

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza  
Observatório do Valongo



Procurando a Assinatura do Modelo de  
*Halos no Canada-France Hawaii  
Telescope Legacy Survey*

Aluno

João Paulo Nogueira Cavalcante

Orientadores

Fernando Saliby de Simoni (ON/MCT)

Paulo S. Pellegrini (ON/MCT)

Projeto de Final de Curso para a obtenção do título de Astrônomo

Rio de Janeiro, Brasil

2011

"A distinção entre passado, presente  
e futuro é apenas uma ilusão  
teimosamente persistente."

Albert Einstein

"Enquanto eu dobro a gola do meu casaco  
de inverno favorito,  
Este vento está soprando minha mente.  
Eu vejo as crianças nas ruas,  
sem ter o que comer.  
Quem sou eu para estar cego,  
Fingindo não perceber suas necessidades? "

trecho da música *Man in the mirror*, Michael Jackson

"Há pessoas que choram por saber que as rosas têm espinho,  
Há outras que sorriem por saber que os espinhos têm rosas!"

trecho do poema *Bons Amigos*, Machado de Assis

*Este trabalho é dedicado  
às minhas duas crianças.*

# Agradecimentos

Agradeço à UFRJ, em especial ao Instituto de Física e ao Observatório do Valongo por me proporcionar o aprendizado básico e meu início profissional em Astronomia.

Ao Observatório Nacional por me ceder o seu espaço de pesquisa e ao CNPq pela ajuda financeira através de uma bolsa de Iniciação Científica.

Aos meus orientadores, Paulo Pellegrini e Fernando de Simoni, pelos esforços árduos que tiveram para que este trabalho fosse realizado. Muito obrigado por terem me orientado de forma agradável.

Ao Dr. Luiz Nicolaci da Costa, coordenador do LIneA que vem promovendo a participação brasileira nos projetos DES e SDSS-III, na qual este trabalho é parte integrante.

Meus sinceros e profundos agradecimentos à minha grande família. À minha mãe, Marilza, e ao meu pai, João Antônio, principais financiadores da minha educação. Aos bons exemplos que me deram e ao grande incentivo que tive deles para continuar em frente e nunca desistir. Ao meu irmão, Thiago, por ser meu grande amigo em todas as horas e pela preocupação que sempre teve por mim. Ao meu tio, Adalberto, pela grande presença que teve na minha vida e por ser uma figura incansável nos trabalhos. Ao meu grande amigo, Betinho, por me considerar um irmão e estar sempre presente nas horas que mais precisei.

Um agradecimento especial vai à minha companheira Raquel, pelo companheirismo, pela dedicação constante, pelos momentos de felicidades, pelos momentos difíceis, pelo amor que tem por mim. Pelas vezes que não deixou que eu desistisse da graduação. E principalmente por ter me dado as duas jóias mais preciosas da minha vida.



## Resumo

A função de correlação das galáxias é uma ferramenta estatística que permite quantificar a aglomeração da distribuição desses objetos. Inicialmente aproximada por uma lei de potência, a função de correlação vem mostrando sua capacidade de revelar, nos desvios da mesma lei de potência, uma importante propriedade de que as galáxias se aglomeram em grandes sistemas, ou halos.

O trabalho aqui apresentado pode em muito se beneficiar dos futuros projetos de colaboração internacional como o *Dark Energy Survey* (DES) e o *Large Synoptic Survey Telescope* (LSST), onde ambos os levantamentos farão imageamento em grandes áreas do céu e estimando as distâncias radiais das galáxias através de *redshifts* fotométricos, fornecendo dessa maneira dados em quantidades sem precedentes.

Este trabalho tem como finalidade examinar a possibilidade de detectar o sinal dos halos na função de correlação angular utilizando *redshifts* fotométricos. Utilizamos, para isso, a amostra fotométrica do levantamento *Deep* do *Canada-France Hawaii Telescope Legacy Survey* mostrando que o sinal dos halos é identificado no intervalo de *redshifts* 0.2 a 0.5. Este resultado é similar ao de um estudo feito por Blake et al. (2008) utilizando os dados do *Sloan Digital Sky Survey* mostrando que *redshifts* fotométricos podem ser utilizados neste tipo de análise. A maior limitação aos resultados obtidos neste trabalho é devida às pequenas áreas dos campos *Deep*, o que não será um problema para os levantamentos DES e LSST que cobrirão uma área muito maior do céu.

**Palavras-Chave:** aglomeração de galáxias, modelo de halos, função de correlação, *redshifts* fotométricos, estrutura em grande escala do Universo

## Abstract

The galaxies correlation function is a statistic tool that allows to quantify the clustering of these objects. Initially approximated as a power law, the correlation function gradually shows its capacity to unveil, in its small departures from this law, an important property that the galaxies are clustered in large systems or halos.

The work presented here could benefit a lot from future international collaboration projects, such as the Dark Energy Survey (DES) and the Large Synoptic Survey Telescope (LSST), where both surveys will carry out imaging in large areas of sky and estimate the radial distances of galaxies from photometric redshifts providing an unprecedented amount of data.

The purpose of this work is to examine the possibility of detecting the halo signature on angular correlation function using photometric redshifts. For this we used the photometric sample Deep of the Canada-France Hawaii Telescope Survey (CFHTLS) showing that the halo signature is identified on the redshift range from 0.2 to 0.5. This result is similar to a study made by Blake et al. (2008) using data from the Sloan Digital Sky Survey and shows that photometric redshifts can be used in such analysis. The stronger limitation on the results in this work comes from the small sizes of the CFHTLS Deep areas, what will not be a problem for the future surveys DES and LSST which will cover a much larger area of the sky.

**Keywords:** galaxy clustering, halo model, correlation function, photometric redshifts, large scale structure of the Universe

# Lista de Figuras

1.1	Aglomerado de Coma . . . . .	2
1.2	Curva de rotação galáctica . . . . .	3
1.3	Curvas de rotação de galáxias espirais . . . . .	4
1.4	Lentes gravitacionais . . . . .	5
1.5	Matéria escura e matéria bariônica: primeiro estágio . . . . .	8
1.6	Matéria escura e matéria bariônica: segundo estágio . . . . .	8
1.7	Matéria escura e matéria bariônica: terceiro estágio . . . . .	9
2.1	Geometrias do Universo . . . . .	19
2.2	Esquematização do <i>redshift</i> . . . . .	20
2.3	Efeito da distorção de <i>redshifts</i> em dados observacionais . . . . .	26
2.4	Efeito da distorção de <i>redshifts</i> em dados simulados . . . . .	27
2.5	Efeito no espaço de <i>redshift</i> em grande escala . . . . .	27
3.1	Distribuição homogênea: correlação igual a zero . . . . .	32
3.2	Correlação de uma distribuição homogênea . . . . .	32
3.3	Distribuição heterogênea: correlação maior que zero . . . . .	32
3.4	Distribuição heterogênea: correlação menor que zero . . . . .	32
3.5	Esquematização da correlação angular . . . . .	38
3.6	Esquematização da correlação projetada . . . . .	40
4.1	Função de correlação obtida para o CfARS . . . . .	43
4.2	Função de correlação obtida para o SSRS . . . . .	43
4.3	Função de correlação obtida para o PP . . . . .	44

4.4	Função de correlação obtida para o CfARS e SSRS . . . . .	45
4.5	Função de correlação obtida para o 2dFGRS . . . . .	46
4.6	Esquema do modelo de halos . . . . .	48
4.7	Função de correlação no modelo de halos . . . . .	49
4.8	Função de correlação para o SDSS usando modelo de halos . . . . .	50
4.9	Função de correlação para galáxias luminosas vermelhas do SDSS dividida pelo melhor ajuste de lei de potência usando modelo de halos . . . . .	51
5.1	Cúpula do CFHTLS . . . . .	52
5.2	Bandas das câmeras do CFHTLS . . . . .	53
5.3	Localização dos levantamentos <i>Wide</i> e <i>Deep</i> do CFHTLS . . . . .	54
5.4	Áreas do levantamento <i>Deep</i> . . . . .	56
5.5	Contagem de galáxias do levantamento <i>Deep</i> . . . . .	57
5.6	Comparação dos <i>redshifts</i> fotométricos do CFHTLS com os espectroscópi- cos do VVDS . . . . .	57
6.1	Erro na medida da correlação angular do <i>Deep</i> . . . . .	61
6.2	Função de correlação medida do <i>Deep</i> . . . . .	63
6.3	Evolução com o <i>redshift</i> da estimativa da potência da correlação angular . . . . .	64
6.4	Função de correlação medida dividida pelo ajuste de lei de potência . . . . .	65

# Lista de Tabelas

5.1	Informações dos campos do levantamento <i>Deep</i> . . . . .	54
5.2	Informações dos filtros das câmeras <i>MegaCam</i> e <i>CFH12K</i> . . . . .	55
6.1	Parâmetros do ajuste da lei de potência da correlação angular nos quatros intervalos de <i>redshifts</i> do levantamento <i>Deep</i> . . . . .	62



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	O Paradigma da Matéria Escura . . . . .	1
1.1.1	Tipos de Matéria Escura . . . . .	4
1.2	O Modelo Hierárquico de Formação de Estruturas . . . . .	6
1.3	A Importância da Caracterização da Aglutinação de Galáxias . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Distâncias em Cosmologia</b>	<b>15</b>
2.1	O Princípio Cosmológico . . . . .	16
2.2	Coordenadas Comóveis . . . . .	17
2.3	Descrição Geométrica do Universo . . . . .	18
2.4	Redshifts . . . . .	20
2.5	Estimativas de Distâncias Usando <i>Redshifts</i> . . . . .	21
2.6	Distorção dos <i>Redshifts</i> . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Função de Correlação de Dois Pontos</b>	<b>28</b>
3.1	Descrição . . . . .	28
3.2	Função de Correlação na Cosmologia . . . . .	33
3.3	Estimadores da Função de Correlação Espacial de Dois Pontos . . . . .	34
3.4	Projeções da Função de Correlação Espacial de Dois Pontos . . . . .	35
3.4.1	Função de Correlação Angular . . . . .	36
3.4.2	Função de Correlação Projetada . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Função de Correlação Aplicada em Levantamentos de Galáxias</b>	<b>41</b>
4.1	Função de Correlação Aproximada pela Lei de Potência . . . . .	41



4.2	Desvios da Lei de Potência e o Modelo de Halos . . . . .	45
<b>5</b>	<b>A Amostra CFHTLS</b>	<b>52</b>
<b>6</b>	<b>A Função de Correlação Angular e o Modelo de Halos no CFHTLS</b>	<b>58</b>
6.1	Análise do Erro na Correlação Angular Medida . . . . .	59
6.2	Resultados e Conclusões . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Perspectivas Futuras</b>	<b>68</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>71</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A cosmologia, o ramo da ciência que lida com a origem, evolução e estrutura do Universo em grandes escalas, tem como um de seus ramos o estudo da formação e evolução das galáxias. A compreensão de como as galáxias se originam e evoluem ganhou consistência nas duas últimas décadas a partir de alguns ingredientes que incluem:

- O conceito de que o Universo contém, em grande quantidade, matéria que não interage com a radiação mas apenas através da gravitação.
- Teorias cada vez mais sofisticadas que propõem cenários de formação de estruturas.
- A elaboração de códigos numéricos cada vez mais confiáveis que simulam as estruturas em grande escala do Universo.
- Determinação de amostras de galáxias cada vez mais extensas e representativas do Universo mais jovem.

### 1.1 O Paradigma da Matéria Escura

A existência de uma matéria invisível em grandes proporções foi primeiramente apontada nos anos 1930 por Fritz Zwicky (Zwicky, 1933, 1937) para dar conta da massa que faltava para equilibrar as velocidades orbitais das galáxias do aglomerado de Coma. Zwicky estimou a massa total do aglomerado baseado nos movimentos das galáxias e a comparou

com a massa estimada do aglomerado baseado na soma das massas estimadas pelas luminosidades das galáxias. Havia uma grande discrepância nos resultados indicando que a massa encontrada baseada nas velocidades das galáxias era muito maior do que a massa encontrada baseada nas luminosidades individuais. O potencial gravitacional devido aos objetos visíveis do aglomerado não era suficiente para manter o aglomerado ligado com velocidades orbitais das galáxias tão altas.

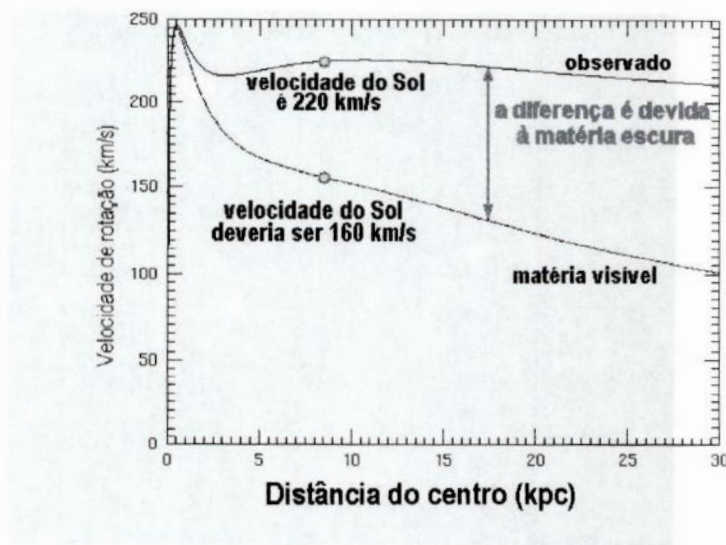


**Figura 1.1:** Imagem do aglomerado de Coma obtida pelo telescópio *Sloan Digital Sky Survey* (<http://www.sdss.org/iotw/archive.html>).

Cerca de 40 anos mais tarde, Ostriker et al. (1974), Einasto et al. (1974), Rubin et al. (1976) e Rubin et al. (1978) notaram que seriam necessários halos massivos em volta da Via Láctea e em outras galáxias vizinhas para explicar os movimentos de suas partes mais externas e das galáxias satélites.

Assim, a hipótese da existência e importância de uma matéria escura foi reforçada em observações destes trabalhos, envolvendo, as curvas de rotação galáctica. Essas curvas representam uma maneira de estimar a massa de uma galáxia usando as velocidades orbitais das estrelas ou de nuvens de gás a diferentes distâncias ao centro da galáxia. Era de se esperar que, para grandes distâncias, envolvendo quase toda a massa associada à matéria visível, a curva de rotação das estrelas diminuísse com a distância  $r$  ao centro da galáxia. Essas estrelas deveriam estar em movimento kepleriano (velocidade de rotação  $\propto 1/r$ ) em torno de um centro de massa representativo da massa total dentro do raio  $r$ .

Mas não é o que acontece de fato. A curva de rotação obtida nesses trabalhos (envolvendo galáxias espirais) aumenta ligeiramente para distâncias maiores. Já que a velocidade de rotação das estrelas aumenta com a massa, isso implica que a quantidade de massa continua a crescer mesmo para distâncias maiores ao centro da galáxia. Isso significa que a matéria escura responsável por este efeito se estende bem além da matéria visível da galáxia, como mostram as figuras 1.2 e 1.3.



**Figura 1.2:** Curva de rotação da Via Láctea. O Sol possui uma velocidade de rotação superior ao esperado, indicando assim presença de matéria que não é observada. Figura obtida no site da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (<http://astro.if.ufrgs.br/vialac/node5.htm>).

Além desses efeitos cinemáticos, há outros indícios que indicam a existência da matéria escura. Por exemplo, as lentes gravitacionais, que são efeitos causados pela distorção do espaço-tempo na presença de um corpo de alta massa. A luz proveniente de uma fonte (uma galáxia distante) ao passar por uma distribuição de matéria é distorcida e causa efeito de lenteamento quando observada da Terra. O efeito de lente gravitacional é previsto pela Teoria da Relatividade Geral de Einstein, sendo possível estimar a quantidade de matéria escura em um determinado aglomerado que causa um determinado lenteamento observado. Na figura 1.4 é mostrada a imagem do aglomerado Abell 1689, com os efeitos de lenteamento (imagens alongadas em forma de arcos). A radiação proveniente de galáxias situadas em distâncias maiores e que estejam atrás deste aglomerado sofre uma alteração da sua trajetória causando assim o efeito de lenteamento. O estudo dos efeitos de lenteamento gravitacional revela, assim como em outros casos, uma quantidade



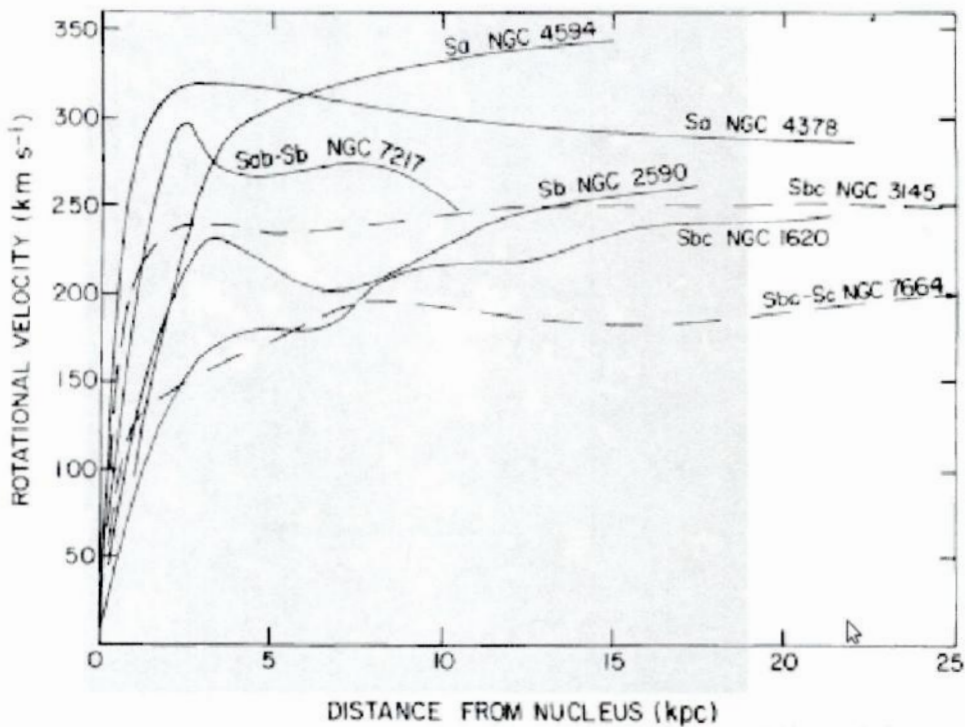


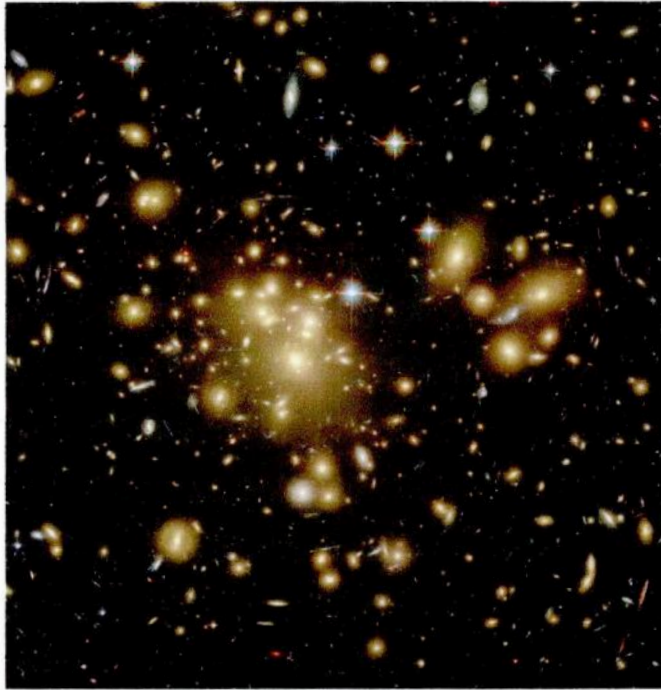
Figura 1.3: Curvas de rotação de galáxias espirais obtidas por Rubin et al. (1978).

de massa maior que o indicado pela luminosidade apenas.

### 1.1.1 Tipos de Matéria Escura

Foram feitas várias propostas diferentes para explicar a natureza da matéria escura. Algumas destas propostas variavam desde condensações de matéria de origem bariônica até partículas exóticas de natureza não-bariônica.

Para a matéria escura de origem bariônica pode-se citar como exemplos os MACHOs (White & Rees, 1978; Carr et al., 1984) cuja sigla representa *MA*ssive *C*ompact *H*alo *O*bjects. Os MACHOs são objetos que emitem pouco ou nenhuma radiação. Entre esses objetos estão os buracos negros, anãs-marrons, estrelas de nêutrons e anãs-brancas antigas (que já esfriaram o suficiente para não emitirem mais radiação) e planetas. Entretanto os MACHOs representam apenas uma pequena parte da matéria escura. Seriam necessários muitos destes objetos para explicar a quantidade de matéria escura na sua totalidade. Mas sabe-se que isto não é possível pois haveria, por exemplo, um efeito de enriquecimento da Via Láctea muito grande (através das supernovas e nebulosas planetárias), o que não é observado.



**Figura 1.4:** Imagem obtida pelo telescópio espacial Hubble do aglomerado Abell 1689 (<http://hubblesite.org/gallery/wallpaper/pr2003001a/>). Aqui vemos um efeito de lenteamento gravitacional forte, indicando a presença de matéria escura.

Para partículas de natureza não-bariônica temos por exemplo os trabalhos de Gershtein & Zeldovich (1966) e Cowsik & McClelland (1972).

De um modo geral pode-se classificar a matéria escura de origem não-bariônica de acordo com as suas velocidades típicas:

- Matéria escura quente
- Matéria escura morna
- Matéria escura fria

A **matéria escura quente** é composta por partículas que viajam em velocidades extremamente altas (mais de 95% da velocidade da luz). Por exemplo, uma partícula já detectada e candidata a matéria escura quente é o neutrino, uma partícula subatômica cuja massa é muito menor do que a do elétron. Sua detecção é muito difícil, pois a interação do neutrino com a matéria é muito fraca. Os neutrinos foram propostos a serem candidatos a matéria escura pela quantidade de partículas desse tipo que existem (trilhões



de partículas atravessam uma área de um metro quadrado por segundo aqui na Terra). Além da gravidade, o neutrino interage com a matéria bariônica através da força fraca.

