



# Estudo do Aglomerado de Abell A3558

Christine Córdula Dantas

Trabalho submetido ao Departamento de Astronomia do  
Instituto de Geociências da UFRJ - OV,  
como requisito para a obtenção  
do grau de Astrônoma

Rio de Janeiro, RJ  
Dezembro, 1993

Orientador: Dr. Reinaldo R. de Carvalho

## Resumo

Neste trabalho, estudamos as propriedades físicas fundamentais do aglomerado de galáxias A3558. Examinamos uma região de um grau quadrado centrada na galáxia cD do aglomerado, e obtivemos um catálogo estatisticamente completo com posições e magnitudes para 255 galáxias (para uma magnitude limite de  $m_B = 18.75$ ). As propriedades globais deste aglomerado foram investigadas, baseadas em seu perfil de densidade superficial e função de luminosidade. Testamos a presença de sub-estrutura neste aglomerado usando a Estatística de Lee, com uma possível indicação de uma sub-estrutura a sudeste do aglomerado. Também investigamos a presença de segregação em luminosidade como indicativa dos processos dinâmicos atuando em A3558. Não encontramos evidências de segregação em luminosidade em escala global até o limite de magnitude da amostra.

## Abstract

We study the fundamental physical properties of the cluster of galaxies A3558. We have examined a region of one square degree centered on the cluster cD galaxy, and obtained a statistically complete catalogue with positions and magnitudes for 255 galaxies (for a limiting magnitude of  $m_B = 18.75$ ). The global properties of this cluster are investigated, based on its surface density profile and luminosity function. We tested the presence of substructure in this cluster using the Lee Statistics with some possible indication of a tenuous substructure southeastern. We also investigated the presence of luminosity segregation as indicative of dynamical processes acting on A3558. We find no evidence of luminosity segregation in global scale down to the sample magnitude limit.

## Agradecimentos

Agradeço ao Dr. Reinaldo R. de Carvalho pela orientação atenciosa que dedicou a este projeto. Sua crítica tenaz, encorajamento, e comentários estimulantes foram fatores fundamentais na elaboração de cada página deste trabalho.

Ao Departamento de Astrofísica-ON pelo uso de todas as suas facilidades como o uso das "Workstations", secretaria e etc.

Ao Depto. de Astronomia do IAG/USP pelo acesso às facilidades computacionais no período de minha estada em São Paulo.

A João Luiz Kohl pela especial atenção prestada às atividades computacionais ao longo deste projeto.

Ao Engenheiro Darcy Nascimento pelo suporte eficiente ao "hardware".

Ao Dr. Hugo Capelato por sua contribuição no estudo dinâmico de A3558, que estamos realizando em prosseguimento a este trabalho.

Ao André B. Ribeiro pelos comentários e sugestões fundamentais que muito contribuíram na elaboração deste projeto; e à "Turma Luz", simplesmente por ser o que é.

Ao Dr. Vladimir Garrido por seu apoio a este projeto nos momentos mais críticos.

Ao CNPq pelo suporte financeiro através de uma bolsa de iniciação científica.

Por fim, dedico este trabalho à minha mãe e a Guilherme N. Briggs, pela compreensão, paciência e estímulo. Meu débito para com eles é imenso.

# Índice

Resumo .....	ii
Abstract .....	iii
Agradecimentos .....	iv
1. Introdução .....	1
2. Dados Utilizados e Metodologia .....	8
2.1 Dados Utilizados .....	8
2.2 Descrição Geral do Programa de Identificação .....	8
2.2.1 Parâmetros Usados no FOCAS .....	9
2.2.2 Exame Visual do Catálogo Resultante .....	9
2.3 Calibragem da Escala de Magnitude .....	11
2.3.1 Estimativa e Erro do Ponto Zero da Escala de Magnitude .....	11
2.3.2 Estimativa da Magnitude Limite do Catálogo .....	12
2.4 Limite de Detectabilidade do Material Fotográfico .....	12
2.5 Obtenção de Coordenadas Equatoriais .....	13
2.6 Índice de Figuras .....	17
3. Descrição do Classificador Adotado pelo FOCAS .....	25
3.1 Introdução .....	25
3.2 O Classificador .....	26
4. Resultados .....	32

4.1 Propriedades Globais do A3558 .....	32
4.1.1 Perfil de Densidade Superficial .....	32
4.1.2 Função de Luminosidade .....	34
4.2 Análise da Estrutura do A3558 .....	36
4.2.1 Estudo de Segregação .....	36
4.2.2 Determinação de Possíveis Sub-estruturas Através da Estatística de Lee .....	39
4.3 Índice de Figuras .....	43
5. Conclusão .....	51
Apêndice A .....	53
Apêndice B .....	85
Referências .....	91

## 1. Introdução

Aglomerados de galáxias são provavelmente as maiores estruturas individuais ligadas gravitacionalmente no Universo. Como tal, oferecem uma oportunidade única para diversos estudos de problemas astrofísicos, como a forma do espectro de flutuação inicial, a evolução e a formação de galáxias, os efeitos ambientais sobre as propriedades intrínsecas das galáxias e a natureza da matéria escura. O estudo das propriedades físicas de aglomerados está intimamente relacionado com problemas cosmológicos que se encontram ainda sem solução. No que tange ao problema da determinação do parâmetro de densidade  $\Omega$ , com os dados existentes, as galáxias brilhantes de aglomerados indicam um valor de  $\Omega$  de apenas 30% do valor crítico de um universo Einstein-de Sitter. Este resultado nos leva à seguinte dicotomia: a massa por galáxia apresenta um viés para baixos valores em aglomerados; ou o universo tem verdadeiramente um baixo valor de densidade? Esta é uma questão que somente com o levantamento sistemático de medidas de velocidades radiais de galáxias em aglomerados poderá ser respondida. Além disso, é imperativo que um rigoroso controle dos efeitos de seleção seja exercido para estas amostras.

Uma importante questão relacionada ao estudo de aglomerados é a possibilidade de estabelecermos a sequência na qual as estruturas são formadas no Universo. A maioria dos modelos propostos para a formação de estruturas se baseia no conceito de instabilidade gravitacional (Vide Apêndice A) em um universo em expansão uniforme, supondo que as estruturas cresçam gravitacionalmente a partir de flutuações de densidade primordiais com um espectro gaussiano. Dependendo das condições cosmológicas iniciais e da forma da componente dominante em massa, as estruturas podem evoluir diferentemente. Se por exemplo, o universo é dominado por partículas não-bariônicas que interagem “fracamente” (matéria escura fria) então as estruturas devem obedecer um esquema hierárquico de formação. Neste cenário as galáxias e os aglomerados se formariam antes do colapso dos superaglomerados. Por outro lado, num universo dominado por bárions e com perturbações iniciais adiabáticas, flutuações de pequena escala seriam “destruídas” antes da Era de recombinação por difusão

de fótons. Neste caso a sequência de formação de estruturas seria de tal forma que superaglomerados colapsariam primeiro e subsequente fragmentação levaria à formação de galáxias e aglomerados. Aglomerados são estruturas aparentemente “dinamicamente jovens” e provavelmente dissipação não foi um mecanismo eficiente durante sua formação. Estas características fazem destes sistemas laboratórios naturais para o estudo das condições iniciais na época de sua formação e portanto permitem investigar as propriedades físicas do Universo na Era de recombinação.

Os primeiros catálogos de aglomerados de galáxias foram elaborados por Abell (1958) e Zwicky et al. (1961-1968). Ambos os catálogos foram construídos a partir de contagens de galáxias em placas fotográficas, onde o aglomerado era definido como sendo uma estrutura cuja densidade superficial de galáxias era significativamente maior do que a densidade superficial do campo vizinho. Uma simples inspeção destes catálogos permite verificar uma grande variedade de morfologias entre os aglomerados. No entanto, por muito tempo, estudos extensivos foram realizados somente em aglomerados tipicamente regulares. Mais recentemente, tem se tornado cada vez mais evidente a necessidade de se compreender melhor o amplo domínio de morfologias de aglomerados. Esta variedade pode refletir diferentes histórias de formação e evolução de estruturas em grande escala no Universo.

