conceito de partículas torna-se impreciso, e a interpretação física dos estados quânticos torna-se mais sutil.

O conceito de partículas foi originalmente introduzido com relação a observadores inerciais e era suposto independente do estado de movimento do observador. No entanto, a noção de vácuo e, portanto, o conceito de partículas, depende da representação da álgebra de campos de operadores, em particular, depende do estado de movimento do observador e depende da geometria do espaço-tempo.

Esta imprecisão no conceito de partículas parece anti-intuitiva à primeira vista. En-



tretanto, o conceito de “vácuo” não é o mesmo que “espaço vazio”, uma vez que todo o espaço é preenchido por campos que constituem o universo. O vácuo é simplesmente o estado de menor energia possível destes campos. Os estados de energia são definidos pelo operador hamiltoniano, baseado em condições locais no espaço-tempo. Observadores distintos correspondem a diferentes sistemas de coordenadas, portanto, detectam diferentes estados quânticos, em particular, diferentes estados de vácuo.

---

# 5

## O Efeito Unruh

“Any acceleration constitutes progress, Miss Glory. Nature had no understanding of the modern rate of work. From a technical standpoint the whole of childhood is pure nonsense. Simply wasted time. An untenable waste of time.”

Karel Capek, Rossum's Universal Robots.

---

## 5.1 Introdução

Uma das conseqüências da existência de representações não equivalentes das relações canônicas de comutação é o chamado efeito Unruh segundo o qual a noção de partícula depende do estado de movimento do observador. Este problema foi estudado pela primeira vez por Unruh<sup>1</sup>, inspirado no famoso trabalho de Hawking<sup>2</sup> sobre criação de partículas por buracos negros. Considere um detector<sup>3</sup> de partículas uniformemente acelerado no espaço de Minkowski. Suponha que todos os campos em todo o espaço estejam no estado de vácuo. Acontece que o detector acelerado irá encontrar não o vácuo, mas uma distribuição térmica de partículas, como se em contato térmico com radiação de corpo negro com uma certa temperatura chamada “temperatura Unruh”, proporcional a sua aceleração.

## 5.2 Movimento Acelerado

Antes de considerar o efeito Unruh, vamos estudar o movimento de um observador uniformemente acelerado no espaço-tempo de Minkowsky 2-dimensional.

O parâmetro mais natural ao longo da linha de mundo de um observador é o seu tempo próprio  $\tau$ , de forma que sua posição e sua velocidade são funções de  $\tau$ ,  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  e  $v^\mu = v^\mu(\tau)$ , onde

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

é um vetor unitário tipo-tempo,

$$v^2 = \eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{d\tau^2} = 1.$$

A aceleração

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

é ortogonal à velocidade,

$$a \cdot v = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{v^2}{2} \right) = 0.$$

Isto significa que  $a^0 = 0$  no referencial de repouso do observador, o referencial de Lorentz em que  $v = (1, 0)$  no instante em questão. Neste referencial, a parte espacial de  $a^\mu$  se

<sup>1</sup> Unruh (1976).

<sup>2</sup> Hawking (1975).

<sup>3</sup> Um detector é um sistema acoplado aos vários campos físicos de forma que seja sensível à presença de partículas.

reduz à definição usual de aceleração

$$a^i = \frac{d^2 x^i}{dt^2}$$

cujo módulo é

$$a = |a^\mu a_\mu|^{1/2}.$$

Considere, então, um observador sujeito a uma aceleração constante  $a$  na direção  $x$ . As equações de movimento são

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

com  $v^\mu v_\mu = 1$ ,  $v^\mu a_\mu = 0$  e  $a^\mu a_\mu = -a^2$ , donde segue que

$$\begin{aligned} a^0 &= \frac{dv^0}{d\tau} = av^1, \\ a^1 &= \frac{dv^1}{d\tau} = av^0. \end{aligned}$$

Este sistema de equações é trivial. Com as constantes de integração apropriadas, o resultado é

$$t(\tau) = \frac{1}{a} \sinh a\tau, \quad x(\tau) = \frac{1}{a} \cosh a\tau.$$

Portanto, a linha de mundo de um observador uniformemente acelerado é um ramo da hipérbole  $x^2 - t^2 = a^{-2}$ . Tal trajetória se aproxima do cone de luz na medida em que  $|t|$  cresce (figura 5.1).

### 5.3 Referencial Co-movente

Agora é necessário construir o sistema de coordenadas do referencial co-movente com o observador uniformemente acelerado, chamado sistema de coordenadas de Rindler  $(\eta, \xi)$ . Neste referencial, vamos supor que o observador acelerado esteja em repouso em  $\xi = 0$ . Evidentemente, a coordenada temporal  $\eta$  é o tempo próprio  $\tau$  ao longo da linha de mundo do observador. Além disso, vamos assumir que a métrica no referencial co-movente é conformalmente plana,<sup>4</sup>

$$ds^2 = \Omega^2(\eta, \xi) [d\eta^2 - d\xi^2].$$

<sup>4</sup> É fácil verificar que em um espaço-tempo 2-dimensional, é sempre possível realizar uma transformação de coordenadas que torne a métrica conformalmente plana.

Antes de prosseguir, é conveniente definir as chamadas coordenadas do cone de luz do referencial inercial

$$u \equiv t - x = -\frac{1}{a}e^{-a\tau} \quad \text{e} \quad v \equiv t + x = \frac{1}{a}e^{a\tau}.$$

Em termos de  $u$  e  $v$ , o elemento de linha do espaço-tempo de Minkowsky 2-dimensional é dado por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = du dv.$$

Analogamente, as coordenadas do cone de luz do referencial co-movente são

$$\tilde{u} \equiv \eta - \xi \quad \text{e} \quad \tilde{v} \equiv \eta + \xi.$$

Em termos de  $\tilde{u}$  e  $\tilde{v}$ , a métrica é dada por

$$ds^2 = \Omega^2(\tilde{u}, \tilde{v}) d\tilde{u} d\tilde{v},$$

e a linha de mundo do observador

$$\eta(\tau) = \tau, \quad \xi(\tau) = 0,$$

é dada por  $v(\tau) = u(\tau) = \tau$ . Como  $\eta$  é o tempo próprio  $\tau$  na posição do observador, o fator conforme  $\Omega^2(\tilde{u}, \tilde{v})$  deve ser tal que  $\Omega^2(\tilde{u} = \tau, \tilde{v} = \tau) = 1$ , de modo que o intervalo entre dois eventos na origem do referencial acelerado seja  $ds^2 = d\eta^2$ .

Comparando o elemento de linha em ambos os sistemas de coordenadas,

$$ds^2 = du dv = \Omega^2(\tilde{u}, \tilde{v}) d\tilde{u} d\tilde{v},$$

pode-se notar que as funções  $u(\tilde{u}, \tilde{v})$  e  $v(\tilde{u}, \tilde{v})$  na verdade dependem somente de um dos argumentos, caso contrário haveria termos  $d\tilde{u}^2$  e  $d\tilde{v}^2$  na igualdade acima. Vamos escolher

$$u = u(\tilde{u}), \quad v = v(\tilde{v}).$$

Para determinar as funções  $u(\tilde{u})$  e  $v(\tilde{v})$ , considere a trajetória do observador em ambos os sistemas de coordenadas

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = \frac{du(\tilde{u})}{d\tilde{u}} \frac{d\tilde{u}(\tau)}{d\tau}.$$

Segue das definições de  $u(\tau)$ ,  $v(\tau)$ ,  $\tilde{u}(\tau)$  e  $\tilde{v}(\tau)$  que

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = e^{-a\tau} = -au(\tau), \quad \frac{d\tilde{u}(\tau)}{d\tau} = 1.$$

Assim,

$$\frac{du}{d\tilde{u}} = -au,$$

portanto,

$$u = C_1 e^{-a\tilde{u}},$$

onde  $C_1$  é uma constante de integração. Similarmente,

$$v = C_2 e^{a\tilde{v}}.$$

A condição  $\Omega^2(\tilde{u} = \tau, \tilde{v} = \tau) = 1$  fornece um vínculo entre as constantes de integração,  $a^2 C_1 C_2 = -1$ . Tomando  $C_1 = -C_2$ , encontramos

$$u = -\frac{1}{a} e^{-a\tilde{u}}, \quad v = \frac{1}{a} e^{a\tilde{v}},$$

e

$$ds^2 = du dv = e^{a(\tilde{v}-\tilde{u})} d\tilde{u} d\tilde{v}.$$

As relações entre  $(u, v)$  e  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  podem ser reescritas em termos de  $(t, x)$  e  $(\eta, \xi)$ ,

$$t(\eta, \xi) = a^{-1} e^{a\xi} \sinh a\eta, \quad x(\eta, \xi) = a^{-1} e^{a\xi} \cosh a\eta.$$

O elemento de linha no referencial acelerado,

$$ds^2 = e^{2a\xi} [d\eta^2 - d\xi^2],$$

descreve o chamado espaço-tempo de Rindler, que é localmente idêntico ao espaço-tempo de Minkowsky e, portanto, possui curvatura zero. Tal métrica é explicitamente estática como era esperado. Observe, entretanto, que a métrica é singular em  $x = t = 0$ . Um observador uniformemente acelerado precisaria de uma aceleração infinita para passar por este ponto. Evidentemente, esta singularidade não é física, apenas reflete a escolha deste sistema de coordenadas.

As coordenadas  $(\eta, \xi)$  definidas nas regiões

$$-\infty < \eta < \infty, \quad -\infty < \xi < \infty$$

cobrem somente a região  $x > |t|$  do espaço-tempo de Minkowsky. O sistema de coordenadas de Rindler é, portanto, incompleto. As assíntotas  $\mathcal{H}^-$  e  $\mathcal{H}^+$  indicadas na figura 5.1 definem horizontes de evento para o observador de Rindler, chamados horizonte passado e futuro, respectivamente.