A matéria escura quente é compatível com o modelo *Top-Down* (Doroshkevich et al., 1974), que propõe que, depois do *Big Bang*, foram formadas primeiramente grandes estruturas (escalas da ordem dos superaglomerados de galáxias) para depois, por meio de fragmentação destas, formar os aglomerados e as galáxias. Este modelo teve dificuldades, a partir dos meados da década de 1980, para explicar as observações. Por exemplo, a escala de tempo de formação das estruturas, de superaglomerados a galáxias, não é compatível com os dados observacionais acumulados ao longo dos últimos anos.

A **matéria escura morna** é um tipo de matéria escura cujas partículas possuem velocidades relativísticas, mas não tão altas quanto as da matéria escura quente (pode variar desde 1% até 95% da velocidade da luz). Há partículas candidatas a matéria escura morna como o neutrino estéril (mais pesado e mais lento que o neutrino comum) e o gravitino. Simulações que incluem este tipo de matéria são incompatíveis com o Universo observável (<http://www.mpa-garching.mpg.de/Virgo/hubble.html>).

Já as partículas denominadas de **matéria escura fria**, que possuem velocidades clássicas (menor que 1% da velocidade da luz) apresentam um grande interesse de estudo pois são compatíveis com o modelo hierárquico, que prevê que a formação de estruturas se dá por aglutinação de objetos menores em objetos maiores. Este cenário, que também é denominado *Bottom-Up* (Blumenthal et al., 1984), é o mais aceito dentro os modelos de formação de estruturas do Universo.

## 1.2 O Modelo Hierárquico de Formação de Estruturas

O modelo hierárquico, como dito, é o modelo mais aceito para a formação de galáxias e aglomerados. Neste modelo a matéria escura fria segue uma distribuição de densidade pelo Universo e as galáxias se formam pelo resfriamento e condensação do gás (matéria bariônica) onde a densidade de matéria escura fria é maior.

Nos primeiros instantes do Universo tanto matéria escura fria quanto matéria bariônica se encontravam distribuídas quase que homogênea (figura 1.5) por todo o espaço. Neste

período o Universo se encontrava na **era da radiação**. Nesta época a taxa de expansão do Universo era devida a pressão de radiação dos fótons. Por consequência, tanto matéria bariônica quanto matéria escura permaneciam praticamente homogêneas na era da radiação, ou seja, não se aglomeravam apreciavelmente.

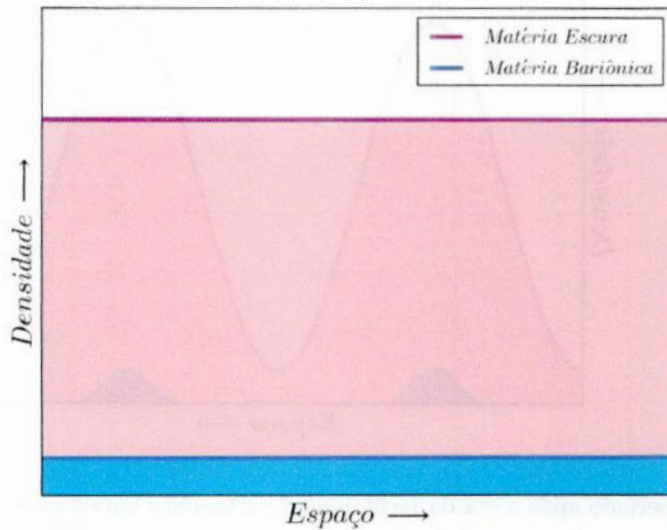
Logo após a era da radiação o Universo já estava grande o bastante para que os fótons não domissem sobre a matéria. Esse período é conhecido como a **era da matéria**. Dentro da era da matéria há duas subdivisões: **acoplamento forte** e **recombinação**.

No **acoplamento forte** os fótons não são mais dominantes sobre a matéria mas permanecem fortemente acoplados com os bárions. Qualquer captura de elétrons pelos prótons para formar átomos era rapidamente dissipada pela radiação. Em contrapartida a matéria escura fria, que não interage com a radiação, pode nesta época do acoplamento forte seguir uma distribuição de densidade pelo Universo formando assim condensações de matéria escura fria por efeito de flutuação de densidade (figura 1.6). Estas condensões de matéria escura fria são chamadas de **halos de matéria escura fria**.

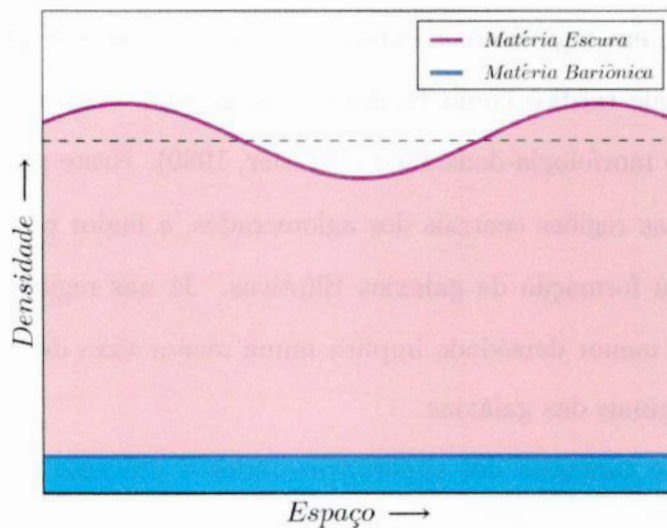
Depois da fase de acoplamento forte houve um período conhecido como a **era da recombinação**. Neste período a radiação enfim começa a viajar livremente pelo espaço e a matéria bariônica pode se combinar e formar átomos neutros. Os halos de matéria escura fria, já formados antes, serviram, então, de poços de potenciais gravitacionais para onde a matéria bariônica foi atraída, formando, assim, as primeiras estruturas do Universo (figura 1.7).

Pelo modelo hierárquico então, as estruturas crescem sob a influência da gravidade dentro de halos de matéria escura fria (White & Rees, 1978), ou seja, primeiramente são formados objetos pequenos, sub-galácticos, que por aglutinação formaram objetos maiores, como as galáxias que hoje observamos. Esse processo continua a ocorrer, como se pode constatar dos inúmeros indícios observacionais de fusões de galáxias (Conselice et al., 2003).

Numa escala de tamanho maior, os aglomerados de galáxias são sistemas formados pela aglutinação desses objetos e seus halos representam estruturas dinamicamente menos evoluídas que as galáxias. Isso porquê um aglomerado de galáxias pode ser formado até

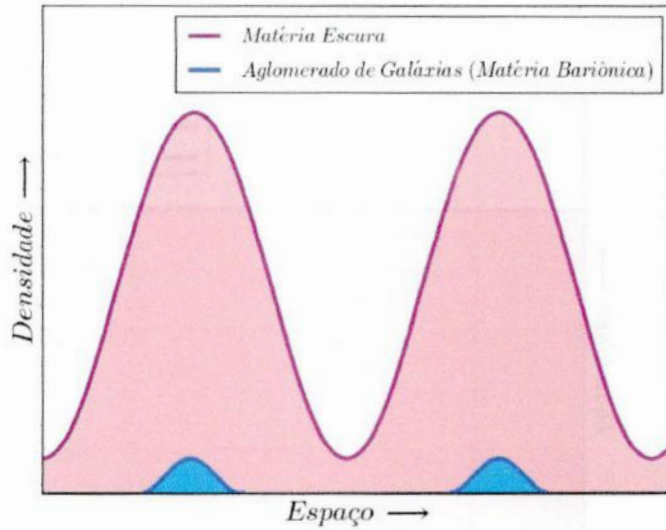


**Figura 1.5:** Matéria escura fria e matéria bariônica distribuídas quase homogêneas por todo o espaço na era da radiação.



**Figura 1.6:** Por efeito de flutuação de densidade, a matéria escura fria começava a se condensar já na era da matéria no período do acoplamento forte. Já a matéria bariônica mantinha-se quase homogênea por todo o espaço devido à forte interação radiação-matéria.





**Figura 1.7:** No período após a era da recombinação a matéria bariônica pode se aglutinar nas condensações de matéria escura fria (halos) dando origem às primeiras estruturas do Universo.

por milhares de galáxias e esses sistemas podem não estar virializados. Já uma galáxia é um sistema por si só que pode ter centenas de bilhões de estrelas já virializadas.

Fortes indícios do processo de aglutinação estão presentes nos aglomerados de galáxias, que apresentam em suas regiões centrais principalmente galáxias SO e Elípticas, que se acredita serem os principais produtos de fusões de outras galáxias (Meza et al., 2003). Por outro lado, em regiões mais externas dos aglomerados a predominância é de tipos morfológicos mais tardios como Espirais e Irregulares. Dentre dos processos de fusões temos a relação morfologia-densidade (Dressler, 1980). Neste processo os ambientes mais densos, como nas regiões centrais dos aglomerados, a maior probabilidade de ocorrência de fusões leva à formação de galáxias Elípticas. Já nas regiões externas dos halos dos aglomerados, a menor densidade implica numa menor taxa de fusões e a preservação de morfologias originais das galáxias.

Na escala de tamanho dos superaglomerados o processo de aglutinação de halos é incipiente, ou seja, tais sistemas são dinamicamente muito pouco evoluídos.

## 1.3 A Importância da Caracterização da Aglutinação de Galáxias

Com tudo o que foi exposto até aqui pode-se concluir que a medida da aglutinação de galáxias é uma ferramenta importante para avaliar e testar a consistência de modelos de formação e evolução de galáxias. Para um modelo ser considerado realista, suas previsões no que diz respeito ao nível de aglutinação em função da escala e sua evolução com o tempo cósmico devem reproduzir os resultados observacionais.

Em particular, a física envolvida no processo de formação de galáxias e estruturas em geral deixa marcas em escalas características que se refletem na forma de uma função de aglutinação. Durante vários anos (entre os anos 1970 até cerca dos anos 1980) a função que descreve a aglutinação de galáxias foi aproximada por uma lei de potência em função da escala, por uma questão de simplificação e por um argumento de representar um processo independente de escala.

Entretanto, não seria surpreendente se, sendo a distribuição de galáxias marcada pela presença de aglomerados, isto é, halos contendo galáxias, alguma escala característica surgisse na função de aglomeração além da aproximação de uma lei de potência. Este comportamento além da lei de potência é o tema deste trabalho que será explorado em capítulos seguintes.

Embora não sendo o escopo deste trabalho, deve-se lembrar também que quando as primeiras perturbações na mistura matéria-radiação colapsaram formando os primeiros objetos uma onda acústica se formou a partir de cada evento deste, expandindo-se com a velocidade do som nesse meio. Fótons e bárions são levados juntos por esta onda sonora, pelo forte acoplamento matéria-radiação, até o momento em que a duas desacoplam. Os fótons se dispersam pelo Universo e os bárions são mantidos ligados no potencial da concha criada pela onda acústica. A matéria escura fria é pouco sentida neste processo. Este é também um mecanismo que deixa uma assinatura na distribuição das galáxias (Eisenstein et al., 2005) que são mais tarde formadas pelos bárions, sendo conhecido pelo nome de **oscilação acústica de bárions**. Esta escala característica pode ser usada como

uma régua padrão para a determinação de distâncias cosmológicas. Este é um exemplo de como as características da aglutinação podem ser relevantes para a determinação de parâmetros cosmológicos.

Além disso, é importante mencionar que no final dos anos 1990 a observação e estudo de distâncias de supernovas (Perlmutter et al., 1999) revelou um dos resultados mais impactantes da Astronomia moderna: a expansão do Universo é acelerada. A energia responsável por esta aceleração (denominada **energia escura**) é desconhecida e representa um dos maiores desafios atuais da ciência, sendo objeto de diversas análises teóricas e projetos observacionais, como por exemplo os trabalhos de Frieman et al. (2008). Novamente aqui a função de aglutinação representa uma ferramenta relevante pois o efeito da aceleração da expansão é dificultar e retardar a formação de estruturas no Universo e portanto diminuir a aglutinação medida. Nesse contexto, a medida de escalas características (como a dos halos ou a da oscilação acústica de bárions) pode contribuir para a investigação da natureza da energia escura.

Determinações do perfil de aglutinação da distribuição de galáxias no Universo, em função da escala, têm sido feitas com diferentes amostras. Os trabalhos originais (ex. Peebles (1974b), Groth & Peebles (1977)) utilizaram amostras contendo posições na esfera celeste e magnitudes estimadas visualmente, como os catálogos *Catalogue of Galaxies and Clusters of Galaxies* (Zwicky et al., 1961-1968) e *Lick Galaxy Catalogue* (Shane & Wirtanen, 1967).

Os trabalhos realizados nos anos 1970 e 1980 foram desenvolvidos a partir dos catálogos compilados por Nilson (1973), Zwicky et al. (1961-1968) e Lauberts (1982) a partir de levantamentos fotográficos do *Palomar Observatory Sky Survey*, nos EUA, concluído em 1958 e do *ESO/Uppsala Survey of the ESO (B) Atlas*, no Chile, concluído por volta de 1980. Esses dados, essencialmente representando amostras limitadas em magnitude 14.5 na banda B, permitiram a preparação de amostras para levantamentos espectroscópicos como o *Center for Astrophysics Redshift Survey* (CfARS) (Huchra et al., 1982) e *Southern Sky Redshift Survey* (SSRS) (da Costa et al., 1988). Juntos, CfA e SSRS somam da ordem de 15.000 galáxias com *redshifts* determinados, distribuídos em todo o céu, com exceção do



plano galáctico, e com os quais as primeiras estatísticas de aglomeração foram realizadas com a distância radial.

O *Two-Degree Field Galaxy Redshift Survey* (2dFGRS) (York et al., 2000) representa uma transição para a era de maiores bases de dados. Seu catálogo fonte foi proveniente de iniciativas de levantamentos fotométricos como o *Automated Plate Measurement Galaxy Survey* (APM) e a espectroscopia que forneceu os *redshifts* para análise foi realizada com um sistema de 400 fibras. O levantamento foi realizado em 2 fatias de declinação (mais alguns apontamentos localizados) e obteve *redshifts* para cerca de 250.000 galáxias até magnitude  $b_J=19.45$ .

Aproximadamente na mesma época, o *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) (York et al., 2000) surgiu como uma das mais impactantes iniciativas observacionais da astronomia moderna. O levantamento cobriu  $8 \times 10^3$  graus quadrados do céu, obtendo fotometria em 5 bandas (u,g,r,i,z) para cerca de  $2 \times 10^8$  de objetos e espectroscopia, utilizando 2 espectrógrafos com  $6 \times 10^2$  fibras, de mais de  $6.7 \times 10^5$  galáxias. Pesquisadores do SDSS foram os primeiros a realizar uma análise de dados da função de aglutinação utilizando um modelo de halos (Zehavi et al., 2004). O projeto já teve 2 extensões (SDSS-II e SDSS-III) focalizado em temas de pesquisa específicos. Em particular o SDSS-III tem, entre seus levantamentos atuais, um dedicado à investigação da escala de oscilação acústica de bárions que é chamado de *Baryon Oscillation Spectroscopic Survey* (BOSS). Na sua última liberação de dados públicos, o SDSS-III já disponibiliza cerca de  $8.6 \times 10^5$  *redshifts* de galáxias até magnitude  $i=21.3$ , excluindo o BOSS que não é público.

No momento atual a astronomia prepara-se para dar mais um salto no patamar de obtenção de dados. Iniciado em 2005 (<http://twiki.on.br/bin/view/SitePublico/AboutDesPage>) o *Dark Energy Survey* (DES) (<http://www.darkenergysurvey.org/>), que será o maior levantamento de imagens do céu da década de 2010, foi projetado para investigar a natureza da energia escura. O projeto realizará imageamento de alta eficiência, utilizando 5 bandas ópticas, cobrindo 5000 graus quadrados do céu e profundidade sem precedentes.

O grande diferencial do projeto DES será a utilização de quatro diferentes técnicas simultâneas para inferir a natureza da energia escura: a estatística de aglomerados de

galáxias, a escala característica da distribuição da matéria bariônica, o efeito fraco de lentes gravitacionais e a distância de supernovas.

Com um acervo de dados estimado em alguns petabytes, o DES conterà cerca de 300 milhões de galáxias, 20 mil aglomerados de galáxias, 2 mil detecções de supernovas, assim como milhões de estrelas da Via Láctea, além de objetos do sistema solar, viabilizando estudos numa grande diversidade de temas na área de Astronomia.

O Brasil participa nos projetos SDSS-III e DES através do Laboratório Interinstitucional de e-Astronomia (LIInEA) (<http://www.linea.gov.br/>), composto pelo Observatório Nacional (ON) (<http://www.on.br/>), o Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) (<http://www.cbpf.br/>) e o Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC) (<http://www.lncc.br/>). O LIInEA constroi a infra-estrutura para a participação brasileira nesses projetos sendo um centro distribuidor de seus dados.

Além disso na década de 2020, uma das mais ambiciosas iniciativas internacionais de mapeamento de grandes áreas do céu ocorrerá com a execução do projeto *Large Synoptic Survey Telescope* (LSST) que sucederá os projetos *Dark Energy Survey* e *Sloan Digital Sky Survey III*. O LSST (<http://arxiv.org/abs/0912.0201>) será um telescópio de 8.4m de diâmetro, de grande campo (9.6 graus quadrados), dotado de uma câmera de  $3.2 \times 10^8$  pixels. O instrumento será dedicado ao imageamento de alta qualidade de cerca de  $3 \times 10^4$  graus quadrados do céu em seis bandas fotométricas (u,g,r,i,z,y) e instalado em Cerro Pachon, no Chile. Sua performance de observação (todo o céu visível do sítio em cerca de 4 dias) permitirá que cada posição do céu seja observada cerca de mil vezes no período de 10 anos.

O grande volume de dados e análises decorrentes do DES e do LSST só é viável em função do uso de imageamento, que é uma técnica que consome um tempo muito menor que a espectroscopia para um determinado limite de magnitude. Isto significa que as distâncias decorrentes desses imageamentos serão determinadas por técnicas fotométricas, hoje em dia bastante usuais. Os *redshifts* assim determinados são chamados *redshifts* fotométricos. Entretanto, este método apresenta um erro significativamente maior no *redshift* que uma determinação espectroscópica (Ilbert et al., 2006). Sua grande vantagem

é na análise de extensas bases de dados esperados no futuro, como o DES e o LSST.

O trabalho aqui apresentado visa a avaliação da possibilidade de se encontrar a assinatura do modelo de halos na estatística de aglomeração de galáxias em amostras onde distâncias serão estimadas com *redshifts* fotométricos, como o DES e o LSST. O estudo da estatística da aglomeração de galáxias é de vital importância pois como dito será uma das técnicas utilizadas pelo DES para o estudo da energia escura.

Para esse nosso estudo utilizamos os dados do sublevantamento *Deep* do *Canada-France Hawaii Telescope Legacy Survey* (CFHTLS) (<http://www.cfht.hawaii.edu/Science/CFHLS/cfhtlspublications.html>) cuja profundidade limite é semelhante ao do DES (26 de magnitude na banda *i* para o *Deep* e 25 de magnitude para a mesma banda no DES).

O capítulo 2, a seguir, é dedicado à descrição do uso de *redshifts* como estimadores de distâncias em cosmologia. O capítulo 3 descreve a utilização da função de correlação de dois pontos como medida da aglutinação da distribuição de galáxias, e o capítulo 4 apresenta exemplos da aplicação desta técnica em diferentes amostras. No capítulo 5 é descrita a amostra CFHTLS, utilizada neste trabalho, enquanto no capítulo 6 são mostrados os resultados e da aplicação do modelo de halos na função de correlação para o CFHTLS e as principais conclusões. E no capítulo 7 são apresentadas as perspectivas futuras.



## Capítulo 2

# Distâncias em Cosmologia

Para a determinação de uma medida da aglutinação da distribuição de galáxias no Universo, um ingrediente chave é o conhecimento das distâncias entre esses objetos. Na direção perpendicular à linha de visada, distâncias angulares podem ser obtidas com bastante precisão a partir de imagens obtidas em telescópios. Por outro lado, na direção radial a determinação da distância é uma questão de maior complexidade. A única informação que temos dos objetos é sua radiação e nela é necessário encontrar meios de estimar as distâncias entre esses objetos.

Em cosmologia, existem diferentes métodos para quantificar distâncias radiais de objetos, seja por propriedades conhecidas desses objetos ou da própria radiação. Entre os primeiros casos estão as chamadas velas-padrão ou réguas-padrão que são objetos para os quais se conhece a luminosidade ou uma dimensão intrínseca, como estrelas Cefeidas, supernovas, a galáxia mais brilhante de um aglomerado, a relação entre a dispersão de velocidades, diâmetro característico de galáxias Elípticas, etc. Obviamente este método só pode ser aplicado a um conjunto de objetos que satisfaçam à classe com propriedade conhecida, ou àqueles que contenham tais objetos.

No segundo caso está o *redshift*, o desvio da luz para o vermelho, que cuja interpretação está relacionada com a expansão do Universo. Nesta categoria está a grande maioria dos trabalhos em cosmologia, devido à maior simplificação técnica e maior disponibilidade de acesso a dados, como é o caso desta monografia.

Para utilizar o *redshift* como medida da distância, primeiramente, devemos conhecer

o espaço-tempo do Universo. A teoria que descreve a geometria do Universo é a Relatividade Geral (RG) proposta por Einstein em 1915. A RG trata a gravitação como sendo a curvatura do espaço-tempo. A matéria (energia) curva o espaço-tempo ao seu redor. A sensação de força que qualquer tipo de matéria sente quando está em um campo gravitacional pode ser interpretada como a curvatura do espaço-tempo, que afeta qualquer tipo de matéria e energia, incluindo a luz. Desta forma, é muito importante compreender a geometria do Universo. Tudo o que sabemos sobre as galáxias é decorrente da análise da radiação por elas emitida, em particular as distâncias estimadas com *redshifts*. Precisamos saber o caminho percorrido pelos fótons para assim podermos quantificar corretamente as distâncias destes objetos.

