

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Observatório do Valongo

**Uma Álgebra Para as Medições Quânticas,
O Princípio Quântico da Ação e
Possíveis Aplicações Astrofísicas**

Silvio Domingos (OV/UFRJ)
Orientador: Alexandre Lyra (OV/UFRJ)

Projeto de Final de Curso
Para a Obtenção do Título de Astrônomo

Rio de Janeiro
3 de Novembro de 2011

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Alexandre Lyra de Oliveira, que me orientou ao longo dessa jornada acadêmica, sendo paciente com a minha imaturidade e mostrando-me o melhor caminho a seguir, contribuindo não somente, para a minha formação intelectual, mas também para a construção do caráter de um ser humano melhor.

Aos meus pais, que tanto me incentivaram e criaram as condições ideais para tornar o meu sonho possível de ser realizado, ao meu irmão Carlos Matheus Silva Santos que mesmo estando longe, sempre esteve preocupado com minha formação. Gostaria de agradecer também, a uma pessoa em especial, a qual me trouxe conforto emocional, além de contribuir na minha visão de mundo em sociedade, Carolina Costa Moda Beltrão.

Não poderia deixar de agradecer, aos meus colegas que junto comigo fizeram parte dessa trajetória, aos funcionários e ao corpo docente do Observatório do Valongo que fazem desse ambiente, um lugar saudável e propício à atividade intelectual.

Por fim gostaria de fazer um agradecimento especial ao Professor Marcelo Carvalho, que com sua boa vontade contribuiu para a melhoria deste Projeto.

“Entrar na vida...
para dissolver nela tudo
o que há de melhor, de humano
nos nossos corações e mentes.”

Máximo Gorki

Resumo

Neste projeto fazemos um estudo da construção da “álgebra das medidas” elaborada por Julian Schwinger. Esta estrutura parte da ideia geral que podemos construir um processo de *indução ideal das leis gerais da Mecânica Quântica a partir dos experimentos*, particularmente, a partir do experimento de Stern-Gerlach. Antes de chegarmos à álgebra faremos, seguindo o *Prólogo* do livro de Schwinger, uma discussão geral sobre a Mecânica Quântica. Pela álgebra das medidas se chega estrutura da cinemática quântica. Schwinger também elaborou uma ferramenta prática fundamental para obter a evolução dinâmica dos operadores quânticos, ou dinâmica quântica, bem como obter os comutadores fundamentais. Esta técnica, que abordaremos resumidamente, parte da resposta do sistema estudado aos deslocamentos infinitesimais no tempo e denomina-se *Princípio Quântico da Ação*, obtendo-se, de uma maneira dedutiva, tanto as relações de comutação fundamentais, por exemplo, $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, quanto a evolução dinâmica de um operador K (a equação de movimento de Heisenberg), $\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} - \frac{i}{\hbar}[K, H]$. Esta formulação é diferente da usual, a qual assume, por exemplo, que as relações de comutação dos operadores quânticos são obtidas por uma correspondência destas relações com os parêntesis clássicos de Poisson. Finalmente, faremos algumas discussões pertinentes, inclusive sobre possibilidades de aplicações deste princípio à Astrofísica.

Palavras-chave: Mecânica Quântica, Álgebra das Medidas, Princípio Quântico da Ação.

Abstract

In this project we study the construction of a “*Measurement Algebra*” as conceived by Julian Schwinger. This is part of Schwinger’s proposal for constructing an *ideal induction of the general laws of quantum mechanics from a well-selected set of experiments*, particularly, the Stern-Gerlach experiment. Before dealing with the algebra, we present a general discussion of Quantum Mechanics following the *Prologue* of Schwinger’s book. Then, we proceed to the measurement algebra where the general laws of quantum kinematics are obtained. Schwinger has also developed a tool to obtain the dynamical laws of the evolution of the quantum operators, or quantum dynamics, as well as the derivation of the fundamental canonical commutators, for example, $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, and the dynamic evolution of an operator K (the Heisenberg equation of motion), $\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} - \frac{i}{\hbar}[K, H]$. The response of the system to infinitesimal time displacements establishes the quantum equations of motion from which the *Schwinger Quantum Action Principle* is derived. This formulation is different from the usual one, which assumes, for example, that the relations of the quantum operators are obtained by a mapping from the classical Poisson brackets to the commutators defined on the space of quantum operators. Finally, we discuss the possibility of applying the Quantum Action Principle to astrophysics.

Keywords: Quantum Mechanics, Measurement Algebra, Quantum Action Principle.

Prefácio

Este projeto surgiu das discussões que tive com o orientador do mesmo sobre a forma como Julian Schwinger havia elaborado a sua abordagem da Mecânica Quântica (MQ). A ideia principal deste Projeto é fazer uma revisão de parte do livro de Mecânica Quântica de Schwinger, onde tentaremos esmiuçar alguns pontos. Um dos principais aspectos da sua abordagem é a obtenção de uma estrutura algébrica a partir das medições quânticas¹. Seguiremos o seu livro texto de Mecânica Quântica, “*Quantum Mechanics, Symbolism of Atomic Measurements*”, recentemente publicado [1]. Tentaremos expor de forma clara, principalmente algumas partes que no livro nos pareceram não muito claras, já que imaginamos uma possível utilização futura deste projeto por estudantes de graduação. Entretanto, é desejável que o leitor tenha os conhecimentos da Mecânica Quântica na forma como ela é usualmente ministrada nos cursos de graduação. Buscaremos, em alguns momentos, apresentar as ideias principais confrontando-as com abordagens de outros autores.

É interessante notar uma linha de trabalhos realizados recentemente sobre diversos aspectos da obra de Schwinger: a sua abordagem da MQ relativista, a hipótese dos quarks, o modelo padrão, a metodologia utilizada no livro de MQ, a Teoria de Fontes, e outros. Nestes trabalhos discute-se a obra do Schwinger sob o ponto de vista *epistemológico*². Sendo assim, alguns consideram que sua obra vai além da própria Física. Frisamos também que no seu livro de MQ ele chega no final aos mesmo resultados da MQ usual, porém o fato principal inovador é a maneira de formular a teoria quântica. Na parte estrutural, ao obter a estrutura algébrica a partir das medições quânticas, a teoria,

¹Aqui neste Projeto, para simplificar, chamaremos a construção realizada pelo Schwinger como a “Mecânica Quântica de Schwinger”, ou outro termo equivalente. As duas construções principais foram criadas por ele.

²Ver as refs. sobre isto, do Stapp e MacKinnon, respectivamente em [2] e [3], bem como as referências citadas. Estes autores dizem textualmente que os filósofos, dedicados às interpretações da MQ, não têm considerado o trabalho de Schwinger, e especulam sobre quais razões poderiam ter levado a isto.

segundo Schwinger, tem o papel de fazer uma “codificação” e generalização dos experimentos. É neste desenvolvimento que irão aparecendo os vetores de estado e os operadores. Já no *Princípio Quântico da Ação* (PQA), criou uma ferramenta prática para obter as equações dinâmicas dos operadores bem como as relações usuais de comutação. Na sua MQ não se tem necessidade de assumir as relações de comutação de forma axiomática, conforme é usual.

Nos fixamos na maior parte deste projeto, no conteúdo inicial do livro, ou seja, as medições quânticas e as suas generalizações para a obtenção da “álgebra das medidas”. Devido à própria extensão do conteúdo, e do seu detalhamento, o Projeto ficou um pouco maior do que imaginávamos. Optamos por abandonar a ideia inicial de abordar também detalhadamente o Princípio Quântico da Ação. Entretanto, para não ficar esta falta, já que o PQA é o que leva à parte dinâmica da teoria, fizemos um capítulo resumido sobre este princípio. Na MQ de Schwinger, o PQA é a “ferramenta” prática, já que através dele é que são obtidas as equações de Heisenberg dos operadores, ou seja, as equações dinâmicas dos operadores, e também as tão fundamentais relações usuais de comutação. Este princípio tem uma enorme abrangência, já que a partir dele muitos desenvolvimentos e estruturas podem ser obtidas. Um exemplo disto é a sua utilização para obtenção da álgebra do Grupo de Galileu ³. No tratamento convencional da MQ, desde a época do Dirac, as relações de comutação são assumidas como axiomas, já no formalismo de Schwinger elas são dedutíveis a partir do PQA. Schwinger não concorda de maneira alguma com opiniões do tipo: “*As leis da mecânica quântica não podem ser derivadas Infelizmente, a descrição da natureza pela mecânica quântica é muito abstrata para tornar isso possível.*” (ver no seu livro, p.29, como ele discute estes estabelecimentos sobre a MQ) .

Para quem pouco conhece sobre a vida e carreira de Schwinger, é interessante notar que ele desde os anos 50, quando ministrava cursos de MQ regularmente em Harvard, já desejava escrever um texto de MQ, mas várias décadas se passaram e ele continuava relutando em escrever um livro texto. Sua razão era que não havia, naquela época, chegado ainda a uma *abordagem sua* da MQ. Já havia escrito vários textos, inclusive as suas notas de aulas, bastante disputadas pelos seus alunos, entretanto, não havia ainda se decidido quanto a um livro para ser publicado. Desta forma, acabou falecendo em 1994 sem ter publicado este livro. Devido a importância desta publicação, seus colaboradores

³Veja isto em [4].

e amigos, juntamente com a ajuda e apoio da viúva Clarice Schwinger, o publicaram em 2000 ⁴.

Nas notas de aulas, que dariam origem ao livro de Mecânica Quântica, Schwinger havia colocado o título *óbvio*: “Quantum Mechanics”, além disto também continha o subtítulo *nada óbvio*: “Symbolism of Atomic Measurements”. Com isto, como era seu costume, firmava uma posição em relação à própria Física: *a Física é uma ciência cujas teorias devem ser testadas e confirmadas*. O Prólogo do livro, que tem 25 páginas e que foi retirado de gravações de conferências suas em 1960, é na realidade uma retrospectiva tanto histórica quanto teórica da Mecânica Quântica. Abrange desde o Eletromagnetismo e a Mecânica Clássica, que antecederam à Mecânica Quântica, até ao desenvolvimento que ele acompanhou e foi também um dos seus grandes elaboradores. São aí discutidas questões que vão da causalidade e determinismo, até ao fato de que os operadores são uma necessidade natural da teoria quântica. Neste ponto, mostra de forma simples, porque os operadores aparecem na MQ para representar as quantidades físicas, e têm uma álgebra não-comutativa. Também são discutidas outras importantes questões como o *discreto*, o *contínuo*, as *medidas quânticas*, o *vácuo quântico*, etc.

Acreditamos que este Projeto de Final de Curso, ao abordar este tema, contribua tanto na divulgação desta obra ainda pouco conhecida de Julian Schwinger, quanto na discussão destas importantes questões referentes à Física dos nossos tempos. Lembremos que a contribuição de Schwinger para a Física do século XX, não foi somente aquela que o levou a ganhar o Prêmio Nobel de Física ⁵ de 1965 mas se faz presente até hoje em inúmeras áreas da Física Teórica ⁶.

⁴Mais detalhes de como foi executada esta empreitada estão descritos por B. G. Englert no Prefácio do próprio livro.

⁵Este prêmio ele ganhou juntamente com Tomonaga e Feynmann pela renormalização da Eletrodinâmica Quântica.

⁶Os interessados na sua vasta obra podem ler a excelente biografia de sua vida e de sua obra científica em [5].

Sumário

1	Introdução	12
2	Conceituação Básica na Mecânica Quântica de Schwinger	15
2.1	Ideias Gerais	15
2.2	Causalidade e Determinismo	16
2.3	Estatística	23
2.4	A Teoria Física e as Medidas	26
2.5	Números e Operadores	29
2.6	Estados	32
3	Simbologia e Álgebra das Medidas	45
3.1	Símbolos da Medida	45
3.2	Vetores de Estado	53
3.3	Medidas Sucessivas. Probabilidades	55
3.4	Amplitudes de Probabilidade. Interferência	61
3.5	Medidas que perturbam o sistema	68
4	Observáveis	72
4.1	Álgebra dos operadores de Pauli	76
4.2	Símbolos Adjuntos, símbolos Hermitianos	82
4.3	Representação Matricial	84
4.4	Traço	89
5	Geometria Unitária	95
5.1	Vetores linha e coluna, funções de onda	95
5.2	Duas componentes arbitrárias do operador vetorial de Pauli	102

5.3	Operadores Unitários	107
5.4	Bases de operador unitário. Complementariedade	110
5.5	Graus quânticos de liberdade	120
6	O limite do contínuo	134
6.1	A relação de comutação de Heisenberg	134
6.2	Representação do operador-diferencial de Schrödinger	138
7	Princípio Quântico da Ação	140
7.1	Uma Nova Formulação do Princípio Quântico da Ação	140
7.1.1	Os Comutadores Fundamentais	143
8	Conclusões e Perspectivas	144
A	Álgebra	151
B	Contas referentes a Seção 3.4	160

Listas de Figuras

3.1	O item 1), nos mostra que o feixe resultante tem momento magnético +, no item 2), nenhum feixe transmitido. Vale notar que o segundo aparelho está inclinado com relação ao primeiro aparelho, pois o feixe resultante que sai do primeiro possui uma certa deflexão. Então para que o segundo aparelho possa medir a mesma propriedade física em questão, tenta-se obter o ângulo de deflexão o mais próximo de zero possível, afim de que a direções dos campos magnéticos dos aparelhos, possam ser consideradas paralelas.	46
3.2	Aparelho físico específico que mede μ_z	47
3.3	Mostra o arranjo experimental do item 2) da Figura 3.1 em detalhes, utilizado para uma dicussão mais elaborada.	50
3.4	Campo magnético homogêneo que faz o dipolo magnético rotacione, mudando assim a direção do seu momento magnético.	50
3.5	Mostra que depois que os átomos passam pelo primeiro aparelho(que se encontra do lado esquerdo), a próxima etapa é passar pelo segundo aparelho(que se encontra do lado direito) rotacionado de um ângulo θ , com relação ao primeiro aparelho.	55
3.6	Desenho que corresponde a rotação de 0 rad e $\pi \text{ rad}$, onde em 0 rad , temos o resultado do momento magnético + e para $\pi \text{ rad}$. o momento magnético -.	56
3.7	As médias dada em unidades de μ , para os respectivos ângulos de 0 rad , $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ e $\pi \text{ rad}$, com o segundo aparelho rotacionado em relação a direção m.m+ do feixe inicial.	57
3.8	Neste caso temos a projeção do m.m.+ na direção θ , sendo representado, pelo $+\cos\theta$	57

3.9 Mostra que a probabilidade de obtermos um feixe $-$, partindo-se de um feixe inicial de m.m. $+$, em relação a um ângulo θ , o mesmo que projetarmos esse feixe inicial de m.m. $+$ no ângulo de $\pi - \theta$, isso pode ser entendido pelo fato das funções cos e sin, serem complementares.	59
3.10 Apresenta o significado geométrico de (3.41).	59
3.11 Mostra as projeções com relação a um ângulo θ para feixa inicial de m.m. $-$, que teria a construção de suas probabilidades análoga ao que foi feito no caso do feixe inicial de m.m. $+$	60
3.12 Nesta figura sintetiza-se, uma sequência de aparelhos dispostos em relação a uma direção z de referência, assim o aparelho A encontra-se a 0 rad , o aparelho B a $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ e o aparelho C a $\pi \text{ rad}$	65

Capítulo 1

Introdução

Iniciaremos aqui com as próprias palavras de Julian Schwinger sobre o papel dos experimentos na Física, no livro texto (p.10) ele estabelece que

“...physics is an experimental science; it is concerned only with those statements which in some sense can be verified by an experiment. The purpose of the theory is to provide a unification, a codification, or however you want to say it, of those results which can be tested by means of some experiment. Therefore, what is fundamental to any theory of a specific department of nature is the theory of measurement within that domain. ”

O fato é que esta tentativa de construção da Teoria Quântica a partir das medidas quânticas, é algo que consideramos bastante inovador e único ¹, pois em geral o que vemos nos textos é a matemática dos vetores de estado, operadores, etc., como uma estrutura que é *assumida* em paralelo com suas aplicações (que dão certo!). Entretanto, a maneira como ele desenvolve, ou seja, diretamente dos experimentos para a criação de uma teoria, é algo bastante interessante. Podemos concordar ou não, ou mesmo discordarmos de certos desenvolvimentos, porém temos que considerar o fato que esta tentativa é bastante importante na Física atual, onde em várias áreas há uma grande ruptura com os princípios que relacionam teoria × experimentos. Mencionamos ainda que o fato de Schwinger ter

¹Segundo nosso conhecimento, desconhecemos outros desenvolvimentos semelhantes. Mesmo sobre a sua abordagem, somente conhecemos um único livro de MQ, de K. Gottfried, [6], onde o autor segue a abordagem do Schwinger com a álgebra das medidas, onde o autor se baseou nos trabalhos originais onde o Schwinger publicou pela primeira vez a sua álgebra das medidas: Proc. Nat. Acad. Sc. **45**, 1542 (1959); **46**, 257, 570 (1960).

adiado tanto a publicação de um livro em MQ deve ter tido sua razão em que ele sempre dizia ²:

“had not yet found the perfect way to do quantum mechanics.”

Acredita-se que este problema foi resolvido quando ele nos anos 80 na Universidade da Califórnia, ficou muito feliz com o estabelecimento do “quantum action principle” para a MQ não relativista. Como diz B. G. Englert (p.VIII do livro, no Prefácio) ele teria assim *“found the perfect way to do quantum mechanics”*.

Para podermos melhor entender e mesmo de certa forma avaliar este trabalho do Schwinger, não podemos perder de vista que ele deu sua maior contribuição para a Física da segunda metade do século XX, exatamente na Mecânica Quântica, ou melhor na Eletrodinâmica Quântica, com vários trabalhos que o levaram (juntamente com Feynman e Tomonaga) ao Prêmio Nobel de Física de 1966. Assim, sua obra em Mecânica Quântica é a de um especialista da área, um dos seus maiores teóricos. Logo, sua abordagem deve ser avaliada com bastante cuidado. Estas nossas afirmações se devem ao fato que até hoje pouca importância tem sido dada ao tratamento que ele dá neste seu livro de MQ, conforme já mencionamos e está documentado nas referências [2] e [3]. Os autores nestas referências, além de ressaltarem que na bibliografia sobre as interpretações da MQ pouco ou quase nada é discutido sobre o trabalho do Schwinger, reconhecem que o desconhecimento desta parte da obra do Schwinger também pode ser estendida ao âmbito da própria Física. Pode-se dizer que ela carrega junto também uma desconsideração às suas críticas ao modelo padrão e à hipótese dos quarks. Na biografia do Schwinger, que citamos [5], pode-se ler, por exemplo, os problemas que ele enfrentou ao criar a “Teoria de Fontes” em oposição à Teoria Quântica de Campos (de operadores), a qual havia contribuído para a sua construção. E lembremos ainda que o espírito revolucionário da Teoria de Fontes, ou “evolucionário” como diz Milton na sua biografia, fica bem claro quando no preâmbulo do primeiro volume Schwinger escreve

*“Se não der para se unir a eles,
destrua-os.”*

²Ver p.VII do livro.

Estes fatos e ainda outros discutidos na sua biografia podem haver contribuído para uma certa rejeição preconceituosa a parte do seu trabalho ³. Porém acreditamos que esta situação poderá mudar devido aos fatos recentes experimentais em altas energias. Pode ser que novas teorias sejam necessárias para se explicar melhor o mundo subatômico. Com estes pontos de vista em mente, gostaríamos, com as limitações deste trabalho, polarizar a atenção para estes diferentes aspectos da obra do Schwinger. Com as palavras dele próprio, se estabelece: “*quantum mechanics is a symbolic expression of laws of microscopic measurement*”.

A abordagem que faremos do texto do Schwinger, trata inicialmente do Prólogo do seu livro, onde se faz uma retrospectiva da MQ, incluindo-se a discussão de questões como a *causalidade, determinismo*, e outras referentes aos paralelos com a Física Clássica. Além disto as questões sobre o discreto e o contínuo, assim como interessantes discussões do porquê do aparecimento dos operadores na MQ. Após esta parte referente ao Prólogo, iremos para os diferentes pontos de abordagem referentes ao Capítulo 1 do livro, onde é descrito o processo de medidas e sua generalização. Nesta sequência se apresenta a álgebra das medidas e consequentemente a matemática da MQ, com os vetores de estado, os operadores, etc. Finalizada esta primeira parte, a mais extensa, apresentaremos sucintamente o Princípio Quântico da Ação, e em seguida faremos uma pequena discussão como conclusão sobre o que foi tratado. Nesta parte final falaremos sobre possíveis aplicações da teoria e alguns possíveis desenvolvimentos futuros.

³Não estamos aqui nos colocando como defensores da “Teoria de Fontes”, inclusive pelo fato de que há trechos do desenvolvimento do Schwinger no Volume 1 da “Teoria de Fontes” [7], que não concordamos com a sua abordagem matemática. O que frisamos é o aspecto preconceituoso que tem se tornado rotina em diferentes áreas da física teórica, da Cosmologia ao Modelo Padrão de Partículas Elementares.

Capítulo 2

Conceituação Básica na Mecânica Quântica de Schwinger

Este capítulo destina-se ao estabelecimento dos conceitos desenvolvidos na abordagem do “Prólogo” do livro , onde ele discute conceitos fundamentais tais como *causalidade*, *determinismo*, *vácuo quântico* e muitos outros. Além disto faz um breve histórico do surgimento da Mecânica Quântica. Revela logo neste “Prólogo” que a teoria a ser elaborada é uma teoria causal, mas não-determinista. Seguiremos de uma forma geral sua abordagem e quando tivermos que pontuar algo divergente de Schwinger, explicitaremos este fato.

2.1 Ideias Gerais

Existem questões filosóficas profundas a serem aprendidas através da forma pela qual os estudiosos de física teórica pensam sobre os fundamentos da teoria, por exemplo, na maneira em que eles abordam seus problemas, e tambm nos critérios gerais considerados como balizadores do que seja uma solução razoável. Portanto, o aspecto importante é mostrar a visão geral de mundo que o físico teórico idealiza.

Isso é particularmente significante na conexão com as implicações filosóficas da Física Quântica, pois a Física Quântica ou a Mecânica Quântica, através da qual entendemos os fenômenos microscópicos ou atômicos de modo racional, tem tido provavelmente o maior impacto do que quaisquer outras descobertas da física sobre o modelo de pensamento ou “the world picture” do físico, e, portanto, de maneira indireta sobre as outras pessoas.

Agora, se quisermos entender especificamente as origens da Física Quântica, devemos

voltar para ver como o cenário foi definido através da evolução da denominada Física Clássica, e então o compararmos com a Física Quântica. Por Física Clássica, entendemos a formulação precisa de todas as propriedades da matéria como foram finalmente expressas no início do século 20, onde se formulam teorias cuja compreensão está próxima das ideias intuitivas usuais, e que são vivenciadas por nós em nosso dia a dia. Já em contrapartida, a Física Quântica, desde os seus conceitos mais básicos, há uma ruptura com estas ideias intuitivas usuais presentes no âmbito da Física Clássica.

Para um certo entendimento da conceituação nova da Física Quântica, divergente dos conceitos intuitivos normais do cotidiano, é bastante esclarecedor se entender como foi o seu desenvolvimento histórico.

2.2 Causalidade e Determinismo

A primeira grande teoria física, é claro, foi a da Física Newtoniana, que é uma teoria de partículas massivas pontuais cuja interação se dá através de ações à distância. A teoria tradicional da gravitação é o exemplo clássico disto. E para caracterizar esta teoria de um modo mais geral em termos de seus fundamentos filosóficos, a Física Newtoniana, ou Mecânica Newtoniana é uma teoria causal e determinística.

Por *causal*, entendemos essencialmente que quando o “estado” do sistema é dado em um tempo particular (depois retornaremos para precisar o que se entende por “estado”) então o “estado” é completamente determinado em qualquer outro tempo: *isto é o que entendemos por causalidade*. Causalidade é inferência no tempo: dado o “estado” das coisas em um tempo, o “estado” das coisas é determinado unicamente em outro tempo. O que o torna determinístico é que o conhecimento do “estado” também determina precisamente todos os fenômenos físicos possíveis.

Esta distinção entre causal e determinístico pode não parecer muito importante, até que cheguemos a uma situação bastante diferente e que aparece na Mecânica Quântica. O *estado* no contexto da Física Newtoniana nos é familiar quando especificamos, por exemplo, o estado do sistema de partículas, as quais interagem umas com as outras por meio de forças instantâneas. A força gravitacional, como era concebida na época, especifica completamente o estado ao indicar precisamente onde as partículas estão em um determinado instante do tempo e como elas estão se movendo. Numa linguagem mais técnica,

é a especificação das posições e momentos das partículas. Se estes são conhecidos em um dado instante de tempo, e assumindo-se por qual lei de forças as partículas se movem, por exemplo, pela da gravitação, então a situação física é completamente especificada. O estado em qualquer outro tempo pode ser predito e também, uma vez que esta é uma teoria determinística, o conhecimento do estado é a origem do pleno conhecimento da resposta a todas as possíveis questões físicas que podem ser feitas.

Para indicar que a Física Newtoniana não é algo que está completamente para trás na história da física, lembremo-nos do seu enorme triunfo, por exemplo, toda vez que temos um anúncio de uma missão espacial bem sucedida. O que quer dizer que a Física Newtoniana, como qualquer teoria geral da física, tem que permanecer perfeitamente válida em seu próprio domínio. Aqui, naturalmente, o domínio é o movimento dos corpos materiais sob a ação de leis de força conhecidas que são interações instantâneas e cobrem, portanto, completamente o movimento de satélites artificiais no campo de fora perfeitamente conhecido que é fornecido pela atração gravitacional da Terra, ou da Lua, dos planetas e assim por diante.

A física introduz novas teorias não somente porque as teorias em um particular domínio são consideradas insatisfatórias, mas muitas vezes porque os domínios da física que entram em questão estão sendo estendidos. Além disto, as técnicas experimentais estão sendo sempre mais refinadas e novos fenômenos são vistos, os quais ultrapassam o nível de acurácia das teorias anteriores, e assim, os domínios abrangidos pela teoria anterior vão sendo estendidos¹. A introdução no século 17 dos conceitos Newtonianos levaram a um desenvolvimento contínuo dessas ideias que durou em torno de 200 anos, suas aplicações sendo para fenômenos astronômicos, como também durante o período da Revolução Industrial. Foi, entretanto, durante o século 19 que novas áreas da experiência física começaram a ser encontradas, em particular no domínio do eletromagnetismo. E então veio, finalmente, na segunda metade do século 19, quando essencialmente uma nova teoria física foi além do âmbito da Física Newtoniana. Esta teoria é a de campo de Maxwell, do eletromagnetismo.

Na medida em que a ampla categorização destas teorias eram realizadas, esta era também uma teoria causal, determinística. Mas o que a fez assim tão diferente foi o

¹ Nós aqui, particularmente, no desejamos entrar nesta questão sobre se é possível ou não serem sempre estendidos estes domínios.

que estava envolvido na especificação do estado. As teorias Newtonianas foram concebidas com partículas pontuais e a especificação do estado era a indicação de onde estas partículas estavam e como elas se moviam em um determinado tempo. É uma descrição discreta: um número finito de partículas, e um número finito de quantidades é necessário para caracterizar tudo sobre este sistema físico. Em contraste, em uma teoria de campo, continuemos a ter em mente o exemplo muito específico do campo eletromagnético, a especificação do estado não exige um número finito de coisas (onde as partículas estão e como elas se movem) mas um número infinito. Devemos, pelo menos em princípio, especificar o que o campo eletromagnético está fazendo, como os campos elétrico e magnético estão localizados em qualquer ponto do espaço e em um dado instante de tempo. E o que torna esta teoria causal é que se conhecemos o estado, se conhecemos a distribuição através do espaço dos campos elétrico e magnético em um dado tempo, então podemos predizer em qualquer tempo posterior quais serão as distribuições dos campos elétrico e magnético. Dado o estado em um tempo, o estado é unicamente determinado em outro tempo, tornando a teoria causal.

De novo, o que a torna determinística é que com o conhecimento do estado (o conhecimento dos campos elétrico e magnético) determinam completamente as respostas sobre todas questões que podem ser feitas sobre o campo eletromagnético. No domínio da física clássica e com a ideia que esta não é a palavra final, sabemos contudo, que o sucesso quantitativo da teoria de Maxwell é demonstrado todo dia. Podemos olhar para o desenvolvimento cada vez maior de sistemas de comunicação de rádio, microondas de radar ou de televisão, sem mencionar os telefones celulares, e vemos que não é uma história passada no desenvolvimento da física, é sim algo cuja validade é confirmada o tempo todo. O ponto, entretanto, é que isto se refere a um domínio limitado da experiência, que não é tudo do mundo físico.

Assim, temos dois tipos muito diferentes de teorias físicas, ambas causais e determinísticas, mas bastante diferente na natureza que caracteriza a especificação de um estado. Em contraste, de um lado, uma descrição discreta, onde um número finito de quantidades é especificada. Do outro lado, uma descrição contínua, onde campos são envolvidos, distribuídos através de todo espaço. Estes são modelos de dois limites de comportamento clássico: o discreto, o contínuo. É particularmente interessante ver como estes dois modelos clássicos inteiramente diferentes de descrição tem o sentido de unificarem-se

ou, talvez melhor, transcendido pelo desenvolvimento posterior da física quântica.

Ainda, prosseguindo com o desenvolvimento histórico, no início do século 20 ocorreram importantes desenvolvimentos, associados com o nome de Einstein: o desenvolvimento das teorias especial e geral da relatividade. Mas, ainda assim, estes não foram desenvolvimentos radicalmente novos no sentido que possui a mecânica quântica. Eles estavam completando a estrutura da física clássica. Foram o reconhecimento de que uma vez que colocados os fenômenos de campo, especificamente o campo eletromagnético sobre o mesmo patamar das teorias de partículas, houve uma modificação do ponto de vista estritamente Newtoniano. Enquanto ainda estamos lidando, dentro desta estrutura, com partículas pontuais, elas já não interagem através de forças instantâneas. Reconhecemos, como é particularmente enfatizado pela teoria da relatividade, que as interações entre partículas são propagadas através do espaço por meio da intermediação do campo. Incidentalmente, devemos salientar a diferença entre os dois modelos clássicos: do ponto de vista estritamente Newtoniano é uma interação instantânea à distância; do ponto de vista de campo é uma interação local propagada de um ponto do espaço a outros pontos contíguos. Dentro do conceito de campo, não há mais nenhuma ideia de propagação instantânea. É a propagação através do espaço e do tempo por meio de um mecanismo no qual, é de fato, intrinsecamente limitada pela velocidade. Isto é, claro, a famosa constância da velocidade da luz, o ponto inicial para todas as investigações na teoria especial da relatividade.

O que finalmente surge de tudo isto é uma teoria com um ponto de vista dualístico: existem partículas e campos, lado a lado, nenhuma explicada em termos da outra. Uma dualidade fundamental que é o ponto culminante da física clássica ou o ponto de vista estrito Newtoniano: *discreto*, de uma partícula e que foi modificado, porque reconhecemos que as interações entre partículas não são instantâneas, mas são propagadas através do mecanismo do campo com seu ponto de vista *contínuo*. O campo está lá para fornecer a dinâmica pela qual as partículas interagem.

A proposta dos desenvolvimentos da mecânica quântica é que estes dois conceitos clássicos distintos são mesclados e tornam-se superados em algo que não tem contrapartida clássica. O campo quantizado é um novo conceito, uma unidade que substitui a dualidade clássica. Devemos tentar traçar o desenvolvimento da Mecânica Quântica, começando desta formação clássica, até o mais profundo fundamento da Mecânica Quântica.

Faremos um resumo que mal pode fazer justiça a centenas de anos de trabalho duro de muitos físicos na tentativa de estabelecer as bases dessas leis, que agora chamamos de fenômenos microscópicos porque era, é claro, na investigação dos microcosmos (dos fenômenos atômicos), que um mundo inteiramente novo e um novo sistema de ordem foi aberto. Foi aí que se descobriu que as leis, que serviram muito bem a uma gama de experiências comuns na Terra até as experiências extraterrestres, em termos dos movimentos dos planetas, não estão em acordo com fenômenos observados. Quando não nos voltamos para fora, mas para dentro, mostramos novas leis de movimento, novas leis físicas, novas formas de pensamento, novas concepções filosóficas.

Agora, como isso aconteceu? É claro que em algumas sentenças não dá para se detalhar, de maneira fiel, a tremenda evolução da física, a qual ocorreu durante os últimos anos do século 19 e início do século 20. Lembremo-nos que estes desenvolvimentos começaram no que pode parecer um paradoxo. Tal como salientado anteriormente, tínhamos duas leis distintas de comportamento na física clássica, e uma nunca misturada com a outra. Ou tínhamos partículas, que eram objetos discretos, ou tínhamos campos, que eram objetos contínuos distribuídos através do espaço. Os campos podem ser atenuados o quanto se queira. Uma onda de rádio, medida em que viajamos através do espaço, torna-se cada vez mais fraca e mais fraca de uma forma perfeitamente contínua. Uma partícula, por outro lado, tem propriedades as quais traz sempre consigo. E assim a coisa mais notável foi a descoberta, em investigações de vários fenômenos atômicos, de um aparente paradoxo. A luz, por exemplo, era conhecida, de vários fenômenos de interferência, que possui propriedades típicas de ondas, que são fenômenos de campos; a luz é espalhada através do espaço com forma característica de campo. Quando se realiza experimentos adequados, descobre-se que essas ondas de luz sob certas condições experimentais parecem adquirir propriedades de partícula. Ao contrário da noção clássica de uma onda de luz, a qual sugere que sua energia é simplesmente distribuída continuamente em toda área que ocupa, a luz apresenta a capacidade de transferência de quantidades definidas e discretas de energia, atuando como se fosse uma partícula. Esta propriedade foi chamada de *quantum* de luz, mas agora geralmente chamada de *photon* - cuja característica, é claro, é ter associado a ele, um certo estado de movimento, uma energia definida, um momento definido. Estas duas noções clássicas bastante distintas e consideradas mutualmente excludentes, são realizadas conjuntamente no domínio microscópio. Um exemplo disto é o experimento

do efeito fotoelétrico, em que as ondas de luz, incidindo sobre metais, transfere energia aos elétrons e os liberta, através do qual uma determinada quantidade de energia foi absorvida toda de uma vez, contraria a imagem do campo clássico distribuído através do espaço em que se pode absorver mais ou menos energia, dependendo das circunstâncias accidentais desse elétron particular.

Foi portanto a luz, um exemplo característico de um fenômeno de onda ou de campo agindo como se fosse uma partícula. O inverso também era verdade, embora a prova experimental teve que esperar por cerca de 27 anos². Os elétrons eram o exemplo característico de partículas microscópicas. Os feixes de elétrons podem ser produzidos em tubos com vácuo e eles se movem em linha reta. Quando expostos a campos elétrico e magnético, mudam sua direção, assim como os corpos materiais deveriam fazer. Mas contudo, sob circunstâncias apropriadas, ou seja, quando um feixe de elétrons espalhado por corpos cristalinos, encontramos anéis de interferência, os quais são típicos de fenômenos ondulatórios que é caracteristicamente associado com um campo perturbado. Em outras palavras, ao invés de serem espalhados como objetos materiais seriam, os elétrons, que se movem através do cristal, são espalhados no caminho e produzem um padrão de interferência característico, tal como faria a luz de um certo comprimento de onda. Aqui então foram objetos pensados originalmente para serem essencialmente partículas clássicas que, sob novas condições experimentais, iriam exibir um contínuo ou fenômeno ondulatório.

Temos então, uma notável dualidade na qual aparentemente os mesmos sob certas circunstâncias, poderiam agir como partículas clássicas, mas sob outras circunstâncias, poderiam agir como ondas clássicas. Isso foi algo totalmente diferente de tudo que se tenha conhecido.

Enquanto isso, a investigação detalhada das propriedades dos átomos, foram reveladas por experimentos espectroscópicos. A possibilidade de produzir espectros atômicos em condições adequadas de gases rarefeitos, tornaram possível o estudo do comportamento de átomos individuais. Houve tentativas de entender os espectros observados em termos do movimento de elétrons dentro dos átomos, que terminou com um fracasso completo da física clássica para explicar esses fenômenos. De fato, a simples existência de átomos

²Esse experimento é o da difração do elétron por cristais, elaborado por George Paget Thomson, filho do conhecido físico Joseph John Thomson. Com este experimento George, foi laureado com o Nobel de Física em 1937.

que irradiam precisas linhas espectrais é um conflito com a física clássica. Se aceitarmos qualquer esquema de um átomo com elétrons movendo-se em torno de um núcleo central, como Rutherford descobriu em 1911, então, de acordo com as leis clássicas do eletromagnetismo, as cargas aceleradas em seus movimentos ao redor do núcleo, continuariam sempre a irradiar, até que finalmente, elas tenham esgotado toda energia possível e deveriam cair no núcleo. Primeiro de tudo, isto significava que os átomos não seriam estáveis, um flagrante de violação de uma simples experiência. Mais que isso, no decorrer deste processo os elétrons irradiariam linhas espectrais cujas frequências mudariam à medida em que eles se aproximam do núcleo. O que não é verificado experimentalmente, pois o que se tem são nítidas linhas espectrais. Claramente: *as leis da física macroscópica falham completamente dentro do mundo microscópico.*

Na análise detalhada como foi realizada, principalmente pelas mãos de Niels Bohr, e outros membros da importante corrente de pensamento que acabou sendo denominada de Escola de Copenhagen³, verificou-se que a única tentativa bem sucedida para compreender as propriedades do espectro atômico, consistiria na introdução de uma hipótese ousada: as quantidades físicas, tais como energia e o momento angular (os dois exemplos mais importantes) só poderiam ter certos valores definidos. Na mecânica clássica, eles assumiriam quaisquer valores possíveis, ou seja, classicamente são grandezas que variam continuamente. A uma partícula “clássica” pode ser dada qualquer energia que se deseje, basta fornecer a quantidade adequada de energia e se considerarmos um corpo em rotação, o momento angular deste corpo poder assumir qualquer valor. Não há nenhum conjunto particular de valores que são naturais. Mas, contudo, a análise dos fatos da espectroscopia atômica indicaram que os valores de energia, que átomos, ou elétrons em átomos, não poderiam ter esta continuidade. Assumiam valores bem definidos. Esta foi a única explicação que poderia ser dada para a descrição das linhas espectrais. Além disto os valores definidos dos momentos angulares são múltiplos simples de uma nova constante natural, conhecida como constante de Planck.

Temos assim a primeira de todas as quebras com as interpretações dos fenômenos da denominada física clássica: *quantidades que classicamente deveriam ter valores contínuos,*

³De acordo com a interpretação de Copenhagen, em qualquer medida o estado do objeto observado é afetado pelo instrumento de *medição macroscópica*, cuja existência e modo de operação, embora necessário para a possibilidade de observação do processo quântico, não contabilizado pela teoria quântica em si. Para maiores detalhes ver [8], pg.473.

agora possuem valores discretos. Isto, em outras palavras, é a observação geral do mundo microscópico: que o fenômeno de atomicidade é todo predominante. Devemos levar em conta a existência dos átomos, que afinal, não é uma concepção clássica. Classicamente não deve haver limite à medida em que se subdivide a matéria. O fato de que esta subdivisão não pode ser realizada indefinidamente, mas cessa quando chegamos à escala atómica, é claro, a afirmação mais fundamental de que algo novo está envolvido. Aqui está o fenômeno da atomicidade, não apenas na mera existência de átomos, mas também nas leis da mecânica de movimento: uma atomicidade do momento angular, uma atomicidade da ação, para colocá-lo na forma mais geral, foi um fenômeno básico da física microscópica. E nós simplesmente temos que aceitar que as propriedades físicas dos átomos devem ser entendidas em termos de novas leis as quais transcendem, qualquer coisa que antes era familiar. Isto é um novo mundo.

2.3 Estatística

Além deste fenômeno de atomicidade, que marca como fato básico, o novo fato da física microscópica, existe um outro que aparece ao mesmo tempo. Este é a natureza *estatística* dos fenômenos microscópicos, outra característica fundamental que deve ser aceita como a maneira que o mundo microscópico opera. Que o mundo microscópico é necessariamente estatístico pode ser entendido pelo exemplo já mencionado do fenômeno de difração de um feixe de elétrons, interagindo com um cristal, exibe. Pensemos, agora como esse fenômeno de difração viria. Um cristal é um arranjo regular de átomos com uma distância característica que os separa e, em virtude dessa dimensão característica, para qualquer fenômeno ondulatório que incida sobre o cristal, haverá certas direções preferenciais definidas de espalhamento, selecionada pela relação do comprimento de onda ao espaçamento interatômico do cristal. Este fenômeno é, por exemplo, bem conhecido no caso de raios-X, de fato, sua demonstração representou umas das provas experimentais de que os raios-X são fenômenos ondulatórios. Então, quando realizamos um experimento no qual um feixe de elétrons incide sobre um cristal e então se move em várias direções em direção a uma tela, que irá produzir um padrão de interferência característico lá; ao invés dos elétrons chegarem mais ou menos ao acaso, com uma intensidade uniforme em toda esta tela, encontram-se lugares preferidos.

No caso de um feixe tão fraco que um elétron dentro de um intervalo de tempo perfeitamente definido mova-se através do cristal de alguma maneira, irá finalmente ser detectado por pousar em algum lugar perfeitamente definido nesta tela. Esta pode ser uma tela de cintilação, por exemplo, e se você tiver um feixe fraco de elétrons e olhar para a tela, você irá de repente ver um flash de luz, não em toda a tela, mas em um lugar. O elétron exibe sua característica de partícula quando é finalmente detectado, quando ele finalmente exibe sua posição através da produção de um processo químico apropriado, cujo resultado é um flash de luz, logo observamos que o elétron está aqui. Para um único elétron, certamente não há padrão de interferência. O padrão de interferência não aparece de uma vez. Agora, um segundo elétron, que chega neste feixe muito fraco, o que acontecer com ele? Será que para no mesmo lugar? Não, para de maneira aleatória, em outro ponto que não tem relação com o primeiro. Mas à medida que continuamos, e os elétrons mais e mais param nesta tela cintilante - todos com as mesmas condições experimentais, mas cada um chegando independentemente dos outros, surge o padrão de interferência. Muitos elétrons chegam aqui, nenhum lá, e assim por diante, até a imagem final da intensidade ser alguma que dê o padrão geral. Contudo, isto surge como resultado da chegada aleatória dos elétrons em vários pontos da tela.

Para enfatizar outro aspecto, supomos que foi realizado esse tipo de experimento com dez bilhões de elétrons e foi produzido um certo padrão de interferência, uma imagem de intensidade. Então foi repetido o experimento, preparado extamente nas mesmas condições. Ao ser ligado o disparador, temos o que acontece, novamente, o primeiro elétron se move através do cristal. Será que vai parar no mesmo lugar que o primeiro elétron do feixe anterior? Certamente não. Começamos tudo novamente, mas o modelo como um todo se repete de forma aleatória. O primeiro elétron do segundo experimento terminar em outro lugar, e sem nenhuma relação entre eles ou os elétrons do primeiro experimento. Em outras palavras, as partículas individuais chegam de forma estatística perfeitamente aleatória. Não há possibilidade de se controlar isto. Isto, é claro, uma generalização de meio século de tentativas de fazê-lo: a imagem que devemos aceitar é que no domínio dos fenômenos microscópicos, somos incapazes de controlar como as partículas individuais irão comportar-se. Mas o que é perfeitamente determinado, e irá ser reproduzido toda vez que você repetir o experimento, é o padrão de interferência. As características do padrão são previsíveis e reproduzíveis. Temos então essa aparente dualidade de entidades: elétrons

que comportam-se, sob certas condições, como entidades discretas, partículas, terminando em locais definidos na tela, mas em outros aspectos agem como ondas, produzindo em suas características de intensidade global os fenômenos de interferência de onda. Devemos aceitar que o padrão de interferência não vai se repetir toda vez que em pequenas quantidades os elétrons alcancem a tela. Portanto deve haver um aspecto de aleatoriedade sobre onde os elétrons terminarão. A interferência padrão é finalmente a declaração das probabilidades relativas: com uma grande quantidade de repetições, encontram-se mais partículas lá do que aqui, e tudo de uma forma perfeitamente regular.

Num certo sentido quase uma inferência automática de tudo que foi dito acima, e que podemos interpretar como uma coisa mais fundamental: *uma característica básica das leis dos fenômenos microscópicos que eles são estatísticos*. Não é possível prever, em geral, o resultado de um evento específico. Mas o que se pode prever é o resultado médio, o resultado estatístico, a situação líquida, pela repetição de um número suficientemente grande de vezes do experimento. O propósito da física microscópica ou Mecânica Quântica fazer tais previsões.

Tem-se assim o grande desafio da física microscópica que existem estes dois novos aspectos básicos que devemos incorporar a uma imagem de mundo. Os fenômenos são atômicos e são também estatísticos. Mas que a nova física é estatística e portanto fundamentalmente diferente da física clássica completamente determinística, não significa que falhamos. Simplesmente reconhecemos o que a natureza dessa nova física deve ser. Não é para prever o resultado de cada evento individual. É de prever melhor, o que o resultado deve ser em média, qual o resultado provável deve ser. E como o experimento de espalhamento de elétrons(ou melhor, esta descrição simplista do experimento), indica, que isto é algo que necessariamente deve-se tolerar.

Devemos mencionar aqui que se tentarmos de alguma forma controlar exatamente onde o primeiro elétron chegará, e sabemos que podemos realmente fazer isso, podemos produzir uma nova situação experimental na qual, com certeza todos os elétrons chegarão num local pré-definido. No teremos o padrão de interferência. Em outras palavras, agora existem duas situações que estamos falando. A primeira, é que a interferência padrão aparece, é uma situação experimental definida, e em que não é possível prever ou controlar de forma alguma aonde os elétrons individuais aparecerão. Depois, há a segunda situação experimental, a qual podemos controlar e predizer onde os elétrons aparecerão no

percurso de movimento através de algum aparelho. Será um equipamento diferente onde o aparelho nunca produzir um padrão de interferência. Trata-se, por assim dizer, de dois aspectos distintos do mundo microscópico e requer uma situação experimental diferente para mostrar um ou outro.

Vamos pensar agora como, uma vez tendo reconhecido que temos duas características básicas do mundo microscópico, os aspectos de atomicidade e a natureza estatística dos eventos microscópicos, passemos a construir uma teoria que incorpore esta situação tão estranha.

2.4 A Teoria Física e as Medidas

Devemos ter alguma teoria matemática que, de alguma forma, representará um modelo matemático apropriado ou idealização e nos permitirá prever de forma coerente, da mesma maneira como a física sempre fez - o que resulta dos experimentos será, se aquilo que fornecemos corretamente nos leva às condições que caracterizam completamente a natureza do experimento. Para vermos o que temos que fazer devemos voltar atrás e pensar de maneira mais consciente a respeito de alguns princípios fundamentais (chamá-los de filosóficos, se assim preferir) subjacentes física clássica, ou física macroscópica, porque agora há distinção.

Pensemos especificamente na teoria da medida. E aqui, claro, temos de reconhecer o conceito filosófico fundamental: *que a física é uma ciência experimental, está preocupada apenas com as declarações que em algum sentido possam ser verificadas por um experimento. A proposta da teoria é fornecer uma unificação, uma codificação, e os resultados podem ser testados por meio de algum experimento. Portanto, o que é fundamental para qualquer teoria de uma área específica da natureza é a teoria medida nesse domínio.*

O que era característico da teoria da medida na física a clássica macroscópica? Bem, a coisa essencial que foi fundamental para ela, foi a concepção de uma medida não perturbada. É claro, perfeitamente óbvio para alguém que nunca tenha chegado perto de um laboratório de física, que no processo de medida, visando a obtenção de informações sobre um determinado objeto, devemos interagir com ele fisicamente de alguma forma. Mas, no entanto, gostaríamos de ser capazes de idealizar a interação de forma que pudéssemos significativamente estabelecer que a característica seria como se a interação não ocorresse.