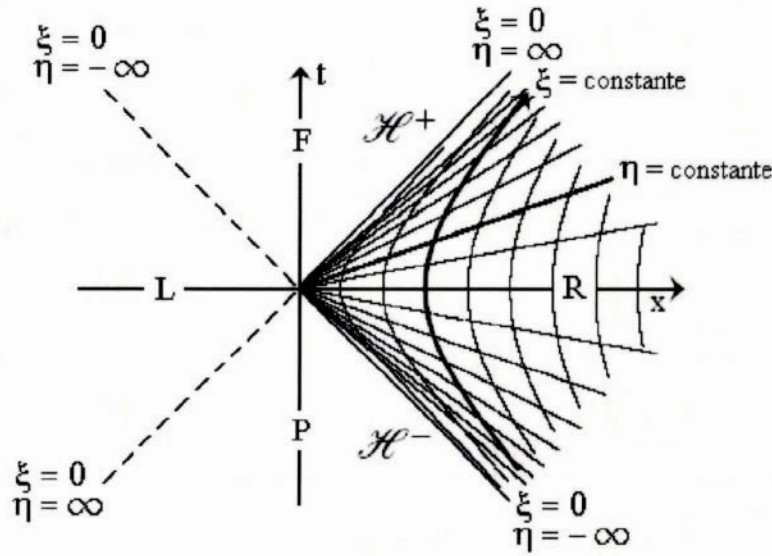


Figura 5.1: Linhas de mundo de observadores de Rindler.

## 5.4 Quantização no Espaço de Rindler

Considere por simplicidade o campo escalar real sem massa. A equação de Klein-Gordon no referencial inercial e no referencial acelerado é, respectivamente,

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \phi(t, x) = 0, \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \phi(\eta, \xi) = 0,$$

ou, em coordenadas do cone de luz,

$$\partial_u \partial_v \phi(u, v) = 0, \quad \partial_{\tilde{u}} \partial_{\tilde{v}} \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0.$$

Aqui fica evidente a importância da invariância conforme da equação de Klein-Gordon. Como a métrica é conformalmente plana em coordenadas de Rindler, a equação não precisa ser resolvida duas vezes. A partir da solução no referencial inercial, encontra-se a solução no referencial acelerado.

As soluções  $\phi \propto e^{-i\omega u} = e^{-i\omega(t-x)}$  e  $\phi \propto e^{-i\Omega \tilde{u}} = e^{-i\Omega(\eta-\xi)}$  descrevem os modos de frequência positiva que se movem à direita com respeito ao tempo de Minkowski  $t$  e com respeito ao tempo de Rindler  $\eta$ , respectivamente. As soluções  $\phi \propto e^{-i\omega v}$  e  $\phi \propto e^{-i\Omega \tilde{v}}$  descrevem os modos que se movem à esquerda. Como  $u = u(\tilde{u})$  e  $v = v(\tilde{v})$ , os modos que se movem à direita  $RM$  (right-moving mode) e os que se movem à esquerda  $LM$  (left-

moving mode) não se afetam, e podem ser considerados separadamente. Nas fórmulas a seguir no restante deste capítulo, vamos escrever explicitamente apenas os modos  $RM$ .

O campo de operadores  $\phi$  é então dado por

$$\begin{aligned}\phi &= (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(2\omega)^{1/2}} [e^{-i\omega u} a_\omega^- + e^{i\omega u} a_\omega^+] + LM \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(2\Omega)^{1/2}} [e^{-i\Omega \tilde{u}} b_\Omega^- + e^{i\Omega \tilde{u}} b_\Omega^+] + LM,\end{aligned}$$

onde os operadores  $a_\omega^\pm$  e  $b_\Omega^\pm$  obedecem as relações usuais de comutação

$$\begin{aligned}[a_\omega^-, a_{\omega'}^+] &= \delta(\omega - \omega'), \\ [b_\Omega^-, b_{\Omega'}^+] &= \delta(\Omega - \Omega'), \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Os operadores de aniquilação  $a_\omega^-$  e  $b_\Omega^-$  definem o vácuo de Minkowski  $|0\rangle_M$  e o vácuo de Rindler  $|0\rangle_R$ , respectivamente,

$$a_\omega^- |0\rangle_M = 0 \quad \text{e} \quad b_\Omega^- |0\rangle_R = 0.$$

O espaço de estados correspondente a cada um dos referenciais pode ser construído a partir do estado fundamental utilizando-se os operadores de criação.

## 5.5 Coeficientes de Bogoliubov

$a^\pm$  e  $b^\pm$  se relacionam através dos chamados coeficientes de Bogoliubov,<sup>5</sup>

$$b_\Omega^- = \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega} a_\omega^- - \beta_{\Omega\omega} a_\omega^+), \quad b_\Omega^+ = (b_\Omega^-)^\dagger = \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega}^* a_\omega^+ - \beta_{\Omega\omega}^* a_\omega^-).$$

A condição de normalização para estes coeficientes segue das relações de comutação entre os operadores de criação e aniquilação,

$$\int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega} \alpha_{\Omega'\omega}^* - \beta_{\Omega\omega} \beta_{\Omega'\omega}^*) = \delta(\Omega - \Omega').$$

A partir das transformações de Bogolyubov, pode-se escrever

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{d\omega}{(2\omega)^{1/2}} [e^{-i\omega u} a_\omega^- + e^{i\omega u} a_\omega^+] &= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(2\Omega)^{1/2}} [e^{-i\Omega \tilde{u}} b_\Omega^- + e^{i\Omega \tilde{u}} b_\Omega^+] \\ &= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(2\Omega)^{1/2}} [e^{-i\Omega \tilde{u}} \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega} a_\omega^- - \beta_{\Omega\omega} a_\omega^+)] + \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(2\Omega)^{1/2}} [e^{i\Omega \tilde{u}} \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega}^* a_\omega^+ - \beta_{\Omega\omega}^* a_\omega^-)],\end{aligned}$$

<sup>5</sup> A transformação inversa não é definida porque as coordenadas de Rindler não cobrem todo o espaço de Minkowski.



donde segue que

$$\frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{\omega}} = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{\Omega}} \left( \alpha_{\Omega\omega} e^{-i\Omega\tilde{u}} - \beta_{\Omega\omega}^* e^{i\Omega\tilde{u}} \right).$$

A integral em  $\tilde{u}$  da equação acima multiplicada por  $\exp(\pm i\Omega\tilde{u})$  resulta em

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int_{-\infty}^\infty d\tilde{u} e^{-i\omega u \pm i\Omega\tilde{u}} &= \int_{-\infty}^\infty d\tilde{u} \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{\sqrt{\Omega'}} \left[ \alpha_{\Omega'\omega} e^{i(-\Omega' \pm \Omega)\tilde{u}} - \beta_{\Omega'\omega}^* e^{i(\Omega' \pm \Omega)\tilde{u}} \right] \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{\sqrt{\Omega'}} \left[ \alpha_{\Omega'\omega} \delta(\pm\Omega - \Omega') - \beta_{\Omega'\omega}^* \delta(\pm\Omega + \Omega') \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha_{\Omega\omega} &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Omega}{\omega} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^\infty d\tilde{u} e^{i\Omega\tilde{u} - i\omega u} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Omega}{\omega} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^0 du (-au)^{-\frac{i\Omega}{a} - 1} e^{-i\omega u}, \\ \beta_{\Omega\omega} &= -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Omega}{\omega} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^\infty d\tilde{u} e^{i\Omega\tilde{u} + i\omega u} = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Omega}{\omega} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^0 du (-au)^{-\frac{i\Omega}{a} - 1} e^{i\omega u}. \end{aligned}$$

As integrais acima podem ser reescritas em termos de funções gamma notando-se que

$$\int_0^\infty dx x^{s-1} e^{-bx} = b^{-s} \int_0^\infty dy y^{s-1} e^{-y} = b^{-s} \Gamma(s).$$

Segue que

$$\begin{aligned} \alpha_{\Omega\omega} &= \frac{1}{2\pi a} \left( \frac{\Omega}{\omega} \right)^{1/2} e^{\frac{\pi\Omega}{2a}} \exp\left(\frac{i\Omega}{a} \ln \frac{\omega}{a}\right) \Gamma\left(-\frac{i\Omega}{a}\right), \\ \beta_{\Omega\omega} &= -\frac{1}{2\pi a} \left( \frac{\Omega}{\omega} \right)^{1/2} e^{-\frac{\pi\Omega}{2a}} \exp\left(\frac{i\Omega}{a} \ln \frac{\omega}{a}\right) \Gamma\left(-\frac{i\Omega}{a}\right), \end{aligned}$$

portanto,  $|\alpha_{\Omega\omega}|^2 = \exp(2\pi\Omega a^{-1}) |\beta_{\Omega\omega}|^2$ .

## 5.6 Números de Ocupação e a Temperatura Unruh

O valor esperado do operador número de partículas com frequência  $\Omega$  para o observador de Rindler,  $N_\Omega = b_\Omega^+ b_\Omega^-$ , no vácuo de Minkowski é

$$\begin{aligned} \langle N_\Omega \rangle &= \langle 0_M | b_\Omega^+ b_\Omega^- | 0_M \rangle \\ &= \langle 0_M | \int d\omega \left( \alpha_{\Omega\omega}^* a_\omega^+ - \beta_{\Omega\omega}^* a_\omega^- \right) \int d\omega' \left( \alpha_{\Omega\omega'} a_{\omega'}^- - \beta_{\Omega\omega'} a_{\omega'}^+ \right) | 0_M \rangle \\ &= \int d\omega |\beta_{\Omega\omega}|^2. \end{aligned}$$

A condição de normalização para  $\Omega' = \Omega$  diz que

$$\int_0^\infty d\omega \left( |\alpha_{\Omega\omega}|^2 - |\beta_{\Omega\omega}|^2 \right) = \delta(0) = \int d\omega |\beta_{\Omega\omega}|^2 \left[ \exp\left(\frac{2\pi\Omega}{a}\right) - 1 \right].$$

Portanto,

$$\langle N_{\Omega} \rangle = \left[ \exp \left( \frac{2\pi\Omega}{a} \right) - 1 \right]^{-1} \delta(0).$$

O fator divergente  $\delta(0)$  corresponde a um volume espacial infinito. A densidade média de partículas com frequência  $\Omega$  é simplesmente

$$n_{\Omega} = \left[ \exp \left( \frac{2\pi\Omega}{a} \right) - 1 \right]^{-1}.$$

Isto é, um observador acelerado no vácuo de Minkowski detecta partículas com a distribuição térmica acima com uma temperatura proporcional a sua aceleração, a temperatura Unruh

$$T = \frac{a}{2\pi}.$$

As partículas podem apresentar qualquer momento linear, embora seja menos provável encontrar partículas com energia mais elevada. O observador acelerado “sente-se” imerso em um banho térmico de partículas. Este é o chamado efeito Unruh.