## 2.1 O Princípio Cosmológico

Modelos cosmológicos primitivos, sejam eles de origem oriental ou ocidental, apresentavam o Universo como tendo um centro. O modelo geocêntrico de Ptolomeu, por exemplo, aceito por centenas de anos tinha a Terra como o centro do Universo. Mesmo quando o modelo geocêntrico foi substituído pelo modelo heliocêntrico proposto por Copérnico, a adoção de um centro foi matida. A Terra foi substituída pelo Sol como o centro do universo.

Um dos pontos de partida da cosmologia moderna é o conceito de que **o Universo não tem centro**. Não existe no Universo qualquer ponto privilegiado. Este conceito fundamental da cosmologia moderna é chamado de **princípio cosmológico**. Uma das implicações diretas do princípio cosmológico é a isotropia e homogeneidade do Universo em grande escala. Se não existem pontos privilegiados, o Universo é homogêneo, ou seja, as quantidades físicas não dependerão da posição mas somente do tempo. E pela inexistência de direções privilegiadas, as propriedades físicas são as mesmas em qualquer direção, por consequência o Universo é isotrópico.

Apesar de ser um princípio, há evidências observacionais da homogeneidade e isotropia do Universo, como por exemplo os trabalhos realizados estudando a radiação cósmica de fundo (esta radiação é oriunda de todas as direções e sua temperatura é isotrópica a menos

por um fator de  $10^{-5}$  K) (Smoot et al., 1992).

## 2.2 Coordenadas Comóveis

Em um Universo em expansão, podemos pensar que as coordenadas das galáxias estão fixas e que o espaço entre elas aumenta. Estas coordenadas são definidas como **coordenadas comóveis**, ou seja, coordenadas que não se alteram com a expansão do Universo, que são definidas da seguinte maneira:

$$r(t) = a(t)r_c, \quad (2.1)$$

onde  $r(t)$  é a distância própria do objeto no instante  $t$ ,  $r_c$  é a coordenada que não se altera com a expansão do Universo (sem movimentos próprios), e  $a(t)$  é o fator de escala no instante  $t$ . O fator de escala descreve o quanto o Universo está se expandindo.

Se quisermos saber a velocidade de recessão de uma galáxia  $v_{rec}$  devido apenas à expansão do Universo numa distância comóvel  $r_c$ , basta derivar a equação (2.1),

$$v_{rec} = \frac{d}{dt}[a(t)r_c] = \dot{a}r_c + ar_c. \quad (2.2)$$

Como visto anteriormente,  $r_c$  é a coordenada que não se altera com a expansão do Universo, ou seja,  $r_c$  é uma constante. Portanto

$$v_{rec} = \dot{a}r_c. \quad (2.3)$$

Usando a equação 2.3 na equação 2.1, temos

$$\frac{v_{rec}(t)}{\dot{a}(t)} = \frac{r(t)}{a(t)} \Rightarrow v_{rec}(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}r(t). \quad (2.4)$$

Desta relação, temos que a velocidade de recessão de uma galáxia é proporcional à



distância. O termo  $\dot{a}(t)/a(t)$  é definido como sendo o parâmetro de Hubble  $H(t)$ ,

$$v_{rec}(t) = H(t)r(t) . \quad (2.5)$$

Definindo  $t_0$  como sendo a época presente:

$$v_{rec}(t_0) = H(t_0)r(t_0) . \quad (2.6)$$

O valor do parâmetro de Hubble na época atual  $H(t_0) = H_0$  é

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} , \quad (2.7)$$

onde  $h$  é um número sem dimensão. Atualmente, estima-se  $h \approx 0.7$ .

## 2.3 Descrição Geométrica do Universo

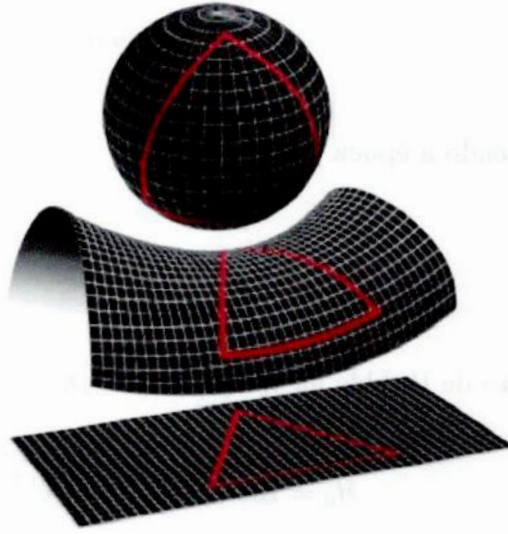
Como mencionado anteriormente, a relatividade geral descreve a geometria do Universo. Um Universo homogêneo e isotrópico é descrito pela **métrica de Robertson-Walker** proposta por Alexander Friedmann (Friedmann, 1922), Georges Lemaître (Lemaitre, 1927), Howard Percy Robertson (Robertson, 1929) e Arthur Geoffrey Walker (Walker, 1936). O intervalo entre dois eventos é dado por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] , \quad (2.8)$$

onde  $(r, \theta, \phi)$  são coordenadas comóveis esféricas e  $k$  é o parâmetro que determina a curvatura do espaço. Se  $k = 0$  o espaço é plano (euclidiano), se  $k > 0$  o espaço tem curvatura positiva (o espaço é esférico) e se  $k < 0$  a curvatura do espaço é negativa (o espaço é hiperbólico) (figura 2.1).

O intervalo de espaço-tempo,  $ds$ , é real quando dois eventos ocorrem no mesmo lugar, separados apenas pelo tempo (*timelike*), é imaginário quando dois eventos ocorrem ao mesmo tempo, mas em lugares distintos (*spacelike*) e é nulo quando dois eventos estão

conectados por um sinal viajando na velocidade da luz (*lightlike*).



**Figura 2.1:** Superfícies bidimensionais em um espaço de três dimensões. A figura de cima (esfera) é para  $k = 1$ , a do meio (hipérbole) é para  $k = -1$  e a figura de baixo (plano) é para  $k = 0$ . Para o Universo, estas figuras teriam três dimensões em um espaço com quatro dimensões.

A trajetória de um fóton é dada por  $ds^2 = 0$ , ou seja, *lightlike*. O espaço percorrido pelo fóton é justamente a velocidade  $c$  multiplicada pelo tempo. E por isotropia podemos assumir  $d\theta = d\phi = 0$ . Desta forma, a trajetória do fóton segue a relação,

$$ds^2 = 0 = c^2 dt^2 - dl^2 \Rightarrow c dt = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.9)$$

e sua integral é:

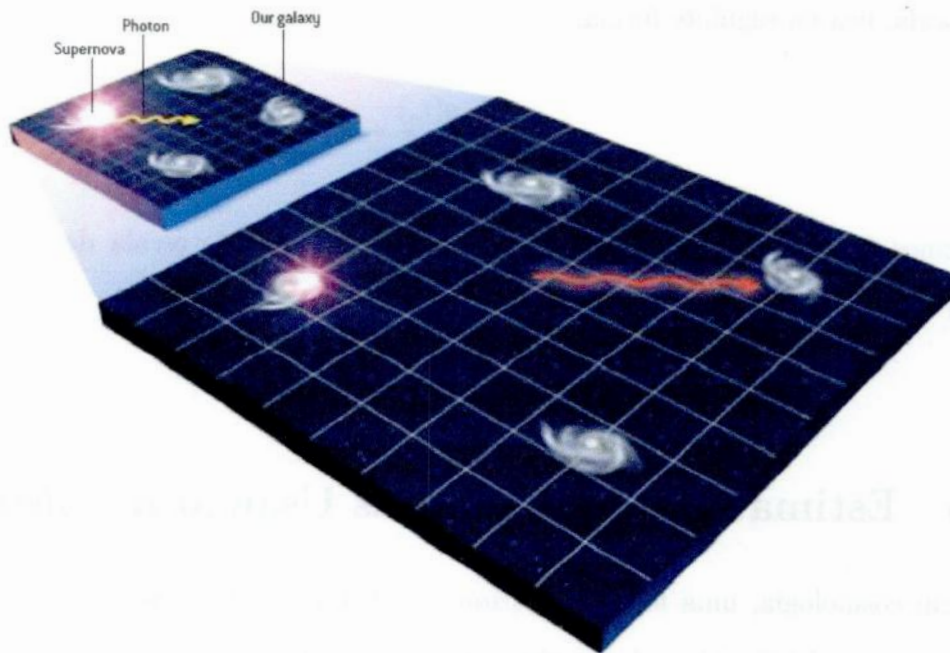
$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} \arccos(r) & \text{se } k > 0 \\ r & \text{se } k = 0 \\ \operatorname{arccosh}(r) & \text{se } k < 0 \end{cases}, \quad (2.10)$$

onde  $t_0$  corresponde ao momento em que o observador na origem ( $r = 0$ ) recebe o fóton emitido em  $t_e$  a uma distância comóvel  $r_e$ .

## 2.4 Redshifts

O *redshift*, usualmente denotado pela letra  $z$ , é o alargamento do comprimento de onda da radiação eletromagnética por causa da expansão do Universo.

Na verdade, o *redshift* pode ser pensado como consequência da conservação da energia. Quando estamos observando uma galáxia, estamos recebendo os mesmos fótons que a galáxia emitiu no passado, mas com densidade de energia menor, pois a medida que a radiação está viajando pelo espaço, o mesmo está se expandindo. A energia da radiação é a mesma, mas distribuída em um espaço maior. Como a energia de um fóton é inversamente proporcional ao comprimento de onda, a radiação é observada em um comprimento de onda maior que o emitido pela galáxia (figura 2.2).



**Figura 2.2:** Esquematização do alargamento do comprimento de onda da radiação emitida por uma galáxia. Devido à expansão cósmica, o comprimento de onda observado é maior que o emitido pela galáxia no passado.

O *redshift* de um objeto,  $z$ , pode ser obtido de maneira direta pela observação das linhas (de absorção ou emissão) do seu espectro:

$$z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1, \quad (2.11)$$

onde  $\lambda_o$  se refere ao comprimento de onda observado e  $\lambda_e$  se refere ao comprimento de onda

emitido. Considerando que o objeto não tenha velocidade própria, ou seja, sua posição comóvel no espaço não muda além da expansão do Universo ( $\dot{r}_c = 0$ ), a única componente da velocidade será devida à essa expansão. Neste caso, o *redshift* estimado será só devido à expansão.

Como o fator de escala  $a(t)$  determina a expansão do Universo e o *redshift* é consequência dessa expansão, podemos escrever a dependência do comprimento de onda com o fator de escala como

$$\frac{\lambda_o}{\lambda} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}, \quad (2.12)$$

onde  $a(t_o)$  é o fator de escala no momento em que o objeto é observado e  $a(t_e)$  é o fator de escala quando a radiação foi emitida. Por consequência o *redshift*, em termos do fator de escala, fica da seguinte forma:

$$z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1. \quad (2.13)$$

Podemos fazer uma normalização com o valor do fator de escala de hoje. Tomando  $a(t_o) = 1$ , temos

$$z = \frac{1}{a(t_e)} - 1. \quad (2.14)$$

## 2.5 Estimativas de Distâncias Usando *Redshifts*

Em cosmologia, uma forma de estimar as distâncias das galáxias é através dos seus respectivos *redshifts*. Quando o *redshift* é  $z \ll 1$ , podemos fazer a seguinte aproximação:

$$z \approx \frac{v_{rec}}{c}. \quad (2.15)$$

Pela lei de Hubble, a velocidade de recessão  $v_{rec}$  é diretamente proporcional a distância  $D$  entre a galáxia e o observador,

$$v_{rec} = H_0 D. \quad (2.16)$$



Substituindo 2.16 em 2.15, temos

$$z \approx \frac{H_0 D}{c} . \quad (2.17)$$

Mas esta relação só é válida para galáxias que estejam próximas do observador. Para *redshifts* maiores, esta relação não é válida. Na verdade, esta distância dependerá da geometria do Universo discutida antes.

Se  $d_c$  é a distância comóvel entre uma galáxia e um observador, a distância percorrida pelo fóton emitido pela galáxia até o observador é dado pela equação 2.10:

$$d_c = c \int_{t_o}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} . \quad (2.18)$$

Podemos reescrever  $dt/a$  da seguinte forma:

$$\frac{dt}{a} = \frac{dt}{da} \frac{da}{a} = \frac{da}{a^2} \frac{1}{\dot{a}/a} . \quad (2.19)$$

Utilizando  $H(t) = \dot{a}/a$  e a relação entre *redshift* e o fator de escala encontramos que

$$\frac{dt}{a} = \frac{dz}{H(z)} , \quad (2.20)$$

e portanto

$$d_c = c \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} . \quad (2.21)$$

Encontramos assim uma relação entre a distância comóvel da galáxia  $d_c$  com o *refshift*. O parâmetro de Hubble  $H(z)$  está em função do *redshift*, pois  $a(t)$  também é uma função de  $z$ .

Podemos escrever o parâmetro de Hubble (Peebles, 1980) da seguinte forma:

$$H(z) = H_o E(z) , \quad (2.22)$$

onde

$$E(z) \equiv \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} , \quad (2.23)$$



onde os parâmetros cosmológicos  $\Omega_M$ ,  $\Omega_k$  e  $\Omega_\Lambda$  são respectivamente a densidade de matéria, a densidade associada a curvatura do espaço-tempo e a densidade da constante cosmológica. Estes parâmetros são definidos da seguinte forma (Matínez & Saar , 2002):

$$\Omega_M = \frac{8\pi G\rho}{3H_0^2} , \quad (2.24)$$

$$\Omega_k = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2} , \quad (2.25)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} , \quad (2.26)$$

onde  $\rho$  é a densidade de matéria e  $\Lambda$  é a constante cosmológica introduzida por Einstein nas suas equações da relatividade geral. Sabemos que  $H(z=0) = H_0$ . Substituindo esta condição na equação 2.22, encontramos que

$$E(z=0) = 1 . \quad (2.27)$$

Substituindo a equação acima na equação 2.23 temos

$$\Omega_M + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1 . \quad (2.28)$$

Atualmente os valores majoritariamente consensuais na literatura para os parâmetros cosmológicos são:

$$\Omega_\Lambda \simeq 0.7$$

$$\Omega_M \simeq 0.3$$

$$\Omega_k \simeq 0.0$$

Temos, então, uma equação que relaciona a distância com a geometria do Universo e com a sua quantidade de matéria e energia. Reescrevendo a equação 2.21:

$$d_c = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (2.29)$$

Assumindo os valores para os parâmetros mencionados acima, admitimos que o Uni-

verso não tem curvatura, ou seja, ele é plano. Então, se medirmos uma distância  $r_1$  para uma galáxia e uma outra distância  $r_2$  para uma outra galáxia, a distância  $r$  entre elas é dada pela lei dos cossenos:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\theta , \quad (2.30)$$

sendo  $\theta$  o ângulo entre  $r_1$  e  $r_2$ . Por consequência, podemos inferir as distâncias entre as galáxias, uma das quantidades fundamentais para o estudo da sua distribuição.

## 2.6 Distorção dos *Redshifts*

Na seção anterior foi descrito sucintamente como calcular distâncias de galáxias usando *redshifts* e os parâmetros cosmológicos. Mas estes cálculos levaram em consideração *redshifts* estimados apenas com a contribuição da expansão do Universo, sem qualquer movimento próprio. Mas na realidade, não é isso o que acontece. Os objetos do Universo possuem algum tipo de movimento próprio, independente da expansão cósmica.

O movimento próprio de uma galáxia é usualmente chamado de **velocidade peculiar** e pode ser exemplificado como os movimentos orbitais desses objetos em grupos e aglomerados e o movimento devido a fluxos em grande escala. Esta velocidade altera o *redshift* através do efeito Doppler e devido a este fato, o *redshift* observado  $z_{obs}$  é a superposição do *redshift* cosmológico  $z_c$  (devido à expansão cósmica) com *redshift* peculiar  $z_{pec}$  (devido à velocidade peculiar),

$$z_{obs} = z_c + z_{pec} . \quad (2.31)$$

Se as velocidades peculiares das galáxias tiverem uma componente ao longo da linha de visada do observador, o *redshift* observado será diferente do *redshift* cosmológico. Em outras palavras, a velocidade peculiar de cada galáxia pode aumentar, diminuir ou mesmo não afetar o *redshift* medido, dependendo de sua projeção na linha de visada.

Pelo efeito Doppler, o  $z_{pec}$  é dado por (veja Hogg, 1999):

$$z_{pec} + 1 = \sqrt{\frac{1 + v_{pec}/c}{1 - v_{pec}/c}} , \quad (2.32)$$

onde  $v_{pec}$  é a componente da velocidade peculiar ao longo da linha de visada. O *redshift* cosmológico é dado pela equação 2.14. Reescrevendo a equação 2.31, o *redshift* observado é

$$z_{obs} = \frac{1}{a(t_e)} + \sqrt{\frac{1 + v_{pec}}{1 - v_{pec}}} - 2. \quad (2.33)$$

A alteração do *redshift* pelo efeito Doppler é chamada de **distorção de *redshift***. A consequência deste efeito é que, se usarmos o *redshift* observado como estimador da distância, o objeto terá uma distância estimada que não coincidirá com a sua distância verdadeira. Da equação 2.29, a distância comóvel para o *redshift* observada é

$$d_c = c \int_0^{z_{obs}} \frac{dz}{H(z)} = c \int_0^{z_c + z_{pec}} \frac{dz}{H(z)} = c \left[ \int_0^{z_c} \frac{dz}{H(z)} + \int_{z_c}^{z_c + z_{pec}} \frac{dz}{H(z)} \right]. \quad (2.34)$$

As velocidades peculiares das galáxias são velocidades clássicas (bem menores que  $c$ ). Com isso, pela equação 2.32,  $z_{pec}$  é muito pequeno e consequentemente  $z_{pec} \ll z_c$ . Portanto, podemos fazer a seguinte aproximação

$$\int_{z_c}^{z_c + z_{pec}} \frac{dz}{H(z)} \simeq \frac{1}{H(z_c)} \int_{z_c}^{z_c + z_{pec}} dz = \frac{z_{pec}}{H(z_c)}. \quad (2.35)$$

Logo,

$$d_c(z_{obs}) = c \left[ \int_0^{z_c} \frac{dz}{H(z)} + \int_{z_c}^{z_c + z_{pec}} \frac{dz}{H(z)} \right] = d_c(z_c) + \frac{cz_{pec}}{H(z_c)}. \quad (2.36)$$

Quando estamos analisando galáxias no espaço cuja coordenada radial (distância) foi estimada através do *redshift* observado, é usual dizer que estamos trabalhando dentro do **espaço de *redshift***. Em contrapartida, estaremos trabalhando dentro do **espaço real** se a distância deste mesmo espaço for estimada através do *redshift* cosmológico apenas, algo que não é possível na prática.

Sendo  $\alpha$  e  $\delta$  as coordenadas angulares equatoriais, definimos os seguintes espaços:

$$(d_c(z_{obs}), \alpha, \delta) \implies \text{Espaço de } \textit{redshift}$$

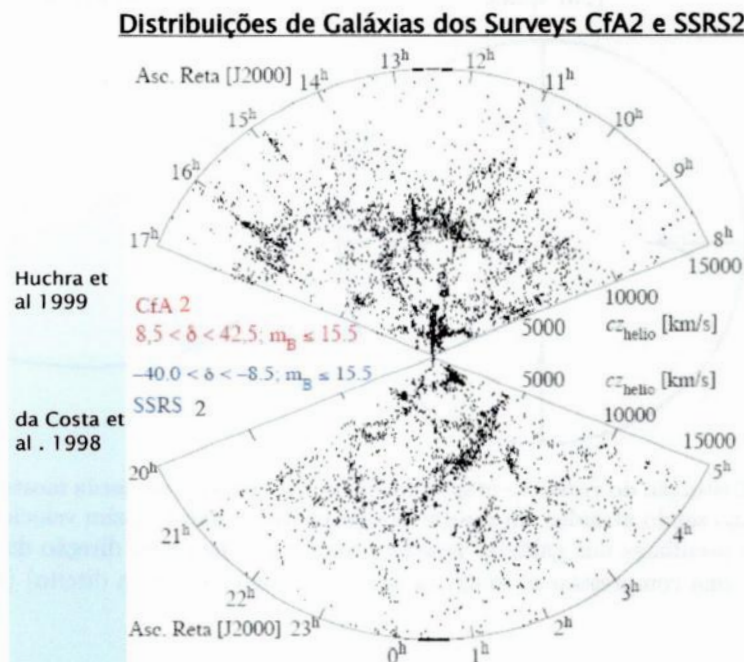
$$(d_c(z_c), \alpha, \delta) \implies \text{Espaço real}$$

Os efeitos de distorção pelas velocidades peculiares são diferentes, dependendo da



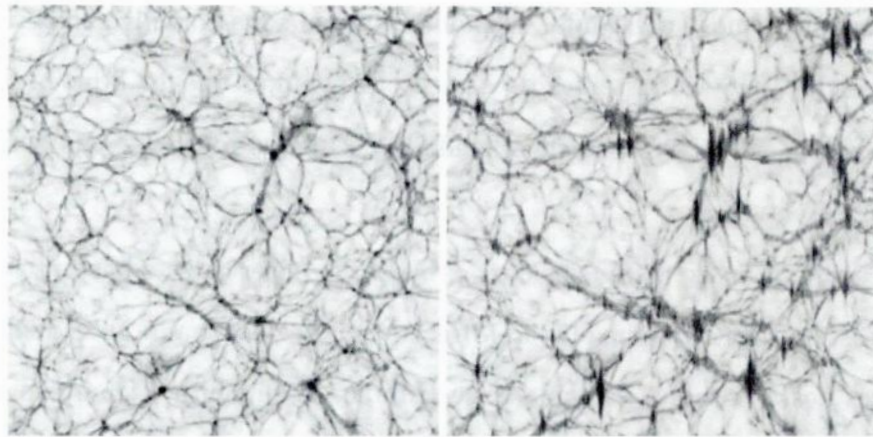
escala que estivermos analisando. A maioria das galáxias no Universo pertencem a grupos e aglomerados, que são sistemas de dimensões menores que 10 Mpc/h. Portanto dentro dessa escala as galáxias possuem velocidade peculiares relevantes em torno do centro de massa desses sistemas.