Pode-se tomar como modelo mais simples a inserção de um termômetro em um corpo com água com o objetivo de determinar a temperatura da água. Idealmente seria, sem qualquer perturbação, por meio do termômetro. Sem a presença do termômetro, entretanto, não há meios de determinar qual é a temperatura. Como sabemos, sempre que a interação ocorre, deve haver algum distúrbio como efeito líquido da interação com o objeto em questão. A inserção de um termômetro em um balde de água muda a massa da água. Mudará a temperatura que deve ser medida de alguma maneira. Mas o que é característico da física clássica é que podemos afirmar que essa interação pode ser feita tão pequena quanto se queira, sem no entanto, tornar-se zero, porque ser for zero não temos meios de obter informações.

Que a interação seja tão pequena que não perturbe o objeto de interesse, na verdade nem sempre é necessário, nem sempre é possível. Por exemplo, algumas mudanças podem representar mudanças químicas, que são grandes alterações na natureza da substância, e estas certamente não são desprezíveis. É aqui que o *segundo aspecto da física macroscópica* entra em jogo. Uma vez que a física clássica é causal e determinística, podemos calcular como desejarmos e corrigir o efeito destas perturbações inevitáveis. É realmente familiar, que na física clássica qualquer medida tenha uma descrição teórica associada a ela, que representa o reconhecimento do que a perturbação foi e o cálculo de quão correta para ela em ordem, portanto, volta ao que uma medida idealizada não-perturbada seria. As duas características básicas das medidas em física clássica são:

- 1) Tornar a medida arbitrariamente pequena.
- 2) Se não se pode fazer a perturbação arbitrariamente pequena, pode-se calcular seu efeito e compensá-lo.

Na teoria da medida clássica não há nenhum limite para a precisão com que poderíamos fazer medições simultaneamente de qualquer número de propriedades físicas, como na declaração do conceito de estado, por exemplo, na Física Newtoniana. Quando afirma-se que o estado é a especificação das posições e momentos de todas as partículas em questão, então implica na premissa, de acordo com todo o esquema, que na verdade pode-se realizar as medições necessárias para fornecer os valores numéricos que essas quantidades têm em todos os tempos. Observações semelhantes se aplicam à medição da distribuição dos campos eletromagnéticos em todo o espaço.

Então em resumo, a teoria clássica da medida diz que não há limite para a precisão com a qual podemos atribuir valores numéricos para todas as quantidades que são necessárias para especificar o estado, e desde que todas essas teorias são determinísticas, isto significa, de uma só vez para todas as propriedades físicas. Desde que às propriedades físicas possam ser atribuídos valores numéricos de forma consistente, na física clássica não consta qualquer distinção entre as propriedades físicas e os valores numéricos que eles tenham em um determinado momento. Na física clássica, somos sempre capazes de atribuir às propriedades físicas, considerada como uma coisa abstrata, uma representação muito concreta por meio dos valores numéricos que uma medida não-perturbada deveria mostrar para elas em um determinado momento.

Agora, por outro lado, qual é a situação na física microscópica? Com base no vasto conjunto de dados experimentais, acumulados durante o curso de várias décadas, pode-se resumir as propriedades da física microscópica em dois pontos básicos: atomicidade e a natureza estatística do fenômeno.

O que significa? Primeiro de tudo, *atomicidade*: atomicidade significa que as entidades microscópicas tem muitas de suas propriedades realizadas em determinadas unidades básicas. Não há metade de um elétron. O elétron tem uma massa definida e possui uma carga definida. Se as interações em questão são de natureza eletrostática, não podemos reduzi-las em grande número, porque não há metade de uma unidade de carga. Isso indica-lhe imediatamente, a diferença básica entre as leis da medida microscópica e macroscópica. Deve-se levar em consideração o fato de que a força de interação, e que deve estar presente nas medidas em tudo, não pode em geral ser feita arbitrariamente pequena, porque os objetos físicos que interagem (os átomos, os elétrons) em geral têm propriedades físicas relevantes que vêm em certas unidades: *quanta*, a origem do nome da matéria que estamos discutindo, ou seja a mecânica quântica.

Agora, isto pode parecer como se não fosse uma dificuldade intransponível. Reconhecemos, mesmo na física clássica, que podem haver circunstâncias em que o ato da medida produz distúrbios definidos que não poderíamos minimizar por causa do tipo específico de medidas que foram realizadas. Na física clássica, dissemos que a situação pode ser tal que a interação da medida é muito forte e não pode ser feita arbitrariamente fraca, mas isso não atrapalha a filosofia subjacente da medida porque pode-se calcular com precisão arbitrária o que o efeito dessa interação foi e compensá-la de maneira correta.

Pode-se ainda fazer isso agora, no ambiente das medidas atômicas? A resposta é *não*, porque é o lugar onde o segundo aspecto fundamental das medidas microscópicas entram em jogo, ou seja, *os fenômenos da estatística*, o fato de que não podemos prever em detalhes o que cada evento fará, mas apenas fazer previsões em uma escala média ou estatística. O ato de medir, envolve uma forte interação. Na escala microscópica, é necessariamente uma forte interação, porque não podemos cortar as forças das cargas ao meio, não podemos mudar as propriedades destas partículas fundamentais, devemos aceitá-las como elas são - e assim inevitavelmente a medida produz uma grande perturbação, que não podemos corrigir para cada caso individual, pois não podemos controlar o que acontece em cada evento individual em todos os detalhes. Podemos prever ou controlar o que acontece, *na média*, nunca em qualquer instância individual. Portanto, o programa de computar o que o efeito do distúrbio era e corrigí-lo, agora na Mecânica Quântica é em geral, impossível. Assim, os dois princípios básicos da teoria da medida macroscópica são violados. Ou as interações não podem ser feitas arbitrariamente fracas por causa do fenômeno da atomicidade ou se quisermos aceitar isso e corrigí-lo, não podemos fazer isso porque não temos uma teoria determinística detalhada de cada evento individual: temos apenas a capacidade de prever ou controlar a média estatística.

Os dados experimentais para a física microscópica, mostram que se quisermos construir uma teoria, precisamos de toda uma nova teoria da medida microscópica, nos levando a um esquema matemático, o que significa dizer que não podemos mais falar de forma significativa dos valores numéricos que as propriedades físicas tem em um determinado momento. Dito de outro modo, o fracasso desses pressupostos fundamentais significa igualmente bem uma falha na capacidade de representar fenômenos físicos no domínio microscópico pelos números que mudam no tempo como fazemos no domínio macroscópico ou clássico. *Algo de uma natureza matemática completamente diferente é necessário*, tal que ele represente, ou imite, os fatos básicos da medida microscópica.

2.5 Números e Operadores

Para enfatizar o ponto relevante, dizemos que macroscopicamente, podemos medir uma propriedade física e atribuimos um número a ela, e se medimos uma segunda propriedade física e atribuimos outro número a ela. Podemos então falar deste par de números como

o par de valores das propriedades físicas em um determinado momento. Não há contradição aqui. Podemos perfeitamente voltar atrás e verificar que a primeira propriedade tem ainda o mesmo valor que antes, e de forma idealizada, realizar estas medidas com rapidez suficiente, ou regenerar as circunstâncias físicas, de modo que pudéssemos repetir a primeira medida.

Por outro lado, suponha que temos de fato conseguido medir, de algum modo uma propriedade física de um sistema atômico. Agora vamos fazer a medida da segunda propriedade física. Essa medida necessariamente implicará uma interação, a força desta interação não é arbitrariamente fraca e o seu efeito não é controlável, de tal forma que ela vai, em geral, produzir mudanças nas circunstâncias físicas que especificam as condições da primeira medida. Em outras palavras, o sistema que está sendo medido é perturbado de forma incontrolável de tal modo que se voltássemos e perguntássemos pelo valor da primeira propriedade física, verificando para ver se ela ainda tinha o mesmo valor de antes, não encontraríamos agora o mesmo valor, mas um apanhado aleatório de todos os possíveis valores que ela poderia assumir, com as várias probabilidades que dependem em detalhes sobre o que temos feito precisamente. Isto é assim porque a segunda medida tem introduzido uma nova situação física, a interação da segunda medida perturba o sistema físico de interesse tão violentamente que não temos como saber, exceto sob circunstâncias muito especiais, se o sistema foi deixado exatamente na mesma situação física que nos permita dizer que a primeira propriedade física ainda tem o mesmo valor que tinha antes da segunda medida⁴. Em outras palavras, uma vez que reconhecemos que o ato de medida introduz no objeto de medida mudanças que não são arbitrariamente pequenas, e que não podem ser controladas precisamente, então devemos reconhecer que cada vez que fazemos uma medida, introduzimos uma nova situação física que é essencialmente diferente da situação antes da medida.

⁴Este tipo de medida possui um nome especial, **medida quântica não-demolitiva** ou **QND**(**quantum nondemolition**). Considere um sistema, que possua algum observável A, o qual um experimentador deseja monitorar. Assumindo que o sistema está acoplado apenas ao mundo exterior pelo aparelho de medição do experimentador. Definimos uma medida QND de um observável A, como uma sequência de medidas precisas de A, tal que o resultado de cada medida é completamente previsível, a partir do resultado da primeira medida (possivelmente, com mais alguma outra informação sobre o estado inicial do sistema). Nem todo observável pode ser monitorado de forma QND. Para mais esclarecimentos ver [9], na seção **General Theory of Quantum Nondemolition Measurements**, pg. 549.

Então medimos duas propriedades físicas uma após a outra (que classicamente, é claro, não faria absolutamente diferença), estas são duas experiências diferentes na esfera microscópica. Temos duas situações físicas diferentes, a medida primeiramente da propriedade A e depois da propriedade B, duas sucessões de distúrbios que possuem o caráter microscópico, já na ordem inversa, B e depois A, envolvem perturbações inteiramente diferentes da ordem $A \Rightarrow B$. A situação física final depende crucialmente em que ordem as medidas microscópicas são realizadas, em geral, não é mais possível dizer que a propriedade A e a propriedade B tem valores determinados, isso só teria sentido se pudéssemos obter os mesmos valores numéricos das medidas, sem importar em qual ordem a medida foi realizada.

Portanto, o esquema matemático para medidas microscópicas não pode ser certamente a representação das propriedades físicas por números, porque os números não tem essa propriedade de depender da ordem em que as medidas são realizadas. A atribuição de um par de números para duas propriedades físicas não introduz senso de ordem, e nem de sequência. Devemos olhar para *um novo esquema matemático* em que a ordem das operações físicas é representada por uma ordem de execução de operações matemáticas. O esquema matemático que finalmente foi encontrado para ser necessário e bem sucedido é a representação, em uma forma muito abstrata, de propriedades físicas não por números mas por *elementos de uma álgebra* para a qual o sentido da multiplicação importa. Em outras palavras, a multiplicação desses símbolos algébricos, foi encontrado para ser a contrapartida adequada do desempenho sucessivo das medidas: que a ordem das medidas é significativa, como consequência das perturbações inevitáveis, é refletido no sentido da multiplicação desses símbolos.

E assim somos levados a um esquema matemático muito sofisticado e profundo em que as propriedades físicas são colocadas em correspondência com elementos não-comutativos de uma álgebra ou, como são frequentemente referidos, *operadores* não-comutativos em comparação com a representação mais elementar das propriedades físicas por *números*. Além disto cada estado físico (a ideia de estado reocorre) pode ser associado a um *vetor* em um espaço abstrato adequado no qual estes operadores atuam.

Como resultado de tudo isto, um esquema matemático muito bonito tem surgido o qual dá conta muito bem de todos esses fatos aparentemente estranhos e incomprensíveis da física microscópica. Esta simbolização das medidas atômicas é a Mecânica Quântica,

desenvolvida por Heisenberg, Born, Schrödinger e outros, essencialmente nos anos de 1925 a 1927, ainda muito distante do nosso ponto de vista atual.

Podemos descrever, dentro do mesmo quadro geral, o que a Mecânica Quântica é. A teoria é causal: dado o estado em um tempo, o estado em outro tempo, é unicamente determinado. O que a torna diferente é que ela não é uma teoria determinística. É portanto, uma teoria causal, estatisticamente determinística. O conhecimento do estado em um momento estabelece o estado em outro momento, mas qual informação é obtida do conhecimento do estado? Recordamos que classicamente, caso se conheça o estado, sabe-se tudo, isto é conhecendo-se onde as partículas estão e como elas se movem, pode-se prever qualquer outra propriedade física que se tenha interesse em saber, e com precisão arbitrária. Mas, como acabamos de dizer, precisão arbitrária de previsões individuais não podem existir no mundo microscópico. No entanto, em uma ciência de observação devemos ser capazes de fazer previsões precisas, e somos, só que *na Mecânica Quântica estas previsões precisas são de natureza estatística*. O conhecimento do estado permite prever a estatística, o resultado médio da medida de qualquer propriedade física, mas nunca o resultado de qualquer evento específico. Em outras palavras, se você conhece o estado, pode então prever qual o resultado dos repetidos ensaios da medida de uma determinada propriedade física. Pode-se determinar perfeitamente previsões estatísticas, mas não mais previsões individuais.

As conexões causais entre estados em diferentes tempos está ainda presente, e isto parece ser fundamental em qualquer ramo da física como conhecemos. Mas o que mudou drasticamente é que o conhecimento do estado não implica num conhecimento detalhado de toda a propriedade física, mas em geral, de qual é o comportamento médio ou estatístico das propriedades físicas. Isso, em um determinado sentido, é o entendimento final destes notáveis paradoxos no desenvolvimento inicial da teoria quântica. Eles agora são resolvidos em termos desta teoria estatística e não determinados individualmente.

2.6 Estados

Temos falado de estados, mas não indicamos, de forma alguma como um estado é definido. A resposta para isto pode ser dada se pensarmos em um modelo de um sistema físico, que ainda se aproxima muito dos modelos clássicos. Por exemplo, começamos

pensando que os átomos eram simplesmente entendidos por elétrons(pequenos corpos materiais, cada um deles carregando uma unidade de carga elétrica negativa) movendo-se em um determinado campo de força, o campo de força de atração de Coulomb do núcleo carregado positivamente. Aqui está uma situação que parece se adequar no modelo Newtoniano, uma lei de força definida, um número finito de corpos materiais. O que falha não é que a imagem dinâmica não seja correta, mas sim que as leis da física microscópica são diferentes. Eles não são de maneira a permitir uma previsão detalhada, determinística, mas têm um caráter de teoria estatisticamente determinística⁵.

Temos um modelo físico que possui características clássicas. Quando descrevemos um átomo, dizemos quantos elétrons existem e qual é a carga nuclear e a imagem ainda é clássica, pelo menos na medida em que nossas mentes concebem. O que é muito diferente é como calculamos. Por simplicidade, pensamos em um átomo de hidrogênio, onde existe apenas um elétron. Então, aqui está um elétron e o elétron tem associado a ele propriedades físicas de posição e de momento, e classicamente, diríamos que não há limite para a precisão com a qual se podem medir as posições e momentos simultaneamente. Mas o que os físicos têm aprendido ao longo desta linha de desenvolvimento é o que culminou no esquema matemático da Mecânica Quântica, e não é a definição própria de um estado no sentido clássico de um elétron em um átomo. O melhor que podemos fazer para especificar um estado não é atribuir simultaneamente valores numéricos a todas essas propriedades de posição e momento, mas apenas a uma parte delas.

Podemos, de fato, produzir situações experimentais em que sabemos exatamente onde um elétron está. Ele chega em uma tela de cintilação, e o flash de luz revela essencialmente a posição do elétron, ou podemos produzir situações experimentais em que sabemos precisamente qual é o momento da partícula. Isso, na verdade, é o que se tinha em mente quando descrevemos o experimento de feixe. Aqui está a partícula, movendo-se em uma direção definida com uma velocidade definida. Se a massa também está definida, isso significa que se conhece o momento, mas quando conhecemos o momento, em um sentido, não posso saber qual é a posição, e o aparecimento da interferência padrão formada pela chegada aleatória de partículas na tela é o sinal deste fato.

Por outro lado, poderia se produzir uma situação experimental muito diferente, na qual organizamos as coisas de forma que os elétrons sempre cheguem em um determinado local.

⁵Enfatizamos que esta é a visão de Schwinger em relação Mecânica Quântica.

Então, se tem uma medida da posição, e podemos predizer precisamente qual o resultado que tal medida deva ser. Logo nunca teremos o padrão de interferência que é característica de uma situação física muito diferente, em que os momentos são perfeitamente definidos.

O que mudou basicamente, é a natureza do estado. Se temos um certo número de partículas (por exemplo, elétrons), a especificação das quantidades de estados quânticos diz onde as partículas estão em um dado momento *ou*, alternativamente, como elas se movem também em um dado momento, mas nunca ambos juntos. Então, na verdade, em comparação com o que seria uma especificação completa do estado na física clássica: *onde os elétrons estão e como se movem*, na Mecânica Quântica o estado é especificado por dizer que, com uma precisão arbitrária, o resultado da medida seria parte das propriedades. Mas então somos completamente incapazes de predizer os valores individuais da outra parte, que terá simplesmente as distribuições de probabilidade aleatória.

Se forem feitas medidas de novo e de novo neste estado, sobre o qual você conhece exatamente as posições, você sempre encontrará essa posição. Mas se neste estado, fazem-se medidas de momento, nunca se encontrará um valor definido, você encontrará uma distribuição estatística aleatória. E quanto mais precisamente se especificar a posição, maior será essa distribuição de momento.

Esta simples situação é essencialmente uma declaração do que seja talvez o mais amplo princípio filosófico que surgiu a partir desses estudos da física microscópica. Isso é o que conhecemos como o princípio de Bohr da complementariedade. Temos usado, e devemos continuar a usar, o exemplo chamado dualidade onda-partícula, vinculado aos nomes de Einstein e de Broglie, para a ilustração da complementariedade. O desenvolvimento geral, entretanto, estabelece que a dualidade onda-partícula é apenas uma consequência da complementariedade fundamental.

Assim, pela ideia de complementaridade queremos dizer a unificação final, dentro destes princípios gerais, do qual começou parecendo ser um paradoxo. Elétrons, em determinadas situações experimentais perfeitamente definidas, agem como partículas, e em outras situações experimentais, agem como ondas (o que se tem expresso de forma mais precisa utilizando a ideia de que a definição de estado nunca se refere a todas as propriedades físicas mas apenas a uma parte delas). Tem-se o privilégio de realizar experimentos em que diferentes escolhas são feitas a respeito de quais serão as propriedades físicas, cujos valores são precisamente conhecidos. Ondas, por exemplo, representam a

opção, a escolha por parte do experimentador, de produzir uma situação experimental em que os momentos são selecionados para terem valores definidos, então as posições não podem ser controladas.

O princípio de Bohr de complementaridade é a afirmação de que temos na física microscópica, antes de tudo, um novo mundo, em que analogias clássicas falham. Mas, no entanto, há certas situações em que as analogias de uma natureza clássica se mantém, situações em que é possível falar de forma significativa de partículas no que diz respeito a certas circunstâncias e certas medidas e outras situações onde elétrons, ou o que seja, pode ser dito como ondas. Duas figuras clássicas distintas podem manter-se sob situações físicas diferentes, nunca simultaneamente, e a aplicabilidade de uma forma impede a aplicabilidade da outra, as duas analogias clássicas são mutuamente excludentes. Mas ambas as figuras estão em pé de igualdade. Podemos produzir situações experimentais em que tanto a figura clássica pode ser aplicada, e a outra é então inaplicável. A ideia da complementaridade é que a plena compreensão deste mundo microscópico só vem a partir da possibilidade da aplicação de ambas as figuras, nenhuma em si está completa. Ambas devem ser presentes, mas quando uma é aplicada, a outra é excluída.

Isto é, em essência, a situação completamente nova, que não tem correspondência em nenhum dos modelos clássicos do pensamento filosófico. É algo que simplesmente deve ser aceito. Pelo menos os físicos aceitaram, esta forma em que as leis da física microscópica têm sido entendidas, e como resultado um enorme sucesso da Mecânica Quântica. Dentro do espaço de poucos anos, a aplicação desses entendimentos em fenômenos microscópicos foi completamente varrido, e era tradicionalmente considerado como os grandes problemas clássicos da física. Pelo menos em princípio, se não na prática, uma redução da química à física foi trazida. A compreensão de todas as diversas propriedades da matéria em todas as suas formas, sob todas as circunstâncias normais é reduzida a alguns fatos simples. As leis da Mecânica Quântica e a especificação de qual configuração particular se está falando é tudo que se precisa, pelo menos em princípio, e tendo grande sucesso na prática, no entendimento das propriedades dos corpos materiais, conforme indicado pela notável evolução da teoria subjacente do estado sólido e muitas outras aplicações.

Tudo isto é em grande medida, a expressão do entendimento das leis da física atômica, que tem sido codificada e unificada na Mecânica Quântica.

Em um sentido mais fundamental, isto foi concluído em 1927. Não significa o fim

das investigações dos físicos do mundo físico. O desenvolvimento tem continuado no sentido de procurar domínios inteiramente novos da experiência física dentro do domínio de altas energias e pequenas distâncias. Temos falado de novo e de novo do átomo, mas no centro do átomo existe o núcleo, e dentro do núcleo existem os nucleons, e como agora entendemos, os nucleons são compostos de outras entidades ainda mais fundamentais. A busca continua.

Para entender um pouco mais em que linguagem este desenvolvimento é prosseguido, precisa-se voltar a uma ideia que nos referimos anteriormente: a noção de campo quantizado, porque aqui temos talvez a expressão mais profunda do que foi aprendido dentro da estrutura destes fenômenos microscópicos. Pode-se apresentar isso em termos de outra ideia filosófica básica, a qual é dada de maneira inteiramente nova dentro dos fenômenos da física microscópica. Este é o conceito de identidade ou indistinguibilidade. É perfeitamente claro que quando falamos, mesmo na física clássica de elétrons, que a mera terminologia indica que entendemos que um elétron deve ser igual a outro. Se medirmos qualquer uma das propriedades fundamentais não-acidentais deste elétron, ou dos elétrons (sua massa, sua carga) e quaisquer que sejam as propriedades mais sofisticadas que se possa estar preocupado, estas são invariavelmente as mesmas. Isto é, a concepção fundamental da uniformidade da natureza sem a qual a física nunca poderia começar a operar. Devemos assumir que uma amostra de uma substância em particular é como qualquer outra amostra, se as circunstâncias relevantes não estão envolvidas.

Então, se tomarmos quaisquer dois elétrons, descrevendo-os classicamente, no caso, se tivéssemos dois feixes de elétrons movendo-se em alguma câmara de vácuo, então compreendemos que um elétron é igual ao outro, e na *Física Clássica*, não há implicações especiais nisto, porque apesar da identidade, a indiscernibilidade em princípio de dois elétrons, mas na física clássica nunca teremos qualquer dificuldade para distingui-los. Podemos dizer que este elétron é proveniente dessa região do espaço, o segundo elétron daquela região do espaço. Classicamente, somos capazes de seguir em detalhes as trajetórias dessas partículas, e posso dizer precisamente a cada instante de onde este elétron particular veio e traçar seu caminho continuamente até o ponto de origem. Não importa o quanto esses elétrons possam interagir de forma complicada dentro da câmara de vácuo ou um tubo de rádio, por exemplo, eu sempre posso identificá-los, pelo menos a princípio, utilizando nada mais que as leis clássicas da física.

Agora, pode-se ver imediatamente que a situação deve ser muito diferente quando reconhecemos a realidade do mundo microscópico que não é governado por estas leis clássicas. Considere, por exemplo, um experimento de colisão. Suponha que temos dois feixes de elétrons. É, naturalmente importante perceber que as leis da natureza que falamos regem todas as diversas manifestações da matéria. Se falamos de elétrons, é por ser uma convenção histórica. Mas poderiam ser, prótons, nêutrons, hyperons, mésons- π , as leis da física são as mesmas. Se os elétrons colidem, eles devem entrar em uma interação mais forte. É claro, que eles não fazem como fariam classicamente, pois para termos uma trajetória detalhada, devemos fazer medições, sem perturbar a natureza do experimento, verificando exatamente o que um elétron em particular está fazendo a cada instante de tempo, o que exige um grau de controle, e assim, do determinismo, que é impossível no mundo microscópico. Se tivermos produzido um experimento no qual as partículas principais são direcionadas a uma outra, então elas tem momentos bem definidos. Logo, como enfatizado, as medidas complementares físicas já não podem ser especificadas em detalhe. Não se tem nenhuma forma de saber precisamente onde estes elétrons estão, e não se pode dar significado a tais declarações como suas as posições.

Finalmente quando estes feixes estão separados, já não temos qualquer dúvida sobre qual é qual, não se tem nenhuma maneira ou capacidade de dizer se este elétron é esse ou aquele, porque não se tem capacidade de acompanhar em detalhes o que aconteceu exatamente. Em outras palavras, estes fenômenos físicos básicos, a atomicidade, e a natureza estatística das coisas, a incapacidade de controlar os eventos individuais em detalhes, implicam consequentemente a ausência de uma habilidade, no sentido experimental fundamental, para dizer qual partícula é qual em todas as fases de interação. Isso requer, portanto, que a nova descrição deve ter em conta esta falha fundamental de ser capaz de colocar uma etiqueta em cada partícula. Repitimos: não há experiência que se possa realizar que dá realidade a esse rótulo porque isso representaria uma intervenção para este experimento, o desempenho de um experimento de localização microscópica detalhada, iria mudar completamente a natureza do experimento de colisão. E ele não seria mais uma colisão simples, haveria alguma coisa lá, igualmente importante, interagindo com estas partículas. É uma experiência *diferente*. Portanto se deve reconhecer que se deve indicar precisamente em detalhe cada experimento, pois cada medida que se deseja realizar provoca mudanças nas condições do experimento, produz uma interferência forte,

não controlável em outras coisas que estão acontecendo. O resultado de tudo isso é o reconhecimento de que a descrição de estados de várias partículas, necessariamente, só pode ser feito de uma forma que incorpora desde o ínicio, o fato que elas são indistinguíveis, que rótulos particulares não tem sentido. Isto significa simplesmente que quando temos várias partículas indistinguíveis, os estados só podem ser descritos em uma maneira que é perfeitamente simétrica entre todas as partículas que contribuem para isto.

Agora a palavra “simétrico” é para ser entendida em um sentido mais amplo. A maneira tradicional pela qual os estados são especificados em termos de quantidades numéricas que são conhecidas como funções de onda. Falamos de vetores, vetores de estado, que são entidades abstratas, e as funções de onda são representações numéricas particulares destes vetores abstratos. Se temos várias partículas idênticas e a função de onda é por exemplo uma função de suas posições. A única descrição que é sustentável é aquela em que essa função de onda é completamente simétrica entre todas essas posições, de modo que todas as partículas estão exatamente nas mesmas condições. Os rótulos arbitrários (que poderia dizer que esta partícula é a primeira, ou ser a segunda partícula, e assim por diante) devem ser privados de qualquer significado distintivo, insistindo em que, não importa como as etiquetas são atribuídas, a função de onda do estado é a mesma. Os próprios estados devem permanecer inalterados, se decidirmos distribuir os rótulos arbitrários de forma diferente entre as partículas idênticas. Mas isso pode ser assegurado quer fazendo os estados completamente simétricos ou completamente antisimétricos (no sentido mais geral de simetria referido acima). Dessa forma, reconhecemos a existência de dois tipos muito diferentes de sistemas de partículas idênticas. O fóton pertence a esta classe de estados simétricos e o elétron cai na estrutura de estados antisimétricos.

Vamos dar uma olhada nessas funções de onda, começando apenas com uma única partícula. Sua função de onda é simplesmente uma função de sua posição, ou seja $\psi \equiv \psi(\vec{x}, t)$, ou se quisermos, das três coordenadas que especificam a posição e do tempo. Aqui se pode dizer que temos, de certa forma, um campo, o campo $\psi(\vec{x}, t)$. Pois um campo é fisicamente um objeto distribuído no espaço e no tempo. Isto seria análogo, ao campo eletromagnético da teoria de Maxwell, porém como já mencionamos a natureza que especifica o estado na Mecânica Quântica é diferente da Mecânica Clássica, e de fato, pode parecer que a função de onda seja um campo de algum outro tipo. Mas, assim que lidamos com várias partículas, a função de onda não se mostra como um campo no sentido

convencional⁶, já que agora há função de duas, três, ou mais posições (e tempo). Aqui temos algo bastante abstrato, um espaço de configuração multidimensional, e uma função de onda de multipartícula é uma maneira de indicar que as várias partículas estão fazendo de uma única vez, representado num espaço matemático altamente hipotético, pois existem muitos espaços tri-dimensionais agora a serem considerados ao mesmo tempo (espaços tri-dimensionais das partículas do sistema em questão).

Então, nós temos estados de partículas individuais, de duas partículas, de três partículas, e assim por diante. Claramente a forma vai ficando cada vez mais complicada. Uma mudança de perspectiva muito fecunda começa por reconhecer que também há um estado de não-partícula, o estado de *vácuo*. Estados com apenas uma partícula podem então ser pensados como trazidos através da criação de uma partícula a partir do estado de vácuo. Primeiro se tem o vácuo, então se cria uma partícula e se tem o estado de uma partícula. Se criamos outra partícula, se tem um estado de duas partículas, então uma terceira, uma quarta partícula, assim por diante. No momento, isso não é nada além de uma idealização, do processo abstrato de criação, que em um certo sentido, apenas torna a contabilidade mais fácil. O que torna útil e importante agora é que podemos lidar com situações experimentais com números de partículas variados, situações em que as partículas são fisicamente criadas e aniquiladas.

No esquema matemático, descrevemos a criação pela aplicação de um operador denominado, operador criação e aplicando-o, por exemplo, em um estado com cinco partículas, o resultado é um estado de seis partículas. É um operador, em vez de uma quantidade numérica, pois simboliza uma propriedade física que é algo além do que estamos acostumados a pensar, e também porque ele age sobre um estado para produzir outro com mais uma partícula.

Então imagine que se aplicamos o operador de criação ao estado de vácuo e se cria uma partícula 1 no tempo t , iremos então criar uma partícula 2 em um tempo t (ou qualquer número de partículas adicionais pela ação repetida deste operador de criação, mas devemos

⁶Lembremos que o campo *resultante* no sentido clássico, por exemplo, de um sistema de duas partículas, seria a contribuição do campo da partícula 1 e do campo da partícula 2, já no caso quântico não se pode qualificar dessa maneira, exatamente pelo fato de termos partículas indistinguíveis (não rotuláveis), e se tentarmos distingui-las, acabaremos perturbando o sistema, como consequência desta perturbação não temos o conhecimento completo do estado, por isso que a função de onda é algo matematicamente diferente do campo clássico, apesar de ser algo contínuo no espaço e tempo.

ter dois agora). Desta maneira, produzimos algo que tem, essencialmente, a natureza de uma função de onda de duas partículas que envolve ambas as posições e o tempo t . E a coisa importante é que estes requerimentos de simetria (ou antisimetria) sobre esta função de onda pode agora ser convertidos em declarações algébricas sobre esses operadores. Se a situação é de simetria, como no caso dos fótons, os operadores de criação são multiplicados em uma ordem ou em outra, o resultado é o mesmo para o estado das partículas, porém essa independência encontra-se dentro do desenvolvimento da teoria quântica e nada tem haver com as questões clássicas, pois lá tínhamos números, já aqui temos operadores, sendo que esta independência da ordem de multiplicação produz simetria. Se é antisimetria, como no caso dos elétrons, assegura-se que se eles são multiplicados em uma ordem, o resultado é negativo do que ocorre quando eles são multiplicados na ordem inversa. As propriedades destas duas classes de partículas idênticas(ou, as suas estatísticas), passam a ser substituídas pela propriedade algébrica destes operadores. Em resumo, ao invés de falarmos sobre um sistema de um número de partículas definido, podemos pensar em sistemas físicos com um número de partículas indefinido porque produzimos qualquer número de partículas que estivermos interessados pela aplicação deste operador criação. Assim, transferimos a nossa atenção para este operador como o objeto físico básico, isso que se quer dizer com *campo quantizado*: é por um lado um campo, uma quantidade matemática que varia continuamente no tempo e no espaço, e por outro lado, certamente não é um campo clássico porque estes operadores não são quantidades físicas que podem ser medidas simultaneamente. No caráter do operador, de fato o sentido da multiplicação é significativo(de um modo muito mais profundo que se pode descrevê-lo aqui)temos os elementos da discontinuidade que são a essência do conceito de partícula.

Os dois conceitos clássicos inteiramente não relacionados, ou seja, da natureza discreta das partículas e da continuidade do campo, são agora unificados nesta concepção inteiramente nova do campo quantizado. Um novo conceito, mais do que unificado, pois transcende já que a nova concepção vai além. Os dois são, afinal de contas, incompatíveis no sentido clássico porque não há nada que seja discreto e contínuo. Chegamos a algo que não tem nenhuma dessas propriedades, mas que, em domínios limitados podem ser caracterizados em termos de qualquer um desses conceitos convencionais.

Então, aqui é a unificação fundamental, trazido por essa ideia de campo quantizado. Enfatizamos como o campo quantizado nos permite falar de forma significativa dos atos de

criação, mas deve ser óbvio que, correspondentemente, o processo inverso de aniquilação, em que as partículas são destruídas em vários pontos no espaço e no tempo, são igualmente contabilizados pelo campo quantizado.

Historicamente o campo quantizado era apenas uma maneira conveniente de resumir as propriedades matemáticas das partículas indistinguíveis, mas em breve, através do desenvolvimento cada vez mais amplo da ciência experimental, o que foi concebido simplesmente como uma idealização matemática tornou-se realidade. Nos referimos à capacidade, se há energia suficiente disponível, para suprir a energia de repouso das partículas de acordo com a famosa relação de Einstein $E = mc^2$: dado a energia E que corresponde à sua massa m , uma partícula física pode ser produzida. Pode ser necessário por outras razões, tais como a conservação da carga elétrica, produzi-las em pares, como é de fato o caso para o elétron carregado negativamente e sua contraparte carregado positivamente, o pósitron.

No início de 1930, estes experimentos tinham sido feitos. Anos mais tarde, pares de prótons e antiprotons, de nêutrons e antinêutrons foram produzidos para os quais quantidades muito maiores de energia são necessárias, e agora experimentos tem criado (pares) a maioria das outras partículas conhecidas que são os blocos de construção da natureza. Estes experimentos sozinhos dão a realidade física ao campo quantizado, em sua interpretação dos atos simbolizados na criação e a destruição.

Os experimentos continuaram, mais e mais propriedades refinadas tornaram-se conhecidas, aplicações mais e mais nítidas da teoria foram exigidas. Por exemplo, no caso de elétrons em átomos, do ponto de vista do campo, estamos realmente preocupados com a dinâmica de dois campos. Existe o campo quantizado que está associada com os elétrons e também sua contraparte, os pósitrons; existe o campo quantizado que é associado com o campo eletromagnético, ou, o campo de fôtons. O campo do fóton e o campo do elétron estão em interação. E como consequência, a identificação de cada campo por estes nomes físicos são apenas aproximados. Apenas se a interação entre os dois campos é fraca, como em grande parte é neste exemplo, podemos usar nomes físicos em relação a estes objetos matemáticos. Mas em uma teoria mais refinada na qual a interação entre eles deve agora ser levada em conta, temos de reconhecer que o que chamamos fisicamente um elétron é apenas parcialmente a ser associado a esse campo de elétrons sozinho. Também é parcialmente associado ao campo de fôtons, porque os dois

estão em interação. Fisicamente, um elétron pode às vezes radiar um fóton, mas ele pode também reabsorvê-lo. Em outras palavras, o que nós chamamos fisicamente um elétron, em um nível mais profundo, pode ser descrito por vezes pela ação do campo de elétron somente, mas outra fração da história total, envolve também a ação do campo de fótons. E, inversamente, o que chamamos de um fóton, propagando através do espaço vazio, não é meramente o resultado do ato de criação de um campo de fóton análogo, porque o fóton pode ocasionalmente materializar-se no espaço e tornar-se substituído por um elétron e um pósitron que, em seguida, no passar do tempo, recombina-se para formar o fóton.

Em outras palavras, o objeto físico que chamamos de fóton não é o que é criado o tempo todo, aplicando o operador matemático criação de fóton ao estado de vácuo. Os outros operadores, as quantidades que representam a criação de elétrons e pósitrons, também entram em jogo. Uma vez que se reconhece isso, estabelecemos uma distinção entre os dois níveis de descrição física. Existe o nível fenomenológico em que reconhecemos as propriedades dos elétrons, dos fótons como os observamos, fora é claro, da análise enormemente detalhada dos experimentos microscópicos. Depois, há a tentativa de aprofundar a compreensão em termos de objetos mais primitivos que são esses campos quantizados, que *já não são colocados em correspondência imediata com as partículas fenomenológicas*, mas através de uma cadeia de desenvolvimento dinâmico. E, de fato, este programa de renormalização, para mencionar o termo técnico, como foi aplicado especificamente para o caso de elétrons e fótons, através do desenvolvimento do que é chamado eletrodinâmica quântica, levou a uma descrição em um nível mais fundamental de algumas características mais finas do comportamento do elétron e do fóton. O que antes eram consideradas anomalias, coisas que eram inesperadas, tornou-se resultado previsto deste entendimento aprofundado. A lição aprendida foi que nosso entendimento mais profundo não é para ser mostrado em termos do que realmente vemos, mas em um nível mais fundamental.

Ao longo da história da física, começamos com átomos como objetos fundamentais e então tentamos entender as propriedades dos átomos em termos de elétrons e um núcleo, e analisá-lo em termos das propriedades dos núcleos e assim por diante. Em termos mais simples, esta é concepção de como vamos em termos de partículas cada vez menores, a regiões cada vez menores do espaço.

A análise de partículas tal como as conhecemos e como associamos elas com campos é

uma tentativa de compreensão, em um nível mais aprofundado, que se esforça para uma simplificação em termos de campos quantizados ainda mais fundamentais que tenham poucas propriedades, a luta por mais profundas leis simbólicas com poucas constantes arbitrárias. Por exemplo, ao contrário da situação experimental em que a carga do elétron, a massa do elétron, o momento magnético do elétron, são constantes independentes, a compreensão mais profunda tenta explicar um ou mais destes em termos de um menor número de coisas fundamentais.

Assim tem sido no caso da eletrodinâmica quântica. Esta tem sido uma aplicação de muito sucesso dessa ideia que é a concepção de campo quantizado, a declaração do nosso entendimento em um nível mais profundo do fenômeno microscópico. Mas como mencionamos, e ele deve nos ser familiar, a medida em que, no curso do desenvolvimento de máquinas de energia cada vez mais altas, mais e mais partículas se tornem conhecidas e estas tem aparecido em uma enorme gama de propriedades. Algumas delas são estáveis, algumas delas são instáveis, decaem em cada outra de todas as formas imagináveis possíveis. Com energia suficiente disponível, elas são produzidas repetidamente como resultado obviamente de fortes interações. Elas avançam muito lentamente para desaparecer sucessivamente, movendo-se no final para partículas estáveis que conhecemos, que são ainda os elétrons, prótons, mais algumas outras.

Agora, as interações que estão envolvidas aqui nestes estudos básicos do fenômeno nuclear são de um tipo inteiramente diferente do que da eletromagnética. As forças eletromagnéticas são essencialmente fracas. E com base nisto, tem sido capaz de desenvolver os métodos técnicos de lidar com essas interações. Mas quando tornaram-se muito mais fortes os laços que não somente mantém o núcleo junto, mas mantém unidas as partículas que compõe o núcleo, estamos em um nível muito mais difícil no sentido em que não são apenas fenômenos desconcertantemente complicados, mas também a falta de meios matemáticos para desenhar as implicações de qualquer hipótese particular sobre o que está acontecendo. Como resultado disto, há dúvidas sobre o que deveria ser a natureza fundamental de uma explanação neste nível.

Será que deveria ser a continuação desse ponto de vista da busca pela compreensão mais profunda em termos preferencialmente de um número muito pequeno de campos fundamentais, que em sua interação dinâmica, e como resultado da complexidade dessa dinâmica, finalmente tornaria a variedade da natureza do mundo como o vemos com-

preensível? Ou devemos realmente abandonar essa tentativa, substituindo as dificuldades pela antecipação da impossibilidade fundamental, e simplesmente descrever a natureza em termos do que acontece quando tomamos várias partículas microscópicas e realizamos experimentos sobre elas? Enviamos elétrons, prótons para os vários tipos de núcleos, onde realizamos experimentos em que estas partículas entram em uma certa região muito pequena. Não fazemos nenhuma tentativa de descrever o que se passa lá nesta região e tentarmos simplesmente caracterizar finalmente o que emerge quando as partículas emergentes, são separadas novamente. É a proposta da física teórica não ser mais do que uma catalogação de todas as coisas que podem acontecer quando partículas interagem cada uma com a outra e separam? Ou é para ser uma compreensão em um nível mais profundo em que existem coisas que não são diretamente observáveis (como o anterior campo quantizado é), mas em termos de que teremos uma compreensão mais fundamental? Bem, esta questão - idealizada, francamente, além de todo reconhecimento - é, em certo sentido o problema de fundo filosófico, que confronta a física teórica na fronteira da física das altas energias, onde tentamos entender a estrutura da matéria como é revelada para nós, em toda sua complexidade, utilizando sempre o nível crescente de energia que se tornou disponível para estudar os blocos básicos que compõem a matéria e, neste sentido, criar novos tipos de matéria.

Capítulo 3

Simbologia e Álgebra das Medidas

3.1 Símbolos da Medida

Começamos refinando o experimento de Stern-Gerlach¹ (que utiliza átomos de prata afim de medir uma quantidade física, chamada momento magnético numa direção preferencial, μ_z , que toma apenas dois valores possíveis, conhecidos $+\mu$ e $-\mu$), pelo tratamento com feixes únicos, executamos medidas seletivas, que serão representadas na Figura 3.1.

Generalizamos a medida μ_z dizendo que ela um exemplo, de uma quantidade física A que tem os valores possíveis a_1, a_2, \dots, a_n , onde um valor típico será designado como a' ou a'' . O aparelho físico específico que mede μ_z e seleciona um resultado particular, sugerido pela Figura 3.2, que se tornará então um aparelho não-especificado (a palavra não-especificado, entra para fazer com que os aparelhos físicos específicos, reais, possam ser tratados pela abstração concebida na teoria da medida.)

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Medida de A} \\ \text{Seleciona } a' \end{array}}, \quad (3.1)$$

carregando a informação que a medida é uma ação física em uma região finita do espaço (e tempo). A caixa de (3.1) é inconveniente como um símbolo. Simplificamos por

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Medida de A} \\ \text{Seleciona } a' \end{array}} \rightarrow |a' a'|, \quad (3.2)$$

¹O experimento de Stern-Gerlach demonstra através de medida direta que o elétron possui um momento magnético intrínseco $\vec{\mu}$, sendo este associado a um monento angular intrínseco \vec{S} . Escreve-se a relação entre os momentos como $\vec{\mu} = -g_S \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}$.

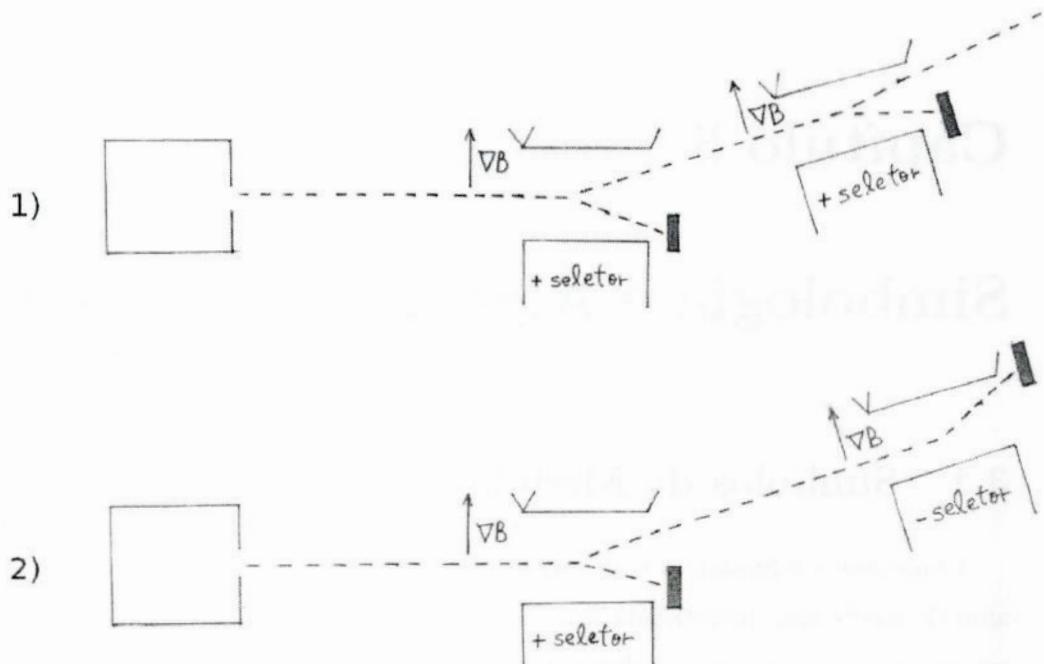


Figura 3.1: O item 1), nos mostra que o feixe resultante tem momento magnético +, no item 2), nenhum feixe transmitido. Vale notar que o segundo aparelho está inclinado com relação ao primeiro aparelho, pois o feixe resultante que sai do primeiro possui uma certa deflexão. Então para que o segundo aparelho possa medir a mesma propriedade física em questão, tenta-se obter o ângulo de deflexão o mais próximo de zero possível, afim de que a direções dos campos magnéticos dos aparelhos, possam ser consideradas paralelas.

na qual *retém a implicação de uma região finita associada com a ação de medida*. A característica física A é implícita, adequadamente implicada por a' . Mas por que a repetição de a' ? Primeiro, ela prepara o caminho para a generalização, segundo ela é um lembrete que a medida seletiva envolve uma ação inicial seguida por sua verificação, como na sequência do item 1) da Figura 3.1.

Introduzimos símbolos para duas ações particularmente simples: o símbolo unitário,

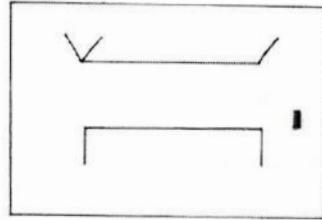


Figura 3.2: Aparelho físico específico que mede μ_z .

seleciona tudo

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Aceita} \\ \text{Tudo} \end{array}} \rightarrow \mathbf{1} \quad (3.3)$$

e o símbolo nulo, não seleciona nada

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Aceita} \\ \text{Nada} \end{array}} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Um passo a favor da construção de uma álgebra para estes símbolos é fazer uma representação *sucessiva* de ações de medida (deslocada no tempo) pela *multiplicação* sequencial dos respectivos símbolos. Assim a generalização do item 1) da Figura 3.1, nos informa que a repetição de uma medida seletiva confirma a medida, é simbolizada por

$$|a' a'| |a' a'| = |a' a'|. \quad (3.5)$$

A generalização do item 2) da Figura 3.1

$$a' \neq a'': |a' a'| |a'' a''| = \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

Então, como afirmativa razoavelmente óbvia sobre a multiplicação dos símbolos de medida **1** e **0** temos

$$\begin{aligned} |a' a'| \mathbf{1} &= \mathbf{1} |a' a'| = |a' a'|, \\ \mathbf{1} \mathbf{1} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \mathbf{0} &= \mathbf{0} \mathbf{1} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

e

$$\begin{aligned} |a' a'| \mathbf{0} &= \mathbf{0} |a' a'| = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \mathbf{0} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Regressando a notação de um aparelho não-especificado,

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Medida de A} \\ \text{Seleciona } a' \end{array}} \equiv \boxed{\begin{array}{c} \text{Medida de } A - a' \\ \text{Seleciona 0} \end{array}} \rightarrow |a' a'| \quad (3.9)$$

Sabemos que a caixa à esquerda que corresponde a um aparelho não especificado, nela está dito que a ação é seletiva, logo nesta proposta de equivalência temos algo no seguinte sentido

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Medida de } A - a' \\ \text{Seleciona 0} \end{array}}. \quad (3.10)$$

Nos mostra que se preparamos um aparelho no qual selecionamos a' previamente, dentre os outros possíveis valores de ações medidas e ao fim e na detecção não observamos nenhum valor, em outras palavras indica-nos que o valor aceitável do experimento com a “retirada” de a' e a confirmação nula, só faz sentido se realmente o valor selecionado inicialmente tenha sido a' .