Em unidades usuais, a temperatura Unruh é da ordem de  $T \sim 10^{-20} \times a \text{ m}^{-1} \text{ s}^2$  Kelvin, portanto, o efeito é extremamente pequeno para acelerações acessíveis em laboratórios. Entretanto, isso explicaria porque partículas livres e partículas aceleradas da mesma espécie apresentam tempos de meia-vida distintos.

## 5.7 Efeito Hawking

Buracos negros são normalmente descritos como objetos massivos com campos gravitacionais tão intensos que nem mesmo a luz pode escapar de suas superfícies, chamadas horizontes de eventos. Entretanto, devido a efeitos quânticos, um buraco negro pode emitir uma fraca radiação, produzida a partir de flutuações quânticas do vácuo em torno do horizonte. Este resultado foi surpreendente, pois acreditava-se que somente campos não-estáticos poderiam produzir partículas.<sup>6</sup>

Considere a métrica de Schwarzschild (em duas dimensões, por simplicidade)

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2.$$

O valor  $r = 2M$  é uma singularidade da métrica nas coordenadas  $(t, r)$ , referente ao horizonte de eventos. Tal singularidade não é física: um observador em queda livre

<sup>6</sup> Hawking (1975).

encontrará somente o espaço vazio usual no horizonte. Ainda, a expressão acima mostra que quando  $r < 2M$ ,  $t$  passa a ser uma coordenada tipo-espaço, e  $r$  passa a ser uma coordenada tipo-tempo. Portanto,  $t$  e  $r$  admitem a interpretação usual de tempo e espaço somente na região exterior ao horizonte de eventos,  $r > 2M$ .

A radiação Hawking pode ser compreendida fisicamente em termos de criação de pares partícula-antipartícula virtuais próximas ao horizonte de eventos. Segundo o princípio de Heisenberg, a incerteza  $\Delta E$  na energia de uma partícula em um dado estado quântico por um momento  $\Delta t$  é tal que  $\Delta E \times \Delta t > \hbar$ . Acontece que o espaço é preenchido por flutuações quânticas do vácuo, pares de partículas são criados e aniquilados o tempo todo. Se essas partículas existem somente por um intervalo de tempo menor do que  $\Delta t$ , não há violação da lei de conservação de energia.

Considere, portanto, a criação de uma partícula e de uma antipartícula, cada uma com energia  $E$ . Em um espaço-tempo plano, as partículas produzidas não poderiam se propagar indefinidamente, o par deve ser aniquilado dentro de um instante  $\hbar/E$ . Entretanto, na vizinhança do horizonte de eventos de um buraco negro, uma partícula pode eventualmente cruzar o horizonte antes de ser absorvida, onde poderia propagar-se livremente. A energia desta partícula com respeito a observadores distantes é negativa porque o vetor de Killing  $\partial/\partial t$ , que corresponde à energia longe do buraco negro, se transforma em um vetor tipo-espaço dentro do horizonte. Conseqüentemente, a massa do buraco negro diminui no decorrer deste processo. Enquanto uma partícula é absorvida pelo horizonte de eventos, a outra pode se propagar indefinidamente.

Mukhanov (2005) mostra que o cálculo da temperatura Hawking é idêntico ao da temperatura Unruh (no caso bi-dimensional) e identifica os observadores inercial e uniformemente acelerado no espaço-tempo de Minkowsky com um observador distante em queda livre e um observador a uma distância fixa do buraco negro, respectivamente. A temperatura da radiação Hawking é então obtida fazendo-se a substituição  $\alpha = (4M)^{-1}$ , onde  $\alpha$  é a aceleração do observador de Rindler, e  $M$  é a massa do buraco negro. Se o campo  $\phi(x)$  estiver no estado de vácuo  $|0_k\rangle$ , observadores afastados do buraco negro a uma distância fixa detectarão um espectro térmico de partículas com uma temperatura

$$T_H = \frac{1}{8\pi M},$$

a chamada temperatura Hawking. Conseqüentemente, a densidade de partículas observadas com energia  $E$  é

$$n_E = \frac{1}{e^{E/T_H} - 1}.$$

---

Segue que somente partículas com massa muito pequena,  $m \lesssim T_H$ , são produzidas significativamente. Evidentemente, em 4 dimensões o problema é mais complicado. Nesse caso, as ondas se propagando para longe do buraco negro devem atravessar uma barreira de potencial, o que reduz ainda mais a intensidade da radiação.<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup> Mukhanov (2005).

---

# 6

## O campo escalar em modelos de Friedmann-Robertson-Walker

“The universe is a labyrinth made of labyrinths. Each leads to another. And wherever we cannot go ourselves, we reach with mathematics.”

Stanislaw Lem, Fiasco.

---

## 6.1 Introdução

---

Uma outra consequência da existência de representações não equivalentes das relações canônicas de comutação é o processo de criação de partículas como efeito da evolução da geometria do universo.

Aqui vamos considerar modelos em que a equação de campo clássica pode ser resolvida por separação de variáveis,  $\phi(x) = \chi(\vec{x})\varphi(t)$ , onde  $\varphi(t)$  obedece uma equação diferencial ordinária com os coeficientes dependentes do tempo, ou seja, não é da forma  $\exp(\pm i\omega t)$ , como no caso de ondas planas. A consequência física da dependência temporal dos coeficientes é a produção de partículas devido a evolução do campo gravitacional. Vamos estudar, por simplicidade, apenas modelos de universos homogêneos e isotrópicos com sessão espacial plana, descritos pela métrica de Robertson-Walker com elemento de linha

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

onde  $(t, x, y, z)$  representa um observador comovente com o fluido de matéria no universo. Para encontrar soluções particulares das equações dinâmicas é conveniente substituir o tempo cósmico,  $t$ , pelo tempo conforme,  $\eta$ , definido (a menos de uma constante) por  $d\eta = a^{-1}dt$ , de forma que

$$d\tau^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j).$$

Evidentemente, esta geometria é conformalmente plana.

## 6.2 Equação de Klein-Gordon

---

Para encontrar a solução da equação de Klein-Gordon, definimos  $\varphi(\eta)$  de forma que

$$\phi_k(x) = a^{-1}(\eta)\varphi_k(\eta)\chi_k(\vec{x}).$$

A parte espacial da equação de Klein-Gordon é a equação trivial de um oscilador harmônico,<sup>1</sup> e as autofunções  $\chi(\vec{x})$  têm a forma familiar  $\exp(\pm i\vec{k} \cdot \vec{x})$ . As funções  $\varphi_k(\eta)$ , por sua vez,

---

<sup>1</sup> As variáveis dependentes do tempo e do espaço podem ser separadas na equação de Klein-Gordon sempre que a métrica for conformalmente estática. No caso mais geral de um modelo de Friedmann-Robertson-Walker com sessão espacial hiperbólica ou esférica,  $\chi_k(\vec{x})$  são as autofunções do operador de Laplace-Beltrami correspondentes. Veja, por exemplo, Svaiter (1989).

---

satisfazem a equação

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 + m^2 a^2(\eta) - \frac{a''}{a}(\eta) + \xi R a^2(\eta) \right] \varphi_k(\eta) = 0,$$

onde  $a'' = d^2 a / d\eta^2$ . O escalar de curvatura neste modelo, escrito em termos do tempo conforme, é  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 6a''/a^3$ . No caso particular em que a constante de acoplamento possui o valor  $\xi = 1/6$ , os dois últimos coeficientes se anulam. Se além disso  $m = 0$ , o caso conformemente invariante, a equação de Klein-Gordon admite soluções de ondas planas como no caso do espaço-tempo de Mikowski e, portanto, não há produção de partículas.

A solução geral da equação de campo é

$$\phi(\eta, \vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} a^{-1}(\eta) \int d^3 k \left[ a_k \varphi_k(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_k^\dagger \varphi_k^*(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right].$$

$a_k$  e  $a_k^\dagger$ , serão, como antes, interpretados como operadores de aniquilação e de criação, dando a solução da equação de Heisenberg. Como resultado da dependência temporal dos coeficientes, as soluções não podem, em geral, ser escritas em termos de funções elementares. Uma outra consequência é que não há uma escolha natural da base do espaço de soluções, análoga as ondas planas de frequência positiva e negativa no exemplo conformemente invariante. Em geral, isso torna impossível uma analogia formal com o campo livre para uma interpretação em termos de partículas.

$\varphi_k$  pode ser normalizado de forma que as relações canônicas de comutação de  $\phi$  e  $\pi$  se traduzam nas relações entre os operadores de aniquilação e criação

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k'),$$

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0.$$

Entretanto, esta condição não torna  $\varphi_k$  único, apenas nos dá uma classe de representações de Fock. A normalização  $(\phi_k, \phi_{k'}) = \delta(k - k')$  é equivalente à condição<sup>3</sup>

$$W[\varphi_k, \varphi_k^*] = \varphi_k \frac{\partial \varphi_k^*}{\partial \eta} - \varphi_k^* \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} = i,$$

onde  $W$  é o chamado Wronskiano das funções  $\varphi_k$  e  $\varphi_k^*$ .

A seguir vamos estudar dois exemplos de produção de partícula em universos de Friedmann-Robertson-Walker com sessão espacial plana.

<sup>2</sup> Este cálculo envolve apenas álgebra tensorial elementar, e é trivial, apesar de cansativo. Uma alternativa mais elegante e sofisticada para este cálculo envolve propriedades de espaços maximalmente simétricos. Veja, por exemplo, Weinberg (1972).

<sup>3</sup> Compare com a definição de produto interno entre as soluções no capítulo 4.

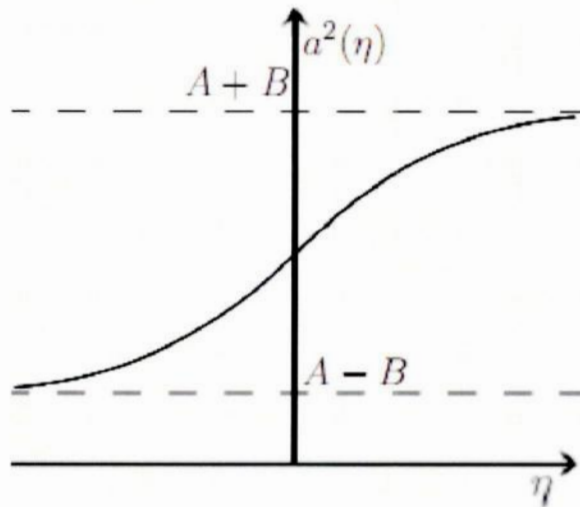


Figura 6.1:  $a(\eta)$  segundo o modelo de Bernard e Duncan (1977).

