



CARACTERIZAÇÃO DE ALGUMAS  
PARTICULARIDADES DINÂMICAS DO  
ASTERÓIDE THULE  
Projeto Final do Curso de Graduação em  
Astronomia

*Jorge Márcio Ferreira Carvano*

Orientadora: Sueli Aparecida Guillens

Observatório do Valongo - UFRJ  
Janeiro de 1996

## Resumo

Este trabalho visa a caracterização de alguns aspectos dinâmicos do asteroide Thule, através da integração numérica das equações exatas do movimento correspondentes ao problema restrito de três corpos e da aplicação do modelo simplificado para a ressonância de primeira ordem (Sessin-Bressane, 1988). A integração é realizada através de um mapeamento simplético e de um integrador convencional (Bulirsch-Stoer), objetivando a possibilidade de maiores informações sobre a complexidade e a regularidade exibida pelo movimento.

Durante o processo de integração numérica, valores das constantes do movimento associadas ao modelo integrável são calculados e posicionados no diagrama que norteia a classificação global do espaço de fase (Sessin, 1981). Este procedimento foi proposto por S. Guillens *et al* (1994) no estudo da ressonância 3:1 e resultados promissores vem sendo obtidos, como por exemplo, uma explanação para a zona de incerteza de Wisdom, que é considerada a principal responsável pela existência de caos em grande escala. Tal fato motivou a proposta deste projeto.

Aqui, um fato interessante foi constatado, a conhecida característica de libração-circulação (Tsuchida, 1988, Stuchi, 1991) foi reproduzida, quando da utilização do mapeamento simplético. Porém, a análise evolutiva das constantes do modelo, no diagrama de integrais primeiras, mostra que tal circulação é na verdade uma circulação paradoxal, ou seja, a mudança de regimes se realiza sem o cruzamento de separatrizes, durante todo o intervalo de tempo considerado na integração numérica. A configuração do espaço de fase em cada ponto é sempre a mesma que aquela obtida com a aplicação usual do modelo simplificado.

## ÍNDICE

|                                                                                                            |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUÇÃO .....                                                                                           | 1  |
| CAPÍTULO 1 - MODELO SIMPLIFICADO PARA A RESSONÂNCIA DE 1 <sup>ª</sup> ORDEM .....                          | 2  |
| CAPÍTULO 2 - MAPEAMENTO SIMPLÉTICO DE 4 <sup>ª</sup> ORDEM PARA O PROBLEMA<br>RESTRITO DE TRÊS CORPOS..... | 12 |
| CAPÍTULO 3 - INVESTIGAÇÃO DINÂMICA DO ASTERÓIDE (279) THULE .....                                          | 16 |
| 3.1 - O MODELO SIMPLIFICADO APLICADO A (279) THULE .....                                                   | 16 |
| 3.2- INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES EXATAS DO MOVIMENTO.....                                                      | 17 |
| 3.3 - EVOLUÇÃO DE THULE NO PLANO (E,G) .....                                                               | 18 |
| 3.4 - CONCLUSÃO .....                                                                                      | 19 |
| APÊNDICE A - RESUMO DA CLASSIFICAÇÃO DE $P(\xi)$ . .....                                                   | 31 |
| APÊNDICE B - MAPEAMENTOS SIMPLÉTICOS.....                                                                  | 34 |
| APÊNDICE C - OBTENÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS A PARTIR DE POSIÇÃO E<br>VELOCIDADE.....                      | 36 |
| BIBLIOGRAFIA .....                                                                                         | 38 |

## Introdução

O modelo simplificado para ressonâncias de primeira ordem é utilizado, diretamente, através do cálculo das integrais primeiras  $(\overline{E}, \overline{G})$  a partir das condições iniciais adotadas para o asteroide Thule (ressonância 4:3), e de maneira indireta, como suporte para uma descrição qualitativa da trajetória a partir da evolução das séries temporais  $\overline{E}(t)$  e  $\overline{G}(t)$ . Assim, uma descrição sucinta da obtenção da hamiltoniana média que o representa é apresentada no capítulo 1, bem como a classificação geral do espaço de fase correspondente.

No capítulo 2 são colocados os aspectos principais envolvendo a construção do mapeamento simplético de 4ª ordem para as equações exatas do movimento (problema restrito de 3 corpos).

Finalmente, no capítulo 3, estão apresentados os resultados que evidenciam particularidades da complexa trajetória exibida por Thule, bem como a regularidade observada em seu movimento.

## Capítulo 1 - Modelo Simplificado para a Ressonância de 1ª Ordem

O modelo consiste em uma hamiltoniana média simplificada (Sessin-Bressane, 1988) que fornece uma descrição qualitativa do movimento de asteróides associados às ressonâncias de primeira ordem. Esta hamiltoniana é truncada na primeira ordem na excentricidade do asteróide e de Júpiter. Os termos de longo período em ambas as excentricidades não são considerados.

Aqui será descrito o processo de obtenção da referida hamiltoniana que viabiliza soluções analíticas correspondentes ao problema restrito de três corpos planar próximo a uma ressonância de primeira ordem.

O ponto de partida é a consideração da hamiltoniana associada ao problema restrito de três corpos:

$$F = F_0 + F_1 \quad ,$$

onde

$$F_0 = \frac{\mu^2}{2L^2}$$

é a integral da energia associada ao movimento elíptico, e  $F_1$  é a função perturbadora para o caso coplanar, com termos de até primeira ordem na excentricidade (Brower, 1961):

$$F_1 = \frac{m_J}{M + m_J} \frac{\mu_J^2}{L_J^2} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \cos[j(\lambda - \lambda_J)] + \frac{e}{2} (-2j - D) b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \cos[(j-1)\lambda - j\lambda_J + \varpi] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e_J}{2} (1 + 2j + D) b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \cos[j\lambda - (j+1)\lambda_J + \varpi_J] \right\} - \frac{\alpha}{2} e \cos(2\lambda - \lambda_J - \varpi) - \alpha \cos(\lambda - \lambda_J) \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \alpha e \cos(\lambda_J - \varpi) - 2\alpha e_J \cos(\lambda - 2\lambda_J + \varpi_J) \right\} \quad ,$$

onde

$M$  - massa do Sol

$k$  - constante de Gauss

$$\mu = k^2 M$$

$$\mu_J = k^2 (M + m_J)$$

$$L = \sqrt{\mu a}$$

$$G - L = L(\sqrt{1 - e^2} - 1)$$

$$e = \sqrt{1 - \left( \frac{G - L}{L} + 1 \right)^2}$$



$\alpha = \frac{a}{a_J}$  - razão entre os semi-eixos maiores do asteróide e de Júpiter

$b_{1/2}^k = b_{1/2}^k(\alpha)$  -  $k$  - esimo coeficiente de Laplace

$$D = a \frac{\partial}{\partial a} .$$

É conveniente ressaltar que todos os termos com índice  $J$  se referem a Júpiter.

Este sistema não é autônomo, pois o parâmetro  $\lambda_J$  é uma função do tempo. É necessário estender o espaço de fase introduzindo na hamiltoniana o momento  $\Phi$ , o qual é canonicamente conjugado a  $\lambda_J$ :

$$F = -n_J \Phi + \frac{\mu^2}{2L^2} + F_1,$$

O sistema autônomo é canônico nas variáveis  $(L, \Phi, G - L, \lambda, \lambda_J, \varpi)$  e apresenta três graus de liberdade.

Uma transformação canônica de contato é utilizada para que o ângulo crítico:

$$\theta = p\lambda - (p+1)\lambda_J$$

seja uma nova coordenada. O novo conjunto de variáveis será denotado por  $(x, \phi', y, \lambda', \theta, \varpi')$  e a função geradora é dada por:

$$f_2 = (p\lambda - (p+1)\lambda_J)\phi' + \lambda x + \varpi y,$$

cujas equações de transformação são:

$$\begin{aligned} x &= L + \frac{p}{(p+1)}\Phi & \lambda' &= \lambda \\ \phi' &= -\frac{1}{(p+1)}\Phi & \theta &= p\lambda - (p+1)\lambda_J \\ y &= G - L & \varpi' &= \varpi \end{aligned} .$$

O ângulo crítico está associado aos pequenos divisores:

$$k(pn - (p+1)n_J) \approx 0, k \in \mathbb{Z}^*,$$

que aparecem nos tratamentos analíticos clássicos de perturbação.

Agora, o próximo passo é o procedimento clássico da eliminação dos termos de curto período. Assim sendo o sistema dinâmico é reduzido a dois graus de liberdade, uma vez que a variável  $\lambda$  é ignorável.

Deste modo, a hamiltoniana adquire a forma :

$$F = n_j(p+1)\phi' + \frac{\mu^2}{2(x+p\phi')^2} + \frac{m_j}{M+m_j} \frac{\mu_j^2}{L_j^2} \left\{ -\frac{e}{2} A_3 \cos[\theta + \varpi] + \frac{e_j}{2} A_4 \cos[\theta + \varpi_j] \right\}$$

onde

$$A_3 = (2p+2)A_0^{p+1} + A_1^{p+1}$$

$$A_4 = (2p+1)A_0^p + A_1^p - \delta_{1p} 4\alpha ,$$

sendo

$$A_0^j = b_{1/2}^j$$

$$A_1^j = D b_{1/2}^j(\alpha_R)$$

$$\delta_{ij} - \text{delta de Kronecker} .$$

A condição de ressonância exata é dada por

$$\frac{\partial F_0}{\partial \phi'} = 0 ,$$

com

$$F_0 = n_j(p+1)\phi' + \frac{\mu^2}{2(x+p\phi')^2} .$$

Deste modo, a vizinhança da ressonância exata é dada por:

$$n_j(p+1) - p \frac{\mu^2}{(x+p\phi')^3} \approx 0$$

Na ressonância exata os valores para  $L, \alpha$  e  $\phi'$  são:

$$L_R = \sqrt[3]{\frac{p}{p+1} \frac{\mu^2}{n_j}}$$

$$\alpha_R = \sqrt[3]{\left(\frac{p}{p+1}\right)^2 \frac{M}{M+m_j}}$$

$$\phi'_R = \frac{1}{p} \left( \sqrt[3]{\frac{p}{p+1} \frac{\mu^2}{n_j}} - x \right) .$$

Uma transformação canônica envolvendo o par  $(\phi', \theta)$  é realizada, a saber:

$$\phi = \phi' - \phi_R ,$$

sendo que  $\phi = 0$  corresponde à ressonância exata .

As seguintes hipóteses são consideradas:

$$\frac{\phi}{L_R} \approx \sigma \left( \sqrt{\frac{m_J}{M}} \right) \quad e^2 \approx e_J^2 \approx \sigma \left( \sqrt{\frac{m_J}{M}} \right).$$

Definindo  $e_R'^2 = -\frac{2y}{L_R}$ , os desenvolvimentos em séries de  $e^2$ ,  $e$ , e  $F_0$  em potências de  $\frac{\phi}{L_R}$  são dadas por:

$$\begin{aligned} e^2 &= e_R'^2 \left\{ 1 - \frac{e_R'^2}{4} + p \left( \frac{e_R'^2}{2} - 1 \right) \frac{\phi}{L_R} + \dots \right\} \\ e &= e_R' \left\{ 1 - \frac{e_R'^2}{8} + \frac{p}{2} \frac{\phi}{L_R} + \dots \right\} \\ F_0 &= (p+1)n_j\phi_R + \frac{\mu^2}{2L_R^2} + \frac{3\mu^2}{2L_R^2} p^2 \left( \frac{\phi}{L_R} \right)^2 - \dots \end{aligned}$$

A hamiltoniana nas vizinhanças da ressonância pode então, numa primeira instância, ser representada por:

$$F = \frac{3\mu^2}{2L_R^2} p^2 \left( \frac{\phi}{L_R} \right)^2 + \frac{m_J}{M+m_J} \frac{\mu_J^2}{L_J^2} \left\{ -\frac{e_R'}{2} A_3 \cos[\theta + \varpi] + \frac{e_J}{2} A_4 \cos[\theta + \varpi_J] \right\}.$$

Realizando uma mudança na escala de tempo,  $\tau = \frac{1}{2} \frac{M}{M+m_J} n_J^2 a_J^2 t$ , e considerando que  $A_3$  e  $A_4$  são calculados para  $\alpha = \alpha_R$ , se obtém:

$$F = \frac{3}{\alpha_R} p^2 \left( \frac{\phi}{L_R} \right)^2 + \frac{m_J}{M} \left\{ -e_R' A_3 \cos[\theta + \varpi] + e_J A_4 \cos[\theta + \varpi_J] \right\}.$$

As equações do movimento associadas a esta representação simplificada são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{m_J}{M} [A_3 e_R' \sin(\theta + \varpi) - A_4 e_J \sin(\theta + \varpi_J)] \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{m_J}{M} A_3 e_R' \sin(\theta + \varpi) \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= -\frac{6p^2}{\alpha_R L_R^2} \phi \\ \frac{d\varpi}{d\tau} &= -\frac{m_J}{M} \frac{A_3}{L_R e_R'} \cos(\theta + \varpi) \end{aligned}$$



Como primeiro passo para a integração analítica, as seguintes variáveis são introduzidas:

$$\begin{aligned} h &= e'_R \sin(\theta + \varpi) & k &= e'_R \cos(\theta + \varpi) \\ h_J &= e_J \sin(\theta + \varpi_J) & k_J &= e_J \cos(\theta + \varpi_J) , \\ \xi &= \frac{\phi}{L_R} & \Lambda &= \frac{3p^2}{\alpha_R L_R} (\tau - \tau_0) \end{aligned}$$

Com tais variáveis, é obtido o sistema não canônico de equações do movimento:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\Lambda} &= Dh - D_J h_J & \frac{d\theta}{d\Lambda} &= -2\xi \\ \frac{dh}{d\Lambda} &= -D - 2\xi k & \frac{dk}{d\Lambda} &= 2\xi h \\ \frac{dh_J}{d\Lambda} &= -2\xi k_J & \frac{dk_J}{d\Lambda} &= 2\xi h_J , \end{aligned}$$

onde

$$D = \frac{m_J}{M} \frac{A_3 \alpha_R}{3p^2} \quad D_J = \frac{m_J}{M} \frac{A_4 \alpha_R}{3p^2} .$$

Este sistema é superabundante, pois tanto  $h_J$  e  $k_J$  quanto  $\frac{d\theta}{d\Lambda}$  dão a variação de  $\theta$  em relação a  $\Lambda$ .