A determinação de distâncias com os *redshifts* observados é bastante alterada no caso de objetos em órbitas alongadas na direção radial, adicionado ou reduzindo velocidades peculiares desta ordem à velocidade de Hubble. Este efeito é chamado **dedo de Deus** (Colombi et al., 2007). Os aglomerados aparentam estar alongados ao longo da linha de visada no espaço de *redshift* (um “dedo de Deus” apontando para o observador), ou seja, para as galáxias que tiverem uma componente radial da velocidade se afastando do observador, esta galáxia vai aparecer mais distante. Em contrapartida para as galáxias que tiverem uma componente radial da velocidade se aproximando do observador, esta galáxia vai aparecer mais perto. As figuras 2.3 e 2.4 mostram o efeito causado no espaço de *redshifts* pelas velocidades peculiares de aglomerados em dados observacionais e simulados respectivamente.



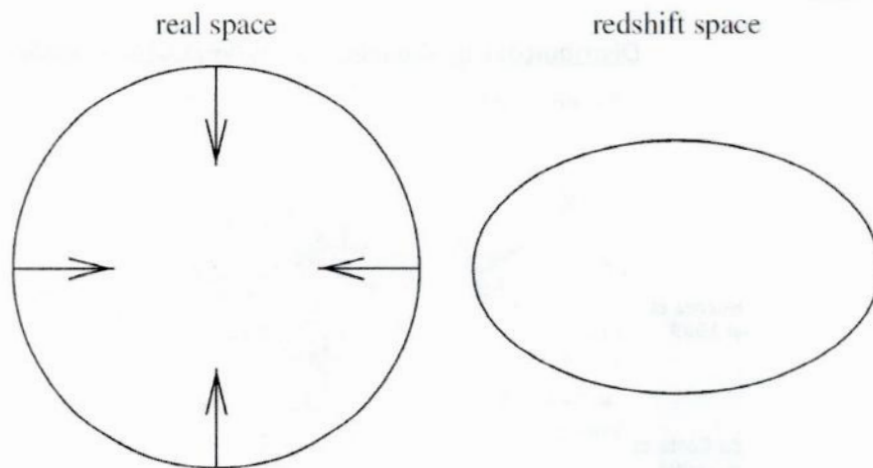
**Figura 2.3:** O efeito da distorção de *redshifts* nos levantamentos do CfA e SSRS. Os aglomerados de galáxias aparecem como estruturas finas alongadas na direção do observador.

Um outro efeito no espaço de *redshift* é o chamado **efeito linear** ou **efeito Kayser**



**Figura 2.4:** O efeito de distorção dos *redshifts* num levantamento simulado (Colombi et al., 2007). As duas figuras mostram a distribuição de densidade de um intervalo de 200 Mpc/h cúbicos. A figura da esquerda mostra o campo de densidade verdadeiro enquanto a figura da direita mostra as distorções dos *redshifts*. Os aglomerados de galáxias aparecem alongados na direção do observador.

(Kayser, 1987). Nas periferias dos aglomerados (escalas maiores que 10 Mpc/h), onde as externas ainda não estão virializadas, os objetos estão sendo atraídos para o centro massa do aglomerado, dando a estes objetos velocidades peculiares. Este efeito comprime a região ao longo da linha de visada como é ilustrado na figura 2.5.



**Figura 2.5:** Distorção do *redshift* em grande escala. A figura da esquerda mostra uma região densa, onde as galáxias estão sendo atraídas em direção ao seu centro, gerando assim velocidades peculiares. Quando as velocidades peculiares das galáxias possuem uma componente na direção da velocidade de Hubble, o observador vê uma compressão ao longo da linha de visada (figura da direita) (Rich, 2010).

Estes dois efeitos são importantes e devem ser considerados quando a determinação da aglutinação de galáxias for feita a partir do espaço de *redshifts*, já que eles alteram a distância estimada entre objetos.



## Capítulo 3

# Função de Correlação de Dois Pontos

Existem atualmente na literatura inúmeros métodos para estudar distribuições de objetos. O método escolhido e aplicado neste trabalho para estudar e caracterizar a distribuição de galáxias no Universo é um dos mais utilizados na literatura, a **função de correlação de dois pontos**.

### 3.1 Descrição

A função de correlação é uma ferramenta estatística que mede quanto uma distribuição de objetos está aglutinada. Existem diferentes formas possíveis de introduzir a função de correlação de dois pontos e as duas definições usualmente utilizadas são via **probabilidade disjunta** e via **probabilidade conjunta**.

Na definição via **probabilidade disjunta**  $dP_d$ , sorteamos (distribuimos) aleatoriamente dois elementos de volume  $dV_1$  e  $dV_2$  com posições dadas por  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$ , respectivamente. A distância entre os dois elementos de volume será

$$\vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 . \quad (3.1)$$

Dada um distribuição de pontos, a probabilidade de encontrar um ponto em um elemento de volume  $dV_1$ , e ao mesmo tempo, encontrar um outro ponto em um outro elemento

de volume  $dV_2$  é

$$dP_d = \bar{n}_1 \bar{n}_2 [1 + \xi(\vec{r})] dV_1 dV_2 , \quad (3.2)$$

onde  $\bar{n}_1$  e  $\bar{n}_2$  são as densidades médias de pontos e  $\xi(\vec{r})$  é a **função de correlação espacial de dois pontos**. O nome para essa definição (probabilidade disjunta) fica bem evidente, pois os dois elementos de volume são distribuídos independentemente (disjuntos) e também são independentes da própria distribuição de pontos para a qual se almeja quantificar a aglomeração.

Na definição da correlação de dois pontos via **probabilidade conjunta**, que denotaremos por  $dP_c$ , não são sorteadas duas posições para os elementos de volume como na definição de probabilidade disjunta, mas predetermina-se uma das posições da própria distribuição que queremos estudar e somente o outro elemento de volume é distribuído aleatoriamente. A definição fica da forma

$$dP_c = \bar{n}_1 [1 + \xi(\vec{r})] dV_1 . \quad (3.3)$$

Para chegarmos a esta relação implicitamente assumimos que ao escolhermos um ponto como base para sortear o elemento de volume, neste caso o ponto “2”, é sabido com certeza que este elemento de volume contém um ponto da distribuição. Em termos matemáticos utilizamos a relação

$$dP_2 = \bar{n}_2 dV_2 = 1 . \quad (3.4)$$

Como a relação (3.3) vale para qualquer ponto na distribuição podemos retirar a referência ao ponto de base, ou seja,

$$dP_c = \bar{n} [1 + \xi(\vec{r})] dV . \quad (3.5)$$

Uma maneira mais formal de definir a função de correlação de dois pontos faz uso da média em várias realizações do Universo

$$\xi(\vec{r}) = \langle \delta(\vec{x}_1) \delta(\vec{x}_2) \rangle , \quad (3.6)$$

onde  $\delta$  é a flutuação em torno da média do número de pontos, definida por

$$\delta(\vec{x}) = \frac{n(\vec{x})}{\bar{n}} - 1 \quad (3.7)$$

e  $\langle \cdot \rangle$  é a média de várias realizações desta quantidade (média de *ensemble*). A relação entre essa definição e a que obtemos com a probabilidade disjunta é encontrada diretamente substituindo a definição de  $\delta(\vec{x})$  na equação (3.6). Desta forma obtemos

$$\xi(\vec{r}) = \left\langle \left( \frac{n(\vec{x}_1)}{\bar{n}_1} - 1 \right) \left( \frac{n(\vec{x}_2)}{\bar{n}_2} - 1 \right) \right\rangle. \quad (3.8)$$

Multiplicando os fatores e lembrando que a média da soma é igual a soma da média, ou seja, eles comutam, podemos escrever

$$\xi(\vec{r}) = \left\langle \frac{n(\vec{x}_1)n(\vec{x}_2)}{\bar{n}_1\bar{n}_2} \right\rangle - \left\langle \frac{n(\vec{x}_1)}{\bar{n}_1} \right\rangle - \left\langle \frac{n(\vec{x}_2)}{\bar{n}_2} \right\rangle + 1. \quad (3.9)$$

A densidade média é definida como  $\bar{n} = \langle n \rangle$ , logo o segundo e terceiro termos da equação acima são iguais a unidade. Substituindo, obtemos finalmente a relação desejada

$$\xi(\vec{r}) = \frac{\langle n(\vec{x}_1)n(\vec{x}_2) \rangle}{\bar{n}_1\bar{n}_2} - 1. \quad (3.10)$$

Podemos comparar esta relação diretamente com a equação (3.2) reescrevendo a equação acima da seguinte forma:

$$\langle n(\vec{x}_1)n(\vec{x}_2) \rangle dV_1 dV_2 = \bar{n}_1\bar{n}_2 [1 + \xi(\vec{r})] dV_1 dV_2. \quad (3.11)$$

Por comparação direta com a equação (3.2), podemos identificar a probabilidade  $dP_d$  com a média das densidades nos pontos  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$ ,

$$dP_d \mapsto \langle n(\vec{x}_1)n(\vec{x}_2) \rangle dV_1 dV_2. \quad (3.12)$$

Dependendo do valor de  $\xi(\vec{r})$  podemos ter três diferentes interpretações da distribuição de pontos:

- $\xi(\vec{r}) = 0$ : a distribuição de pontos na amostra é homogênea, ou seja, as probabilidades de encontrar pontos em diferentes volumes são iguais e independentes. Encontrando um ponto no elemento de volume  $dV_1$  não aumenta ou diminui, para este caso, a probabilidade de encontrarmos um ponto no elemento de volume  $dV_2$ . Por consequência a probabilidade é escrita como

$$dP_d = \bar{n}^2 dV_1 dV_2 \quad (3.13)$$

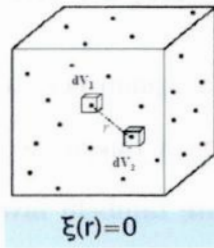
para a probabilidade disjunta. Para o caso da probabilidade conjunta temos, analogamente,

$$dP_c = \bar{n} dV \quad (3.14)$$

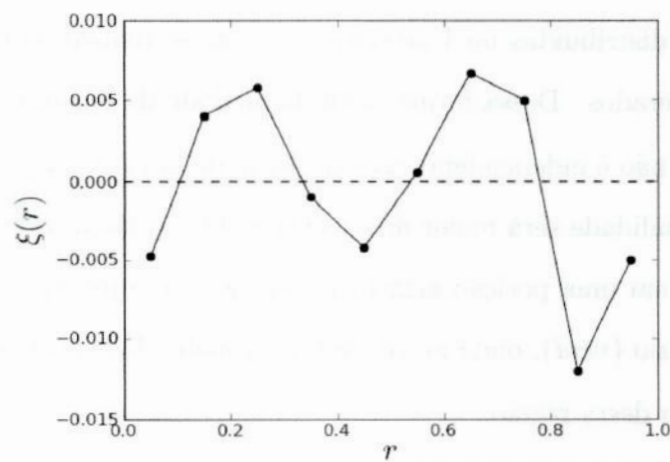
Na figura 3.1 mostramos esquematicamente esse tipo de distribuição de pontos. Na figura 3.2 fizemos uma realização de uma distribuição de pontos aleatórios, ou seja, sem aglomeração e medimos a sua respectiva correlação. Como vemos nesta figura, a correlação não é exatamente zero, mas oscila em torno deste valor, o que está de acordo com o caráter estatístico da definição da função de correlação. Para obtermos um valor cada vez mais próximo de zero para a correlação, deveríamos fazer uma média em várias realizações, porém, no exemplo da figura 3.2, só utilizamos uma realização.

- $\xi(\vec{r}) > 0$ : a distribuição de pontos apresenta excesso de aglutinação, ou seja, encontrando uma galáxia no elemento de volume  $dV_1$ , aumenta a probabilidade de encontrarmos uma galáxia no elemento de volume  $dV_2$  (figura 3.3).
- $\xi(\vec{r}) < 0$ : a distribuição de pontos apresenta falta de aglutinação, ou seja, encontrando uma galáxia no elemento de volume  $dV_1$ , diminui a probabilidade de encontrarmos um ponto no elemento de volume  $dV_2$  (figura 3.4).

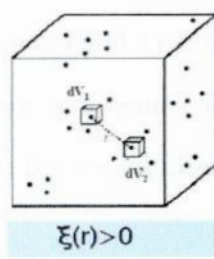




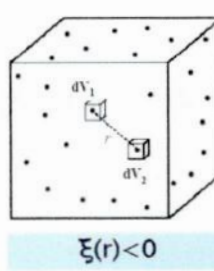
**Figura 3.1:** Pontos aleatórios espalhados por todo o cubo.



**Figura 3.2:** Medida da função de correlação para uma distribuição aleatória e homogênea.



**Figura 3.3:** Pontos aglomerados dentro do cubo.



**Figura 3.4:** Pontos distribuídos nas faces do cubo.

## 3.2 Função de Correlação na Cosmologia

Uma das formas mais usuais de quantificar a aglomeração da distribuição de galáxias é através da função de correlação. A função de correlação de galáxias é uma ferramenta simples mas poderosa que permite também investigar propriedades das galáxias, testar modelos de formação de estruturas e vincular parâmetros cosmológicos a modelos de formação de galáxias (Benson et al., 2001; Magliocchetti & Porciane, 2003; Eisenstein et al., 2005; Zehavi et al., 2005; Ross et al., 2008; Abbas et al., 2010) . As galáxias não estão aleatoriamente distribuídas no Universo, mas elas se reúnem em grupos, aglomerados e em superaglomerados. Dessa forma, a probabilidade de encontrar uma galáxia em uma dada posição  $\vec{x}$  não é independente da existência de uma outra galáxia na sua vizinhança. Então, a probabilidade será maior de encontrar uma galáxia na vizinhança de uma outra galáxia do que em uma posição arbitrária qualquer, e o mesmo vale para encontrar uma galáxia num vazio (*void*), onde neste caso, a probabilidade será menor de encontrar uma galáxia próxima desta região.

Tanto na probabilidade disjunta (equação 3.2) quanto na probabilidade conjunta (equação 3.5), a função de correlação é uma função que depende das posições relativas dos elementos de volume. Entretanto, quando a função de correlação é aplicada em galáxias, é necessário levar em consideração que o Universo é homogêneo e isotrópico em grande escala (princípio cosmológico). Sendo assim  $\xi$  pode somente depender da diferença entre as posições  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$  ( $r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ ) e não de  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$  individualmente. Portanto, para a probabilidade disjunta temos

$$dP_d = \bar{n}_1 \bar{n}_2 [1 + \xi(r)] dV_1 dV_2 \quad (3.15)$$

e para probabilidade conjunta temos

$$dP_c = \bar{n} [1 + \xi(r)] dV \quad (3.16)$$

### 3.3 Estimadores da Função de Correlação Espacial de Dois Pontos

Em astronomia, é muito comum definir a correlação de dois pontos via probabilidade conjunta, pois esta, como visto, requer o sorteio de apenas uma posição da amostra, enquanto a probabilidade disjunta requer o sorteio de duas posições da amostra. Logo, a aplicação da probabilidade conjunta é mais direta.

Partindo da equação 3.16 e isolando a função de correlação de dois pontos, temos

$$\xi(r) = \frac{dP_c}{\bar{n}dV} - 1 . \quad (3.17)$$

Podemos identificar as quantidades que aparecem do lado direito da equação como:  $\bar{n}dV$  é a distribuição de pontos aleatórios, sem aglomeração, com densidade igual à densidade média do levantamento de galáxias, e o termo do numerador,  $dP_c$ , é referente à própria distribuição de galáxias sendo medida. Uma quantidade que pode representar adequadamente as distribuições (aleatória e real) é o número de pares de objetos separados pela distância  $r$ . Essa contagem é denominada  $DD$  para a amostra de galáxias e  $RR$  para a amostra aleatória. Assim pode-se fazer associação:

$$\bar{n}dV \mapsto RR , \quad (3.18)$$

$$dP_c \mapsto DD . \quad (3.19)$$

Com essas identificações podemos construir um estimador para a função de correlação espacial de dois pontos (Peebles & Hauser, 1974),

$$\hat{\xi}(r) = \frac{DD}{RR} - 1 . \quad (3.20)$$

Aqui,  $\hat{\xi}$  representa uma estimativa para a função de correlação espacial. Este estimador é chamado de Estimador Natural, pois é o estimador que é derivado mais diretamente

da definição da função de correlação. Na literatura temos outros estimadores como o apresentado por Davis & Peebles (1983):

$$\hat{\xi}(r) = \frac{DD}{DR} - 1, \quad (3.21)$$

sendo  $DR$  o número total de pares de galáxias da amostra real com pontos da amostra artificial aleatória. No ano de 1993, quase que simultaneamente, dois outros estimadores foram apresentados. Hamilton (1993) propôs o seguinte estimador,

$$\hat{\xi}(r) = \frac{DD \cdot RR}{DR^2} - 1, \quad (3.22)$$

e Landy & Szalay (1993) chegaram num outro estimador,

$$\hat{\xi}(r) = \frac{DD - 2DR + RR}{RR}. \quad (3.23)$$

É interessante notar que todos os estimadores relacionados se resumem ao estimador natural utilizando a identificação  $DR \rightarrow RR$ . Por consequência, podemos construir ainda um outro estimador para a correlação

$$\hat{\xi}(r) = \frac{DD - DR}{RR}. \quad (3.24)$$

Este último estimador quase não é citado na literatura. Ele foi primeiramente proposto por Hewett (1982).

### 3.4 Projeções da Função de Correlação Espacial de Dois Pontos

Para podermos aplicar a função de correlação espacial de dois pontos em levantamentos de galáxias necessitamos saber de antemão as distâncias entre as galáxias.

Na prática, a função de correlação espacial em levantamentos é estimada indiretamente,



seja a partir das projeções da distância real no plano do céu (distâncias angulares), denominada **função de correlação angular**, seja por considerar a projeção da distância ao longo da linha de visada (medida pelo *redshift*), denominada **função de correlação projetada**, ou ainda também pode ser utilizada medidas no espaço de *redshift* (Eisenstein et al., 2005). Neste trabalho nos limitaremos apenas à função de correlação angular e à função de correlação projetada.

Devemos enfatizar que tanto a função de correlação angular como a função de correlação projetada são **projeções** da função de correlação espacial. A melhor escolha dependerá das características do levantamento que será analisado.

### 3.4.1 Função de Correlação Angular

Os primeiros levantamentos de galáxias não continham determinações de *redshifts* das galáxias. Como um exemplo, pode-se citar o catálogo elaborado por Zwicky et al. (1961-1968), que efetuaram medidas somente das posições angulares e das magnitudes das galáxias. Na atualidade, uma série de levantamentos são efetuados com imageamento, sendo necessária a determinação de *redshifts* fotométricos. Como mencionado anteriormente, essas determinações podem ter erros significativos, indesejáveis para um determinada análise. Nesses casos, uma escolha natural seria calcular a função de correlação usando somente a separação angular entre os objetos, ou seja, aplicar a função de correlação angular de dois pontos.

Em analogia com a correlação espacial na probabilidade disjunta (ver equação 3.15), a probabilidade  $dP_\omega$  de encontrar uma galáxia em um elemento de ângulo sólido  $d\Omega_1$  e ao mesmo tempo encontrar uma outra galáxia em um elemento de ângulo sólido  $d\Omega_2$  com separação angular  $\theta$ , é dada por

$$dP_\omega = \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 . \quad (3.25)$$

onde  $\mathcal{N}_1$  e  $\mathcal{N}_2$  são as densidades superficiais médias de galáxias projetadas na esfera celeste,  $d\Omega_1$  e  $d\Omega_2$  são os elementos de ângulos sólidos e  $\omega(\theta)$  é a **função de correlação angular de dois pontos**. Por consequência, todos os estimadores apresentados para a correlação

especial também podem ser aplicados para este caso. Como um exemplo, neste trabalho utilizamos o estimador de Landy & Szalay, que pode ser escrito da forma

$$\hat{\omega}(\theta) = \frac{DD(\theta) - 2DR(\theta) + RR(\theta)}{RR(\theta)}. \quad (3.26)$$

As quantidades  $DD$ ,  $DR$  e  $RR$  estão em função da separação angular  $\theta$  entre os pares de objetos (figura 3.5), porém a definição é idêntica à correlação espacial.

A relação entre a correlação espacial  $\xi(r)$  e a angular  $\omega(\theta)$  pode ser encontrada diretamente de suas definições. Escrevendo o elemento de volume em suas partes radiais e angulares,  $dV = r^2 dr d\Omega$ , onde  $d\Omega$  é o elemento de ângulo sólido, a equação (3.15) pode ser reescrita como

$$dP = \bar{n}_1 \bar{n}_2 [1 + \xi(r)] r_1^2 dr_1^2 d\Omega_1 r_2^2 dr_2^2 d\Omega_2. \quad (3.27)$$

Integrando ao longo da direção radial, ou seja, fazendo a projeção de  $dP$  na esfera celeste obtemos

$$\int dP = d\Omega_1 d\Omega_2 \int dr_1 r_1^2 dr_2 r_2^2 \bar{n}_1 \bar{n}_2 + d\Omega_1 d\Omega_2 \int dr_1 r_1^2 dr_2 r_2^2 \bar{n}_1 \bar{n}_2 \xi(r). \quad (3.28)$$

Comparando a equação acima com a definição de correlação angular dada na equação (3.25), e identificando  $dP_\omega = \int dP$ , encontramos as seguintes relações:

$$\mathcal{N} = \int dr r^2 \bar{n} \quad (3.29)$$

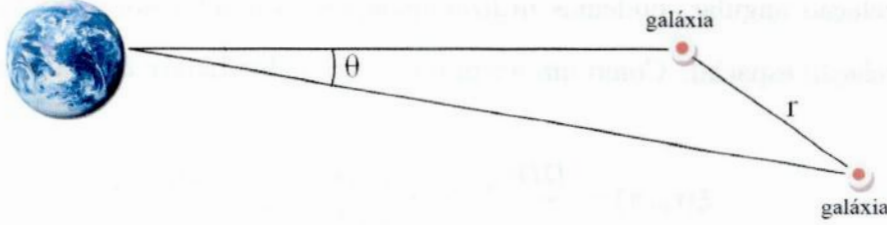
e a correlação angular está relacionada com a espacial via

$$\omega(\theta) = \frac{1}{\mathcal{N}^2} \int dr_1 dr_2 r_1^2 r_2^2 \bar{n}_1 \bar{n}_2 \xi(r). \quad (3.30)$$

Pode-se perceber que o termo multiplicativo é apenas uma normalização. Desta forma, normalizando e mudando de variáveis de distância para *redshift*, obtém-se a relação usual entre as correlações

$$\omega(\theta) = \int dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) \xi(r(z, \theta)), \quad (3.31)$$

onde  $\phi(z)$  é a função de seleção do levantamento, normalmente estimada com a distribuição de galáxias em função do *redshift*.