### 6.3 Exemplo de Acoplamento Conforme

Agora vamos estudar um exemplo de produção de partículas massivas,  $m \neq 0$ , com acoplamento conforme,  $\xi = 1/6$ . Considere um modelo de Friedmann-Robertson-Walker com fator de escala<sup>4</sup>

$$a^2(\eta) = A + B \tanh \rho \eta, \quad \text{onde } A, B \text{ e } \rho \text{ são constantes.}$$

$a^2(\eta) \rightarrow A \pm B$  quando  $\eta \rightarrow \pm\infty$ , portanto, o espaço-tempo se torna minkowskiano no passado e no futuro distantes, e a equação de Klein-Gordon admite soluções de ondas planas nestas regiões. Apesar de altamente artificial, este modelo ilustra bem o assunto deste trabalho.

A parte temporal da equação de Klein-Gordon assume a forma

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 + m^2 (A + B \tanh \rho \eta) \right] \varphi_k(\eta) = 0.$$

Introduzindo a notação

$$\begin{aligned} \omega_{in} &= [k^2 + m^2 (A - B)]^{1/2} \\ \omega_{out} &= [k^2 + m^2 (A + B)]^{1/2} \\ \omega_{\pm} &= \frac{1}{2} (\omega_{in} \pm \omega_{out}), \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Este modelo foi investigado pela primeira vez por Bernard & Duncan (1977).



os modos normalizados que se comportam como modos de frequência positiva no espaço de Minkowski no passado remoto ( $\eta \rightarrow -\infty$ ) são

$$\begin{aligned} {}^{in}\varphi_k &= (2\omega_{in})^{-1/2} \exp \left[ -i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln \left( 2 \cosh \rho\eta \right) \right] \times \\ &{}_2F_1 \left( 1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho}; \frac{1}{2}(1 + \tanh \rho\eta) \right), \end{aligned}$$

enquanto os modos normalizados que se comportam como modos de frequência positiva no espaço de Minkowski no futuro distante ( $\eta \rightarrow \infty$ ) são

$$\begin{aligned} {}^{out}\varphi_k &= (2\omega_{out})^{-1/2} \exp \left[ -i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln \left( 2 \cosh \rho\eta \right) \right] \times \\ &{}_2F_1 \left( 1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1}{2}(1 - \tanh \rho\eta) \right), \end{aligned}$$

onde a função  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ , conhecida como função hipergeométrica, é solução de<sup>5</sup>

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \left[ \gamma - (\alpha + \beta + 1)z \right] \frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0.$$

Uma propriedade importante da função hipergeométrica é

$$\lim_{z \rightarrow 0} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1,$$

de modo que

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} {}^{in}\phi_k = [(2\pi)^3 2\omega_{in}]^{-1/2} \exp \left( i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega_{in}\eta \right),$$

e

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} {}^{out}\phi_k = [(2\pi)^3 2\omega_{out}]^{-1/2} \exp \left( i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega_{out}\eta \right).$$

Para o cálculo dos coeficientes de Bogoliubov, podemos usar as seguintes propriedades de transformações entre funções hipergeométricas

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z),$$

e

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma; 1-z) + \\ &+(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z), \end{aligned}$$

<sup>5</sup> Veja, por exemplo, Gradshteyn & Ryzhik (2007).

que podem ser combinadas em

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma; 1 - z) + \\ &+ z^{1-\gamma}(1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} {}_2F_1(1 - \beta, 1 - \alpha; \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z), \end{aligned}$$

com

$$\alpha = 1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \quad \beta = \frac{i\omega_-}{\rho}, \quad \gamma = 1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho} \quad \text{e} \quad z = \frac{1}{2}(1 + \tanh \rho\eta),$$

de forma que

$$\begin{aligned} z^{1-\gamma}(1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} &= \left( \frac{e^{\rho\eta}}{2\cosh \rho\eta} \right)^{i\omega_{in}/\rho} \left( \frac{e^{-\rho\eta}}{2\cosh \rho\eta} \right)^{-i\omega_{out}/\rho} \\ &= \exp \left[ i(\omega_{in} + \omega_{out})\eta + \frac{i(\omega_{out} - \omega_{in})}{\rho} \ln(2\cosh \rho\eta) \right] \\ &= \exp \left[ 2i\omega_+\eta + \frac{2i\omega_-}{\rho} \ln(2\cosh \rho\eta) \right]. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever os modos  ${}^{in}\varphi_k$  em termos dos modos  ${}^{out}\varphi_k$ :

$$\begin{aligned} {}^{in}\varphi_k &= (2\omega_{in})^{-1/2} \exp \left[ -i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln(2\cosh \rho\eta) \right] \times \\ &{}_2F_1 \left( 1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho}; \frac{1}{2}(1 + \tanh \rho\eta) \right) \\ &= (2\omega_{in})^{-1/2} \exp \left[ -i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln(2\cosh \rho\eta) \right] \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} \times \\ &{}_2F_1 \left( 1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1}{2}(1 - \tanh \rho\eta) \right) + \\ &(2\omega_{in})^{-1/2} \exp \left[ i\omega_+\eta + \frac{i\omega_-}{\rho} \ln(2\cosh \rho\eta) \right] \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \times \\ &{}_2F_1 \left( 1 - \frac{i\omega_-}{\rho}, -\frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1}{2}(1 - \tanh \rho\eta) \right) \\ &= \alpha_k {}^{out}\varphi_k + \beta_k {}^{out}\varphi_k^*, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \left( \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)}, \\ \beta_k &= \left( \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)}. \end{aligned}$$

Finalmente, com as propriedades da função Gamma,<sup>6</sup>

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad \text{e} \quad |\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh \pi y}, \quad y \in \mathbf{R},$$

<sup>6</sup> Veja a citação na nota anterior.

encontramos

$$|\beta_k|^2 = \frac{\sinh^2(\pi\omega_-/p)}{\sinh(\pi\omega_{out}/\rho) \sinh(\pi\omega_{in}/p)}.$$

Assumindo que o campo escalar estava inicialmente no estado de vácuo,  $|0_{in}\rangle$ , no passado distante, quando o espaço-tempo era minkowskiano, observadores inerciais não detectariam a presença de partículas. O universo evolui, e o espaço-tempo volta a ser minkowskiano no futuro distante. O campo ainda encontra-se no estado  ${}^{in}|0\rangle$ , de acordo com o formalismo de Heisenberg, no entanto, observadores inerciais nesta região ( $\eta \rightarrow \infty$ ) não registram mais este estado como sendo o estado de vácuo. O número esperado de partículas no modo  $k$  é  $|\beta_k|^2$ . Note, entretanto, que se  $m = 0$ ,  $|\beta_k|^2 = 0$  e não há criação de partículas como já era esperado pela invariância conforme.

## 6.4 Exemplo de Acoplamento Mínimo

Agora vamos estudar um exemplo de produção de partículas relativísticas,  $m = 0$ , com acoplamento mínimo,  $\xi = 0$ . Considere um modelo de Friedmann-Robertson-Walker com fator de escala dado por

$$a(\eta) = a_0 \left[ 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Quando  $\eta \rightarrow \pm\infty$ , no passado e no futuro distantes, o fator de escala diverge, portanto, este modelo é assintoticamente plano, assim como o modelo anterior.

Este modelo é mais realista que o anterior: é uma solução das equações de Einstein para um universo preenchido homogeneamente por um fluido de radiação e por um campo escalar com energia negativa descritos pela ação<sup>7</sup>

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left( -\frac{R}{16\pi} - \epsilon - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} \right).$$

onde  $\epsilon$  é a densidade de energia do fluido de radiação. A solução deste sistema é a métrica  $a(\eta)$  de forma que o atual estado de expansão foi precedido por uma fase de contração, de forma que não há singularidade. Este tipo de modelo, em que o universo se contrai e depois se expande, é chamado modelo com ricochete.

A parte temporal da equação de Klein-Gordon assume a forma

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 - \frac{a''}{a}(\eta) \right] \varphi_k(\eta) = 0,$$

<sup>7</sup> Peter & Pinto-Neto (2002).

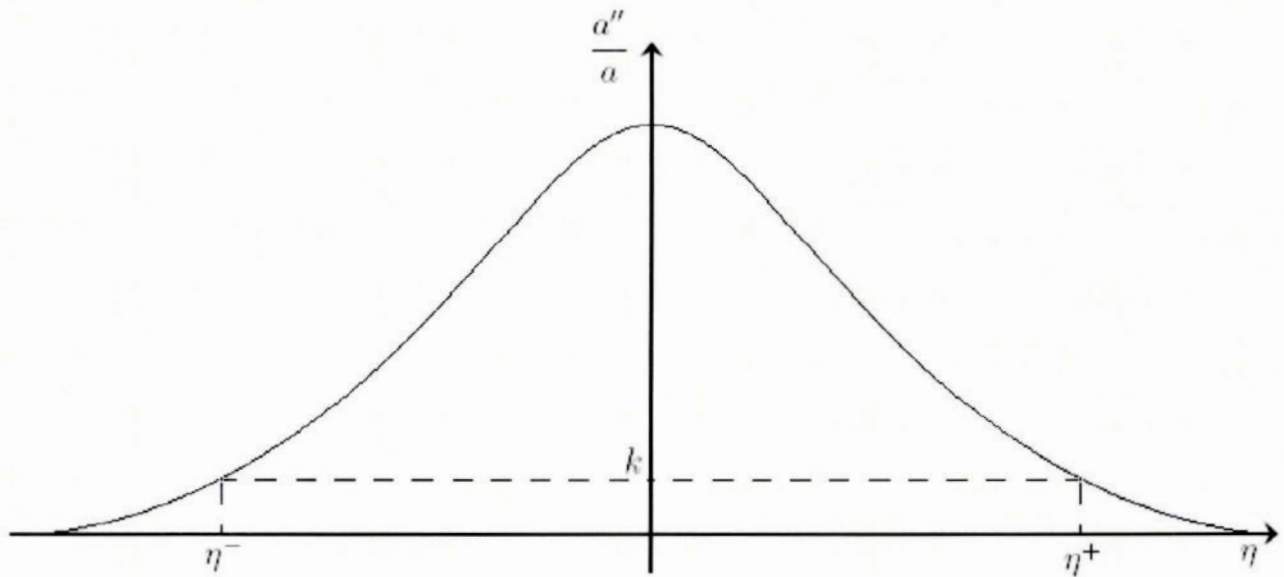


Figura 6.2: Evolução do termo de interação entre o campo gravitacional e o campo escalar.