Os catálogos de Abell e de Zwicky definem aglomerados diferentemente a partir do estabelecimento de um certo contraste de densidade. Abell associava cada concentração de galáxias detectada a uma medida da distância do sistema usando a décima galáxia mais brilhante como um padrão (Postman, Geller & Huchra 1986 discutem os principais problemas de aplicação deste método). Um sistema para ser considerado um aglomerado no catálogo de Abell deveria possuir um número de galáxias  $\geq 50$  dentro de um intervalo de magnitudes entre  $m_3$  e  $m_3+2$ , onde  $m_3$  é a magnitude da terceira galáxia mais brilhante e dentro de um raio de  $1.7/z$  (onde  $z$  é o desvio para o vermelho do aglomerado) minutos de arco a partir do centro nominal do aglomerado. O número de galáxias dentro destes limites define a “riqueza”,  $R$ , do aglomerado dentro do sistema de Abell; riqueza  $R \geq 1$  caracteriza sistemas com um número  $\geq 50$  galáxias. Aglomerados de menor riqueza ( $R=0$ ) estão presentes no catálogo embora estes não tenham sido examinados por Abell de forma sistemática e uniforme como para



os sistemas mais ricos. Por outro lado, Zwicky identifica aglomerados usando um nível de densidade superficial de galáxias no sistema igual a duas vezes a densidade superficial do campo vizinho. Além disso, a estrutura para fazer parte do catálogo deve possuir um número de galáxias  $\geq 50$  com magnitudes entre  $m_B$  e  $m_B + 2$ , onde  $m_B$  é a magnitude da galáxia mais brilhante do aglomerado. Desta forma é simples verificar que o catálogo de Zwicky contém o catálogo de Abell.

Os catálogos de aglomerados de galáxias apresentam problemas de definição devido a efeitos de seleção introduzidos, por exemplo, pelo obscurecimento originado pela nossa própria Galáxia. Outro importante fator afetando estes catálogos é a deficiente distinção visual entre galáxias e estrelas de baixo fluxo total, sobretudo em latitudes galácticas baixas. É interessante notar que toda e qualquer definição operacional de uma dada estrutura em grande escala, como um aglomerado, procura refletir de forma coerente os processos físicos que atuam nos sistemas independente de suas diferenças morfológicas.

Aglomerados apresentam diferentes morfologias e neste sentido poderíamos, de uma maneira bastante simples, separá-los em regulares e irregulares. Estudos extensivos têm se concentrado em aglomerados regulares, uma vez que nestes casos estes sistemas podem ser caracterizados por apenas poucos parâmetros globais. Para este tipo de aglomerado pode-se descrever o perfil de densidade superficial simplesmente por uma função a dois parâmetros; a densidade superficial central,  $\mu_0$ , e um raio característico que no caso da função de King (King 1962), por exemplo, expressa o raio no qual a densidade superficial decresce de um fator 2 em relação a  $\mu_0$ . Este raio é denominado raio do núcleo,  $r_n$ . Esta designação se baseia no fato de que a função de King representa uma aproximação de uma lei isotérmica para um perfil de densidade superficial nas regiões centrais do aglomerado. Esta função não necessariamente descreve a distribuição nas regiões mais externas. Quanto mais virializado estiver o sistema, mais esta aproximação descreverá o comportamento da densidade superficial nas regiões mais externas do sistema. Portanto, o ajuste desta função pode em primeira aproximação indicar o quanto o sistema está virializado. Assim, a partir do conhecimento de  $\mu_0$  através do ajuste do perfil de densidade superficial e de uma medida da dispersão de velocidades central,  $\sigma_0$ , podemos estimar a densidade de massa central,  $\rho_0$ . Nesta estimativa, está implícita a condição

de que a dispersão de velocidades tenha uma distribuição isotrópica. Mesmo considerando todos os problemas observacionais existentes na avaliação dos parâmetros  $\mu_o$  e  $\sigma_o$ , estes nos fornecem uma primeira avaliação das propriedades físicas destes sistemas.

Dressler (1978), estudando 12 aglomerados ricos, obteve um raio do núcleo médio de 0.5 Mpc (supondo  $H_o = 50$  km/s/Mpc). Este resultado foi posteriormente confirmado por Colless (1987) a partir do estudo sistemático de 14 aglomerados ricos. Medidas de dispersão de velocidades tem sido realizadas mais frequentemente a partir dos vários levantamentos de velocidade radial de galáxias (Dressler e Shectman 1988, Colless 1987). Zabludoff, Huchra e Geller (1988), usando dados disponíveis para 107 aglomerados, estimaram um valor mediano para a dispersão central de velocidades destes sistemas da ordem de 650 km/s. A partir destes valores típicos de  $r_n$  e  $\sigma_o$ , estimamos a densidade central de massa,  $\rho_o = 2.75 \times 10^{14}$   $M_\odot/\text{Mpc}^3$ . A densidade de luminosidade central para aglomerados é cerca de  $1.75 \times 10^{12}$   $L_\odot/\text{Mpc}^3$  (Vide Faber e Gallagher 1979 para uma discussão detalhada sobre diferentes estimativas da razão M/L). Este valor da razão M/L é um exemplo do problema da matéria escura ou "massa faltante" originalmente descoberto por Zwicky (1933). Obviamente, qualquer sistema composto somente por estrelas como o Sol teria uma razão M/L igual a 1. Zwicky interpretou o alto valor da razão M/L como indicador da presença de matéria escura no aglomerado. Em  $\sim 25$  sistemas bem estudados a razão M/L (na banda B), dentro de  $\sim 3$  Mpc do centro do aglomerado, varia entre 90 e 420  $M_\odot/L_\odot$ .

O estudo sistemático do conteúdo galático de aglomerados ricos revelou uma significativa diferença entre as populações de galáxias em baixa e alta densidade galática. Esta dependência é normalmente referida como relação morfologia-densidade. Em amostras limitadas em magnitude, galáxias do tipo espiral são mais abundantes em regiões de baixa densidade local de galáxias enquanto elípticas e lenticulares dominam em regiões de alta densidade. Embora Hubble e Hummason (1931) tenham sido os primeiros a reconhecer esta relação, Dressler (1980) foi o primeiro a determinar quantitativamente a relação entre morfologia e densidade local a partir de sua amostra de aglomerados ricos. Outros trabalhos (e.g. Postman e Geller 1984) estenderam esta relação para ambientes de menor densidade, mostrando que esta relação se estende por 6 ordens de magnitude em densidade espacial.

A origem física desta relação entre a morfologia da galáxia e o meio ambiente onde esta reside permanece em discussão. Se aglomerados são formados pelo crescimento e colapso de perturbações iniciais, então durante o colapso o potencial gravitacional variou “violentamente”. Por exemplo, se o aglomerado colapsou a partir de um estado estacionário para um estado final virializado então a variação da energia por unidade de massa é da mesma ordem de grandeza que a própria energia do sistema. A principal motivação para se acreditar que a relaxação é um processo produzido por efeitos gravitacionais coletivos é o fato de que aglomerados apresentam uma distribuição de dispersão de velocidades quase constante. Neste cenário, temos que em regiões onde a escala de tempo dinâmica é  $t_{\text{col}} \geq H_0^{-1}$  não há dependência entre morfologia e densidade (onde  $t_{\text{col}} \sim (G\langle\rho\rangle)^{-1/2}$  é a escala de tempo do colapso). Em densidades da ordem de 600 galáxias/Mpc<sup>3</sup> galáxias lenticulares começam a dominar e para densidades acima de 3000 galáxias/Mpc<sup>3</sup> galáxias elípticas representam a maior fração de objetos. Nestas regiões extremas de densidade a escala de tempo de colapso é muito menor do que o “tempo de Hubble” e provavelmente menor do que o tempo necessário para a formação da componente disco. Desta forma podemos ver qualitativamente a ligação entre a morfologia e a escala de tempo dinâmica local.