A seguir são introduzidas as variáveis:

$$H = Dh - D_J h_J \quad K = Dk - D_J k_J ,$$

as quais vão propiciar a integrabilidade do sistema.

Agora, o sistema anterior adquire a forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\Lambda} &= H & \frac{d\theta}{d\Lambda} &= -2\xi \\ \frac{dH}{d\Lambda} &= -D^2 - 2\xi K & \frac{dK}{d\Lambda} &= 2\xi H , \end{aligned}$$

com as integrais primeiras  $E$  e  $G$  dadas por:

$$\xi^2 - K = E \quad H^2 + K^2 = -2D^2(\xi - G),$$

Com isso, o problema se reduz a

$$\frac{d\xi}{d\Lambda} = \pm \sqrt{-P(\xi)} \quad , \quad P(\xi) = \xi^4 - 2E\xi^2 + 2D^2\xi + (E^2 - 2D^2G).$$

A partir da solução para  $\xi$  acha-se as soluções para  $\theta$ ,  $H$  e  $K$ :

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 - 2 \int_0^\Lambda \xi d\Lambda \\ H &= \pm \sqrt{-P(\xi)} \\ K &= \xi^2 - E \quad . \end{aligned}$$

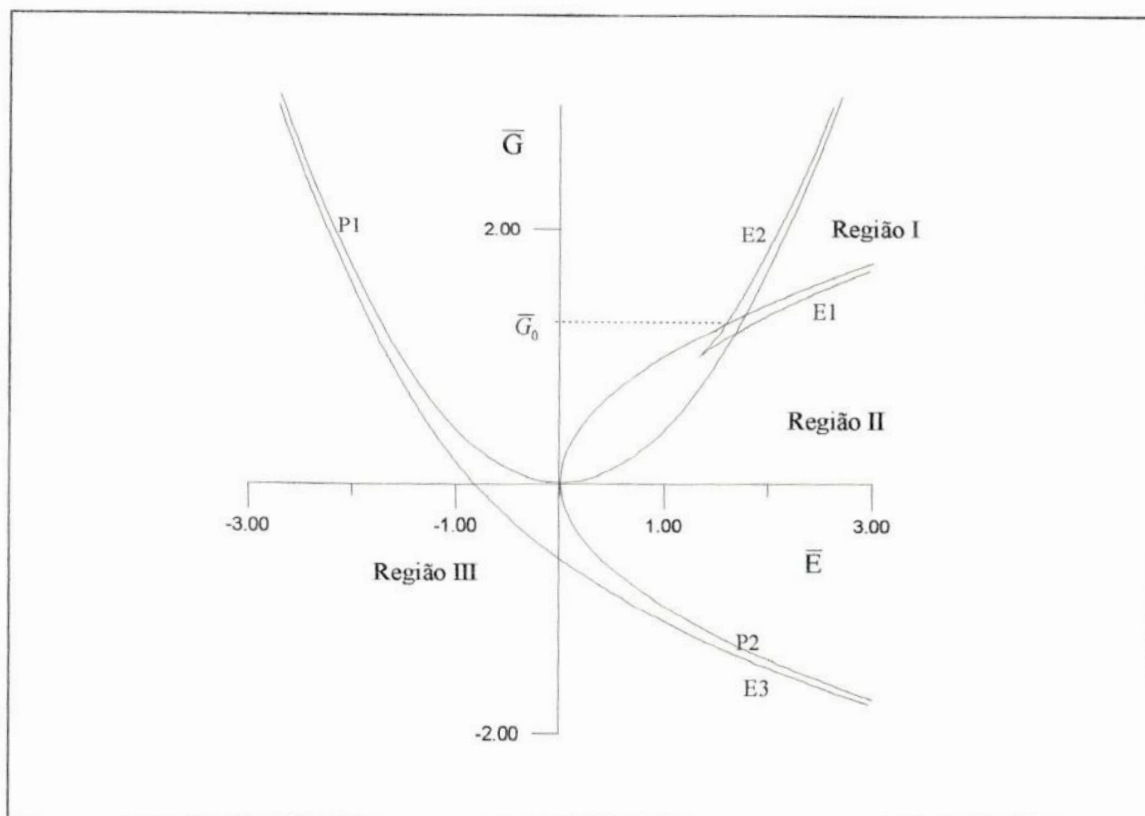
As trajetórias  $H(K)$  correspondentes são dadas por:

$$H(K) = \pm \sqrt{Q(K)} \quad \text{e} \quad Q(K) = -K^2 \pm 2D^2\sqrt{K+E} + 2D^2G = -P(\xi).$$

$Q(K)$  corresponde aos polinômios  $Q_+(K)$  e  $Q_-(K)$ , que por sua vez correspondem, respectivamente, a valores negativos e positivos de  $\xi$ .

O tipo de solução para  $\xi$  depende de um estudo das raízes do polinômio  $P$ , que é função das constantes  $G$  e  $E$ . As curvas correspondentes às raízes do polinômio dividem o plano das integrais primeiras  $(E, G)$  em regiões com possibilidades de movimento distintas. Sessin (1981) elaborou um estudo detalhado de  $P(\xi)$ , bem como de  $Q(K)$ , resultando numa classificação global do espaço de fase em função dos valores da integral extra  $G$ . Um rápido resumo dos métodos envolvidos na classificação se encontra no apêndice A.

A figura 1.1 mostra o plano das integrais primeiras com a normalização sugerida por Sessin (apêndice A). As curvas  $\bar{E}_1, \bar{E}_2$  e  $\bar{E}_3$ , onde ocorrem raízes múltiplas de  $P(\xi)$ , dividem o plano  $(\bar{E}, \bar{G})$  em três regiões. Na região III, abaixo da curva  $\bar{E}_3$ ,  $P(\xi)$  possui 4 raízes complexas e portanto não há movimento associado a valores de  $\bar{E}$  e  $\bar{G}$  nesta região. Na região I, entre as curvas  $\bar{E}_2$  e  $\bar{E}_3$ ,  $P(\xi)$  tem 4 raízes reais e na região II, que abrange o restante do plano,  $P(\xi)$  tem duas raízes reais e duas complexas. Estão representadas também as parábolas  $P_1: E^2 = 2D^2G$  e  $P_2: G^2 = E$  (normalizadas), as quais são curvas auxiliares utilizadas por Sessin para a referida classificação do espaço de fase reduzido.



**figura 1.1- classificação do plano  $EG$**

As diversas configurações possíveis para o espaço de fase são mostradas nas figuras 1.2-1.5.

Basicamente, as trajetórias  $(H,K)$  correspondem a *librações* ou *circulações*. Dessa forma, as curvas do tipo 2 e 5 representam regimes de *circulação*, enquanto as curvas do tipo 1 e 4 representam *librações*. As curvas do tipo 3 são *separatrizes*, que separam curvas com topologias distintas. As separatrizes estão associadas à curva  $\bar{E}_2$  do plano  $EG$ . Conforme sua disposição em relação à separatriz, as circulações são ainda classificadas em *circulação externa* (curvas 5) e *circulação interna* (curvas 2).

As curvas do tipo 1 são consideradas *librações paradoxais*, uma vez que, embora suas formas sejam características de librações, essas curvas são na verdade continuções analíticas de circulações externas.

As curvas do tipo 2 são também chamadas por Sessin de *circulações paradoxais*, pois apesar de corresponderem a um movimento onde  $\sigma$  circula, essas curvas pertencem à mesma família topológica que as curvas do tipo 4.

Nas figuras 1.5 e 1.6 não existem separatrizes, de modo que todas as curvas representadas, quer representem libração ou circulação do ângulo  $\sigma$ , pertencem a uma mesma família topológica. Aqui, a separação entre regimes de libração e circulação está associada à parábola  $P_2$ , introduzida por Sessin para a classificação do plano  $EG$ .