onde

$$\frac{a''}{a} = \frac{\eta_0^2}{(\eta^2 + \eta_0^2)^2}.$$

$a''/a$  pode ser interpretado como um termo de interação entre o campo gravitacional e o campo escalar. Nas regiões em que  $\eta \rightarrow \pm\infty$ , o fator de escala diverge, portanto, o espaço-tempo é minkowskiano. Nestas regiões,  $\varphi_k$  se propaga como ondas livres. Entretanto, para valores finitos de  $|\eta|$ ,  $\varphi_k$  encontra uma barreira de potencial como indicado na figura 6.2. Estudaremos o caso limite<sup>8</sup> em que  $k \ll 1$  de forma que  $a''/a \approx 0$  quando  $\eta < \eta^-$  ou  $\eta > \eta^+$ , onde

$$k^2 = \frac{a''}{a}(\eta^\pm) = \frac{\eta_0^2}{[(\eta^\pm)^2 + \eta_0^2]^2} \approx \frac{\eta_0^2}{(\eta^\pm)^2} \Rightarrow \eta^\pm = \pm\sqrt{\frac{\eta_0}{k}}.$$

Para o cálculo de produção de partículas, vamos assumir que o campo escalar estava inicialmente no estado de vácuo. A solução da parte temporal da equação de Klein-Gordon para  $\eta < \eta^-$  é

$${}^{in}\varphi_k = k^{-1/2} e^{ik(\eta - \eta^-)},$$

<sup>8</sup> No caso em que  $k \gg 1$ , o termo  $a''/a$  pode ser desprezado e a equação de  $\varphi_k$  se reduz à equação de um oscilador harmônico simples, portanto, não há produção de partículas. Não vamos estudar aqui a solução exata.

e para  $\eta > \eta^+$  é

$$\begin{aligned}\varphi_k &= k^{-1/2} \left[ \alpha_k^+ e^{ik(\eta-\eta^+)} + \alpha_k^- e^{-ik(\eta-\eta^+)} \right] \\ &= k^{-1/2} \left[ \alpha_k^+ e^{ik(\eta^--\eta^+)} e^{ik(\eta-\eta^-)} + \alpha_k^- e^{-ik(\eta^--\eta^+)} e^{-ik(\eta-\eta^-)} \right] \\ &= \alpha_k^+ e^{ik(\eta^--\eta^+)in} \varphi_k + \alpha_k^- e^{-ik(\eta^--\eta^+)in} \varphi_k^*.\end{aligned}$$

Os coeficientes  $\alpha_k^+$  e  $\alpha_k^-$  obedecem a condição de normalização

$$|\alpha_k^+|^2 - |\alpha_k^-|^2 = 1.$$

Estes coeficientes podem ser escritos em termos de  $\varphi_k$  e  $\varphi_k'$ :

$$\alpha_k^\pm = \frac{1}{2ik^{1/2}} [\pm\varphi_k'(\eta^+) + ik\varphi_k(\eta^+)].$$

Para o cálculo de  $\varphi_k(\eta^+)$  e  $\varphi_k'(\eta^+)$ , escrevemos a equação de  $\varphi_k$  em sua forma integral<sup>9</sup>

$$\varphi_k(\eta) = a(\eta) \left[ \frac{-\varphi_k}{a_-} + (-\varphi_k' a_- - \varphi_k a_-') \int_{\eta^-}^{\eta} \frac{d\eta}{a^2} - k^2 \int_{\eta^-}^{\eta} \frac{d\eta'}{a^2} \int_{\eta^-}^{\eta'} a \varphi_k d\eta \right],$$

onde  ${}^\pm\varphi_k = \varphi_k(\eta^\pm)$  e  $a_\pm = a(\eta^\pm)$ . Substituindo esta na equação anterior com  $k \ll 1$ , encontramos

$$\alpha_k^\pm = \frac{1}{2ik} [\pm C + ikD^\pm + O(k^2)],$$

onde

$$C = a'_- a'_+ \int_{\eta^-}^{\eta^+} \frac{d\eta}{a^2} + \frac{a'_-}{a_+} - \frac{a'_+}{a_-} = a'_- a'_+ \int_{\eta^-}^{\eta^+} d\eta \frac{a''}{a'^2 a},$$

e

$$D^\pm = \frac{a'_-}{a'_+} \pm \frac{a'_+}{a'_-} + \left( \frac{a_+}{a'_+} \mp \frac{a_-}{a'_-} \right) C.$$

<sup>9</sup> Mukhanov et al. (1992).

Inserindo os valores  $a'_{\pm} = \pm a^0/\eta^0$ , encontramos

$$\begin{aligned}
 C &= a'_- a'_+ \int_{\eta^-}^{\eta^+} d\eta \frac{a''}{a'^2 a} \\
 &= - \int_{\eta^-}^{\eta^+} d\eta \frac{1}{\eta^2 (\eta^2 + \eta_0^2)} \\
 &= - \int_{\eta^-}^{\eta^+} d\eta \left[ \frac{1}{\eta_0^2 \eta^2} - \frac{1}{\eta_0^2 (\eta^2 + \eta_0^2)} \right] \\
 &= - \frac{1}{\eta_0^2} \left[ -\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta_0} \operatorname{arctg} \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right) \right]_{\eta^-}^{\eta^+} \\
 &= \frac{2}{\eta_0^2} \left[ \sqrt{\frac{k}{\eta_0}} + \frac{1}{\eta_0} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1}{k\eta_0}} \right) \right] \\
 &\approx \frac{1}{\eta_0^2} \left[ 2\sqrt{\frac{k}{\eta_0}} + \frac{\pi}{\eta_0} \right], \quad k \ll 1
 \end{aligned}$$

Comparando as soluções nos intervalos  $\eta < \eta^-$  e  $\eta > \eta^+$ , vemos imediatamente que os coeficientes de Bogoliubov são

$$\beta_k = \alpha_k^- e^{-ik(\eta^- - \eta^+)},$$

portanto, o número de partículas produzidas no modo  $k$  é

$$N_k = |\beta_k|^2 = |\alpha_k^-|^2 = \frac{C^2}{4k^2},$$

onde a última igualdade decorre de  $D^- = 0$ .

Assim como no exemplo anterior, o universo evolui, e o número esperado de partículas criadas no modo  $k$  é  $|\beta_k|^2$ .

# 7

## Conclusão Final

“It would be so nice if something would make sense for a change.”

Alice, Alice in Wonderland.

A lição mais importante que aprendemos em teoria quântica de campos em espaços curvos é provavelmente o fato de que não há uma noção bem definida do conceito de partículas na presença de campos gravitacionais. Experimentalmente, uma partícula é algo que faz um detector “clicar”, é claro. Entretanto, o que é partícula real para um observador, pode ser apenas virtual e não detectável para outro.

Como exemplos, vimos o efeito Unruh, o efeito Hawking, e o efeito de criação de partículas como resultado da expansão do universo. O efeito Unruh poderia explicar porque o tempo de meia-vida de partículas depende de sua aceleração, em particular, porque partículas aceleradas decaem mais rapidamente.<sup>1</sup> O efeito Hawking mostra a possibilidade de emissão de radiação mesmo considerando-se campos gravitacionais estáticos,

---

<sup>1</sup> Müller (1997).

como o buraco negro de Schwarzschild.

Finalmente, estudamos o efeito de criação de partículas como consequência da expansão do universo. Evidentemente, a importância deste processo na evolução do universo em relação a outros mecanismos de criação depende, é claro, do modelo proposto, fator de escala, termo de acoplamento, etc. É importante ressaltar que as equações de Maxwell no vácuo e a equação de Dirac para partículas com massas desprezíveis em suas formas minimamente covariantes são conformemente invariantes.<sup>2</sup> Isso significa que essas equações assumem a mesma forma em um modelo de Friedmann-Robertson-Walker com seção espacial plana e no espaço-tempo de Minkowski, uma vez que em ambos as métricas se relacionam por uma transformação conforme. Portanto, não há, em princípio, produção de fótons ou neutrinos como consequência da evolução do campo gravitacional nestes modelos. Entretanto, perturbações do estado de isotropia e homogeneidade do universo quebram a invariância conforme e podem, portanto, causar criação de partículas.

---

<sup>2</sup> Parker (1972).

---



# 8

## Apêndices

“Sam: - There and Back Again: A Hobbit’s Tale by Bilbo Baggins, and The Lord of the Rings by Frodo Baggins. You finished it.

Frodo: - Not quite. There’s room for a little more.”

Lord of the Rings: The Return of the King.

---

## 8.1 Uma Breve Revisão de Relatividade Geral

---

A relatividade especial rejeita a idéia newtoniana de que tempo e espaço são conceitos absolutos. A dicotomia destes conceitos é apenas uma falsa impressão de nossas mentes habituadas a baixas velocidades. Na verdade, tempo e espaço são faces de uma mesma moeda, o espaço-tempo. Um evento é um ponto do espaço-tempo com coordenadas  $(t, \vec{x})$  em relação a um referencial,  $(t', \vec{x}')$  em relação a outro referencial, etc. A teoria permite a construção de sistemas de coordenadas globais, que representam observadores inerciais, e é baseada na afirmação de que as leis da física são invariantes com relação a estes referenciais.

Como resultado, o intervalo entre dois eventos infinitesimalmente separados,

$$ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

não depende do observador. Este elemento de linha pode ser escrito na forma tensorial

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Em um sistema de coordenadas arbitrário,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

A norma de um vetor é definida como

$$X^2 = g_{ab} X^a X^b.$$

e o vetor é dito

tipo-tempo se  $X^2 > 0$ ,

tipo-espaço se  $X^2 < 0$ ,

tipo-luz se  $X^2 = 0$ .