Prosseguindo com a discussão podemos nos perguntar o que entendemos por $(a' \neq a'')$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Medida de } (A - a') (A - a'') \\ \text{Seleciona 0} \end{array}} ? \quad (3.11)$$

Isto corresponde a uma medida A na qual o resultado a' ou a'' , é aceito sem distinção. Esta medida não tem seletividade, na qual é representada pela *adição* dos respectivos símbolos

$$a' \neq a'': \boxed{\begin{array}{c} \text{Medida de } (A - a') (A - a'') \\ \text{Seleciona 0} \end{array}} \equiv |a' a'| + |a'' a''| = |a'' a''| + |a' a'|. \quad (3.12)$$

na qual incorpora a simetria completa entre a' e a'' . Dessa forma,

$$a' \neq a'' \neq a''' \neq a' :$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Medida de } (A - a') (A - a'') (A - a''') \\ \text{Seleciona 0} \end{array}} \equiv |a' a'| + |a'' a''| + |a''' a'''| \quad (3.13)$$

finalmente chegamos a

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Medida de } (A - a_1) \dots (A - a_n) \\ \text{Seleciona 0} \end{array}} \equiv |a_1 a_1| + \dots + |a_n a_n| = \sum_{a'} |a' a'|. \quad (3.14)$$

A medida que aceita *todos* os possíveis resultados sem distinção é simbolizada por **1**. Assim a soma (3.14), será igual ao símbolo unitário

$$\sum_{a'} |a'a'| = \mathbf{1}, \quad (3.15)$$

que afirma a *completude* dos símbolos de medida $|a'a'|$.

Verifiquemos as simples propriedades de **0** com respeito à adição. Aceitando algum resultado ou nada,

$$\begin{aligned} |a'a'| + \mathbf{0} &= \mathbf{0} + |a'a'| = |a'a'| \\ \mathbf{1} + \mathbf{0} &= \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Uma outra pergunta que surge seria, são as propriedades conhecidas de $|a'a'|$ consistentes sob a ação da completude $\sum_{a'} |a'a'| = \mathbf{1}$? Se for, teremos

$$\left(\sum_{a'} |a'a'| \right) |a''a''| = |a''a''| \quad (3.17)$$

(Lei distributiva da multiplicação).

Abrindo-se as contas da equação (3.17),

$$\begin{aligned} \left(\sum_{a'} |a'a'| \right) |a''a''| &= \sum_{a'} |a'a'| |a''a''| \\ &= |a''a''| |a''a''| + \sum_{a'(\neq a'')} |a'a'| |a''a''| \\ &= |a''a''| + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} = |a''a''|. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sendo assim aceitamos a lei distributiva da multiplicação.

A notação $|a'a'|$ é conveniente para generalização: $|a'a''|$, $a' \neq a''$. Uma pergunta natural que surge seria o que pode este novo símbolo significar? Para entendermos essa questão, consideremos o arranjo experimental, que está no item 2) da Figura 3.1:

O resultado como esperado e já visto no experimento é nenhum feixe ou medida. Mas suponhamos que na região entre os dois seletores revertemos a direção do momento magnético. Um campo magnético homogêneo pode fazer isto, dessa forma o dipolo magnético precessa em volta da direção do campo, sua representação encontra-se na Figura 3.4.

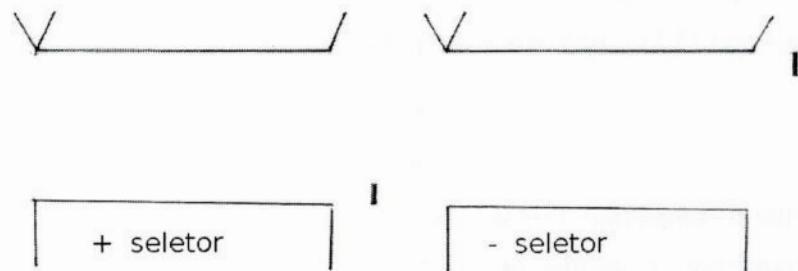


Figura 3.3: Mostra o arranjo experimental do item 2) da Figura 3.1 em detalhes, utilizado para uma discussão mais elaborada.

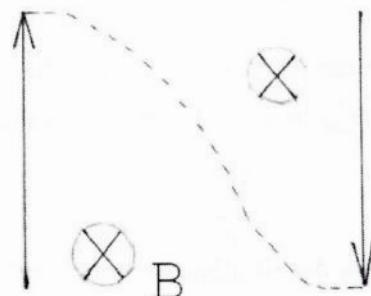


Figura 3.4: Campo magnético homogêneo que faz o dipolo magnético rotacione, mudando assim a direção do seu momento magnético.

O resultado é uma medida seletiva na qual apenas momento magnético + entra e apenas o momento magnético - sai: $|+ -|$.

Para medidas sucessivas gerais deste tipo, temos

$$|a' a''| |a'' a'''| = |a' a'''| \quad (3.19)$$

e

$$|a' a''| |a''' a' v| = \mathbf{0}, \text{ se } a' \neq a'''. \quad (3.20)$$

Temos o comportamento conveniente para o símbolo unitário **1** diante de $|a'' a'''|$,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{a'} |a' a'| \right) |a'' a'''| &= \sum_{a'} |a' a'| |a'' a'''| = \\ &= |a'' a''| |a'' a'''| + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} = |a'' a'''|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Notemos também uma outra propriedade,

$$\begin{aligned} |a' a''| |a'' a'| &= |a' a'|, \\ |a'' a'| |a' a''| &= |a'' a''|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Os resultados diferem apenas pela ordem da multiplicação. Isto nos leva a concluir que a ordem da multiplicação é relevante, assim vemos que esta álgebra envolvida é não-comutativa para a multiplicação. E como foi visto mais cedo em (3.6) ,

$$a' \neq a'': |a' a'| |a'' a''| = \mathbf{0},$$

esta álgebra não é uma álgebra de divisão, ou seja, não implica que $|a' a'|$ ou $|a'' a''|$ é $\mathbf{0}$. De maneira similar no contexto generalizado temos,

$$a' \neq a'': |a' a''| |a' a''| = 0, \quad (3.23)$$

não implica $|a' a''| = 0$.

O resultado de uma medida é um número, assim devemos ter números do mesmo modo que temos símbolos abstratos para medida na nossa álgebra. A definição dos números básicos 1 e 0 são

$$1 |a' a''| = |a' a''|, 0 |a' a''| = \mathbf{0}. \quad (3.24)$$

Os números são convenientes para a sintetização dos produtos

$$|a' a''| |a''' a''''| = \begin{cases} |a' a''''| = 1 |a' a''''| & \text{se } a'' = a''' \\ 0 = 0 |a' a''''| & \text{se } a'' \neq a''' \end{cases} = \delta(a'', a''') |a' a''''|, \quad (3.25)$$

²onde

$$\delta(a'', a''') = \begin{cases} 1 & \text{se } a'' = a''' \\ 0 & \text{se } a'' \neq a''' \end{cases}, \quad (3.26)$$

é o símbolo da delta de Kronecker. Uma outra questão que pode ser levantada seria, qual o significado de $|a' a''| + |a' a''|$?

Acceptando-se a lei distributiva da multiplicação temos,

$$1 |a' a''| + 1 |a' a''| = (1 + 1) |a' a''|. \quad (3.27)$$

²Onde usamos a notação de simplificação $'v = ''$.

Dois naturalmente,

$$1|a'a''| + 1|a'a''| = 2|a'a''|. \quad (3.28)$$

Com estas definições vemos que formamos uma estrutura algébrica dos símbolos de medida, que matematicamente chamada de anel, sendo esse anel não-comutativo ³.

³Verificar o apêndice **A** para uma breve explanação de conceitos algébricos associados a teoria dos símbolos da medida.

3.2 Vetores de Estado

Começamos esta seção pensando um pouco mais sobre o significado de $|a'a''|$. Um átomo tendo o valor a' da propriedade A , pode entrar tendo este valor (lido da esquerda para direita, indicado por $E \rightarrow D$ aonde for necessário) e o que sai é um átomo a'' . Isto é *como se* o átomo a' que entra é destruído e em seu lugar um átomo a'' é criado. Desta forma pensamos num processo mental de dois passos que é indistinguível com relação ao verdadeiro. Simbolizamos a composição através da introdução de pequenos colchetes

$$[E \rightarrow D] \quad |a'a''| \equiv |a'\rangle \langle a''|. \quad (3.29)$$

Escrever estes pequenos colchetes até o momento é inócuo, mas damos um grande passo se vermos isto como o produto de dois símbolos de um novo tipo. Então surge a questão os dois símbolos são compatíveis com as propriedades algébricas conhecidas do símbolo $|a'a''|$?

Se for temos,

$$|a'\rangle \langle a''| |a'''\rangle \langle a'^v| = \delta(a'', a''') |a'\rangle \langle a'^v|, \quad (3.30)$$

onde a notação foi simplificada escrevendo $\langle a''|a'''\rangle$ no lugar de $\langle a''|a'''\rangle$ e assim seguirá em todos os produtos subsequentes deste tipo. Observamos que (3.30) é satisfeita se

$$\langle a''|a'''\rangle = \delta(a'', a'''). \quad (3.31)$$

Verificamos o significado da consistência física do símbolo acima

$$[E \rightarrow D] \quad \langle a''|a'''\rangle = \begin{cases} a'' = a''' & \text{Sim, representado pelo número 1,} \\ a'' \neq a''' & \text{Não, representado pelo número 0,} \end{cases} \quad (3.32)$$

se esta ação de criação-aniquilação é considerada isolada, ou seja, no sentido de que não existe algo interfirindo fisicamente nesta transição, dessa forma temos a destruição de um átomo a''' , onde apenas um átomo a'' criado, $a'' \neq a'''$, logo em termos do processo de medida seletiva não é possível, somente quando $a'' = a'''$.

Prosseguindo com o desenvolvimento, vamos utilizar um caso mais elementar para elucidar o que vamos dizer adiante, seja os três vetores unitários \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} do sistema de coordenadas espaciais cartesiano, ou de outra maneira, e_k , $k = 1, 2, 3$. Assim teríamos,

$$e_k \cdot e_l = \begin{cases} 1 & \text{se } k = l \\ 0 & \text{se } k \neq l \end{cases} = \delta(k, l) \equiv \delta_{kl}, \quad (3.33)$$

que caracteriza vetores ortogonais unitários. Esta definição sobre a ortonormalidade é suplementada pela relação de completude,

$$\sum_k e_k e_k = \mathbf{1}, \quad (3.34)$$

que é uma soma de produtos diádicos⁴.

Devido as relações anteriores, falamos dos símbolos $\langle a' |$ e $| a' \rangle$ como vetores. Notemos que o produto é um valor numérico

$$\langle a' | a'' \rangle = \delta(a', a''), \quad (3.35)$$

envolvendo dois tipos de vetores, $\langle a' |$ simbolizando a ação de criação, não podendo ser igualado á $| a' \rangle$, representando uma ação de destruição (lido $E \rightarrow D$). Dessa forma o espaço geométrico no qual estes vetores situam-se deve ser algo mais geral que o espaço Euclídeo. Denominamos $\langle a' |$ como um *vetor à esquerda* e $| a' \rangle$ como *vetor à direita*, com relação as respectivas posições no produto numérico. [Paul Andrei Maurice Dirac (1902 - 1984), denominou $\langle a' | a'' \rangle$ de *bracket*, dessa forma os vetores *à esquerda de bra* e *à direita de ket*.]

⁴O nome produto diádico, um outro termo para produto tensorial, no resultado da nossa equação (3.34), esse produto a matriz identidade de dimensão 3×3 , já que estamos trabalhando com vetores unitários no espaço tri-dimensional.

3.3 Medidas Sucessivas. Probabilidades

A medida do momento magnético na direção z , ou de uma outra propriedade física A é apenas uma entre as inúmeras possibilidades de medida de outras propriedades:

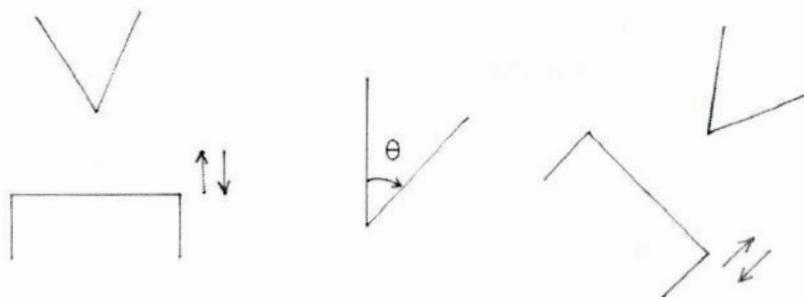


Figura 3.5: Mostra que depois que os átomos passam pelo primeiro aparelho (que se encontra do lado esquerdo), a próxima etapa é passar pelo segundo aparelho (que se encontra do lado direito) rotacionado de um ângulo θ , com relação ao primeiro aparelho.

Em um aparelho rotacionado os átomos são também defletidos para cima ou para baixo, na direção do aparelho, pelo campo magnético rotacionado.

Uma nova possibilidade de medida, torna-se mais clara no exemplo citado anteriormente, através do qual há a possibilidade de medir o momento magnético em uma direção qualquer, ou seja, suponha que escolhemos átomos que primeiramente tenham atravessado um aparelho que seleciona apenas momento magnético +, ao passar pelo segundo seletor sendo que este está rotacionado com relação a direção do campo magnético do primeiro seletor por 0 rad , teremos como resultado todos os átomos m.m. + (\equiv momento magnético +), significando que o feixe transmitido foi direcionado completamente para cima, se estivéssemos trabalhando com um ângulo de $\pi \text{ rad}$ os átomos teriam como resultado m.m. - (\equiv momento magnético -), o feixe transmitido estaria completamente apontado para baixo. Para clarificar estes resultados ver o desenho esquemático da Figura 3.5.

O que se pode então dizer quando temos $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$, pensemos da seguinte maneira, na situação inicial na qual o feixe transmitido está inteiramente para cima momento

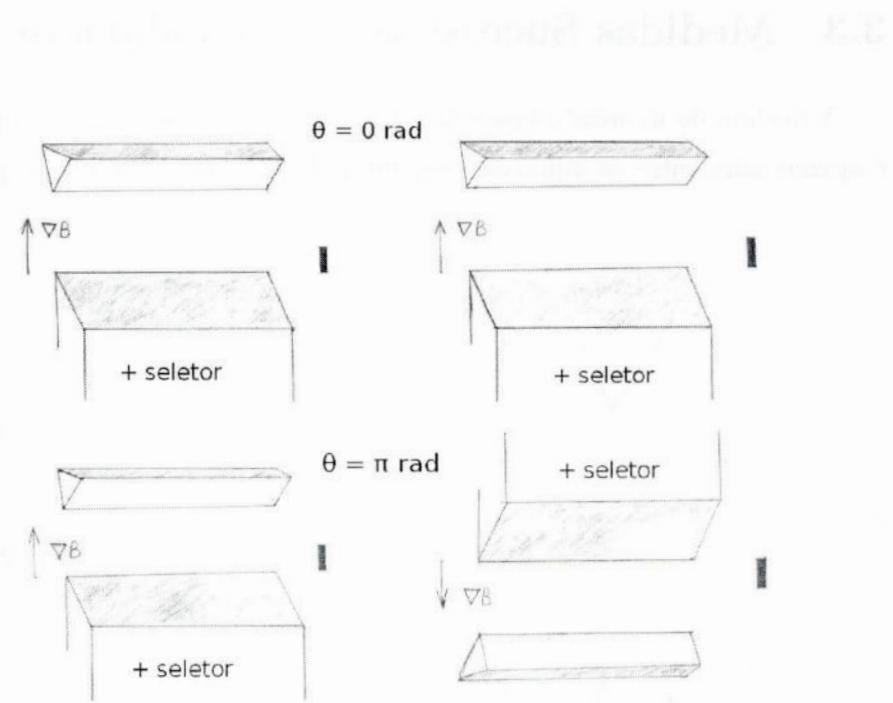


Figura 3.6: Desenho que corresponde a rotação de 0 rad e $\pi \text{ rad}$, onde em 0 rad , temos o resultado do momento magnético $+$ e para $\pi \text{ rad}$, o momento magnético $-$.

magnético $+$, e deve ir mudando a medida que rotacionamos o segundo aparelho com relação ao primeiro aparelho, de forma a se ter menos átomos para cima e mais átomos para baixo até voltarmos para $\pi \text{ rad}$, assim em $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ razoável pensar que temos metade dos átomos para cima ($m.m.'s+$) e a outra metade com o feixe para baixo ($m.m.'s-$). Percebemos que $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ está entre os limites de 0 rad e $\pi \text{ rad}$. Não temos meios de predizer o que um único átomo irá fazer, mas podemos dizer o que acontecerá na média para alguns átomos, assim mostramos a média do momento magnético em unidades de μ , para os três de arranjos citados com seus respectivos ângulos, ver a Figura 3.6.

Pode-se obter um resultado para qualquer valor de θ ? É natural assumirmos que a média do m.m., medida na direção z deva ser a projeção de z na direção dada pelo ângulo θ , dessa forma $\cos \theta$, ilustrado na Figura 3.7.

A média do m.m. é a média ponderada dos dois possíveis resultados, $+1$, -1 , sendo os pesos a fração de um número *grande* de átomos de feixes para cima, ou para baixo. A fração dita nestes termos está ligada pelo sentido de probabilidades(aqui utiliza-se média ponderada do momento magnético, afim de calcularmos as probabilidades associadas a

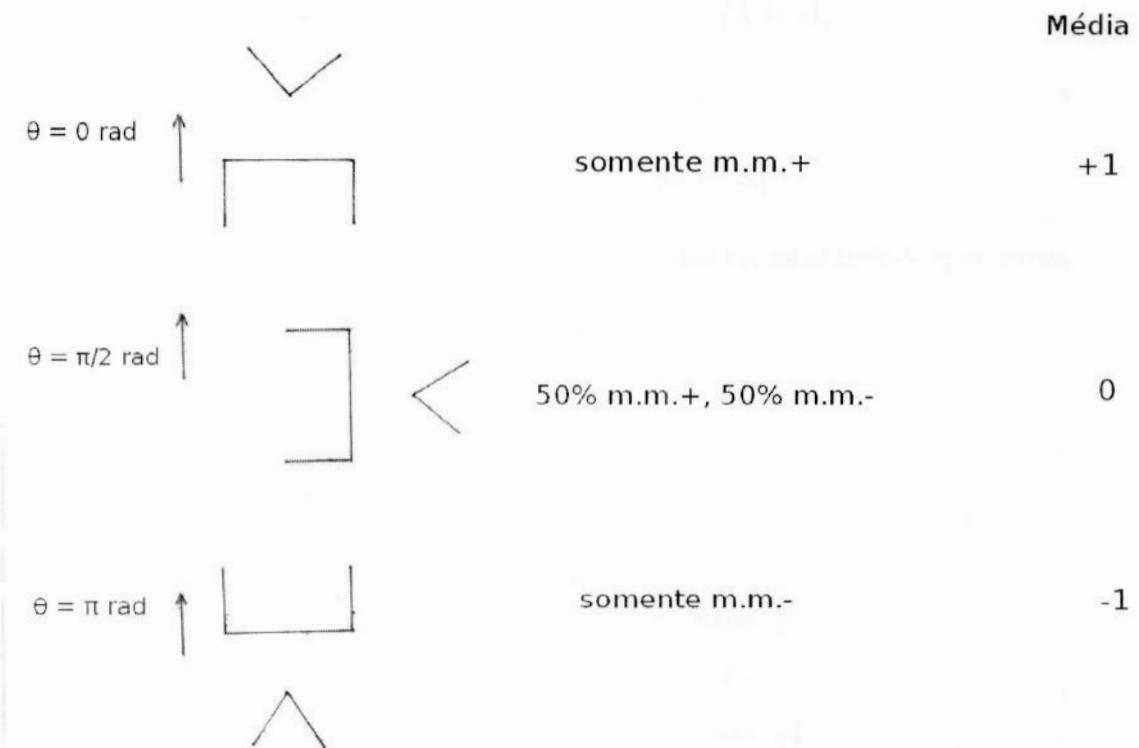


Figura 3.7: As médias dada em unidades de μ , para os respectivos ângulos de 0 rad , $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ e $\pi \text{ rad}$, com o segundo aparelho rotacionado em relação a direção m.m.+ do feixe inicial.

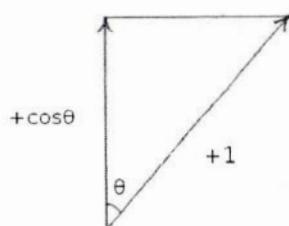


Figura 3.8: Neste caso temos a projeção do m.m.+ na direção θ , sendo representado, pelo $+\cos\theta$.

transição de um feixe inicial, sendo transmitido para o segundo aparelho rodado.).

Assim, partindo da seleção inicial para átomos com m.m. + passando por um outro

aparelho na direção θ , temos os momentos magnéticos em unidades μ dados por,

$$[E \rightarrow D] \quad \cos \theta = (+1)p(+, +) + (-1)p(+, -) \quad (3.36)$$

e

$$[E \rightarrow D] \quad 1 = p(+, +) + p(+, -), \quad (3.37)$$

assim as probabilidades seriam

substituimos

$$p(+, -) = 1 - p(+, +)$$

em (3.36),

$$\begin{aligned} \cos \theta &= (+1)p(+, +) + (-1)(1 - p(+, +)) \\ \cos \theta &= (+1)p(+, +) + (-1)p(+, +) - 1 \\ 1 + \cos \theta &= (+2)p(+, +) \\ p(+, +) &= \frac{1 + \cos \theta}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

assim

$$p(+, -) = 1 - p(+, +) = 1 - \left(\frac{1 + \cos \theta}{2}\right) = 1 - \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (3.39)$$

O resultado (3.39), utilizou a identidade trigonométrica

$$\cos \theta = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (3.40)$$

A probabilidade de obtermos um resultado $-$, partindo de uma seleção inicial m.m. $+$, é equivalente a probabilidade de obtermos um resultado $+$ para um ângulo de $\pi - \theta$, apenas uma questão matemática de projeções, olhar a Figura 3.8.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (3.41)$$

Então o significado geométrico do resultado (3.41), encontra-se na Figura 3.10.

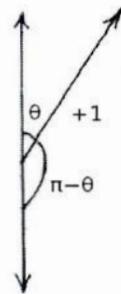


Figura 3.9: Mostra que a probabilidade de obtermos um feixe $-$, partindo-se de um feixe inicial de m.m. $+$, em relação a um ângulo θ , o mesmo que projetarmos esse feixe inicial de m.m. $+$ no ângulo de $\pi - \theta$, isso pode ser entendido pelo fato das funções \cos e \sin , serem complementares.

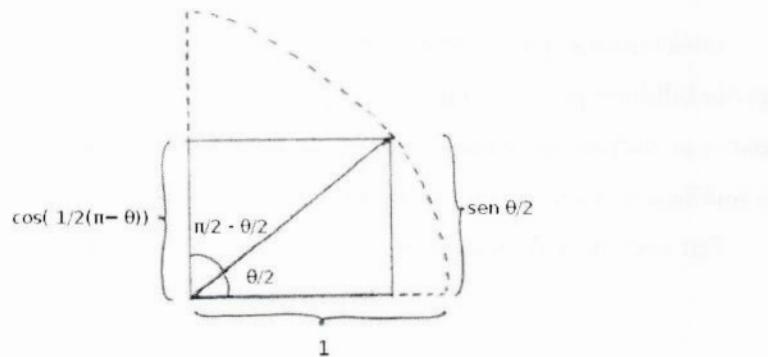


Figura 3.10: Apresenta o significado geométrico de (3.41).

Podemos escrever as probabilidades para uma seleção inicial de m.m. $-$ (notemos que o procedimento descrito para o caso de uma seleção inicial m.m. $+$ é análogo para m.m. $-$, mas usamos o fato de que as funções \cos e \sin são complementares fato que foi mostrado na construção da equação (3.41), para sermos mais práticos:

$[E \rightarrow D]$

$$\begin{aligned} p(-,-) &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \\ p(-,+) &= \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

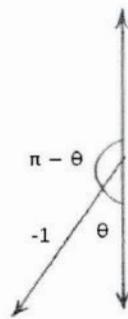


Figura 3.11: Mostra as projeções com relação a um ângulo θ para feixa inicial de m.m.-, que teria a construção de suas probabilidades análoga ao que foi feito no caso do feixe inicial de m.m.+.

Observamos que a probabilidade de um resultado $p(-, +)$ é o mesmo resultado da probabilidade $p(+, -)$, mas a probabilidade $p(+, -)$ com um ângulo de $\pi - \theta$ e vice-versa, para as outras probabilidades vale a mesma colocação, mas uma vez falamos que m.m.- é análogo ao caso de uma seleção inicial m.m.+.

Em seguida resumimos em uma tabela todas as probabilidades encontradas,

$p(,)$		+	
		+	-
+	+	$\cos^2(\frac{\theta}{2})$	$\sin^2(\frac{\theta}{2})$
	-	$\sin^2(\frac{\theta}{2})$	$\cos^2(\frac{\theta}{2})$

3.4 Amplitudes de Probabilidade. Interferência

De uma forma mais geral do que a vista na seção anterior, temos que para alguma propriedade física A e selecionando-se um resultado particular a' dessa medida, já vimos que simbolizamos a criação de um átomo a' como $\langle a' |$ (*lido* $E \rightarrow D$). Em seguida tomamos um tipo de medida B não-especificada e simbolizamos ela por $M(B)$, dessa forma temos $\langle a' | M(B)$. O passo final seria a aniquilação (detecção) do átomo a' , resultando em um número

$$[E \rightarrow D] \quad p(a', M(B)) = \langle a' | M(B) | a' \rangle. \quad (3.43)$$

Consideramos três tipos de $M(B)$:

1. A medida B que seleciona apenas um valor b'

$$\begin{aligned} M(B) &= |b' \rangle \langle b'|, \\ (p(a', |b' b'| =)) \quad p(a', b') &= \langle a' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle. \end{aligned} \quad (3.44)$$

2. A medida B que seleciona b' ou b'' , $b'' \neq b'$

$$\begin{aligned} M(B) &= |b' \rangle \langle b'| + |b'' \rangle \langle b''|, \\ p(a', b' \text{ ou } b'') &= \langle a' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle + \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | a' \rangle \\ &= p(a', b') + p(a', b''). \end{aligned} \quad (3.45)$$

3. A medida B que seleciona todos os valores b' sem distinção

$$\begin{aligned} M(B) &= \sum_{b'} |b' \rangle \langle b'| = \mathbf{1} \\ p(a', \mathbf{1}) &= \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle = \langle a' | \mathbf{1} | a' \rangle \\ &= \sum_{b'} p(a', b') = 1. \end{aligned} \quad (3.46)$$

As propriedades acima, qualificam $p(a', b')$ para ser uma probabilidade de que uma medida B realizada sobre um átomo a' irá passar a ter o resultado específico b' . Continua sendo verdade, mesmo numa medida sem especificidade que seleciona b' ou b'' , onde ambos os átomos do feixe transmitido tem como probabilidade $p(a', b') + p(a', b'')$. O resultado da

medida sem especificidade que contém todos os possíveis valores da medida B, tem como probabilidade $\sum_{b'} p(a', b') = 1$.

Numa situação particular verificamos a fórmula de probabilidade, que seria quando a nossa medida sem especificidade B é considerada como uma medida A específica, como no caso visto para o momento magnético na seção anterior, para $\theta = 0 \text{ rad}$ ou $\theta = \pi \text{ rad}$. Então os valores de $a' = +$ e $a'' = -$,

$$p(a', a'') = \begin{cases} 1 & \text{se } a' = a'' \\ 0 & \text{se } a' \neq a'' \end{cases} = \delta(a', a'') \quad (3.47)$$

e realmente escrevendo a probabilidade em termos da notação da simbologia da medida,

$$p(a', a'') = \langle a' | a'' \rangle \langle a'' | a' \rangle = [\delta(a', a'')]^2 = \delta(a', a''). \quad (3.48)$$

Algo que torna-se claro é que os resultados obtidos e que o $\cos^2(\frac{\theta}{2})$, indicam que a probabilidade é um número com valores entre zero e um.

Uma pergunta que surge seria, quais tipos de números seriam $\langle a' | b' \rangle$ para que $\langle a' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle$ encontram-se no intervalo definido pela probabilidade?

Analisaremos a existência de duas possibilidades:

1. Se $\langle a' | b' \rangle$ é um número *real* e $\langle b' | a' \rangle = \langle a' | b' \rangle$. Temos,

$$p(a', b') = \langle a' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle [\langle a' | b' \rangle]^2 \geq 0 \quad (3.49)$$

e juntamente com $p(a', b') \leq 1$. Porém existe uma objeção que encontra-se no conceito físico correspondente a

$$\langle b' | a' \rangle = \langle a' | b' \rangle,$$

ou seja, estariamos afirmando que o estado para um átomo criado é igual ao estado para o átomo destruído, tanto para a' e b' , isto baseando-se nos conceitos da simbologia da medida. Dessa forma vemos que os números reais não representam esse tipo de número.

2. Se $\langle a' | b' \rangle$ é um número complexo, com $\langle b' | a' \rangle$ sendo o conjugado, $\langle b' | a' \rangle = \langle a' | b' \rangle^*$.

Assim temos,

$$p(a', b') = \langle a' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle = \langle a' | b' \rangle \langle a' | b' \rangle^* = |\langle a' | b' \rangle|^2 \geq 0. \quad (3.50)$$

A construção das probabilidades como quadrados absolutos atribuem um nome para os números complexos $\langle a' | b' \rangle$: *amplitude de probabilidade*. Sendo esta uma descrição puramente funcional. Entretanto, esta relação pode ser introduzida por analogias, cujas quais iremos desenvolver.

Considere uma sequência de medidas(em geral diferentes) de três propriedades físicas: A, B, C . Primeiro, realizamos uma medida A e selecionamos o resultado a' , ou seja, criamos um átomo a' : $\langle a' |$ (lido $E \rightarrow D$). Então, realizamos uma medida B sem especificidade, simbolizada por $M(B)$.

Finalmente selecionamos o resultado c' da medida C , simbolizado pela aniquilação de um átomo c' . O número produzido nesta sequência é $\langle a' | M(B) | c' \rangle$, no qual é uma amplitude de probabilidade da qual derivamos a probabilidade:

$$[E \rightarrow D] \quad p(a', M(B), c') = |\langle a' | M(B) | c' \rangle|^2. \quad (3.51)$$

Consideremos três exemplos,

1. Seja $M(B) = |b'\rangle\langle b'|$, uma medida seletiva

$$\begin{aligned} [p(a', |b'b'|, c')] = p(a', b', c') &= \langle a' | M(B) | c' \rangle \langle c' | M(B) | a' \rangle \\ &= \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle \langle c' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle \\ &= |\langle a' | b' \rangle|^2 |\langle b' | c' \rangle|^2 \\ &= p(a', b') p(b', c') = |\langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle|^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

O feixe de átomos a' é submetido a uma medida seletiva que deixa a fração de átomos $p(a', b')$. Então, estes átomos são submetidos a uma outra medida seletiva, de probabilidade $p(b', c')$, dando assim a fração do conjunto ou probabilidade, como o produto: $p(a', b') p(b', c')$.

2. $M(B) = \sum_{b'} |b'\rangle\langle b'| = \mathbf{1}$, a medida que aceita tudo sem distinção, sem aparelho físico. Para $\langle a' | \mathbf{1} | c' \rangle$, temos equivalentemente,

$$\langle a' | c' \rangle = \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle, \quad (3.53)$$

e

$$p(a', \mathbf{1}, c') = p(a', c'). \quad (3.54)$$

Vemos que (3.53) é similar, a relação familiar vetorial 3-dimensional:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \sum_k A_k C_k = \sum_k \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{C},$$

a evolução de um produto escalar em termos das componentes relativas à algum sistema de coordenadas.

3. A medida não-seletiva $b = B$, cujo aparelho funciona medindo a propriedade física, porém não há seleção de átomos b' . No exemplo do *m.m.*, isto significa que os feixes que defletem para cima e para baixo estão fisicamente separados, prosseguindo para o próximo estágio.

A probabilidade $p(a', b, c')$, é a soma para cada escolha independente de b' , sendo distinguidos fisicamente pelo experimento:

$$p(a', b, c') = \sum_{b'} p(a', b') p(b', c'). \quad (3.55)$$

Nem a medida B que aceita tudo e nem a medida não-seletiva $b = B$, envolvem uma rejeição dos átomos no estágio intermediário. Dessa forma a fração total ou a probabilidade, para qualquer resultado é igual a um, para ambos os casos:

$$\begin{aligned} \sum_{c'} p(a', 1, c') &= \sum_{c'} p(a', c') = 1, \\ \sum_{c'} p(a', b, c') &= \underbrace{\sum_{b'} p(a', b')}_{=1} \underbrace{\sum_{c'} p(b', c')}_{=1} = 1. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Apesar disso, temos em geral⁵ $p(a', 1, c') \neq p(a', b, c')$.

As contas detalhadas das equações (3.54), (3.55), (3.56), encontram-se no Apêndice B.

⁵Essa nota serve para mais uma vez elucidar bem, o que temos até aqui desenvolvido na teoria da medida. Quando falamos das medidas b e 1 , nas probabilidades, falamos com o seguinte aspecto:

- i) $b = B$ representa a medida não-seletiva ou sem especificidade, que por sua vez está associada fisicamente a um aparelho de medida que existe, porém não faz nenhuma seleção de átomos.
- ii) 1 representa a medida que seleciona todos os resultados possíveis sem nenhuma distinção, isto é descrito de maneira abstrata pela teoria da medida, porém fisicamente está associado a inexistência de qualquer aparelho, por isso $p(a', 1, c') = p(a', c')$.

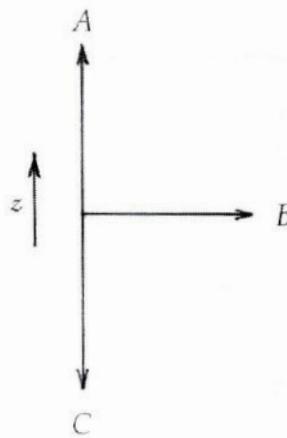


Figura 3.12: Nesta figura sintetiza-se, uma sequência de aparelhos dispostos em relação a uma direção z de referência, assim o aparelho A encontra-se a 0 rad , o aparelho B a $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ e o aparelho C a $\pi \text{ rad}$.

Como exemplo consideremos A, B, C , com $m.m.$ em três direções, representados na Figura 3.12, mostra a forma como os átomos se dirigem aos aparelhos postos de maneira sequencial e como encontram-se os aparelhos em relação a direção z de referência.

Todas as probabilidades para o ângulo de $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ valem $\frac{1}{2}$. Para clarificar isto basta ver o caso do $m.m.+$ e $m.m.-$, construído na seção anterior. Assim (lendo-se da $E \rightarrow D$), os resultados a seguir utilizam-se da equação (3.55) e da tabela de probabilidades do fim da seção 3.3 (que nos fornece as probabilidades possíveis para dois aparelhos de medida)

$$\begin{aligned}
 p(\overbrace{+}^a, b, \overbrace{+}^c) &= \sum_{b'} p(\overbrace{+}^a, b') p(b', \overbrace{+}^c) = \\
 &= p(\overbrace{+}^a, \overbrace{+}^b) p(\overbrace{+}^b, \overbrace{+}^c) + p(\overbrace{+}^a, \overbrace{-}^b) p(\overbrace{-}^b, \overbrace{+}^c) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(\overbrace{+}^a, b, \overbrace{-}^c) &= \sum_{b'} p(\overbrace{+}^a, b') p(b', \overbrace{-}^c) = \\
&= p(\overbrace{+}^a, \overbrace{+}^b) p(\overbrace{+}^b, \overbrace{-}^c) + p(\overbrace{+}^a, \overbrace{-}^b) p(\overbrace{-}^b, \overbrace{-}^c) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad .
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Porém,

$$p(\overbrace{+}^a, \mathbf{1}, \overbrace{+}^c) = p(\overbrace{+}^a, \overbrace{+}^c) = 0, \tag{3.58}$$

sendo que *m.m.* que $+$ na direção z , certamente não é $+$ na direção $-z$. E que,

$$p(\overbrace{+}^a, \mathbf{1}, \overbrace{-}^c) = p(\overbrace{+}^a, \overbrace{-}^c) = 1, \tag{3.59}$$

sendo o *m.m.* que é $-$ na direção $-z$ o mesmo como $+$ ao longo de $+z$.

Faremos, algumas *contas* de maneira mais detalhada que serão expostas no Apêndice B, com relação as probabilidades que mostramos em (3.57), (3.58) e (3.59), os resultados serão utilizados no prosseguimento da presente seção. Vejamos o que está associado com a diferença de resultado que ocorre em (3.58) e (3.59), tendo-se que os termos cruzados já foram calculados no do Apêndice B,

$$|p(\overbrace{+}^a, \mathbf{1}, \overbrace{+}^c)|^2 = |p(\overbrace{+}^a, \overbrace{+}^c)|^2 = p(\overbrace{+}^a, \mathbf{1}, \overbrace{+}^c) = p(\overbrace{+}^a, \overbrace{+}^c) = 0,$$

$$|p(\overbrace{+}^a, \overbrace{-}^c)|^2 =$$

$$p(+, b, +) = \frac{1}{2} = \left\{ \begin{aligned} &= |(\overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b) (\overbrace{+}^b | \overbrace{+}^c) (\overbrace{+}^c | \overbrace{+}^b) (\overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a) + \\ &+ (\overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b) (\overbrace{-}^b | \overbrace{+}^c) (\overbrace{+}^c | \overbrace{-}^b) (\overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a) + \end{aligned} \right.$$

$$-\frac{1}{2} = \left\{ \begin{aligned} &+ (\overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b) (\overbrace{-}^b | \overbrace{+}^c) (\overbrace{+}^c | \overbrace{+}^b) (\overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a) + \\ &(\overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b) (\overbrace{+}^b | \overbrace{+}^c) (\overbrace{+}^c | \overbrace{-}^b) (\overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a) |^2 = \end{aligned} \right.$$

$$= \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right|^2 = 0.$$

$$|p(\overbrace{+}^a, \mathbf{1}, \overbrace{-}^c)|^2 = |p(\overbrace{+}^a, \overbrace{-}^c)|^2 = p(\overbrace{+}^a, \mathbf{1}, \overbrace{-}^c) = p(\overbrace{+}^a, \overbrace{-}^c) = 1,$$

$$|p(\overbrace{+}^a, \overbrace{-}^c)|^2 =$$

$$p(+, b, -) = \frac{1}{2} = \left\{ \begin{array}{l} |(\overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b) (\overbrace{+}^b | \overbrace{-}^c) (\overbrace{-}^c | \overbrace{+}^b) (\overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a) + \\ + (\overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b) (\overbrace{-}^b | \overbrace{-}^c) (\overbrace{-}^c | \overbrace{-}^b) (\overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a) + \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \begin{array}{l} + (\overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b) (\overbrace{-}^b | \overbrace{-}^c) (\overbrace{-}^c | \overbrace{+}^b) (\overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a) + \\ (\overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b) (\overbrace{+}^b | \overbrace{-}^c) (\overbrace{-}^c | \overbrace{-}^b) (\overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a) |^2 = \end{array} \right.$$

$$= \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right|^2 = 1.$$

Podemos concluir das contas anteriores que $p(\overbrace{+}^a, \mathbf{1}, \overbrace{+}^c)$ seria igual $p(\overbrace{+}^a, b, \overbrace{+}^c)$ a menos de um termo, de modo análogo para $p(\overbrace{+}^a, \mathbf{1}, \overbrace{-}^c)$ e $p(\overbrace{+}^a, b, \overbrace{-}^c)$, esse termo que chamamos até aqui de *termo cruzado*, possui seus valores de acordo com a medida que esteja se fazendo, no nosso exemplo ele toma os valores $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, quando estamos trabalhando com a medida **1**, porém quando passamos para medida não-seletiva **b**, seu valor vai a zero, pois esta medida perturba, ou seja, *interfere* na medida que escolhe todos os valores possíveis. No próximo capítulo será exposto de maneira mais geral, essa relação de interferência e melhor comentada.

Assim temos situações com interferência típica de fenômenos ondulatórios. Com base nessa *analogia*, fala-se alternativamente da amplitude de probabilidade como uma função de onda.

3.5 Medidas que perturbam o sistema

Na seção anterior, existe uma importante lição no fato de que $p(a', \mathbf{1}, c')$, não é efetivamente uma medida B:

$$p(a', \mathbf{1}, c') = \left| \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle \right|^2, \quad (3.60)$$

é em geral diferente de $p(a', b, c')$, na qual a medida B torna-se presente, mas todos os átomos dessa característica física são conservados:

$$\begin{aligned} p(a', b, c') &= \sum_{b'} p(a', b') p(b', c') = \sum_{b'} |\langle a' | b' \rangle|^2 |\langle b' | c' \rangle|^2 = \\ &= \sum_{b'} |\langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle|^2, \end{aligned} \quad (3.61)$$

Este fato é geralmente expresso como “a medida que perturba o sistema”. Isto é muito diferente da situação na física clássica onde é assumido que em princípio, como um limite idealizado, que a medida não perturba o sistema. Consideramos um problema familiar de medida do campo elétrico em um ponto, no qual responde ao colocar uma carga teste neste ponto (o próprio campo é uma idealização) e medindo a força sobre ela. A objeção deste feito encontra-se na presença da carga teste mudar o campo que está sendo medido, mas em geral diz-se: “sim, porém pode-se tomar a magnitude da carga teste arbitrariamente pequena.” Tudo vai certo, até alcançar o nível dos átomos e os elétrons dentro deles e descobre-se que estes não são pequenas cargas. Em resumo a atomicidade da matéria e das propriedades físicas associadas com a matéria, colocam um limite fundamental para a idealização básica que está implícita na física clássica. Sendo isto o que permeia a mecânica quântica.

Obtemos uma versão quantitativa da “medida que perturba o sistema”⁶ por questionar

⁶A medida que perturba o sistema refere-se ao fato de que $p(a', \mathbf{1}, c') \neq p(a', b, c')$, sabemos que na $p(a', \mathbf{1}, c')$, $\mathbf{1}$ representa uma medida dentro da teoria, pois fisicamente como já dito não há nenhum aparelho associado a $\mathbf{1}$, já o caso da $p(a', b, c')$, b é uma medida que conserva os átomos b' e assim perturba o sistema eliminando os termos cruzados de $p(a', \mathbf{1}, c')$ que seriam $\sum_{b' \neq b''} \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle$, este é o sentido de perturbar o sistema, pois o sistema quando não o medimos possui todas as possibilidades sendo representado por $\mathbf{1}$, sendo o sistema preparado num certo sentido, quando o medimos acabamos por filtrar parte desse sistema.

um símbolo M_b , da medida não-seletiva B, para que

$$p(a', b, c') = \sum_{b'} p(a', b') p(b', c') = \sum_{b'} |\langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle|^2 = |\langle a' | M_b | c' \rangle|^2 \quad (3.62)$$

em um determinado sentido. Isto nos auxilia para voltar a $p(a', \mathbf{1}, c')$ e escrevemos ela como

$$\begin{aligned} p(a', \mathbf{1}, c') &= |\sum_{b'} \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle|^2 = \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \sum_{b''} \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle = \\ &= \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle + \sum_{b' \neq b''} \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle = \\ &= \underbrace{\sum_{b'} |\langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle|^2}_{=p(a', b, c')} + \sum_{b' \neq b''} \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle, \end{aligned} \quad (3.63)$$

essa indexação do somatório com b'' , serve para diferenciar da parte conjugada que surge do cálculo da probabilidade e auxilia no resultado do produto dos somatórios em duas partes uma quando $b' = b''$ que corresponde $p(a', b, c')$ e outra devido a $b' \neq b''$, onde aparecem os termos cruzados.

Vamos analisar a seguinte convenção feita para M_b ,

$$M_b = \sum_{b'} |b' \rangle e^{i\varphi(b')} \langle b'|,$$

onde os $\varphi(b')$ são números reais, conhecidos como ângulos de fase. O efeito dessa convenção é dada por:

$$\begin{aligned} \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle &\longrightarrow \langle a' | b'' \rangle e^{i\varphi(b'')} \langle b'' | c' \rangle, \\ \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* &\longrightarrow \langle a' | b' \rangle^* e^{-i\varphi(b')} \langle b' | c' \rangle^*. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Com esta convenção vemos que não há mudança para termos de $b' = b''$, $e^{-i\varphi(b')} e^{i\varphi(b''=b')} = |e^{i\varphi(b')}|^2 = 1$, em

$$\begin{aligned} p(a', \mathbf{1}, c') &= \sum_{b'} |\langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle|^2 + \sum_{b' \neq b''} \langle a' | b' \rangle^* e^{-i\varphi(b')} \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b'' \rangle e^{i\varphi(b'')} \langle b'' | c' \rangle = \\ &= \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle^* e^{-i\varphi(b')} \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b' \rangle e^{i\varphi(b')} \langle b' | c' \rangle + \\ &\quad + \sum_{b' \neq b''} \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle e^{-i\varphi(b')} e^{i\varphi(b'')} = \\ &= \sum_{b'} |\langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle|^2 + \sum_{b' \neq b''} \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle e^{-i\varphi(b')} e^{i\varphi(b'')}, \end{aligned}$$

porém como obtido acima os termos com $b' \neq b''$ são multiplicados por $e^{-i\varphi(b')} e^{i\varphi(b'')}$. Conseguimos eliminar os produtos cruzados se cada $\varphi(b')$ não é um ângulo definido, mas é uma quantidade distribuída aleatoriamente. Então um valor particular φ e $\varphi + \pi$, são igualmente prováveis e a média é zero ($e^{-i\varphi} e^{i(\varphi+\pi)} = e^{i\pi} = -1$).

Esta aleatoriedade das fases leva à natureza *incontrolável* do distúrbio produzido pela medida. Isto é importante porque em um nível de medida clássica, os distúrbios produzidos pela medida podem ser admitidos se eles são conhecidos e portanto podem ser compensados.

A utilização,

$$\sum_{b''} |b''\rangle e^{i\varphi(b'')} \langle b''|$$

tem uma grande aplicabilidade se permitimos que alguns do $\varphi(b'')$ assumam valores imaginários, mais precisamente valores imaginários positivo infinito, ou seja, $i\infty$, onde $e^{i(i\infty)} = e^{-\infty} = 0$.