**Figura 3.5:** Esquemática da correlação angular.

Uma outra forma usual na literatura que relaciona a correlação espacial e a angular faz uso da aproximação de Limber (Limber, 1953; Simon, 2008):

$$\omega(\theta) = 2 \int_0^\infty f(\bar{r})^2 d\bar{r} \int_0^\infty \xi(r = \sqrt{\Delta r^2 + \bar{r}^2 \theta^2}) du \quad (3.32)$$

onde  $f(\bar{r})$  descreve a distribuição radial das galáxias que esta relacionada com a função de seleção via

$$f(\bar{r}) d\bar{r} = \phi(z) dz \quad (3.33)$$

onde  $z$  é o *redshift* correspondente à coordenada comóvel radial  $\bar{r}(z)$  e  $\Delta r$  é a diferença entre as distâncias comóveis das duas galáxias.

### 3.4.2 Função de Correlação Projetada

Em levantamentos com *redshifts* espectroscópicos os erros nas medidas são bem menores comparado com os erros dos *redshifts* fotométricos. Na verdade, os erros dos *redshifts* espectroscópicos são tão pequenos que são considerados desprezíveis. Por consequência, podemos estimar as distâncias das galáxias com precisão aceitável, utilizando as relações encontradas no capítulo 2 em levantamentos espectroscópicos. Neste caso, pode-se aplicar a função de correlação espacial diretamente. Entretanto, como mencionado anteriormente, as estimativas das distâncias sofrem distorções nas suas medidas causadas pelos movimentos peculiares das galáxias, especialmente aquelas em aglomerados.

Para contornar esse efeito, usualmente recorre-se à medida da função de correlação



nas suas projeções perpendicular ( $r_p$ ) e paralela à linha de visada ( $\pi$ ), construindo-se desta forma uma função de correlação anisotrópica (figura 3.6). Assim como a função de correlação angular, podemos utilizar qualquer estimador apresentado para a função de correlação espacial. Como um exemplo, o estimador Landy & Szalay fica da seguinte forma:

$$\hat{\xi}(r_p, \pi) = \frac{DD(r_p, \pi) - 2DR(r_p, \pi) + RR(r_p, \pi)}{RR(r_p, \pi)}. \quad (3.34)$$

Integrando a função de correlação anisotrópica  $\xi(r_p, \pi)$  ao longo da linha de visada  $\pi$  (Davis & Peebles, 1983) encontramos

$$w_p(r_p) = 2 \int_0^\infty \xi(r_p, \pi) d\pi = 2 \int_0^\infty \xi[(r_p^2 + \pi^2)^{1/2}] d\pi, \quad (3.35)$$

onde  $w_p(r_p)$  é a **função de correlação projetada de dois pontos**. Como a correlação projetada é definida como a integral da correlação  $\xi(r_p, \pi)$  ao longo da linha de visada ( $\pi$ ), ela será função apenas da distância transversal à linha de visada entre as galáxias ( $r_p$ ). Dessa forma, os efeitos dos movimentos peculiares ao longo da linha de visada, que introduzem erros nas determinações de distância, são eliminados.

Fazendo-se uma simples mudança de variável chega-se a uma relação mais usual para a correlação projetada

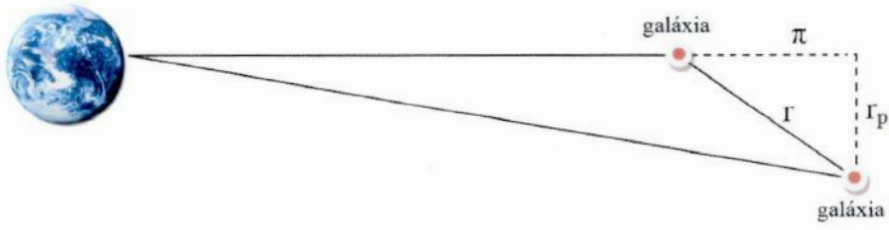
$$w_p(r_p) = 2 \int_{r_p}^\infty dr \frac{r\xi(r)}{\sqrt{r^2 - r_p^2}}. \quad (3.36)$$

Na prática, a correlação projetada é estimada em duas etapas. Na primeira estima-se a correlação espacial nas duas dimensões,  $r_p$  e  $\pi$ , utilizando os estimadores já mencionados acima e posteriormente utiliza-se a relação (3.35) e efetua-se a integral, por exemplo com a aproximação da regra do trapézio,

$$\hat{w}_p(r_p) = \sum_i \xi(r_p, \pi_i) \Delta\pi_i. \quad (3.37)$$

É interessante notar que em teoria a integral deveria se estender por todo o espaço, ou seja até  $\pi = \infty$ , mas na prática, como está implícito no estimador de  $w_p$  só efetuamos esta integral até um certo valor máximo  $\pi_{max}$ , para o qual o somatório já convergiu.





**Figura 3.6:** Esquematização da correlação projetada.

Normalmente, este valor tende a ficar entre  $40 \lesssim \pi_{max} \lesssim 120h^{-1}$  Mpc.

## Capítulo 4

# Função de Correlação Aplicada em Levantamentos de Galáxias

### 4.1 Função de Correlação Aproximada pela Lei de Potência

A função de correlação tem sido uma ferramenta importante para a caracterização da distribuição de galáxias, sendo utilizada desde os primeiros levantamentos já efetuados. Dentre os pioneiros neste tipo de análise podemos citar Totsuji & Kihara (1969), Peebles (1974a), Peebles (1974b) e Gott & Turner (1979). Todos os catálogos utilizados por estes autores possuíam apenas as ascensões retas, declinações e as magnitudes das galáxias. Por consequência fizeram estimativas para a aglomeração de galáxias utilizando a função de correlação angular. Estes autores perceberam em seus trabalhos que a função de correlação angular de galáxias era bem descrita por uma lei de potência,

$$\omega(\theta) = a\theta^\delta, \quad (4.1)$$

sendo  $a$  e  $\delta$  constantes. Mas como mostramos anteriormente, a correlação angular é apenas a projeção da correlação espacial. É de se esperar que se a correlação angular é descrita por uma lei de potência, a correlação espacial também deverá ser descrita por uma lei

deste tipo. Assumindo uma lei de potência para a correlação espacial

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} \quad (4.2)$$

e utilizando a aproximação de Limber, obtemos que a correlação espacial é também dada por uma lei de potência, como esperávamos, com os seus parâmetros dados por (Limber, 1953)

$$\delta = 1 - \gamma, \quad (4.3)$$

e

$$a = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma-1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})} r_0^\gamma \int dz \phi^2(z) \frac{H(z)}{c} d_c^\delta(z), \quad (4.4)$$

onde  $H(z)$  e  $d_c(z)$  foram introduzidos no capítulo 2 e  $\Gamma$  é a função gama.

Da mesma forma que a correlação angular assume uma lei de potência, o mesmo acontece para a correlação projetada. Ela está relacionada à correlação espacial de uma forma similar a correlação angular (Davis & Peebles, 1983):

$$w_p(r_p) = r_p^\delta r_0^{1-\delta} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(\delta/2)}{\Gamma[(1-\delta)/2]}, \quad (4.5)$$

Chamando

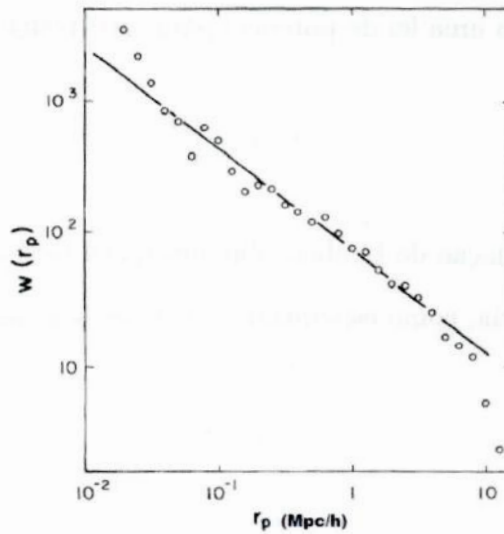
$$A = r_0^{1-\delta} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(\delta/2)}{\Gamma[(1-\delta)/2]}, \quad (4.6)$$

temos

$$w_p(r_p) = A r_p^\delta. \quad (4.7)$$

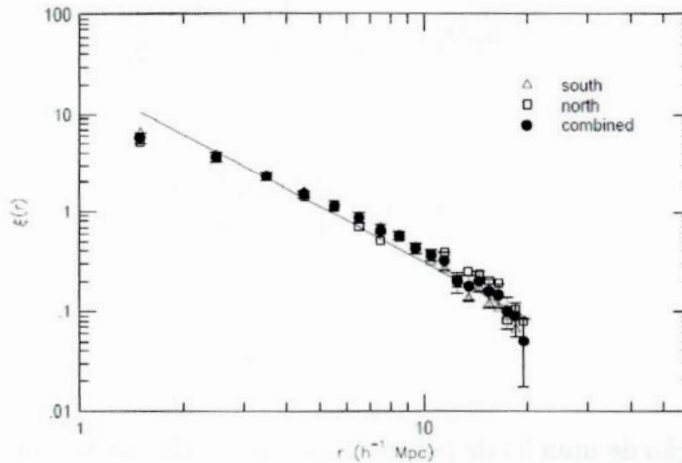
A aproximação de uma lei de potência para a correlação em galáxias foi confirmada em trabalhos posteriores já com informação de *redshift*. Por exemplo, Davis & Peebles (1983) aplicaram a função de correlação projetada nos dados do *Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics Redshift Survey* (CfA) como mostrado na figura 4.1. A amostra utilizada por eles continha 2400 galáxias com *redshifts* espectroscópicos.

Neste trabalho de Davis e Peebles, a lei de potência foi ajustada com  $1 - \delta = \gamma \simeq 1.8$ , valor esse que tornou-se um padrão em cosmologia observacional por vários anos.



**Figura 4.1:** Função de correlação projetada aplicada nos dados do CfA ajustada por uma lei de potência (Davis & Peebles, 1983).

Willmer, da Costa, & Pellegrini (1998) também confirmaram a adequação da aproximação de uma lei de potência para a função de correlação espacial em escalas menores que 10 Mpc/h. Os dados deste trabalho foram obtidos pela segunda versão do *Southern Sky Redshift Survey* (SSRS2), que contém 5512 galáxias em ambos os hemisférios galácticos.



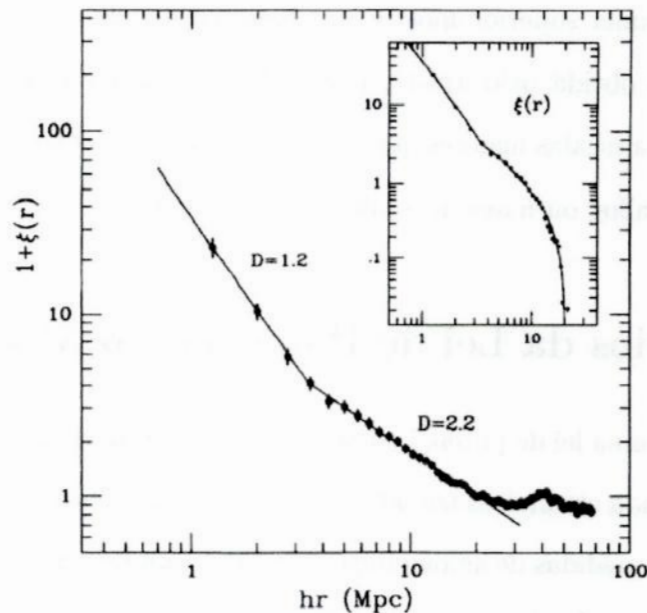
**Figura 4.2:** Função de correlação espacial ajustada por uma lei de potência obtida por Willmer, da Costa, & Pellegrini (1998). Os pontos em triângulos representam as galáxias do hemisfério sul galáctico da amostra do SSRS2. Os quadrados representam galáxias do hemisfério norte. E os círculos preenchidos são todas as galáxias de ambos os hemisférios galácticos do levantamento.

Porém, outros trabalhos notaram um afastamento dos dados na lei de potência para a aglomeração de galáxias. Já a partir dos anos 1970 trabalhos como Groth & Peebles (1977) utilizando os dados de posições na esfera celeste do *Lick Galaxy Catalog*. Eles



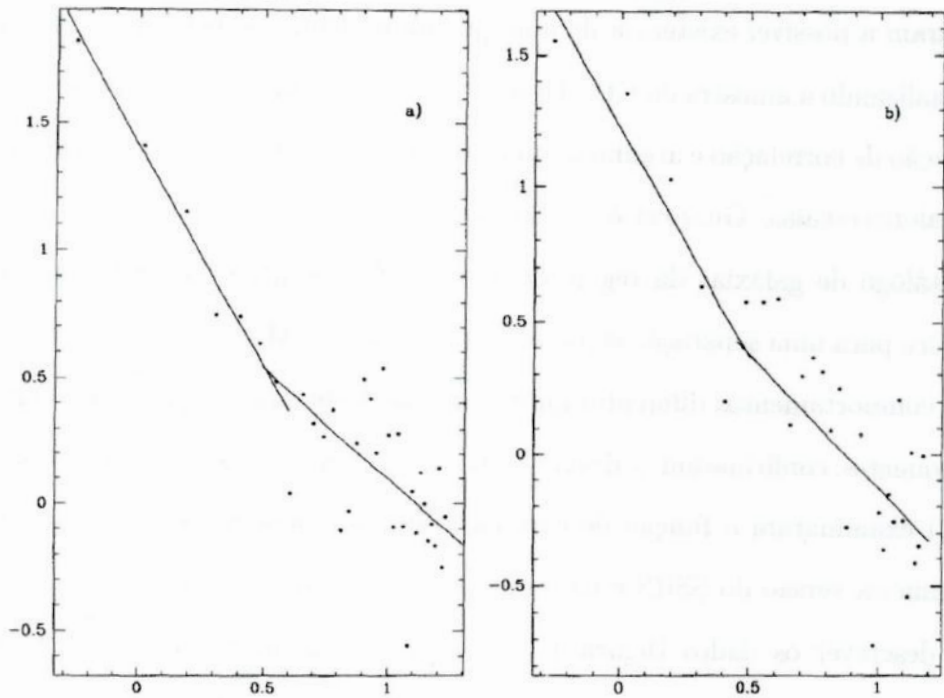
indicaram a possível existência de uma quebra da lei de potência por volta de 3 Mpc/h.

Analizando a amostra do CfA, Dekel & Aarseth (1984) também encontram uma quebra da função de correlação e argumentam em favor da existência de estruturas mais achatadas em maiores escalas. Guzzo et al. (1991) aplicaram a função de correlação em 1092 galáxias do catálogo de galáxias da região de *Perseus-Pisces* (PP). O desvio da lei de potência acontece para uma separação espacial da ordem de 3.5 Mpc/h. Eles notaram que a função tinha comportamentos diferentes antes e depois deste valor (figura 4.3). Outros trabalhos subsequentes confirmaram o desvio na lei de potência. Calzetti, Giavalisco, & Meiksin (1992) examinaram a função de correlação de dois pontos nos levantamentos do CfA e na primeira versão do SSRS e tiveram que assumir um modelo de duas leis de potências para descrever os dados (figura 4.4), com a quebra ocorrendo por volta de 3 Mpc/h. Baugh (1996) também percebeu que uma lei de potência simples não era o suficiente para descrever o comportamento da função de correlação obtida dos dados do *Automated Plate Measurement Survey* (APM Survey) onde é aparente o desvio da lei de potência para escalas maiores que 6 Mpc/h.



**Figura 4.3:** Correlação obtida por Guzzo et al. (1991) aplicada nos dados do levantamento PP. Gráfico maior: duas leis de potências nos intervalos de 1-3,5 Mpc/h e 4-20 Mpc/h para  $1 + \xi(r)$ . Gráfico menor: forma de  $\xi(r)$  reproduzida por uma curva apenas.

Utilizando os dados do 2dFGRS Hawkins et al. (2003) mediram a função de correlação para cerca de 220.000 galáxias com *redshifts* determinados, obtendo o resultado mostrado



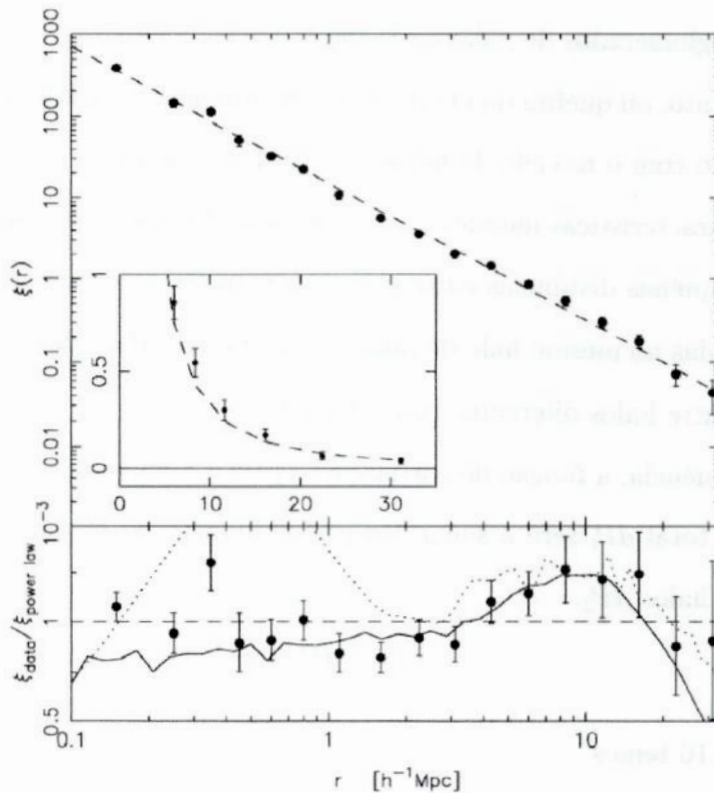
**Figura 4.4:**  $\log(1+\xi(r))$  versus  $\log(r(\text{Mpc}/h))$ , obtido por Calzetti, Giavalisco, & Meiksin (1992). Os dados são dos levantamentos do CfA (a) e do SSRS (b). Duas leis de potências são necessárias para descrever os dados.

na figura 4.5.

Embora o painel superior mostre um bom ajuste global de uma lei de potência, a razão da função obtida pelo ajuste, mostrada no painel inferior evidencia o excesso de aglomeração para escalas maiores que 4 Mpc/h e a inadequação da lei de potência, quando esse grau de detalhe, ou maiores escalas, são examinados.

## 4.2 Desvios da Lei de Potência e o Modelo de Halos

Como visto, uma lei de potência descreve bem o comportamento geral da correlação de galáxias e foi usada em muitos trabalhos e levantamentos feitos até meados dos anos 1980 e 1990, quando as medidas de aglomeração não possuíam boa estatística em grandes escalas. Entretanto, em estudos feitos nas décadas seguintes foi sendo verificado e confirmado um afastamento da lei de potência como uma descrição da função de correlação em escalas superiores a 4 Mpc/h. Levantamentos modernos de galáxias mais profundos e cobrindo áreas maiores como o 2dF e o SDSS não só confirmaram tal desvio mas mostraram que a lei de potência é insuficiente para descrever a distribuição de galáxias satisfatoriamente.



**Figura 4.5:** Função de correlação espacial obtida por Hawkins et al. (2003) utilizando o 2dF Galaxy Redshift Survey. No painel superior é mostrada a função  $\xi(r)$  versus  $\log(r \text{ [Mpc/h]})$  (e no enxerto versus  $r$ ). O ajuste de lei de potência é mostrado em linha tracejada. No painel inferior é mostrada a razão de  $\xi(r)$  pelo ajuste obtido. A curva contínua é o ajuste obtido pelo APM Survey e a curva pontilhada é a correlação medida na simulação Hubble Volume.

O modelo que melhor representa a correlação de galáxias é o chamado **modelo de halos** (*halo model*) (Peacock & Smith, 2000), que é uma poderosa ferramenta para descrever a distribuição de galáxias e matéria escura fria (Abbas et al., 2010). Este modelo tem origem no modelo hierárquico de formação de estruturas e assume que as galáxias, aglomerados de galáxias se formam em condensações de matéria escura fria chamadas de halos (White & Rees, 1978). O conceito de halos de matéria escura fria tem se mostrado de importância fundamental para a compreensão dos mecanismos de formação e evolução de galáxias e aglomerados de galáxias (Cole & Lacey, 1996).

O afastamento, ou quebra da curva, na lei de potência mencionado anteriormente pode ser interpretado com o modelo de halos de uma forma natural: ele é uma transição entre duas escalas características inerentes a este modelo. Como as galáxias são distribuídas em halos, para pequenas distâncias entre elas, é dominante a correlação entre os objetos que estão distribuídas no mesmo halo de matéria escura fria. Para distâncias maiores, domina a correlação entre halos diferentes (ver figura 4.6).