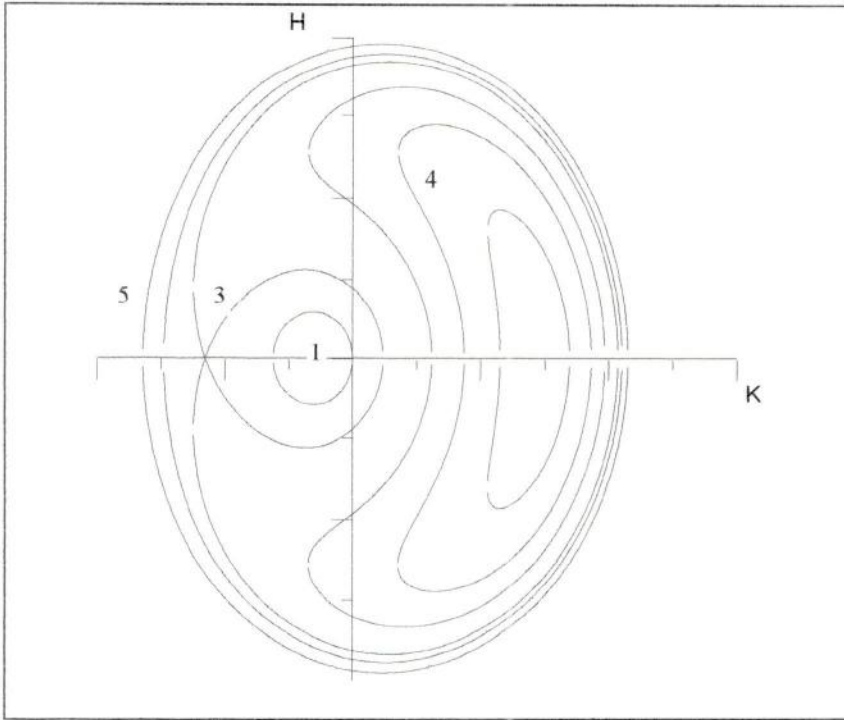


figura 1.2 -  $\overline{G} > \overline{G}_0$

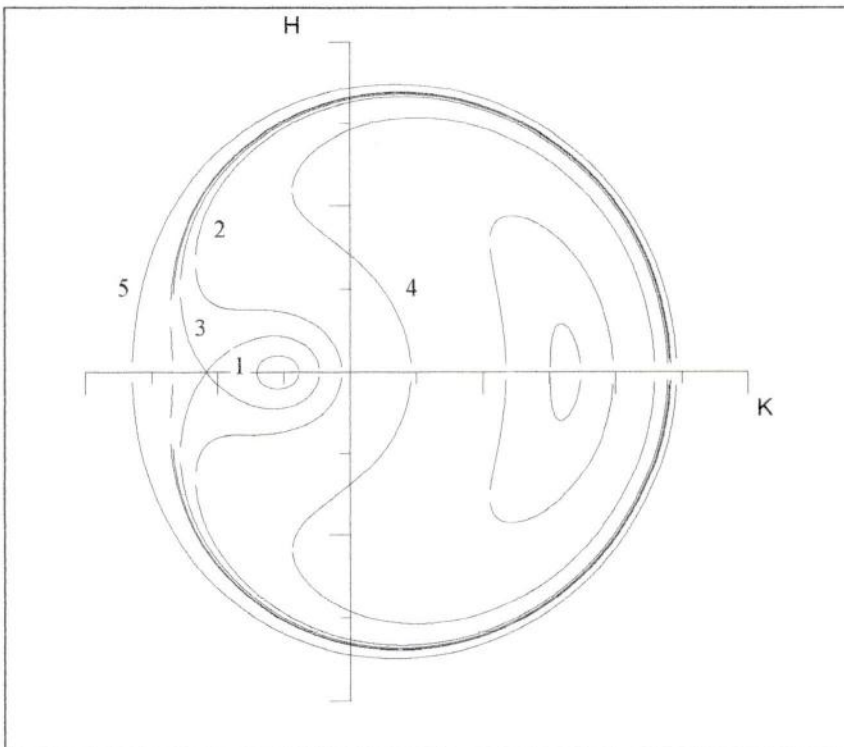


figura 1.3 -  $1 < \overline{G} < \overline{G}_0$

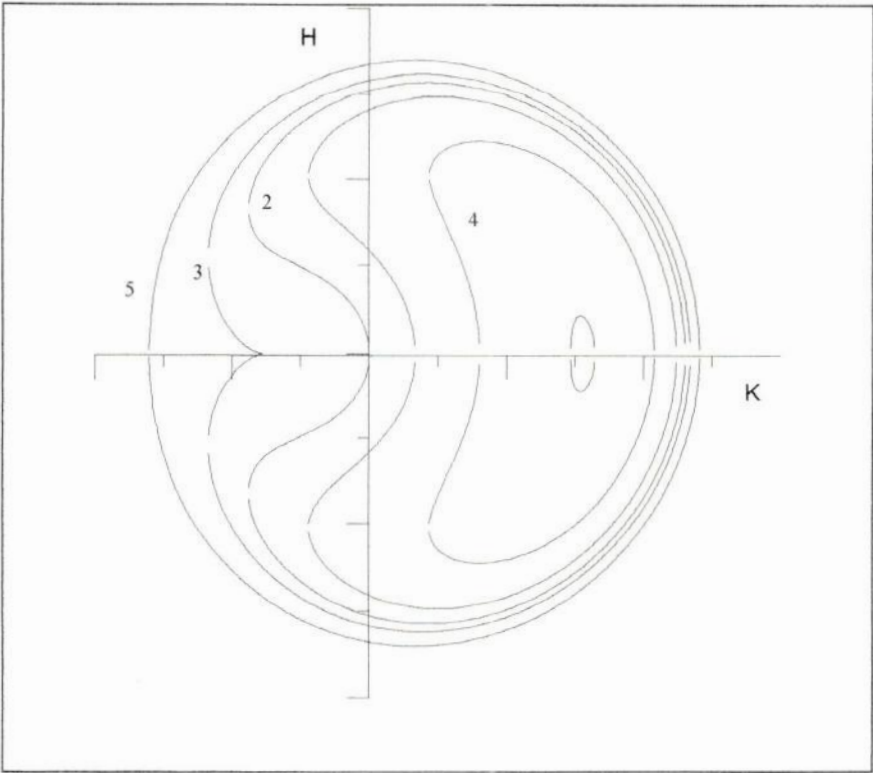


figura 1.4 -  $\overline{G} < 1$

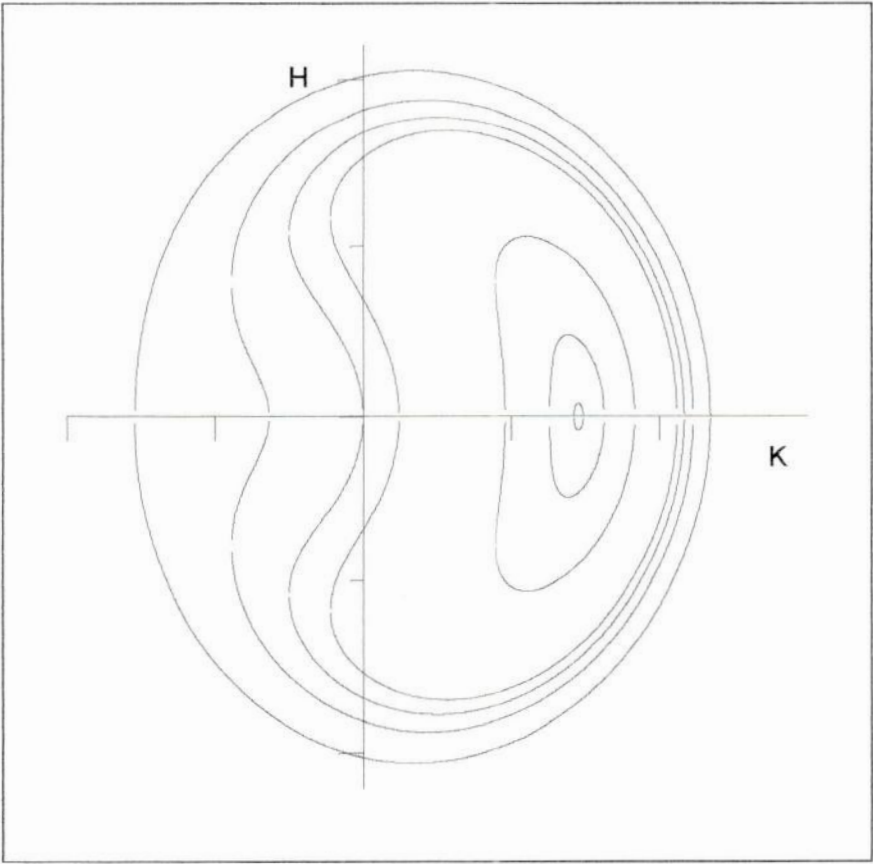
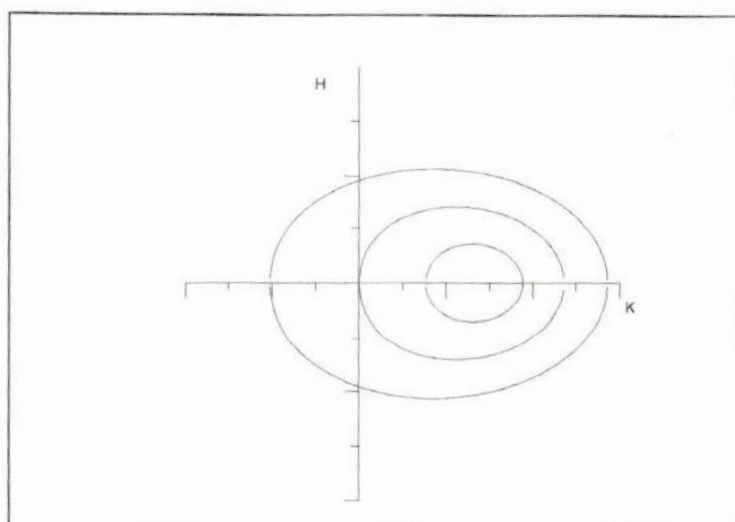


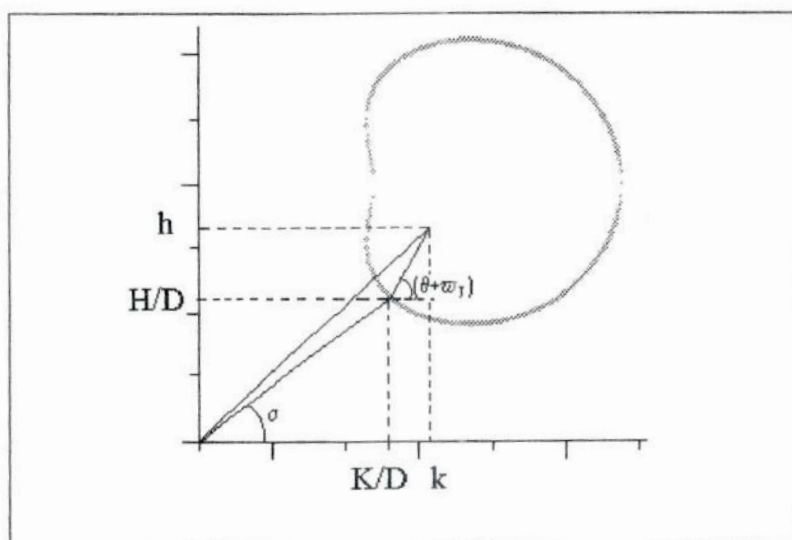
figura 1.5 -  $0 < \overline{G} < 1$





*figura 1.6 -  $\overline{G} < 0$*

As trajetórias  $h(k)$  são obtidas a partir de  $H(K)$  adicionando-se a oscilação harmônica com amplitude proporcional a  $e_j$  e argumento  $(\theta + \varpi_j)$ , como ilustrado na figura 1.7.



*figura 1.7 - composição de movimentos no plano  $hk$*

## Capítulo 2 - Mapeamento Simplético de 4ª Ordem para o Problema Restrito de Três Corpos

A hamiltoniana do problema restrito de 3 corpos em coordenadas cartesianas é

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \\ - k^2 m_J \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 + (z - z_J)^2}} - \frac{xx_J + yy_J + zz_J}{(x_J^2 + y_J^2 + z_J^2)^{3/2}} \right],$$

onde  $x, y, z$  são as coordenadas cartesianas do asteróide,  $p_x, p_y$  e  $p_z$  são os momentos canonicamente conjugados às coordenadas;  $x_J, y_J$  e  $z_J$  são as coordenadas cartesianas de Júpiter e entram aqui como parâmetros. Por conta da dependência explícita de  $x_J, y_J$  e  $z_J$  em  $t$ , o sistema não é autônomo. Os parâmetros  $x_J, y_J$  e  $z_J$  também podem ser escritos como funções da anomalia média  $l_J$ , de modo que podemos escrever

$$H = H(x, y, z, l_J, p_x, p_y, p_z, p_{l_J})$$

onde  $p_{l_J}$  é o momento conjugado a  $l_J$ , e não aparece na hamiltoniana. Fazendo uma transformação canônica gerada por

$$F_3(x, y, z, l_J, p_x, p_y, p_z, p_{l_J}) = -x p_x - y p_y - z p_z - n_J(t - T) p_{l_J}$$

e com equações de transformação

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_x} = x & p_x &= -\frac{\partial F_3}{\partial x} = p_x \\ Y &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_y} = y & p_y &= -\frac{\partial F_3}{\partial y} = p_y \\ Z &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_z} = z & p_z &= -\frac{\partial F_3}{\partial z} = p_z \\ L_J &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_{l_J}} = n_J(t - T) = l_J & p_{l_J} &= -\frac{\partial F_3}{\partial l} = p_{l_J} \end{aligned}$$

obtemos como nova hamiltoniana

$$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} = H - n_J p_{l_J}.$$

$$H' = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - n_J p_{l_J} - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} +$$

$$- k^2 m_J \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x_J)^2 + (y-y_J)^2 + (z-z_J)^2}} - \frac{xx_J + yy_J + zz_J}{(x_J^2 + y_J^2 + z_J^2)^{3/2}} \right]$$

Este novo sistema é autônomo.

Esta hamiltoniana é da forma  $H = A(p) + V(q)$ . Um mapeamento simplético de 4ª ordem de Yoshida (Stuchi, 1993) é dado por:

$$\begin{cases} q_i^{k+1} = q_i^k - c_k \frac{\partial}{\partial p_i} A(\vec{p}^k) \delta t \\ p_i^{k+1} = p_i^k + d_k \frac{\partial}{\partial q_i} V(\vec{q}^{k+1}) \delta t \end{cases}, \quad k = 0, \dots, 3$$

Uma rápida explanação sobre mapeamentos simpléticos é oferecida no apêndice

B.

No caso em questão, as funções  $A$  e  $V$  são

$$A(\vec{p}) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - n_J p_{l_J}$$

$$V(\vec{q}) = -\frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - k^2 m_J \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x_J)^2 + (y-y_J)^2 + (z-z_J)^2}} - \frac{xx_J + yy_J + zz_J}{(x_J^2 + y_J^2 + z_J^2)^{3/2}} \right]$$

Suas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial A}{\partial p_x} = p_x \quad \frac{\partial A}{\partial p_y} = p_y \quad \frac{\partial A}{\partial p_z} = p_z \quad \frac{\partial A}{\partial p_{l_J}} = -n_J$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\mu x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{k^2 m_J (x - x_J)}{\left[ (x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 + (z - z_J)^2 \right]^{3/2}} + \frac{k^2 m_J x_J}{(x_J^2 + y_J^2 + z_J^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\mu y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{k^2 m_J (y - y_J)}{\left[ (x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 + (z - z_J)^2 \right]^{3/2}} + \frac{k^2 m_J y_J}{(x_J^2 + y_J^2 + z_J^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\mu z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{k^2 m_J (z - z_J)}{\left[ (x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 + (z - z_J)^2 \right]^{3/2}} + \frac{k^2 m_J z_J}{(x_J^2 + y_J^2 + z_J^2)^{3/2}}$$

Consideraremos  $x_J, y_J$  e  $z_J$  como funções da anomalia média  $l_J$ , que é nossa quarta variável. Temos então

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial l} = & \left[ -\frac{k^2 m_J (x - x_J)}{\left[ (x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 + (z - z_J)^2 \right]^{3/2}} + k^2 m_J \left( \frac{x}{(x_J^2 + y_J^2 + z_J^2)^{3/2}} - 3 \frac{xx_J + yy_J + zz_J}{(x_J^2 + y_J^2 + z_J^2)^{5/2}} \right) \right] \frac{dx_J}{dl_J} + \\ & + \left[ -\frac{k^2 m_J (y - y_J)}{\left[ (x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 + (z - z_J)^2 \right]^{3/2}} + k^2 m_J \left( \frac{y}{(x_J^2 + y_J^2 + z_J^2)^{3/2}} - 3 \frac{xx_J + yy_J + zz_J}{(x_J^2 + y_J^2 + z_J^2)^{5/2}} \right) \right] \frac{dy_J}{dl_J} + \\ & + \left[ -\frac{k^2 m_J (z - z_J)}{\left[ (x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 + (z - z_J)^2 \right]^{3/2}} + k^2 m_J \left( \frac{z}{(x_J^2 + y_J^2 + z_J^2)^{3/2}} - 3 \frac{xx_J + yy_J + zz_J}{(x_J^2 + y_J^2 + z_J^2)^{5/2}} \right) \right] \frac{dz_J}{dl_J} \end{aligned}$$

Agora as coordenadas cartesianas de Júpiter podem ser obtidas de seus elementos orbitais através das expressões

$$\begin{aligned} x_J &= a(\cos u - e)A + a\sqrt{1 - e^2} \sin u B \\ y_J &= -a(\cos u - e)C + a\sqrt{1 - e^2} \sin u D, \\ z_J &= a(\cos u - e)E - a\sqrt{1 - e^2} \sin u F \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ B &= \sin \omega \cos \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \\ C &= \sin \omega \cos \Omega + \cos \omega \sin \Omega \cos i \\ D &= \cos \omega \cos \Omega \cos i - \sin \omega \sin \Omega \\ E &= \sin i \sin \Omega \\ F &= \sin i \cos \Omega \end{aligned}$$

e  $u$  é a anomalia excêntrica. Além disso,  $\frac{d}{dl_J} = \frac{1}{n_J} \frac{d}{dt}$ .

Derivando  $x_J, y_J$  e  $z_J$  no tempo aparecerá o termo  $\frac{du}{dt}$ , cuja expressão é obtida derivando a equação de Kepler no tempo:

$$\frac{du}{dt} = \frac{n_J}{1 - e \cos u}.$$

Temos com isso:

$$\begin{aligned}\frac{dx_J}{dl_J} &= \left[ -a \sin u A + a \sqrt{1-e^2} \cos u B \right] \frac{1}{1-e \cos u} \\ \frac{dy_J}{dl_J} &= \left[ a \sin C + a \sqrt{1-e^2} \cos u D \right] \frac{1}{1-e \cos u} \\ \frac{dz_J}{dl_J} &= \left[ -a \sin u E - a \sqrt{1-e^2} \cos u F \right] \frac{1}{1-e \cos u}\end{aligned}$$

A anomalia excêntrica  $u$  é calculada a partir da anomalia média  $l$  resolvendo numericamente a equação de Kepler. A rotina utilizada é aquela apresentada por Danby (1989).