Se fazemos isto para todos os $b' \neq b''$, então todos aqueles termos desaparecem e ficamos com $[\varphi(b')]$ real

$$M = e^{i\varphi(b')} |b' b' \rangle$$

onde o fator de fase restante pode ser ignorado no contexto de probabilidade $|\langle a' | M | c' \rangle|^2$, já que $e^{-i\varphi(b')} e^{i\varphi(b')} = e^0 = 1$. Retornemos para a medida que seleciona apenas átomos b' , com todos os outros sendo descartados, a obstrução desses feixes agora sendo representada por um tipo de absorção completa que é $e^{-\infty}$. Se as fases imaginárias infinitas são aplicadas para todos os átomos, menos para algum b' e $b'' \neq b'$, onde as suas respectivas fases são reais e iguais: $\varphi(b') = \varphi(b'')$. Em outras palavras, se estudarmos o segundo termo da $p(a', \mathbf{1}, c')$, com $\varphi(b') = i\infty$ e $\varphi(b'') = i\infty$ temos,

$$\begin{aligned} & \sum_{b'' \neq b'} \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle e^{i(\varphi(b'') - \varphi(b'))} = \\ & = \sum_{b'' \neq b'} \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle \underbrace{e^{i(i\infty - i\infty)}}_{=e^{-\infty}=0} + \\ & \quad \underbrace{\langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle e^{i(\varphi(b'') - \varphi(b'))}}_{=\varphi(b'')} = \\ & = \langle a' | b'' \rangle^* \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle^* \langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle e^0 = |\langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle|^2. \end{aligned}$$

Agora estudando o primeiro termo da $p(a', \mathbf{1}, c')$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{b'} |\langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle|^2 = \\
&= \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle e^{-i\varphi(b')} e^{i\varphi(b')} + \\
& \quad + \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle e^{-i\varphi(b')} e^{i\varphi(b')} \\
&= \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle e^{i(i\infty - i\infty)} + \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle e^0 = \\
&= \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle \overset{=0}{\cancel{e^{i\infty}}} + \langle a' | b' \rangle^* \langle b' | c' \rangle^* \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle = \\
&= |\langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle|^2.
\end{aligned}$$

A probabilidade ficou então como,

$$\begin{aligned}
p(a', b, c') &= |\langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle|^2 + |\langle a' | b'' \rangle \langle b'' | c' \rangle|^2 \\
&= \sum_{b''=b''}^{b''} |\langle a' | b \rangle \langle b | c' \rangle|^2 = |\langle a' | M_b | c' \rangle|^2.
\end{aligned}$$

Dessa forma vemos que produzimos a medida $M_b = |b'b'| + |b''b''|$, finalmente se todas as $\varphi(b')$ são reais e com as fases comuns, ou seja, todas as $\varphi(b') = \varphi(b'')$, chegamos facilmente na medida que aceita tudo, que seria $M(B) = \mathbf{1}$ ⁷.

Isso nos mostra que utilizando a definição da exponencial com os ângulos de fase e dependendo dos valores dos ângulos, se são reais ou imaginários, conseguimos estudar os símbolos de medida sob um outro ponto de vista, onde vemos que a medida que perturba o sistema, tem sua natureza incontrolável, baseada na forma como esses ângulos de fase são dados.

⁷Basta proceder de maneira análoga ao caso da medida $M_b = |b'b'| + |b''b''|$.

Capítulo 4

Observáveis

A representação simbólica das medidas e o uso de probabilidades são contraposições para a física clássica, onde a teoria é formulada em termos dos valores das propriedades físicas. Mas isto deve ser latente na descrição quântica. Pode-se mostrar um símbolo que esteja associado com um valor de uma propriedade física como um todo?

Uma maneira natural de responder essa questão, é começarmos pelo valor *médio*, ou valor esperado, de uma propriedade física B , produzida por uma medida em átomos a' . Nesse sentido,

$$[E \rightarrow D] \quad \langle B \rangle_{a'} \equiv \sum_{b'} \underbrace{p(a', b')}_{= \langle a' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle} b' = \langle a' | \left(\sum_{b'} |b' \rangle b' \langle b'| \right) |a' \rangle, \quad (4.1)$$

na qual exibe uma clara separação entre o que é medida,

$$B = \sum_{b'} |b' \rangle b' \langle b'|,$$

e a informação sobre os átomos $\langle a' |, |a' \rangle$, denotamos também por,

$$\langle B \rangle_{a'} = \langle a' | B | a' \rangle. \quad (4.2)$$

Vamos verificar o que B fornece como símbolo da propriedade física B . Consideremos em primeiro lugar,

$$\langle b' | B = \sum_{b''} \underbrace{\langle b' | b'' \rangle}_{= \delta(b', b'')} b'' \langle b'' | = b' \langle b' |. \quad (4.3)$$

O resultado acima pode ser lido ($E \rightarrow D$) como: um átomo b' criado e a propriedade B medida, o resultado é um número b'' . Um outro caminho ou versão é,

$$B|b''\rangle = \sum_{b'} |b'\rangle b' \underbrace{\langle b'|b''\rangle}_{\delta(b',b'')} = |b''\rangle b''. \quad (4.4)$$

Podemos apresentar os resultados anteriores em outro caminho. Consideremos¹ $B - b' \mathbf{1}$, onde um valor particular (valor fixo) b' é multiplicado pelo símbolo unitário:

$$B - b' \equiv B - b' \mathbf{1} = \sum_{b''} |b''\rangle b'' \langle b''| - b' \sum_{b''} |b''\rangle \langle b''| = \sum_{b''} |b''\rangle (b'' - b') \langle b''|. \quad (4.5)$$

Considerando um átomo $\langle b' |$ criado e a propriedade $B - b'$ medida,

$$\langle b' | (B - b') = \sum_{b''} \underbrace{\langle b' | b''\rangle}_{\delta(b',b'')} (b'' - b') \langle b''| = 0. \quad (4.6)$$

Para um átomo $|b''\rangle$,

$$(B - b' \mathbf{1}) |b''\rangle = \sum_{b''} |b''\rangle (b'' - b') \underbrace{\langle b'' | b''\rangle}_{=1},$$

seria nulo desde que $b'' - b' = 0$, ou seja, $b'' = b'$, teríamos

$$B - b' \mathbf{1} |b''\rangle = 0.$$

Um fato básico e esperado sobre o símbolo B, é que se os possíveis resultados de uma medida sendo b_1, b_2, \dots, b_n , então os resultados da medida B^2 devem ser $(b_1)^2, (b_2)^2, \dots, (b_n)^2$ e de maneira similar para potências mais altas. Dessa forma,

$$\begin{aligned} B^2 &= B B = \sum_{b'} |b'\rangle b' \langle b'| \sum_{b''} |b''\rangle b'' \langle b''| = \\ &= \sum_{b' \neq b''} |b'\rangle b' b'' \langle b'| b''\rangle \langle b''| + \sum_{b'} |b'\rangle (b')^2 \langle b'| = \sum_{b'} |b'\rangle (b')^2 \langle b'|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De maneira similar e extendendo-se o resultado anterior temos,

$$B - b_1 = \sum_{b'} |b''\rangle (b'' - b_1) \langle b'|,$$

¹Esta notação mostra que selecionamos o valor b' , se lembrarmos que no terceiro capítulo os símbolos de medida possuem uma lei aditiva, dentro de uma determinada álgebra e com isso decorre o fato de que uma operação que envolva, somente símbolos de medida deve resultar ainda em símbolos da medida por razões de natureza matemática da álgebra, é razoável aceitarmos esse tipo de notação.

$$\begin{aligned}
(B - b_1)(B - b_2) &= \sum_{b'} |b'\rangle (b' - b_1) \langle b' | \sum_{b'} |b'\rangle (b' - b_2) \langle b' | = \\
&= \sum_{b' \neq b''} |b'\rangle (b' - b_1) \underbrace{\langle b' | b'' \rangle}_{=0} (b'' - b_2) \langle b'' | + \sum_{b'} |b'\rangle (b' - b_1) (b' - b_2) \langle b' | = \\
&= \sum_{b'} |b'\rangle (b' - b_1) (b' - b_2) \langle b' |.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Para os valores b_1, \dots, b_n da medida B,

$$\begin{aligned}
(B - b_1) \dots (B - b_n) &= \prod_{k=1}^n (B - b_k) = \prod_{k=1}^n \sum_{b'} |b'\rangle (b' - b_k) \langle b' | = \\
&= \sum_{b'} |b'\rangle (b' - b_1) \langle b' | \dots \sum_{b'} |b'\rangle (b' - b_n) \langle b' |
\end{aligned}$$

sabemos pelo princípio da indução matemática que se é válido para $k = 1, k = n - 1$, então é válido para um n qualquer, assim supomos que é válido para $n - 1$ e procedemos com os cálculos,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{b'} |b'\rangle (b' - b_1) \dots (b' - b_{n-1}) (b' - b_n) \overbrace{\langle b' | b' \rangle}^{=1} \langle b' | + \\
&+ \sum_{b' \neq b''} |b'\rangle (b' - b_1) \dots (b' - b_{n-1}) \overbrace{\langle b' | b'' \rangle}^{=0} (b'' - b_n) \langle b'' | = \\
&= \sum_{b'}^{b'} |b'\rangle (b' - b_1) \dots (b' - b_{n-1}) (b' - b_n) \langle b' | = \\
&= \sum_{b'} |b'\rangle [\prod_{k=1}^n (b' - b_k)] \langle b' |
\end{aligned} \tag{4.9}$$

desde que qualquer b' seja igual a um b_k , temos como solução

$$\sum_{b'} |b'\rangle [\prod_{k=1}^n (b' - b_k)] \langle b' | = 0. \tag{4.10}$$

Assim B obedece uma equação algébrica de grau n . Dessa forma, qualquer função de B expressa por uma série de potências não é mais que uma combinação linear, com múltiplos numéricos, de 1, B, B^2, \dots, B^{n-1} . Uma tal função pode ser representada como,

$$f(B) = \sum_{b'} f(b') |b' b' \rangle = \sum_{b'} |b'\rangle f(b') \langle b' |. \tag{4.11}$$

Tomamos então como a definição geral da função $f(B)$ do símbolo de medida B , ou do observável B . Qualquer medida da propriedade física representada por B , mede todas as funções de B . Tudo que se é exigido da função numérica $f(b')$ é que a mesma tenha valor bem definido para cada resultado de medida b' .

Como exemplo de função de B expressa por uma série de potências de grau $n-1$, para algum valor b' fixo temos,

$$\delta(B, b') = \prod_{b''(\neq b')} \left(\frac{B - b''}{b' - b''} \right), \quad (4.12)$$

um produto de $n-1$ fatores lineares. Se B tem o valor b' , esta função é igual a um ou símbolo unitário, se B tem um valor diferente de b' , a função é igual a zero ou símbolo nulo, donde acaba sendo a designação do símbolo delta. Então esta função em termos do símbolo de medida é,

$$\begin{aligned} \delta(B, \underbrace{b'}_{\text{valor fixo}}) &= \prod_{b''(\neq b')} \left(\frac{B - b''}{b' - b''} \right) = \left(\frac{B - b''_1}{b' - b''_1} \right) \dots \left(\frac{B - b''_{n-1}}{b' - b''_{n-1}} \right) \\ &= \sum_{b'''} |b''' \rangle \underbrace{\left[\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{b''' - b''_k}{b' - b''_k} \right) \right]}_{=\delta(b''', b')} \langle b'''| = \sum_{b'''} |b''' \rangle \delta(b''', b') \langle b'''| = |b\rangle \langle b'| = |b'b'|, \end{aligned} \quad (4.13)$$

o símbolo da medida seletiva b' . Com isto, notemos que multiplicando $\delta(B, b')$ pelo fato $(B - b')$ produzimos o polinômio de grau n que é zero como já vimos. Assim

$$0 = (B - b') \delta(B, b') = (B - b') |b'\rangle \langle b'| = \sum_{b''} |b''\rangle (b'' - b') \underbrace{\langle b''| b'\rangle}_{=\delta(b'', b')} \langle b'| = 0,$$

como deveria ser.

Eventualmente, o símbolo unitário **1** é também uma função de B , sendo algo que tem o valor 1 não importa qual o valor de B :

$$\langle b' | \underbrace{\mathbf{1}}_{\text{símbolo unitário}} = \langle b' | \sum_{b''} |b''\rangle \langle b''| = \sum_{b''} \underbrace{\langle b' | b''\rangle}_{=\delta(b', b'')} \langle b''| = \underbrace{\mathbf{1}}_{\text{número}} \langle b' |. \quad (4.14)$$

Podemos mostrar o símbolo unitário como uma série de potências em B pelo uso da construção da série de potências da medida seletiva $|b'b'|$:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \sum_{b'} |b'\rangle \langle b'| = \sum_{b'} |b'b'| = \sum_{b'} \sum_{b'''} |b''' \rangle \delta(b''', b') \langle b'''| = \sum_{b'} \delta(B, b') \\ &= \sum_{b'} \prod_{b''(\neq b')} \left(\frac{B - b''}{b' - b''} \right) = \mathbf{1} + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} = \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ou seja, para qualquer valor fixo B , o lado direito será igual a $\mathbf{1} + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} = \mathbf{1}$.

4.1 Álgebra dos operadores de Pauli

Buscando uma ilustração para representação simbólica das quantidades físicas, junto com a construção da seção anterior, retornemos ao experimento de Stern-Gerlach, que foi o nosso ponto de partida, assim sendo $\frac{\mu_z}{\mu}$ possui os possíveis valores $+1, -1$. Segundo Pauli designamos esta quantidade física como σ_z , que possui os valores $\sigma'_z = +1, -1$. Então

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \sum_{b'} |b'\rangle b' \langle b'| = |+1\rangle(+1)\langle+1| + |-1\rangle(-1)\langle-1| = |++| - |--| \\ \mathbf{1} &= \sum_{b'} |b'\rangle \langle b'| = |+\rangle(+| + |-)\langle-| = |++| + |--|.\end{aligned}\quad (4.16)$$

Baseando-se na expressão (4.8), temos para o caso do experimento de Stern-Gerlach

$$\begin{aligned}(\sigma_z - \mathbf{1})(\sigma_z + \mathbf{1}) &= \sigma_z^2 + \sigma_z - \sigma_z - \mathbf{1} = \sigma_z^2 - \mathbf{1} = \sum_{b'} |b'\rangle(b' - 1)(b' + 1)\langle b'| = \\ &= |+\rangle(1 - 1)\langle+| + |- \rangle(-1 + 1)\langle-| = 0\end{aligned}\quad (4.17)$$

(na primeira desigualdade da equação acima utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação, isso segue do fato que os símbolos de medida já nos indicaram uma estrutura algébrica, ou seja, a álgebra das medidas.), então podemos escrever os símbolos² $|++|$ e $|--|$, baseando-nos na expressão (4.12),

$$\begin{aligned}|++| &= \frac{\sigma_z - (\sigma'_z \mathbf{1})}{1 - (-1)} = \frac{|++| - |--| - (-|++| - |--|)}{2} = \\ &= \frac{|++| + |--| + |++| - |--|}{2} = \frac{\mathbf{1} + \sigma_z}{2}, \\ |--| &= \frac{\sigma_z - (\sigma'_z \mathbf{1})}{-1 - (+1)} = \frac{|++| - |--| - (+|++| - |--|)}{-2} = \\ &= \frac{|++| + |--| - (|++| - |--|)}{2} = \frac{\mathbf{1} - \sigma_z}{2}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

²Estes símbolos da medida tem como referência a direção z no espaço tri-dimensional, por isso, estão escritos nos vetores de base $|z'\rangle = |\sigma'_z\rangle$ e $\langle z'| = \langle \sigma'_z|$, com isto temos as seguintes correspondências para os símbolos da medida,

- a) $|++| = |+\rangle\langle+| = |+\rangle_{z z} \langle+|, \quad |--| = |-\rangle\langle-| = |-\rangle_{z z} \langle-|;$
b) $|+-| = |+\rangle\langle-| = |+\rangle_{z z} \langle-|, \quad |-+| = |-\rangle\langle+| = |-\rangle_{z z} \langle+|.$

A partir de $\sigma_z^2 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= \sum_{b'} |b'\rangle \langle b'| = (|++| - |--|)^2 = (|++| - |--|)(|++| - |--|) = \\ &= |++| + +| - |++| - |--| + +| + |--| - -|,\end{aligned}$$

vamos analisar cada termo de σ_z^2 , baseando-nos nos resultados prévios de $|++|$ e $|--|$,

$$\begin{aligned}|++| + +| &= \left(\frac{\mathbf{1} + \sigma_z}{2}\right)\left(\frac{\mathbf{1} + \sigma_z}{2}\right) = \left(\frac{\mathbf{1} + \sigma_z}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{1} + \sigma_z)^2 = \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{1} + \mathbf{1} + 2\sigma_z) = \frac{1}{4}(2\mathbf{1} + 2\sigma_z) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \sigma_z) = |++|, \\ |--| - -| &= \left(\frac{\mathbf{1} - \sigma_z}{2}\right)\left(\frac{\mathbf{1} - \sigma_z}{2}\right) = \left(\frac{\mathbf{1} - \sigma_z}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{1} - \sigma_z)^2 = \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{1} + \mathbf{1} - 2\sigma_z) = \frac{1}{4}(2\mathbf{1} - 2\sigma_z) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \sigma_z) = |--|, \\ |++| - -| &= \left(\frac{\mathbf{1} + \sigma_z}{2}\right)\left(\frac{\mathbf{1} - \sigma_z}{2}\right) = \frac{1}{4}(\mathbf{1} + \sigma_z)(\mathbf{1} - \sigma_z) = \frac{1}{4}(\mathbf{1} - \sigma_z + \sigma_z - \sigma_z^2) = \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{1} - \sigma_z^2) = 0, \\ |--| + +| &= \left(\frac{\mathbf{1} - \sigma_z}{2}\right)\left(\frac{\mathbf{1} + \sigma_z}{2}\right) = \frac{1}{4}(\mathbf{1} - \sigma_z)(\mathbf{1} + \sigma_z) = \frac{1}{4}(\mathbf{1} + \sigma_z - \sigma_z - \sigma_z^2) = \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{1} - \sigma_z^2) = 0.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Como já descrito em maiores detalhes na primeira seção, o experimento de Stern-Gerlach, nos informa que

- 1) O elétron possui uma propriedade física, a qual chamamos momento magnético designado por μ .
- 2) A componente desse momento magnético segundo uma dada direção (a direção do campo magnético) possui somente dois valores.

Assim associamos um observável a esta propriedade física, numa direção z que convencionamos. Contudo estamos num espaço tri-dimensional no qual poderíamos convencionar a direção do campo nas outras direções espaciais também, obtendo pela isotropia espacial dois valores na direção escolhida. exemplo disto seria rodarmos o aparelho na direção escolhida (lembrando-se que o sistema de coordenadas está fixo, só o aparelho é rodado), ou seja, alinhando-se o campo nesta direção.

Basicamente o que estamos fazendo é uma projeção do observável associado a propriedade intrínseca do elétron numa direção preferencial pré-estabelecida.

Os resultados medindo-se para σ_x e σ_y devem ser ± 1 , assim devemos ter

$$\sigma_x^2 = \mathbf{1}, \sigma_y^2 = \mathbf{1}. \quad (4.20)$$

Uma pergunta natural que surge em comparação com σ_z , é possível exibirmos as propriedades físicas em termos de $|+ -|$ e $| - +|$, para este feito, se faz necessário sabermos as propriedades da multiplicação,

$$\begin{aligned} |+ -||+ -| &= 0, | - +||- +| = 0, \\ |+ -||- +| &= | + +|, | - +||+ -| = | - -|. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Se queremos construir símbolos que sejam quadrados unitários, podemos tentar começar por

$$[| - +| + | + -|]^2 = \underbrace{| - +|| - +|}_{=0} + \underbrace{| + -|| - +|}_{=| + +|} + \underbrace{| - +|| + -|}_{=| - -|} + \underbrace{| + -|| + -|}_{=0} = \mathbf{1}, \quad (4.22)$$

com isto podemos escolher a definição

$$\sigma_x = | - +| + | + -|. \quad (4.23)$$

Se tentarmos prosseguir com a mesma ideia construída anteriormente, fazendo-se agora a diferença temos,

$$\begin{aligned} [| - +| - | + -|]^2 &= \underbrace{| - +|| - +|}_{=0} - \underbrace{| + -|| - +|}_{=| + +|} - \underbrace{| - +|| + -|}_{=| - -|} + \underbrace{| - +|| + -|}_{=0} = \\ &= -| + +| - | - -| = -\mathbf{1}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Observamos que falta algum número na nossa construção, para definirmos o σ_y , assim sendo já que os números reais não são suficientes, passemos aos complexos, da seguinte forma,

$$\begin{aligned} [i| - +| - i| + -|]^2 &= (-1) \underbrace{| - +|| - +|}_{=0} + \underbrace{| + -|| - +|}_{=| + +|} + \\ &+ \underbrace{| - +|| + -|}_{=| - -|} + (-1) \underbrace{| - +|| - +|}_{=0} = \\ &= | + +| + | - -| = \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

dessa forma podemos definir,

$$\sigma_y = i| - +| - i| + -|. \quad (4.26)$$

Agora podemos explicitar os símbolos de medida $|+ -|$ e $| - +|$ em termos de nossas construções convencionadas,

$$|+ -| = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y), | - +| = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \quad (4.27)$$

no qual obtemos pelas propriedades de multiplicação,

$$\begin{aligned} 0 &= [|+ -|]^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x + i\sigma_y)^2 = \sigma_x^2 + i\sigma_y\sigma_x + i\sigma_x\sigma_y - \sigma_y^2 = \\ &= \frac{1}{4}[1 - 1 + i(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x)], \end{aligned} \quad (4.28)$$

segue-se então,

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0 \implies \sigma_y\sigma_x = -\sigma_x\sigma_y. \quad (4.29)$$

Olhando para o produto,

$$\begin{aligned} |+ -|| - +| &= | + +| = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)\frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \frac{1}{4}(\sigma_x + i\sigma_y)(\sigma_x + i\sigma_y) = \\ &= \sigma_x^2 - i\sigma_x\sigma_y + i\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 = \frac{1}{4}[\mathbf{1} + \mathbf{1} - 2i\sigma_x\sigma_y] = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - i\sigma_x\sigma_y) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \sigma_z), \end{aligned}$$

implicando que

$$-i\sigma_x\sigma_y = \sigma_z \Rightarrow \sigma_x\sigma_y = i\sigma_z, \quad (4.30)$$

a equação(4.30) acima juntamente com (4.29), nos leva

$$\begin{aligned} \sigma_x(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) &= 0 \\ \sigma_x\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_y\sigma_x &= 0 \\ \sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x &= 0, \\ \\ (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x)\sigma_y &= 0 \\ \sigma_x\sigma_y\sigma_y + \sigma_y\sigma_x\sigma_y &= 0 \\ i\sigma_z\sigma_y + \sigma_yi\sigma_z &= 0 \\ \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Também temos,

$$\begin{aligned}
\sigma_z(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) &= 0 \\
\sigma_z\sigma_x\sigma_y + \sigma_z \underbrace{\sigma_y\sigma_x}_{=-i\sigma_z} &= 0 \\
\sigma_z\sigma_x\sigma_y - i\sigma_z^2 &= 0 \\
\sigma_z\sigma_x\sigma_y - i\mathbf{1} &= 0 \\
\sigma_z\sigma_x\sigma_y &= i\mathbf{1} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x)\sigma_z &= 0 \\
\sigma_x\sigma_y\sigma_z + \underbrace{\sigma_y\sigma_x}_{=-i\sigma_z}\sigma_z &= 0 \\
\sigma_x\sigma_y\sigma_z - i\sigma_z^2 &= 0 \\
\sigma_x\sigma_y\sigma_z &= i\mathbf{1} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y(\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) &= 0 \\
\underbrace{\sigma_y\sigma_x}_{=-i\sigma_z}\sigma_z + \sigma_y\sigma_z\sigma_x &= 0 \\
-i\sigma_z^2 + \sigma_y\sigma_z\sigma_x &= 0 \\
\sigma_y\sigma_z\sigma_x &= i\mathbf{1} .
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Mostrando-nos que os índices podem ser permutados ciclicamente,

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z = \sigma_y\sigma_z\sigma_x = \sigma_z\sigma_x\sigma_y = i\mathbf{1}. \tag{4.33}$$

Assim a expressão (4.30) é complementada por duas outras expressões via equação (4.33),

$$\begin{aligned}
\sigma_y\sigma_z\sigma_x &= i\mathbf{1} \\
(\sigma_y\sigma_z\sigma_x)\sigma_x &= i\sigma_x \\
\sigma_y\sigma_z \underbrace{\sigma_x\sigma_x}_{=\sigma_x^2} &= i\sigma_x \\
\sigma_y\sigma_z &= i\sigma_x ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z \sigma_x \sigma_y &= i\mathbf{1} \\
(\sigma_z \sigma_x \sigma_y) \sigma_y &= i\sigma_y \\
\sigma_z \sigma_x \underbrace{\sigma_y \sigma_y}_{=\sigma_y^2} &= i\sigma_y \\
\sigma_z \sigma_x &= i\sigma_y. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

A passagem feita da álgebra dos quatro símbolos de medida $|\pm\pm|$ para a dos símbolos $\mathbf{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ é um tanto malfeito, mas as propriedades algébricas do operador vetorial de Pauli σ não é (com isto, atribuímos um formalismo matemático a construção inicial da álgebra dos operadores de Pauli). Uma maneira de expressarmos os símbolos compactamente, seria considerarmos dois vetores, digamos \vec{a} e \vec{b} . Então,

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\sigma_x a_x + \sigma_y a_y + \sigma_z a_z)(\sigma_x b_x + \sigma_y b_y + \sigma_z b_z) = \\
&= \sigma_x a_x \sigma_x b_x + \sigma_x a_x \sigma_y b_y + \sigma_x a_x \sigma_z b_z + \sigma_y a_y \sigma_x b_x + \sigma_y a_y \sigma_y b_y + \\
&\quad + \sigma_y a_y \sigma_z b_z + \sigma_z a_z \sigma_x b_x + \sigma_z a_z \sigma_y b_y + \sigma_z a_z \sigma_z b_z = \\
&= a_x b_x \sigma_x^2 + a_y b_y \sigma_y^2 + a_z b_z \sigma_z^2 + \sigma_y \sigma_z a_y b_z + \sigma_z \sigma_y a_z b_y + \sigma_z \sigma_x a_z b_x + \\
&\quad + \sigma_x \sigma_z a_x b_z + \sigma_x \sigma_y a_x b_y + \sigma_y \sigma_x a_y b_x = \\
&= (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \mathbf{1} + i\sigma_x (a_y b_z - a_z b_y) + \\
&\quad + i\sigma_y (a_z b_x - a_x b_z) + i\sigma_z (a_x b_y - a_y b_x) = \\
&= (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbf{1} + i\sigma \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Com isto, unificamos todas as propriedades de multiplicação. Em particular, seja $\vec{a} = \vec{b} = \vec{n}$, um vetor unitário numa direção qualquer, temos

$$(\sigma \cdot \vec{n})^2 = \sigma \cdot \vec{n} \cdot \sigma \cdot \vec{n} = \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{n})}_{=1} \mathbf{1} + i\sigma \cdot \underbrace{(\vec{n} \times \vec{n})}_{=0} = \mathbf{1}, \tag{4.36}$$

isto mostra que uma medida da componente de σ em qualquer direção terá os resultados $+1$ e -1 . Apesar de termos a possibilidade da mudança continua na direção de medida, a não-comutatividade dos símbolos de diferentes componentes assegura os resultados discretos das medidas.

4.2 Símbolos Adjuntos, símbolos Hermitianos

Notemos que a simbolização de sucessivas ações de medida através da multiplicação de símbolos correspondentes possui certa arbitrariedade, escolhemos eles na sequência da esquerda para direita ($E \rightarrow D$). Mas isto é apenas um modo de se trabalhar, podemos igualmente ordená-los da direita para esquerda, da mesma maneira com a liberdade de escolha dos sistemas de coordenadas, *a validade de uma premissa física não pode depender de quais convenções adotamos*. Assim uma relação que seja correta, expressada em alguma convenção, deve ser também uma relação correta quando mudamos sistematicamente para outra convenção. Construímos isto pela condição de uma operação matemática, chamada o **adjunto**, ou **conjugação Hermitiana** e simbolizamos pelo dagger: \dagger .

O símbolo de medida $|a' a''|$ tem a interpretação de selecionar átomos a' e produzir átomos a'' , quando lido da esquerda para direita - destralmente. Se lemos da direita para esquerda, sinistralmente, isso significa selecionar átomos a'' e produzir átomos a' . Expressamos da seguinte forma

$$|a' a''|^\dagger = |a'' a'|, \quad (4.37)$$

dando uma nova interpretação para convenção original. Lendo-se como o adjunto (ou conjugado Hermitiano) de $|a' a''|$ é $|a'' a'|$. Num exemplo particular

$$|a' a'|^\dagger = |a' a'|, \quad (4.38)$$

quaisquer desses objetos são ditos serem auto-adjuntos ou Hermitianos.

Os vetores esquerdo e direito $\langle a' |$, $|a' \rangle$ são lidos destralmente [$E \rightarrow D$] como a criação de um átomo $\langle a' |$, destruição de um átomo $|a' \rangle$, respectivamente. Na convenção sinistral [$D \rightarrow E$], $\langle a' |$ simboliza a destruição, e $|a' \rangle$ a criação do átomo a' . Assim

$$\langle a' |^\dagger = |a' \rangle \text{ (criao)}, |a' \rangle^\dagger = \langle a' | \text{ (destruio)}. \quad (4.39)$$

Aqui, e no geral, a repetição de \dagger retoma o objeto original, como em

$$(X^\dagger)^\dagger = X. \quad (4.40)$$

Ilustramos outra regra geral combinando com o que aprendemos:

$$(|a' \rangle \langle a''|)^\dagger = |a'' \rangle \langle a'| = (\langle a'' |)^\dagger (|a' \rangle)^\dagger \quad (4.41)$$

ou

$$(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger; \quad (4.42)$$

o adjunto de um produto é o produto dos adjuntos, na ordem oposta. Num exemplo mais elementar temos,

$$|a'b'||c'd'|^\dagger = |c'd|^\dagger |a'b'|^\dagger = |d'c'||b'a'|. \quad (4.43)$$

Com a igualdade (4.43), obtemos um novo resultado

$$\begin{aligned} |a'b'||c'd'| &= |a'\rangle\langle b'|c'\rangle\langle d'| = \langle b'|c'\rangle|a'd'|, \\ |d'c'||b'a'| &= |d'\rangle\langle c'|b'\rangle\langle a'| = \langle b'|c'\rangle^*|d'a'|, \end{aligned} \quad (4.44)$$

levando-nos para

$$(\langle b'|c'\rangle|a'd'|)^\dagger = \langle b'|c'\rangle^*|a'd'|^\dagger, \quad (4.45)$$

na operação adjunta, números são substituídos pelos seus complexos conjugados,

$$(\lambda X)^\dagger = \lambda^* X^\dagger, \quad (4.46)$$

onde λ é número complexo qualquer.

Observamos que a sequência reversa da operação \dagger , expressa na multiplicação, não faz efeito sobre a adição:

$$(X + Y)^\dagger = X^\dagger + Y^\dagger. \quad (4.47)$$

Como consequência do resultado (4.47) o símbolo unitário é Hermitiano,

$$\mathbf{1}^\dagger = \left(\sum_{a'} |a'a'| \right)^\dagger = \sum_{a'} |a'a'|^\dagger = \sum_{a'} |a'a'| = \mathbf{1}. \quad (4.48)$$

De fato, o símbolo de qualquer propriedade física,

$$B = \sum_{b'} |b'\rangle b'\langle b'| \text{ com } b'^* = b', \quad (4.49)$$

é Hermitiano:

$$B^\dagger = \left(\sum_{b'} |b'\rangle b'\langle b'| \right)^\dagger = \sum_{b'} (|b'\rangle b'\langle b'|)^\dagger = \sum_{b'} \langle b'|^\dagger b'^* |b'\rangle^\dagger = \sum_{b'} |b'\rangle b'\langle b'| = B. \quad (4.50)$$

Agora, vamos trabalhar com os operadores de Pauli da seção 4.1, verificando se são Hermitianos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1}^\dagger &= (|++| + |--|)^\dagger = |++|^\dagger + |--|^\dagger = |++| + |--| = \mathbf{1}, \\
 \sigma_z^\dagger &= (|++| - |--|)^+ = |++|^\dagger - |--|^\dagger = |++| - |--| = \sigma_z, \\
 \sigma_x^\dagger &= (|+-| - |+-|)^\dagger = |+-|^\dagger - |+-|^\dagger = |+-| - |+-| = \sigma_x, \\
 \sigma_y^\dagger &= (i|+-| - i|+-|)^\dagger = (i|+-|)^\dagger - (i|+-|)^\dagger = -i|+-| + |+-| = \sigma_y. \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

Por último observemos como a álgebra dos σ 's comporta-se sob conjugação Hermitiana, utilizando-se a regra (4.42) e o resultado geral (4.50)

$$\begin{aligned}
 (\sigma \cdot \vec{a} \ \sigma \cdot \vec{b})^\dagger &= (\sigma \cdot \vec{b})^\dagger (\sigma \cdot \vec{a})^\dagger = \sigma \cdot \vec{b} \ \sigma \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} + i\sigma \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = \\
 &= (\vec{a} \cdot \vec{b} + i\sigma \cdot (\vec{a} \times \vec{b}))^\dagger = \vec{a} \cdot \vec{b} - i\sigma \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \\
 &= (\vec{b} \cdot \vec{a})\mathbf{1} + i\sigma \cdot (\vec{b} \times \vec{a}), \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

sendo o mesmo resultado de (4.35).

4.3 Representação Matricial

Os operadores de Pauli σ_x e σ_y são exemplos de alguma quantidade física escrita, em termos dos símbolos de medida de uma outra propriedade física, no caso em função dos vetores de base $\langle z' |$ e $| z' \rangle$. Uma outra forma mais geral de escrevemos os símbolos associados as propriedades físicas, é investigar mais a fundo o símbolo unitário **1**

$$\begin{aligned}
 B &= \mathbf{1}B\mathbf{1} = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| B \sum_{a''} |a''\rangle\langle a''| = \\
 &= (|a'\rangle\langle a'| + \dots + |a^n\rangle\langle a^n|) B (|a'\rangle\langle a'| + \dots + |a^n\rangle\langle a^n|) = \\
 &= (|a'\rangle\langle a'| B + \dots + |a^n\rangle\langle a^n| B) (|a'\rangle\langle a'| + \dots + |a^n\rangle\langle a^n|) = \\
 &= \sum_{a', a''} \langle a' | B | a'' \rangle |a' a''|. \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

Com isto, exibimos B como combinação linear de n^2 símbolos de medida $|a' a''|$, sendo especificado pelos valores dos $n \times n = n^2$ números $\langle a' | B | a'' \rangle$. Estes números podem ser

dispostos em uma forma quadrada $n \times n$, ou seja uma matriz:

$$\begin{pmatrix} \langle a_1 | B | a_1 \rangle & \dots & \langle a_1 | B | a_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n | B | a_1 \rangle & \dots & \langle a_n | B | a_n \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Para uma exemplificação nos baseamos no experimento que nos impulsionou (o experimento de Stern-Gerlach), utilizemos os operadores de Pauli, para mostrarmos as matrizes associadas com os observáveis $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ e o símbolo unitário para este caso **1**,

$$\sigma_x = | - + | + | + - |,$$

$$\langle + | \sigma_x | + \rangle = \langle + | (| - \rangle \langle + | + | + \rangle \langle - |) | + \rangle = \langle + | - \rangle \langle + | + \rangle + \langle + | + \rangle \langle - | + \rangle = 0,$$

$$\langle + | \sigma_x | - \rangle = \langle + | (| - \rangle \langle + | + | + \rangle \langle - |) | - \rangle = \langle + | - \rangle \langle + | - \rangle + \langle + | + \rangle \langle - | - \rangle = 1,$$

$$\langle - | \sigma_x | + \rangle = \langle - | (| - \rangle \langle + | + | + \rangle \langle - |) | + \rangle = \langle - | - \rangle \langle + | + \rangle + \langle - | + \rangle \langle - | + \rangle = 1,$$

$$\langle - | \sigma_x | - \rangle = \langle - | (| - \rangle \langle + | + | + \rangle \langle - |) | - \rangle = \langle - | - \rangle \langle + | - \rangle + \langle - | + \rangle \langle - | - \rangle = 0,$$

temos então

$$\sigma_x : \begin{pmatrix} \langle + | \sigma_x | + \rangle & \langle + | \sigma_x | - \rangle \\ \langle - | \sigma_x | + \rangle & \langle - | \sigma_x | - \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

com os demais operadores procede-se de forma análoga resultando,

$$\sigma_y = i | - + | - i | + - |,$$

$$\langle + | \sigma_y | + \rangle = \langle + | (i | - \rangle \langle + | - i | + \rangle \langle - |) | + \rangle = i \langle + | - \rangle \langle + | + \rangle - i \langle + | + \rangle \langle - | + \rangle = 0,$$

$$\langle + | \sigma_y | - \rangle = \langle + | (i | - \rangle \langle + | - i | + \rangle \langle - |) | - \rangle = i \langle + | - \rangle \langle + | - \rangle - i \langle + | + \rangle \langle - | - \rangle = -i,$$

$$\langle - | \sigma_y | + \rangle = \langle - | (i | - \rangle \langle + | - i | + \rangle \langle - |) | + \rangle = i \langle - | - \rangle \langle + | + \rangle - i \langle - | + \rangle \langle - | + \rangle = i,$$

$$\langle - | \sigma_y | - \rangle = \langle - | (i | - \rangle \langle + | - i | + \rangle \langle - |) | - \rangle = i \langle - | - \rangle \langle + | - \rangle - i \langle - | + \rangle \langle - | - \rangle = 0,$$

obtendo-se

$$\sigma_y : \begin{pmatrix} \langle +|\sigma_y|+ \rangle & \langle +|\sigma_y|- \rangle \\ \langle -|\sigma_y|+ \rangle & \langle -|\sigma_y|- \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_z = | + + | - | - - |,$$

$$\langle +|\sigma_z|+ \rangle = \langle +|(|+\rangle\langle +|-|-\rangle\langle -|)|+ \rangle = \langle +|+\rangle\langle +|+ \rangle - \langle +|- \rangle\langle -|+ \rangle = 1,$$

$$\langle +|\sigma_z|- \rangle = \langle +|(|+\rangle\langle +|-|-\rangle\langle -|)|- \rangle = \langle +|+\rangle\langle +|- \rangle - \langle +|- \rangle\langle -|- \rangle = 0,$$

$$\langle -|\sigma_z|+ \rangle = \langle -|(|+\rangle\langle +|-|-\rangle\langle -|)|+ \rangle = \langle -|+\rangle\langle +|+ \rangle - \langle -|- \rangle\langle -|+ \rangle = 0,$$

$$\langle -|\sigma_z|- \rangle = \langle -|(|+\rangle\langle +|-|-\rangle\langle -|)|- \rangle = \langle -|+\rangle\langle +|- \rangle - \langle -|- \rangle\langle -|- \rangle = -1,$$

$$\sigma_z : \begin{pmatrix} \langle +|\sigma_z|+ \rangle & \langle +|\sigma_z|- \rangle \\ \langle -|\sigma_z|+ \rangle & \langle -|\sigma_z|- \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{1} = | + + | + | - - |,$$

$$\langle +|\mathbf{1}|+ \rangle = \langle +|(|+\rangle\langle +|+|-\rangle\langle -|)|+ \rangle = \langle +|+\rangle\langle +|+ \rangle + \langle +|- \rangle\langle -|+ \rangle = 1,$$

$$\langle +|\mathbf{1}|- \rangle = \langle +|(|+\rangle\langle +|+|-\rangle\langle -|)|- \rangle = \langle +|+\rangle\langle +|- \rangle + \langle +|- \rangle\langle -|- \rangle = 0,$$

$$\langle -|\mathbf{1}|+ \rangle = \langle -|(|+\rangle\langle +|+|-\rangle\langle -|)|+ \rangle = \langle -|+\rangle\langle +|+ \rangle + \langle -|- \rangle\langle -|+ \rangle = 0,$$

$$\langle -|\mathbf{1}|- \rangle = \langle -|(|+\rangle\langle +|+|-\rangle\langle -|)|- \rangle = \langle -|+\rangle\langle +|- \rangle + \langle -|- \rangle\langle -|- \rangle = 1,$$

$$\mathbf{1} : \begin{pmatrix} \langle +|\mathbf{1}|+ \rangle & \langle +|\mathbf{1}|- \rangle \\ \langle -|\mathbf{1}|+ \rangle & \langle -|\mathbf{1}|- \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

conhecidas como as matrizes de Pauli. Uma propriedade física pode ser representada por sua respectiva matriz, assim todas as operações algébricas, onde se encontrem esta propriedade física, pode ser expressa em termo de sua representação matricial, isto é claro válido para todas as outras propriedades físicas. Mostramos as operações algébricas básicas:

Adição de B e C:

$$\begin{aligned} B + C &= \mathbf{1}(B + C)\mathbf{1} = \sum_{a',a''} \langle a' | (B + C) | a'' \rangle | a' a'' | = \mathbf{1}B\mathbf{1} + \mathbf{1}C\mathbf{1} = \\ &= \sum_{a',a''} \langle a' | B | a'' \rangle | a' a'' | + \sum_{a',a''} \langle a' | C | a'' \rangle | a' a'' | = \sum_{a',a''} \langle a' | B | a'' \rangle + \langle a' | C | a'' \rangle | a' a'' |, \end{aligned}$$

implicando que

$$\langle a' | (B + C) | a'' \rangle = \langle a' | B | a'' \rangle + \langle a' | C | a'' \rangle, \quad (4.55)$$

Multiplicação de B e C:

$$\begin{aligned} BC &= \mathbf{1}BC\mathbf{1} = \sum_{a',a''} \langle a' | BC | a'' \rangle | a' a'' | = \sum_{a',a'''} \langle a' | B\mathbf{1}C | a''' \rangle | a' a''' | = \\ &= \sum_{a',a'''} \langle a' | B \sum_{a''} | a'' \rangle \langle a'' | C | a'' \rangle | a'' a''' | = \sum_{a',a'''} \sum_{a''} \langle a' | B | a'' \rangle \langle a'' | C | a''' \rangle | a' a''' |, \end{aligned}$$

implicando que

$$\langle a' | BC | a''' \rangle = \sum_{a''} \langle a' | B | a'' \rangle \langle a'' | C | a''' \rangle; \quad (4.56)$$

Multiplicação de B por um número:

$$\begin{aligned} \lambda B &= \mathbf{1}\lambda B\mathbf{1} = \sum_{a',a''} \langle a' | \lambda B | a'' \rangle | a' a'' | = \lambda \mathbf{1}B\mathbf{1} = \lambda \sum_{a',a''} \langle a' | \lambda B | a'' \rangle | a' a'' | = \\ &= \sum_{a',a''} \lambda \langle a' | \lambda B | a'' \rangle | a' a'' |, \end{aligned}$$

implicando que

$$\langle a' | \lambda B | a'' \rangle = \lambda \langle a' | B | a'' \rangle. \quad (4.57)$$

Verifiquemos como a operação adjunta atua sobre um operador qualquer,

$$X = \sum_{a',a''} \langle a'' | X | a' \rangle | a'' a' |, \quad (4.58)$$

$$X^\dagger = \sum_{a',a''} \langle a'' | X | a' \rangle^* \underbrace{| a' a'' \rangle}_{| a' a'' |^\dagger}, \quad (4.59)$$

nos informa que

$$\underbrace{\langle a' |}_{\text{linha}} X^\dagger \underbrace{| a'' \rangle}_{\text{coluna}} = \underbrace{\langle a'' |}_{\text{linha}} X \underbrace{| a' \rangle^*}_{\text{coluna}} \quad (4.60)$$

a matriz de uma quantidade adjunta é o conjugado complexo, transposto (linha muda-se para coluna e vice-versa). No caso de X ser um Hermitiano B, sua matriz é restrita por

$$\langle a' | B | a'' \rangle = \langle a'' | B | a' \rangle^*, \quad (4.61)$$

como aplicação chequemos as matrizes de Pauli,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{pmatrix} \langle + | \sigma_x | + \rangle & \langle + | \sigma_x | - \rangle \\ \langle - | \sigma_x | + \rangle & \langle - | \sigma_x | - \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_x^\dagger &= \begin{pmatrix} \langle + | \sigma_x | + \rangle & \langle - | \sigma_x | + \rangle \\ \langle + | \sigma_x | - \rangle & \langle - | \sigma_x | - \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \begin{pmatrix} \langle + | \sigma_y | + \rangle & \langle + | \sigma_y | - \rangle \\ \langle - | \sigma_y | + \rangle & \langle - | \sigma_y | - \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_y^\dagger &= \begin{pmatrix} \langle + | \sigma_y | + \rangle & \langle - | \sigma_y | + \rangle \\ \langle + | \sigma_y | - \rangle & \langle - | \sigma_y | - \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \begin{pmatrix} \langle + | \sigma_z | + \rangle & \langle + | \sigma_z | - \rangle \\ \langle - | \sigma_z | + \rangle & \langle - | \sigma_z | - \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_z^\dagger &= \begin{pmatrix} \langle + | \sigma_z | + \rangle & \langle - | \sigma_z | + \rangle \\ \langle + | \sigma_z | - \rangle & \langle - | \sigma_z | - \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \langle + | \mathbf{1} | + \rangle & \langle + | \mathbf{1} | - \rangle \\ \langle - | \mathbf{1} | + \rangle & \langle - | \mathbf{1} | - \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{1}^\dagger = \begin{pmatrix} \langle +|\mathbf{1}|+ \rangle & \langle -|\mathbf{1}|+ \rangle \\ \langle +|\mathbf{1}|- \rangle & \langle -|\mathbf{1}|- \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Notemos que a conjugação complexa é o adjunto para os números, isto é tomamos o adjunto de suas componentes multiplicativas, como em

$$\langle a' | b' \rangle^* = |b' \rangle^\dagger \langle a' |^\dagger = \langle b' | a' \rangle, \quad (4.66)$$

$$\langle a'' | X | a' \rangle^* = |a' \rangle^\dagger X^\dagger \langle a'' |^\dagger = \langle a' | X^\dagger | a'' \rangle. \quad (4.67)$$

4.4 Traço

Sabemos de outras seções que o símbolo de medida $|a' a''|$ é o produto dos vetores $|a' \rangle \langle a''|$, porém se invertemos a ordem da multiplicação dos vetores obtemos um número: $\langle a'' | a' \rangle = \delta(a', a'')$. Este tipo de operação é chamada *traço*, assim sendo

$$\text{tr}\{|a' a''|\} = \delta(a', a''). \quad (4.68)$$

Mas esta definição é consistente com a relação linear entre dois tipos de símbolos, ou seja

$$\begin{aligned} |b' b'| &= \sum_{a', a''} |a' \rangle \langle a' | b' \rangle \langle b'' | a'' \rangle \langle a'' | = \\ &= \sum_{a', a''} \langle a' | b' \rangle \langle b'' | a'' \rangle |a' \rangle \langle a'' | = \sum_{a', a''} \langle a' | b' \rangle \langle b'' | a'' \rangle |a' a''|? \end{aligned} \quad (4.69)$$

A resposta vem do tratamento da primeira linha da equação acima (4.69),

$$\begin{aligned} \text{tr}\{|b' b''|\} &= \text{tr}\{\sum_{a', a''} |a' \rangle \langle a' | b' \rangle \langle b'' | a'' \rangle \langle a'' |\} = \sum_{a', a''} \langle b'' | a'' \rangle \text{tr}\{|a' \rangle \langle a''|\} \langle a' | b' \rangle = \\ &= \sum_{a', a''} \langle b'' | a'' \rangle \underbrace{\langle a'' | a' \rangle}_{\delta(a', a'')} \langle a' | b' \rangle = \langle b'' | b' \rangle = \delta(b', b''). \end{aligned} \quad (4.70)$$

O traço tem um significado simples em termos dos elementos de matriz:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{a', a''} \langle a' | X | a'' \rangle, \\ \text{tr}\{X\} &= \sum_{a', a''} \langle a' | X | a'' \rangle \text{tr}\{|a' a''|\} = \sum_{a', a''} \langle a' | X | a'' \rangle \langle a' | a'' \rangle = \\ &= \sum_{a', a''} \langle a' | X | a'' \rangle \delta(a', a'') = \\ &= \sum_{a'} \langle a' | X | a' \rangle, \end{aligned} \quad (4.71)$$

a soma dos elementos da diagonal.