Um importante aspecto do estudo da relação morfologia-densidade é a necessidade de se separar condições iniciais (condições físicas do sistema quando da época de formação das galáxias) dos efeitos de interação que podem modificar a estrutura das galáxias de acordo com o regime de densidade onde estas residem. Desta forma, é imperativo conhecer a distribuição de densidade local dentro de um aglomerado (mapeamento de subestruturas) para melhor se compreender como as galáxias evoluem neste ambiente.

Até há bem pouco tempo, acreditava-se que aglomerados fossem estruturas gravitacionais dinamicamente “relaxadas”, no entanto recentes observações têm indicado que na maioria dos aglomerados, mesmo nos mais próximos, existe um alto grau de sub-aglomeração (Fitchett 1988a). Os levantamentos de velocidades radiais de galáxias em aglomerados permitiu o estudo mais detalhado destas sub-aglomerações e este pode ser um passo importante para uma melhor compreensão dos efeitos ambientais na evolução das galáxias, ou seja,

como diferentes regiões de densidade galáctica alteram as propriedades globais das galáxias individualmente.

Sub-aglomeração é um fenômeno observado atualmente em vários sistemas. Cerca de 20% dos aglomerados na amostra observada por Colless (1987) e Dressler e Shectman (1988) possuem duas componentes distintas. Estas subestruturas observadas na faixa óptica são confirmadas por estudos independentes do perfil de briho superficial em raio-X (Fabricant et al. 1986). Mesmo Centaurus, onde existe uma alta concentração de galáxias, apresenta uma superposição de duas componentes distintas. A presença de sub-estrutura em Centaurus é extremamente importante. Primeiro no que se refere à medida da distância, uma vez que sub-estruturas podem induzir a erros sistemáticos nesta medida; segundo, o fato de que a razão massa/luminosidade seria superestimada por um fator 2, caso fosse considerado como uma única estrutura (Geller 1990; Lucey et al. 1986). Um aspecto interessante do estudo de sub-aglomerações é que tais subestruturas do aglomerado podem ter preservado as condições iniciais antes do colapso, e portanto conter informações cosmológicas fundamentais (Cavaliere e Colafrancesco 1990).

Aglomerados podem também ser usados no estudo sistemático do campo de velocidade local (Faber et al. 1989). Dois aspectos são importantes neste estudo: 1) é necessário que os aglomerados em estudo estejam homoganeamente distribuídos em todo o céu; 2) é fundamental que um número substancial de objetos ( $\sim 100$ ) por aglomerado seja medido, para que se tenha uma amostra estatisticamente significativa que minimize o erro final na medida da distância e por conseguinte da velocidade peculiar. A medida de velocidade peculiar pode em princípio revelar as características da distribuição de massa em grandes escalas. Além disto estabelece um vínculo importante para os cenários de formação de estruturas com “matéria escura fria”, os quais não prevêem velocidades peculiares em grande escala em relação à expansão de Hubble para aglomerados ricos. Portanto, o estudo sistemático de aglomerados pode confirmar ou não os movimentos peculiares observados até então (Bahcall et al. 1986).

Neste trabalho iniciamos a investigação sistemática do aglomerado de Abell A3558 no sentido de estabelecer suas propriedades morfológicas e estruturais. Apresentamos uma análise detalhada de todos os procedimentos utilizados para a geração de um catálogo homogêneo e estatisticamente completo de galáxias neste sistema. Além disso, estudamos as propriedades da subestrutura identificada neste aglomerado. A3558 faz parte de um superaglomerado localizado a uma distância equivalente a  $\sim 15000$  km/s. A partir deste trabalho poderemos estudar todo o complexo de aglomerados do ponto de vista de sua morfologia e estrutura, como base para um estudo dinâmico da estrutura como um todo.

## 2. Dados Utilizados e Metodologia

### 2.1 Dados Utilizados

A imagem digitalizada do aglomerado de A3558 foi obtida a partir do conjunto de rastreamentos de placas fotográficas IIIa-J do levantamento do ESO/SRC, realizado no STScI. Maiores detalhes sobre as características do microdensitômetro utilizado são apresentados em Lasker et al. (1990). A imagem é centrada na galáxia cD do aglomerado, com uma área de  $2048 \times 2048$  pixels (cada pixel de  $1.67''$ ), o que corresponde a uma região de aproximadamente  $1^\circ \times 1^\circ$  (Figura 1).

### 2.2 Descrição Geral do Programa de Identificação

A imagem de A3558 foi reduzida utilizando-se o pacote FOCAS ("Faint Object Classification and Analysis System"). Este sistema é constituído de uma série de programas que tem como objetivo a geração e a manipulação de catálogos de objetos detectados numa imagem digitalizada. O FOCAS é particularmente útil para a fotometria de um grande número de objetos. Uma descrição mais detalhada deste sistema de análise de imagens pode ser encontrada em Jarvis & Tyson (1979) e Valdes (1982a).

Os principais programas do pacote FOCAS utilizados para a redução dos dados foram:

- ◇ **setcat** → responsável pela inicialização do catálogo. Os parâmetros a serem utilizados em todas as fases do processamento são definidos neste programa de forma interativa.
- ◇ **detect** → este programa avalia se um dado conjunto de pixels forma um objeto dependendo dos parâmetros definidos previamente em "setcat".
- ◇ **sky** → determina o valor da contribuição do fundo de céu local de cada objeto.

- ◊ **evaluate** → determina parâmetros característicos de cada objeto, tais como: magnitude total e isofotal, área, momentos de primeira e segunda ordem, etc.
- ◊ **findstars** → seleciona os objetos estelares que irão definir um padrão estelar a ser utilizado na rotina de classificação (“resolution”).
- ◊ **splits** → verifica se um determinado objeto detectado é resultado da junção de outros dois objetos, realizando a separação quando possível.
- ◊ **resolution** → realiza a separação estrela-galáxia através de um estimador bayesiano (Vide Cap. 3 para uma descrição detalhada do método utilizado nesta separação).

### 2.2.1 Parâmetros Usados no FOCAS

Alguns parâmetros fundamentais são necessários para o processo de redução dos dados de uma imagem digitalizada através do FOCAS. Nesta seção, apresentamos os parâmetros utilizados neste trabalho.

Definimos uma área mínima para a detecção dos objetos de 45 pixels quadrados. Este valor corresponde a área de um círculo de raio de cerca de 3 vezes o valor médio do “seeing” do local de observação.

Definimos também o nível acima do fundo de céu a partir do qual os objetos são detectados. Consideramos que o desvio padrão ( $\sigma$ ) do céu é constante ao longo de toda a região. Adotamos o valor de  $3\sigma$  para o nível de corte acima do céu, correspondente a 7% do valor do fundo de céu.