## Capítulo 3 - Investigação Dinâmica do Asteróide (279) Thule

### 3.1 - O modelo simplificado aplicado a (279) Thule

O asteróide Thule (279) é o único exemplar conhecido que se encontra capturado pela ressonância 4:3 com Júpiter. Embora esteja próximo de Júpiter (razão de eixos  $\alpha = 0,822$ ) e portanto sujeito ao efeito de depleção do campo gravitacional deste, o mesmo vem se mantendo em sua órbita ressonante.

No cinturão exterior, os asteróides que ainda são observados apresentam configurações dinâmicas particulares que minimizam as fortes perturbações de Júpiter. Neste sentido, mecanismos de seleção natural atuam e apenas asteróides “protegidos” dinamicamente permanecem (Nobili, 1989). Do ponto de vista astronômico, uma descrição detalhada do mecanismo de proteção dinâmica de Thule pode ser encontrada no trabalho de Takenouchi (1962).

Tsuchida (1988) estudou o movimento de Thule através de um tratamento perturbativo médio baseado na expansão da função perturbadora em torno do centro de libração (Ferraz-Mello, 1987). A aplicação do modelo simplificado, para as condições iniciais referentes a observações de 1973, caracteriza Thule como librador. A posterior evolução dos elementos a partir das equações do modelo revelou passagens episódicas a regimes de circulação. Tsuchida observa que a classificação de Thule como librador ou circulador é bastante sensível às condições iniciais (em especial à excentricidade), de sorte que pequenas variações podem levá-lo de um regime ao outro. Ainda segundo Tsuchida, a variação dos elementos orbitais de Thule se mostra bastante irregular.

| <i>Data</i> | <i>a (U.A.)</i> | <i>e</i>  | <i><math>\lambda</math></i> | <i><math>\varpi</math></i> |
|-------------|-----------------|-----------|-----------------------------|----------------------------|
| 1973        | 4,2577          | 0,0326612 | 4,25291                     | 4,66516                    |
| 1984        | 4,2899          | 0,0066636 | 10,16273                    | 4,74261                    |
| 1992        | 4,2767          | 0,0119707 | 4,88727                     | 2,74446                    |

*tabela 3.1 - elementos orbitais de (279) Thule*

Stuchi (1991), ao aplicar o modelo simplificado a condições iniciais de 1984, obteve Thule em circulação. Através de um mapeamento  $\delta$  - periódico para o modelo simplificado, Stuchi conseguiu reproduzir as características libração-circulação citadas por Tsuchida. Adicionalmente, a referida autora obteve uma trajetória periódica ao variar a excentricidade de Thule.

No presente trabalho adotamos condições iniciais referentes a 1992, que juntamente com as de Tsuchida e Stuchi são mostradas na tabela 3.1. A aplicação do modelo simplificado a estas condições iniciais novamente apresenta Thule como librador. Os valores das integrais do modelo  $E$  e  $G$  obtidos a partir de tais condições iniciais estão associados à configuração exibida no figura 1.5.

É conveniente ressaltar que Sessin e Bressane (1988) argumentam que o movimento devido à excentricidade de Júpiter, mencionado no capítulo 1, pode alterar

o regime predito em termos das variáveis  $(H,K)$  quando não existem separatrizes no espaço de fase correspondente.

### 3.2- Integração das equações exatas do movimento

As equações de movimento exatas do problema restrito foram integradas através de um algoritmo simplético, o qual foi descrito no capítulo anterior, e outro não-simplético (subrotina DODE). Daqui por diante, este último será referido como integrador convencional. O program que utiliza tal integrador para as equações do problema restrito de três corpos foi gentilmente cedido pelo prof. Gilson Gomes Vieira.

Para a integração numérica, as unidades adotadas foram a unidade astronômica para distâncias, o ano solar médio para tempo e a massa solar como unidade de massa.

Vários passos de integração foram experimentados com o integrador simplético, e verificou-se que o integrador não suportava passos maiores que 0,2 anos, tendo comportamento satisfatório para valores menores que este. Tal característica não chegou a ser problemática uma vez que não se visava aqui fazer uma exploração intensiva do problema. Dessa forma, foi utilizado passo igual a 0,1 anos solares médios para períodos totais de integração de 8.000 e 100.000 anos, e passo igual a 0,01 anos para 100 anos.

Para cada instante considerado as variáveis são transformadas em elementos orbitais, conforme procedimento envolvido no problema de dois corpos (apêndice B). A intervalos regulares de tempo, as variáveis  $(H,K)$  e  $(h,k)$  relativas ao modelo simplificado foram calculadas. Para as integrações sobre um tempo total de 100 anos, as variáveis do modelo foram calculadas a intervalos de 0,01 anos. Para 8.000 e 100.000 anos estes cálculos foram feitos a intervalos de 0,8 e 10 anos, respectivamente.

Os resultados para a evolução temporal do semi-eixo ( $a$ ) e excentricidade ( $e$ ) para os intervalos de tempo considerados estão apresentados nas figuras 3.1 -3.6 .

As figuras 3.1 e 3.2 mostram a existência de termos de curto período mencionados por Tsuchida (1988). O referido autor afirma que este fato causa dificuldade na escolha de condições iniciais para Thule, quando se aplica modelos analíticos médios. Pode-se observar que os resultados obtidos com o mapeamento simplético apresenta períodos menores que os resultados obtidos por Tsuchida e com o integrador convencional. Para uma melhor análise das séries temporais para  $\Delta t = 8.000$  e  $\Delta t = 100.000$  anos ( figuras 3.3 - 3.6), uma filtragem em várias frequências seria necessária. Porém, isto foge ao escopo deste trabalho. O que se pode afirmar é que de modo geral, para um mesmo intervalo de tempo, o integrador convencional exibe uma variação maior nos elementos  $a$  e  $e$ .

Nas figuras 3.7 e 3.8 estão representadas as projeções  $(H,K)$  e  $(h,k)$  compreendendo um tempo total de integração de 100.000 anos. A maior complexidade observada nas projeções  $(h,k)$  se deve ao efeito da combinação das excentricidades do asteroide e de Júpiter (Tsuchida, 1988).

O integrador convencional sempre apresenta Thule como librador, para os vários intervalos de tempo . Considerando-se uma variação artificial na excentricidade inicial



( $e_0 = 0,002$ ), com os demais elementos orbitais permanecendo inalterados, a figura 3.10 foi obtida. Em termos da projeção  $(h,k)$  o movimento não é mais puramente libratório. Com o integrador simplético tal fato não ocorreu. Para diversos valores iniciais da excentricidade o comportamento qualitativo permaneceu o mesmo apresentado na figuras 3.7a e 3.8a .

De modo geral, os resultados obtidos com o integrador convencional revelam riquezas de detalhe da complexidade exibida pelo movimento de Thule, principalmente para  $\Delta t = 8.000$  anos (figura 3.9 e 3.10)

As diferenças entre os resultados são atribuídas ao fato que mapeamentos simpléticos fornecem a evolução exata de um sistema hamiltoniano próximo ao original. Se este é sensível às condições iniciais, características peculiares previamente estabelecidas podem não ser reproduzidas. Tal fato foi evidenciado por S. Guillens(1992), quando da integração de um sistema duplamente ressonante, com condições iniciais associadas a órbitas periódicas previamente calculadas. O mapeamento de 4ª ordem de Yoshida não preservou a periodicidade de trajetórias imersas em regiões caóticas. A trajetória de Thule não se mostra caótica, porém a já citada presença de termos de curto período em seu movimento faz com que esta se torne bastante sensível a pequenas variações das condições iniciais. Mapeamentos simpléticos são reconhecidamente apropriados à exploração global dos espaços de fase de sistemas hamiltonianos.

### 3.3 - Evolução de Thule no plano $(\bar{E}, \bar{G})$

De posse dos resultados das integrações numéricas em coordenadas cartesianas, valores das constantes  $\bar{E}$  e  $\bar{G}$  foram calculados em intervalos regulares de tempo e plotados no plano representado na figura 1.1. S Guillens (1994) constatou que, através das séries temporais  $\bar{E}(t)$  e  $\bar{G}(t)$ , uma caracterização da evolução da trajetória, advinda da integração das equações exatas do movimento, pode ser facilmente obtida em um único gráfico.

Na figura 3.11 estão representados no plano  $(\bar{E}, \bar{G})$  do modelo simplificado de Sessin e Bressane os valores de  $\bar{E}(t)$  e  $\bar{G}(t)$  para 100.000 anos, obtidos respectivamente com o algoritmo simplético e integrador convencional. Para não sobrecarregar a figura, não foram plotados todos os pontos obtidos, mas o resultado observado se mantém para cada iteração do mapa. Para ambos integradores os pontos  $(\bar{E}(t), \bar{G}(t))$  permanecem numa região do plano  $EG$  onde não ocorrem separatrizes, com espaços de fase equivalentes ao representado na figura 1-5. O resultado gerado pelo integrador convencional mostra que os valores de  $\bar{E}(t)$  e  $\bar{G}(t)$  permanecem na região do plano associada à libração. Em contraste, os valores de  $\bar{E}(t)$  e  $\bar{G}(t)$  previstos pelo simplético transitam entre regiões do plano associadas a regimes de libração e circulação paradoxal, delimitadas no plano pela parábola  $P_2$ . Essa mudança de regime ocorre em curto intervalo de tempo, já sendo observada após 1 ano de integração. Pode-se observar que as densidades de pontos associados aos dois tipos de movimentos são aproximadamente iguais.

A análise da evolução das integrais no plano  $EG$  evidencia que, devido às sua característica própria de representar soluções de um problema próximo ao original, o mapeamento simplético traduz um comportamento geral de toda uma vizinhança da condição inicial adotada.

### **3.4 - Conclusão**

Para ambos os integradores aplicados às equações exatas do problema restrito de três corpos, uma característica geral é obtida pela análise da evolução temporal das constantes do modelo simplificado: não há cruzamento de separatriz em nenhum instante considerado. Do ponto de vista de sistemas dinâmicos, tal fato evidencia a forte regularidade que vem sendo observada no movimento do asteroide Thule.

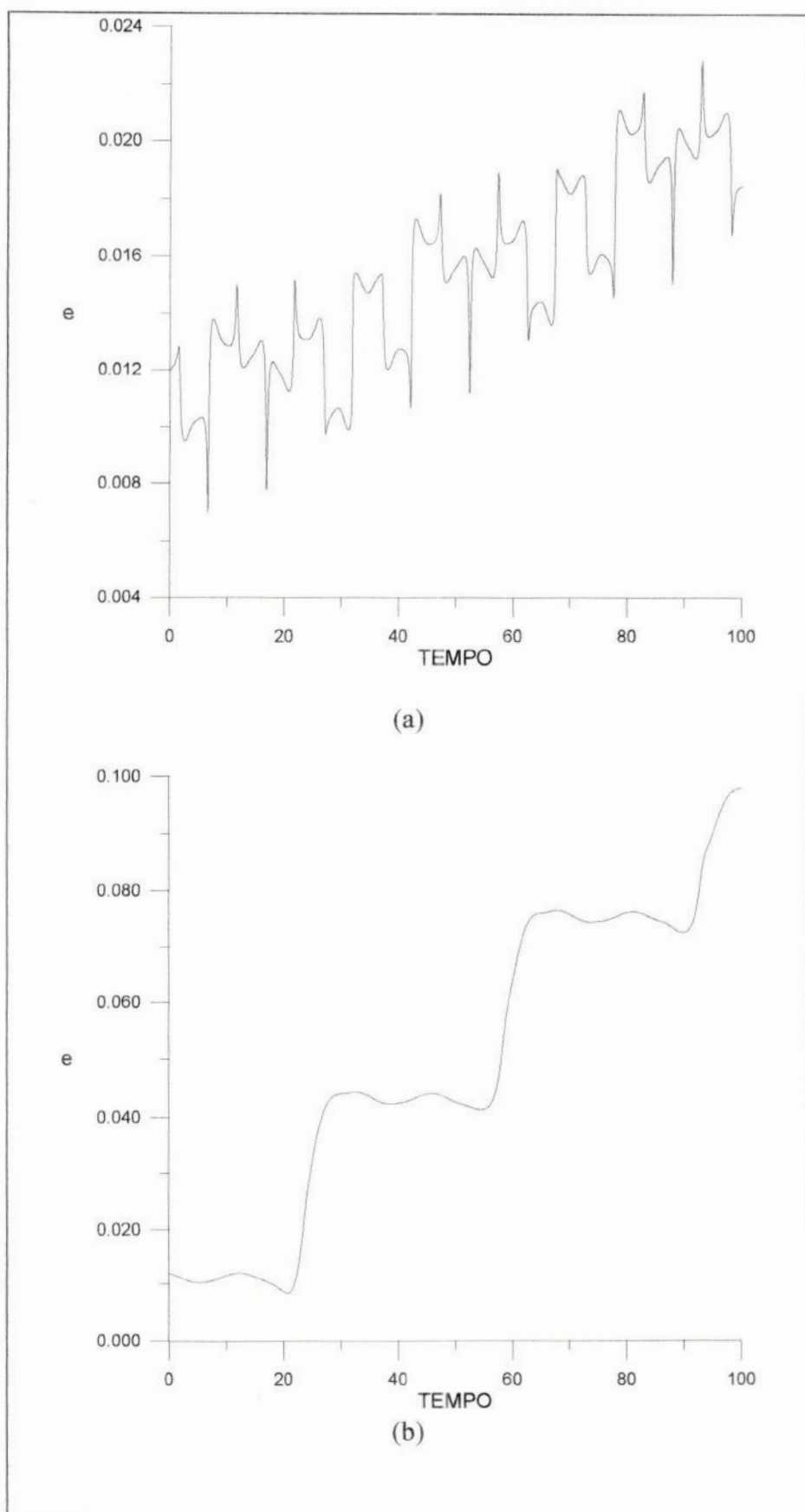


figura 3.1 - variação da excentricidade para  $\Delta t = 100$  anos.  
(a) - int. simplético; (b) - int. convencional.