Tomemos o traço de um observável B partindo-se do resultado (4.71),

$$\begin{aligned}
 \text{tr}\{B\} &= \sum_{a'} \langle a' | B | a' \rangle = \sum_{a'} \langle a' | (\sum_{b'} |b' \rangle b' \langle b'|) |a' \rangle = \sum_{a', b'} \langle a' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle b' = \\
 &= \sum_{a', b'} p(a', b') b' = \sum_{b'} (\sum_{a'} p(a', b') b') = \sum_{b'} (p(a_1, b') b' + \dots + p(a_n, b') b') = \\
 &= \sum_{b'} b'.
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

concluímos então que o traço de um observável também é a soma de seus possíveis valores de medida.

Como exemplo as matrizes de Pauli da seção anterior mostram um traço nulo para cada componente do operador vetorial σ :

$$\text{tr}\{\sigma\} = 0. \tag{4.73}$$

O símbolo unitário pode ser apresentado numa forma mais geral utilizando-se a representação matricial

$$\langle a' | \mathbf{1} | a'' \rangle = \langle a' | (\sum_{a'''} |a''' \rangle \langle a'''|) |a'' \rangle = \langle a' | a' \rangle \langle a' | a'' \rangle = \langle a' | a'' \rangle = \delta(a', a''), \tag{4.74}$$

obtendo-se

$$\text{tr}\{\mathbf{1}\} = n, \tag{4.75}$$

esse resultado representa o número dos diferentes valores assumidos por alguma propriedade física.

Outra característica do traço é a de que qualquer número envolvendo vetores pode ser mostrado como um traço, no seguinte sentido

$$\begin{aligned}
 X|a'' a'| &= (\sum_{a''', a'v} \langle a''' | X | a'v \rangle |a''' a'v|) |a'' a'| = \sum_{a''', a'v} \langle a''' | X | a'v \rangle |a''' \rangle \underbrace{\langle a'v | a'' \rangle}_{\delta(a'', a'v)} \langle a' | = \\
 &= \sum_{a'''} \langle a''' | X | a'' \rangle |a''' \rangle \langle a' |, \\
 |a'' a'| X &= |a'' a'| (\sum_{a''', a'v} \langle a''' | X | a'v \rangle |a''' a'v|) = \sum_{a''', a'v} \langle a''' | X | a'v \rangle |a'' \rangle \underbrace{\langle a' | a''' \rangle}_{\delta(a', a''')} \langle a'v | = \\
 &= \sum_{a'v} \langle a' | X | a'v \rangle |a'' \rangle \langle a'v |,
 \end{aligned}$$

tomando-se os seus respectivos traços

$$\begin{aligned}\text{tr}\{\mathbf{X}|a''a'|\} &= \text{tr}\left\{\sum_{a'''}\langle a'''|\mathbf{X}|a''\rangle|a'''\rangle\langle a'|\right\} = \sum_{a'''}\langle a'''|\mathbf{X}|a''\rangle\text{tr}\{|a'''\rangle\langle a'|\} = \\ &= \sum_{a'''}\langle a'''|\mathbf{X}|a''\rangle\delta(a', a''') = \langle a'|\mathbf{X}|a''\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{tr}\{|a''a'|X\} &= \text{tr}\left\{\sum_{a'v}\langle a'|\mathbf{X}|a'v\rangle|a''\rangle\langle a'v|\right\} = \sum_{a'v}\langle a'|\mathbf{X}|a'v\rangle\text{tr}\{|a''\rangle\langle a'v|\} = \\ &= \sum_{a'v}\langle a'|\mathbf{X}|a'v\rangle\delta(a'', a'v) = \langle a'|\mathbf{X}|a''\rangle,\end{aligned}$$

implicando que

$$\text{tr}\{\mathbf{X}|a''a'|\} = \text{tr}\{|a''a'|\mathbf{X}\} = \langle a'|\mathbf{X}|a''\rangle. \quad (4.76)$$

Mostramos agora que o traço de um produto de símbolos é independente da ordem da multiplicação,

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \sum_{a', a''}\langle a'|\mathbf{X}|a''\rangle|a' a''|, \\ \mathbf{Y} &= \sum_{a''', a'v}\langle a'''|\mathbf{Y}|a'v\rangle|a''' a'v|, \\ \mathbf{XY} &= \sum_{a', a''}\langle a'|\mathbf{X}|a''\rangle|a' a''| \sum_{a''', a'v}\langle a'''|\mathbf{Y}|a'v\rangle|a''' a'v| = \\ &= \sum_{a', a'', a''', a'v}\langle a'|\mathbf{X}|a''\rangle|a'\rangle \underbrace{\langle a''|a'''\rangle}_{\delta(a'', a''')} \langle a'v|\langle a'''|\mathbf{Y}|a'v\rangle = \\ &= \sum_{a', a'', a'v}\langle a'|\mathbf{X}|a''\rangle\langle a''|\mathbf{Y}|a'v\rangle|a'\rangle\langle a'v|, \\ \mathbf{YX} &= \sum_{a''', a'v}\langle a'''|\mathbf{Y}|a'v\rangle|a''' a'v| \sum_{a', a''}\langle a'|\mathbf{X}|a''\rangle|a' a''| = \\ &= \sum_{a', a'', a''', a'v}\langle a'''|\mathbf{Y}|a'v\rangle|a'''\rangle \underbrace{\langle a'v|a'\rangle}_{\delta(a', a'v)} \langle a''|\mathbf{X}|a''\rangle = \\ &= \sum_{a', a'', a'''}\langle a'''|\mathbf{Y}|a'\rangle|a'''\rangle\langle a''| \langle a'|\mathbf{X}|a''\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{tr}\{XY\} &= \text{tr}\left\{\sum_{a',a'',a'v} \langle a'|\text{X}|a''\rangle \langle a''|\text{Y}|a'v\rangle |a'\rangle \langle a'v|\right\} = \\
&= \sum_{a',a'',a'v} \langle a'|\text{X}|a''\rangle \langle a''|\text{Y}|a'v\rangle \text{tr}\{|a'\rangle \langle a'v|\} = \\
&= \sum_{a',a'',a'v} \langle a'|\text{X}|a''\rangle \langle a''|\text{Y}|a'v\rangle \delta(a',a'v) = \sum_{a',a''} \langle a'|\text{X}|a''\rangle \langle a''|\text{Y}|a'\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{tr}\{XY\} &= \text{tr}\left\{\sum_{a',a'',a'''} \langle a'''|\text{Y}|a'\rangle |a'''\rangle \langle a''|\langle a'|\text{X}|a''\rangle\right\} = \\
&= \sum_{a',a'',a'''} \langle a'''|\text{Y}|a'\rangle \langle a'|\text{X}|a''\rangle \delta(a',a''') = \\
&= \sum_{a',a''} \langle a''|\text{Y}|a'\rangle \langle a'|\text{X}|a''\rangle,
\end{aligned}$$

implicando que

$$\sum_{a',a''} \langle a'|\text{X}|a''\rangle \langle a''|\text{Y}|a'\rangle = \sum_{a',a''} \langle a''|\text{Y}|a'\rangle \langle a'|\text{X}|a''\rangle,$$

logo

$$\text{tr}\{XY\} = \text{tr}\{YX\}. \quad (4.77)$$

Depois de vermos a operação traço aplicada sobre o produto de símbolos, vejamos num caso mais particular de duas propriedades físicas B e C como esta operação desenvolve-se

$$\begin{aligned}
BC &= \sum_{a',a''} \langle a'|\text{BC}|a''\rangle |a'a''| = \sum_{a',a''} \langle a'|\left(\sum_{b',c'} |b'\rangle b'c' \langle b'c'\rangle \langle c'|\right)|a''\rangle |a'a''| = \\
&= \sum_{a',a''} \sum_{b',c'} \langle a'|\langle b'|\langle b'c'|\langle c'|\rangle \langle c'|\rangle |a'a''|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{tr}\{BC\} &= \text{tr}\left\{\sum_{a',a''} \sum_{b',c'} \langle a'|\langle b'|\langle b'c'|\langle b'c'|\langle c'|\rangle \langle c'|\rangle |a'a''|\right\} = \\
&= \sum_{a',a''} \sum_{b',c'} \langle a'|\langle b'|\langle b'c'|\langle b'c'|\langle c'|\rangle \langle c'|\rangle |a'a''\rangle \delta(a',a'') = \\
&= \sum_{a'} \sum_{b',c'} \langle a'|\langle b'|\langle b'c'|\langle b'c'|\langle c'|\rangle \langle c'|\rangle |a'\rangle = \sum_{a'} \sum_{b',c'} b'c' \langle b'|\langle b'c'|\langle c'|\rangle \langle c'|\rangle |a'\rangle \langle a'|\langle b'|\rangle = \\
&= \sum_{b',c'} b'c' \langle b'|\langle b'c'|\langle c'|\rangle \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|\langle b'|\rangle = \sum_{b',c'} b'c' \langle b'|\langle b'c'|\langle c'|\rangle \langle b'|\rangle = \\
&= \sum_{b',c'} b'c' p(b',c'). \quad (4.78)
\end{aligned}$$

Como exemplo da simetria do traço apresentada na equação (4.77), apliquemos sobre o produto de símbolos de medida $\sigma \cdot \vec{a} \sigma \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \mathbf{1} + i \sigma \cdot \vec{a} \times \vec{b}$

$$\begin{aligned} \text{tr}\{\sigma \cdot \vec{a} \sigma \cdot \vec{b}\} &= \text{tr}\{\vec{a} \cdot \vec{b} \mathbf{1}\} + i \underbrace{\text{tr}\{\sigma \cdot \vec{a} \times \vec{b}\}}_{=0} = \text{tr}\{\mathbf{1}\} \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \vec{a} \cdot \vec{b}, \\ \text{tr}\{\sigma \cdot \vec{b} \sigma \cdot \vec{a}\} &= \text{tr}\{\vec{b} \cdot \vec{a} \mathbf{1}\} + i \underbrace{\text{tr}\{\sigma \cdot \vec{b} \times \vec{a}\}}_{=0} = \text{tr}\{\mathbf{1}\} \vec{b} \cdot \vec{a} = 2 \vec{b} \cdot \vec{a}, \end{aligned}$$

considerando o fato de que o produto escalar é comutativo, acabamos confirmando a simetria do produto de símbolos pela operação de traço

$$\text{tr}\{\sigma \cdot \vec{a} \sigma \cdot \vec{b}\} = \text{tr}\{\sigma \cdot \vec{b} \sigma \cdot \vec{a}\} = 2 \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (4.79)$$

O traço como uma operação que produz um elemento de matriz (4.76), pode ser aplicado para fornecer-nos o *valor médio*

$$\begin{aligned} \text{tr}\{|a' a' | \mathbf{B}\} &= \text{tr}\{|a'\rangle \langle a' | \sum_{a'', a'''} \langle a'' | \mathbf{B} | a'''\rangle |a''\rangle \langle a'''|\} = \\ &= \text{tr}\{ \sum_{a'', a'''} \langle a'' | \mathbf{B} | a'''\rangle |a'\rangle \underbrace{\langle a' | a''\rangle}_{\delta(a', a'')} \langle a'''|\} = \\ &= \text{tr}\{ \sum_{a'''} \langle a' | \mathbf{B} | a'''\rangle |a'\rangle \langle a'''|\} = \sum_{a'''} \langle a' | \mathbf{B} | a'''\rangle \underbrace{\langle a''' | a'\rangle}_{\delta(a', a''')} = \langle a' | \mathbf{B} | a'\rangle = \\ &= \langle \mathbf{B} \rangle_{a'}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

poderíamos ter também qualquer $f(\mathbf{B})$. Sendo assim, consideremos o caso particular, da função $\delta(\mathbf{B}, b') = |b' b'|$ (4.12),

$$\begin{aligned} \text{tr}\{|a' a' | f(\mathbf{B})\} &= \text{tr}\{|a' a' | \delta(\mathbf{B}, b')\} = \text{tr}\{|a' a' | |b' b'|\} = \text{tr}\{|a'\rangle \langle a' | b'\rangle \langle b'|\} = \\ &= \langle a' | b'\rangle \langle b' | a'\rangle = p(a', b') = \langle a' | \delta(\mathbf{B}, b') | a'\rangle = \langle \delta(\mathbf{B}, b') \rangle_{a'}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Outra vantagem da fórmula do traço, seria referente aos operadores de Pauli, para isto relembraremos que

$$\sigma'_z = +1 : | + + | = \frac{\mathbf{1} + \sigma_z}{2}; \quad \sigma'_z = -1 : | - - | = \frac{\mathbf{1} - \sigma_z}{2},$$

que é equivalente a notação compacta

$$|\sigma'_z \sigma'_z| = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \sigma'_z \sigma_z). \quad (4.82)$$

Aplicando-se a mesma fórmula (4.82), para as propriedades físicas A e B, que correspondem respectivamente a $\sigma \cdot \vec{n}_1$ e $\sigma \cdot \vec{n}_2$, onde $\vec{n}_{1,2}$ são vetores unitários em direções diferentes sob a operação de traço temos,

$$\begin{aligned}
 A &= \sigma \cdot \vec{n}_1 = \frac{\mathbf{1} + \sigma'_1 \sigma \cdot \vec{n}_1}{2} \\
 B &= \sigma \cdot \vec{n}_2 = \frac{\mathbf{1} + \sigma'_2 \sigma \cdot \vec{n}_2}{2}, \\
 \text{tr}\{AB\} &= \text{tr}\left\{\frac{\mathbf{1} + \sigma'_1 \sigma \cdot \vec{n}_1}{2} \frac{\mathbf{1} + \sigma'_2 \sigma \cdot \vec{n}_2}{2}\right\} = \\
 &= \frac{1}{4} \text{tr}\{\mathbf{1} + \sigma'_1 \sigma \cdot \vec{n}_1 + \sigma'_2 \sigma \cdot \vec{n}_2 + \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma \cdot \vec{n}_1 \sigma \cdot \vec{n}_2\} \\
 &= \frac{1}{4} \underbrace{\text{tr}\{\mathbf{1}\}}_{=2} + \underbrace{\sigma'_1 \text{tr}\{\sigma \cdot \vec{n}_1\}}_{=0} + \underbrace{\sigma'_2 \text{tr}\{\sigma \cdot \vec{n}_2\}}_{=0} + \underbrace{\sigma'_1 \sigma'_2 \text{tr}\{\sigma \cdot \vec{n}_1 \sigma \cdot \vec{n}_2\}}_{=2 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2} = \\
 &= \frac{1}{4} (2 + 2\sigma'_1 \sigma'_2 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = \frac{1}{2} (1 + \sigma'_1 \sigma'_2 \cos \theta), \tag{4.83}
 \end{aligned}$$

onde θ é o ângulo entre as duas direções. Podemos observar que o resultado (4.83) é uma forma compacta de escrevermos os resultados (apresentados na seção 3.3)

$$\begin{aligned}
 p(+, +) = p(-, -) &= \frac{1 + \cos \theta}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \\
 p(+, -) = p(-, +) &= \frac{1 - \cos \theta}{2} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),
 \end{aligned}$$

concluímos com isto que

$$p(\sigma'_1, \sigma'_2) = \frac{1}{2} (1 + \sigma'_1 \sigma'_2 \cos \theta). \tag{4.84}$$

Capítulo 5

Geometria Unitária

5.1 Vetores linha e coluna, funções de onda

Começemos mostrando a representação matricial de $\sigma \cdot \vec{n}$ em termos dos vetores $|\sigma'_z\rangle$, onde utilizamos coordenadas esféricas para parametrizar o vetor unitário \vec{n} , assim sendo temos

$$\vec{n} = \sin \vartheta \cos \varphi \hat{x} + \sin \vartheta \sin \varphi \hat{y} + \cos \vartheta \hat{z},$$

$$\sigma \cdot \vec{n} = \sigma_x \sin \vartheta \cos \varphi + \sigma_y \sin \vartheta \sin \varphi + \sigma_z \cos \vartheta,$$

$$\sigma \cdot \vec{n} = \sum_{\sigma'_z, \sigma''_z} \langle \sigma'_z | \sigma \cdot \vec{n} | \sigma''_z \rangle | \sigma'_z \sigma''_z \rangle,$$

vamos estudar cada termo do somatório acima,

$$\begin{aligned} {}_z \langle + | \sigma \cdot \vec{n} | + \rangle_z &= {}_z \langle + | \sigma_x \sin \vartheta \cos \varphi + \sigma_y \sin \vartheta \sin \varphi + \sigma_z \cos \vartheta | + \rangle_z = \\ &= \sin \vartheta \cos \varphi \underbrace{{}_z \langle + | \sigma_x | + \rangle_z}_{=0} + \sin \vartheta \sin \varphi \underbrace{{}_z \langle + | \sigma_y | + \rangle_z}_{=0} + \cos \vartheta \underbrace{{}_z \langle + | \sigma_z | + \rangle_z}_{=1} = \\ &= \cos \vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_z \langle + | \sigma \cdot \vec{n} | - \rangle_z &= \sin \vartheta \cos \varphi \underbrace{{}_z \langle + | \sigma_x | - \rangle_z}_{=1} + \sin \vartheta \sin \varphi \underbrace{{}_z \langle + | \sigma_y | - \rangle_z}_{=-i} + \cos \vartheta \underbrace{{}_z \langle + | \sigma_z | - \rangle_z}_{=0} = \\ &= \sin \vartheta \cos \varphi - i \sin \vartheta \sin \varphi = \sin \vartheta e^{-i\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_z\langle -|\sigma \cdot \vec{\mathbf{n}}|+\rangle_z &= \sin \vartheta \cos \varphi \underbrace{{}_z\langle -|\sigma_x|+\rangle_z}_{=1} + \sin \vartheta \sin \varphi \underbrace{{}_z\langle -|\sigma_y|+\rangle_z}_{=i} + \cos \vartheta \underbrace{{}_z\langle -|\sigma_z|+\rangle_z}_{=0} \\ &= \sin \vartheta e^{i\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_z\langle -|\sigma \cdot \vec{\mathbf{n}}|-\rangle_z &= \sin \vartheta \cos \varphi \underbrace{{}_z\langle -|\sigma_x|-\rangle_z}_{=0} + \sin \vartheta \sin \varphi \underbrace{{}_z\langle -|\sigma_y|-\rangle_z}_{=0} + \cos \vartheta \underbrace{{}_z\langle -|\sigma_z|-\rangle_z}_{=-1} \\ &= -\cos \vartheta, \end{aligned}$$

temos a representação matricial,

$$\langle \sigma'_z | \sigma \cdot \vec{\mathbf{n}} | \sigma''_z \rangle = \begin{pmatrix} {}_z\langle +|\sigma \cdot \vec{\mathbf{n}}|+\rangle_z & {}_z\langle +|\sigma \cdot \vec{\mathbf{n}}|-\rangle_z \\ {}_z\langle -|\sigma \cdot \vec{\mathbf{n}}|+\rangle_z & {}_z\langle -|\sigma \cdot \vec{\mathbf{n}}|-\rangle_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ \sin \vartheta e^{i\varphi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Vejamos a representação da medida $|\sigma'_n \sigma'_n|$ em termos dos vetores $|\sigma'_z\rangle$,

$$|\sigma'_n \sigma'_n| = \frac{\mathbf{1} + \sigma'_n \sigma \cdot \vec{\mathbf{n}}}{2} = \frac{\mathbf{1} + \sigma'_n (\sigma_x \sin \vartheta \cos \varphi + \sigma_y \sin \vartheta \sin \varphi + \sigma_z \cos \vartheta)}{2},$$

$$|\sigma'_n \sigma'_n| = \sum_{\sigma'_z, \sigma''_z} \langle \sigma'_z | (|\sigma'_n\rangle \langle \sigma'_n|) |\sigma''_z \rangle \langle \sigma''_z |,$$

$$\begin{aligned} |\sigma'_n \sigma'_n| &= {}_z\langle +|(|\sigma'_n\rangle \langle \sigma'_n|)|+\rangle_z + {}_z\langle +|(|\sigma'_n\rangle \langle \sigma'_n|)|-\rangle_z + {}_z\langle -|(|\sigma'_n\rangle \langle \sigma'_n|)|+\rangle_z + {}_z\langle -|(|\sigma'_n\rangle \langle \sigma'_n|)|-\rangle_z \\ &= {}_z\langle -|(|\sigma'_n\rangle \langle \sigma'_n|)|-\rangle_z, \end{aligned}$$

lembra que

$$\begin{aligned} |++| &= |+\rangle_z {}_z\langle +| = \frac{\mathbf{1} + \sigma_z}{2}, \\ |--| &= |-\rangle_z {}_z\langle -| = \frac{\mathbf{1} - \sigma_z}{2}, \\ |+-| &= |+\rangle_z {}_z\langle -| = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y), \\ |-+| &= |-\rangle_z {}_z\langle +| = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\sigma'_n \sigma'_n| &= {}_z\langle +|(|\sigma'_n\rangle \langle \sigma'_n|)|+\rangle_z \left(\frac{\mathbf{1} + \sigma_z}{2}\right) + {}_z\langle +|(|\sigma'_n\rangle \langle \sigma'_n|)|-\rangle_z \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) + \\ &\quad + {}_z\langle -|(|\sigma'_n\rangle \langle \sigma'_n|)|+\rangle_z \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) + {}_z\langle -|(|\sigma'_n\rangle \langle \sigma'_n|)|-\rangle_z \left(\frac{\mathbf{1} - \sigma_z}{2}\right), \end{aligned}$$

para efeito de cálculo chamemos os esclares por letras, ou seja,

$$_z\langle +|(|\sigma'_n\sigma'_n|)|+\rangle_z = a,$$

$$_z\langle +|(|\sigma'_n\sigma'_n|)|-\rangle_z = b,$$

$$_z\langle -|(|\sigma'_n\sigma'_n|)|+\rangle_z = c,$$

$$_z\langle -|(|\sigma'_n\sigma'_n|)|-\rangle_z = d,$$

assim sendo temos,

$$\begin{aligned} |\sigma'_n\sigma'_n| &= |\sigma'_n\rangle\langle\sigma'_n| = \frac{1}{2}(a[\mathbf{1} + \sigma_z] + b[\sigma_x + i\sigma_y] + c[\sigma_x - i\sigma_y] + d[\mathbf{1} - \sigma_z]) = \\ &= \frac{1}{2}((a+d)\mathbf{1} + (a-d)\sigma_z + (b+c)\sigma_x + i(b-c)\sigma_y), \end{aligned}$$

podemos então igualar as duas formas de $|\sigma'_n\sigma'_n|$ que são

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \sigma'_n(\sigma_x \sin \vartheta \cos \varphi + \sigma_y \sin \vartheta \sin \varphi + \sigma_z \cos \vartheta)) &= \\ &= \frac{1}{2}((a+d)\mathbf{1} + (a-d)\sigma_z + (b+c)\sigma_x + i(b-c)\sigma_y), \end{aligned}$$

que nos leva aos sistemas lineares ,

$$\begin{cases} a + d = 1 \\ a - d = \sigma'_n \cos \vartheta \end{cases} \implies \begin{cases} 2a = 1 + \sigma'_n \cos \vartheta \\ d = \frac{1 - \sigma'_n \cos \vartheta}{2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} b + c = \sigma'_n \sin \vartheta \cos \varphi \\ ib - ic = \sigma'_n \sin \vartheta \sin \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} b + c = \sigma'_n \sin \vartheta \cos \varphi \\ c - b = i \sigma'_n \sin \vartheta \sin \varphi \end{cases},$$

↓

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sigma'_n \sin \vartheta e^{i\varphi}}{2} \\ b &= \frac{\sigma'_n \sin \vartheta e^{-i\varphi}}{2} \end{aligned}$$

temos a representação,

$$\langle\sigma'_z|(|\sigma'_n\sigma'_n|)|\sigma''_z\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sigma'_n \cos \vartheta}{2} & \frac{\sigma'_n \sin \vartheta e^{-i\varphi}}{2} \\ \frac{\sigma'_n \sin \vartheta e^{i\varphi}}{2} & \frac{1 - \sigma'_n \cos \vartheta}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Assim trabalhando com os valores $\sigma'_n = \pm 1$ e aplicando-os em (5.2) ,

$$\begin{aligned}\langle \sigma'_z | (|\sigma'_z \sigma'_z|) | \sigma''_z \rangle &= \langle \sigma'_z | \sigma'_n = +1 \rangle \langle \sigma'_n = +1 | \sigma''_z \rangle = \langle \sigma'_z | \frac{\mathbf{1} + \sigma \cdot \vec{n}}{2} | \sigma''_z \rangle = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\vartheta}{2} & \frac{\sin\vartheta e^{-i\varphi}}{2} \\ \frac{\sin\vartheta e^{i\varphi}}{2} & \frac{1-\cos\vartheta}{2} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

melhornado o resultado obtido através do uso das relações trigonométricas

$$\cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \quad \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = 1$$

$$\frac{1 + \cos\vartheta}{2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2}\right)}{2} = \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right),$$

$$\sin\vartheta = \sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right),$$

$$\frac{1 - \cos\vartheta}{2} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2}\right)}{2} = \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right),$$

temos como resultado

$$\begin{aligned}\langle \sigma'_z | (|\sigma'_z \sigma'_z|) | \sigma''_z \rangle &= \langle \sigma'_z | \sigma'_n = +1 \rangle \langle \sigma'_n = +1 | \sigma''_z \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\vartheta}{2} & \frac{\sin\vartheta e^{-i\varphi}}{2} \\ \frac{\sin\vartheta e^{i\varphi}}{2} & \frac{1-\cos\vartheta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{-i\varphi} \\ \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{i\varphi} & \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.3)\end{aligned}$$

Na verdade, a matriz (5.3) é um produto de uma coluna e uma linha:

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

de maneira alternativa, podemos multiplicar a coluna por $e^{-\frac{i}{2}\varphi}$ e a linha por $e^{\frac{i}{2}\varphi}$, obtemos¹

$$\begin{aligned}\langle \sigma'_z | \sigma'_n = +1 \rangle &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}; \\ \langle \sigma'_n = +1 | \sigma''_z \rangle &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{\frac{i}{2}\varphi} & \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}. \quad (5.5)\end{aligned}$$

¹A notação para os vetores linha e coluna, pode a princípio ser um abuso de notação, já que vimos que $\langle a | b \rangle$ para quaisquer dois vetores nos fornece um escalar, porém notamos que em $\langle \sigma'_z | \sigma'_n = +1 \rangle$, o nosso $\sigma'_z = \pm 1$ fornece-nos dois valores, significando que $\langle \sigma'_z | \sigma'_n = +1 \rangle$ comporta dois valores, assim uma maneira que surge, a que apresentamos nas contas.

Conforme já visto $\langle \sigma'_z | \sigma'_n = +1 \rangle^* = \langle \sigma'_n = +1 | \sigma'_n \rangle$, os **elementos das linhas** são os complexos conjugados dos **elementos das colunas**².

De maneira análoga temos o resultado para $\sigma'_n = -1$

$$\begin{aligned} \langle \sigma'_z | (|\sigma'_n \sigma'_n|) | \sigma''_z \rangle &= \langle \sigma'_z | (|\sigma'_n = -1\rangle \langle \sigma'_n = -1|) | \sigma''_z \rangle = \langle \sigma'_z | \frac{\mathbf{1} - \sigma \cdot \vec{n}}{2} | \sigma''_z \rangle \\ &= \begin{pmatrix} \sin^2(\frac{\vartheta}{2}) & -\sin(\frac{\vartheta}{2}) \cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{-i\varphi} \\ -\sin(\frac{\vartheta}{2}) \cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{i\varphi} & \cos^2(\frac{\vartheta}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\vartheta}{2}) e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ \cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\vartheta}{2}) e^{\frac{i}{2}} & \cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{-\frac{i}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Agora escrevemos um vetor **qualquer** $|b'\rangle$, como uma combinação linear de vetores a :

$$|b'\rangle = \mathbf{1}|b'\rangle = \left(\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \right) |b'\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| b'\rangle, \quad (5.7)$$

no qual exibe as componentes $\langle a'|b'\rangle$ do vetor $|b'\rangle$ relativas a um sistema ortonormal de vetores a (sistema de coordenada a). Uma notação alternativa vem da chamada “*função de onda*”

$$\langle a'|b'\rangle = \psi_{b'}(a') \quad (5.8)$$

dessa forma

$$|b'\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \psi_{b'}(a'). \quad (5.9)$$

Imediatamente o adjunto da expressão (5.9) é,

$$|b'\rangle^\dagger = \langle b'| = \sum_{a'} \psi_{b'}(a')^* \langle a'|. \quad (5.10)$$

Para expressarmos o produto de dois vetores em termos de suas componentes, multiplicamos diretamente,

$$\begin{aligned} \langle b'|b''\rangle &= \left(\sum_{a'} \psi_{b'}(a')^* \langle a'| \right) \left(\sum_{a''} \psi_{b''}(a'') |a''\rangle \right) = \sum_{a', a''} \psi_{b'}(a')^* \underbrace{\langle a'|a''\rangle}_{=\delta(a', a'')} \psi_{b''}(a'') = \\ &= \sum_{a'} \psi_{b'}(a')^* \psi_{b''}(a'), \end{aligned} \quad (5.11)$$

²A palavra “elementos”, foi posta em negrito para chamar atenção de que estamos tratando apenas do processo de conjugação complexa de cada elemento que constituem os vetores linha e coluna. Se quissemos falar sobre a operação dos vetores linha e coluna como um todo teríamos de usar \dagger , que significa o conjugado transposto ou conjugação Hermitiana.

ou utilizando $\mathbf{1} = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|$:

$$\begin{aligned}\langle b' | \mathbf{1} | b'' \rangle &= \langle b' | b'' \rangle = \langle b' | \left(\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| \right) b'' \rangle = \sum_{a'} \langle b'' | a'\rangle\langle a' | b' \rangle = \\ &= \sum_{a'} \psi_{b'}(a')^* \psi_{b''}(a') .\end{aligned}\quad (5.12)$$

Notemos que a norma ao quadrado do vetor b' , procede diretamente da expressão (5.12), é dado por

$$\langle b' | b' \rangle = \sum_{a'} |\psi_{b'}(a')|^2 > 0. \quad (5.13)$$

Neste ponto, observamos que as componentes de valores complexos dos vetores através da norma ao quadrado, é o que substitui a soma dos quadrados da geometria Euclidiana: Este tipo de geometria é chamada *unitária*.

A ortonormalidade dos vetores b' convenciona por

$$\begin{aligned}\sum_{a'} |\psi_{b'}(a')|^2 &= 1, \\ b' \neq b'' : \sum_{a'} \psi_{b'}(a')^* \psi_{b''}(a') &= 0.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Voltando ao nosso exemplo do início desta seção, mostramos as duas funções de onda³:

$$\begin{aligned}\psi_{\sigma'_n=+1}(\sigma'_z) &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ \sin(\frac{\vartheta}{2}) e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}, \\ \psi_{\sigma'_n=-1}(\sigma'_z) &= \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\vartheta}{2}) e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ \cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Verifiquemos as propriedades de ortonormalidade das funções de onda acima,

$$\begin{aligned}\langle \sigma'_n = +1 | \sigma'_n = +1 \rangle &= \langle \sigma'_n = +1 | \sigma'_z \rangle \langle \sigma'_n = +1 | \sigma'_z \rangle = \psi_{\sigma'_n=+1}(\sigma'_z)^* \psi_{\sigma'_n=+1}(\sigma'_z) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{\frac{i}{2}\varphi} & \sin(\frac{\vartheta}{2}) e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ \sin(\frac{\vartheta}{2}) e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} = \\ &= \cos^2(\frac{\vartheta}{2}) + \sin^2(\frac{\vartheta}{2}) = 1 ,\end{aligned}$$

³Como dito anteriormente na nota de rodapé (1), $\langle \sigma'_z | \sigma'_n = +1 \rangle = \psi_{\sigma'_n=+1}(\sigma'_z)$, não denota um escalar, mas sim um vetor coluna nesse caso, já que $\sigma'_z = \pm 1$.

$$\begin{aligned}
\langle \sigma'_n = -1 | \sigma'_n = -1 \rangle &= \langle \sigma'_n = -1 | \sigma'_z \rangle \langle \sigma'_z | \sigma'_n = -1 \rangle = \psi_{\sigma'_n = -1}(\sigma'_z)^* \psi_{\sigma'_n = -1}(\sigma'_z) = \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\vartheta}{2}) e^{\frac{i}{2}\varphi} & \cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\vartheta}{2}) e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ \cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} = \\
&= \sin^2(\frac{\vartheta}{2}) + \cos^2(\frac{\vartheta}{2}) = 1, \\
\langle \sigma'_n = +1 | \sigma'_n = -1 \rangle &= \langle \sigma'_n = +1 | \sigma'_z \rangle \langle \sigma'_z | \sigma'_n = -1 \rangle = \psi_{\sigma'_n = +1}(\sigma'_z)^* \psi_{\sigma'_n = -1}(\sigma'_z) = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{\frac{i}{2}\varphi} & \sin(\frac{\vartheta}{2}) e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\vartheta}{2}) e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ \cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} = \\
&= (\cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{\frac{i}{2}\varphi}) (-\sin(\frac{\vartheta}{2}) e^{-\frac{i}{2}\varphi}) + (\sin(\frac{\vartheta}{2}) e^{-\frac{i}{2}\varphi}) (\cos(\frac{\vartheta}{2}) e^{\frac{i}{2}\varphi}) = \\
&= 0. \tag{5.16}
\end{aligned}$$

As duas funções de onda escritas em (5.15), corresponde a mesma função de onda, já que $\sigma'_n = -1$ é $\sigma'_n = +1$ na direção $-\vec{n}$ (posição oposta a \vec{n}). Basicamente mantendo-se a mesma orientação de referencial feita para \vec{n} , obtemos $-\vec{n}$ pela substituição $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$, $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$, dessa forma

$$\begin{aligned}
\psi_{\sigma'_n = +1} &\rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}(\pi - \vartheta)) e^{-\frac{i}{2}(\pi + \varphi)} \\ \sin(\frac{1}{2}(\pi - \vartheta)) e^{\frac{i}{2}(\pi + \varphi)} \end{pmatrix} = \\
&= i \begin{pmatrix} -\sin(\frac{1}{2}\vartheta) e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ \cos(\frac{1}{2}\vartheta) e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} = i \psi_{\sigma'_n = -1}. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Obtemos um fator i em (5.17), este fator não possui nenhum significado, uma vez que o produto $\psi_{-1}(\sigma'_z) \psi_{-1}(\sigma'_z)^*$ é arbitrário a medida em que introduzimos um fator de fase $e^{i\alpha}$, para qualquer valor de α . Com isto não temos efeito sobre a ortonormalidade, nem sobre o símbolo unitário, ou mesmo sobre a interpretação física em termos de probabilidade. A interpretação da amplitude de probabilidade da função de onda pode ser expressa como

$$p(\sigma'_n, \sigma'_z) = |\psi_{\sigma'_n}(\sigma'_z)|^2, \tag{5.18}$$

onde os resultados são conhecidos de seções anteriores

$$\begin{aligned}
p(+, +) &= p(-, -) = \cos^2(\frac{\vartheta}{2}); \\
p(+, -) &= p(-, +) = \sin^2(\frac{\vartheta}{2}).
\end{aligned}$$

5.2 Duas componentes arbitrárias do operador vetorial de Pauli

Nesta seção usamos a definição de função de onda para redefinirmos as probabilidades associadas a duas direções arbitrárias \vec{n}_1 e \vec{n}_2 do operador vetorial de Pauli (\vec{n}_1 e \vec{n}_2 são vetores unitários, especificados pelos ângulos ϑ_1 , φ_1 e ϑ_2 , φ_2 , respectivamente), temos

$$\begin{aligned} \langle \sigma'_1 | \sigma'_2 \rangle &= \langle \sigma'_1 | \mathbf{1} | \sigma'_2 \rangle = \langle \sigma'_1 | \left(\sum_{\sigma'_z} |\sigma'_z\rangle \langle \sigma'_z| \right) | \sigma'_2 \rangle = \sum_{\sigma'_z} \langle \sigma'_1 | \sigma'_z \rangle \langle \sigma'_z | \sigma'_2 \rangle = \\ &= \sum_{\sigma'_z} \psi_{\sigma'_1}(\sigma'_z)^* \psi_{\sigma'_2}(\sigma'_z). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Consideremos os valores $\sigma'_1 = +1$ e $\sigma'_2 = +1$, em (5.19) e calculemos $\langle \sigma'_1 = +1 | \sigma'_2 = +1 \rangle = \langle +, 1 | +, 2 \rangle$, sendo idêntico a seção anterior

$$\begin{aligned} \langle \sigma'_z | +, 1 \rangle &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\vartheta_1) e^{-\frac{i}{2}\varphi_1} \\ \sin(\frac{1}{2}\vartheta_1) e^{\frac{i}{2}\varphi_1} \end{pmatrix}, \\ \langle \sigma'_z | +, 1 \rangle^* &= \langle +, 1 | \sigma'_z \rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\vartheta_1) e^{\frac{i}{2}\varphi_1} & \sin(\frac{1}{2}\vartheta_1) e^{-\frac{i}{2}\varphi_1} \end{pmatrix}, \\ \langle \sigma'_z | +, 2 \rangle &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\vartheta_2) e^{-\frac{i}{2}\varphi_2} \\ \sin(\frac{1}{2}\vartheta_2) e^{\frac{i}{2}\varphi_2} \end{pmatrix}, \\ \langle +, 1 | +, 2 \rangle &= \sum_{\sigma'_z} \underbrace{\langle \sigma'_1 = +1 | \sigma'_z \rangle}_{=\psi_{\sigma'_1=+1}(\sigma'_z)^*} \underbrace{\langle \sigma'_z | \sigma'_2 = +1 \rangle}_{=\psi_{\sigma'_2=+1}(\sigma'_z)} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\vartheta_1) e^{\frac{i}{2}\varphi_1} & \sin(\frac{1}{2}\vartheta_1) e^{-\frac{i}{2}\varphi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\vartheta_2) e^{-\frac{i}{2}\varphi_2} \\ \sin(\frac{1}{2}\vartheta_2) e^{\frac{i}{2}\varphi_2} \end{pmatrix} = \\ &= \cos(\frac{1}{2}\vartheta_1) \cos(\frac{1}{2}\vartheta_2) e^{\frac{i}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)} + \sin(\frac{1}{2}\vartheta_1) \sin(\frac{1}{2}\vartheta_2) e^{-\frac{i}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para o cálculo da probabilidade de $\langle \sigma'_1 = +1 | \sigma'_2 = +1 \rangle$ tem-se

$$\begin{aligned}
|\langle \sigma'_1 = +1 | \sigma'_2 = +1 \rangle|^2 &= |\cos(\frac{1}{2}\vartheta_1) \cos(\frac{1}{2}\vartheta_2) e^{\frac{i}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)} + \sin(\frac{1}{2}\vartheta_1) \sin(\frac{1}{2}\vartheta_2) e^{-\frac{i}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)}|^2 = \\
&= (\cos(\frac{1}{2}\vartheta_1) \cos(\frac{1}{2}\vartheta_2) e^{\frac{i}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)} + \sin(\frac{1}{2}\vartheta_1) \sin(\frac{1}{2}\vartheta_2) e^{-\frac{i}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)})^* \times \\
&\quad \times (\cos(\frac{1}{2}\vartheta_1) \cos(\frac{1}{2}\vartheta_2) e^{\frac{i}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)} + \sin(\frac{1}{2}\vartheta_1) \sin(\frac{1}{2}\vartheta_2) e^{-\frac{i}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)}) = \\
&= \cos^2(\frac{1}{2}\vartheta_1) \cos^2(\frac{1}{2}\vartheta_2) + \sin^2(\frac{1}{2}\vartheta_1) \sin^2(\frac{1}{2}\vartheta_2) + \\
&\quad + \sin(\frac{1}{2}\vartheta_1) \cos(\frac{1}{2}\vartheta_1) \sin(\frac{1}{2}\vartheta_2) \cos(\frac{1}{2}\vartheta_2) \underbrace{(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)})}_{=2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \\
&= \frac{1}{2}(1 + \cos\vartheta_1)\frac{1}{2}(1 + \cos\vartheta_2) + \frac{1}{2}(1 - \cos\vartheta_1)\frac{1}{2}(1 - \cos\vartheta_2) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
&= \frac{1}{2}[1 + \underbrace{\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}_{=\cos\theta}] = \cos^2(\frac{\theta}{2}). \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Uma outra forma de olharmos para as questões anteriores, começa da seguinte forma partindo-se $\sigma \cdot \vec{n}$

$$\sigma \cdot \vec{n} = (\sigma_x \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi) \sin \vartheta + \sigma_z \cos \vartheta, \quad (5.22)$$

começamos com

$$\sigma_x \sigma_z = -\sigma_z \sigma_x,$$

$$i\sigma_y = \sigma_z \sigma_x$$

↓

$$\begin{aligned}
\sigma_x \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi &= \sigma_x \cos \varphi + i\sigma_x \sigma_z \sin \varphi = \\
&= \sigma_x (\cos \varphi + i\sigma_z \sin \varphi) = \sigma_x \cos \varphi - i\sigma_z \sigma_x \sin \varphi \\
&= (\cos \varphi - i\sigma_z \sin \varphi) \sigma_x. \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Isto dirige nossa atenção para

$$\cos \varphi \pm i\sigma_z \sin \varphi \equiv e^{\pm i\sigma_z \varphi}, \quad (5.24)$$

onde utilizamos a *identidade de Euler*. Outra forma seria começarmos com a função exponencial de σ_z e seus dois valores possíveis, que dependem se φ é positivo ou negativo:

$$\begin{aligned}
 e^{i\sigma_z\varphi} &= \underbrace{\frac{1+\sigma_z}{2} e^{i\varphi}}_{=|++|} + \underbrace{\frac{1-\sigma_z}{2} e^{-i\varphi}}_{=|--|} = |++|(\cos \varphi + i \sin \varphi) + |--|(\cos \varphi - i \sin \varphi) \\
 &= \underbrace{(|++| + |--) \cos \varphi}_{=1} + \underbrace{(|++| - |--) i \sin \varphi}_{=\sigma_z} = \cos \varphi + i \sigma_z \sin \varphi, \\
 e^{i\sigma_z(-\varphi)} &= \underbrace{\frac{1+\sigma_z}{2} e^{-i\varphi}}_{=|++|} + \underbrace{\frac{1-\sigma_z}{2} e^{i\varphi}}_{=|--|} = |++|(\cos \varphi - i \sin \varphi) + |--|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\
 &= \underbrace{(|++| + |--) \cos \varphi}_{=1} + \underbrace{(|--| - |++) i \sin \varphi}_{=-\sigma_z} = \cos \varphi - i \sigma_z \sin \varphi, \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

agora temos

$$\sigma_x \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi = \sigma_x e^{i\varphi\sigma_z} = e^{-i\varphi\sigma_z} \sigma_x, \quad (5.26)$$

onde as duas formas do lado direito da equação anterior (5.26) são conectadas pela não-comutatividade de σ_x e σ_z . Aplicamos a propriedade de não-comutatividade para obter-se uma forma mais simétrica:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x e^{i\varphi\sigma_z} &= (\sigma_x \cos \frac{\varphi}{2} + \sigma_y \sin \frac{\varphi}{2})(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sigma_z \sin \frac{\varphi}{2}) = \sigma_x e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} = \\
 &= e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} \sigma_x e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z}, \\
 e^{-i\varphi\sigma_z} \sigma_x &= (\cos \frac{\varphi}{2} - i \sigma_z \sin \frac{\varphi}{2})(\sigma_x \cos \frac{\varphi}{2} + \sigma_y \sin \frac{\varphi}{2}) = e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} \sigma_x = \\
 &= e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} \sigma_x e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z}, \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

dessa forma

$$\sigma_x \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi = e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} \sigma_x e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z}, \quad (5.28)$$

e

$$\sigma \cdot \vec{n} = (\sigma_x \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi) \sin \varphi + \sigma_z \cos \varphi = e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} (\sigma_x \sin \vartheta + \sigma_z \cos \vartheta) e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z}, \quad (5.29)$$

desde que

$$\begin{aligned}
 e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} \sigma_z e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} &= (\cos \frac{\varphi}{2} - i \sigma_z \sin \frac{\varphi}{2}) \sigma_z (\cos \frac{\varphi}{2} + i \sigma_z \sin \frac{\varphi}{2}) = \\
 &= \sigma_z (\cos \frac{\varphi}{2} - i \sigma_z \sin \frac{\varphi}{2}) (\cos \frac{\varphi}{2} + i \sigma_z \sin \frac{\varphi}{2}) \\
 &= \sigma_z e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} = \sigma_z. \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Observemos que desde o resultado (5.27), encontra-se a ideia das propriedades exponenciais, mas para operadores da forma

$$e^{i\lambda_1 A} e^{i\lambda_2 A} = e^{i(\lambda_1 + \lambda_2)A}, \quad (5.31)$$

cuja qual justificamos tendo em vista a equação (5.25)

$$\begin{aligned} e^{i\lambda_1 A} e^{i\lambda_2 A} &= \sum_{a'} e^{i\lambda_1 a'} |a' a'| \sum_{a''} e^{i\lambda_2 a''} |a'' a''| = \sum_{a', a''} e^{i\lambda_1 a'} e^{i\lambda_2 a''} |a'\rangle \underbrace{\langle a' | a''\rangle}_{=\delta(a', a'')} \langle a''| = \\ &= \sum_{a'} e^{i(\lambda_1 + \lambda_2) a'} |a' a'| = e^{i(\lambda_1 + \lambda_2)A}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Em uma forma análoga, com as considerações: $\varphi \rightarrow \vartheta$, $\sigma_x \rightarrow \sigma_z$, $\sigma_y \rightarrow \sigma_x$, $\sigma_z \rightarrow \sigma_y$, $i\sigma_x = \sigma_y\sigma_z$, $\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y$, temos

$$\sigma_z \cos \vartheta + \sigma_x \sin \vartheta = \sigma_z e^{\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} = e^{-\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} \sigma_z = e^{-\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} \sigma_z e^{\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} \quad (5.33)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \vec{n} &= e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} (\sigma_z \cos \vartheta + \sigma_x \sin \vartheta) e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} = e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} e^{-\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} \sigma_z e^{\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} = \\ &= U^{-1} \sigma_z U, \end{aligned} \quad (5.34)$$

onde

$$U = e^{\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z}, U^{-1} = e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} e^{-\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y},$$

como resultado conhecido da álgebra linear, a inversa existe se

$$\begin{aligned} UU^{-1} &= e^{\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} \underbrace{e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z}}_{=1} e^{-\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} = e^{\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} e^{-\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} = \mathbf{1}, \\ U^{-1}U &= e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} \underbrace{e^{-\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} e^{\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y}}_{=1} e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} = e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} = \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

que ilustra uma regra mais geral proveniente da teoria linear algébrica

$$(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}. \quad (5.36)$$

Antes de continuar a estudarmos as relações entre as diferentes quantidades físicas, suplementemos com a conexão entre os vetores no seguinte sentido,

$$\sigma_z = \sum_{\sigma'} |\sigma'_z = \sigma'\rangle \sigma' \langle \sigma'_z = \sigma'|,$$

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot \vec{n} &= U^{-1} \left(\sum_{\sigma'} |\sigma'_z = \sigma'\rangle \sigma' \langle \sigma'_z = \sigma' | \right) U = \sum_{\sigma'} U^{-1} |\sigma'_z = \sigma'\rangle \sigma' \langle \sigma'_z = \sigma' | U = \\
&= \sum_{\sigma'} |\sigma'_n = \sigma'\rangle \sigma' \langle \sigma'_n = \sigma'|,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

dessa forma

$$\begin{aligned}
\langle \sigma'_n = \sigma' | &= \langle \sigma'_z = \sigma' | U, \\
|\sigma'_n = \sigma'\rangle &= U^{-1} |\sigma'_z = \sigma'\rangle.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