### 2.2.2 Exame Visual do Catálogo Resultante

Após a detecção e classificação dos objetos, efetuamos uma inspeção visual do catálogo obtido. Os problemas que podem ocorrer não estão associados ao classificador em si. De forma geral, o que pode ocorrer com maior frequência se resume aos seguintes casos:

- ◇ 1 - Em objetos de menor fluxo total, há um aumento na probabilidade de classificação errônea de estrelas como galáxias e vice-versa. Isto é, no limite de magnitude para a placa utilizada, galáxias e estrelas se tornam cada vez mais indistinguíveis. Isto significa que a probabilidade de um objeto ser classificado corretamente tende a 50 % nestes casos.
- ◇ 2 - Incertezas na partição do espaço ( $\alpha, \beta$ ) em classes astronômicas podem gerar uma classificação errada de um objeto na fronteira entre partições (veja o Cap. 3). Os erros que podem surgir ocorrem justamente quando se associa um nome (ex: "galáxia") aos objetos de uma região do espaço de parâmetros.
- ◇ 3 - A figura de difração de estrelas brilhantes forma uma imagem alongada, o que provoca a classificação destes objetos em galáxias. Este problema é relativamente simples de se corrigir pela inspeção visual.
- ◇ 4 - Certos objetos múltiplos não foram separados pelo FOCAS. Em geral são estrelas ou galáxias "duplas", "triplas", etc, classificadas como galáxias. Este foi um dos principais problemas encontrados na revisão. A Figura 2 mostra um exemplo onde os objetos não foram separados. Tais objetos, portanto, foram eliminados do catálogo de galáxias.
- ◇ 5 - Tendo em vista o que foi comentado no item 2 acima, vários objetos classificados como "long" e "sf" (estrela difusa) foram reclassificados como galáxias, por inspeção visual.

A Tabela 1 apresenta a estatística da revisão visual do catálogo de galáxias do A3558. As colunas são apresentadas na seguinte ordem: (1) classificação do objeto; (2) número de objetos antes da revisão; (3) percentual de objetos antes da revisão; (4) número de objetos depois da revisão; (5) percentual de objetos depois da revisão. Algumas observações devem ser acrescentadas, tendo em vista as informações apresentadas nesta tabela:

- Para 24 objetos múltiplos detectados antes da revisão, não foi possível realizar a separação em objetos distintos.



- Vários objetos “longos” eram grupos de estrelas dispostas linearmente, que não foram separadas. Outros “longos” eram galáxias vistas de “perfil”, e foram reclassificados, portanto, como galáxias, ficando o número final de “longos” igual a zero.
- Apesar de vários “longos” serem reclassificados como galáxias, e alguns “difusos” também, o número total de galáxias diminuiu, pois vários objetos classificados como galáxias antes da revisão foram reclassificados como estrelas ou grupos de estrelas.

## 2.3 Calibragem da Escala de Magnitude

### 2.3.1 Estimativa e Erro do Ponto Zero da Escala de Magnitude

A calibragem da escala de magnitude foi realizada a partir dos dados de fotometria fotoelétrica obtidos por Melnick & Quintana (1984). Neste trabalho, os autores apresentam 3 galáxias de A3558, com magnitudes nas bandas  $g$  e  $r$  de Gunn-Thuan, em uma série de aberturas. O valor da magnitude instrumental foi obtido, para cada abertura, usando o programa REVIEW do FOCAS. A equação a seguir foi utilizada na transformação para o sistema fotométrico de Johnson (Vide Melnick & Quintana 1984):

$$B = 0.99g + 0.63(g - r) + 0.43$$

Para a determinação da constante de calibragem, o valor de  $B - m_{instr}$  foi obtido para cada abertura. A mediana destes valores,  $29.65 \pm 0.19$ , foi adotada como constante de calibração da escala de magnitude. Este valor é consistente com o obtido por Ribeiro (1993) utilizando o mesmo material fotográfico e mesma metodologia de redução. Na Tabela 2 apresentamos os dados relativos à calibragem da escala de magnitude na seguinte ordem: (1) identificação do objeto, segundo a lista de Melnick & Quintana (1984); (2) abertura em segundos de arco; (3) magnitude total na banda B-Johnson obtida a partir da lista apresentada por Melnick & Quintana e da equação de transformação apresentada acima; (4)

magnitude instrumental total na banda B-Johnson, obtida através do FOCAS; (5) constante de calibração obtida através da diferença entre os dados da coluna (3) e da coluna (4).

### 2.3.2 Estimativa da Magnitude Limite do Catálogo

A magnitude limite do catálogo de objetos foi obtida a partir do histograma de magnitudes totais dos objetos (estrelas e galáxias) detectados pelo FOCAS. Como definido por Picard (1991) a magnitude limite é aquela associada ao último intervalo do histograma de magnitudes antes do número de objetos detectados começar a decrescer abruptamente. O histograma é mostrado na Figura 3. A magnitude limite obtida é de 18.75, sendo 0.25 o intervalo de magnitude utilizado para a construção do histograma. É importante mencionar que esta definição utilizada por Picard é somente operacional e não implica que este seja realmente o limite alcançado. Vários são os efeitos que levam à “incompleteza” de um dado catálogo, mesmo que este tenha sido construído de maneira objetiva, como tratado aqui neste trabalho.

A Figura 4 mostra um mapa com as galáxias identificadas pelo FOCAS até a magnitude limite. Neste mapa, as galáxias detectadas são representadas por elipses, cada uma indicando sua respectiva área, elipticidade, e ângulo de posição.

### 2.4 Limite de Detectabilidade do Material Fotográfico

O limite estabelecido para o catálogo de objetos de A3558 foi baseado na composição MATERIAL FOTOGRAFICO + CARACTERÍSTICAS DA DIGITALIZAÇÃO. As placas fotográficas do levantamento do ESO/SRC são certamente de alta qualidade, no entanto os parâmetros de digitalização, como por exemplo o tamanho da fenda utilizada para rastreamento da placa, não nos permitem manter o nível de confiabilidade de detecção nos limites de objetos com fluxo total pequeno. Isto nos levou a estabelecer uma área mínima ( $A_{\min}$ ) para um objeto “detectado” ser considerado um objeto “da lista”, e um corte de  $k\sigma$  (onde  $k = 3$ ) acima do nível do fundo de céu. Nesta seção exercitamos estas duas variáveis,  $A_{\min}$  e

k, para melhor compreender como a “completeza” de nosso catálogo final é sensível a estes parâmetros.

Nossa primeira escolha de  $A_{\min}$  e k certamente eliminava as galáxias anãs e as de baixo brilho superficial. Neste sentido procuramos estabelecer valores de  $A_{\min}$  e k que permitam a introdução destes sistemas em nosso catálogo. Exploramos assim o limite mínimo de  $k = 1.2$  e portanto incluindo os objetos de baixo brilho superficial. Fixando  $A_{\min}$  em 45, estamos deliberadamente excluindo as galáxias anãs. Este viés deve ser levado em conta quando da análise das propriedades físicas do aglomerado A3558.

A Figura 5 mostra o histograma de magnitudes de todos os objetos detectados com o par  $(A_{\min}, k) = (45, 1.2)$ . Nesta figura, podemos perceber mais claramente o problema da determinação da magnitude limite do catálogo segundo Picard (1991). O conceito de queda abrupta no comportamento do histograma é impreciso e depende do que se considera abrupto em termos percentuais. Por exemplo, na Figura 5 se comparamos os intervalos [19.25-19.50] e [19.50-19.75] verificamos que esta queda representa 10% da contagem do primeiro intervalo. Se comparamos os intervalos [20.50-20.75] e [20.75-21.00] a queda representa 28%. Desta forma, é imperativa a existência de um critério objetivo para caracterização da queda do histograma de magnitudes. No caso da Figura 5, podemos estabelecer um limite de 19.50 ou 20.75 dependendo do percentual de queda que escolhemos. Para ser coerente com o limite estabelecido pelo histograma da Figura 3, deveríamos escolher o limite de 20.75. Nas Figuras 6 e 7 mostramos o mapa de elipses das galáxias detectadas até os limites de 19.50 e 20.75, respectivamente. É importante enfatizar que na análise apresentada no capítulo 4 o catálogo utilizado foi aquele estabelecido com um corte em  $m_{\lim} = 18.75$ , dada a maior confiabilidade no que se refere à sua completeza.

## 2.5 Obtenção de Coordenadas Equatoriais

As coordenadas dos objetos do catálogo foram obtidas a partir das informações contidas no “cabeçalho” da imagem fornecida pelo STScI. Existem dois procedimentos específicos no pacote IRAF que são usados para a conversão de coordenadas x,y sobre a placa em ascensão

reta (AR) e declinação (DEC): **makewcs** e **xyeq**, ambos em [**stsdas.gasp**]. Maiores detalhes sobre a precisão interna destas coordenadas podem ser obtidos em Lasker et al. (1990). O erro típico em AR e DEC é da ordem de 0.2".