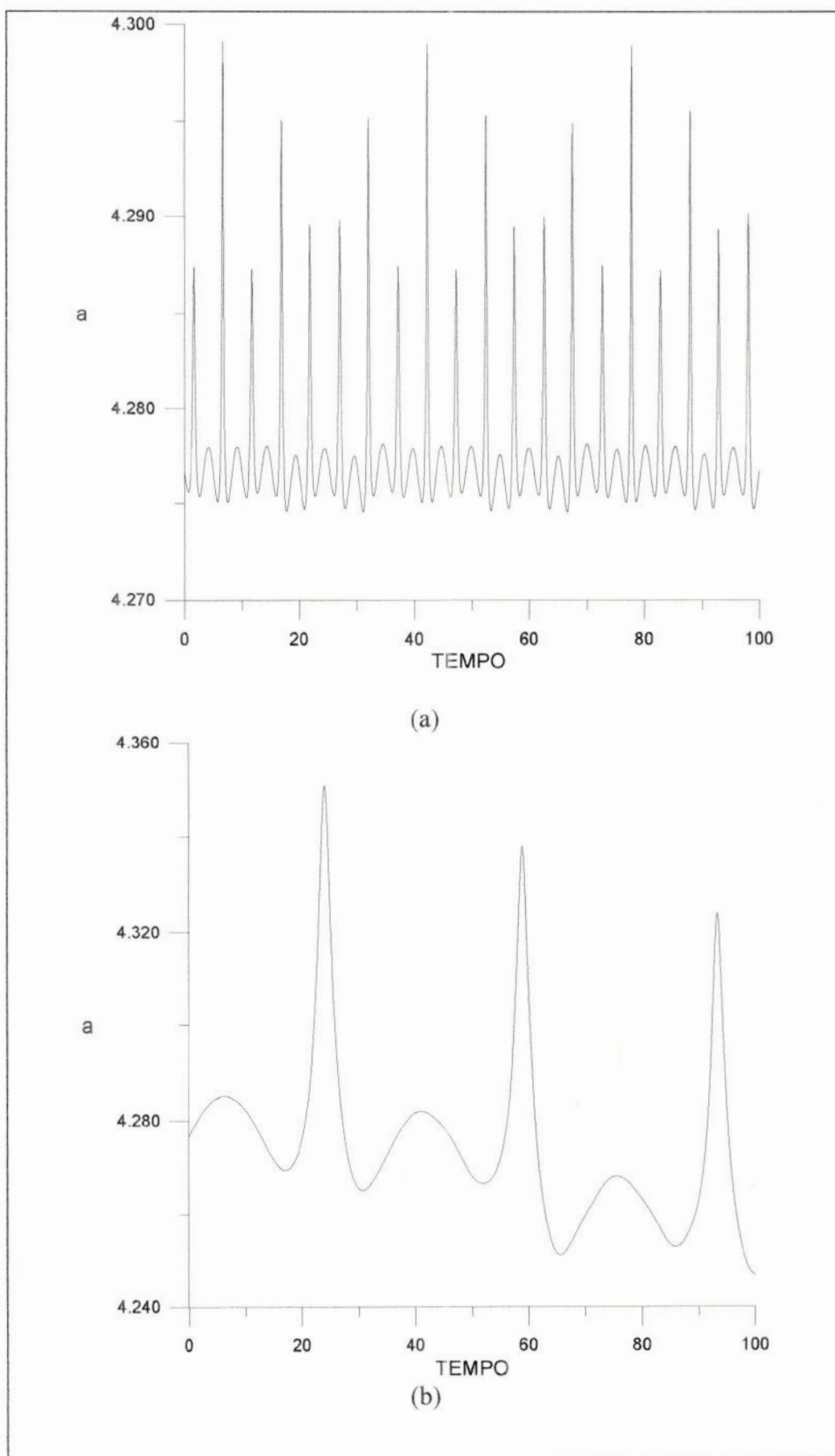


figura 3.2 - variação do semi eixo para  $\Delta t = 100$  anos.  
 (a) - int. simplético; (b) - int. convencional.

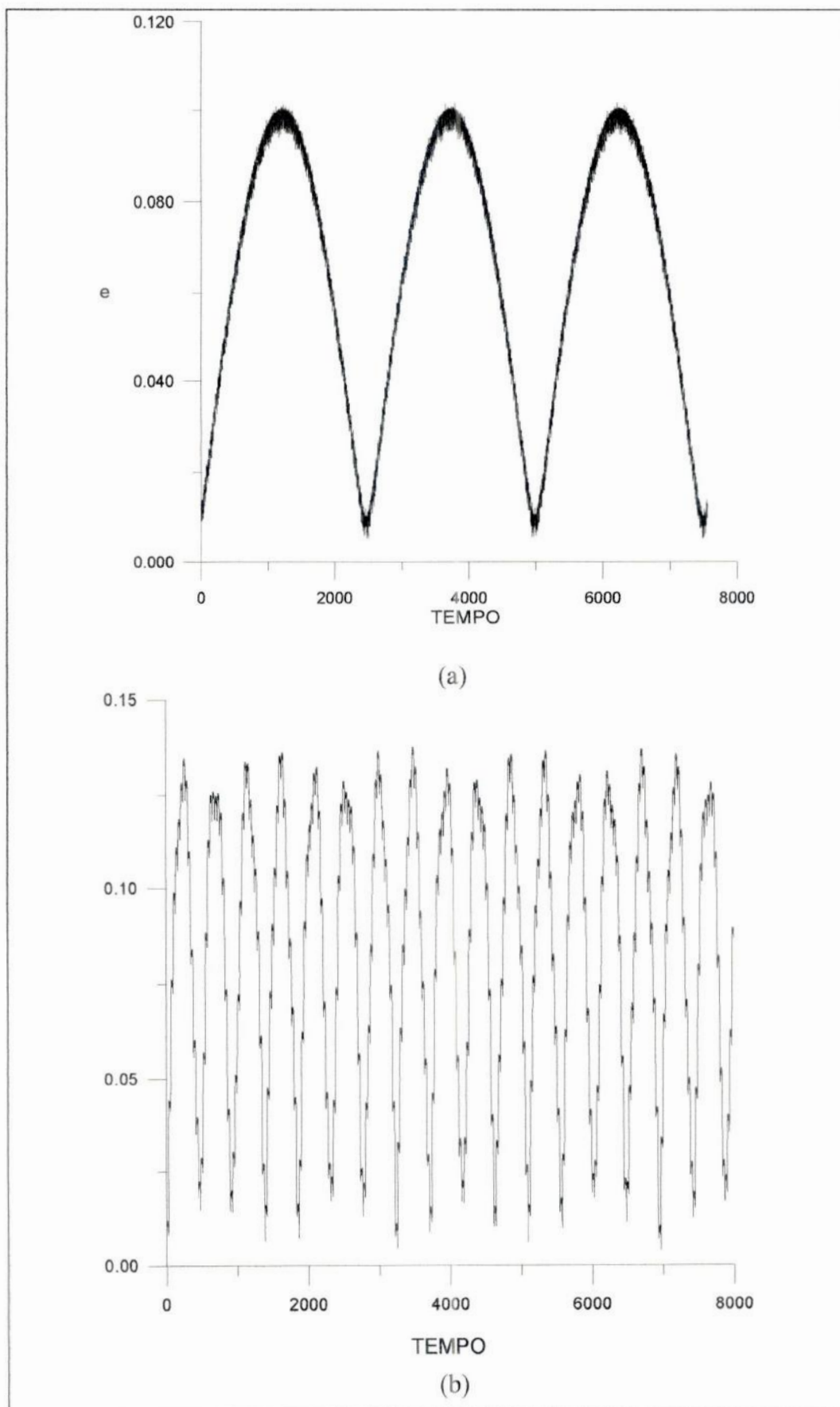


figura 3.3 - variação da excentricidade para  $\Delta t = 8.000$  anos  
 (a) - int. simplético; (b) - int. convencional

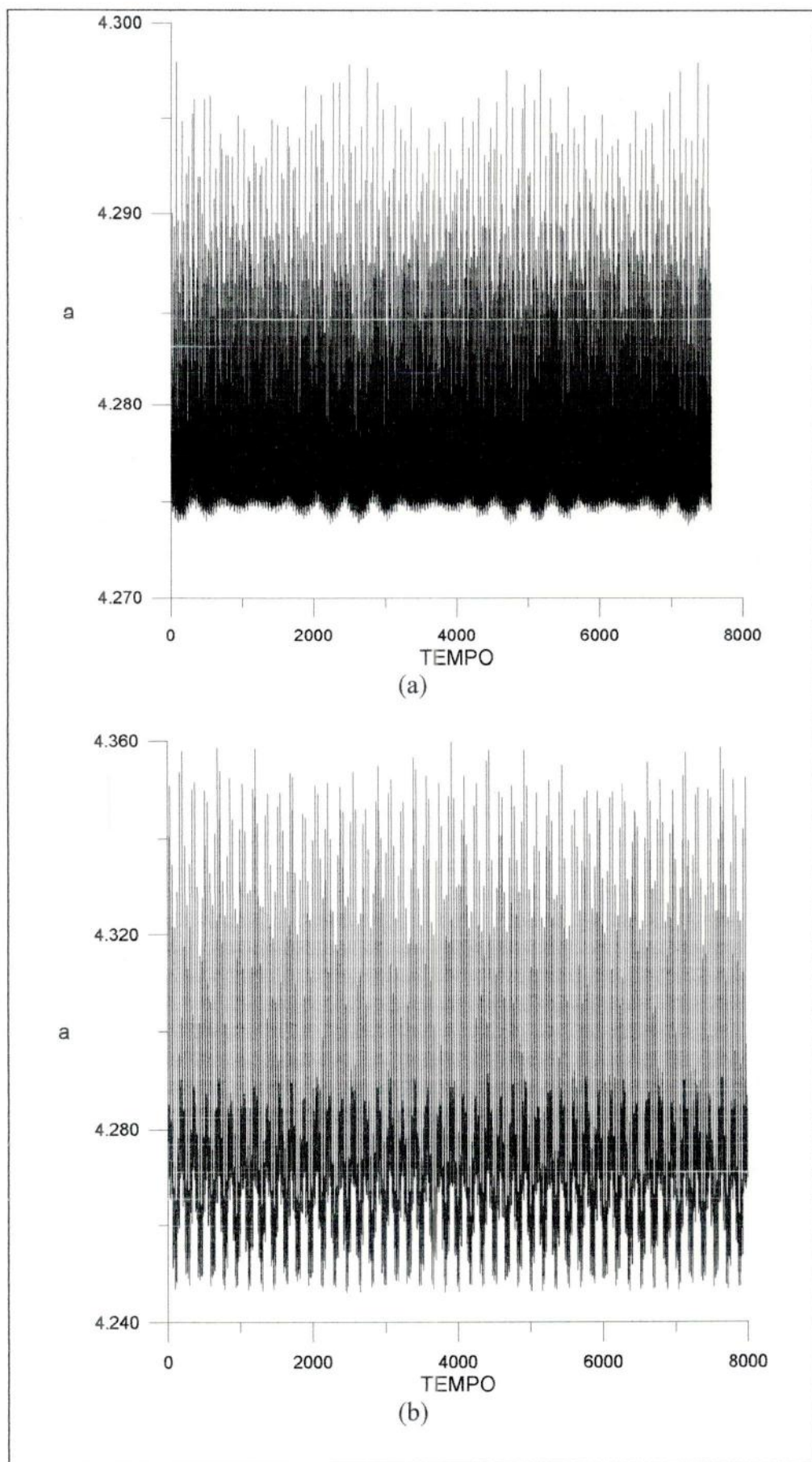


figura 3.4. - variação do semi eixo para  $\Delta t = 8,000$  anos  
.(a) - int. simplético; (b) - int. convencional.

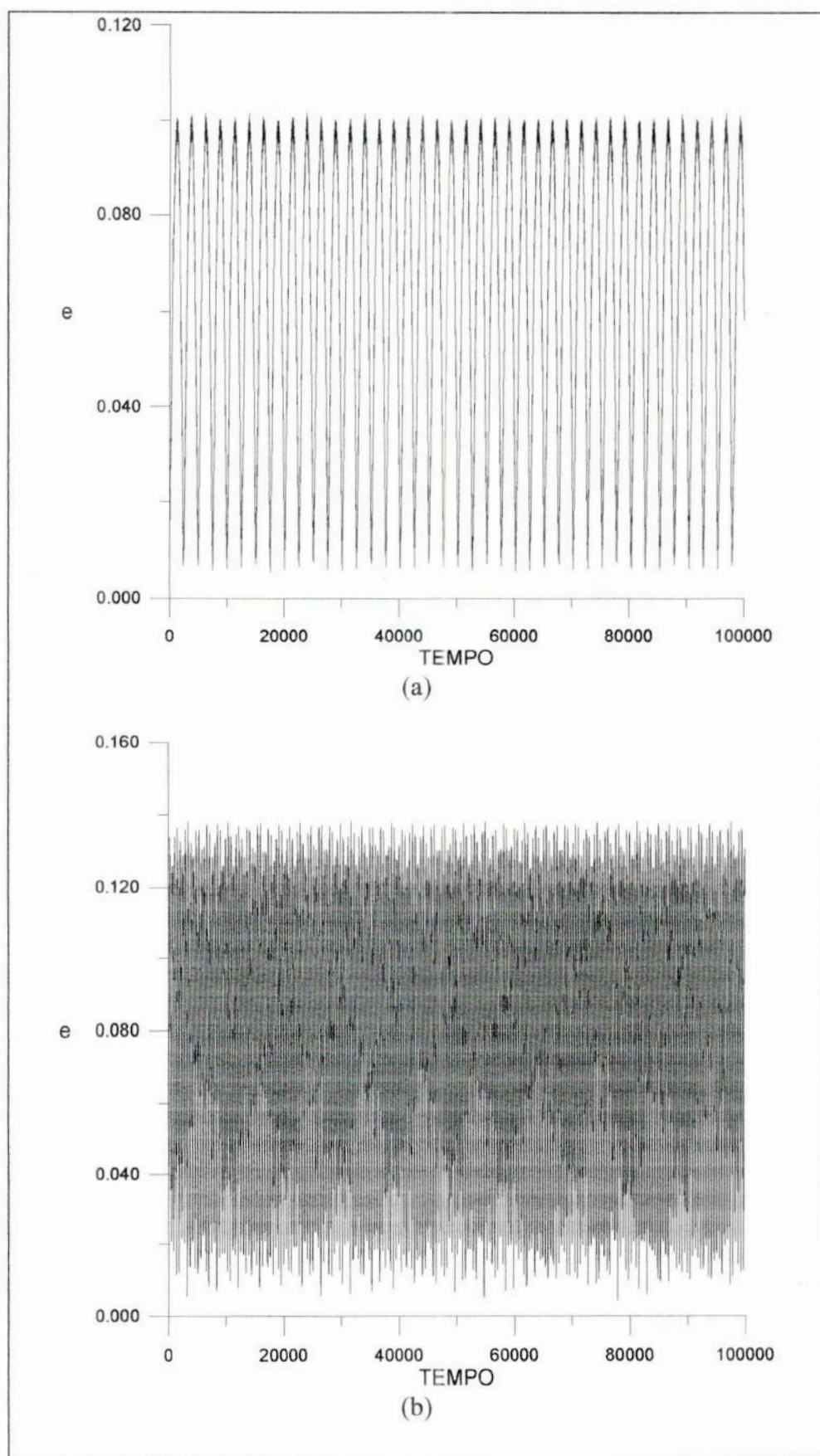


figura 3.5 - variação da excentricidade para  $\Delta t = 100.000$  anos.  
(a) - int. simplético; (b) - int. convencional.