A relação adjunta necessária entre os vetores $|\sigma'_n = \sigma'\rangle$ e $\langle \sigma'_n = \sigma'|$, nos diz que

$$\begin{aligned}
(\langle \sigma'_n = \sigma' |)^\dagger &= |\sigma'_n = \sigma'\rangle, \\
(\langle \sigma'_z | U)^\dagger &= U^{-1} |\sigma'_z = \sigma'\rangle,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

onde o lado esquerdo da equação acima pode ser equivalentemente apresentado pela propriedade (4.41)

$$(\langle \sigma'_z | U)^\dagger = U^\dagger \langle \sigma'_z |^\dagger = U^\dagger |\sigma'_z = \sigma'\rangle = U^{-1} |\sigma'_z = \sigma'\rangle, \tag{5.40}$$

assim sendo

$$U^\dagger = U^{-1}, U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbf{1}. \tag{5.41}$$

O fato de que $U^\dagger = U^{-1}$, pode ser verificado diretamente notando-se primeiramente que

$$(e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z})^\dagger = (\cos \frac{\varphi}{2} + i\sigma_z \sin \frac{\varphi}{2})^\dagger = (\cos \frac{\varphi}{2} - i\sigma_z \sin \frac{\varphi}{2}) = e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z}, \tag{5.42}$$

de acordo com este resultado

$$U^\dagger = (e^{\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z})^\dagger = (e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z})^\dagger (e^{\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y})^\dagger = e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} e^{-\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} = U^{-1}. \tag{5.43}$$

A mesma propriedade de U garante, que assim como σ_z , $\sigma \cdot \vec{n}$ é Hermitiano:

$$(U^\dagger)^\dagger = U^{\dagger\dagger} = U,$$

$$(\sigma \cdot \vec{n})^\dagger = (U^\dagger \sigma_z U)^\dagger = (\sigma_z U)^\dagger (U^\dagger)^\dagger = U^\dagger \sigma_z U^{\dagger\dagger} = U^\dagger \sigma_z U = \sigma \cdot \vec{n}. \tag{5.44}$$

Notemos ainda que $(\sigma \cdot \vec{n})^2 = \mathbf{1}$ é satisfeito

$$(\sigma \cdot \vec{n})^2 = (U^{-1} \sigma_z U)^2 = U \sigma_z \underbrace{U U^{-1}}_{=1} \sigma_z U = U^{-1} \underbrace{\sigma_z^2}_{=1} U = U^{-1} U = \mathbf{1}. \tag{5.45}$$

5.3 Operadores Unitários

Seja A uma propriedade tendo os possíveis valores a_1, a_2, \dots, a_n , seja também uma propriedade B tendo os mesmos possíveis valores $b_1 = a_1, \dots, b_n = a_n$, agora consideremos

$$\begin{aligned} U_{ab} &= \sum_{k=1}^n |a_k\rangle\langle b_k|, & U_{ba} &= \sum_{k=1}^n |b_k\rangle\langle a_k|, \\ U_{ab}^\dagger &= \left(\sum_{k=1}^n |a_k\rangle\langle b_k|\right)^\dagger = \sum_{k=1}^n (|a_k\rangle\langle b_k|)^\dagger = \sum_{k=1}^n |b_k\rangle\langle a_k| = U_{ba} \\ U_{ba}^\dagger &= \left(\sum_{k=1}^n |b_k\rangle\langle a_k|\right)^\dagger = \sum_{k=1}^n (|b_k\rangle\langle a_k|)^\dagger = \sum_{k=1}^n |a_k\rangle\langle b_k| = U_{ab}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

pelo qual

$$\begin{aligned} U_{ab}U_{ba} &= \sum_{k=1}^n |a_k\rangle\langle b_k| \sum_{l=1}^n |b_l\rangle\langle a_l| = \sum_{k,l} |a_k\rangle \underbrace{\langle b_k|b_l\rangle}_{=\delta(k,l)} \langle a_l| = \sum |a_k\rangle\langle a_k| = \mathbf{1}, \\ U_{ba}U_{ab} &= \sum_{k,l} |b_k\rangle \underbrace{\langle a_k|a_l\rangle}_{=\delta(k,l)} \langle b_l| = \sum_k |b_k\rangle\langle b_k| = \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

desse forma

$$U_{ab}^\dagger = U_{ba} = U_{ab}^{-1}, \quad U_{ba}^\dagger = U_{ab} = U_{ba}^{-1}. \quad (5.48)$$

Também,

$$\begin{aligned} \langle a_k | U_{ab} &= \langle a_k | \left(\sum_{l=1}^n |a_l\rangle\langle b_l| \right) = \sum_{l=1}^n \underbrace{\langle a_k | a_l \rangle}_{=\delta(k,l)} \langle b_l | = \langle b_k |, \\ U_{ab} | b_k \rangle &= \left(\sum_{l=1}^n |a_l\rangle\langle b_l| \right) |b_k\rangle = |a_k\rangle, \\ \langle b_k | U_{ba} &= \langle b_k | \left(\sum_{l=1}^n |b_l\rangle\langle a_l| \right) = \langle a_k | \\ U_{ba} | a_k \rangle &= \left(\sum_{l=1}^n |b_l\rangle\langle a_l| \right) |a_k\rangle = |b_k\rangle. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Os símbolos U atua, ou opera, sobre um conjunto ortonormal de vetores para produzir outro conjunto ortonormal. Eles preservam as relações da geometria unitária:

$$\langle b_k | b_l \rangle = \langle a_k | \underbrace{U_{ab}U_{ba}}_{=\mathbf{1}} | a_l \rangle = \langle a_k | a_l \rangle = \delta_{kl} \quad (5.50)$$

são chamadas de operadores unitários. Realmente o termo operador é aplicado, matematicamente, para todo elemento X da álgebra de medida:

$$X = \sum_{a', a''} \langle a' | X | a'' \rangle | a' a'' |,$$

que pode ser pensado como operando sobre qualquer vetor para produzir outro vetor (do mesmo tipo):

$$\begin{aligned} \langle a' | X &= \langle a' | \left(\sum_{a', a''} \langle a' | X | a'' \rangle | a' \rangle \langle a'' | \right) = \sum_{a''} \langle a' | X | a'' \rangle \langle a' | a' \rangle \langle a'' | = \\ &= \sum_{a''} \langle a' | X | a'' \rangle \langle a'' |, \\ X | a'' \rangle &= \left(\sum_{a', a''} \langle a' | X | a'' \rangle | a' \rangle \langle a'' | \right) | a'' \rangle = \sum_{a'} \langle a' | X | a'' \rangle | a' \rangle \langle a'' | a'' \rangle = \\ &= \sum_{a'} \langle a' | X | a'' \rangle | a' \rangle. \end{aligned} \quad (5.51)$$

A palavra “operador” é frequentemente usada como sinônimo para “símbolo de medida”, isto foi feito anteriormente quando falamos dos operadores de Pauli. Em particular o operador Hermitiano

$$A = \sum_{a'} | a' \rangle a' \langle a' |$$

opera sobre um vetor a para produzir um múltiplo do mesmo vetor:

$$\begin{aligned} \langle a' | A &= \langle a' | \left(\sum_{a''} | a'' \rangle a'' \langle a'' | \right) = a' \langle a' |, \\ A | a' \rangle &= \left(\sum_{a''} | a'' \rangle a'' \langle a'' | \right) | a' \rangle = a' | a' \rangle; \end{aligned} \quad (5.52)$$

tais vetores são denominados **autovetores** do operador. Os números a' são chamados **autovalores**. O operador Hermitiano B, ou o símbolo da propriedade física B, é

$$\begin{aligned} B &= \sum_k | b_k \rangle b_k \langle b_k | = \sum_k U_{ba} | a_k \rangle a_k \langle a_k | U_{ab} = \\ &= U_{ba} \underbrace{\left(\sum_k | a_k \rangle a_k \langle a_k | \right)}_{=A} U_{ab} = U_{ba} A U_{ab} \end{aligned} \quad (5.53)$$

indicando a maneira pela qual U_{ab} opera sobre A para produzir B.

A totalidade dos vetores b é expressa em termos dos vetores a por,

$$|b_l\rangle = \sum_k |a_k\rangle \langle a_k|b_l\rangle \quad (5.54)$$

Para ilustrarmos o resultado (5.54), nos baseemos no experimento de Stern-Gerlach, onde

$$\begin{aligned} A &= \sigma_z, \\ B &= \sigma \cdot \vec{n}, \\ U^\dagger &= U^{-1} = U_{ba} = U_{ab}^{-1} = e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} e^{-\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} \\ U^{-1}|\sigma'_z = \sigma'\rangle &= |\sigma'_n = \sigma'\rangle, \end{aligned}$$

temos para

$$\langle \sigma'_z | \sigma''_n \rangle = \langle \sigma'_z | U_{ba} | \sigma''_z = \sigma''_n \rangle = \langle \sigma'_z | e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} e^{-\frac{i}{2}\vartheta\sigma_y} | \sigma''_z = \sigma''_n \rangle,$$

com o auxílio dos resultados

$$\begin{aligned} \langle \sigma'_z | e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} &= \langle \sigma'_z | (\cos \frac{\varphi}{2} - i\sigma_z \sin \frac{\varphi}{2}) = \langle \sigma'_z | \mathbf{1} \cos \frac{\varphi}{2} - i\langle \sigma'_z | \sigma_z \sin \frac{\varphi}{2} = \\ &= \langle \sigma'_z | \cos \frac{\varphi}{2} - i\langle \sigma'_z | \sigma_z' \sin \frac{\varphi}{2} = e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma'_z} \langle \sigma'_z |, \\ \langle \sigma'_z | \sigma_y | \sigma''_z \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \langle \sigma'_z | \mathbf{1} | \sigma''_z \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dessa forma

$$\begin{aligned} \langle \sigma'_z | \sigma''_n \rangle &= e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma'_z} \langle \sigma'_z | (\mathbf{1} \cos \frac{\varphi}{2} - i\sigma_y \sin \frac{\vartheta}{2}) | \sigma''_z \rangle = \\ \sigma'_z \backslash \sigma''_n = \sigma''_z &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi} & -\sin \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi} & \cos \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

A primeira coluna da matriz acima (5.55) corresponde a função de onda $\psi_{\sigma_n=+1}(\sigma'_z)$, a segunda coluna corresponde a $\psi_{\sigma_n=-1}(\sigma'_z)$, condizendo com o resultado anteriormente obtido em (5.15).

5.4 Bases de operador unitário. Complementariedade

Até aqui temos lidado sempre com o exemplo físico do experimento de Stern-Gerlach. Chegou o momento de sairmos desse caminho, devemos fazer esta mudança considerando algumas questões aparentemente inócuas.

Um operador unitário converte um conjunto ortonormal de vetores em outro conjunto, ou, possivelmente no mesmo conjunto. A unidade é um operador unitário:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \sum_k |a_k\rangle\langle a_k| \\ \mathbf{1}^\dagger &= (\sum_k |a_k\rangle\langle a_k|)^\dagger = \sum_k |a_k\rangle\langle a_k| = \mathbf{1}, \\ \mathbf{1}^\dagger \mathbf{1} &= \mathbf{1} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

de fato

$$\langle a' | \mathbf{1} = \langle a' |, \quad \mathbf{1} | a' \rangle = | a' \rangle. \quad (5.57)$$

Agora supomos um operador unitário que produz o mesmo conjunto de vetores a , mas em uma ordem diferente, procedemos por numerá-los, a_1, a_2, \dots, a_n e então, por exemplo, permutamo-os ciclicamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} |a_k\rangle &= |a_{k+1}\rangle, \\ \mathbf{U} |a_n\rangle &= |a_1\rangle. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Como um exemplo disto temos o operador $\sigma_x = | - + | + | + - |$:

$$\begin{aligned} \sigma_x | - \rangle_z &= (| - \rangle_z \langle + | + | + \rangle_z \langle - |) | - \rangle_z = \\ &= | - \rangle_z \underbrace{z \langle + | - \rangle_z}_{=0} + | + \rangle_z \underbrace{z \langle - | - \rangle_z}_{=1} = | + \rangle_z, \\ \sigma_x | + \rangle_z &= (| - \rangle_z \langle + | + | + \rangle_z \langle - |) | + \rangle_z = \\ &= | - \rangle_z \underbrace{z \langle + | + \rangle_z}_{=1} + | + \rangle_z \underbrace{z \langle - | + \rangle_z}_{=0} = | - \rangle_z. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Se repetirmos no exemplo anterior (5.59) a aplicação do operador σ_x , ficamos com $\sigma_x^2 = \mathbf{1} = | + + | + | - - |$

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 | - \rangle_z &= \mathbf{1} | - \rangle_z = | - \rangle_z \\ \sigma_x^2 | + \rangle_z &= \mathbf{1} | + \rangle_z = | + \rangle_z, \end{aligned}$$

agora para o operador unitário U^2 do exemplo (5.58),

$$U^2|a_k\rangle = U(U|a_k\rangle) = U|a_{k+1}\rangle = |a_{k+2}\rangle, \quad (5.60)$$

por indução finita,

$$U^n|a_k\rangle = U(U^{n-1}|a_k\rangle) = U|a_{k+n-1}\rangle = |a_{k+n}\rangle = |a_k\rangle, \quad (5.61)$$

onde o índice k é entendido por módulo n ,

$$n+1 \equiv n+1 \pmod{n} = 1,$$

$$n+2 \equiv n+2 \pmod{n} = 2,$$

⋮

$$n+k \equiv n+k \pmod{n} = k.$$

Temos

$$U^n = \mathbf{1} = \sum_k |\mu_k\rangle\langle\mu_k| \quad (5.62)$$

n é chamado o período de U . Pensemos sobre os números μ' que satisfazem a equação (5.62):

$$\begin{aligned} (\mu')^n &= 1 \\ (\mu')^n &= 1 = e^{2\pi i} \quad ; k = 1, 2, \dots, n \\ \mu' &= e^{2\pi i \frac{k}{n}} \quad ; k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.63)$$

dessa forma os vários μ' são as n -ésimas raízes da unidade (para $n = 2$, temos duas raízes $\mu' = e^{2\pi i \frac{1}{2}} = -1$, $e^{2\pi i \frac{2}{2}} = 1$).

O que está sendo mostrado, é que U obedece a uma equação algébrica, como vista na seção de observáveis

$$U^n - \mathbf{1} = \prod_{k=1}^n (U - \mu_k) = 0 \quad \text{com} \quad \mu_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}. \quad (5.64)$$

A fatorização de $U^n - \mathbf{1}$ com relação a um valor particular $\mu - \mu_k$, feito da seguinte maneira

$$U^n - \mathbf{1} = \left(\frac{U}{\mu_k}\right)^n - \mathbf{1},$$

utilizando-se a identidade matemática das séries geométricas,

$$(X - 1)(1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}) = X^n - 1,$$

obtemos para $X = \frac{U}{\mu_k}$

$$\left(\frac{U}{\mu_k}\right)^n - 1 = \left(\frac{U}{\mu_k} - 1\right) \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{U}{\mu_k}\right)^l$$

este resultado pode ser mostrado de outra forma com uma mudança de índice, já que temos a condição de que $U^0 = U^n = 1$, dessa forma $l = n$ é tão correto quanto $l = 0$,

$$\left(\frac{U}{\mu_k} - 1\right) \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{U}{\mu_k}\right)^l = (U - \mu_k) \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{U}{\mu_k}\right)^l = \sum_{l=1}^n \left(\frac{U}{\mu_k}\right)^l (U - \mu_k) = 0 \quad (5.65)$$

sugerindo um símbolo para a medida de U que resulta no valor μ_k

$$|\mu_k \mu_k| = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left(\frac{U}{\mu_k}\right)^l \quad (5.66)$$

de fato, $|\mu_k \mu_k| \rightarrow 1$ para $U \rightarrow \mu_k$.

Notemos que o operador $|\mu_k \mu_k|$ é Hermitiano⁴.

$$\begin{aligned} |\mu_k \mu_k| &= |\mu_k\rangle\langle\mu_k| = (\langle\mu_k|)^{\dagger}(|\mu_k\rangle)^{\dagger} = (|\mu_k\rangle\langle\mu_k|)^{\dagger} = |\mu_k \mu_k|^{\dagger} \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left(\frac{U}{\mu_k}\right)^l\right)^{\dagger} = \frac{1}{n} \sum_l \left(\frac{U^{\dagger}}{\mu_k^*}\right)^l = \frac{1}{n} \sum_l \left(\frac{U^{-1}}{\mu_k^{-1}}\right)^l = \frac{1}{n} \sum_l \left(\frac{U}{\mu_k}\right)^{-l} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{U}{\mu_k}\right)^{n-l} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left(\frac{U}{\mu_k}\right)^l. \end{aligned} \quad (5.67)$$

A álgebra feita nesta seção é a mesma para um operador Hermitiano e de fato um operador unitário pode ser considerado como uma função de valor complexo de um operador Hermitiano, como em $e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_z}$.

Consideremos

$$|\mu_k\rangle\langle\mu_k|a_n\rangle = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mu_k^{-l} \underbrace{U^{-l}|a_n\rangle}_{=|a_l\rangle} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mu_k^{-l}|a_l\rangle \quad (5.68)$$

⁴O símbolo Hermitiano, muda a ordem na multiplicação, porém na soma a ordem não é influenciada, por isso temos no desenvolvimento da equação (5.67) o seguinte, $\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{U}{\mu_k}\right)^{n-l} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left(\frac{U}{\mu_k}\right)^l \Leftrightarrow |\mu_k \mu_k| = |\mu_k \mu_k|^{\dagger}$

temos por consequência

$$\underbrace{\langle a_n | \mu_k \rangle}_{=\langle \mu_k | a_n \rangle^*} \langle \mu_k | a_n \rangle = |\langle \mu_k | a_n \rangle|^2 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \mu_k^{-l} \langle a_n | a_l \rangle = \frac{1}{n} \mu_k^{-n} = \frac{1}{n} \underbrace{e^{2\pi i k}}_{=1} = \frac{1}{n}. \quad (5.69)$$

Escolhemos arbitrariamente $\langle \mu_k | a_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e obtemos, de maneira consistente,

$$|\mu_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^n |a_l\rangle e^{-\frac{2\pi i}{n} kl} \quad (5.70)$$

e

$$(|\mu_k\rangle)^\dagger = \langle \mu_k | = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^n e^{\frac{2\pi i}{n} kl} \langle a_l |, \quad (5.71)$$

no caso de

$$\langle \mu_k | a_l \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i}{n} kl} \langle a_l |, \quad (5.72)$$

se $l = n$

$$\langle \mu_k | a_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i}{n} kn} = \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (5.73)$$

Temos assim, construindo o conjunto $|\mu_k\rangle$ de n vetores ortonormais, definamos um segundo operador unitário V , permutando os vetores ciclicamente

$$\begin{aligned} \langle \mu_k | V &= \langle \mu_{k+1} |, \\ \langle \mu_k | V^2 &= \langle \mu_{k+2} |, \\ &\vdots \\ \langle \mu_k | V^m &= \langle \mu_{k+m} |, \\ &\vdots \\ \langle \mu_k | V^n &= \langle \mu_k |. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Dessa forma obtemos resultados já conhecidos

$$V^n = \mathbf{1} \text{ e } v_l = e^{2\pi i \frac{l}{n}}, \quad l = 1, \dots, n, \quad (5.75)$$

$$|v_l v_l| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{V}{v_l}\right)^k, \quad (5.76)$$

levando-nos

$$\langle \mu_n | v_l \rangle \langle v_l | = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{2\pi i}{n} kl} \langle \mu_k |, \quad (5.77)$$

e então $|\langle \mu_n | v_l \rangle|^2 = \frac{1}{n}$, escolhendo $\langle \mu_n | v_l \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle v_l | &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{2\pi i}{n} kl} \langle \mu_k |, \\ |v_l \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n |\mu_k \rangle e^{\frac{2\pi i}{n} kl}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Sabemos que

$$\langle \mu_k | a_l \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i}{n} kl}$$

consequentemente

$$|v_l \rangle = \sum_{k=1}^n |\mu_k \rangle \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i}{n} kl}}_{=\langle \mu_k | a_l \rangle} = \sum_{k=1}^n |\mu_k \rangle \langle \mu_k | a_l \rangle = |a_l \rangle. \quad (5.79)$$

Dessa maneira retornamos ao conjunto inicial de vetores, o que temos então, é uma definição recíproca de dois operadores unitários,

$$U |v_l \rangle = |v_{l+1} \rangle, \langle \mu_k | V = \langle \mu_{k+1}|. \quad (5.80)$$

Estes operadores unitários obedecem o já conhecido resultado

$$U^n = \mathbf{1}, V^n = \mathbf{1}, \quad (5.81)$$

e derivamos mais algumas relações

$$\begin{aligned} \langle \mu_k | VU &= \langle \mu_{k+1} | U = \mu_{k+1} \langle \mu_{k+1} | = e^{\frac{2\pi i}{n} (k+1)} \langle \mu_{k+1} |, \\ \langle \mu_k | UV &= \langle \mu_k | e^{\frac{2\pi i}{n} k} V = e^{\frac{2\pi i}{n} k} \langle \mu_k | V = e^{\frac{2\pi i}{n} k} \langle \mu_{k+1} |, \end{aligned} \quad (5.82)$$

segue das equações (5.82)

$$\begin{aligned} \langle \mu_k | VU &= e^{\frac{2\pi i}{n} (k+1)} \langle \mu_{k+1} | = e^{\frac{2\pi i}{n}} e^{\frac{2\pi i}{n} k} \langle \mu_{k+1} |, \\ \langle \mu_k | UV &= e^{\frac{2\pi i}{n} k} \langle \mu_{k+1} |, \\ \langle \mu_k | VU &= e^{\frac{2\pi i}{n}} \langle \mu_k | UV, \\ VU &= e^{\frac{2\pi i}{n}} UV. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Como resultado mais geral de (5.83) segue

$$\langle \mu_m | V^l U^k = \underbrace{\langle \mu_m | V}_{=\langle \mu_{m+1} |} V^{l-1} U^k = \underbrace{\langle \mu_{m+l} | U}_{=e^{\frac{2\pi i}{n}(m+l)} \langle \mu_{m+l} |} U^{k-1} = e^{\frac{2\pi i}{n} k(m+l)} \langle \mu_{m+l} |, \quad (5.84)$$

$$\langle \mu_m | U^k V^l = \underbrace{\langle \mu_m | U}_{=e^{\frac{2\pi i}{n} m} \langle \mu_m |} U^{k-1} V^l = e^{\frac{2\pi i}{n} km} \underbrace{\langle \mu_m | V}_{=\langle \mu_{m+1} |} V^{l-1} = e^{\frac{2\pi i}{n} km} \langle \mu_{m+l} |, \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned} \langle \mu_m | V^l U^k &= e^{\frac{2\pi i}{n} km} e^{\frac{2\pi i}{n} kl} \langle \mu_{m+l} |, \\ \langle \mu_m | U^k V^l &= e^{\frac{2\pi i}{n} km} \langle \mu_{m+l} |, \\ V^l U^k &= e^{\frac{2\pi i}{n} kl} U^k V^l. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Para $n = 2$ temos

$$U^2 = \mathbf{1}, \quad V^2 = \mathbf{1}, \quad UV = -VU \quad (5.87)$$

reconhecemos estes resultados como propriedades dos operadores das matrizes de Pauli, σ_x , σ_y (ou qualquer outro par), estes operadores Hermitianos são também unitários: $\sigma_x^\dagger \sigma_x = (\sigma_x)^2 = \mathbf{1}$. Dessa forma os quatro operadores básicos de $n = 2$ são construídos a partir dos pares fundamentais U , V com $U^k V^l$, $k, l = 1, 2$:

$$\begin{aligned} U^1 V^1 &= \sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z, \\ U^1 V^2 &= U\mathbf{1} = U = \sigma_x, \\ U^2 V^1 &= \mathbf{1}V = V = \sigma_y, \\ U^2 V^2 &= \mathbf{1}\mathbf{1} = \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Para um n qualquer, $U^k V^l$ com $k, l = 1, \dots, n$, dando n^2 operadores, novamente temos símbolos da medida. Podemos exibir cada um dos símbolos da medida, por exemplo $|\mu' \mu''|$ em termos dos operadores $U^k V^l$? Começamos com

$$|\mu_k\rangle \langle \mu_k| = \frac{1}{n} \sum_l \left(\frac{U}{\mu_k} \right)^l = \frac{1}{n} \sum_l e^{-\frac{2\pi i}{n} kl} U^l.$$

Multiplicando-se o lado direito da equação acima por V^{m-k} , obtemos

$$|\mu_k\rangle \langle \mu_k| V^{m-k} = |\mu_k\rangle \langle \mu_m| = \frac{1}{n} \sum_l e^{-\frac{2\pi i}{n} kl} U^l V^{m-k}, \quad (5.89)$$

também aplica-se para $m < k$ desde que por exemplo $V^{-1} = \underbrace{\mathbf{1}}_{=V^n} V^{-1} = V^{n-1}$. Para um operador qualquer F , o qual é uma combinação linear dos n^2 símbolos de medida $|\mu' \mu''|$ é também uma combinação linear dos n^2 operadores unitários $U^k V^l$:

$$F = \sum_{k,l=1}^n f_{kl} U^k V^l = f(U, V), \quad (5.90)$$

é uma função dos pares fundamentais U e V .

Embora possamos pensar em U e V como funções de valores complexos de duas propriedades físicas simbolizadas por operadores Hermitianos, é melhor trabalhar direto com U e V .

A probabilidade $p(\mu', v')$ que um valor particular v' virá de uma medida V feita em átomos que tenham sido selecionados para terem o valor μ' de U , é dada por ($\mu' = \mu_k, v' = v_l$)

$$\begin{aligned} p(\mu', v') &= \langle \mu' | (|v'\rangle \langle v'|) | \mu' \rangle = \langle \mu_k | v_l \rangle \underbrace{\langle v_l | \mu_k \rangle}_{= \langle \mu_k | v_l \rangle^*} = |\langle \mu_k | v_l \rangle|^2 \\ &= |\frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i}{n} k l}|^2 = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i}{n} k l} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{2\pi i}{n} k l} = \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (5.91)$$

independente de uma escolha particular de μ' e v' . Esta característica estatística de U e V é enfatizada por considerar uma medida que inclue uma medida não-seletiva (como feito na seção 3.4):

$$p(\mu', v, \mu'') = \sum_{v'} \underbrace{p(\mu', v')}_{=\frac{1}{n}} \underbrace{p(v', \mu'')}_{=\frac{1}{n}} = \sum_{v'} \frac{1}{n} \frac{1}{n} = n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}, \quad (5.92)$$

em comparação com a medida que aceita tudo $\sum_{v'} |v'\rangle \langle v'| = \mathbf{1}$,

$$\begin{aligned} p(\mu', \sum_{v'} |v'\rangle \langle v'|, \mu'') &= |\langle \mu' | (\underbrace{\sum_{v'} |v'\rangle \langle v'|}_{=1}) | \mu'' \rangle|^2 = |\langle \mu' | \mu'' \rangle|^2 \\ &= p(\mu', \mu'') = \delta(\mu', \mu'') \end{aligned} \quad (5.93)$$

a intervenção da medida não-seletiva v remove todo conhecimento do valor inicial de μ' , ou seja, todos os resultados são igualmente prováveis, isto corresponde a equação (5.92).

As propriedades físicas cujas medidas interferem são chamadas *incompatíveis*, U e V mostram-se idealmente incompatíveis, sendo que ambos U e V são necessários na descrição

do sistema é o que entende-se por U e V terem propriedades complementares, ou seja, ambos são requeridos, mas a medição de um anula qualquer conhecimento do outro. Esta, é a essência da complementaridade de Bohr(1927): Todo objeto quântico deve possuir propriedades mutuamente excludentes, isto é a mecânica quântica.

Vejamos o traço do operador F dado como função de U e V

$$F = f(U, V) = \sum_{k,l} f_{k,l} U^k V^l.$$

O elemento de matriz com a linha $\mu' = \mu_m$ e coluna $v' = v_r$

$$\langle \mu' | F | v' \rangle = \langle \mu_m | \sum_{k,l} f_{k,l} U^k V^l | v_r \rangle,$$

utilizando-se

$$\begin{aligned} \langle \mu_m | U^k &= e^{\frac{2\pi i}{n} km} \langle \mu_m | \\ V^l | v_r \rangle &= e^{\frac{2\pi i}{n} lr} | v_r \rangle \end{aligned}$$

fazendo a substituição

$$\begin{aligned} \langle \mu_m | \sum_{k,l} f_{k,l} U^k V^l | v_r \rangle &= \sum_{k,l} f_{k,l} \langle \mu_m | U^k V^l | v_r \rangle = \sum_{k,l} f_{k,l} e^{\frac{2\pi i}{n} km} e^{\frac{2\pi i}{n} lr} \langle \mu_m | v_r \rangle = \\ &= f(\mu_m, v_r) \langle \mu_m | v_r \rangle = f(\mu', v') \langle \mu' | v' \rangle \end{aligned} \quad (5.94)$$

e então

$$\begin{aligned} \text{tr}\{F\} &= \sum_{\mu'} \langle \mu' | F | \mu' \rangle = \sum_{\mu'} \langle \mu' | F \underbrace{\left(\sum_{v'} | v' \rangle \langle v' | \right)}_{=1} | \mu' \rangle = \sum_{\mu', v'} \langle \mu' | F | v' \rangle \langle v' | \mu' \rangle = \\ &= \sum_{\mu', v'} f(\mu', v') \langle \mu' | v' \rangle \langle v' | \mu' \rangle = \sum_{\mu', v'} f(\mu', v') |\langle \mu' | v' \rangle|^2 = \sum_{\mu', v'} f(\mu', v') p(\mu', v') = \\ &= \sum_{\mu', v'} f(\mu', v') \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\mu', v'} f(\mu', v') \end{aligned} \quad (5.95)$$

Se F é uma propriedade física temos,

$$F = \sum_{f'} | f' \rangle f' \langle f' | \quad (5.96)$$

desde $\text{tr}\{| f' f' | \} = \langle f' | f' \rangle = \delta(f', f') = 1$

$$\text{tr}\{F\} = \text{tr}\{\sum_{f'} | f' \rangle f' \langle f' | \} = \sum_{f'} f' \underbrace{\langle f' | f' \rangle}_{=\delta(f', f')=1} = \sum_{f'} f' \quad (5.97)$$

isto é,

$$\sum_{f'} f' = \frac{1}{n} \sum_{\mu', v'} f(\mu', v'). \quad (5.98)$$

Nesta situação, a soma de todos os valores físicos de $f(U, V)$ é dado por um somatório de todos os números $f(\mu', v')$, que são produzidos pela atribuição independente dos valores de U e V .

Apresentamos um resultado preliminar, que será utilizado para estudarmos o traço

$$\begin{aligned} \delta_{km} &= \langle \mu_k | \mu_m \rangle = \langle \mu_k | (\sum_l |v_l\rangle \langle v_l|) | \mu_m \rangle = \sum_l \langle \mu_k | v_l \rangle \langle v_l | \mu_m \rangle = \sum_l \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i}{n} kl} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{2\pi i}{n} lm} \\ &= \frac{1}{n} \sum_l e^{\frac{2\pi i}{n} kl} e^{-\frac{2\pi i}{n} lm} = \frac{1}{n} \sum_l (e^{\frac{2\pi i}{n} l})^{k-m} \end{aligned} \quad (5.99)$$

de maneira equivalente $r = k - m$, $\mu' = e^{\frac{2\pi i}{n} l}$; $l = 1, \dots, n$,

$$\delta_{km} = \frac{1}{n} \sum_l (e^{\frac{2\pi i}{n} l})^{k-m} = \frac{1}{n} \sum_{\mu'} (\mu')^r = \begin{cases} 1 & \text{para } r = 0 \\ 0 & \text{para } 0 < r < n \end{cases}, \quad (5.100)$$

que é apenas uma propriedade das n -ésimas raízes da unidade, $\mu_k = e^{\frac{2\pi i}{n} k}$. Consideremos

$$\begin{aligned} U &= \sum_{\mu'} |\mu'\rangle \mu' \langle \mu'|, \\ U^k &= \sum_{\mu'} |\mu'\rangle \mu'^k \langle \mu'|, \\ V &= \sum_{v'} |v'\rangle v' \langle v'|, \\ V^l &= \sum_{v'} |v'\rangle v'^l \langle v'|, \end{aligned}$$

$$U^k V^l = (\sum_{\mu'} |\mu'\rangle \mu'^k \langle \mu'|) (\sum_{v'} |v'\rangle v'^l \langle v'|) = \sum_{\mu', v'} |\mu'\rangle \mu'^k \langle \mu'| v' \rangle v'^l \langle v'|,$$

$$\begin{aligned} \text{tr}\{U^k V^l\} &= \text{tr}\{\sum_{\mu', v'} |\mu'\rangle \mu'^k \langle \mu'| v' \rangle v'^l \langle v'|\} = \sum_{\mu', v'} \mu'^k v'^l \langle \mu'| v' \rangle \langle v' | \mu' \rangle = \sum_{\mu', v'} \mu'^k v'^l p(\mu', v') = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\mu', v'} (\mu')^k (v')^l = \frac{1}{n} \sum_{m, p} e^{\frac{2\pi i}{n} mk} e^{\frac{2\pi i}{n} pl}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Observamos que para $k = l = n$ obtemos,

$$\begin{aligned} \text{tr}\{\mathbf{U}^n \mathbf{V}^n\} &= \text{tr}\{\mathbf{1}\} = \frac{1}{n} \sum_{m,p} e^{\frac{2\pi i}{n} mn} e^{\frac{2\pi i}{n} pn} = \frac{1}{n} \sum_{m,p} \underbrace{e^{\frac{2\pi i}{n} m}}_{=1} \underbrace{e^{\frac{2\pi i}{n} p}}_{=1} \stackrel{\text{temos } n^2 \text{ números}}{=} \\ &= \frac{1}{n} n^2 = n, \end{aligned} \quad (5.102)$$

$$\text{tr}\{\mathbf{1}\} = n,$$

representemos $\mathbf{U}^k \mathbf{V}^l$ na base μ' , ou seja,

$$\langle \mu' | \mathbf{U}^k \mathbf{V}^l | \mu'' \rangle = \langle \mu_m | \mathbf{U}^k \mathbf{V}^l | \mu_r \rangle = e^{\frac{2\pi i}{n} km} \langle \mu_m | \mu_{r+l} \rangle = e^{\frac{2\pi i}{n} km} \delta(\mu_m, \mu_{r+l}),$$

$$\begin{aligned} \text{tr}\{\mathbf{U}^k \mathbf{V}^l\} &= \sum_{\mu'} \langle \mu' | \mathbf{U}^k \mathbf{V}^l | \mu' \rangle = \sum_m \langle \mu_m | \mathbf{U}^k \mathbf{V}^l | \mu_m \rangle = \sum_{m=1}^n e^{\frac{2\pi i}{n} km} \langle \mu_m | \mu_{l+m} \rangle = \\ &= \sum_{m=1}^n e^{\frac{2\pi i}{n} km} \delta(m, l+m), \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, n-1$ e $l = 1, \dots, n-1$, verifica-se diretamente que

$$\text{tr}\{\mathbf{U}^k \mathbf{V}^l\} = \sum_{m=1}^n e^{\frac{2\pi i}{n} km} 0 = 0,$$

para o caso em que $k = 1, \dots, n-1$ e $l = n$, temos

$$\text{tr}\{\mathbf{U}^k \mathbf{V}^n\} = \sum_{m=1}^n e^{\frac{2\pi i}{n} km},$$

agora devido ao resultado visto na equação (5.100) onde,

$$\frac{1}{n} \sum_{\mu'} (\mu')^r = 0 \text{ para } 0 < r < n,$$

sendo assim, o $\text{tr}\{\mathbf{U}^k \mathbf{V}^n\}$ para $0 < k < n$

$$\text{tr}\{\mathbf{U}^k \mathbf{V}^n\} = \sum_{m=1}^n e^{\frac{2\pi i}{n} km} = 0.$$

Logo para $k = 1, \dots, n-1$ e $l = 1, \dots, n$

$$\text{tr}\{\mathbf{U}^k \mathbf{V}^l\} = 0. \quad (5.103)$$

Isto é a generalização para as matrizes de Pauli $n = 2$

$$\text{tr}\{\sigma\} = 0,$$

mostrando que o traço de cada componente é nulo, como visto na seção 4.4.

5.5 Graus quânticos de liberdade

Sabemos da seção anterior que para cada escolha de $n = 2, 3, 4, \dots$, obtemos um par diferente de quantidades complementares, correspondendo a sistemas físicos diferentes. Entretanto, para $n = 4 = 2 \times 2$, ou $n = 6 = 2 \times 3$, sendo representados de um modo geral $n = n_1 n_2$, surge o seguinte questionamento natural, é possível considerarmos um sistema n como sendo composto por outros dois mais simples, caracterizados por n_1 e n_2 .

Um ponto de partida vem da seguinte consideração

$$\begin{aligned} U_1 &= U^{n_2}, & U_2 &= U^{n_1} \\ V_1 &= V^{l_2 n_1}, & V_2 &= V^{l_2 n_1}, \end{aligned} \quad (5.104)$$

onde l_1, l_2 são inteiros tais que

$$\begin{aligned} U_1^{n_1} &= U^{n_2 n_1} = U^n = \mathbf{1}, & U_2^{n_2} &= U^{n_1 n_2} = U^n = \mathbf{1}, \\ V_1^{n_1} &= V^{l_2 n_1 n_1} = V^{l_1 n} = \mathbf{1}, & V_2^{n_2} &= V^{l_2 n_1 n_2} = V^{l_2 n} = \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (5.105)$$

como exemplos temos

$$V_1 U_2 = V^{l_2 n_2} U^{n_1} = e^{\frac{2\pi i}{n} l_2 n_1 n_2} U^{n_1} V^{l_2 n_2} = e^{2\pi i l_2} U_2 V_1$$

e

$$V_1 U_1 = V^{l_2 n_2} U^{n_2} = e^{\frac{2\pi i}{n} l_2 n_2^2} U^{n_2} V^{l_2 n_2} = e^{\frac{2\pi i}{n} l_2 n_2} U_1 V_1,$$

neste ponto, se faz necessário uma pequena discussão sobre a questão da divisibilidade de $l_2 n_2$ por n_1 , sob o ponto de vista da aritmética modular, mais precisamente através das classes de equivalência. Sabemos que as possíveis classes de equivalência na divisão por n_1 são $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{n_1 - 1}$, sendo assim descartando a classe $\bar{0}$, pois como veremos nos levaria ao resultado $V_1 U_1 = U_1 V_1$, percebemos que $l_2 n_2$ pertence há alguma das classes citadas, suponhamos que $l_2 n_2 \equiv 1 \pmod{n}$ e $l_2 n_2$ esteja entre 1 e $n_1 - 1$, assim, a única maneira de dois números entre 1 e $n_1 - 1$ serem congruentes módulo n_1 é se forem iguais (ver detalhes maiores sobre classes de equivalências em [10]), ou seja, $l_2 n_2 = 1$, então

$$V_1 U_1 = e^{\frac{2\pi i}{n_1} l_2 n_2} U_1 V_1 = e^{\frac{2\pi i}{n_1}} U_1 V_1,$$

precisamos agora, generalizar a álgebra dos operadores mostrada nos exemplos acima. Fazemos isto utilizando uma analogia com a seção anterior, quando tínhamos um sistema

de grau \mathbf{n} com a relação

$$\begin{aligned}\langle \mu_m | V^l U^k &= e^{\frac{2\pi i}{n} km} e^{\frac{2\pi i}{n} kl} \langle \mu_{m+l} | \\ \langle \mu_m | U^k V^l &= e^{\frac{2\pi i}{n} km} \langle \mu_{m+l} | \\ V^l U^k &= e^{\frac{2\pi i}{n} kl} U^k V^l,\end{aligned}$$

onde $k, l = 1, \dots, n$, em nossa situação se faz necessário introduzir um contador no formato matricial, já que em nossa álgebra temos dois conjuntos diferentes de operadores U_1, V_1 e U_2, V_2 , assim temos

$$\begin{array}{cccccc} 1, 1 & 1, 2 & \dots & 1, n_2 \\ 2, 1 & 2, 2 & \dots & 2, n_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_1, 1 & n_1, 2 & \dots & n_1, n_2 \end{array} \quad (5.106)$$

onde temos n_1 linhas e n_2 colunas descritas por $n_1 n_2 = n$ pares k_1, k_2 , onde os valores de k_1 correspondem aos representantes das classes módulo n_1 e k_2 as classes módulo n_2 . Os operadores U_1, V_1 , irão atuar nas linhas, enquanto os operadores U_2, V_2 atuarão sobre as colunas, vemos que para se haver a consistência da álgebra, é preciso termos um vetor de estado que dê conta do fato que temos dois graus de liberdade diferentes ao trabalharmos com operadores da forma $V_1 U_2 = U_2 V_1$ e associado a este vetor de estado temos as raízes da unidade para os respectivos graus de liberdade n_1 e n_2 , ou seja,

$$\mu_{1k_1} = e^{\frac{2\pi i}{n_1} k_1} = v_{1k_1} ; \quad \mu_{2k_2} = e^{\frac{2\pi i}{n_2} k_2} = v_{2n_2} \quad (5.107)$$

as definições recíprocas ou análogas são

$$\begin{aligned}\langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} | V_1 &= \langle \mu_{1k_1+1}, \mu_{2k_2} |, \\ \langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} | V_2 &= \langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2+1} |, \\ \langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} | U_1 &= e^{\frac{2\pi i}{n_1} k_1} \langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} |, \\ \langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} | U_2 &= e^{\frac{2\pi i}{n_2} k_2} \langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} |, \\ U_1 | v_{1k_1}, v_{2k_2} \rangle &= | v_{1k_1+1}, v_{2k_2} \rangle, \\ U_2 | v_{1k_1}, v_{2k_2} \rangle &= | v_{1k_1}, v_{2k_2+1} \rangle, \\ V_1 | v_{1k_1}, v_{2k_2} \rangle &= e^{\frac{2\pi i}{n_1} k_1} | v_{1k_1}, v_{2k_2} \rangle, \\ V_2 | v_{1k_1}, v_{2k_2} \rangle &= e^{\frac{2\pi i}{n_2} k_2} | v_{1k_1}, v_{2k_2} \rangle.\end{aligned} \quad (5.108)$$

Dentro de cada conjunto U_1, V_1 e U_2, V_2 temos os resultados já conhecidos

$$U_1^{n_1} = V_1^{n_1} = \mathbf{1}, \quad U_2^{n_2} = V_2^{n_2} = \mathbf{1}, \\ V_1 U_1 = e^{\frac{2\pi i}{n_1}} U_1 V_1, \quad V_2 U_2 = e^{\frac{2\pi i}{n_2}} U_2 V_2.$$

Não há problema quanto a ordem de atuação do conjunto de operadores

$$\langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} | U_1 V_2 = \mu_{1k_1} \langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} | V_2 = \mu_{1k_1} \langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2+1} |, \\ \langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} | V_2 U_1 = \langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2+1} | U_1 = \mu_{1k_1} \langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2+1} |, \quad (5.109)$$

assim

$$U_1 U_2 = U_2 U_1, \quad V_1 V_2 = V_2 V_1, \\ U_1 V_2 = V_2 U_1, \quad V_1 U_2 = U_2 V_1. \quad (5.110)$$

Propriedades físicas tais que a medida de uma, não altera a priori o conhecimento da outra e cuja a sequência da medida não importa, isto sendo representado pela comutatividade dos símbolos associados, são chamadas *compatíveis*. O par de operadores U_1, V_1 é compatível com o par de operadores U_2, V_2 . Uma maneira útil de se pensar sobre U_1, V_1 e U_2, V_2 , seria como se eles descrevessem dois sistemas independentes, que podem ser criados individualmente, ou destruídos individualmente, em qualquer ordem

$$\langle \mu'_1, \mu'_2 | = \langle \mu'_1 | \langle \mu'_2 | = \langle \mu'_2 | \langle \mu'_1 |, \\ |v''_1, v''_2\rangle = |v''_1\rangle |v''_2\rangle = |v''_2\rangle |v''_1\rangle, \quad (5.111)$$

dessa forma

$$\langle \mu'_1, \mu'_2 | v''_1, v''_2 \rangle = \langle \mu'_1 | v''_1 \rangle \langle \mu'_2 | v''_2 \rangle,$$

ou explicitamente (análogo ao resultado $\langle \mu_k | v_l \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i}{n} k l}$)

$$\langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} | v_{1l_1}, v_{2l_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1}} e^{\frac{2\pi i}{n_1} k_1 l_1} \frac{1}{\sqrt{n_2}} e^{\frac{2\pi i}{n_2} k_2 l_2} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi i (\frac{k_1 l_1}{n_1} + \frac{k_2 l_2}{n_2})}. \quad (5.112)$$

O resultado (5.112), surge diretamente quando escrevemos $\langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} |$ em termos de $\langle v_{1l_1}, \mu_{2k_2} |$, o qual nos leva para $\langle \mu_{1k_1} | v_{1l_1} \rangle$, juntamente com $\langle v_{1l_1}, \mu_{2k_2} |$ em termos de

$\langle v_{1l_1}, v_{2l_2} |$, o qual nos leva à $\langle \mu_{2k_2} | v_{2l_2} \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} | &= \frac{1}{\sqrt{n_1}} \sum_{l_1=1}^{n_1} e^{\frac{2\pi i}{n_1} k_1 l_1} \langle v_{1l_1}, \mu_{2k_2} |, \\
\langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} | v_{1l_1}, \mu_{2k_2} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_1}} \sum_{l_1=1}^{n_1} e^{\frac{2\pi i}{n_1} k_1 l_1} \langle v_{1l_1}, \mu_{2k_2} | v_{1l_1}, \mu_{2k_2} \rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n_1}} e^{\frac{2\pi i}{n_1} k_1 l_1}, \\
\langle v_{1l_1}, \mu_{2k_2} | &= \frac{1}{\sqrt{n_2}} \sum_{l_2=1}^{n_2} e^{\frac{2\pi i}{n_2} k_2 l_2} \langle v_{1l_1}, v_{2l_2} |, \\
\langle v_{1l_1}, \mu_{2k_2} | v_{1l_1}, v_{2l_2} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_2}} \sum_{l_2=1}^{n_2} e^{\frac{2\pi i}{n_2} k_2 l_2} \langle v_{1l_1}, v_{2l_2} | v_{1l_1}, v_{2l_2} \rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n_2}} e^{\frac{2\pi i}{n_2} k_2 l_2}, \\
\langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} | v_{1l_1}, \mu_{2k_2} \rangle \langle v_{1l_1}, \mu_{2k_2} | v_{1l_1}, v_{2l_2} \rangle &= \langle \mu_{1k_1}, \mu_{2k_2} | v_{1l_1}, v_{2l_2} \rangle = \langle \mu_{1k_1} | v_{1l_1} \rangle \langle \mu_{2k_2} | v_{2l_2} \rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n_1}} e^{\frac{2\pi i}{n_1} k_1 l_1} \frac{1}{\sqrt{n_2}} e^{\frac{2\pi i}{n_2} k_2 l_2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi i (\frac{k_1 l_1}{n_1} + \frac{k_2 l_2}{n_2})}.
\end{aligned}$$