Por consequência, a função de correlação espacial é dividida em duas contribuições. A probabilidade total  $dP_t$  será a soma das probabilidades do termo de um halo  $dP_1$  com o termo de dois halos  $dP_2$ ,

$$dP_t = dP_1 + dP_2 . \quad (4.8)$$

Da equação 3.16 temos

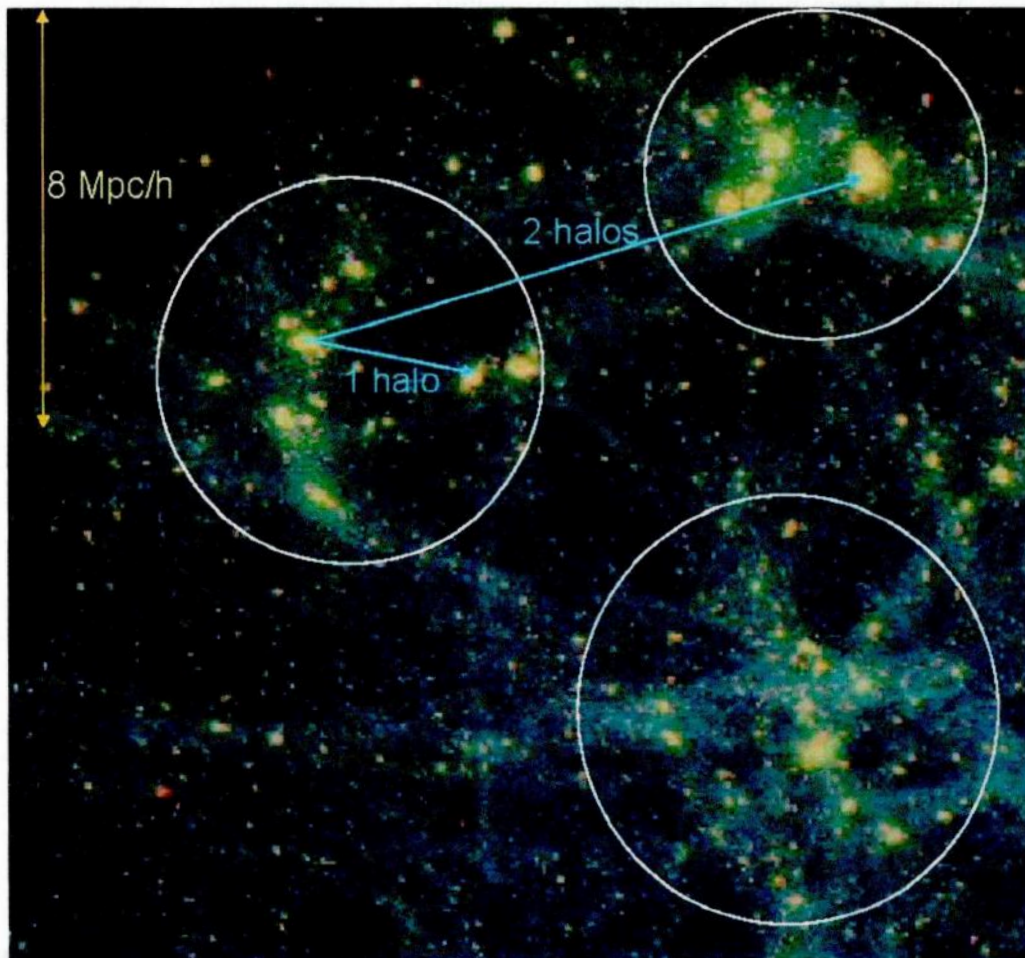
$$1 + \xi(r) = [1 + \xi_1(r)] + [1 + \xi_2(r)] , \quad (4.9)$$

onde  $\xi_1(r)$  é o termo de apenas um halo e  $\xi_2(r)$  o termo de dois halos. Por esta equação, o número total de pares de galáxias  $\propto 1 + \xi$  é a soma do número de pares de halos individuais  $\propto 1 + \xi_1$  com o número de pares de halos diferentes  $\propto 1 + \xi_2$ .

Pela relação entre a correlação angular e a correlação espacial dada pela equação (3.31) obtém-se a correlação angular do modelo de halos

$$\omega(\theta) = \int dz_1 dz_2 \phi(z_1) \phi(z_2) [1 + \xi_1(r) + \xi_2(r)] . \quad (4.10)$$



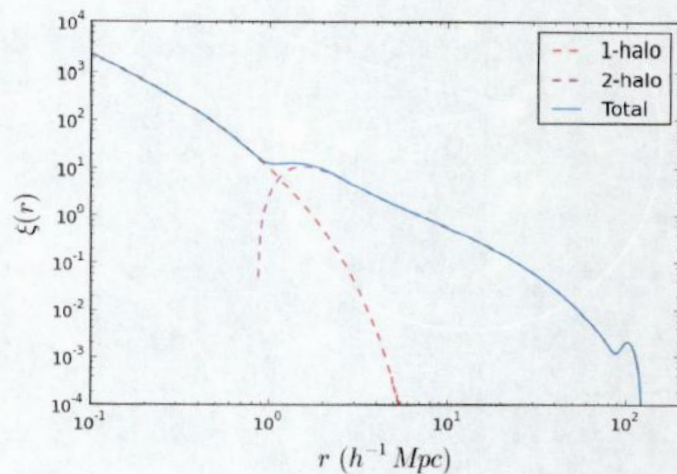


**Figura 4.6:** Esquema do modelo de halos apresentado sobre uma simulação. Para pequenas distâncias a correlação entre galáxias é dominada por objetos dentro de um só halo. Para distâncias maiores a correlação passa a ser dominada por objetos situados em halos diferentes.

Por consequência, a correlação angular é esquematicamente representada da mesma forma que a correlação espacial,

$$\omega(\theta) = [1 + \omega_1(\theta)] + \omega_2(\theta) . \quad (4.11)$$

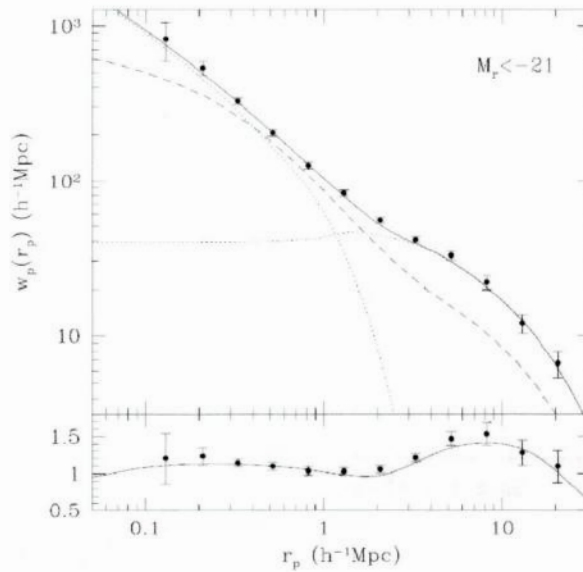
Na figura 4.7 mostramos a correlação espacial de galáxias prevista pelo modelo de halos. Nesta figura pode-se perceber claramente a transição entre o regime em que apenas galáxias dentro do mesmo halo contribuem para a correlação (1-halo) e o segundo regime (2-halo) onde apenas galáxias em halos distintos contribuem para a correlação espacial. As expressões de  $\xi_1$  e  $\xi_2$  podem ser encontradas no artigo Blake et al. (2008).



**Figura 4.7:** Comportamento previsto pelo modelo de halos na função de correlação espacial. O domínio de 1 halo vai até aproximadamente 1 Mpc/h.

Um exemplo de trabalho que já inclui o modelo de halos na correlação de galáxias é o de Zehavi et al. (2004)(figura 4.8) aplicado no SDSS. Note-se que no trabalho destes autores entra um ingrediente fundamental para o modelo de halos que é o *halo occupation distribution* (HOD). O HOD descreve a distribuição de probabilidade para um número de galáxias ocupar um halo de matéria escura em função da massa do halo. O HOD não será aqui detalhado pois não é o objetivo deste trabalho. Os dados utilizados por Zehavi et al. (2004) se referem a uma amostra limitada em magnitude com 118.000 galáxias e uma amostra limitada em volume com 22.000 galáxias com magnitudes absolutas  $M_r < -21$ .

Blake et al. (2008) também obtiveram a função de correlação angular para cerca de 380.000 galáxias luminosas vermelhas do SDSS, no intervalo de *redshifts*  $0.45 < z < 0.65$ .

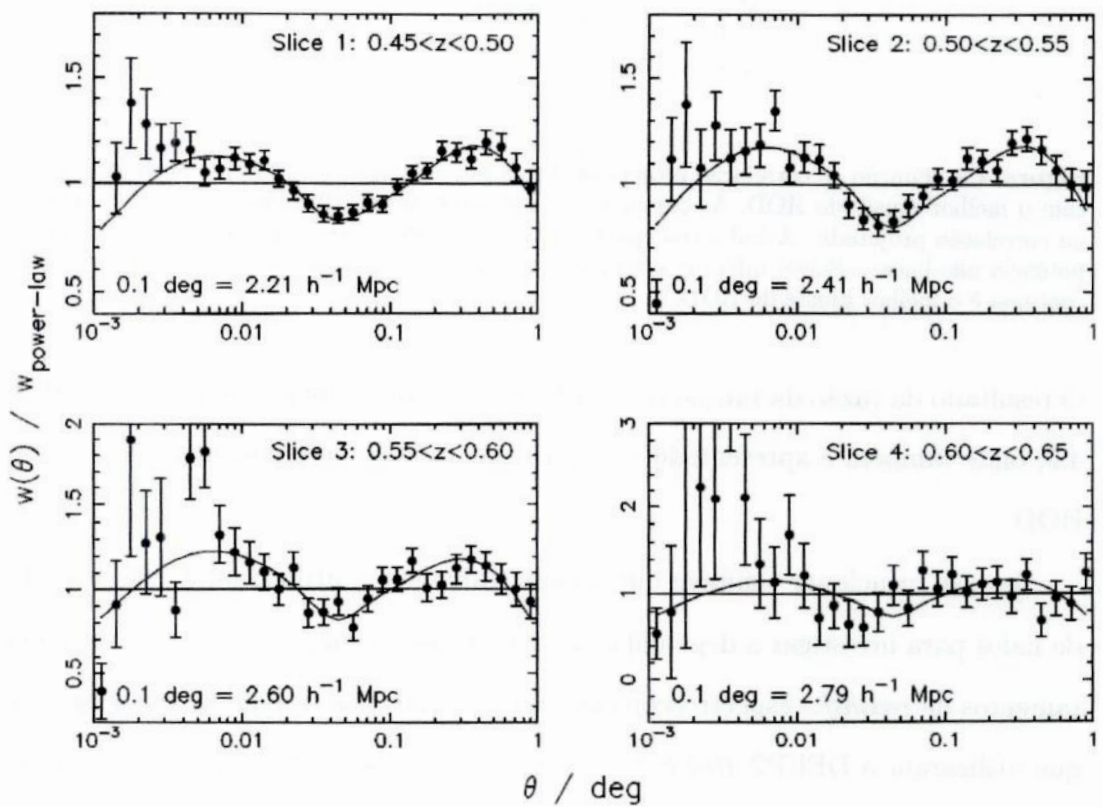


**Figura 4.8:** Função de correlação projetada obtida por Zehavi et al. (2004). Painel superior: correlação com o melhor ajuste do HOD. As curvas pontilhadas são as contribuições do termo de 1-halo e 2-halos na correlação projetada. A linha tracejada mostra a função de correlação projetada de um espectro de potência não-linear. Painel inferior: correlação dividida pelo melhor ajuste de lei de potência. A curva contínua é o melhor ajuste do HOD.

O resultado da razão da função pelo melhor ajuste de lei de potência é mostrado na figura 4.9, onde também é apresentado um ajuste do modelo de halos, utilizando o conceito de HOD.

Deve-se mencionar também que alguns trabalhos já utilizaram a aplicação do modelo de halos para investigar a dependência da aglutinação com outras propriedades em levantamentos de *redshifts* espectroscópicos. Este é o caso dos trabalhos de Zheng et al. (2007) que utilizaram o DEEP2 *Redshift Survey*, Abbas et al. (2010) que utilizaram o VIMOS-VLT Deep Survey (VVDS) para analisar a dependência com a luminosidade e de la Torre et al. (2010) que exploraram a dependência com o ambiente no levantamento zCOSMOS.





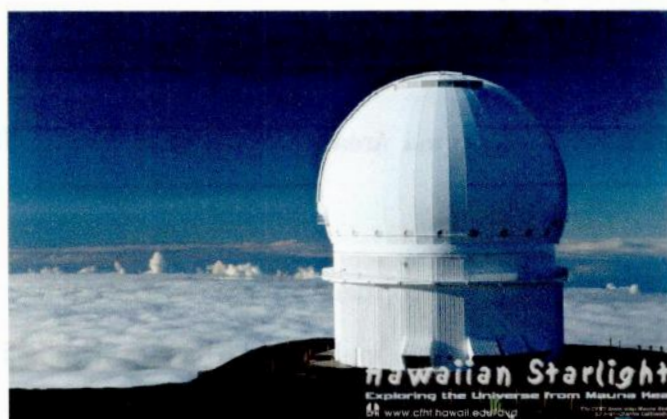
**Figura 4.9:** Função de correlação para galáxias luminosas vermelhas do SDSS dividida pelo melhor ajuste de lei de potência obtida por Blake et al. (2008) em quatro diferentes intervalos de *redshift* conforme indicado em cada painel. A linha contínua é o ajuste de modelo de halos.



## Capítulo 5

### A Amostra CFHTLS

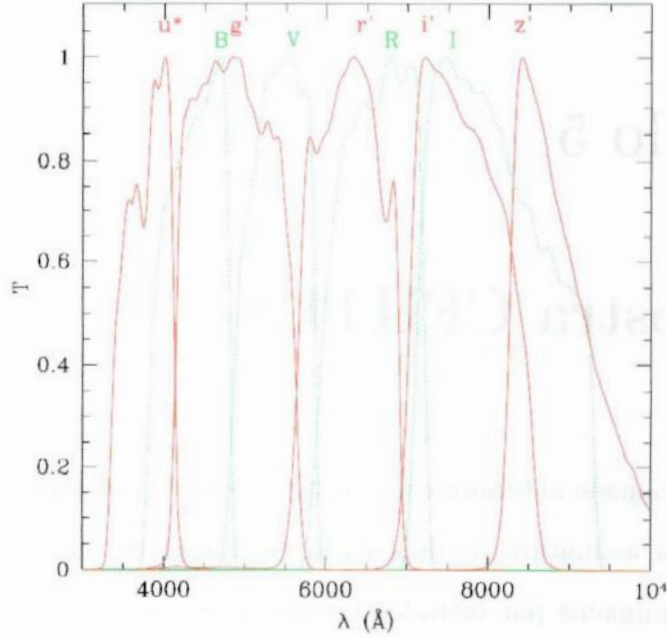
Como mencionado anteriormente, o objetivo deste trabalho é examinar a possibilidade de detecção da assinatura de dois halos em amostras fundas, ou seja,  $z \approx 1.5$ , com *redshifts* determinados por métodos fotométricos, assim como será o DES. Escolhemos para este tipo de análise o *Canada-France Hawaii Telescope Legacy Survey* (CFHTLS), <http://www.cfht.hawaii.edu/Science/CFHLS/cfhtlspublications.html>). O telescópio está localizado no topo do Mauna Kea, um vulcão extinto localizado no Havaí (EUA) e cuja altura é de 4.200 metros em relação ao nível do mar (figura 5.1).



**Figura 5.1:** Fotografia da cúpula do CFHT no topo do Mauna Kea. Foto obtida no site oficial do CFHTLS.

O telescópio CFHT possui um espelho de 3,6 metros e o instrumento detector deste levantamento na faixa do visível e infravermelho do espectro eletromagnético foi a câmera *MegaCam*, que possui um total de 36 CCDs com  $2.048 \times 4.612$  pixels cada um e compreende um campo de visão de 1 grau quadrado com resolução de 0,186 segundo de arco

por pixel. As observações foram feitas em 5 bandas espectrais, no intervalo de comprimento de onda  $3.500 \text{ \AA} < \lambda < 9.400 \text{ \AA}$ , nos filtros  $u^*, g', r', i', z'$  (figura 5.2).



**Figura 5.2:** Curvas de transmissão do CFHT normalizadas (Ilbert et al., 2006). As linhas contínuas são dos filtros correspondentes à câmera *MegaCam* e as linhas pontilhadas são referentes à câmera *CFH12K*.

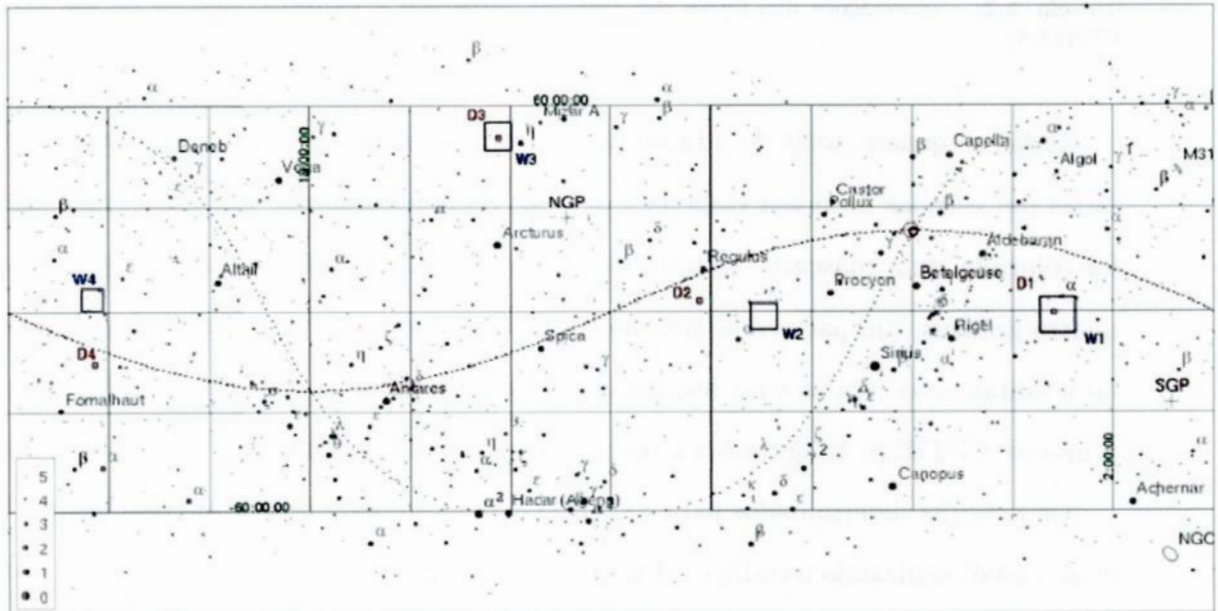
O CFHTLS é composto de três levantamentos, cada um com propriedades distintas. Abaixo segue algumas propriedades de cada levantamento. Informações mais detalhadas podem ser encontradas no *site* oficial do CFHTLS:

- **Very Wide:** abrange uma área de aproximadamente 400 graus quadrados, utilizando as bandas  $g', r'$  e  $i'$ .
- **Wide:** sua área é um pouco menor que a do *Very Wide* abrangendo cerca de 170 graus quadrados. Mas possui mais filtros (bandas  $u^*, g', r', i', z'$ ).
- **Deep:** formado por quatro campos (D1, D2, D3 e D4), com 1 grau quadrado cada um. As observações foram feitas nas bandas  $u^*, g', r', i', z'$ .

Os dados utilizados neste trabalho são os do levantamento *Deep*. As propriedades dos campos podem ser encontradas na tabela 5.1 e suas localizações são mostradas na figura 5.3.

Campo	RA(J2000)	DEC(J2000)	u*	g'	r'	i'	z'	Área Ef.
D1	02:25:59	-04:29:40	26.5	26.4	26.1	25.9	25.0	0.79
D2	10:00:28	+02:12:30	26.1	26.2	26.0	25.7	24.9	0.80
D3	14:19:27	+52:40:56	25.9	26.6	26.4	26.2	25.1	0.83
D4	22:15:31	-17:43:56	26.5	26.3	26.4	26.0	25.0	0.77

**Tabela 5.1:** Informações dos campos do levantamento *Deep* do CFHTLS (Ilbert et al., 2006). Magnitudes limites para cada banda se encontram no sistema AB e se referem à completeza de 50%. Asceção reta em unidades de hora, minuto e segundo e declinação em unidades de grau, minuto e segundo de arco. As áreas efetivas correspondem à área total de cada levantamento subtraídas de máscaras que encobrem objetos brilhantes (estrelas) e áreas onde ocorrem transições de CCD (veja figura 5.4).



**Figura 5.3:** Localização dos levantamentos *Wide* (W1, W2, W3 e W4) e *Deep* (D1, D2, D3 e D4) do CFHTLS (<http://terapix.iap.fr/cplt/oldSite/Descart/cfhtlscshearprogtarget.html>).



É importante mencionar que a área D1 do levantamento *Deep* possui observações fotométricas e espectroscópicas do VIMOS VLT *Deep Survey* (VVDS). Neste outro levantamento, a fotometria foi obtida pela câmera CFH12K, operando também no CFHT, nas bandas B,V,R,I (figura 5.2), cobrindo toda a região do campo D1 com suas respectivas magnitudes de completeza (50%) 26.5, 26.2, 25.9 e 25.0 (sistema AB). Já a espectroscopia foi obtida pelo espectrógrafo VIMOS no VLT (*Very Large Telescope*, localizado no deserto do Atacama). As características dos filtros do *MegaCam* e do CFH12K podem ser encontrados na tabela 5.2.