**TABELA 1****Estatística da Inspeção Visual do Catálogo de Galáxias de A3558**

---

Classificação (1)	$N_A$ (2)	% (3)	$N_D$ (4)	% (5)
estrelas	549	49.5	685	63.4
galáxias	426	38.4	325	30.1
difusos	81	7.3	70	6.5
longos	54	4.8	0	0
TOTAL	1110		1080	

---

TABELA 2

## Calibração de Magnitudes

# Galáxia (1)	Abertura ( $\prime$ ) (2)	$B$ (3)	$m_{instr}$ (4)	$K$ (5)
1	20.1	15.549	-14.23	29.779
	25.0	15.619	-14.52	30.139
	33.5	15.068	-14.80	29.868
	40.4	14.829	-14.93	29.759
	62.4	14.560	-15.93	29.740
2	20.1	15.783	-13.89	29.673
	25.0	15.589	-14.03	29.619
	33.5	15.433	-14.16	29.593
	46.4	15.218	-14.28	29.498
6	25.0	16.221	-13.33	29.551
	33.5	16.096	-13.40	29.496
	40.4	16.026	-13.43	29.456

## 2.6 Índice de Figuras

Figura 1: Mapa de contraste da imagem digitalizada da região em torno do aglomerado de A3558. A orientação deste mapa é Norte para cima e Oeste para a direita.

Figura 2: Mapa de níveis de contorno (intensidade) de objeto “duplo”, onde não houve a separação. Casos como este foram excluídos do catálogo final de galáxias.

Figura 3: Histograma de magnitudes dos objetos detectados na imagem. Este gráfico foi utilizado numa primeira estimativa da magnitude limite do catálogo.

Figura 4: Mapa de distribuição de galáxias com magnitude  $m_B < 18.75$ . Cada galáxia é representada por uma elipse, que indica a área, elipticidade e ângulo de posição de cada objeto. A orientação deste mapa segue a da Figura 1.

Figura 5: Idem à Figura 3 para o catálogo exploratório dos limites de detectabilidade do material fotográfico utilizado neste trabalho.

Figura 6: Idem à Figura 4 para o catálogo exploratório. Neste caso as galáxias possuem magnitude  $m_B < 19.50$ .

Figura 7: Idem à Figura 6, incluindo as galáxias com magnitude  $m_B < 20.75$ .