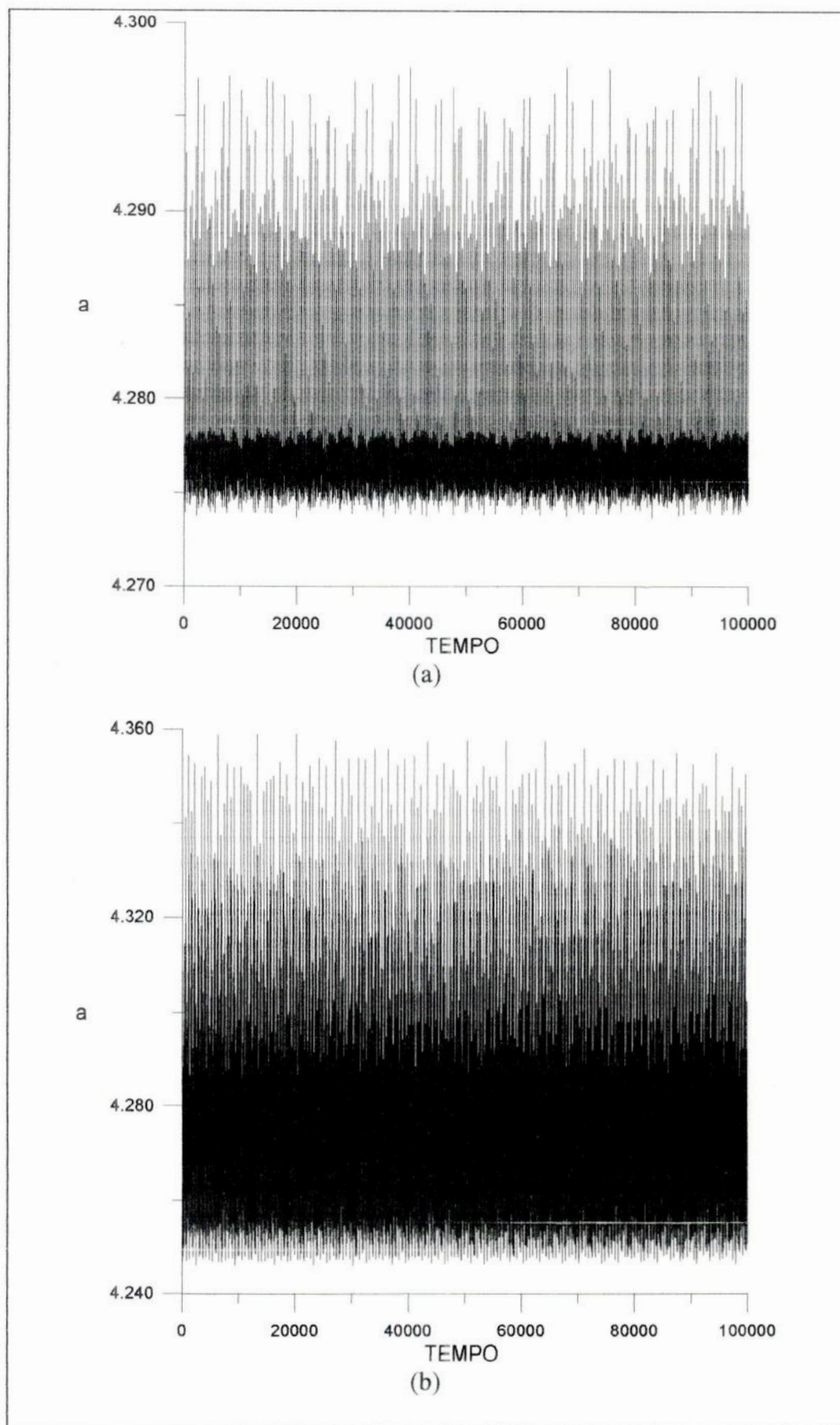


figura 3.6 - variação do semi eixo para  $\Delta t = 100.000$  anos.  
(a) - int. simplético; (b) - int. convencional.

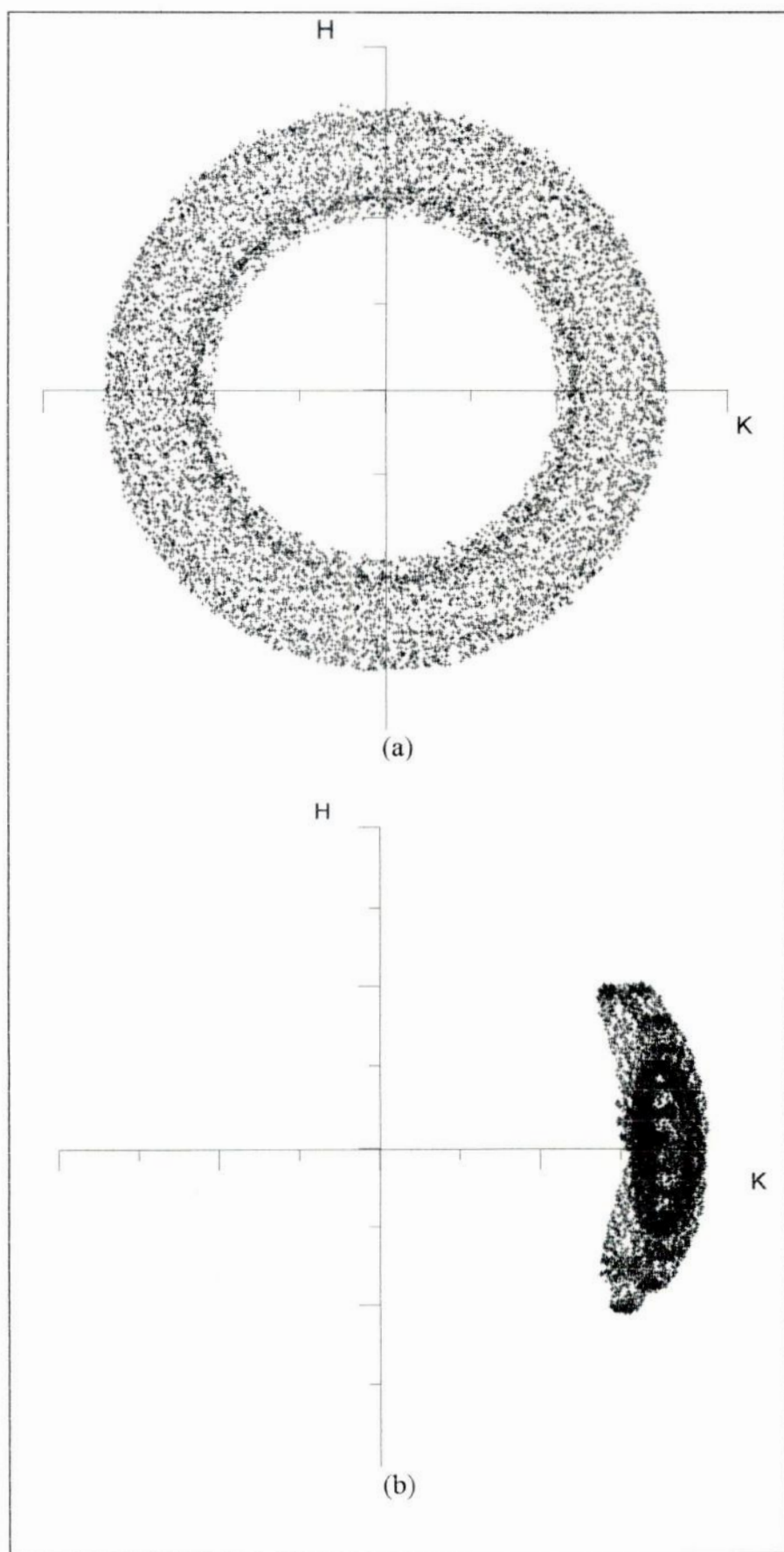
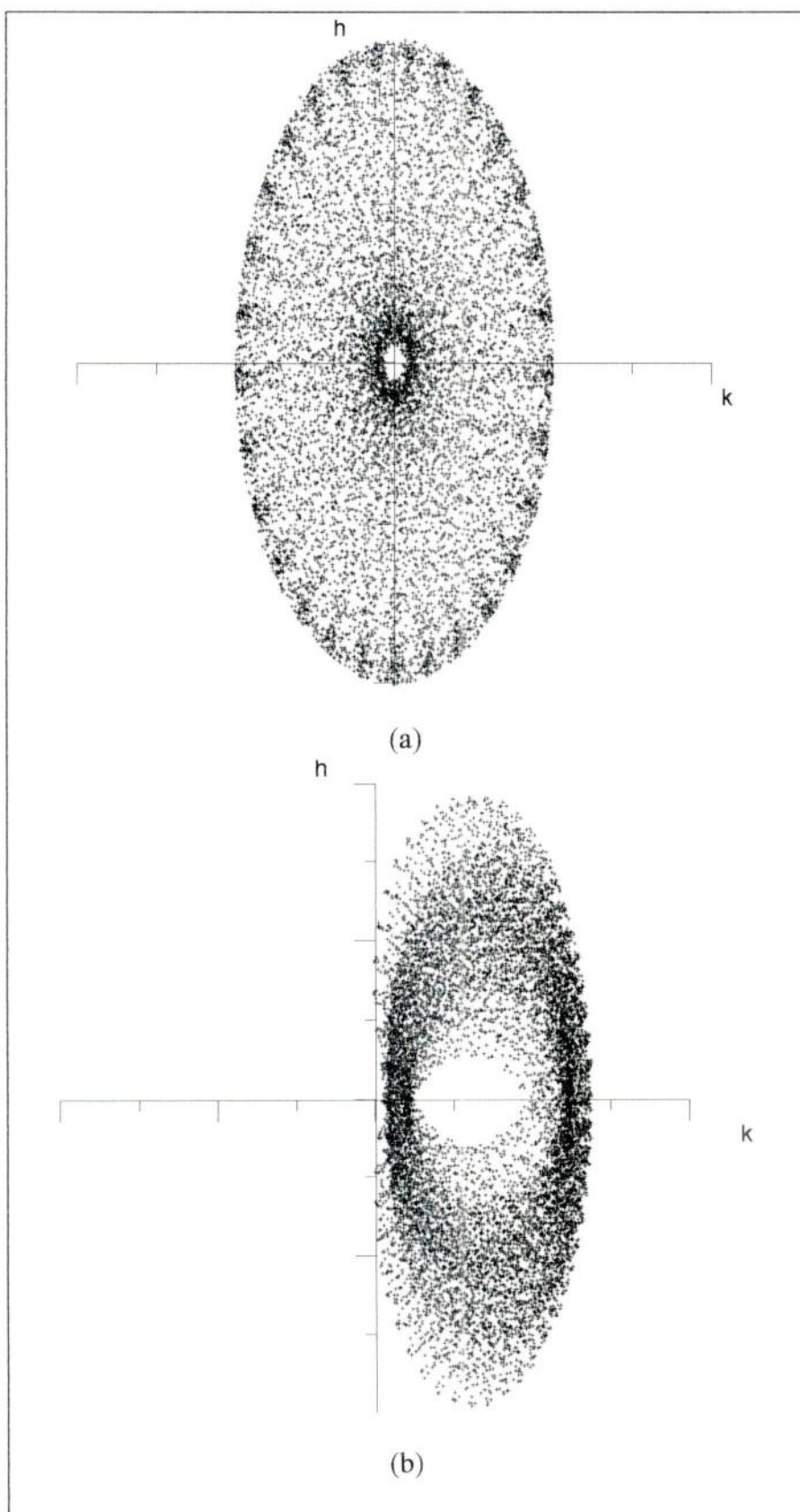


figura 3.7 - Trajetórias para  $\Delta t = 100.000$  anos.  
(a) - int. simplético; (b) - int. convencional



*figura 3.8 - Trajetórias para  $\Delta t = 100.000$  anos  
(a) - int. simplético ; (b) - int. convencional*