<b>Banda</b>	$\lambda_{central}(\text{\AA})$	<b>Largura</b> ( $\text{\AA}$ )
<b>u*</b>	3743	758
<b>g'</b>	4872	1455
<b>r'</b>	6282	1219
<b>i'</b>	7776	1508
<b>z'</b>	11702	6868
<b>B</b>	4312	990
<b>V</b>	5374	974
<b>R</b>	6581	1251
<b>I</b>	8223	2164

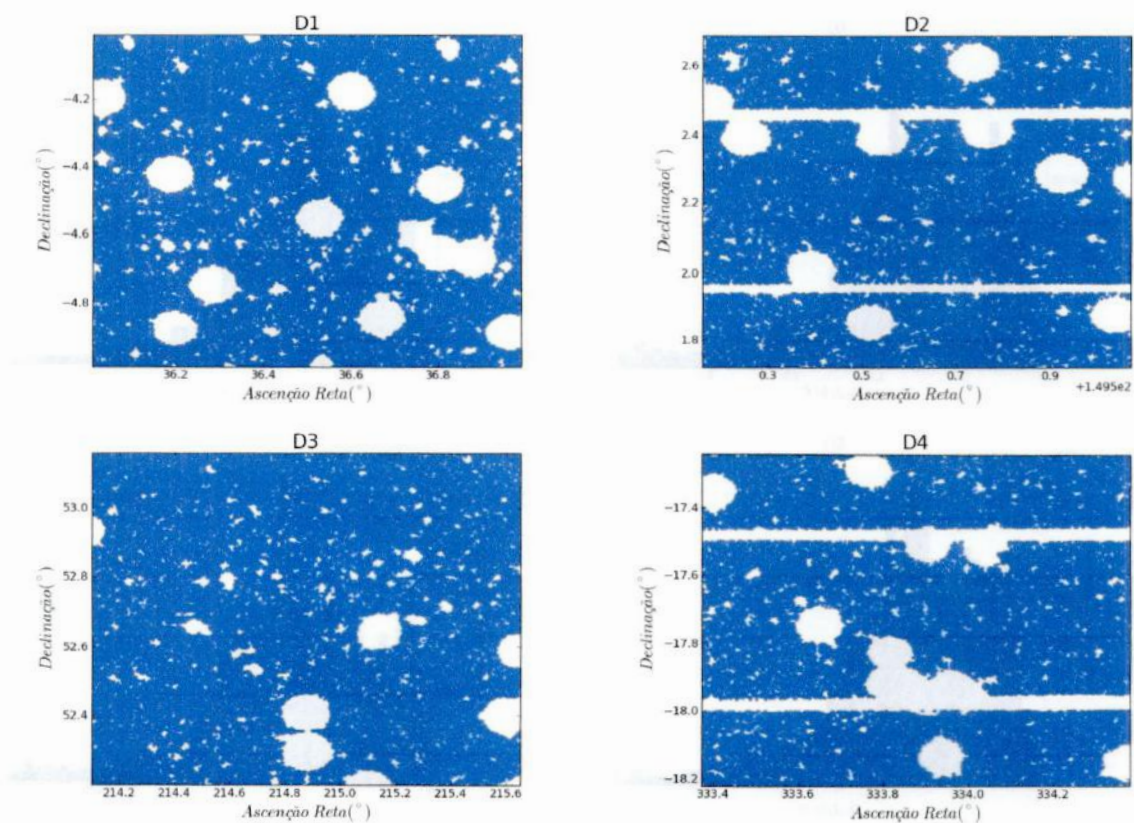
**Tabela 5.2:** Informações dos filtros das câmeras *MegaCam* e CFH12K (obtidas no site oficial do CFHTLS).

Todas as quatro áreas do levantamento *Deep* possuem algumas pequenas regiões afetadas por estrelas da nossa Galáxia e defeitos do imageamento. Em cada região afetada foi colocada uma máscara, eliminando os objetos nelas situados. A figura 5.4 mostra quatro gráficos, um para cada área do *Deep*, em ascensão reta e declinação das galáxias do levantamento com as suas respectivas máscaras. Essas máscaras foram definidas pelo grupo do CFHTLS. E figura 5.5 mostra a contagem de galáxias por *redshift* fotométrico.

Os *redshifts* determinados para o CFHTLS são fotométricos e foram obtidos por Ilbert et al. (2006) utilizando o código LePhare desenvolvido por S. Arnouts e O. Ilbert. Eles são resultado de um ajuste das cores previstas por *templates* (padrões) de distribuição espectral de energia representativas de diferentes classes de galáxias, em diferentes distâncias (deslocadas para o vermelho), com as cores observadas de cada objeto.

O melhor ajuste da *template*, e *redshift* associado, indica a mais provável classe e *redshift* do objeto.





**Figura 5.4:** Posições de ascensão reta e declinação das galáxias do levantamento *Deep* com suas respectivas máscaras. Além das máscaras que encobrem as estrelas, as áreas D2 e D4 possuem máscaras de transição entre CCDs.

Mais detalhes podem ser encontrados em Ilbert et al. (2006). Essas determinações foram feitas com aplicação de uma técnica de melhoria de resultados baseada num conjunto de treinamento, proveniente do levantamento de *redshifts* espectroscópicos VVDS. O erro na determinação dos *redshifts* fotométricos assim obtidos é  $\epsilon_z = 0.029(1 + z)$ . O número total de objetos com *redshifts* fotométricos medidos é de 522.268 até a magnitude limite  $i=25$ . A figura 5.6 mostra uma comparação dos *redshifts* fotométricos obtidos através deste processo com os *redshifts* espectroscópicos do levantamento VVDS, evidenciando o bom acordo.

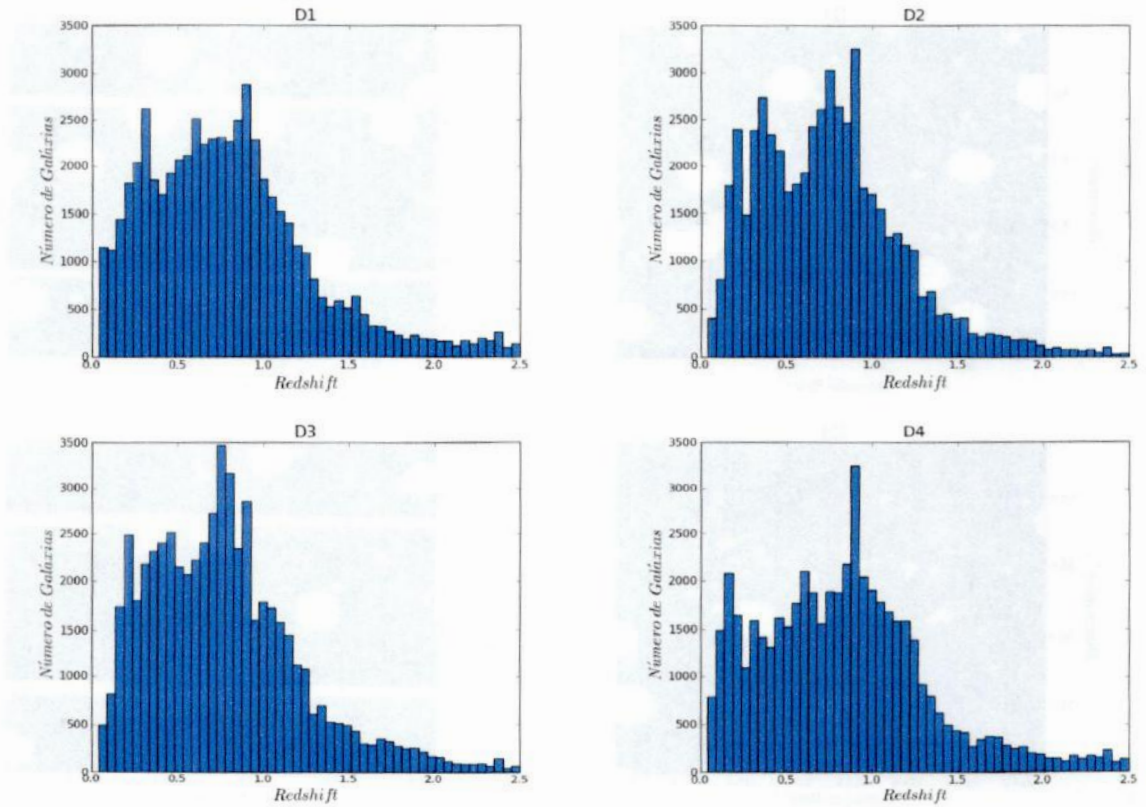


Figura 5.5: Contagem de galáxias por *redshift* fotométrico do Deep.

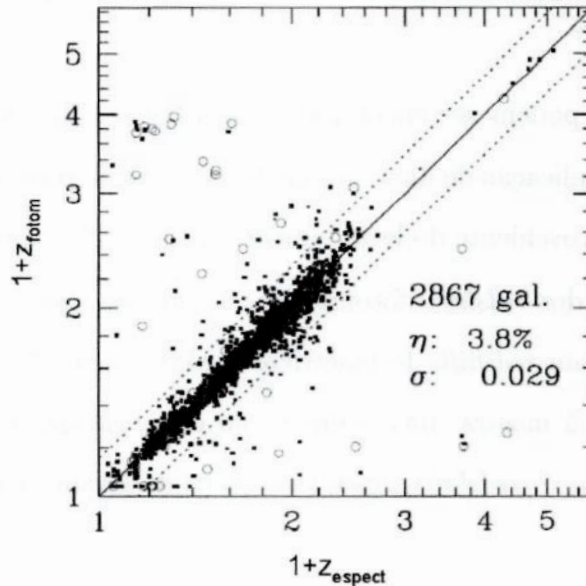


Figura 5.6: Comparação dos *redshifts* fotométricos obtidos por Ilbert et al. (2006) para o CFTHLS com os valores espectroscópicos obtidos para os mesmos objetos no levantamento VVDS.  $\sigma$  é a dispersão das medidas e as linhas tracejadas se referem a  $z_{fot} = \pm 0.15(1+z_{espec})$ . O valor de  $\eta$  representa a percentagem de galáxias com erros excepcionalmente grandes, ou seja, abaixo e acima dessas linhas (Ilbert et al., 2006).

## Capítulo 6

# A Função de Correlação Angular e o Modelo de Halos no CFHTLS

A função de correlação utilizada para a análise dos dados do levantamento *Deep* do CFHTLS foi a função de correlação angular e o estimador usado neste trabalho foi o proposto por Landy & Szalay (1993). Da equação 3.26,

$$\hat{\omega}(\theta) = \frac{DD(\theta) - 2DR(\theta) + RR(\theta)}{RR(\theta)}$$

A análise foi realizada em quatro intervalos de *redshift*:  $0.2 \leq z \leq 0.5$ ,  $0.5 \leq z \leq 0.8$ ,  $0.8 \leq z \leq 1.1$  e  $1.1 \leq z \leq 1.3$ . Para cada intervalo foi estimada a função de correlação angular com 10 bins logarítmicos no intervalo  $0.001^\circ \leq \theta \leq 0.1^\circ$ . Para tal análise, foi desenvolvido um programa que possui algumas rotinas escritas nas linguagens de programação Fortran e Python.

Primeiramente, o programa gera quatro catálogos, um para cada área do *Deep*, com pontos aleatórios, onde cada ponto possui coordenadas de ascensão reta e declinação, sem a necessidade de fornecer um valor de *redshift*, pois só estamos interessados na aglomeração angular do levantamento. A geração do catálogo artificial segue a mesma geometria que as máscaras do levantamento, conforme mostrado na figura 5.4, descartando as áreas indesejadas. No passo seguinte são fornecidos ao código os catálogos com as informações de ascensão reta, declinação, *redshift* e magnitude na banda  $i'$  ( $m_i$ ) das galáxias. É



verificado em que intervalo de *redshift* a galáxia se encontra e apenas as galáxias com  $m_i \leq 24$ , o limite de magnitude considerado, passam na seleção. Para este limite de magnitude a amostra é completa em 90%. Em seguida, é calculada a separação angular entre os objetos (galáxia-galáxia, aleatório-aleatório, galáxia-aleatório). Logo após é verificado em qual *bin* se encaixa cada separação angular calculada. São contados quantos pares *DD*, *DR* e *RR* contém cada *bin* e usando a equação (3.26), é estimada a correlação angular para cada *bin* em cada intervalo de *redshift*.

## 6.1 Análise do Erro na Correlação Angular Medida

A estimativa de erros para funções de correlação em distribuições de galáxias é tão importante quanto a sua própria medida, existindo vários estudos sobre esse tema (por exemplo Norberg et al., 2009). Na literatura existem várias formas de estimar a variância da correlação. O método inicialmente aplicado nos primeiros levantamentos de galáxias e que perdurou por vários anos é o denominado erro de Poisson. Este método é muito empregado em levantamentos com poucas galáxias, pois para sua validade é necessário assumir que o levantamento segue uma distribuição de Poisson. O erro de Poisson é dado por (Peebles, 1980)

$$\sigma_p(\theta) = \frac{1 + \omega(\theta)}{\sqrt{DD}}. \quad (6.1)$$

Note-se que essa estimativa de erro só considera como fonte de erro para a correlação angular a densidade de galáxias do levantamento, entretanto não existe somente esta contribuição.

Além do erro de Poisson, a outra fonte erro na medição da correlação angular é devido ao tamanho do levantamento a ser analisado, isto é, quanto maior a área do levantamento menor será a sua contribuição para o erro. Esta fonte de erro é usualmente denominada de **variância cósmica**. Desta forma, é esperado que o erro de Poisson deve ser um bom estimador da variância da correlação angular para pequenas escalas, entretanto quando está sendo sondado escalas da ordem do próprio levantamento esta metodologia deve



subestimar esses erros.

Dentre as várias metodologias para estimativa de erros, a empregada neste trabalho foi o método denominado de *bootstrap*. Para cada área do *Deep*, sorteamos cada galáxia aleatoriamente, com um processo onde cada uma tenha 50% de chance de ser escolhida. As galáxias escolhidas são guardadas em uma outra amostra a qual chamamos de amostra *bootstrap*. A princípio, o número de galáxias na amostra *bootstrap* é menor que a da amostra original. Entretanto, o processo de sorteio se repete até que o número de objetos da amostra *bootstrap* seja igual ao da amostra original de galáxias. Desse modo, a amostra *bootstrap* terá o mesmo número de galáxias que a original, mas não distribuídos da mesma maneira, pois no processo de sorteio, uma mesma galáxia pode ser sorteada várias vezes. Seja  $M$  o número de amostras *bootstrap* que se queira obter. O erro *bootstrap*  $\sigma_\omega(\theta)$  é estimado da seguinte forma,

$$\sigma_\omega(\theta) = \sqrt{\sum_{i=1}^M \frac{[\omega_i^{BS}(\theta) - \bar{\omega}(\theta)]^2}{M-1}}, \quad (6.2)$$

onde  $\omega_i^{BS}(\theta)$  é a função de correlação angular estimada para a amostra *bootstrap* rotulada de  $i$  e

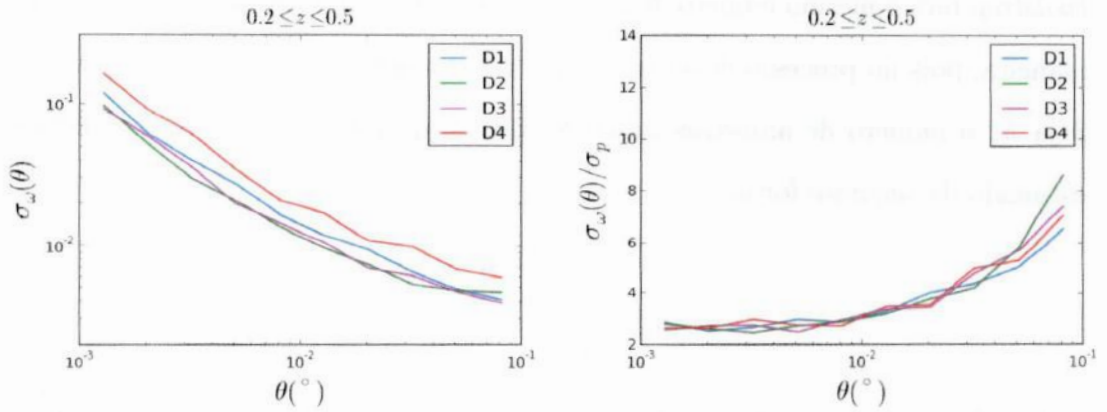
$$\bar{\omega}(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \omega_i^{BS}(\theta). \quad (6.3)$$

Neste estudo, escolhemos o número de amostras *bootstrap*  $M = 100$ .

É interessante notar que como o erro depende fortemente da densidade de galáxias e da área do levantamento, ele deverá ser diferente em cada um dos campos analisados, onde esperamos que o campo com menos galáxias medidas terá o maior erro.

No gráfico da esquerda da figura 6.1 comparamos o erro *bootstrap* dos 4 campos para a faixa de redshift  $0.2 \leq z \leq 0.5$ . Por esse gráfico concluímos que o campo D4 terá uma menor contribuição na análise para efetuar o melhor ajuste dos parâmetros da correlação angular, ou seja possui o maior erro na medida. Esta diferença é devida à menor quantidade de galáxias do campo D4 com relação aos outros três campos. De fato, o campo D4 tem 8.899 galaxias para essa faixa de *redshift* enquanto os outros três campos tem da ordem de  $\sim 13000$  galáxias.

No gráfico à direita da figura 6.1 comparamos os erros *bootstrap* dos quatro campos para essa mesma faixa de *redshift* com o seus respectivos erros estimados pelo erro de Poisson, dado pela equação (6.1). Embora para pequenas escalas o  $\sigma_\omega > 2\sigma_p$  mesmo assim o erro de Poisson em pequenas escalas é uma estimativa razoável, pois a quantidade de pares é muito pequena. Entretanto quando são consideradas escalas cada vez maiores, o erro *bootstrap* tem um valor até 6 vezes maior. Este fato está indicando que para escalas  $\theta \gtrsim 0.1^\circ$  o fator dominante do erro é o efeito da variância cósmica devido a borda do levantamento e não à quantidade de galáxias da amostra.



**Figura 6.1:** No gráfico a esquerda fizemos uma comparação do erro de *bootstrap* de cada campo do levantamento *Deep* na faixa de *redshift*  $0.2 \leq z \leq 0.5$ . No gráfico a direita mostramos a comparação entre o erro *bootstrap* com o erro de Poisson dos quatro campos do *Deep* na mesma faixa *redshift*. Os outros intervalos de *redshift* possuem comportamentos similares a esta faixa de *redshift* mostrada.

## 6.2 Resultados e Conclusões

O levantamento *Deep* do CFHTLS possui 4 áreas distintas bem separadas no céu (veja figura 5.3). Após obtidas as correlações angulares para cada um dos campos e os seus respectivos erros, é necessário combinar essas quatro medidas, que na prática são independentes. Neste estudo efetuamos a combinação das medidas das correlações angulares com o método de variância mínima (White et al., 2011), ou seja, a correlação angular dos quatro campos  $\omega_t(\theta)$  é dada por

$$\omega_t(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\omega_i(\theta)}{\sigma_i^2(\theta)}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}, \quad (6.4)$$

onde  $\sigma_i$  é o erro da correlação angular calculado na equação (6.2). O erro na medida dos quatro campos,  $\sigma_t$ , utilizando o método de variância mínima, é dado por

$$\frac{1}{\sigma_t^2(\theta)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2(\theta)} . \quad (6.5)$$

Com as medidas das correlações angulares e seus erros, utilizando o método descrito acima, ajustamos uma lei de potência como modelo primário para as medidas. Da equação 4.1,

$$\omega(\theta) = a\theta^{1-\gamma} .$$

Para encontrarmos o melhor ajuste da amplitude  $a$  e da potência  $\gamma$  foi aplicado o método  $\chi^2$ , construído da maneira usual

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{Nbin} \frac{[\omega(\theta_i) - \omega_t(\theta_i)]^2}{\sigma_t^2(\theta_i)} , \quad (6.6)$$

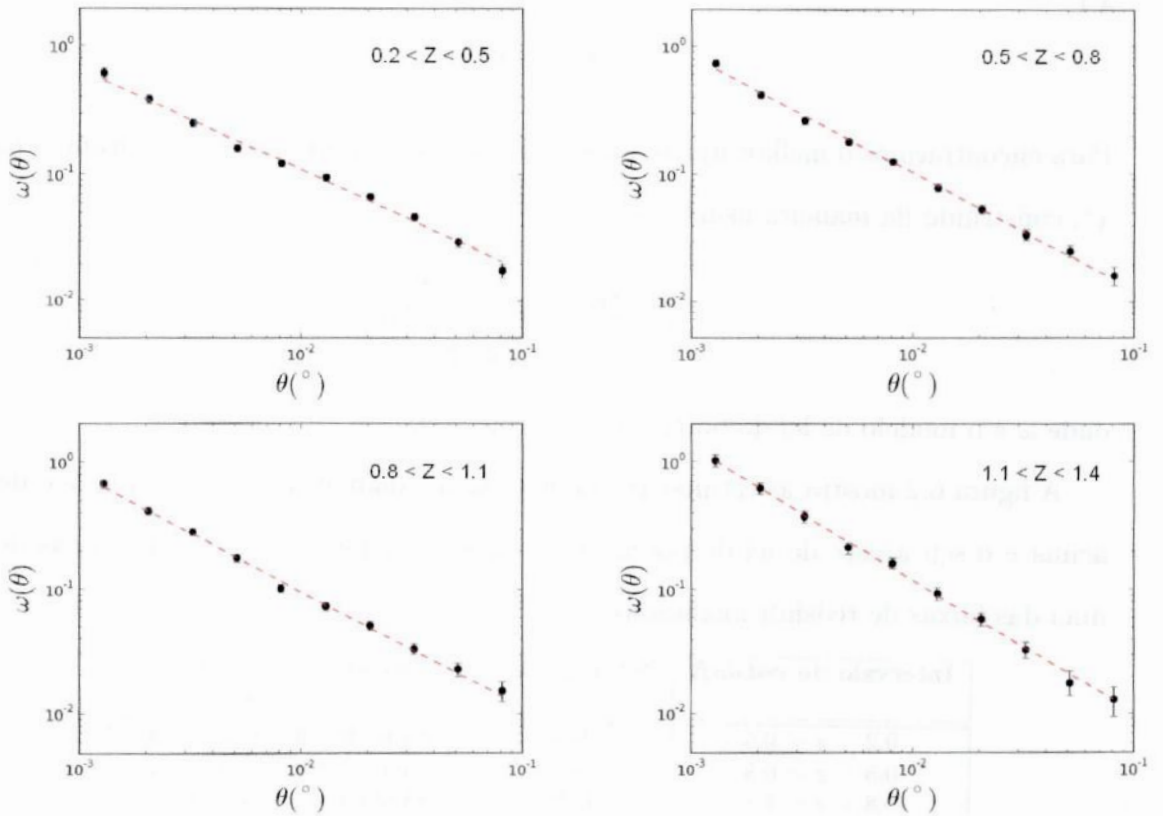
onde  $\omega$  é o modelo de lei de potência a ser ajustado.