Figura 1

N

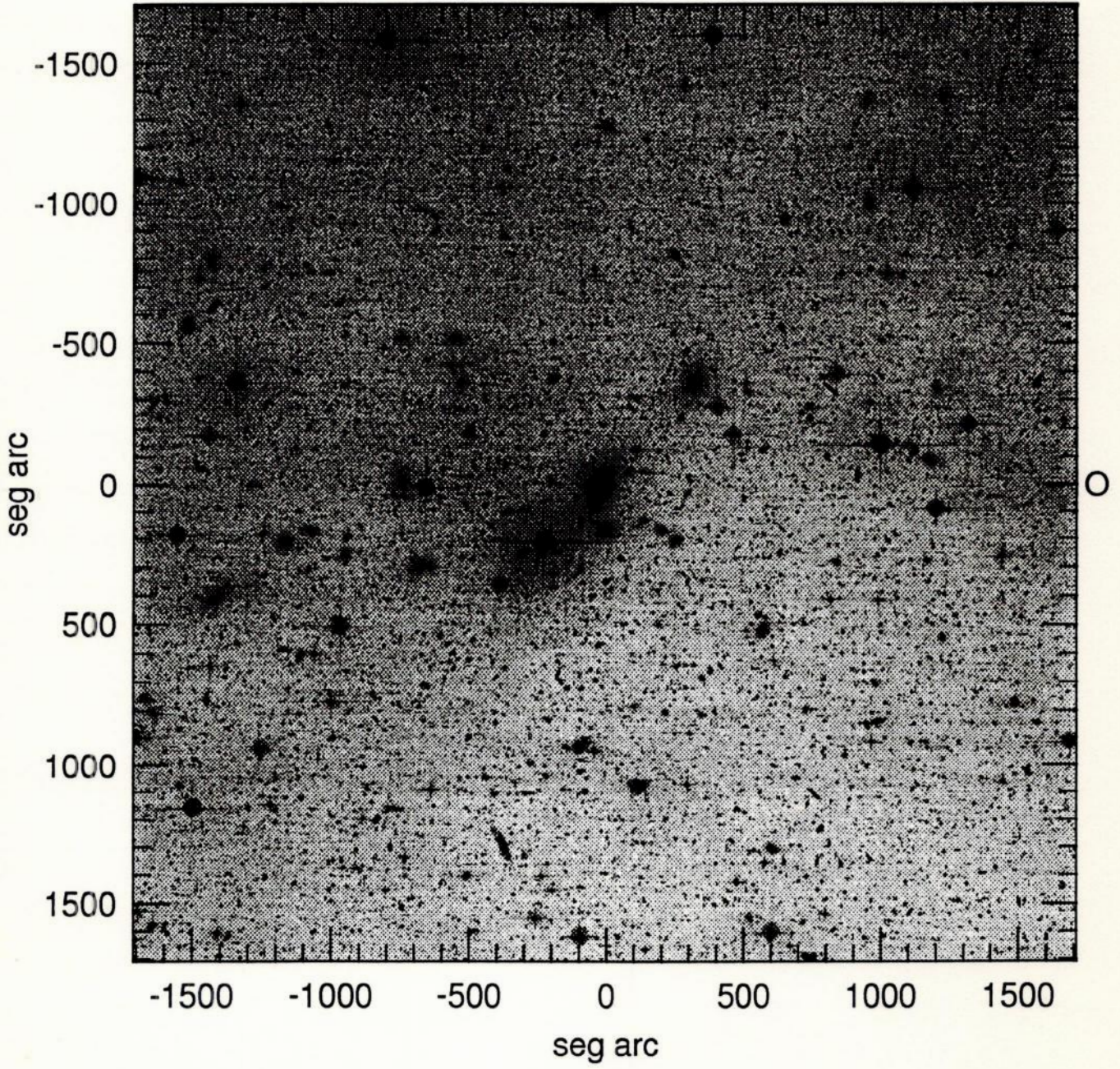




Figura 2

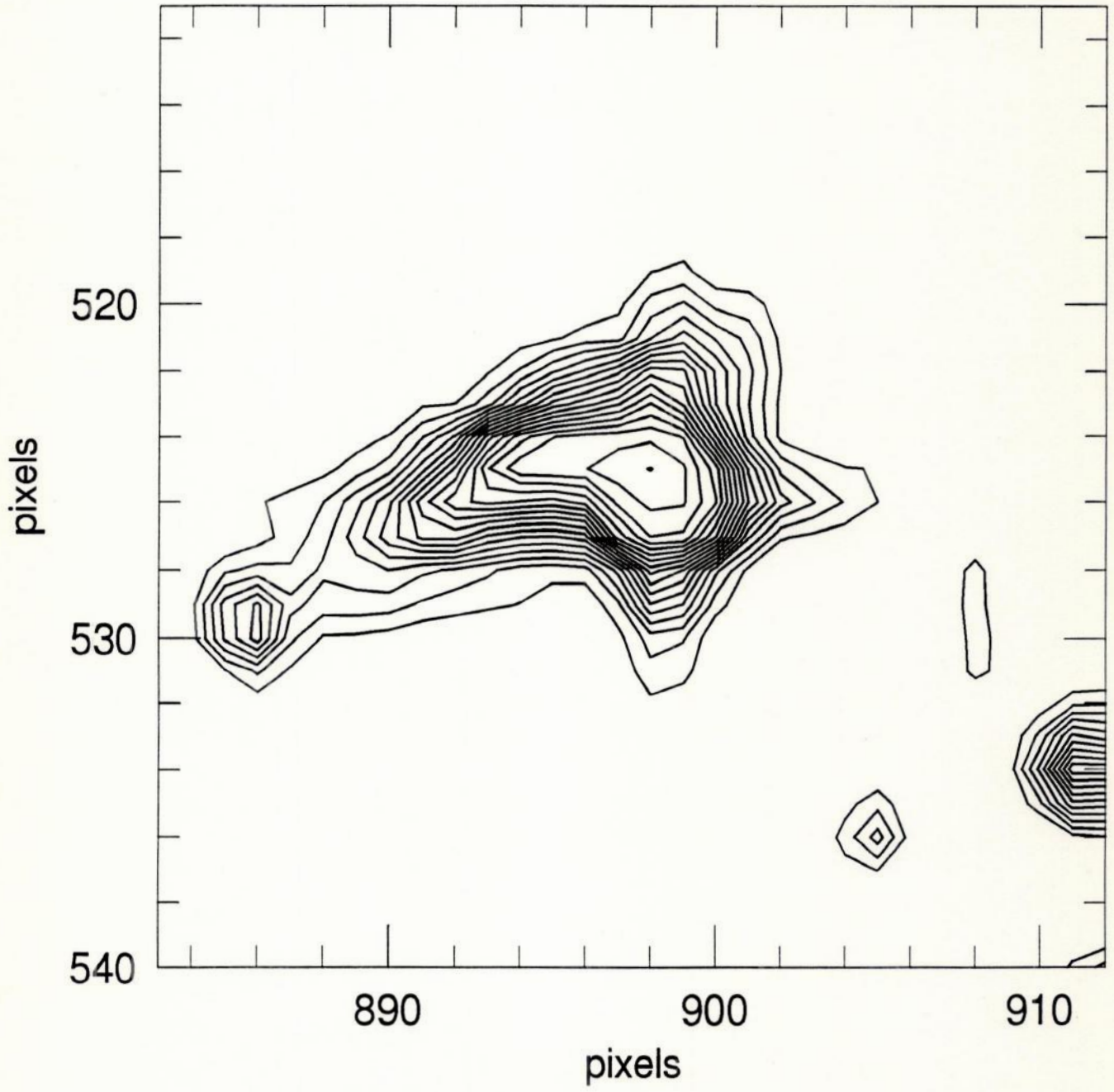


Figura 3

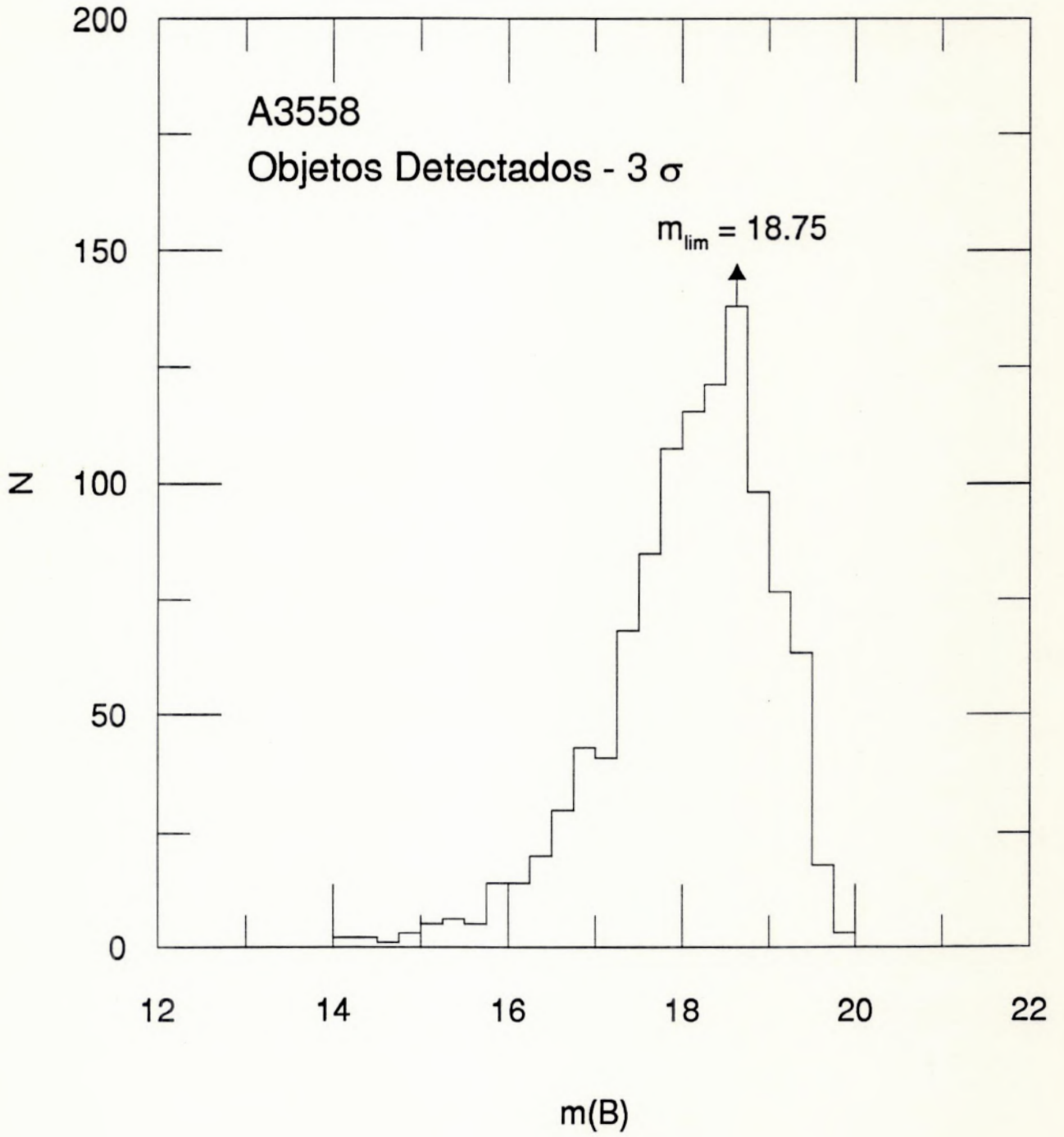


Figura 4

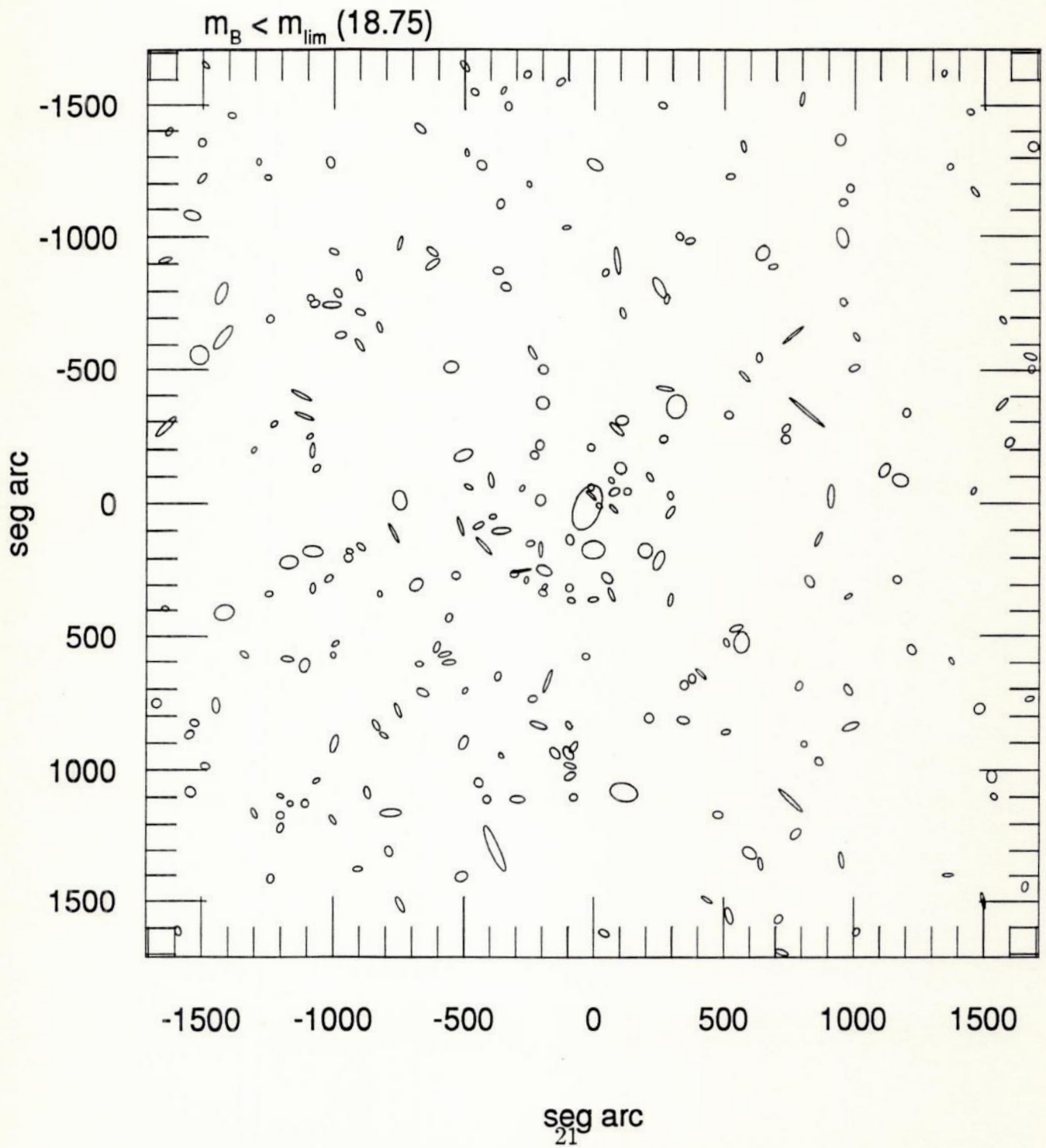


Figura 5

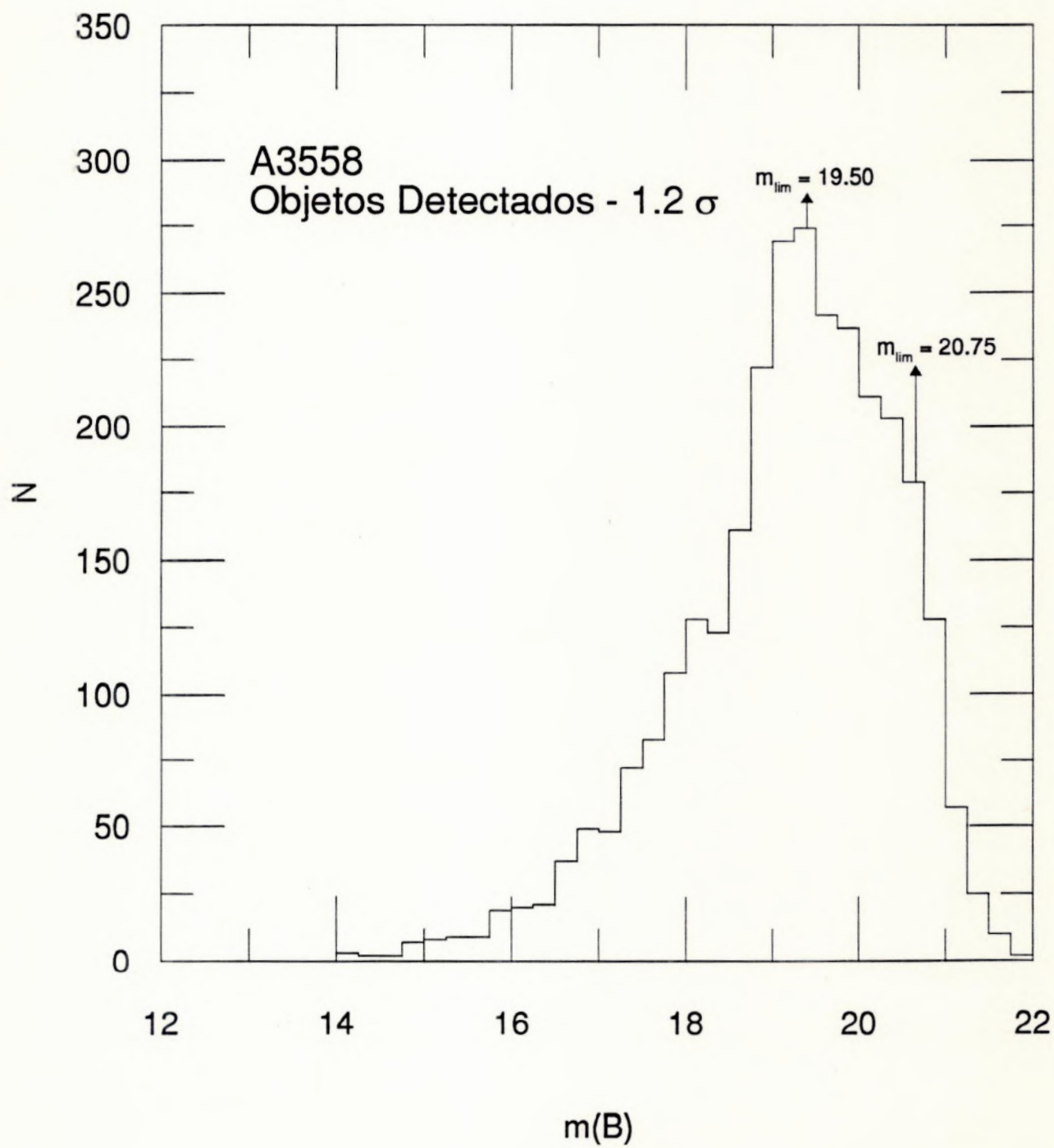


Figura 6

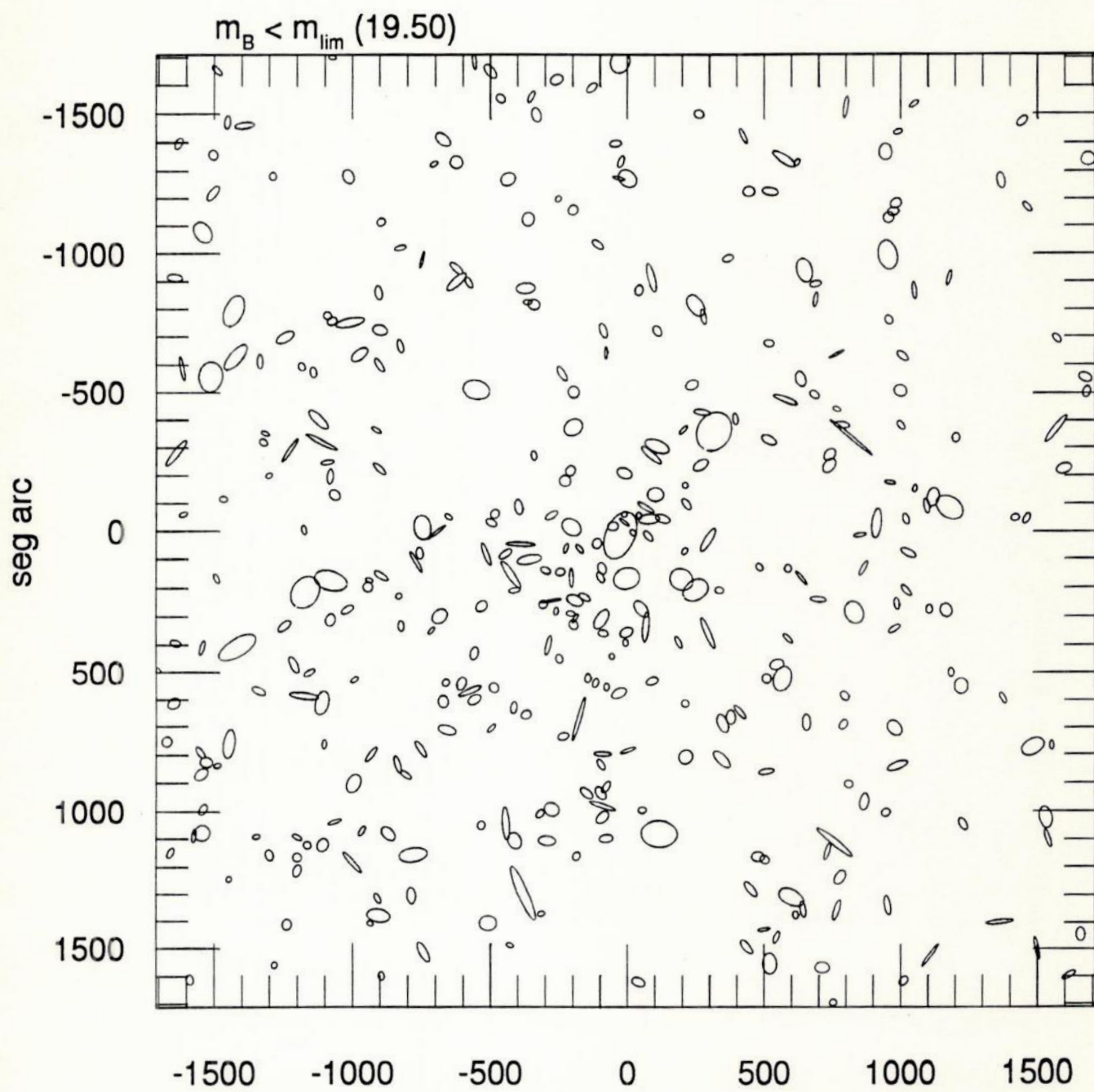
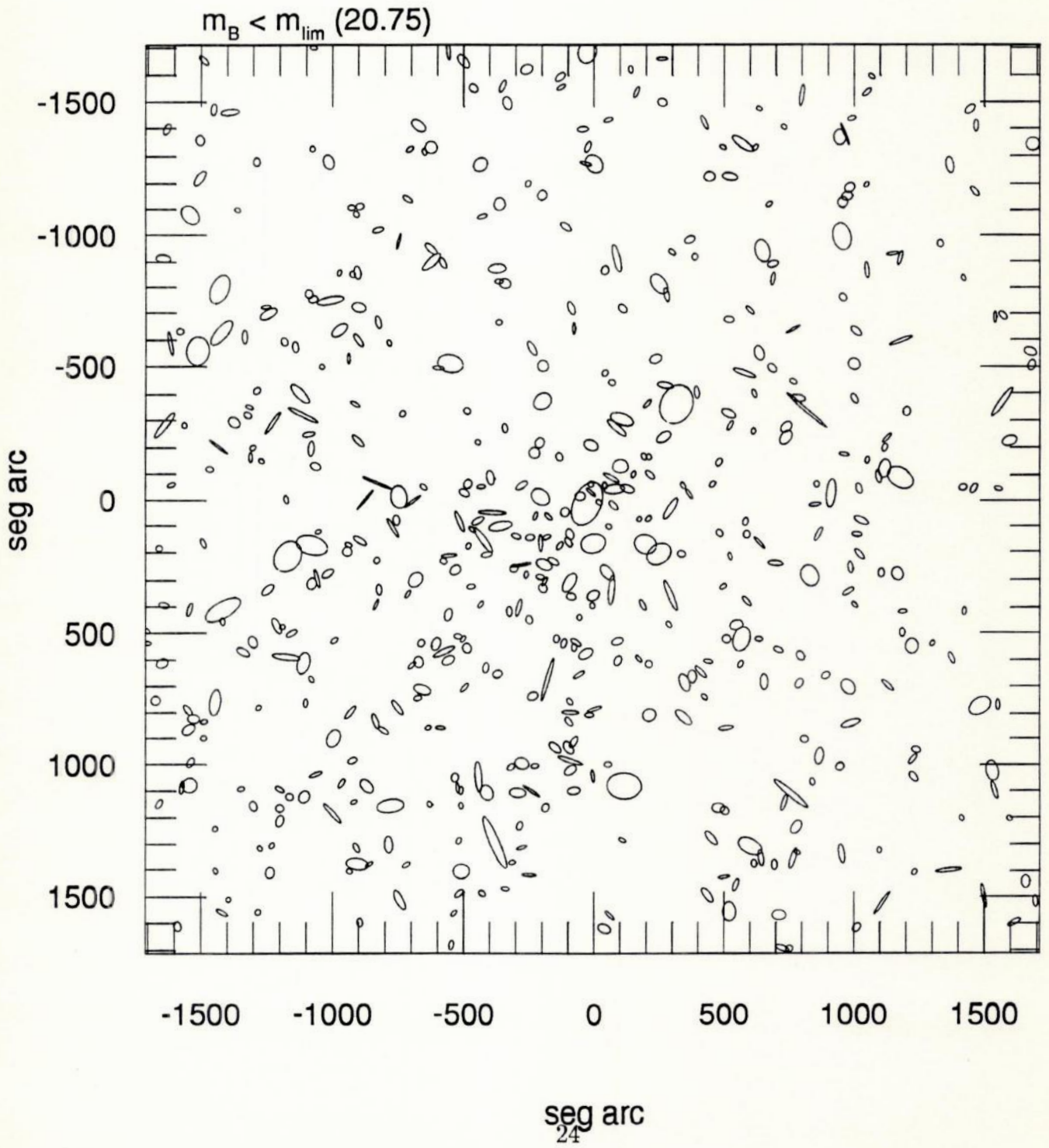


Figura 7



## 3. Descrição do Classificador Utilizado Pelo FOCAS

### 3.1 - Introdução

Este capítulo tem como objetivo descrever o método de classificação automática utilizado pelo FOCAS (Valdes, 1982), de importância fundamental na construção do catálogo de objetos do aglomerado A3558.