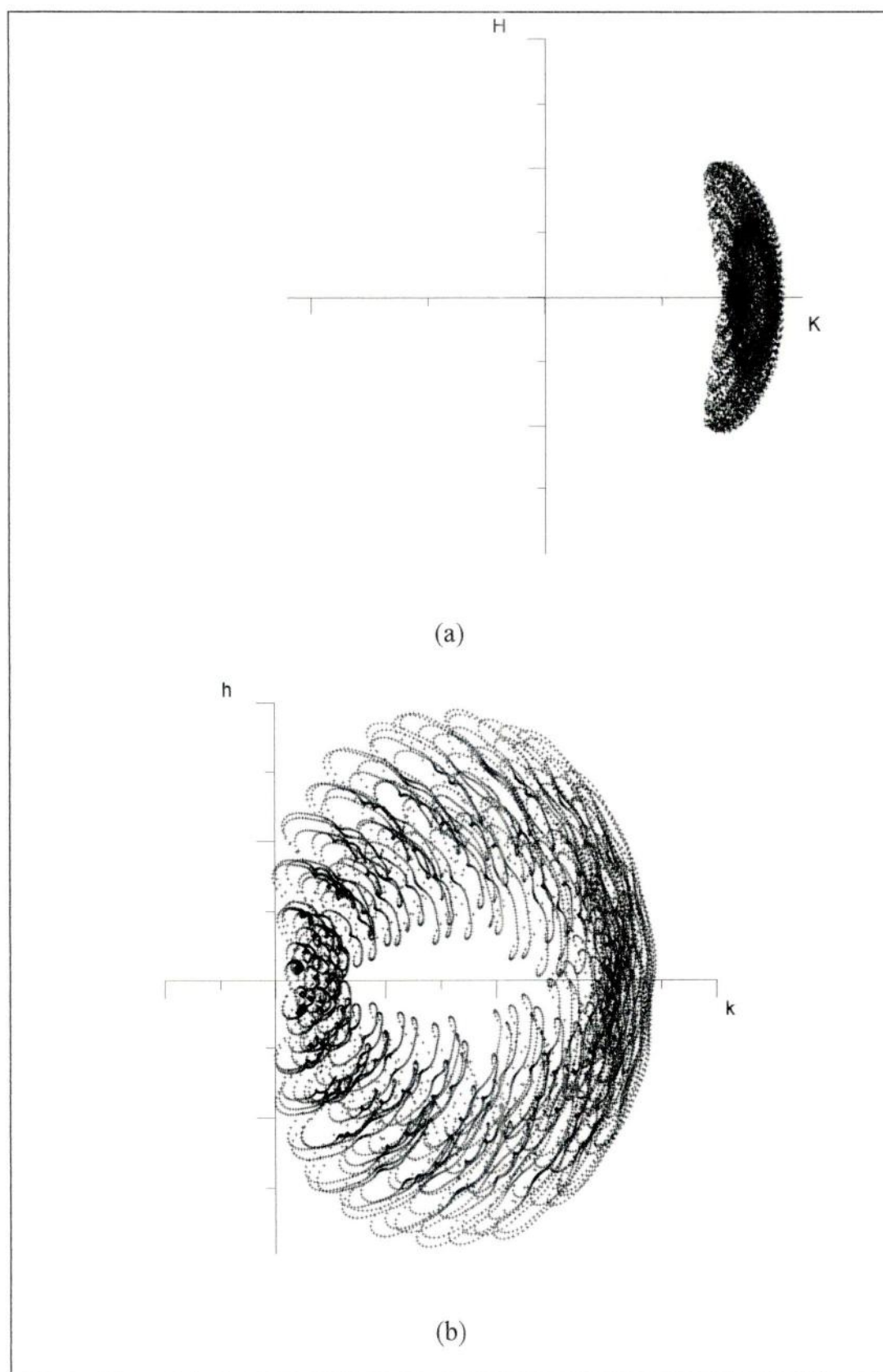


figura 3.9 - Trajetórias para  $\Delta t = 8.000$  anos com o integrador convencional



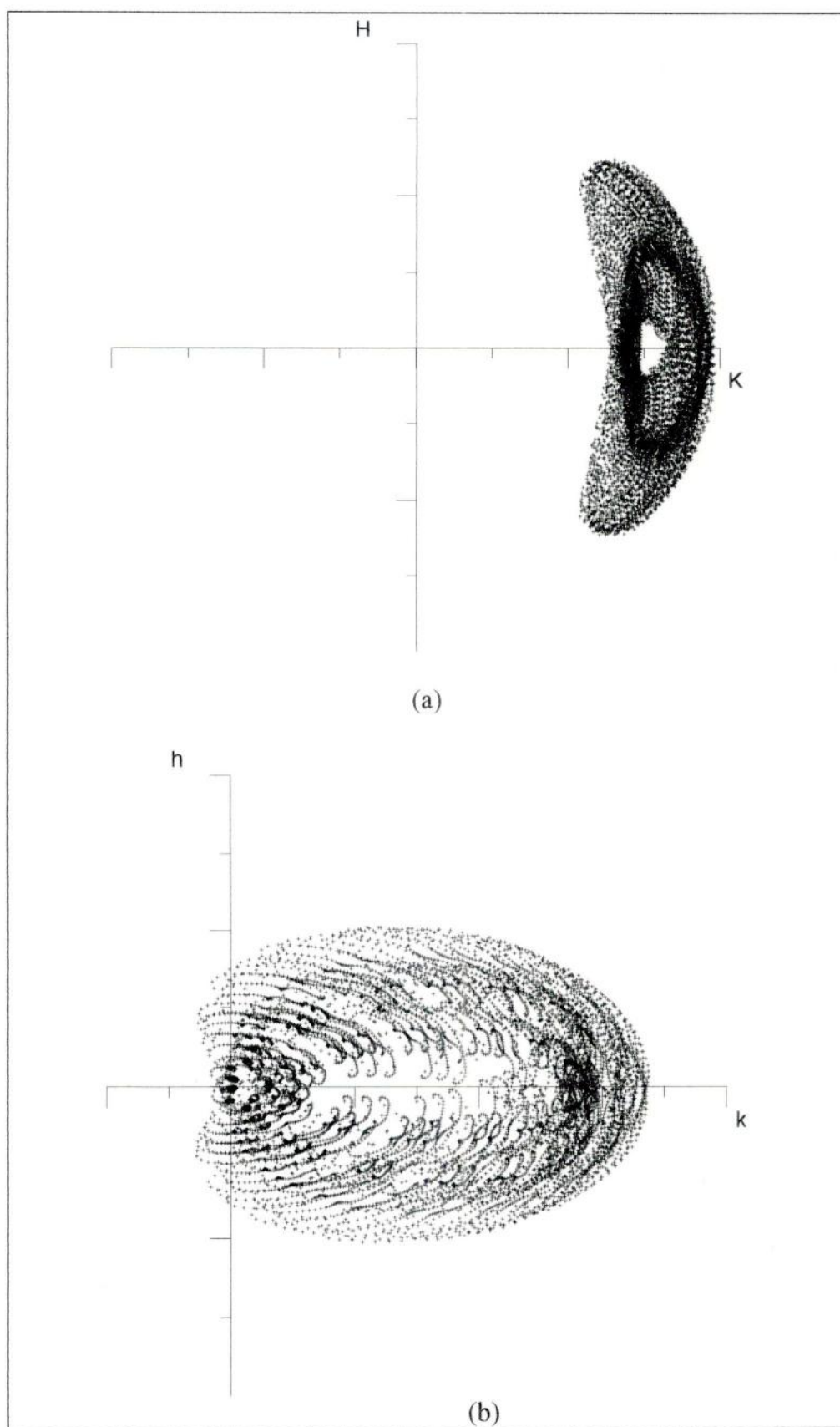


figura 3.10 - Trajetórias obtidas com o integrador convencional com  $e=0.002$  para  $\Delta t=8.000$  anos.

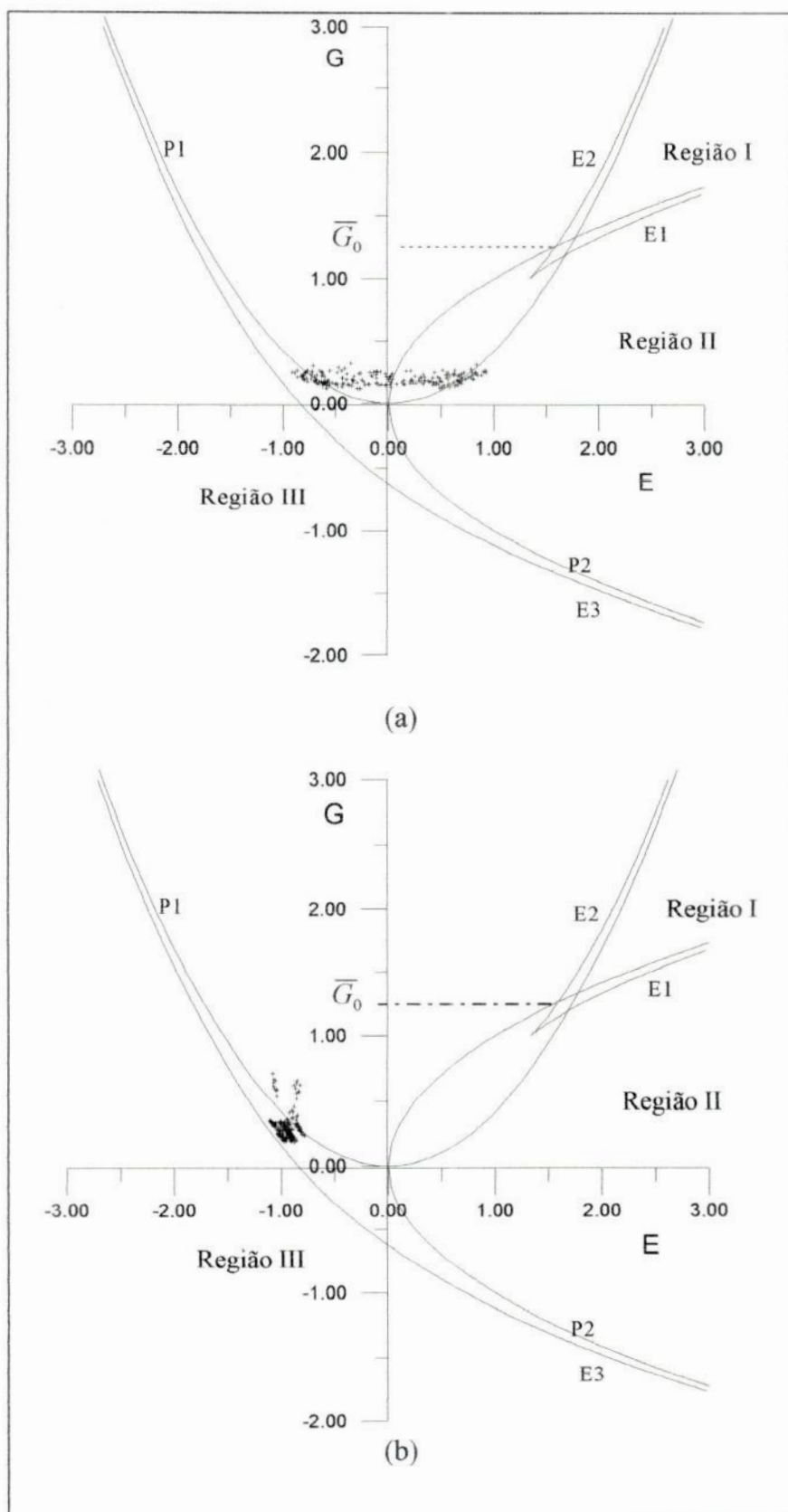


figura 3.11. - Evolução das integrais do modelo simplificado para  $\Delta t = 100.000$  anos.  
 (a) - int. simplético; (b) - int. convencional.

## Apêndice A - Resumo da Classificação de $P(\xi)$ .

As raízes do polinômio  $P(\xi)$  são funções das raízes da *resolvente cúbica*:

$$H(y) = y^3 - 4Ey^2 + 8D^2Gy + 4D^4 = 0$$

ou de sua *transformada cúbica*:

$$Z^3 + \left(8D^2G - \frac{16}{3}E^2\right)Z + \left(\frac{128}{27}E^3 - \frac{32}{3}D^2GE + 4D^4\right) = 0 \quad ,$$

onde  $y = Z - \frac{4E}{3}$ .

As raízes da transformada cúbica dependem do sinal de seu discriminante

$$\Delta Z = -1024 \left\{ E^3 - G^2E^2 - \frac{9}{4}D^2GE + \left(2D^2G^3 + \frac{27}{64}D^2\right) \right\}$$

que por sua vez está associada a:

$$\Delta E = 8D^2 \left( G^3 - \frac{27}{32}D^2 \right)^3.$$

É introduzida a normalização

$$\overline{G} = \frac{G}{G^{\star \frac{1}{3}}} \quad \overline{E} = \frac{E}{G^{\star \frac{2}{3}}} \quad ,$$

onde  $G^{\star} = \frac{27}{32}D^2$ .

As raízes de  $\Delta Z$  são dadas por

$$\begin{aligned}
\bar{E}_1 &= \frac{\bar{G}^2}{3} + \frac{2}{3} [\bar{G}(\bar{G} + 8)]^{1/2} \cos \frac{1}{3} \phi, \quad \bar{G} \geq 1 \\
\bar{E}_2 &= \frac{\bar{G}^2}{3} + \frac{2}{3} [\bar{G}(\bar{G} + 8)]^{1/2} \cos \frac{1}{3} (\phi - 2\pi), \quad \bar{G} \geq 1 \\
\bar{E}_3 &= \begin{cases} \frac{\bar{G}^2}{3} + \frac{2}{3} [\bar{G}(\bar{G} + 8)]^{1/2} \cos \frac{1}{3} (\phi + 2\pi), & \bar{G} > 1 \\ \frac{5}{3}, & \bar{G} = 1 \\ \frac{\bar{G}^2}{3} + \frac{1}{3} \left\{ [\bar{G}^6 - 20\bar{G}^3 - 8 + 8\sqrt{(1 - \bar{G}^3)^3}]^{1/3} + [\bar{G}^6 - 20\bar{G}^3 - 8 - 8\sqrt{(1 - \bar{G}^3)^3}]^{1/3} \right\}, & \bar{G} < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

com 
$$\cos \phi = \frac{\bar{G}^6 - 20\bar{G}^3 - 8}{[\bar{G}(\bar{G}^3 + 8)]^{3/2}}.$$

Por comodidade, a figura 1.1, que mostra a classificação do espaço de fase, foi aqui reproduzida.