A figura 6.2 mostra as estimativas da correlação angular utilizando o método descrito acima e o seu ajuste de lei de potência. A tabela 6.1 mostra as características de cada uma das faixas de redshift analisadas.

Intervalo de <i>redshift</i>	Nº de galáxias ( <i>graus</i> <sup>-2</sup> )	$a \times 10^{-2}$	$\gamma = 1 - \delta$ ( <i>graus</i> <sup>-<math>\delta</math></sup> )	$\chi^2$
0.2 < z < 0.5	48845	0.290±0.029	1.78±0.02	11.7
0.5 < z < 0.8	76626	0.160±0.020	1.91±0.02	7.0
0.8 < z < 1.1	62366	0.130±0.017	1.93±0.02	5.5
1.1 < z < 1.4	29053	0.091±0.016	2.05±0.04	3.1

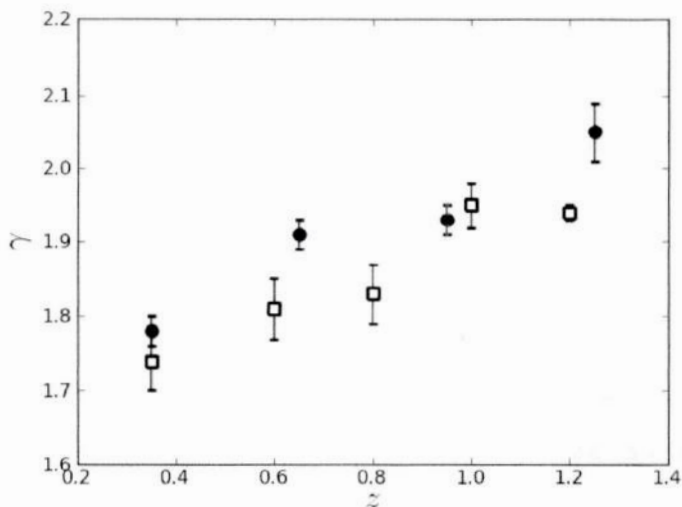
**Tabela 6.1:** Parâmetros do ajuste da lei de potência da correlação angular dos quatro intervalos de *redshifts*. Coluna 2 é a densidade superficial de galáxias projetadas na esfera celeste em cada intervalo de *redshift*. Coluna 3 é o número de galáxias para cada intervalo. Colunas 4 e 5 são os parâmetros do ajuste da lei de potência  $\omega(\theta) = a\theta^\delta$ , onde  $\theta$  é dado em *graus*. Coluna 6 mostra a estatística da  $\chi^2$  com oito *graus* de liberdade.

Na figura 6.3 comparamos os resultados encontrados neste trabalho para o parâmetro  $\gamma$  com os resultados encontrados por McCracken et al. (2008) para o mesmo levantamento, ou seja, o CFHTLS *Deep*. Este gráfico mostra uma boa concordância entre as duas medidas de  $\gamma$ . Entretanto, pode-se notar pequenas diferenças entre as medidas, por exemplo em *redshifts*  $z \sim 0.7$  e  $z \sim 1.2$ . Estas pequenas discrepâncias podem ser devidas às diferentes



**Figura 6.2:** Função de correlação angular medida para os quatro campos do levantamento *Deep* em quatro intervalos de *redshifts* com o melhor ajuste de lei de potência dado pela linha tracejada.





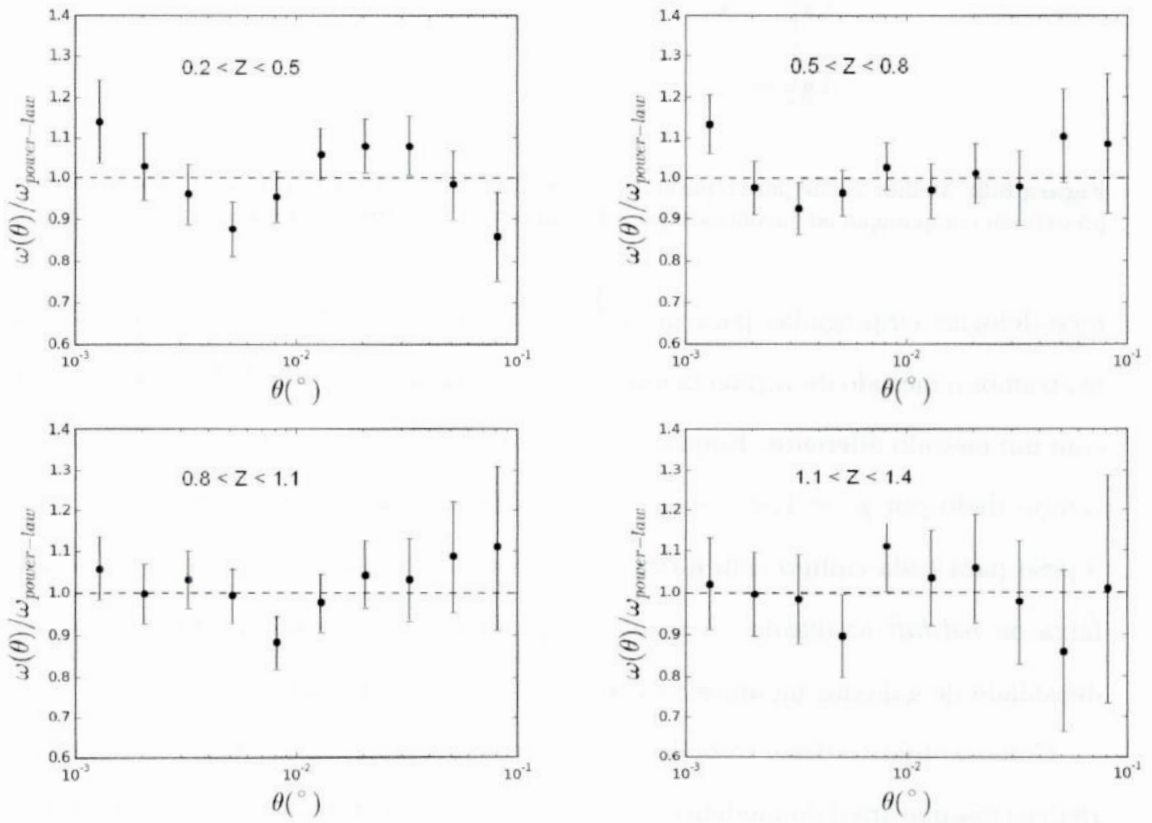
**Figura 6.3:** Melhor ajuste para o parâmetro  $\gamma$  em função do redshift encontrado neste trabalho (círculos pretos) em comparação ao encontrado por McCracken et al. (2008) (quadrado).

metodologias empregadas para fazer a junção dos quatro campos na análise. Enquanto utilizamos o método de variância mínima, McCracken et al. (2008) abordaram esta questão com um método diferente. Enquanto na nossa metodologia associamos um peso para cada campo dado por  $p_i = 1/\sigma_i^2$  (veja a equação (6.4)), McCracken et al. (2008) associaram o peso para cada campo com a sua respectiva quantidade de galáxias  $p_i = N_i$  para cada faixa de *redshift* analisada. A nossa metodologia é a mais apropriada pois vimos que a densidade de galáxias na amostra não é a única fonte de erro.

Como o objetivo deste trabalho é verificar se os dados do CFHTLS mostram as características (assinaturas) do modelo de halos, dividimos a correlação angular obtida pelo ajuste da lei de potência, como feito por Blake et al. (2008). Desta forma, podemos ver com mais clareza se há desvios dos dados no ajuste da lei de potência nas medições de correlação angular. Na figura 6.4 mostramos a correlação angular medida dividida pelo seu melhor ajuste de lei de potência.

Com os resultados da análise efetuada com os dados fotométricos do levantamento *Deep* do CFHTLS podemos elaborar as seguintes conclusões:

- Os valores de melhor ajuste para o parâmetro  $\gamma$  estão em bom acordo com os encontrados por McCracken et al. (2008) como mostrado na figura 6.3, demonstrando a qualidade da análise feita neste estudo.



**Figura 6.4:** As funções de correlações angulares medidas divididas pelo ajuste de lei de potência. Desvios na lei de potência são percebidos em cada intervalo de *redshift* especialmente no intervalo  $0.2 < z < 0.5$  onde há um sinal do modelo de halos mais claro.

- A figura 6.4 mostra claramente a assinatura do modelo de halos para a faixa de redshift  $0.2 \leq z \leq 0.5$ .
- Obtemos resultado similar ao trabalho de Blake et al. (2008) para suas duas faixas de menor *redshift*, o intervalo  $0.45 \leq z \leq 0.65$  (figura 4.9).
- Para  $z > 0.5$  o sinal do modelo de halos não é mais detectado pela análise. Nos resultados de Blake et al. (2008) o sinal do halo também é bastante baixo para  $z > 0.6$  (figura 4.9).
- Os valores de  $\chi^2$  da tabela 6.1 indicam que a lei de potência é uma boa descrição para as medidas efetuadas da correlação angular deste levantamento, demonstrando que o efeito dos halos são desvios de ordem superior de uma lei de potência. Como um exemplo, o  $\chi^2$  para a faixa  $0.2 \leq z \leq 0.5$ , dividido pelo número de graus de liberdade é  $\chi_{min}^2 = 1.46$ , bem próximo da unidade, demonstrando a afirmativa anterior.

Uma das possíveis razões para a ausência de detecção do sinal do modelo de halos nas medições da correlação angular efetuadas em maiores *redshifts* pode ser devido ao tamanho da área do levantamento *Deep* do CFHTLS. Todas as quatro áreas têm aproximadamente um grau quadrado, nos permitindo sondar apenas escalas menores que este valor, ou seja  $\theta \lesssim 0.1^\circ$ . Para escalas maiores o erro de variação cósmica cresce significativamente, impossibilitando a detecção do sinal de halos. Uma outra fonte para a ausência do sinal de halo pode ser devido à necessidade de termos um grande número de galáxias na amostra, que por consequência acarretou na necessidade de utilizar faixas bem grandes em *redshift*  $\Delta z = 0.3$ . Como a correlação angular pode ser pensada como uma média da correlação espacial com o *redshift*, quanto mais larga for a faixa de *redshift*, maior será a perda do sinal da correlação espacial. Como ilustração, no caso extremo, se a faixa de *redshift* fosse  $0 \leq z \leq \infty$  teríamos que a correlação angular seria zero, ou seja, quase não haveria sinal.

Uma das questões que também merece um comentário é qual o impacto dos erros dos *redshifts* fotométricos na análise efetuada. Devido à escolha de espessura da faixa de *redshift* ( $\Delta z = 0.3$ ) e ao fato de que o erro no *redshift* desta amostra é estimado em  $\sim 0.03(1+z)$ , é de se esperar que este tenha um impacto desprezível nas estimativas das

correlações angulares obtidas pois o intervalo de *redshift* é bem maior que o erro. A maior limitação desses resultados é devida à pequena área dos campos *Deep* do CFHTLS.



# Capítulo 7

## Perspectivas Futuras

A análise de aglomeração de galáxias está em uma fase de transição para um novo paradigma que consiste em efetuar levantamentos com uma densidade de galáxias e volumes sondados muito maiores que os alcançadas anteriormente com levantamentos espectroscópicos. Para alcançar estes objetivos, esses novos levantamentos utilizarão imageamento e as determinações de *redshift* serão fotométricas. Dentre os vários projetos propostos devemos citar o *Dark Energy Survey*, projeto integrado por pesquisadores brasileiros através do Laboratório Interinstitucional de e-Astronomia (LIneA).

Por consequência, a metodologia para estimativas de parâmetros da correlação espacial previamente aplicada a levantamentos espectroscópicos deve ser adaptada para este novo paradigma. Neste trabalho, abordamos o método tradicional da análise de aglomeração de galáxias em levantamentos fotométricos, ou seja, estimamos a correlação angular. Para este fim fizemos uso dos dados públicos do levantamento *Deep* do CFHTLS.

Este estudo deixa uma série de perguntas em aberto, que serão de grande relevância para os levantamentos fotométricos como o DES, e que serão abordados num próximo estudo. Entre elas:

- Seria interessante reproduzir a análise, aqui apresentada, utilizando os campos *Wide* do CFHTLS, para minimizar e melhor quantificar o efeito de variância cósmica.
- A metodologia de análise da aglomeração de galáxias com a aplicação da correlação angular é aceita como padrão para levantamentos fotométricos. Entretanto, ainda

não foi estudado se a correlação projetada pode ser aplicada em levantamentos fotométricos.

- Como uma sequência natural da análise anterior, é de relevância entender em que regime a correlação projetada consegue recuperar as características da correlação espacial. Qual o erro máximo no *redshift* fotométrico que torna impraticável a sua utilização para este tipo de estudo?
- A inclusão de toda a informação da distribuição de probabilidade dos *redshifts* fotométricos na análise, ou seja a sua *Probability Distribution Function* (PDF). Este estudo está intimamente conectado com o anterior, pois a inclusão das PDFs será feita diferentemente para cada tipo de abordagem.
- A modelagem de halos parece ser uma ferramenta relevante para descrever a distribuição de galáxias no Universo. Sua capacidade de representar adequadamente os desvios da aproximação de lei de potência para a função de correlação é um estímulo para realizar análises de amostras de galáxias de diferentes tipos e luminosidades. Isso pode contribuir para a melhor compreensão da formação e evolução de estruturas e aprimorar os modelos teóricos.

Esses estudos podem ser feitos de duas formas distintas: no âmbito teórico podemos fazer a análise da correlação projetada estimando erros com a aproximação gaussiana e desta forma fazer o estudo de perspectivas para resultados esperados do projeto DES, inclusive estudando a possibilidade da medição da oscilação acústica de bárions na correlação projetada. No âmbito de análise de dados, o projeto SDSS-III já disponibilizou para o público os seus dados do levantamento fotométrico. Dentre esses dados se encontra o catálogo do *Data Release 8* (DR8), que consiste em  $\sim 1.7$  milhões de galáxias luminosas vermelhas (LRGs) com *redshifts* fotométricos de alta qualidade. Este catálogo pode ser pensado como uma extensão do catálogo utilizado por Blake et al. (2008), com maior número de galáxias e maior área de cobertura do céu. O catálogo DR8 é perfeito para se abordar as questões levantadas, pois as LRGs possuem, em geral, um sinal do modelo de halos mais proeminente que outras galáxias pois se encontram no centro dos halos, além

de terem *redshifts* fotométricos melhor determinados devido ao conjunto de treinamento ter  $\sim 100$  mil galáxias com espectroscopia.

## Referências Bibliográficas

- Abbas, U., de la Torre, S., Le Fèvre, O., et al., 2010, MNRAS, 406, 1306
- Baugh, C. M., 1996, MNRAS, 280, 267
- Benson, A. J., Frenk, C. S., Baugh, C. M., Cole, S. e Lacey, C. G., 2001, MNRAS, 327, 1041
- Blake, C., Collister, A., Lahav, O., 2008, MNRAS, 385, 1257
- Blumenthal, G. R., Faber, S. M., Primack, J. R., e Rees, M. J., 1984, Nature, 311, 517
- Calzetti, D., Giavalisco, M., Meiksin, A., 1992, ApJ, 398, 429
- Carr B. J., Bond J. R., Arnett W. D., 1984, ApJ, 277, 445
- Cole, S., Lacey, C., 1996, MNRAS, 281, 716
- Colombi, S., Chodorowski, M.J., Teyssier, R., 2007, MNRAS, 375, 348
- Conselice, C. J., Bershadsky, M. A., Dickinson, M. e Papovich, C., 2003 AJ, 126, 1183
- Cooray, A. Sheth, R.K., 2002, PhR, 372, 1
- Cowsik R., McClelland J., 1972, Phys. Rev. Lett., 29, 669
- da Costa, L. N., Pellegrini, P.S., Sargent, W. L. W., Tonry, J., Davis, M., Meiksin, A., Latham, D., Menzies, J. W., e Coulson, I. A., 1988, ApJ, 327, 544
- Davis, M., Peebles, P.J.E., 1983, ApJ, 267, 465
- de la Torre, S. et al. 2010, MNRAS, 409, 867



- Dekel, A. e Aarseth, S. J., 1984, ApJ, 283, 1
- Doroshkevich, A., Sunyaev, R. e Zeldovich, Ia Confrontation of cosmological theories with observational data; Proceedings of the Symposium, Krakow, Poland, September 10-12, 1973. (A75-21826 08-90) Dordrecht, D. Reidel Publishing Co., 1974, p. 213-225.
- Dressler, A. 1980, ApJ, 236, 351
- Einasto J., Kaasik A., Saar E., 1974, Nature, 250, 309
- Eisenstein, D. J. e Colaboração SDSS, 2005, ApJ, 633, 560
- Friedmann, A., 1922, Z.Phys, 10, 377
- Frieman, J. A., Turner, M. S. e Huterer, D., 2008, ARAA, 46, 385
- Gershtein S. S., Zeldovich Y. B., 1966, ZhETF Pis ma Redaktsiiu, 4, 174
- Gott, J.R., Turner, E.L., 1979, ApJ, 232L, 79
- Groth, E. J. e Peebles, P. J. E., 1977, 217, 385
- Guzzo, L., Iovino, A., Chincarini, G., 1991, ApJ, 382, L5
- Hamilton, A. J. S., 1993, ApJ, 417, 19
- Hawkins, E. e Colaboração 2dfGRS, 2003, MNRAS, 346, 78
- Hewett, P. C., 1982, MNRAS, 201, 867
- Huchra, J., Davis, M., Latham, D., Tonry, J., 1982, ApJS, 52, 89
- Hogg, D. W., 1999, astro-ph, 5116
- Ilbert, O., Arnouts, S., McCracken, H.J., et al., 2006, A&A, 457, 841
- Kayser, N., 1987, MNRAS, 227, 1
- Lemaitre, G. E., 1927, Ann. Soc. Sci. de Bruxelles, 47A, 49
- Landy, S. D., Szalay, A. S., 1993, ApJ, 412, 64

- Lauberts, A. 1982, ESO-Uppsalla Survey of the ESO(b) Atlas, (European Southern Observatory, Garching)
- Nelson Limber, D., 1953, ApJ, 117, 134
- Magliocchetti, M., Porciani, C., 2003, MNRAS, 346,186
- Martínez, V. J., Saar, E., Statistics of the Galaxy Distribution, Chapman & Hall/CRC, 2002
- McCracken, H. J., Ilbert, O., Mellier, Y., Bertin, E., Guzzo, L., Arnouts, S., Le Fèvre, O. e Zamorani, G, 2008, 479, 321
- Meza, A., Navarro, J. F., Steinmetz, M. e Eke, V. 2003, ApJ, 590, 619
- Nilson, P. 1971, Uppsalla General Catalog of Galaxies (Uppsalla Astro. Obs, Ann., 6)
- Norberg, P, Baugh, C. M., Gaztanaga, E. e Croton, D. J. 2009, MNRAS, 396, 19
- Ostriker J. P., Peebles P. J. E., Yahil A., 1974, ApJ, 193, L1
- Peacock, J. A. e Smith, R. E., 2000, MNRAS, 318, 1144
- Peebles, P.J.E., 1974, ApJ, 189, 51L
- Peebles, P.J.E., 1974, A&A, 32, 197
- Peebles, P. J. E. 1980, The large-scale structure of the Universe (Princeton Universe, Princeton)
- Peebles, P.J.E., Hauser, M.G., 1974, ApJS, 28, 19
- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R. A., Nugent, P., Castro, P. G., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D. E. e 23 coautores, 1999, ApJ. 517, 565
- Rich, James, 2010, Fundamentals of Cosmology, Springer Second Edition
- Robertson, H. P., 1929, Proc. Natl. Acad. Sci, 15, 822
- Ross, A. J., Brunner, R. J. e Myers, A. D., 2008, ApJ, 682, 737

- Rubin, V., Roberts, M. S., Graham, J. A., Ford, W. K., Jr. e Thonnard, N. 1976, AJ, 81, 719
- Rubin, V., Ford, W. K., Jr. e Thonnard, N. 1978, AJ, 225, L107
- Shane, C. D. e Wirtanen, C. A., 1967, Pubs. Lick Obs. Vol 22, parte 1
- Simon, P., 2008, A&A, 473, 711
- Smoot, G. F., Bennett, C. L., Kogut, A., et al., 1992, ApJ, 396L, 1S
- Totsuji, H., Kihara, T., 1969, PASJ, 21, 221T
- Walker, A. G., 1936, Proc. Lond. Math. Soc., (2) 42, 90
- Willmer, C.N.A., da Costa, L.,N., Pellegrini, P.S., 1998, AJ, 115, 869
- White, M., Blanton, M., Bolton, A., et al., 2011, ApJ, 728, 126
- White, S.D.M, Rees, M.J, 1978, MNRAS, 183, 341
- York, D. e Colaboração SDSS, 2000, AJ, 120, 1579
- Zehavi, I., Weinberg, D.H., Zheng, Z., et al., 2004, ApJ, 608, 16
- Zehavi, I. e colaboração SDSS, 2005, ApJ, 630, 1
- Zheng, Z, Coil, A. L. e Zehavi, I., 2007, ApJ, 667, 760
- Zwicky, F., 1933, Helv. Phys. Acta, 6, 110
- Zwicky, F., 1937, ApJ, 86, 217
- Zwicky, F., Herzog, E., Wild, P., Karpowicz, M. e Kowal, C., 1961-1968, Catalog of Galaxies and Clusters of Galaxies, Vol 1 a 6, (California Institute of Technology, Pasadena)