As referências sobre a compatibilidade e incompatibilidade de propriedades físicas, direciona a atenção para algo que permaneceu até agora implicícito: Começamos com a medida de uma única propriedade física. De um modo mais geral, para uma dada propriedade A_1 , podemos adicionar outra propriedade compatível A_2 , assim uma medida seletiva de ambas é simbolizada por

$$|a'_1 a'_1 | |a'_2 a'_2 | = |a'_2 a'_2 | |a'_1 a'_1|. \quad (5.113)$$

Continuemos com esta ideia até encontrarmos um *conjunto completo* de propriedades físicas compatíveis: $A_1, A_2, \dots, A_{K(A)}$, tal que qualquer propriedade adicional será incompatível com pelos menos algum membro do conjunto completo. O símbolo para uma medida completa é simbolizado por

$$\underbrace{|a'_1 a'_1 | \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)} |}_{\text{em qualquer ordem}} = |a' a'| \quad \text{com} \quad a' \equiv \{a'_1, a'_2, \dots, a'_{K(A)}\}. \quad (5.114)$$

Átomos selecionados para terem um conjunto particular de valores a' são ditos estarem no *estado* a' . A partir deste ponto, toda construção da álgebra de medida e a geometria

procedem como antes, a única diferença sendo que o resultado de uma medida não é um único número mas uma coleção de números. Assim

$$\begin{aligned}
\sum_{a'} |a' a'| &= \sum_{a'_1, \dots, a'_{K(A)}} |a'_1 a'_1| \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)}| = \\
&= (\sum_{a'_1} |a'_1 a'_1|) (\sum_{a'_2, \dots, a'_{K(A)}} |a'_2 a'_2| \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)}|) = \\
&= \underbrace{(\sum_{a'_1} |a'_1 a'_1|)}_{=1} \underbrace{(\sum_{a'_2} |a'_2 a'_2|)}_{=1} \dots \underbrace{(\sum_{a'_{K(A)}} |a'_{K(A)} a'_{K(A)}|)}_{=1} = \mathbf{1} , \quad (5.115)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|a' a'| &= |a'_1 a'_1| \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)}| = |a'_1, \dots, a'_{K(A)}\rangle \langle a'_1, \dots, a'_{K(A)}| = |a'\rangle \langle a'|, \\
|a'' a''| &= |a''_1 a''_1| \dots |a''_{K(A)} a''_{K(A)}| = |a''_1, \dots, a''_{K(A)}\rangle \langle a''_1, \dots, a''_{K(A)}| = |a''\rangle \langle a''|,
\end{aligned}$$

$$|a' a'| |a'' a''| = |a'\rangle \langle a'| |a''\rangle \langle a''| = |a'_1, \dots, a'_{K(A)}\rangle \langle a'_1, \dots, a'_{K(A)}| |a''_1, \dots, a''_{K(A)}\rangle \langle a''_1, \dots, a''_{K(A)}|,$$

$$\begin{aligned}
\langle a' | a'' \rangle &= \delta(a', a'') = \langle a'_1, \dots, a'_{K(A)} | a''_1, \dots, a''_{K(A)} \rangle = \langle a'_1 | \dots \langle a'_{K(A)} | | a''_1 \rangle \dots | a''_{K(A)} \rangle = \\
&= \delta(a'_1, a''_1) \delta(a'_2, a''_2) \dots \delta(a'_{K(A)}, a''_{K(A)}) = \prod_{j=1}^{K(A)} \delta(a'_j, a''_j). \quad (5.116)
\end{aligned}$$

Façamos as coisas de outra maneira, construamos os símbolos de medida de uma quantidade a partir das medidas completas. Assim

$$\begin{aligned}
\sum_{a'} |a' a'| &= \sum_{a'_1, \dots, a'_{K(A)}} |a'_1 a'_1| \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)}| = \mathbf{1}, \\
\underbrace{|a'_1 a'_1| (\sum_{a'} |a' a'|)}_{=1} &= |a'_1 a'_1| (\sum_{a'_1, \dots, a'_{K(A)}} |a'_1 a'_1| \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)}|) = \\
&= |a'_1 a'_1| (\sum_{a'_1} |a'_1 a'_1|) (\sum_{a'_2, \dots, a'_{K(A)}} |a'_2 a'_2| \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)}|) = \\
&= |a'_1 a'_1| (\sum_{a'_2, \dots, a'_{K(A)}} |a'_2 a'_2| \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)}|) = \\
&= \sum_{a'_2, \dots, a'_{K(A)}} |a'_1 a'_1| |a'_2 a'_2| \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)}| = \sum_{a'_2, \dots, a'_{K(A)}} |a' a'| \quad (5.117)
\end{aligned}$$

para a medida que seleciona átomos com os valores a'_1 de A_1 é a menor medida seletiva completa que seleciona a'_1 e qualquer valor de $a'_2, a'_3, \dots, a'_{K(A)}$. Naturalmente

$$\begin{aligned}
\sum_{a'_1} |a'_1 a'_1| &= \mathbf{1} = \sum_{a'} |a' a'| = \sum_{a'_1, \dots, a'_{K(A)}} |a'_1 a'_1| \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)}| = \\
&= (\sum_{a'_1} |a'_1 a'_1|) (\sum_{a'_2, \dots, a'_{K(A)}} |a'_2 a'_2| \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)}|) = \\
&= \underbrace{(\sum_{a'_1} |a'_1 a'_1|)}_{=1} \underbrace{(\sum_{a'_2} |a'_2 a'_2|)}_{=1} \dots \underbrace{(\sum_{a'_{K(A)}} |a'_{K(A)} a'_{K(A)}|)}_{=1} = \mathbf{1}, \quad (5.118)
\end{aligned}$$

e, por exemplo,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{a'_1} a'_1 |a'_1 a'_1| = \sum_{a'_1} a'_1 (\sum_{a'_2, \dots, a'_{K(A)}} |a'_2 a'_2| \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)}|) = \\
&= \sum_{a'_1} a'_1 (\sum_{a'_2, \dots, a'_{K(A)}} |a'_1 a'_1| \dots |a'_{K(A)} a'_{K(A)}|) = \sum_{a'_1, \dots, a'_{K(A)}} a'_1 |a' a'| = \\
&= \sum_{a'} a'_1 |a' a'| = \sum_{a'} |a' \rangle \langle a'|. \quad (5.119)
\end{aligned}$$

Notemos que agora $|a'_1 a'_1|$ não é um simples produto de vetores. Isto é enfatizado contrastando com

$$\text{tr}\{|a' a'|\} = \text{tr}\{|a' \rangle \langle a'|\} = \langle a' | a' \rangle = \mathbf{1}, \quad (5.120)$$

assim

$$\begin{aligned}
\text{tr}\{|a'_1 a'_1|\} &= \text{tr}\{\sum_{a'_2, \dots, a'_{K(A)}} |a' \rangle \langle a'|\} = \sum_{a'_2, \dots, a'_{K(A)}} \text{tr}\{|a' \rangle \langle a'|\} \\
&= \sum_{a'_2, \dots, a'_{K(A)}} 1 = m(a'_1), \quad (5.121)
\end{aligned}$$

$m(a'_1)$ a multiplicidade de a'_1 , o número de estados a' que possuem a'_1 em comum. Como resultado,

$$\begin{aligned}
\text{tr}\{A_1\} &= \text{tr}\{\sum_{a'_1} |a'_1 a'_1|\} = \sum_{a'_1} a'_1 \text{tr}\{|a' \rangle \langle a'|\} = \\
&= \sum_{a'} a'_1 (\sum_{a'_2, \dots, a'_{K(A)}} 1) = \sum_{a'_1} a'_1 m(a'_1) = \text{tr}\{\sum_{a'} |a' \rangle a'_1 \langle a'|\} = \\
&= \sum_{a'} a'_1 \text{tr}\{|a' \rangle \langle a'|\} = \sum_{a'} a'_1. \quad (5.122)
\end{aligned}$$

Naturalmente, começamos com qualquer outra quantidade, B_1 , de maneira geral incompatível com o conjunto A_1, A_2, \dots , e o suplemento das propriedades compatíveis formam o conjunto completo B , com seus valores, b' , e vetores $\langle b' |, | b' \rangle$. Surge uma pergunta, o que os conjuntos incompatíveis A e B tem em comum? O número total de estados, o qual é a dimensionalidade da geometria. Esta ideia segue da evolução alternativa

$$\begin{aligned}
\text{tr}\{\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\} &= \sum_{a'} \text{tr}\{|a'\rangle(\sum_{b'} |b'\rangle\langle b'|)\langle a'|\} = \sum_{a'} \langle a'|\sum_{b'} |b'\rangle\langle b'|) |a'\rangle = \\
&= \sum_{a'} \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle = \sum_{a'} 1 = n(A), \\
\text{tr}\{\sum_{b'} |b'\rangle\langle b'|\} &= \sum_{b'} \text{tr}\{|b'\rangle(\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|)\langle b'|\} = \sum_{b'} \langle b'|\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|) |b'\rangle = \\
&= \sum_{b'} \sum_{a'} \langle b' | a' \rangle \langle a' | b' \rangle = \sum_{b'} 1 = n(B) \\
n(A) &= n(B) = n. \tag{5.123}
\end{aligned}$$

Encontramos estas ideias em um caminho matemático no contexto do problema de autovalor. Considere um espaço n dimensional, com um sistema de coordenada $|a'\rangle$, então dado um operador Hermitiano B_1 , mostramos seus autovalores e autovetores, isto é, solucionando

$$B_1 | \rangle = | \rangle b'_1. \tag{5.124}$$

Introduzindo o sistema de coordenada a , obtemos o sistema de equações

$$B_1 | \rangle = | \rangle b'_1 ,$$

$$B_1 = \sum_{a', a''} \langle a' | B_1 | a'' \rangle |a'\rangle \langle a''| ,$$

$$\sum_{a', a''} \langle a' | B_1 | a'' \rangle |a'\rangle \underbrace{\langle a''|}_{=\psi(a'')} | \rangle = | \rangle b'_1,$$

multiplicando ambos os lados da equação acima por $\langle a' |$,

$$\begin{aligned}
\langle a' | \sum_{a', a''} \langle a' | B_1 | a'' \rangle |a'\rangle \psi(a'') &= \underbrace{\langle a' |}_{=\psi(a')} | \rangle b'_1, \\
\sum_{a', a''} \langle a' | B_1 | a'' \rangle \langle a' | a' \rangle \psi(a'') &= \psi(a') b'_1, \\
\sum_{a''} \langle a' | B_1 | a'' \rangle \psi(a'') &= \psi(a') b'_1, \tag{5.125}
\end{aligned}$$

para as componentes do autovetor,

$$\langle a' | \rangle = \psi(a'). \quad (5.126)$$

Quando escrevemos sob a forma

$$\begin{aligned} \langle a' | \rangle &= \langle a' | \mathbf{1} | \rangle = \langle a' | \left(\sum_{a''} |a''\rangle \langle a''| \right) | \rangle = \sum_{a'} \underbrace{\langle a' | a' \rangle}_{= \delta(a', a'')} \underbrace{\langle a'' | \rangle}_{= \psi(a'')} = \\ &= \sum_{a''} \delta(a', a'') \psi(a''), \\ \sum_{a''} \langle a' | B_1 | a'' \rangle \langle a'' | \rangle &= \langle a' | \rangle b'_1, \\ \sum_{a''} \langle a' | B_1 | a'' \rangle \langle a'' | \rangle - \langle a' | \rangle b'_1 &= 0, \\ \sum_{a''} \langle a' | B_1 | a'' \rangle \psi(a'') - \sum_{a''} \delta(a', a'') \psi(a'') b'_1 &= 0, \\ \sum_{a''} [\langle a' | B_1 | a'' \rangle - \delta(a', a'') b'_1] \psi(a'') &= 0, \end{aligned} \quad (5.127)$$

$$(\langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle - b'_1 \delta(a_1, a_1)) \psi(a_1) + \dots + (\langle a_1 | B_1 | a_n \rangle - b'_1 \delta(a_1, a_n)) \psi(a_n) = 0$$

$$\begin{aligned} (\langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle - b'_1 \delta(a_1, a_n)) \psi(a_1) + (\langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle - b'_1 \delta(a_2, a_2)) \psi(a_2) + \dots + \\ + (\langle a_2 | B_1 | a_n \rangle - b'_1 \delta(a_2, a_n)) \psi(a_n) = 0 \end{aligned}$$

⋮

$$(\langle a_n | B_1 | a_1 \rangle - b'_1 \delta(a_n, a_1)) \psi(a_1) + \dots + (\langle a_n | B_1 | a_n \rangle - b'_1 \delta(a_n, a_n)) \psi(a_n) = 0, \quad (5.128)$$

é possível que a família de equações tenham a solução $\psi(a'') = 0$, sendo esta uma solução trivial, antes de prosseguirmos nas nossas análises, escrevemos o sistema de equações na forma matricial, representação de B_1 na forma matricial

$$\langle a' | B_1 | a'' \rangle = \begin{pmatrix} \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle & \dots & \langle a_1 | B_1 | a_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n | B_1 | a_1 \rangle & \dots & \langle a_n | B_1 | a_n \rangle \end{pmatrix},$$

para $b'_1 \delta(a', a'')$ temos

$$b'_1 \mathbf{1} = \begin{pmatrix} b'_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b'_1 \end{pmatrix},$$

$$\langle a' | B_1 | a'' \rangle - b'_1 \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle - b'_1 & \dots & \langle a_1 | B_1 | a_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n | B_1 | a_1 \rangle & \dots & \langle a_n | B_1 | a_n \rangle - b'_1 \end{pmatrix},$$

com a matriz $\langle a' | B_1 | a'' \rangle - b'_1 \mathbf{1}$, escrevemos o sistema de equações (5.128) na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle - b'_1 & \dots & \langle a_1 | B_1 | a_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n | B_1 | a_1 \rangle & \dots & \langle a_n | B_1 | a_n \rangle - b'_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \psi(a_1) \\ \vdots \\ \psi(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

suponhamos que baseados em uma escolha arbitrária, tenhamos pelo menos um dos ψ 's $\neq 0$, verifica-se pelo sistema de equações que o mesmo será satisfeito se

$$\det[\langle a' | B_1 | a'' \rangle - b'_1 \delta(a', a'')] = 0, \quad (5.129)$$

deve-se ficar claro que demos um exemplo de que com pelo menos um dos ψ 's $\neq 0$, para clarificar o resultado acima, pois de fato podemos ter muitas possibilidades, mas o resultado (5.129) sempre será mantido, assim de maneira mais explícita

$$\det \begin{pmatrix} \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle - b'_1 & \dots & \langle a_1 | B_1 | a_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n | B_1 | a_1 \rangle & \dots & \langle a_n | B_1 | a_n \rangle - b'_1 \end{pmatrix} = 0,$$

no qual é uma equação de grau n para b'_1 :

$$(-b'_1)^n + (-b'_1)^{n-1} \text{tr}\{B_1\} + \dots + \det B_1 = 0, \quad (5.130)$$

afim de mostrarmos o resultado (5.130), primeiro faremos um caso particular $n = 3$, o qual nos elucida o funcionamento de (5.130) e em seguida para generalizarmos, ou seja, chegarmos a forma acima, deve-se utilizar o princípio da indução, então

$$\langle a' | B_1 | a'' \rangle - b'_1 \delta(a', a'') = \begin{pmatrix} \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle - b'_1 & \langle a_1 | B_1 | a_2 \rangle & \langle a_1 | B_1 | a_3 \rangle \\ \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle & \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle - b'_1 & \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \\ \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle & \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle & \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - b'_1 \end{pmatrix}$$

$$\det[\langle a' | B_1 | a'' \rangle - b'_1 \delta(a', a'')] = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle - b'_1 \\ a_{12} &= \langle a_1 | B_1 | a_2 \rangle \\ a_{13} &= \langle a_1 | B_1 | a_3 \rangle \end{aligned}$$

$$A_{11} = (-1)^2 |D_{11}|, A_{12} = (-1)^3 |D_{12}|, A_{13} = (-1)^4 |D_{13}|,$$

onde $|D_{11}|, |D_{12}|, |D_{13}|$, são os determinantes das matrizes D_{11}, D_{12}, D_{13} , que escreveremos nos desenvolvimentos a seguir

$$D_{11} = \begin{pmatrix} \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle - b'_1 & \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \\ \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle & \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - b'_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} |D_{11}| &= (\langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle - b'_1)(\langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - b'_1) - \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle = \\ &= \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - b'_1 \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle - b'_1 \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle + b'^2_1 - \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle, \end{aligned}$$

$$D_{12} = \begin{pmatrix} \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle & \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \\ \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle & \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - b'_1 \end{pmatrix},$$

$$|D_{12}| = \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - b'_1 \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle - \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle,$$

$$D_{13} = \begin{pmatrix} \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle & \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle - b'_1 \\ \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle & \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle \end{pmatrix},$$

$$|D_{13}| = \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle - \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle + b'_1 \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle,$$

$$\begin{aligned} \det[\langle a' | B_1 | a'' \rangle - b'_1 \delta(a', a'')] &= (\langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle - b'_1)(-1)^2 [\langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - b'_1 \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle - \\ &\quad - b'_1 \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle + b'^2_1 - \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle] + \langle a_1 | B_1 | a_2 \rangle (-1)^3 [\langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - \\ &\quad - b'_1 \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle - \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle] + \langle a_1 | B_1 | a_3 \rangle (-1)^4 [\langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle - \\ &\quad - b'_1 \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle - \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle + b'_1 \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle] = \\
& = \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - b'_1 \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - b'_1 \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle + \\
& + b'^2_1 \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle - b'_1 \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle + b'^2_1 \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - b'^2_1 \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle - \\
& - b'^3_1 - \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle + \\
& + b'_1 \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle - \langle a_1 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle + b'_1 \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_1 | B_1 | a_2 \rangle + \\
& + \langle a_1 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle + \langle a_1 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle - \\
& - \langle a_1 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle + b'_1 \langle a_1 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle = \\
& = -b'^3_1 + b'^2_1 \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle + b'^2_1 \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle + b'^2_1 \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle + \\
& b'_1 (\langle a_1 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle - \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle) + \\
& b'_1 (\langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle - \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle) + \\
& + b'_1 (\langle a_1 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle - \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle) + \\
& \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle + \\
& + \langle a_1 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle + \langle a_1 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle - \\
& \langle a_1 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle - \\
& - \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle - \langle a_1 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle = \\
& = (-b'_1)^3 + (-b'_1)^2 \text{tr}\{B_1\} + (-b'_1) [\underbrace{(\langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle - \langle a_1 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle)}_{=\det B'_1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{(\langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle)}_{=\det B_1''} + \\
& + \underbrace{(\langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle - \langle a_1 | B_1 | a_3 \rangle \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle)}_{=\det B_1'''} + \det B_1 = \\
& = (-b'_1)^3 + (-b'_1)^2 \text{tr}\{B_1\} + (-b'_1)(\det B'_1 + \det B''_1 + \det B'''_1) + \det B_1, \quad (5.131)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
B'_1 &= \begin{pmatrix} \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle & \langle a_1 | B_1 | a_3 \rangle \\ \langle a_2 | B_1 | a_1 \rangle & \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle \end{pmatrix}, B''_1 = \begin{pmatrix} \langle a_2 | B_1 | a_2 \rangle & \langle a_2 | B_1 | a_3 \rangle \\ \langle a_3 | B_1 | a_2 \rangle & \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle \end{pmatrix}, \\
B'''_1 &= \begin{pmatrix} \langle a_1 | B_1 | a_1 \rangle & \langle a_1 | B_1 | a_3 \rangle \\ \langle a_3 | B_1 | a_1 \rangle & \langle a_3 | B_1 | a_3 \rangle \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

dessa forma tendo em mente, o *princípio da indução*, que nos diz que se é válido para um determinado n e se verificamos que é válido para $n + 1$, então é válido para todo n , isto confirma que a equação (5.131) é válida, assim como a sua generalização (5.130). Como simples exemplo dessa discussão, tomemos $n = 2$, $B_1 = \sigma_x$, $A = \sigma_z$:

$$\begin{aligned}
\det[\langle \sigma'_z | \sigma_x | \sigma''_z \rangle - b'_1 \delta(\sigma'_z, \sigma''_z)] &= \det \begin{pmatrix} \langle + | \sigma_x | + \rangle - b'_1 & \langle + | \sigma_x | - \rangle \\ \langle - | \sigma_x | + \rangle & \langle - | \sigma_x | - \rangle \end{pmatrix} = \\
&= \det \begin{pmatrix} -b'_1 & 1 \\ 1 & -b'_1 \end{pmatrix} = \\
&= (-b'_1)^2 + (-b'_1) \underbrace{\text{tr}\{\sigma_x\}}_{=0} + \underbrace{\det \sigma_x}_{=1} = \\
&= b'^2_1 - 1 = 0, \quad (5.132)
\end{aligned}$$

nos conduz para $b'_1 = \pm 1$.

Dado uma raiz particular b'_1 , retornamos às equações para os $\psi(a'')$'s e as mostramos dentro de um fator de fase, que é fixo dentro de uma fase arbitrária, pela normalização

$$\sum_{a'} |\psi_{b'_1}(a')|^2 = \sum_{a'} \langle b'_1 | a' \rangle \langle a' | b'_1 \rangle = \langle b'_1 | b'_1 \rangle = 1.$$

Dois desses autovetores b'_1 associados com raízes diferentes, ou autovalores, são ortogonais, ou seja

$$\langle b'_1 | B_1 | b''_1 \rangle = b'_1 \langle b'_1 | b''_1 \rangle = \langle b'_1 | b''_1 \rangle b''_1,$$

ou

$$(b'_1 - b''_1) \langle b'_1 | b''_1 \rangle = 0,$$

dessa forma

$$b'_1 \neq b''_1 : \langle b'_1 | b''_1 \rangle = \sum_{a'} \langle b'_1 | a' \rangle \langle a' | b''_1 \rangle = \sum_{a'} \psi_{b'_1}(a')^* \psi_{b''_1}(a') = 0. \quad (5.133)$$

Suponhamos que nem todas as n raízes são distintas, que algumas delas são múltiplas. Por exemplo, que $n = 4$ e B_1 , obedecendo $B_1^2 = \mathbf{1}$,

$$B_1^2 | \rangle = B_1 B_1 | \rangle = B_1^2 | \rangle b'_1 = | \rangle b'^2_1 = \mathbf{1} | \rangle = | \rangle,$$

dessa forma existem apenas dois autovalores : +1 e -1. Assim pelo $\det[\langle a' | B_1 | a'' \rangle - b'_1 \delta(a', a'')] = 0$, chegamos $(b'_1 - 1)^2(b'_1 + 1)^2$, onde uma ou ambas devem ser múltiplas. Seja a multiplicidade de b'_1 , $m(b'_1) = 2, 3, \dots$, dessa forma existem $m(b'_1)$ soluções linearmente independentes de (5.125). O fato de existir a independência linear, dada pela multiplicidade, não implica na ortogonalidade dos vetores $|b'_1, 1\rangle, \dots, |b'_1, m(b'_1)\rangle$, porém pode-se construir um sistema ortonormal(citamos o conhecido processo de Gram-Schmidt).

Supondo, termos o sistema ortonormal: $|b'_1, l\rangle, l = 1, \dots, m(b'_1)$, mostramos um segundo operador Hermitiano B_2 que comuta com B_1 , $B_1 B_2 = B_2 B_1$ e

$$B_1 B_2 |b'_1, l\rangle = B_2 B_1 |b'_1, l\rangle = B_2 |b'_1, l\rangle b'_1. \quad (5.134)$$

Isto nos diz que, $B_2 |b'_1, l\rangle$ é um autovetor de B_1 com o autovalor b'_1 e consequentemente deve ser uma combinação linear dos $m(b'_1)$ vetores conhecidos

$$B_2 |b'_1, l\rangle = \mathbf{1} B_2 |b'_1, l\rangle = \sum_{k=1}^{m(b'_1)} |b'_1, k\rangle \langle b'_1, k | B_2 |b'_1, l\rangle, \quad (5.135)$$

onde a adequada rotulação do elemento da matriz B_2 é verificada pela multiplicação por $\langle b'_1, k |$. Com este espaço $m(b'_1)$ -dimensional, buscamos os autovalores de B_2

$$B_2 |b'_1, \rangle = |b'_1, \rangle b'_2,$$

ou com $\langle b'_1, l | b'_1, \rangle = \psi_{b'_1}(l)$,

$$\sum_{l=1}^{m(b'_1)} \langle b'_1, k | B_2 |b'_1, l\rangle \psi_{b'_1}(k) b'_2, \quad (5.136)$$

conduzindo-nos para

$$\det[\langle b'_1, k | B_2 | b'_1, l \rangle - \delta(k, l) b'_2] = 0. \quad (5.137)$$

Se todas as raízes da equação acima diferem, ela nos fornece os vetores ortonormais $|b'_1, b'_2\rangle$.

Caso contrário, procuramos por um terceiro operador comutante B_3 e assim por diante.

Os operadores U e V , ilustram essa discussão. Para um sistema com n estados, os dois operadores Hermitianos implícitos em U e V , tal que $U^n = V^n = \mathbf{1}$ e $\mu_k = v_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ para $k = 1, \dots, n$, cada qual possuindo n autovalores distintos, assim a multiplicidade de qualquer autovetor é um. Nesta situação um único operador U , ou V , já é completo. Se n é um inteiro primo, que é onde reside o prosseguimento de nossa discussão, contrapondo-se ao fato de que se $n = n_1 n_2$, podemos introduzir U_1, V_1 de período n_1 e comutando com U_2, V_2 com período n_2 . Os autovalores de U_1 ou V_1 são apenas $n_1 < n$ em número e devem ser múltiplos, podemos formar vários conjuntos completos de propriedades compatíveis $U_1, U_2; U_1, V_2; V_1, V_2; V_1, U_2$, conduzindo para vetores ortonormais $|\mu_{1k_1}, \mu_{2k_2}\rangle, |\mu_{1k_1}, v_{2l_2}\rangle$, etc. Se n_1 e/ou n_2 são ainda fatoráveis, este processo pode continuar, terminando finalmente com vários sistemas irredutíveis em que o número de estados é um inteiro primo $\nu = 2, 3, 5, 7, \dots$, a isto chamamos *graus quânticos de liberdade*.

Capítulo 6

O limite do contínuo

6.1 A relação de comutação de Heisenberg

Dando prosseguimento a ideia dos graus quânticos de liberdade, vemos que com exceção de $\nu = 2$, os demais ν 's são ímpares, com isto, torna-se conveniente, a escolha de k em $\mu_k = v_k = e^{(\frac{2\pi i}{\nu})k}$ como

$$\begin{aligned}\nu = 2k + 1 \implies k &= \frac{\nu - 1}{2}, \\ k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{\nu - 1}{2},\end{aligned}\tag{6.1}$$

em outras palavras, fizemos apenas uma identificação bijetiva dos naturais $k = 1, \dots, \nu$ com os inteiros $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{\nu - 1}{2}$, do ponto de vista matemático são equivalentes. Agora, exibamos os operadores Hermitianos em U e V , para $\frac{2\pi}{\nu} = \epsilon^2$, escrevemos

$$U = e^{i\epsilon q}, V = e^{i\epsilon p}, q' = q_k, p' = p_k, \tag{6.2}$$

como $k = \frac{\nu - 1}{2}$ e $\frac{\nu}{2} = \frac{\pi}{\epsilon^2}$, chegamos $k = \frac{\pi}{\epsilon^2} - \frac{1}{2}$, mostrando que

$$q_k = p_k = \epsilon k = 0, \pm \epsilon, \pm 2\epsilon, \dots, \pm \left(\frac{\pi}{\epsilon} - \frac{\epsilon}{2}\right). \tag{6.3}$$

Recordamos que

$$V^l U^k = e^{\frac{2\pi i}{\nu} kl} U^k V^l$$

ou se multiplicarmos a equação acima à direita por $e^{-\frac{2\pi i}{\nu} kl} V^{-l}$

$$\begin{aligned}(e^{-\frac{2\pi i}{\nu} kl} V^{-l}) e^{\frac{2\pi i}{\nu} kl} U^k V^l &= (e^{-\frac{2\pi i}{\nu} kl} V^{-l}) V^l U^k \\ V^{-l} U^k V^l &= e^{-\frac{2\pi i}{\nu} kl} U^k\end{aligned}\tag{6.4}$$

e se multiplicarmos à esquerda a equação $V^l U^k = e^{\frac{2\pi i}{\nu} kl} U^k V^l$ por $e^{-\frac{2\pi i}{\nu} kl} U^{-k}$

$$\begin{aligned} V^l U^k (e^{-\frac{2\pi i}{\nu} kl} U^{-k}) &= e^{\frac{2\pi i}{\nu} kl} U^k V^l (e^{-\frac{2\pi i}{\nu} kl} U^{-k}) \\ U^k V^l U^{-k} &= e^{-\frac{2\pi i}{\nu} kl} V^l, \end{aligned} \quad (6.5)$$

substituindo pelos operadores da (6.2)

$$\begin{aligned} e^{-il\epsilon p} e^{ik\epsilon q} e^{il\epsilon p} &= e^{-ik\epsilon l\epsilon} e^{ik\epsilon q} = e^{ik\epsilon(q-l\epsilon)}, \\ e^{ik\epsilon q} e^{il\epsilon p} e^{-ik\epsilon q} &= e^{-ik\epsilon l\epsilon} e^{il\epsilon} = e^{il\epsilon(p-k\epsilon)}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

com isto justificamos a escolha de $\epsilon^2 = \frac{2\pi}{\nu}$, ou seja, pelo fato de termos $e^{-ik\epsilon l\epsilon} = e^{-\frac{2\pi i}{\nu} kl}$. Tomando $l\epsilon = q'$ e $k\epsilon = p'$, retornamos as fórmulas (6.6)

$$e^{-iq'p} e^{ip'q} e^{iq'p} = e^{ip'(q-q')}, \quad (6.7)$$

$$e^{ip'q} e^{iq'p} e^{-ip'q} = e^{iq'(p-p')}, \quad (6.8)$$

notemos que as transformações unitárias estão em função de operadores, uma função que é definida por uma série de potências. Assim, designando-se U como qualquer operador unitário e A referindo-se tanto a q ou p , consideramos motivados pelos resultados obtidos anteriormente

$$U^{-1} A^k U = U^{-1} \underbrace{A A \dots A}_{k \text{vezes}} U = \underbrace{U^{-1} A U U^{-1} A U \dots U^{-1} A U}_{k \text{vezes}} = (U^{-1} A U)^k, \quad (6.9)$$

nos diz que, a transformada unitária de uma função é a função do operador transformado, de um modo mais geral temos como verdade

$$U^{-1} f(A) U f(U^{-1} A U), \quad (6.10)$$

para qualquer função de operador $f(A)$ e qualquer operador unitário U . Com a equação (6.10) em mãos, tratemos as equações (6.7) e (6.8)

$$\begin{aligned} e^{-iq'p} e^{ip'q} e^{iq'p} &= e^{ip' [e^{-iq'p} q e^{iq'p}]} = e^{ip'(q-q')}, \\ e^{ip'q} e^{iq'p} e^{-ip'q} &= e^{iq' [e^{ip'q} p e^{-ip'q}]} = e^{iq'(p-p')}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Somos tentados a identificar os respectivos expoentes das equações (6.11), porém não podemos identificar os respectivos expoentes, devido a periodicidade das exponenciais, ou seja, $e^{-iq'p} q e^{iq'p} \neq q - q'$, de maneira análoga temos o mesmo resultado para a outra

exponencial. Se tomarmos o limite de $\nu \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$, dessa maneira podemos garantir a identificação dos expoentes, algo que nos ajuda neste sentido da periodicidade, é a visualização do círculo de periodicidade ($q_k = p_k = k\epsilon$) Neste limite, como $\epsilon \rightarrow 0$, $\frac{1}{\epsilon} \rightarrow \infty$, tornando do ponto de vista topológico o círculo de periodicidade equivalente a uma linha reta, infinita em ambas as direções.

Para evitar o fato de que, a linha reta é infinita em ambas as direções, deve-se implicitamente restringir todas as aplicações as situações *físicas*, onde os valores de q e p , embora possivelmente grandes, continuam *finitos*. Assim sendo, a periodicidade não faz parte dessa restrição, os valores de q' e p' formam um contínuo, o qual permite a identificação de potência por potência. Temos então

$$\begin{aligned} e^{-iq'p}qe^{iq'p} &= q - q', \\ e^{ip'q}pe^{-ip'q} &= p - p'. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Nos interessa somente até a primeira potência

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - iq'p + \dots)q(\mathbf{1} + iq'p + \dots) &= q - q' \\ (q - iq'pq + \dots)(\mathbf{1} + iq'p + \dots) &= q - q' \\ q(\mathbf{1} + iq'pq + \dots) - iq'pq(\mathbf{1} + iq'p + \dots) + \dots &= q - q' \\ \underbrace{(q + iq'qp + \dots) - (iq'pq - q'^2pqp + \dots) + \dots}_{=q+iq'(qp-pq)+\dots} &= q - q', \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} + ip'q + \dots)p(\mathbf{1} - ip'q + \dots) &= p - p' \\ p(\mathbf{1} - ip'q + \dots) + ip'qp(\mathbf{1} - ip'q + \dots) + \dots &= p - p' \\ (p + ip'qp + \dots)(\mathbf{1} - ip'q + \dots) &= p - p' \\ \underbrace{(p - ip'pq + \dots) + (ip'qp + p'^2qpq + \dots) + \dots}_{=p+ip'(qp-pq)+\dots} &= p - p', \end{aligned} \quad (6.14)$$

ambas as equações nos declara a não-comutatividade

$$qp - pq = i \quad \text{ou} \quad \frac{1}{i}[q, p] = 1. \quad (6.15)$$

Isso é a essência da descoberta de Heisenberg da não-comutatividade em 1925. Para a formulação compacta na forma da relação de comutação(6.15), Born contribuiu substancialmente.

A ação dos operadores unitários sobre os vetores

$$\langle \mu_k | V^l = \langle u_{k+l} | , U^k | v_l \rangle = | v_{k+l} \rangle$$

podemos reescrever da seguinte forma, como $V^l = e^{il\epsilon p} = e^{iq''p}$ e $U^k = e^{ik\epsilon q} = e^{ip''q}$

$$\langle q' | e^{iq''p} = \langle q' + q'' | , \quad e^{ip''q} | p' \rangle = | p' + p'' \rangle , \quad (6.16)$$

empregando-se $\frac{2\pi}{\nu} = \epsilon^2$ e identificando $k\epsilon = q'$, $l\epsilon = q''$ em

$$\begin{aligned} \mu_k &= e^{(\frac{2\pi i}{\nu})k} = e^{i\epsilon(k\epsilon)} = e^{iq'} , \\ V^l &= e^{i(l\epsilon)p} = e^{iq''p} , \\ \mu_{k+l} &= e^{\frac{2\pi i}{\nu}(k+l)} = e^{i\epsilon(k\epsilon+l\epsilon)} = e^{i\epsilon(q'+q'')} , \end{aligned} \quad (6.17)$$

e para $k\epsilon = p''$, $l\epsilon = p'$ em

$$\begin{aligned} U^k &= e^{i(k\epsilon)q} = e^{ip''q} , \\ v_l &= e^{\frac{2\pi i}{\nu}l} = e^{i\epsilon(l\epsilon)} = e^{ip'} , \\ v_{k+l} &= e^{\frac{2\pi i}{\nu}(k+l)} = e^{i\epsilon(l\epsilon+k\epsilon)} = e^{i\epsilon(p'+p'')} . \end{aligned} \quad (6.18)$$

Vemos, por exemplo, que o operador unitário $e^{iq''p}$ atuando em um autovetor à esquerda de q , produz um outro autovetor com um autovalor deslocado, ou seja, a declaração de que $\langle q' | e^{iq''p}$ é um autovetor de que q com autovalor $q' + q''$

$$\begin{aligned} \langle q' | e^{iq'p} q &= \langle q' + q'' | q = (q' + q'') \underbrace{\langle q' + q'' |}_{= \langle q' | e^{iq''p}} , \end{aligned} \quad (6.19)$$

ou equivalentemente, se $\langle q' | e^{iq''p}$ é um autovetor de $q - q'$ com autovalor q'

$$\langle q' | e^{iq''p} (q - q') = (q' + q'') \langle q' | e^{iq''p} - q'' \langle q' | e^{iq''p} = q' \langle q' | e^{iq''p} = \langle q' | q e^{iq''p} , \quad (6.20)$$

ou

$$e^{iq''p} (q - q') = q e^{iq''p} , \quad (6.21)$$

que é apenas a equação de operadores (6.12), com q'' no lugar do q' . De maneira análoga temos a mesma construção para p , que se origina na simetria $U \rightarrow V$, $V \rightarrow U^{-1}$, ou, com

$U = e^{i\epsilon q}$, $V = e^{i\epsilon p}$, com $q \rightarrow p$, $p \rightarrow -q$.

De fato

$$i = qp - pq \rightarrow p(-q) - (-q)p = qp - pq$$

e com $q' \rightarrow p'$

$$\begin{aligned} e^{-iq'p}qe^{iq'p} &= q - q' \\ &\downarrow \\ e^{ip'q}pe^{-ip'q} &= p - p'. \end{aligned}$$

Se aplicamos estas ideias à $\langle q' | e^{iq''p} = \langle q' + q'' |$, obtemos $\langle p' | e^{-p''q} = \langle p' + p'' |$, que corresponde a operação adjunta \dagger de $e^{ip''q} | p' \rangle = | p' + p'' \rangle$.

6.2 Representação do operador-diferencial de Schrödinger

Convertamos a equação vetorial q em uma forma numérica, multiplicando por um vetor a direita $| \rangle$

$$\langle q' | e^{iq''p} | \rangle = \langle q' + q'' | \rangle. \quad (6.22)$$

assumimos $| \rangle$ ser tal que $\langle q' + q'' | \rangle$ é uma função contínua de q'' , permitindo a expansão em ambos os lados em série de potências de q'' , antes de prosseguirmos façamos certas colocações para facilitar os resultados posteriores

$$\langle q' | e^{iq''p} | \rangle = \langle q' | (1 + iq''p + \dots) | \rangle = \langle q' | 1 | \rangle + \langle q' | iq''p | \rangle + \dots.$$

expandindo $\langle q' + q'' | \rangle = \psi(q' + q'')$ em série de Taylor em torno de q'

$$\begin{aligned} \langle q' + q'' | \rangle &= \psi(q' + q'') = \frac{\psi^0(q')}{0!}(q'' + q' - q')^0 + \frac{\psi'(q')}{1!}(q'' + q' - q')^1 + \dots = \\ &= \psi(q') + \psi'(q')q'' + \dots = \langle q' | \rangle + q'' \frac{\partial \langle q' |}{\partial q'} + \dots, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \langle q' | \rangle + iq'' \langle q' | p | \rangle + \dots &= \langle q' | \rangle + q'' \frac{\partial \langle q' |}{\partial q'} + \dots, \\ i \langle q' | p | \rangle &= \frac{\partial \langle q' |}{\partial q'} \Rightarrow \langle q' | p | \rangle = \frac{1}{i} \frac{\partial \langle q' |}{\partial q'}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Esta representação (6.23) do operador-diferencial do efeito de p é a essência da descoberta de Schrödinger da mecância ondulatória (1926). Afim de mostrarmos a equivalência disto, com a relação de não-comutatividade, consideremos

$$\begin{aligned}\langle q' | (qp - pq) | \rangle &= \langle q' | qp | \rangle - \langle q' | pq | \rangle = q' \langle q' | p | \rangle - \frac{1}{i} \frac{\partial \langle q' |}{\partial q'} = \\ &= [q' \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q'} - \frac{1}{i} \frac{\partial q'}{\partial q'}] \langle q' | = \langle q' | i | \rangle,\end{aligned}\quad (6.24)$$

como deveria ser. Substituindo $q \rightarrow p$, $p \rightarrow -q$ em (6.23) obtemos,

$$\begin{aligned}\langle p' | -q | \rangle &= \frac{1}{i} \frac{\partial \langle p' |}{\partial p'}, \\ \langle p' | q | \rangle &= -\frac{1}{i} \frac{\partial \langle p' |}{\partial p'} \Rightarrow \langle p' | q | \rangle = i \frac{\partial \langle p' |}{\partial p'},\end{aligned}$$

tendo como adjunto

$$(\langle p' | q | \rangle)^\dagger = ((p')^\dagger (q) | \rangle)^\dagger = \langle | q^\dagger | p' \rangle = \langle | q | p' \rangle = (i \frac{\partial}{\partial p'} \langle | p' \rangle) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial p'} \langle | p' \rangle. \quad (6.25)$$

A relação (6.23) e

$$\langle q' | f(q) | \rangle = f(q') \langle q' | \rangle,$$

são combinadas em

$$\langle q' | f(q, p) | \rangle = f(q', \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q'}) \langle q' | \rangle, \quad (6.26)$$

dado que $f(q, p)$ pode ser construído a partir de estruturas básicas, pela adição e multiplicação. Vemos também que, se a representação do operador-diferencial é válida para $f_1(q, p)$ e $f_2(q, p)$, como é para $f(q)$ e p , então é válida para $f_1(q, p) + f_2(q, p)$ e $f_1(q, p)f_2(q, p)$. De fato

$$\begin{aligned}\langle q' | [f_1(q, p) + f_2(q, p)] | \rangle &= \langle q' | f_1(q, p) | \rangle + \langle q' | f_2(q, p) | \rangle \\ &= [f_1(q', \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q'}) + f_2(q', \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q'})] \langle q' | \rangle,\end{aligned}\quad (6.27)$$

$$\begin{aligned}\langle q' | f_1(q, p)f_2(q, p) | \rangle &= f_1(q', \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q'}) \langle q' | f_2(q, p) | \rangle = \\ &= f_1(q', \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q'}) f_2(q', \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q'}) \langle q' | \rangle.\end{aligned}\quad (6.28)$$

As relações correspondentes aos autovetores de p , são obviamente análogas

$$\begin{aligned}\langle p' | f(q, p) | \rangle &= f(i \frac{\partial}{\partial p'}, p') \langle p' | \rangle, \\ \langle | f(q, p) | p' \rangle &= f(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial p'}) \langle | p' \rangle.\end{aligned}\quad (6.29)$$

Capítulo 7

Princípio Quântico da Ação

A versão que apresentaremos aqui do Princípio Quântico da Ação não é a mesma versão que está no livro do Schwinger ([1], cap. 5) e sim a versão modificada que foi apresentada no trabalho [4]. Este capítulo, sobre o PQA, conforme falamos anteriormente, é apenas para a completeza deste projeto. Os detalhes desta discussão estão na referência citada. Nossa objetivo aqui é a transcrição do PQA, onde iremos fazer a dedução dos comutadores fundamentais entre as variáveis canônicas.

As maiores diferenças entre a formulação que apresentaremos e a do Schwinger são que além das variáveis canônicas q_i e p_i serem consideradas operadores, as variações $\delta_0 q$ e $\delta_0 p$ serão consideradas *também* operadores e eliminaremos a variação $\delta t = 0$ do funcional da ação. Desta forma o Hamiltoniano H é eliminado do gerador F .

7.1 Uma Nova Formulação do Princípio Quântico da Ação

Consideremos um sistema quântico descrito pelas variáveis canônicas $\{q_i, p_i\}$ que são operadores, com uma Hamiltoniana $H(q_i, p_i, t)$. A fim de mantermos a discussão tão simples quanto possível e evitarmos complicações não-essenciais devido ao spin, assumimos que todos os observáveis podem ser escritos em termos destes operadores fundamentais. Suponhamos que as configurações inicial e final do sistema ocorram nos instantes t_1, t_2 . Estabeleceremos o PQA como segue: *Existe um funcional das variáveis canônicas definido*

por

$$W \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \left(p_i \dot{q}_i - \dot{p}_i q_i - 2H(q, p, t) \right) \quad (7.1)$$

tal que sob uma transformação das variáveis canônicas ($\delta_0 q_i, \delta_0 p_i$ sendo operadores)

$$\begin{aligned} q_i(t) &\longrightarrow \tilde{q}_i(t) := q_i(t) + \delta_0 q_i(t) \\ p_i(t) &\longrightarrow \tilde{p}_i(t) := p_i(t) + \delta_0 p_i(t) \end{aligned} \quad (7.2)$$

é transformado como $\delta W = F(t_2) - F(t_1)$. Esta quantidade está relacionada a variação da amplitude $\langle \chi_B, t_2 | \chi_A, t_1 \rangle$ por

$$\delta \langle \chi_B, t_2 | \chi_A, t_1 \rangle := -\frac{i}{\hbar} \langle \chi_B, t_2 | \delta W | \chi_A, t_1 \rangle \quad (7.3)$$

onde $F(t_1)$ e $F(t_2)$ são os geradores das transformações unitárias, atuando sobre os estados $|\chi_A, t_1\rangle$ e $|\chi_B, t_2\rangle$. De (7.2) temos

$$\delta W = \left(p_i \delta_0 q_i - \delta_0 p_i q_i \right) \Big|_{t_1}^{t_2} + 2 \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-\dot{p}_i \delta_0 q_i + \delta_0 p_i \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta_0 q_i - \delta_0 p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right).$$

Assumindo o PQA, devemos ter $\delta W = F(t_2) - F(t_1)$. Consequentemente, identificamos

$$F(t) = p_i \delta_0 q_i - \delta_0 p_i q_i \Big|_t. \quad (7.4)$$

O PQA fixa a parte restante como zero, isto é

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(-\dot{p}_i \delta_0 q_i + \delta_0 p_i \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta_0 q_i - \delta_0 p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0$$

e desde que as variações $\delta_0 q_i, \delta_0 p_i$ sejam arbitrárias, devemos ter

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i. \quad (7.5)$$

Agora, chequemos a consistência entre as transformações unitárias geradas por F and H . Consideremos uma Hamiltoniana independente do tempo (isto é, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$) e as seguintes transformações

$$|\chi, t\rangle \xrightarrow{e^{\frac{i}{\hbar} F(t)}} |\tilde{\chi}, t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} F(t)} |\chi, t\rangle, \quad |\chi, t_0\rangle \xrightarrow{e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}} |\chi, t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} |\chi, t_0\rangle.$$

A consistência exige que

$$\begin{aligned} |\chi, t_0\rangle &\xrightarrow{e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}} |\chi, t\rangle & \xrightarrow{e^{\frac{i}{\hbar} F(t)}} |\tilde{\chi}, t\rangle \\ |\chi, t_0\rangle &\xrightarrow{e^{\frac{i}{\hbar} F(t_0)}} |\tilde{\chi}, t_0\rangle & \xrightarrow{e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}} |\tilde{\chi}, t\rangle \end{aligned}$$

isto é,

$$e^{\frac{i}{\hbar}F(t)} = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}F(t_0)}e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}.$$

Para uma transformação infinitesimal com $\delta t = t - t_0$, isto nos fornece, $F(t) = F(t_0) + \frac{i}{\hbar} \delta t [H, F(t_0)]$, ou equivalentemente

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [F, H].$$

Utilizando (7.4), a equação anterior pode ser reescrita como

$$\dot{p}_i \delta_0 q_i + p_i \delta_0 \dot{q}_i - \delta_0 \dot{p}_i q_i - \delta_0 p_i \dot{q}_i = -\frac{i}{\hbar} [p_i, H] \delta_0 q_i - \frac{i}{\hbar} p_i [\delta_0 q_i, H] + \frac{i}{\hbar} \delta_0 p_i [q_i, H] + \frac{i}{\hbar} [\delta_0 p_i, H] q_i$$

que dá

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= -\frac{i}{\hbar} [q_i, H], & \dot{p}_i &= -\frac{i}{\hbar} [p_i, H] \\ \delta_0 \dot{q}_i &= -\frac{i}{\hbar} [\delta_0 q_i, H], & \delta_0 \dot{p}_i &= -\frac{i}{\hbar} [\delta_0 p_i, H]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Os comutadores envolvendo as variações $\delta_0 q_i$, $\delta_0 p_i$ são em geral diferentes de zero, um fato que somente é possível, por considerá-las como operadores. Outra condição surge quando consideramos $\dot{q}_i = -\frac{i}{\hbar} [q_i, H]$ e tomamos a variação δ_0 diretamente desta relação: $\delta_0 \dot{q}_i = -\frac{i}{\hbar} [\delta_0 q_i, H] - \frac{i}{\hbar} [q_i, \delta_0 H]$, que dá

$$[q_i, \delta_0 H] = 0. \quad (7.7)$$

Analogamente, obtemos

$$[p_i, \delta_0 H] = 0. \quad (7.8)$$

Estas equações são as condições de consistência para serem satisfeitas pelas variações $\delta_0 q_i$, $\delta_0 p_i$. Torna-se claro que a escolha da Hamiltoniana restringe os tipos de transformações (7.2) que podemos considerar para o sistema. Na formulação original do Schwinger, [11], as variações $\delta_0 q_i$, $\delta_0 p_i$ foram assumidas para comutar com as variáveis canônicas. Consequentemente, as equações que ele obteve são $\delta_0 \dot{q}_i = -\frac{i}{\hbar} [q_i, \delta_0 H]$, $\delta_0 \dot{p}_i = -\frac{i}{\hbar} [p_i, \delta_0 H]$ diferentes das nossas. As condições de consistência (7.7, 7.8) estão ausentes na formulação do Schwinger e aparecem aqui devido ao caráter de operadores das variações $\delta_0 q$, $\delta_0 p$.