Dois vetores  $X$  e  $Y$  são ortogonais se seu produto interno é nulo,  $g_{ab} X^a Y^b = 0$ . O conjunto de todos os vetores tipo-luz em um ponto  $P$  forma o chamado cone de luz, descrito pela equação,

$$(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 = 0.$$

Todos os eventos causalmente conectados ao evento em  $P$  estão no interior desse cone de luz, o que equivale a dizer que nenhum sinal se propaga mais rápido que a luz.

---

No âmbito da relatividade geral, a curvatura do espaço-tempo torna impossível a construção de referenciais inerciais globais. Por exemplo, relógios em diferentes pontos do espaço-tempo correm a taxas desiguais devido ao chamado redshift gravitacional. Entretanto, pelo princípio da equivalência, em cada ponto do espaço tempo a geometria é localmente descrita pela métrica de Lorentz. Em linguagem matemática, diz-se que a estrutura do espaço-tempo é descrita por uma variedade diferenciável pseudo-riemanniana  $\mathcal{M}$  dotada de uma métrica  $g_{\mu\nu}$  com assinatura lorentziana. Uma variedade é essencialmente um espaço continuamente parametrizado que parece localmente euclideo. A quantidade de parâmetros independentes determina a dimensão da variedade, enquanto a métrica determina sua estrutura. E o princípio da equivalência afirma que cada em cada ponto da variedade, o espaço tangente é localmente isomórfico ao espaço de Minkowski.<sup>1</sup>

A descrição da dinâmica dos campos em qualquer ponto do espaço-tempo demanda o conceito de derivada. Conceito este que envolve a comparação entre os valores de um campo em pontos vizinhos do espaço-tempo. Em um espaço-tempo curvo, estes valores pertencem a espaços vetoriais distintos, por isso não basta considerar apenas os valores do campo, deve-se considerar ainda as mudanças de bases de coordenadas de um ponto a outro. O chamado símbolo de Christoffel,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} \left[ g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho} \right],$$

faz a conexão entre vetores de espaços tangentes distintos através do transporte paralelo:

$$A^{\lambda||}(x^{\gamma} + dx^{\gamma}) = A^{\lambda}(x^{\gamma}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A^{\mu}(x^{\gamma}) dx^{\nu}.$$

O vetor  $A^{\lambda||}$  é obtido a partir do vetor  $A^{\lambda}$  deslocado de  $x^{\gamma}$  a  $x^{\gamma} + dx^{\gamma}$ , mantido paralelo a si mesmo e com comprimento constante. O transporte paralelo define a derivada covariante,

$$A^{\lambda}_{;\mu} = \lim_{dx^{\mu} \rightarrow 0} \frac{A^{\lambda}(x^{\mu} + dx^{\mu}) - A^{\lambda||}(x^{\mu} + dx^{\mu})}{dx^{\mu}} = A^{\lambda}_{,\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A^{\nu}.$$

No caso de um tensor arbitrário,

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta\dots}_{\lambda\mu\dots\rho} &= T^{\alpha\beta\dots}_{\lambda\mu\dots\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\alpha} T^{\sigma\beta\dots}_{\lambda\mu\dots} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\beta} T^{\alpha\sigma\dots}_{\lambda\mu\dots} + \dots \\ &\quad - \Gamma_{\rho\lambda}^{\sigma} T^{\alpha\beta\dots}_{\sigma\mu\dots} - \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} T^{\alpha\beta\dots}_{\lambda\sigma\dots} - \dots \end{aligned}$$

Os termos adicionais à derivada usual  $T^{\alpha\beta\dots}_{\lambda\mu\dots\rho}$ , evidentemente nulos no espaço-tempo de Minkowski, são decorrentes da curvatura do espaço, e há um deles para cada índice. A

<sup>1</sup> Veja, por exemplo, Wald (1984).

importância da derivada covariante está em seu caráter tensorial, pois equações dinâmicas devem ser covariantes.

A derivada covariante apresenta algumas propriedades similares às de uma derivada comum: a derivada covariante de uma combinação linear de tensores é igual a combinação linear das derivadas covariantes dos tensores,

$$\left( aA^{\alpha\beta\dots}_{\lambda\mu\dots} + bB^{\alpha\beta\dots}_{\lambda\mu\dots} \right)_{;\rho} = aA^{\alpha\beta\dots}_{\lambda\mu\dots;\rho} + bB^{\alpha\beta\dots}_{\lambda\mu\dots;\rho}, \quad a \text{ e } b \text{ constantes};$$

a derivada covariante de um produto de tensores obedece a regra de Leibniz, por exemplo,

$$(A^\mu_\nu B^\lambda)_{;\rho} = A^\mu_{\nu;\rho} B^\lambda + A^\mu_\nu B^\lambda_{;\rho}.$$

É importante notar que a derivada covariante do tensor métrico é nula,  $g_{\lambda\mu;\nu} = 0$ , uma vez que  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$  e  $g_{\lambda\mu,\nu} = 0$  em coordenadas inerciais locais, e se um tensor, no caso  $g_{\lambda\mu;\nu}$ , é nulo em um referencial, o mesmo é nulo em qualquer referencial.

Existe, entretanto, uma importante diferença entre a derivada covariante e a derivada comum: duas derivadas covariantes sucessivas em geral não comutam. Se considerarmos um tensor  $A^\mu$ , encontramos<sup>2</sup>

$$A_{\lambda;\mu;\nu} - A_{\lambda;\nu;\mu} = A_\kappa R^\kappa_{\lambda\mu\nu},$$

onde o chamado tensor de curvatura ou tensor de Riemann-Christoffel,  $R^\kappa_{\lambda\mu\nu}$ , é dado por

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} - \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} + \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha_{\delta\lambda} - \Gamma^\lambda_{\beta\delta} \Gamma^\alpha_{\gamma\lambda}.$$

O tensor de curvatura, evidentemente nulo no espaço-tempo de Misnkowski, mede a variação de um vetor transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada.

A forma de  $g_{\mu\nu}$  (ou a geometria do espaço-tempo) é determinada pela distribuição de energia no universo de acordo com a equação de Einstein<sup>3</sup>,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu},$$

onde  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  é o escalar de curvatura, e<sup>4</sup>

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S_{\text{matéria}}$$

<sup>2</sup> Veja, por exemplo, Dirac (1975).

<sup>3</sup> Com a constante gravitacional de Newton,  $G$ , convenientemente normalizada.

<sup>4</sup> Veja, por exemplo, Fulling (1989).

é o tensor energia-momento, que representa a distribuição de energia (todos os campos, exceto o gravitacional). Portanto, o campo gravitacional não é um campo como outro qualquer, mas sim parte da própria estrutura do espaço-tempo. A equação de Einstein é a equação de Lagrange resultante de variações da ação total,  $S = S_{\text{gravitacional}} + S_{\text{matéria}}$  com respeito a  $g_{\mu\nu}$ . A ação da matéria consiste em um termo  $\int d^n x \mathcal{L}$  para cada campo (de novo, exceto o gravitacional). A ação do campo gravitacional é dada por

$$S_{\text{gravitacional}} = \int d^n x \sqrt{g} R.$$

A lagrangeana  $\mathcal{L}(x)$ , portanto, além de definir a dinâmica do campo, diz como este influencia o campo gravitacional.

## 8.2 Princípio da Ação em Espaço-Tempos Curvos: Um Exemplo de Cálculo Variacional

Aqui vamos ver um exemplo de como obter as equações dinâmicas em um espaço-tempo curvo a partir de uma dada densidade lagrangiana. Este tipo de cálculo é difícil de encontrar na literatura.

Considere um modelo em que o universo é preenchido por um campo eletromagnético acoplado ao campo gravitacional, descrito pela ação<sup>5</sup>

$$S = \int d^4 x \sqrt{g} \left[ (1 + \lambda \Omega) R - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right],$$

onde  $\Omega \equiv A^\mu A_\mu$ ,  $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ , e  $\lambda$  é um parâmetro constante, isto é, independente da posição no espaço-tempo. Queremos encontrar as equações dinâmicas empregando o princípio da ação,  $\delta S = 0$ .

Vamos começar calculando a variação no segundo termo de S:

$$\begin{aligned} & \delta \left( \int d^4 x \sqrt{g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = \\ & \delta \left( \int d^4 x \sqrt{g} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \right) = \\ & \int d^4 x \left[ (\delta \sqrt{g}) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 2\sqrt{g} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + 2\sqrt{g} (\delta g^{\alpha\mu}) g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \right] = \\ & \int d^4 x \left[ (\delta \sqrt{g}) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 4\sqrt{g} F^{\mu\nu} \delta A_{\mu;\nu} + 2\sqrt{g} (\delta g^{\alpha\mu}) g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \right]. \end{aligned}$$

<sup>5</sup> Novello e Salim (1979).