As curvas  $\bar{E}_1$ ,  $\bar{E}_2$  e  $\bar{E}_3$  dividem o plano  $\bar{E}\bar{G}$  em 3 regiões, nas quais a natureza das raízes de  $P(\xi)$  é característica. Na região III  $P(\xi)$  tem 4 raízes complexas, na região II, duas raízes reais e duas raízes complexas e na região I, 4 raízes reais. Sobre  $\bar{E}_3$  o polinômio tem uma raiz real e 3 complexas, enquanto que sobre  $\bar{E}_2$  e  $\bar{E}_1$  ocorrem duas raízes reais simples e um raiz real dupla. Na intersecção das curvas  $\bar{E}_2$  e  $\bar{E}_1$  (que ocorre para  $\bar{G} = 1$  e  $\bar{E} = 4/3$ )  $P(\xi)$  tem uma raiz real simples e um raiz real tripla. Quando ocorrem, as separatrizes estão sempre associadas a valores de  $\bar{E}$  e  $\bar{G}$  sobre a curva  $\bar{E}_2$ .

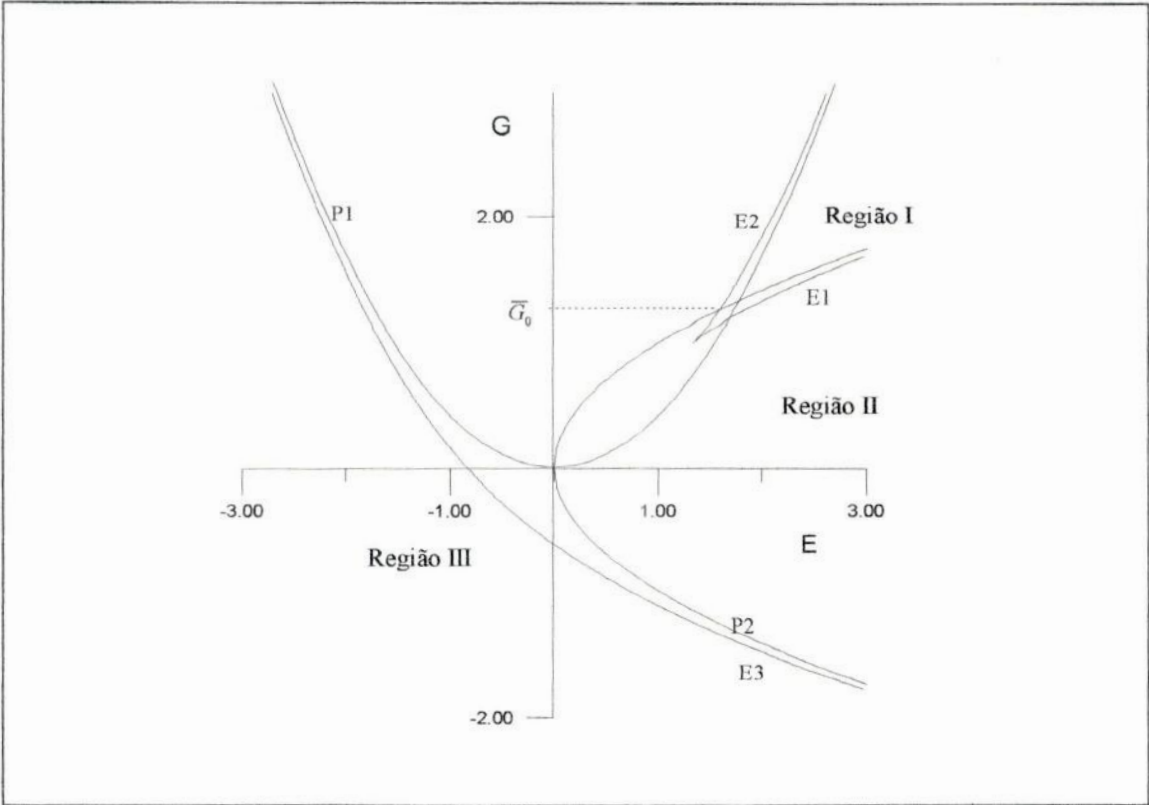
Os sinais das raízes de  $P(\xi)$ , quando reais, são:  $\xi_1 > 0$ ,  $\xi_3 < \xi_4 < 0$ .  $\xi_2$  tem o mesmo sinal de  $E^2 - 2D^2G$ . Na figura, a parábola  $E^2 = 2D^2G$  está denotada por  $P_1$ .

Por sua vez, as raízes de

$$Q(K) = -P(\xi) = -K^2 \pm 2D^2\sqrt{K+E} + 2D^2G$$

estão obviamente relacionadas com as raízes de  $P(\xi)$ . Quando ocorrem, suas raízes reais têm sinais como  $K_1 > 0$ ,  $K_2 < 0$ ,  $K_3 < 0$  e  $K_4$  com o mesmo sinal de  $G^2 - E$ . Na figura a parábola  $G^2 = E$  está indicada por  $P_2$ . A abscissa do ponto onde  $P_2$  intercepta  $\bar{E}_2$  é representada por  $\bar{G}_0$ .





## Apêndice B - Mapeamentos Simpléticos

Sejam  $\bar{Z} = (q_i, p_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $H(\bar{Z})$  a hamiltoniana de um sistema dinâmico autônomo com  $n$  graus de liberdade e

$$\omega = \sum_j \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \right),$$

o operador parênteses de Poisson. As equações canônicas do movimento podem então ser escritas como  $\dot{\bar{Z}} = \omega \bar{Z}$ , cuja solução exata pode ser expressa como

$$\bar{Z} = M(t)\bar{Z}_0, \quad M(t) = \exp(t\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \omega^n$$

onde  $M(t)$  é um mapa simplético das condições iniciais para um estado qualquer do sistema. Os algoritmos simpléticos são aproximações de  $M(t)$ , com a particularidade de preservarem as estruturas simpléticas.

Para uma hamiltoniana do tipo  $H(q_i, p_i) = A(p_i) + V(q_i)$ , seja uma transformação canônica  $(q_0, p_0) \rightarrow (q, p)$  com função geratriz:

$$F(p_0, q) = p_0 q - \delta H(p_0, q),$$

com equações de transformação:

$$\begin{cases} q_{i0} = \frac{\partial F}{\partial p_{i0}} \\ p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_i = q_{i0} - \delta t \frac{\partial A(p_{i0})}{\partial p_i} \\ p_i = p_{i0} + \delta t \frac{\partial V(q_i)}{\partial q_i} \end{cases}.$$

Este conjunto de equações constitui um algoritmo simplético explícito de primeira ordem. O integrador de Yoshida de quarta ordem (Stuchi, 1993) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} q_{i+1}^j = q_i^j - c_i \delta t \frac{\partial A(p_i)}{\partial p_i^j} \\ p_{i+1}^j = p_i^j + d_i \delta t \frac{\partial V(q_{i+1})}{\partial q_i^j} \end{cases} \quad j = 1, \dots, n \quad i = 0, \dots, 3$$

onde  $q_i^j$  e  $p_i^j$  são as soluções para cada instante  $t$  e os coeficientes são:

$$c_1 = c_4 = \frac{1}{2(2 - 2^{1/3})} \quad d_1 = d_3 = \frac{1}{2 - 2^{1/3}}$$

$$c_2 = c_3 = \frac{1 - 2^{1/3}}{2(2 - 2^{1/3})} \quad d_2 = \frac{-2^{1/3}}{2 - 2^{1/3}}$$

$$d_4 = 0$$

que estão associados ao fato que :

$$M_4(t) = \prod_{i=0}^3 \exp(c_i t \omega_1) \exp(d_i t \omega_2) = \exp(t\omega + 0(t^5)) .$$

## Apêndice C - Obtenção dos Elementos Orbitais a Partir de Posição e Velocidade

Usando o formalismo do problema de 2 corpos (Brower, 1969), definimos:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad \text{e} \quad r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$$

e temos as relações:

$$\frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{r} - V^2 \quad (\text{integral da energia})$$

$$r^2 V^2 - (r\dot{r})^2 = \mu a (1 - e^2) \quad (\text{integral de área})$$

Com isto, obtemos os elementos dinâmicos da órbita osculadora (semi-eixo maior e excentricidade):

$$a = \mu \left[ \frac{2\mu}{r} - V^2 \right]^{-1}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{1}{\mu a} [r^2 V^2 - (r\dot{r})^2]}.$$

Para as componentes do momento angular (por unidade de massa) temos as expressões:

$$h_x = y\dot{z} - z\dot{y} \quad h_y = z\dot{x} - x\dot{z} \quad h_z = x\dot{y} - y\dot{x}$$

e

$$h_x = |h| \sin i \sin \Omega \quad h_y = -|h| \sin i \cos \Omega \quad h_z = |h| \cos i.$$

Com isso obtemos:

$$\cos i = \frac{h_z}{|h|} \quad \sin \Omega = \frac{h_x}{|h| \sin i} \quad \cos \Omega = -\frac{h_y}{|h| \sin i},$$

que nos permitem calcular a inclinação e a longitude do nodo ascendente.

As coordenadas cartesianas eclípticas podem ser escritas como:

$$x = A_x (\cos u - e) + B_x \sin u \quad \dot{x} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a}} (-A_x \sin u + B_x \cos u)$$

$$\begin{aligned}
y &= A_y(\cos u - e) + B_y \sin u & \dot{y} &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a}} (-A_y \sin u + B_y \cos u) \\
z &= A_z(\cos u - e) + B_z \sin u & \dot{z} &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a}} (-A_z \sin u + B_z \cos u)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_x &= a(\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i) & B_x &= -a\sqrt{1-e^2}(\cos \Omega \sin \omega + \sin \Omega \cos \omega \cos i) \\
A_y &= a(\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i) & B_y &= a\sqrt{1-e^2}(-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i) \\
A_z &= a \sin \omega \sin i & B_z &= a\sqrt{1-e^2} \cos \omega \sin i
\end{aligned}$$

Podemos obter então o argumento do perigeu através das expressões:

$$\sin \omega = \frac{A_z}{a \sin i} \quad \text{e} \quad \cos \omega = \frac{B_z}{a \sin i \sqrt{1-e^2}}.$$

Por fim, a anomalia excêntrica é calculada a partir de:

$$\sin u = \frac{r\dot{r}}{e\sqrt{a\mu}} \quad \cos u = \frac{1}{e} \left[ \frac{rV^2}{\mu} - 1 \right].$$



## Bibliografia

- Brower, D., Clemence, G. M., 1961 - "Methods of Celestial Mechanics"- Academic Press, New York.
- Bressane, L.B.R., 1985 - Dissertação de Mestrado - ITA, São José dos Campos.
- Danby, J. M. A., 1989 - "Fundamentals of Celestial Mechanics" - Willmann-Bell, Richmond.
- Ferraz-Mello, S., 1987 - "Expansion of the Disturbing Force-Function for the Study of High Excentricity Librations" - Astron. Astrophys ( 1987b), 183,397.
- Goldstein, H., 1971 - " Classical Mechanics" - Addison-Wesley, Reading.
- Guillens, S. A., Yokoyama, T., 1989 - "Some periodic Families of Trajectories of a Double Ressonant Problem" - Orbital Dynamics of Natural and Artificial Objects, Vieira Martins, R., Lazzaro, D., Sessin, W. (eds.), Observatório Nacional, Rio de Janeiro.
- Guillens, S. A., 1992 - "Um Mapeamento Simplético para Hamiltonianas com Parcelas Isoladamente Integráveis" - Anais do 6º Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, São Pedro.
- Guillens, S. A., Sessin, W., 1993 - "A Qualitative Approach to 3:1 Commensurability in Asteroidal Problem" - Workshop in Geometrical Mechanics - IMPA, Rio de Janeiro.
- Guillens, S., Sessin, W., Vieira Martins, R., 1994 - "Modelos Integráveis e a Evolução Dinâmica de Asteróides na Ressonância 3:1" - Anais do 7º Colóquio de Dinâmica Orbital, Santos.
- Nobili, A. N., 1989 - "Dynamics of Outer Asteroid Belt" - Asteroids II, Geherels, T. (eds). Univ. of Arizona Press.
- Sessin, W., 1981 - "Um estudo de um Sistema de dois Planetas com Períodos Comensuráveis na Razão 2/1" - Tese de Doutorado, IAG-USP, São Paulo.
- Sessin, W., Ferraz-Mello, S., 1984 - "Motion of two Planets with Periods Commensurable in the ratio 2/1 - Solutions of The Hori Systems", Cel. Mech. 38.
- Sessin, W. and Bressane, L.B.R., 1988 - A simplified Model for the First-Order Ressonance Applied to the Hilda Group and to Thule", Icarus 75 (1).
- Stuchi, T. J., 1991- "Mapeamentos Derivados do Sistema Auxiliar de Hori para a Ressonância Asteroidal de Primeira Ordem" - Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos - SP.
- Stuchi, T.J., 1993 - " Sistemas Hamiltonianos e sua Integração Numérica" - Notas do Minicurso Preparatório, Workshop on Geometric Mechanics, IMPA, Rio de Janeiro.
- Takenouchi, T., 1962 - "On the Characteristic Motion and Critical Argument of the Asteroid (279) Thule" - Ann. Tokyo Obs., 7.
- Tsuchida, M., 1988 - "Modelos Analíticos Planos e Explorações Numéricas dos Asteróides Próximos às Ressonâncias 2:1 e 4:3 com Júpiter" - Tese de Doutorado, IAG-USP, São Paulo.