7.1.1 Os Comutadores Fundamentais

Não temos ainda determinado quaisquer comutadores fundamentais entre as variáveis canônicas, consequentemente as equações anteriores não estabelecem qualquer aspecto dinâmico do modelo. Assumimos que o gerador F , induz uma transformação infinitesimal sobre as variáveis canônicas $q_i(t), p_i(t)$ que escrevemos como $\delta_F q_i \equiv \bar{\delta}_F q_i + \delta_0 q_i$, $\delta_F p_i \equiv \bar{\delta}_F p_i + \delta_0 p_i$. Como veremos abaixo, os termos adicionais $\bar{\delta}_F q_i, \bar{\delta}_F p_i$ são requeridos de forma a garantir a consistência do formalismo no caso em que $\delta_0 q_i, \delta_0 p_i$ são operadores. A fim de fixarmos os comutadores fundamentais, vamos considerar a ação do gerador F sobre o operador $K(q, p, t)$. Desde que $F = p_i \delta_0 q_i - \delta_0 p_i q_i$ não dependa em t , é razoável assumir

$$\delta_F K(q, p, t) := \tilde{K}(q + \delta_0 q, p + \delta_0 p, t) - K(q, p, t) \equiv \bar{\delta}_F K + \delta_0 K \quad (7.9)$$

onde

$$\delta_0 K := \frac{\partial K}{\partial q_i} \delta_0 q_i + \delta_0 p_i \frac{\partial K}{\partial p_i} \quad (7.10)$$

$$\bar{\delta}_F K := \tilde{K}(q, p, t) - K(q, p, t) \quad (7.11)$$

com $\bar{\delta}_F K$ referindo-se à uma mudança na forma funcional do operador K induzida por F . Também,

$$\delta_F K \equiv UKU^{-1} - K = -\frac{i}{\hbar} [K, F]. \quad (7.12)$$

De (7.9,7.12) obtemos a seguinte equação

$$\bar{\delta}_F K + \frac{\partial K}{\partial q_i} \delta_0 q_i + \delta_0 p_i \frac{\partial K}{\partial p_i} = -\frac{i}{\hbar} [K, p_i] \delta_0 q_i - \frac{i}{\hbar} p_i [K, \delta_0 q_i] + \frac{i}{\hbar} \delta_0 p_i [K, q_i] + \frac{i}{\hbar} [K, \delta_0 p_i] q_i$$

a qual dá

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = -\frac{i}{\hbar} [K, p_i], \quad \frac{\partial K}{\partial p_i} = \frac{i}{\hbar} [K, q_i] \quad (7.13)$$

$$\bar{\delta}_F K = \frac{i}{\hbar} [K, \delta_0 p_i] q_i - \frac{i}{\hbar} p_i [K, \delta_0 q_i]. \quad (7.14)$$

Vemos de (7.14) que $\bar{\delta}_F K$ é determinado pelos comutadores de K com os operadores $\delta_0 q_i, \delta_0 p_i$. Em particular, tomando para K , o q_k e p_k em (7.12) obtemos as relações de comutação

$$[q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0. \quad (7.15)$$

Capítulo 8

Conclusões e Perspectivas

Conforme vimos ao longo deste texto, podemos dividir a abordagem do Schwinger para a Mecânica Quântica em duas partes:

- uma Álgebra das Medidas e
- o Princípio Quântico da Ação.

Na álgebra vimos o desenvolvimento da estrutura algébrica a partir da generalização do experimento de Stern-Gerlach. Desta álgebra são obtidas as leis gerais da Cinemática Quântica¹. Conforme o próprio Schwinger frisa no seu livro (p.29): deseja-se um processo de indução (ideal) que partindo dos *experimentos se cheguem às leis da Mecânica Quântica*.

Poderíamos discutir muitos tópicos ao concluir este projeto. A área de Mecânica Quântica além de vasta e muito intrigante, tem inúmeras dificuldades, ainda mais que a base do tratamento do Schwinger diz respeito às medições quânticas. Encontramos neste tema muitas dificuldades e posicionamentos dos diferentes pesquisadores da área, havendo uma enorme literatura, que vem aumentando desde a constituição da própria teoria quântica. Estas questões vão da epistemologia ao problema de como formular uma teoria consistente matematicamente².

¹Na cinemática quântica estudam-se as propriedades dos sistemas em um certo instante do tempo (ver definições matemáticas precisas em [12], p.66 e na p.213 a comparação com a dinâmica quântica).

²Von Neumann em [13] foi o primeiro a fazer uma formulação de uma teoria matemática que buscasse dar conta das interações do *sistema* com os *aparelhos de medidas*, sem utilizar do recurso inicial da MQ, onde se dizia que o aparelho era regido por leis clássicas (interpretação de Bohr). Desde esta época

O tratamento do Prigogine na “teoria microscópica dos processos irreversíveis”, define “uma nova teoria de transformações” (em contraposição às transformações unitárias), com as *transformações não-unitárias*, ou \star -unitárias, que transformam a equação dinâmica para o operador matriz densidade. Esta equação, análoga à equação clássica de Liouville, é composta de uma parte reversível e outra parte irreversível. Segundo Prigogine, o problema das medidas é apenas uma ilustração do problema da irreversibilidade na MQ ([14], p.242, e outras referências no assunto, como [15], [16]). Não é nossa pretensão ingressar aqui nestas discussões. Levantaremos aqui pontos mais específicos referentes ao que foi tratado no Projeto, que são algumas questões que para nós não ficaram claras no desenvolvimento do *Schwinger*.

No que se refere à forma como foi induzida a estrutura algébrica, notamos algumas dificuldades no aparecimento de certos elementos da álgebra diretamente a partir de elementos das medidas. Vejam-se as diferentes medidas que discutimos aqui nos três exemplos da seção 3.4, p.48 (no livro é p.44, seção 1.5). A medida seletiva (caso 1), e mais as duas outras que consideramos mais sutis (casos 2 e 3): a que “aceita tudo” (caso 2) sem distinção, não faz medida alguma, “não tem aparelho físico” (é o **1** da álgebra); e a “sem medida” (caso 3), onde o aparelho separa o feixe, mas não seleciona nada, é a *medida não seletiva*. Este último, onde o aparelho físico separa os átomos mas não faz nenhuma seleção, tem certas semelhanças com o segundo caso onde se assume que “não há aparelho”. Na realidade ele necessita destas diferentes premissas, com estas distinções, para poder construir uma teoria consistente. Apesar desta dificuldade, vimos na seção 3.5, no estudo das *Medidas que perturbam o sistema*, que estes dois casos realmente têm estruturas diferentes, na fórmula (3.63) está explícito que no cômputo das probabilidades cada uma destas medidas dá uma contribuição diferente ³.

que inúmeras tentativas foram feitas para melhor se entender o processo de medidas. Há diferentes e controversas teorias no assunto. Questões e mais questões têm sido vasculhadas ao longo dos anos e da própria evolução teórica e experimental (por exemplo, com as teorias de “QND measurement”, ver em [9]). Dentre as diferentes abordagens podemos citar as proposições do *Grupo de Bruxelas*, liderado por Ilya Prigogine (físico-químico russo (1917-2003) ganhador do Prêmio Nobel de Química de 1977, por suas contribuições para a termodinâmica do não-equilíbrio e pela teoria das estruturas dissipativas). Estabeleceram uma *teoria microscópica dos processos irreversíveis*, com regras para evolução não-unitária do operador densidade durante processos irreversíveis, por exemplo, nas medições quânticas ([14], p.242).

³No livro do *Schwinger* estão na fórmula (1.6.4) da p.47.

Não vimos nenhuma referência às usuais discussões encontradas na literatura sobre o fato do aparelho de medida estar sendo considerado “clássico” ou “quântico”. Este tópico é um dos problemas da interpretação de Copenhagen, a qual assume que o aparelho segue as regras da física clássica. Von Neumann criou sua teoria com a inclusão do aparelho como um “entidade” também quântica. Para que o processo de evolução do sistema, no ato irreversível da medida, seja unitário, é necessário que o dito “sistema” seja na realidade o conjunto *sistema + aparelho*. Um exemplo de situação deste tipo pode ser vista nos trabalhos de A. Peres ([17], p. 688, e [18]), onde encontramos Hamiltonianos que representam a interação do “aparelho” de Stern-Gerlach com uma “partícula de spin 1/2”. Associado com o Hamiltoniano há um processo de evolução unitária, nestes modelos não há o que é usualmente denominado de “colapso da função de onda” (ver detalhes na bibliografia citada).

As medidas denominadas por von Neumann de “processos de primeiro tipo”, ou irreversíveis, são aquelas que tratamos aqui na seção 2.5, ou “medidas que perturbam o sistema”. Note que Schwinger as introduz diretamente no cálculo da probabilidade. Sabemos que para somente o *sistema*, isto é, sem o aparelho, tem que se levar em conta a irreversibilidade do processo, bem como as inúmeras questões levantadas desde a época de von Neumann ⁴.

Como era de se esperar, não há uma estrutura algébrica diretamente ligada somente ao sistema quântico, pois este interage de forma irreversível com o aparelho. Lembremos que para situações que não evoluem segundo a equação de Schrödinger, estados não puros, é conveniente se fazer a descrição através da matriz densidade (introduzida por von Neumann e Landau), que é mais geral que o usual formalismo dos vetores de estado. Ela incorpora além dos usuais estados puros definidos pelos vetores de estado, os estados “não-puros”, ou “mistura estatística”, estes estados não podem ser definidos a partir de superposição linear de estados puros, ou seja, como uma superposição linear de vetores de estado (veja-se, por exemplo, no Karl Blum ([19], p.8, e p.11-12)). A mistura tem que

⁴Ver a discussão desenvolvida sobre a Teoria das Medidas no livro do Max Jammer [8], e também no Prigogine ([14], p.65-66, e p.242), onde ele mostra que as medidas transformam estados puros, os quais evoluem segundo a equação de Schrödinger, em misturas estatísticas. Utilizando-se as funções de onda para os estados puros e a matriz densidade, ρ , para a mistura, um estado puro $\Psi = \sum_n c_n \phi_n$ é transformado numa mistura $\rho = \sum |c_n|^2 P_n$, onde P_n é um conjunto de projetores. Esta transformação é irreversível.

ser descrita se especificando a forma como ela foi preparada. Notemos que o Schwinger, pouco se refere a este formalismo, mencionando-o somente através de exercícios (p.93 do livro). Nos fica a dúvida de até que ponto podemos, com a MQ do Schwinger, chegar aos mesmos resultados que outros inúmeros autores obtiveram com a matriz densidade.

Ainda sobre este formalismo, a matriz densidade atribui pesos estatísticos a cada estado presente na mistura, e naturalmente descreve também o caso particular dos estados puros. De uma forma geral, os processos de medidas quânticas podem levar a que estados puros seja transformados em misturas estatísticas. Muitas vezes este processo é denominado *redução do pacote de ondas*, e na abordagem do Prigogine ([14], p.66), a redução do pacote de ondas: *não pode ser descrita através de uma transformação unitária*⁵

Schwinger não entra no mérito destas questões inerentes ao processo de medidas, talvez porque seu foco seja outro: a criação da álgebra das medidas. Seria bastante elucidativo que no “Prólogo” de futuras edições do livro, fossem mencionados os pensamentos do Schwinger sobre estas questões. Apesar disto, que são apenas fatos muito pontuais, e talvez uma limitação da nossa leitura da obra, vemos que estas discussões, suscitadas pelo livro, tocam em pontos centrais da teoria quântica, por demais interessantes, atuais e que vão muito além das limitações deste Projeto. No âmbito restrito deste nosso estudo, a idéia original do Schwinger de desenvolver uma álgebra das medidas diretamente induzida a partir dos experimentos, é uma abordagem diferenciada para a MQ, inovadora e contribui para um aprofundamento maior das diferentes teorias de medidas quânticas. No seu desenvolvimento, os vetores de estados (ou as funções de onda), os operadores e os demais elementos que aparecem na matemática da MQ, vão surgindo passo a passo, sem a necessidade de que sejam de certa maneira impostos na teoria como algo “externo”, apenas com o argumento de que é adequado porque *funciona*. Assim, Schwinger foi além, desenvolveu um processo indutivo, onde a Matemática decorre da Física. Ficando como mais uma das suas contribuições para a Física dos nossos tempos.

Antes de irmos para o segundo tópico tratado, enfatizamos que os principais resultados diretos da MQ do Schwinger são:

- o estabelecimento de uma forma indutiva da cinemática quântica;
- uma dinâmica quântica descrita através de um único princípio, o qual foi criado por ele: o *Princípio Quântico da Ação*. Desta forma, completa-se um elo com a

⁵Ver os detalhes nas várias referências do A. Peres, que se opõe ao chamado “colapso”.

Mecânica Clássica, onde as equações de movimento do sistema são obtidas a partir de um princípio geral, o Princípio da Mínima Ação, também denominado Princípio de Hamilton. No caso quântico, Schwinger conseguiu também estabelecer um princípio geral, análogo, e que permite a dedução, tanto das relações de comutação como das equações de Heisenberg. Segundo nossos estudos, o PQA ainda tem muitos meandros a serem investigados, tanto nos aspectos relativistas, quanto nos aspectos não relativistas.

Um ponto interessante é que o PQA foi estabelecido pelo Schwinger no Physical Review em 1951 (ver em [20]), de forma axiomática, e utilizado em uma sucessão de trabalhos, onde estavam sendo estabelecidas, por ele, regras fundamentais para uma teoria quântica relativista, ou seja para a Teoria Quântica de Campos. Note que inusitadamente o PQA foi primeiramente estabelecido na sua forma relativista e somente depois (cerca de 10 anos) é que foi desenvolvido, pelo Schwinger, na sua contrapartida não-relativista. No seu livro de MQ, ele faz uma espécie de “dedução” deste princípio não-relativista a partir de resposta das amplitudes de probabilidades às translações infinitesimais no tempo. Uma interessante discussão de questões e de dificuldades existentes na formulação realizada pelo Schwinger pode ser encontrada em [4], onde se propõe uma modificação no Princípio.

É conveniente mencionarmos que a Mecânica Quântica usualmente tratada na maioria dos livros textos de graduação⁶, aborda questões referentes aos estados puros e a sua evolução Hamiltoniana. Sabe-se que este tratamento é limitado às situações idealizadas, conforme podemos ver na discussão realizada por V. E. Tarasov sobre as limitações da MQ nesta forma tradicional (ver detalhes em [12], no “Prefácio”, p.V). Seguindo este raciocínio, dizemos que os sistemas Hamiltonianos e estados puros podem ser considerados apenas como casos especiais de sistemas dinâmicos quânticos. Os sistemas fechados, isolados e Hamiltonianos são idealizações que não são observáveis e, portanto, não existem no mundo real. Como regra geral, qualquer sistema é sempre embutido em algum ambiente e, portanto, nunca é realmente fechado ou isolado. Freqüentemente, o ambiente relevante é em princípio não-observável ou desconhecido. Isto tornar a teoria de sistemas quânticos não-Hamiltonianos e dissipativos como uma generalização fundamental da Mecânica Quântica. Na teoria quântica tradicional, com sistemas Hamiltonianos, evolução unitária e estados puros, devemos destacar bem que estes são casos especiais de

⁶Temos que citar aqui várias exceções, por exemplo, Tarasov [12], Weiss [21], Prigogine [14] e outros.

uma abordagem generalizada. Podemos sintetizar estas idéias através de reflexões desenvolvidas pelo Prigogine ⁷: “As leis da física em sua formulação tradicional, descrevem um mundo idealizado, um mundo estável e não o mundo instável, evolutivo em que vivemos.

Segundo nosso entendimento, a álgebra das medidas na sua forma original elaborada pelo Schwinger, faz o cômputo global do processo, sem entrar em detalhes dos diferentes processos dissipativos envolvidos. Assim também o próprio Princípio Quântico da Ação, escrito através do Hamiltoniano do sistema, descreve, até certo ponto, casos particulares de casos concretos reais cuja a estrutura matemática, quando existente, é bem mais complexa, já que nem sempre podemos conseguir uma descrição Hamiltoniana ⁸. Conforme mencionamos anteriormente, há diversas tentativas neste sentido, por exemplo, o próprio livro do Tarasov citado acima, bem como os trabalhos do Grupo de Bruxelas do Prigogine. Aqui nesta nossa pequena empreitada inicial nos restringimos também a estes casos particulares, mas esperamos futuramente prosseguir no estudo que iniciamos recentemente de casos mais gerais, e considerados portanto mais reais de uma Mecânica Quântica aplicável a sistemas dissipativos não-Hamiltonianos (ver definições em [12]).

Finalmente mencionamos que nas perspectivas de um prosseguimento do trabalho realizado, tivemos discussões sobre uma possível aplicação do PQA à interação da radiação com a matéria, que pode ser estendida para a investigação de certos fenômenos da Astrofísica. Há modelos de certos processos dissipativos, da interação de moléculas com a radiação eletromagnética, onde se escreve um Hamiltoniano; este problema físico é tratado em ([24]). Esta situação física é muito semelhante a outras encontrados na Astrofísica, por exemplo, na interação do meio interestelar com a radiação. Há uma metodologia tradicional de quantização, cujo Hamiltoniano total é $H = \sum_{k=1}^m H_k + H_{int} + H_{EM}$, onde H_k é a parte referente às m moléculas, H_{int} representa a interação do dipolo induzido com o campo eletromagnético e H_{EM} é a parcela referente somente ao campo eletromagnético.

⁷Do livro “O Fim das Certezas - Tempo, Caos e Leis da Natureza” ([22], p.29).

⁸Sobre as limitações da abordagem padrão da MQ é bastante interessante ler uma afirmação do próprio von Neumann: “*I would like to make a confession which may seem immoral: I do not believe in Hilbert space any more.*” Detalhes desta citação estão em ([23], p.192). Sabemos que existe a formulação da mecânica quântica através “espaço de Hilbert estriado, ou generalizado” (*rigged Hilbert space*), a qual se propõe a ser uma teoria mais geral, mas que só se tornou possível após a nova matemática da teoria das distribuições e dos espaços topológicos lineares ter sido construída, isto se deu cerca de 30 anos depois de von Neumann. Há uma certa semelhança desta construção com a do Schwinger, pois ela é também uma idealização matemática das estruturas que se podem deduzir das observações físicas ver em ([23], p.197).

Neste exemplo, com Hamiltoniano definido, podemos investigá-lo através da metodologia do PQA, avaliando-se a possibilidade de serem obtidos resultados mais abrangentes que os provindos da metodologia usual.

Apêndice A

Álgebra

Apresentaremos além da estrutura de anel que está relacionada com a álgebra dos símbolos da medida, outras estruturas álgebricas relacionadas com a definição de anel.

Leis de Composição

Definição. Seja E um conjunto. Um mapeamento de $E \times E$ em E é dito uma *lei de composição* em E . O valor $f(x, y)$ para um par ordenado $(x, y) \in E \times E$ é chamado a composição de x e y sob esta lei. Um conjunto com uma lei de composição é chamado um *magma*.

A composição de x e y é usualmente denotada por escrever x e y em uma ordem definida e separando-os por um símbolo característico da lei em questão. Entre os símbolos mais usados comumente estão $+$ e \cdot , esta convenção pode ser omitida quando desejada.

Uma lei denotada pelo símbolo $+$ é normalmente chamada adição (a composição $x + y$, sendo chamada *soma* de x e y), a lei denotada pelo símbolo \cdot é usualmente chamada *multiplicação* (a composição $x \cdot y = xy$ sendo chamada de *produto* de x e y). Outros símbolos são denotados para leis de composição arbitrária T e \perp .

Exemplo. Os mapeamentos $(X, Y) \mapsto X \cup Y$ e $(X, Y) \mapsto X \cap Y$ são leis de composição no conjunto dos subconjuntos de um conjunto E .

Para maiores detalhes ver [25].

Ações

Definição. Seja Ω e E dois conjuntos. Um mapeamento Ω no conjunto E^E de mapeamentos de E em si mesmo, é chamado uma *ação* de Ω em E .

Seja $a \mapsto f_a$ uma ação de Ω em E . O mapeamento $(a, x) \mapsto f_a(x)$ (respectivamente $(x, a) \mapsto f_a(x)$) é chamado a *lei de ação a esquerda* (respectivamente *a direita*)¹ de Ω em E associada com a dada ação de Ω em E .

O elemento $f_a(x)$ de E (para $a \in \Omega$ e $x \in E$) é às vezes chamado a *transformada* de x sob a ou a *composição* de a e x . Também é frequentemente denotada pela notação de multiplicação a esquerda (resp. a direita) $a \cdot x$ (resp. $x \cdot a$), sendo que o ponto pode ser omitido, a composição de a e x é então chamada o produto de a e x . Outra notação utilizada é $a \perp x$. Os elementos de Ω são frequentemente chamados de *operadores*.

Exemplo. Seja E um conjunto. O mapeamento identidade de E^E é uma ação de E^E em E , chamada a *ação canônica*. A lei de ação correspondente é o mapeamento $(f, x) \mapsto f(x)$ de $E^E \times E$ em E .

Para maiores detalhes ver [25].

Grupos

Definição. Um conjunto com uma lei de composição associativa, possuindo um elemento identidade e sob o qual todo elemento é inversível, é dito ser um grupo.

Em outras palavras, um grupo G é um conjunto G com uma operação

$$G \times G \longrightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

satisfazendo as seguintes condições:

(i) A operação é associativa

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad \forall a, b, c \in G.$$

(ii) Existe um elemento identidade(neutro)

$$\exists e \in G \text{ tal que } e \cdot a = a \cdot e = a, \quad \forall a \in G.$$

(iii) Para cada elemento $a \in G$ existe um *elemento inverso* $a^{-1} \in G$ tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e.$$

¹Ou às vezes chamado a lei externa de composição em E com Ω como um conjunto operante.

O grupo é *abeliano* ou *comutativo* se:

(iv) A operação é comutativa, ou seja,

$$a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in G.$$

Exemplos.

- I. O conjunto \mathbb{Z} dos inteiros é um grupo com respeito à adição. A operação é associativa, zero é o elemento identidade, e $-a$ é o inverso de a .
- II. $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ são grupos (aditivos) abelianos.
- III. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ são grupos (multiplicativos) abelianos.

Para maiores detalhes ver [25], [26].

Anéis

Definição. Um anel é um conjunto A com duas leis de composição chamadas respectivamente adição e multiplicação, satisfazendo os seguintes axiomas:

- (I) Com respeito à adição A é um grupo comutativo (abeliano).
- (II) A multiplicação é associativa e possui um elemento identidade.
- (III) A multiplicação é distributiva com respeito à adição.

O anel A é dito ser comutativo se sua multiplicação é comutativa.

Segue que $(x, y) \mapsto x + y$ denota a adição e $(x, y) \mapsto xy$ a multiplicação, 0 denota o elemento identidade para a adição e 1 para a multiplicação. Finalmente, $-x$ denota o negativo de x com respeito à adição. Os axiomas de um anel são consequentemente expressos pelas seguintes identidades:

- (1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associatividade da adição)
- (2) $x + y = y + x$ (comutatividade da adição)
- (3) $0 + x = x + 0 = x$ (elemento identidade ou neutro)
- (4) $x + (-x) = (-x) + x = 0$ (elemento inverso)

(5) $x(yz) = (xy)z$ (associatividade da multiplicação)

(6) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (elemento identidade)

(7) $(x + y) \cdot z = xz + yz$

(8) $x \cdot (y + z) = xy + xz$

[(7) e (8) são distributivas].

Finalmente o anel A é comutativo se $xy = yx$ para todo $x, y \in A$.

Exemplos.

I. *Anel Nulo:* Seja A um anel. Para $0 = 1$ em A , é necessário e suficiente que A consista de um único elemento. A condição é suficiente, por outro lado, se $0 = 1$, então, para todo $x \in A$, $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$, um anel desse tipo é chamado anel nulo.

II. *Anel δ das funções reais:* Seja \mathbb{I} um intervalo no conjunto \mathbb{R} dos números reais e seja \mathbb{A} o conjunto das funções contínuas definida em \mathbb{I} com valores reais. A soma $f + g$ e o produto $f \cdot g$ de duas funções f e g são definidos por

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), (fg)(t) = f(t)g(t) (t \in \mathbb{I}).$$

III. Seja \mathcal{R} o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e definamos as leis de composição

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac, bc + d).$$

Uma checagem mostra que as definições de anel são satisfeitas. Sendo o elemento neutro da lei de composição da adição $(0, 0)$. O anel é não comutativo, mas sem elemento identidade com respeito a multiplicação é $(1, 0)$.

Para maiores detalhes ver [25], [27].

Corpos

Definição. Um anel $(K, +, \cdot)$ é chamado *corpo* se ele satisfaz a seguinte condição:

Todo elemento diferente de zero de K possui um inverso com respeito a multiplicação, isto é,

$$\forall x \in K \setminus \{0\}, \exists y \in K \text{ tal que } x \cdot y = 1.$$

Exemplos.

- (i) O conjunto dos números $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, são exemplos de corpos, sendo estes corpos comutativos.
- (ii) Seja $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, onde \mathbb{Q} corresponde aos números racionais, $\mathbb{Q}(i)$ é um corpo, cujas operações de adição e multiplicação são as usuais.

Para maiores detalhes ver [26].

Módulos

Definição. Seja A um anel. Um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ dotado de uma multiplicação escalar

$$A \times M \longrightarrow M$$

$$(a, m) \longmapsto a \cdot m$$

é dito um A -módulo se satisfaz os seguintes axiomas ($\forall a_1, a_2 \in A$ e $\forall m_1, m_2 \in M$):

- a) $\exists 1 \in A / 1 \cdot m_1 = m_1$
- b) $(a_1 a_2) \cdot m_1 = a_1 \cdot (a_2 \cdot m_1)$
- c) $(a_1 + a_2) \cdot m_1 = a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_1$
- d) $a_1 \cdot (m_1 + m_2) = a_1 \cdot m_1 + a_1 \cdot m_2$

Se $a \in A$ e $m \in M$, podemos também escrever am para denotar o elemento $a \cdot m$.

Exemplos. a) Seja $A = \mathbb{Z}$. Seja $(G, +)$ um grupo abeliano, onde definimos uma multiplicação escalar $\mathbb{Z} \times G \longrightarrow G$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{Z}, \forall g \in G, z \cdot g &= \underbrace{g + \dots + g}_{z \text{ vezes}} \text{ se } z \geq 0, \\ z \cdot g &= \underbrace{(-g) + \dots + (-g)}_{z \text{ vezes}} \text{ se } z \leq 0. \end{aligned}$$

Desse modo pode-se verificar que G é um \mathbb{Z} -módulo.

b) Se um conjunto A é um corpo, então a noção de A -módulo coincide com a de espaço vetorial.

Para maiores detalhes ver [26].

Espaços Vetoriais (Espaços Lineares)

Definição. Um *espaço vetorial* é um sistema algébrico (\mathcal{L}, K, \cdot) , onde \mathcal{L} é um grupo aditivo, K é um corpo comutativo, com uma lei de composição externa \cdot , sendo uma ação de K em \mathcal{L} , tal que $\forall \alpha \in K$ e $\forall x \in \mathcal{L} \exists$ um único elemento $y \in \mathcal{L}$: $\alpha x = y$, satisfazendo os seguintes axiomas:

- (ia) $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathcal{L}$.
- (ib) Existe um elemento $0 \in \mathcal{L}$ tal que $0 + x = x + 0 = x \quad \forall x \in \mathcal{L}$.
- (ic) Para todo $x \in \mathcal{L}$ existe um elemento $-x \in \mathcal{L}$ tal que $x + (-x) = 0$.
- (id) $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathcal{L}$.
- (iia) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall \alpha, \beta \in K$ e $\forall x \in \mathcal{L}$.
- (iib) $\epsilon x = x \quad \forall x \in \mathcal{L}$ (ϵ é a unidade de K).
- (iiia) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha \in K$ e $\forall x, y \in \mathcal{L}$.
- (iiib) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall \alpha, \beta \in K$ e $\forall x \in \mathcal{L}$.

Os elementos do conjunto \mathcal{L} são chamados *vetores*.

Exemplos.

- I. O conjunto $\mathcal{L} = \mathbb{R}$ dos números reais, com a adição usual sendo a adição vetorial e com $K = \mathbb{R}$ como o corpo dos escalares, é um espaço vetorial real, se a multiplicação escalar αx é definida pelo produto usual dos números reais. Chamamos este espaço de *espaço linear dos reais*. Similarmente, o conjunto $\mathcal{L} = \mathbb{C}$ dos números complexos, com a adição usual e com $K = \mathbb{C}$ como os escalares, é um espaço vetorial complexo, chamamos também de *espaço linear complexo dos números complexos*.

II. Seja o conjunto \mathbb{R}^n denotando o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ no qual os elementos estão ordenados pelas n -uplas (ξ_1, \dots, ξ_n) de números reais. Seja $K = \mathbb{R}$ e definimos a soma e o produto escalar

$$\begin{aligned} (\xi_1, \dots, \xi_n) + (\eta_1, \dots, \eta_n) &= (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n), \\ \alpha(\xi_1, \dots, \xi_n) &= (\alpha\xi_1, \dots, \alpha\xi_n). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

É evidente que as definições acima, satisfazem os axiomas de espaço vetorial. Este espaço, \mathbb{R}^n , é o *espaço vetorial real n-dimensional*.

Para maiores detalhes ver [27].

Álgebras

Definição. Uma *álgebra* A é um módulo sobre um anel R , com identidade junto com uma operação associativa interna, frequentemente chamada multiplicação tal que

- (1) A é um anel.
- (2) A operação externa $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ é tal que

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

Exemplo. Todo anel comutativo A pode ser considerado como uma (associatividade e comutatividade) A -álgebra.

Para maiores detalhes ver [28].

Aritimética Modular

Dizemos que dois inteiros a e b são congruentes módulo n se $a - b$ é um múltiplo de n ($a - b = kn, n > 0$). Se a e b são congruentes módulo n , escrevemos,

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Caso $a - b$ não seja um múltiplo de n , dizemos que a é *incongruente* a b módulo n .

Exemplos.

$$11 \equiv 3 \pmod{2}$$

$$11 - 3 = k2$$

$$k = 4$$

$$10 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$10 - 0 = k5$$

$$k = 2$$

$$14 \equiv 24 \pmod{5}$$

$$14 - 24 = k5$$

$$-20 = k5$$

$$k = -4$$

Proposição 1. Se a e b são inteiros, temos que $a \equiv b \pmod{n}$ se, e somente se, existir um inteiro k tal que $a = b + kn$.

Demonstração: Se a e b são inteiros, temos que $a \equiv b \pmod{n}$, então $a - b$ é divisível por n , isto implica na existência de um inteiro k tal que $a - b = kn$, isto é, $a = b + kn$. Para a volta, temos que se k existe, satisfazendo $a = b + kn$, tem-se $kn = a - b$, assim n divide $a - b$, que nos leva para $a \equiv b \pmod{n}$.

Proposição 2. Se a, b, c, n são inteiros, com $n > 0$, as seguintes asserções são verdadeiras:

1. $a \equiv a \pmod{n}$
2. Se $a \equiv b \pmod{n}$, então $b \equiv a \pmod{n}$
3. Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv d \pmod{n}$, então $a \equiv d \pmod{n}$.

Demonstração: (1.) Como n divide 0, sabendo-se que $a - a = 0$, logo n divide $(a - a)$, implicando que $a \equiv a \pmod{n}$.

(2.) Se $a \equiv b \pmod{n}$, então $a = b + k_1 n$ para algum inteiro k_1 , dessa forma $b = a - k_1 n$, o que implica pela **Proposição 1** que $b \equiv a \pmod{n}$.

(3.) Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$, então existem inteiros k_1 e k_2 tais que $a - b = k_1 n$ e $b - c = k_2 n$. Somando-se, membro a membro, as equações anteriores temos, $a - c = (k_1 + k_2) n$, implicando em $a \equiv c \pmod{n}$.

Esta **Proposição 2**, nos informa que a relação de congruência, definida no conjunto dos inteiros, é uma relação de equivalência, pois nesta proposição existem as propriedades

reflexiva, simétrica e transitiva.

Teorema 1. Se a, b, c e n são inteiros tais que $a \equiv b \pmod{n}$, então

1. $a + c \equiv b + c \pmod{n}$
2. $a - c \equiv b - c \pmod{n}$
3. $ac \equiv bc \pmod{n}$

Demonstração: (1.) Como $a \equiv b \pmod{n}$, temos que $a - b = kn$ e, assim, como $a - b = (a + c) - (b + c)$ tem-se $(a + c) - (b + c) = kn$, logo $a + c \equiv b + c \pmod{n}$.
 (2.) Temos por hipótese que $a - b = kn$, além disso, $a - b = (a - c) - (b - c)$, o que nos conduz para $(a - c) - (b - c) = kn \Rightarrow a - c \equiv b - c \pmod{n}$.
 (3.) Já que $a - b = kn$, então $c(a - b) = ck n \Rightarrow ac - bc = ck n$, nos informa que n divide $(ac - bc)$, portanto, $ac \equiv bc \pmod{n}$.

Teorema 2. Se a, b, c, d e n são inteiros tais que $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$, então

1. $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
2. $a - c \equiv b - d \pmod{n}$
3. $ac \equiv bd \pmod{n}$

Demonstração: (1.) Por hipótese $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$, assim temos, $a - b = k_1 n$ e $c - d = k_2 n$, o próximo passo é somar as duas últimas equações, obtendo-se $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d) = (k_1 + k_2) n$, implicando $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.
 (2.) Subtraindo-se os membros das equações $a - b = k_1 n$ e $c - d = k_2 n$, tem-se $(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d) = (k_1 - k_2) n \Rightarrow a - c \equiv b - d \pmod{n}$.
 (3.) Multiplicando-se ambos os lados de $a - b = k_1 n$ por c e ambos os lados de $c - d = k_2 n$ por b , obtendo-se $ac - bc = ck_1 n$ e $bc - bd = bk_2 n$. Em seguida, somamos os membros das igualdades anteriores, $ac - bc + bc - bd = ac - bd = (ck_1 + bk_2) n \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{n}$.

Para maiores detalhes ver [29].

Apêndice B

Contas referentes a Seção 3.4

Começamos por mostrar como obtemos a equação (3.54), utilizando-se (3.53), sendo assim

$$\begin{aligned}\langle a' | c' \rangle &= \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle \\ \langle a' | c' \rangle^* &= \langle c' | a' \rangle = \sum_{b'} \langle c' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(a', \mathbf{1}, c') &= |\langle a' | \mathbf{1} | b' \rangle|^2 = |\langle a' | (\sum_{b'} |b' \rangle \langle b'|) | c' \rangle|^2 = \\ &= \langle a' | (\sum_{b'} |b' \rangle \langle b'|) | c' \rangle \langle c' | (\sum_{b'} |b' \rangle \langle b'|) | a' \rangle = \\ &= \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle \sum_{b'} \langle c' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle = \langle a' | c' \rangle \langle c' | a' \rangle = \\ &= |\langle a' | c' \rangle|^2 = p(a', c').\end{aligned}$$

A equação (3.55) é mostrada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
p(a', b, c') &= |\langle a' | (\sum_{b'} |b'\rangle \langle b'|) |c'\rangle|^2 = \\
&= (\langle a' | b_1 \rangle \langle b_1 | c' \rangle + \dots + \langle a' | b_n \rangle \langle b_n | c' \rangle) (\langle c' | b_1 \rangle \langle b_1 | a' \rangle + \dots + \langle c' | b_n \rangle \langle b_n | a' \rangle) = \\
&= \langle a' | b_1 \rangle \langle b_1 | c' \rangle \langle c' | b_1 \rangle \langle b_1 | a' \rangle + \langle a' | b_2 \rangle \langle b_2 | c' \rangle \langle c' | b_2 \rangle \langle b_2 | a' \rangle + \dots + \\
&+ \langle a' | b_n \rangle \langle b_n | c' \rangle \langle c' | b_n \rangle \langle b_n | a' \rangle = \\
&= p(a', b_1)p(b_1, c') + \dots + p(a', b_n)p(b_n, c') + \underbrace{\sum_{b' \neq b''} \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle \langle c' | b'' \rangle \langle b'' | a' \rangle}_{=0} = \\
&= \sum_{b'} p(a', b')p(b', c').
\end{aligned}$$

Por tratar-se de uma medida não-seletiva, onde o aparelho de medição não seleciona nenhum átomo, é que o resultado de $p(a', b, c')$, é a soma de cada escolha independte de b' , com isto $\sum_{b' \neq b''} \langle a' | b' \rangle \langle b' | c' \rangle \langle c' | b'' \rangle \langle b'' | a' \rangle = 0$. O próximo resultado a ser apresentado é do conjunto equações (3.56)

$$\begin{aligned}
\sum_{c'} p(a', \mathbf{1}, c') &= \sum_{c'} p(a', c') = \sum_{c'} \langle a' | c' \rangle \langle c' | a' \rangle = \\
&= \langle a' | (\sum_{c'} |c'\rangle \langle c'|) |a'\rangle = \langle a' | \mathbf{1} | a' \rangle = \\
&= p(a', \mathbf{1}) = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{c'} p(a', b, c') &= \sum_{c'} \sum_{b'} p(a', b')p(b', c') = \sum_{c'} (\sum_{b'} \langle a' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle \langle b' | c' \rangle \langle c' | b' \rangle) \\
&= \sum_{c'} (\langle a' | b_1 \rangle \langle b_1 | a' \rangle \langle b_1 | c' \rangle \langle c' | b_1 \rangle + \dots + \langle a' | b_n \rangle \langle b_n | a' \rangle \langle b_n | c' \rangle \langle c' | b_n \rangle) = \\
&= (\langle a' | b_1 \rangle \langle b_1 | a' \rangle \langle b_1 | c_1 \rangle \langle c_1 | b_1 \rangle + \dots + \langle a' | b_1 \rangle \langle b_1 | a' \rangle \langle b_1 | c_n \rangle \langle c_n | b_1 \rangle) + \dots + \\
&+ (\langle a' | b_n \rangle \langle b_n | a' \rangle \langle b_n | c_1 \rangle \langle c_1 | b_n \rangle + \dots + \langle a' | b_n \rangle \langle b_n | a' \rangle \langle b_n | c_n \rangle \langle c_n | b_n \rangle) = \\
&= \langle a' | b_1 \rangle \langle b_1 | a' \rangle (\langle b_1 | c_1 \rangle + \dots + \langle b_1 | c_n \rangle \langle c_n | b_1 \rangle) + \dots + \\
&+ \langle a' | b_n \rangle \langle b_n | a' \rangle (\langle b_n | c_1 \rangle \langle c_1 | b_n \rangle + \dots + \langle b_n | c_n \rangle \langle c_n | b_n \rangle) = \\
&= \langle a' | b_1 \rangle \langle b_1 | a' \rangle \sum_{c'} \langle b_1 | c' \rangle \langle c' | b_1 \rangle + \dots + \langle a' | b_n \rangle \langle b_n | a' \rangle \sum_{c'} \langle b_n | c' \rangle \langle c' | b_n \rangle = \\
&= \sum_{b'} \langle a' | b' \rangle \langle b' | a' \rangle \sum_{c'} \langle b' | c' \rangle \langle c' | b' \rangle = \underbrace{\sum_{b'} p(a', b')}_{=1} \underbrace{\sum_{c'} p(b', c')}_{=1} = 1.
\end{aligned}$$

Nossas *contas* sobre as probabilidades em (3.56), (3.58) e (3.59), são vistas mais detalhadas para auxiliar no prosseguimento do capítulo como já dito

$$\begin{aligned}
p(\overbrace{+}^a, \overbrace{+}^c) &= \frac{1}{2} = |\langle \overbrace{+}^a | (|+) \langle (+| + |-) \langle (-|) | \overbrace{+}^c \rangle|^2 = \\
&= |\langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^c \rangle + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^c \rangle|^2 = \\
&= (\langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^c \rangle + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^c \rangle) \times \\
&\quad (\langle \overbrace{+}^c | \overbrace{+}^b \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \langle \overbrace{+}^c | \overbrace{-}^b \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a \rangle) = \\
&= \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^c \rangle \langle \overbrace{+}^c | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \\
&\quad \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^c \rangle \langle \overbrace{+}^c | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \\
&\quad + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^c \rangle \langle \overbrace{+}^c | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \\
&\quad \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^c \rangle \langle \overbrace{+}^c | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a \rangle = \\
&= p(\overbrace{+}^a, \overbrace{+}^b) p(\overbrace{+}^b, \overbrace{+}^c) + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^c \rangle \langle \overbrace{+}^c | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \\
&\quad + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^c \rangle \langle \overbrace{+}^c | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a \rangle + p(\overbrace{+}^a, \overbrace{-}^b) p(\overbrace{-}^b, \overbrace{+}^c) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^c \rangle \langle \overbrace{+}^c | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \\
&\quad \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^c \rangle \langle \overbrace{+}^c | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^c \rangle \langle \overbrace{+}^c | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \\
&\quad + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^c \rangle \langle \overbrace{+}^c | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a \rangle = \\
&= p(\underbrace{\overbrace{+}^a, b, \overbrace{+}^c}_{= \frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(\overbrace{+}^a, b, \overbrace{-}^c) &= \frac{1}{2} = |\langle \overbrace{+}^a | (|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|) | \overbrace{-}^c \rangle|^2 = \\
&= |\langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{-}^c \rangle + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{-}^c \rangle|^2 = \\
&= (\langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{-}^c \rangle + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{-}^c \rangle) \times \\
&\quad (\langle \overbrace{-}^c | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \langle \overbrace{-}^c | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a \rangle) = \\
&= \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{-}^c \rangle \langle \overbrace{-}^c | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \\
&\quad + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{-}^c \rangle \langle \overbrace{-}^c | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \\
&\quad + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{-}^c \rangle \langle \overbrace{-}^c | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \\
&\quad + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{-}^c \rangle \langle \overbrace{-}^c | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a \rangle = \\
&= p(\overbrace{+}^a, \overbrace{+}^b) p(\overbrace{+}^b, \overbrace{-}^c) + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{-}^c \rangle \langle \overbrace{-}^c | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \\
&\quad \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{-}^c \rangle \langle \overbrace{-}^c | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a \rangle + p(\overbrace{+}^a, \overbrace{-}^b) p(\overbrace{-}^b, \overbrace{-}^c) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{-}^c \rangle \langle \overbrace{-}^c | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \\
&\quad \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{-}^c \rangle \langle \overbrace{-}^c | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \frac{1}{2} \frac{1}{2}. \\
&\Rightarrow \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{-}^c \rangle \langle \overbrace{-}^c | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{+}^a \rangle + \\
&\quad + \langle \overbrace{+}^a | \overbrace{+}^b \rangle \langle \overbrace{+}^b | \overbrace{-}^c \rangle \langle \overbrace{-}^c | \overbrace{-}^b \rangle \langle \overbrace{-}^b | \overbrace{+}^a \rangle = \\
&= p(\underbrace{\overbrace{+}^a, b, \overbrace{-}^c}_{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] J. Schwinger, *Quantum Mechanics, Symbolism of Atomic Measurements*, Edited by Berthold-Georg Englert, Springer, New York, 2000;
- [2] H. P. Stapp, *Whitehead, James, and the Ontology of Quantum Theory*, Mind & Matter vol.5(1), pp. 83-109;
- [3] E. MacKinnon, *Schwinger and the Ontology of Quantum Field Theory*, Found. Sci. (2007) 12, 295-323;
- [4] Marcelo Carvalho and Alexandre Lyra, *The quantum action principle revisited*, Can. J. Phys. Vol.86, 703-712 (2008);
- [5] J. Mehra, K. Milton, *Climbing the Mountain, The Scientific Biography of Julian Schwinger*, Oxford University Press Inc. New York, 2000;
- [6] K. Gottfried, *Quantum Mechanics - Volume 1: Fundamentals*, W. A. Benjamin, Inc. New York, USA, 1996;
- [7] J. Schwinger, *Particles Sources and Fields*, Vol. 1 (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York, 1970);
- [8] Max Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics: The Interpretations of QM in historical perspective.*, John Wiley and Sons, 1974;
- [9] V. B. Braginsky, Y. I. Vorontsov, K. S. Thorne, *Quantum Nondemolition Measurements*, Science, Vol.209, 1 August 1980;
- [10] S. C. Coutinho, *Números Inteiros e Criptografia RSA*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada e Sociedade Brasileira de Matemática, pp.226, 2000;

- [11] J. Schwinger. In Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, *Lectures on Particles and Field Theory*. Edited by K. Johnson, D. B. Lichtenberg, J. Schwinger, and S. Weinberg. Englewood Cliffs, NJ. 1964. pp.144. ;
- [12] Vasily E. Tarasov, *Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems*, 1st Edition, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, 2008;
- [13] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, translated from German edition by Robert T. Beyer, Princeton, Princeton University Press, 1955, USA;
- [14] Ilya Prigogine, *From Being to Becoming*, 1st Edition, 1980, W. H. Freeman and Company, San Francisco USA;
- [15] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, New York, USA, 1976;
- [16] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1995;
- [17] A. Peres, *When is a quantum measurement ?*, Am. J. Phys., **54**, p.688;
- [18] A. Peres, *Can we undo quantum measurements ?*, Phys. Rev. D22, 879-893 (1980);
- [19] Karl Blum, *Density Matrix and Applications*, Second Edition, Plenum Press, New York and London, 1996;
- [20] J. Schwinger, *The Theory of Quantized Fields. I*, Physical Review, Volume 82, Number 6, June 15, 1951;
- [21] Ulrich Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, 3rd Edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 5 Toh Tuck Link, Singapore, 2008;
- [22] I. Prigogine, *O Fim das Certezas - Tempo, Caos e Leis da Natureza*, Editora UNESP, São Paulo, Brasil, 1996;
- [23] A. Bohm, H-D Doeblin, P. Kielanowski (Eds.), *Irreversibility and Causality, Semigroups and Rigged Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1998;

- [24] I. R. Senitzky, *Dissipation in Quantum Mechanics. The Harmonic Oscillator*, Physical Review, Volume 119, Number 2, p670, July 15, 1960;
- [25] Nicholas Bourbaki, *Elements of Mathematics Algebra I Chapters 1-3*, Hermann, Publishers In Arts And Science, 1974;
- [26] Arnaldo Garcia, Yves Lequain, *Elementos de Álgebra*, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002, 326pp. (Projeto Euclides);
- [27] Paul Roman, *Some Modern Mathematics For Physicists and Other Outsiders - An Introduction to Algebra, Topology, Functional Analysis (Volume 1)*, Pergamon Press Inc., 1975;
- [28] Yvone Choquet-Bruhat, *Analysis, Manifolds and Physics Part I: Basics*, Elsevier Science, 1977, 1982;
- [29] José Plínio de Oliveira Santos, *Introdução à Teoria dos Números*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998, 199pp. (Coleção Matemática Universitária);