Agora, com as identidades<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{g} &= \frac{1}{2}\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ \delta g^{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} \\ \sqrt{g} (F^{\mu\nu} \delta A_{\mu})_{;\nu} &= (\sqrt{g} F^{\mu\nu} \delta A_{\mu})_{;\nu} \\ F^{\mu\nu} \delta A_{\mu;\nu} &= (F^{\mu\nu} \delta A_{\mu})_{;\nu} - F^{\mu\nu}_{;\nu} \delta A_{\mu}\end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}\delta\left(\int d^4x \sqrt{g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) &= \\ \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + 4 \left[ (F^{\mu\nu} \delta A_{\mu})_{;\nu} - F^{\mu\nu}_{;\nu} \delta A_{\mu} \right] - 2g^{\alpha\rho} g^{\mu\sigma} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \delta g_{\rho\sigma} \right\} &= \\ \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - 4 F^{\mu\nu}_{;\nu} \delta A_{\mu} - 2 F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} \delta g_{\mu\nu} \right\} + 4 \int d^4x \left( \sqrt{g} F^{\mu\nu} \delta A_{\mu} \right)_{;\nu}.\end{aligned}$$

O último termo é uma integral de uma derivada total, e pode ser descartado com as condições de contorno apropriadas. Encontramos, portanto,

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) &= \\ \int d^4x \sqrt{g} \left[ \left( \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} \right) \delta g_{\mu\nu} - 2 F^{\mu\nu}_{;\nu} \delta A_{\mu} \right].\end{aligned}$$

O cálculo da variação no primeiro termo de S é semelhante, porém, um pouco mais complicado

$$\begin{aligned}\delta\left[\int d^4x \sqrt{g} \left(1 + \lambda A^{\mu} A_{\mu}\right) R\right] &= \\ \int d^4x \left[ (\delta\sqrt{g}) \left(1 + \lambda\Omega\right) R + 2\lambda\sqrt{g} A^{\mu} (\delta A_{\mu}) R + \lambda\sqrt{g} (\delta g^{\mu\nu}) A_{\mu} A_{\nu} R \right] + \\ + \int d^4x \left[ \sqrt{g} \left(1 + \lambda\Omega\right) \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \right] &= \\ \int d^4x \sqrt{g} \left[ \frac{1}{2} \left(1 + \lambda\Omega\right) R g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + 2\lambda R A^{\mu} \delta A_{\mu} - \lambda A_{\mu} A_{\nu} R g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right] + \\ + \int d^4x \sqrt{g} \left[ - \left(1 + \lambda\Omega\right) R_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} + \lambda\Omega g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] &= \\ \int d^4x \sqrt{g} \left[ \frac{1}{2} \left(1 + \lambda\Omega\right) R g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + 2\lambda R A^{\mu} \delta A_{\mu} - \lambda R A^{\mu} A^{\nu} \delta g_{\mu\nu} \right] + \\ + \int d^4x \sqrt{g} \left[ - \left(1 + \lambda\Omega\right) R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \lambda\Omega g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right].\end{aligned}$$

Para calcular os termos com  $\delta R_{\mu\nu}$  use as identidades<sup>7</sup>

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\delta g_{\mu\alpha;\nu} + \delta g_{\nu\alpha;\mu} + \delta g_{\mu\nu;\alpha}),$$

<sup>6</sup> Veja, por exemplo, Weinberg (1972).

<sup>7</sup> Veja, por exemplo, o mesmo autor da nota anterior.

de forma que

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{g} \lambda \Omega g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= \\ \int d^4x \sqrt{g} \lambda \Omega g^{\mu\nu} (\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda;\nu} - \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu;\lambda}) &= \\ \int d^4x \sqrt{g} \left[ (\lambda \Omega g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu} - \lambda \Omega_{;\nu} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - (\lambda \Omega g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda} + \lambda \Omega_{;\lambda} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right] &= \\ \int d^4x \sqrt{g} \left[ \lambda \Omega_{;\lambda} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \lambda \Omega_{;\nu} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \right] &= \\ \int d^4x \sqrt{g} \left[ \lambda g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Omega_{;\alpha;\beta} \delta g_{\mu\nu} - \lambda \Omega^{;\mu;\nu} \delta g_{\mu\nu} \right]; & \end{aligned}$$

e

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda;\nu} - \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu;\lambda},$$

de forma que

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu} - (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda} = \text{termo de derivada total.}$$

Finalmente, somando todas as variações, encontramos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{g} \left[ -(1 + \lambda\Omega) G^{\mu\nu} - \lambda R A^\mu A^\nu + \lambda g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Omega_{;\alpha;\beta} - \lambda \Omega^{;\mu;\nu} - E^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} + \\ &+ \int d^4x \sqrt{g} \left[ 2\lambda R A^\mu + 2F^{\mu\nu}_{;\nu} \right] \delta A_\mu \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde

$$E^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - F^{\mu\alpha} F^\nu_{\alpha} \quad \text{e} \quad G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}.$$

A ação é, portanto, estacionária em relação a variações arbitrárias em  $g_{\mu\nu}$  e  $A^\mu$  se

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = -\lambda R A^\mu,$$

$$(1 + \lambda\Omega) G^{\mu\nu} + \lambda R A^\mu A^\nu - \lambda g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Omega_{;\alpha;\beta} + \lambda \Omega^{;\mu;\nu} = -E^{\mu\nu},$$

No caso de  $\lambda = 0$ , estas se reduzem às equações de Maxwell e às equações de Einstein, respectivamente. Este tipo de modelo pode ser interpretado como uma espécie de “correção ultravioleta” da relatividade geral.  $\lambda$  pode ser, por exemplo, um parâmetro que depende da escala de energia, tal que  $\lambda = 0$  em regimes de baixas energias. Neste caso, a teoria concorda com a relatividade geral nestes regimes, mas adiciona correções que se esperam necessárias em regimes de altas energias. Em particular, a equação de conservação de  $F^{\mu\nu}$  pode ser interpretada de forma que o acoplamento entre os campos gravitacional e eletromagnético confere uma massa ao fóton.

### 8.3 Efeito Unruh com Partículas Massivas

Anteriormente, estudamos o efeito Unruh considerando somente partículas com massas desprezíveis,  $m = 0$ . Agora vamos estudar o caso com partículas massivas. O termo de massa na equação de Klein-Gordon quebra a invariância conforme da teoria tornando o problema mais complicado.

Como vimos, as coordenadas de Rindler,  $(\eta, \xi)$ , se relacionam com as de Minkowski,  $(t, x)$ , através das transformações

$$\begin{aligned} t &= \xi' \sinh \eta', & 0 < \xi < \infty \\ x &= \xi' \cosh \eta', & -\infty < \eta < \infty \end{aligned}$$

definidas na região  $x > |t|$ , onde definimos por conveniência  $\eta' = a\eta$  e  $\xi' = a^{-1} \exp a\xi$  (de agora em diante, vamos omitir o apóstrofo em  $\eta'$  e em  $\xi'$ ).<sup>8</sup>

No sistema de coordenadas de Rindler, o elemento de linha no espaço-tempo de Minkowski é dado por

$$d\tau^2 = \xi^2 d\eta^2 - d\xi^2.$$

Como se pode ver, esta métrica é singular em  $\xi = 0$ . As curvas  $\{\xi = \text{constante}\}$ , representadas pelas hipérbolas  $x^2 - t^2 = \xi^2$ , correspondem a linhas de mundo de observadores com aceleração uniforme  $\xi^{-1}$ , de fato

$$\begin{aligned} a^\mu &= v^\mu_{;\nu} v^\nu \Big|_{\xi=\text{const.}} \\ &= (v^\mu_{;\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} v^\lambda) v^\nu \Big|_{\xi=\text{const.}} \\ &= \left[ (\xi^{-1} \delta_0^\mu)_{;\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \xi^{-1} \delta_0^\lambda \right] \xi^{-1} \delta_0^\nu \\ &= \xi^{-1} \delta_1^\mu, \end{aligned}$$

portanto,  $\alpha \equiv |a^\mu a_\mu|^{1/2} = \xi^{-1}$ , como era esperado. A singularidade ocorre porque  $\xi = 0$  representaria um observador com aceleração infinita.

Apesar de baseado em um espaço-tempo plano, o universo de Rindler apresenta algumas características semelhantes às de um buraco negro, além da singularidade. As duas

<sup>8</sup> As coordenadas  $(\eta, \xi)$  cobrem somente a região R em forma de cunha mostrada na figura 5.1. Esta região é conhecida como cunha de Rindler. Uma segunda região, representada por L na figura, poderia ser obtida, com  $t = -\xi \sinh \eta$  e  $x = -\xi \cosh \eta$ , e representaria observadores com aceleração negativa.



assíntotas  $\mathcal{H}^-$  e  $\mathcal{H}^+$  indicadas na figura 5.1 definem horizontes de evento para o observador de Rindler, chamados horizonte passado e futuro, respectivamente. Um observador em R não pode receber sinais luminosos originados em F ou L, e não pode enviar sinais a observadores em P ou L, pois haveria violação de causalidade. Além disso, a métrica de Rindler coincide com a de Schwarzschild na região do espaço-tempo próxima ao horizonte de eventos de um buraco negro estático. Considere a métrica do buraco negro de Schwarzschild (1+1 dimensional),

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2.$$

Sejam  $r - 2M = x^2/8M$  e  $\kappa = 1/4M$ , de forma que

$$dr^2 = (\kappa x)^2 dx^2 \quad \text{e} \quad 1 - \frac{2M}{r} = \frac{(\kappa x)^2}{1 + (\kappa x)^2} \simeq (\kappa x)^2, \quad \text{quando } x \rightarrow 0,$$

segue que, perto do horizonte em  $r = 2M$ , a métrica de Schwarzschild é

$$d\tau^2 = (\kappa x)^2 dt^2 - dx^2,$$

que é justamente a métrica de Rindler. A singularidade em  $\xi = 0$  no sistema de coordenadas de Rindler corresponde à singularidade no horizonte de eventos de um buraco negro nas coordenadas de Schwarzschild. Em ambos os casos, a singularidade pode ser removida com uma escolha apropriada de sistema de coordenadas.

Em coordenadas de Rindler, a equação de Klein-Gordon assume a forma

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + m^2 \phi = 0,$$

que pode ser resolvida por separação de variáveis

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = \frac{\xi^2}{\chi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - m^2 \xi^2 = -\mu^2, \quad \mu = \text{constante},$$

onde definimos  $\phi = \varphi(\eta)\chi(\xi)$ . A parte temporal da equação acima é a equação trivial de um oscilador harmônico simples, enquanto a parte espacial é uma equação de Bessel<sup>9</sup>

$$\left[ \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \left( m^2 - \frac{\nu^2}{\xi^2} \right) \right] \chi_\nu(\xi) = 0,$$

com  $0 < \nu < \infty$ , de forma que os modos normais, com frequência positiva e negativa respectivamente, relativa ao tempo de Rindler  $\eta$ , são

$$\phi_\mu(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi} (\text{senh } \pi\mu)^{1/2} e^{-i\mu\eta} K_{i\mu}(m\xi)$$

<sup>9</sup> Veja, por exemplo, Gradshteyn & Ryzhik (2007).

$$\phi_\mu^*(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi} (\sinh \pi\mu)^{1/2} e^{i\mu\eta} K_{i\mu}(m\xi),$$

onde  $K_{i\mu}$  são as funções de Bessel modificadas do segundo tipo, também conhecidas como funções de Macdonald. Segue da relação de ortogonalidade<sup>10</sup> entre as funções  $K_{i\mu}$ ,

$$\int_0^\infty dx \frac{K_{i\mu}(x)K_{i\nu}(x)}{x} = \frac{\pi^2}{2\mu \sinh \pi\mu} \delta(\mu - \nu),$$

que os modos  $\phi_\mu$  estão normalizados em relação ao produto escalar

$$(\phi_\mu, \phi_\nu) = -i \int d\Sigma^\lambda \sqrt{g_\Sigma} (\phi_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\lambda \phi_\nu^*) = -i \int \frac{d\xi}{\xi} (\phi_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\eta \phi_\nu^*),$$

isto é,

$$\begin{aligned} (\phi_\mu, \phi_\nu) &= -\frac{i}{\pi^2} (\sinh \pi\mu)^{1/2} (\sinh \pi\nu)^{1/2} (e^{-i\mu\eta} \overleftrightarrow{\partial}_\eta e^{i\nu\eta}) \int \frac{d\xi}{\xi} K_{i\mu}(m\xi) K_{i\nu}(m\xi) \\ &= -\frac{i}{\pi^2} (\sinh \pi\mu)^{1/2} (\sinh \pi\nu)^{1/2} [i(\mu + \nu)] e^{-i\eta(\mu-\nu)} \frac{\pi^2}{2\mu \sinh \pi\mu} \delta(\mu - \nu) \\ &= \delta(\mu - \nu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\phi_\mu^*, \phi_\nu^*) &= -\frac{i}{\pi^2} (\sinh \pi\mu)^{1/2} (\sinh \pi\nu)^{1/2} (e^{i\mu\eta} \overleftrightarrow{\partial}_\eta e^{-i\nu\eta}) \int \frac{d\xi}{\xi} K_{i\mu}(m\xi) K_{i\nu}(m\xi) \\ &= -\frac{i}{\pi^2} (\sinh \pi\mu)^{1/2} (\sinh \pi\nu)^{1/2} [-i(\mu + \nu)] e^{i\eta(\mu-\nu)} \frac{\pi^2}{2\mu \sinh \pi\mu} \delta(\mu - \nu) \\ &= -\delta(\mu - \nu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\phi_\mu, \phi_\nu^*) &= -\frac{i}{\pi^2} (\sinh \pi\mu)^{1/2} (\sinh \pi\nu)^{1/2} (e^{-i\mu\eta} \overleftrightarrow{\partial}_\eta e^{-i\nu\eta}) \int \frac{d\xi}{\xi} K_{i\mu}(m\xi) K_{i\nu}(m\xi) \\ &= -\frac{i}{\pi^2} (\sinh \pi\mu)^{1/2} (\sinh \pi\nu)^{1/2} (e^{-i\mu\eta} \overleftrightarrow{\partial}_\eta e^{-i\nu\eta}) \frac{\pi^2}{2\mu \sinh \pi\mu} \delta(\mu - \nu) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Seguindo o formalismo da teoria quântica de campos, postulamos que  $\phi(x)$  e  $\pi(x)$  são operadores, obedecendo a relações de comutação e agindo num espaço de Hilbert a ser construído, e expandimos o campo de operadores  $\phi(x)$

$$\phi(\eta, \xi) = \int_0^\infty d\nu \left[ a_R(\nu) \phi_\nu + a_R^\dagger(\nu) \phi_\nu^* \right],$$

onde  $R$  em  $a_R^\dagger$  e em  $a_R$  indica que os operadores de criação e de aniquilação de partículas atua no espaço de estados relacionado ao observador de Rindler. A álgebra de  $\phi(x)$  e  $\pi(x)$

<sup>10</sup>Veja, por exemplo, Passian et al. (2003).

determina as relações de comutação entre  $a_R^\dagger(\mu)$  e  $a_R(\mu)$ ,

$$\begin{aligned} [a_R(\mu), a_R^\dagger(\nu)] &= \delta(\mu - \nu) \\ [a_R(\mu), a_R(\nu)] &= [a_R^\dagger(\mu), a_R^\dagger(\nu)] = 0. \end{aligned}$$

Os vetores do espaço de estados segundo o observador de Rindler são obtidos com a aplicação consecutiva de  $a_R^\dagger(\mu)$  no estado de vácuo,  $|0_R\rangle$ , tal que

$$a_R(\mu)|0_R\rangle = 0, \quad \forall \mu.$$

Acontece que o espaço de Fock gerado a partir de  $|0_R\rangle$  não é equivalente ao espaço de Fock gerado a partir de  $|0_M\rangle$ , o vácuo para o observador de Minkowski, como pode ser verificado pelo cálculo dos coeficientes de Bogoliubov<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} \beta_{\mu k} &= -(\phi_\mu, u_k^*) \\ &= \left( \frac{\sinh \pi \mu}{4\pi \omega} \right)^{1/2} \left[ \frac{\omega}{\pi} \int_0^\infty dz K_{i\mu}(mz) e^{ikz} - \frac{\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{z} K_{i\mu}(mz) e^{ikz} \right] \\ &= [2\pi\omega(e^{2\pi\mu} - 1)]^{-1/2} \left( \frac{\omega - k}{\omega + k} \right)^{i\mu/2}, \end{aligned}$$

de forma que

$$|\beta_{\mu k}|^2 = [2\pi\omega(e^{2\pi\mu} - 1)]^{-1}.$$

Segue então que

$$\langle 0_M | a_R^\dagger(\mu) a_R(\mu) | 0_M \rangle \propto \frac{1}{e^{2\pi\mu} - 1}.$$

Com a relação de Tolman,  $T = g_{00}^{-1/2} T_0$ ,<sup>12</sup> podemos observar que a distribuição planckiana  $|\beta_{\mu k}|^2$  corresponde a um espectro de temperatura

$$T = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

<sup>11</sup> $u_k^*$  denota, evidentemente, a solução segundo o observador inercial. Esta conta é bem extensa e envolve propriedades de funções hipergeométricas. Veja, por exemplo, Gradshteyn & Ryzhik (2007).

<sup>12</sup>Tolman (1934).

# Bibliografia

- [1] Abramovitz, M., & Stegun I. A. (editors), 1972, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, U. S. Department of Commerce.
  - [2] Berestetskii, V. B. et al., 1982, Quantum Electrodynamics, Volume 4 of Course of Theoretical Physics, Second Edition, Pergamon Press.
  - [3] Bernard, C., & Duncan, A., 1977, Regularization and Renormalization of Quantum Field Theory in Curved Space-Time, *Annal of phys.*, 107, 201.
  - [4] Birrel, N. D., & Davies, P. C. W., 1982, Quantum Fields in Curved Space, Cambridge University Press.
  - [5] Bogoliubov, N. N., & Shirkov, D. V., 1980, Introduction to the Theory of Quantized Fields, Third Edition, John Wiley & Sons.
  - [6] Davies, P. C. W., 1975, Scalar Particle Production in Schwarzschild and Rindler Metrics, *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. 8, No. 4, 609.
  - [7] DeWitt, B. S., 1975, Quantum Field Theory in Curved Spacetime, *Phys. Rep.* 19, no. 6, 295.
  - [8] Dirac, P. A. M., 1927, The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation, *Proc. Roy. Soc.*, All4, 243.
  - [9] Dirac, P. A. M., 1975, General Theory of Relativity, John Wiley & Sons.
  - [10] Ellis, G. F. R., & Williams, R. M., 1988, Flat and Curved Space-Times, Oxford University Press.
-

- 
- [11] Fulling, S. A., 1989, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, Cambridge University Press.
- [12] Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M., 2007, *Table of Integrals, Series and Products*, Seventh Edition, Elsevier.
- [13] Greiner, W., & Reinhardt, J., 1996, *Field Quantization*, Springer.
- [14] Griffiths, D. J., 1981, *Introduction to Electrodynamics*, Third Edition, Prentice-Hall.
- [15] Han, M. Y., 2004, *A Story of Light, an Introduction to Quantum Field Theory of Quarks and Leptons*, World Scientific.
- [16] Hatfield, B., 1992, *Quantum Field Theory of Particles and Strings*, Perseus Books.
- [17] Hawking, S. W., 1975, Particle Creation by Black Holes, *Commun. Math. Phys.* 43, 199.
- [18] Hawking, S. W., & Ellis G. F. R., 1973, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press.
- [19] Kaku, M., 1993, *Quantum Field Theory, a modern introduction*, Oxford University Press.
- [20] Mandl, F., & Shaw, G., 1984, *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons.
- [21] Müller, R., 1997, Decay of Accelerated Particles, hep-th/9706016v1.
- [22] Mukhanov, V. F. et al., 1992, Theory of Cosmological Perturbations, *Phys. Rep.* 215, Nos. 5 & 6, 203.
- [23] Mukhanov, V. F., & Winitzki, S., 2007, *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, Cambridge University Press.
- [24] Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A., 1973, *Gravitation*, W. H. Freeman.
- [25] Nishijima, K., 1969, Fields and Particles: field theory and dispersion relations, W. A. Benjamin.
- [26] Parker, L., 1972, Particle Creation in Isotropic Cosmologies, *Phys. Rev. Letters*, 28, No. 11, 705.
-

- 
- [27] Passian, A., Simpson, H., Kouckekian, S., Yakubovich, S. B., On the Orthogonality of the MacDonalads's Functions.
- [28] Peskin, M. E., & Schroeder, D. V., 1995, An Introduction to Quantum Field Theory, Perseus Books
- [29] Peter, P., & Pinto-Neto, N., 2002, Primordial Perturbations in a Non Singular Bouncing Universe Model, Phys. Rev. D 66, 063509.
- [30] Ryder, L. H., 1996, Quantum Field Theory, Second Edition, Cambridge University Press.
- [31] Schutz, B. F., 1985, A first course in General Relativity, Cambridge University Press.
- [32] Svaiter, N. F., 1989, Teoria Quântica de Campos em Sistemas de Coordenadas Curvilíneas no Espaço-Tempo de Minkowski e em Espaços Curvos, Tese de Doutorado, CBPF.
- [33] Tolman, R. C., 1934, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Clarendon Press.
- [34] Unruh, W. G., 1976, Notes on black-hole evaporation, Phys. Rev. D 14, No. 4, 870.
- [35] Wald, R. M., 1984, General Relativity, University of Chicago Press.
- [36] Weinberg, S., 1972, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley & Sons.
-