Em qualquer processo de classificação automática as propriedades de uma dada imagem são quantificadas e a partir disto uma decisão é feita quanto à natureza do objeto que deu origem àquela imagem. Por exemplo, especificamente no nosso caso queremos desenvolver uma ferramenta que seja capaz de distinguir uma estrela de uma galáxia sem que tenhamos de assumir algum modelo para a imagem que desejamos classificar. O processo de decisão sobre a natureza do objeto que dá origem a uma certa imagem envolve 3 conceitos fundamentais:

- ◇ Que propriedades da imagem devem ser medidas?
- ◇ De que forma deve ser feita a decisão da classificação?
- ◇ Qual a acurácia da decisão?

Estas questões devem ser respondidas por qualquer que seja o método utilizado para classificar um objeto e em essência as respostas determinarão a qualidade do classificador. A questão da “decisão” dá origem a dois métodos distintos: (a) no primeiro a informação essencial é a distribuição das intensidades dos pixels com a posição e (b) quando se leva em consideração somente uma função desta distribuição. O procedimento descrito em (b) é chamado de “estimador paramétrico” (e.g. Jarvis & Tyson, 1981). Este método utiliza um conjunto de parâmetros obtidos a partir da distribuição de intensidade  $I(x,y)$  (onde  $x,y$  são coordenadas cartesianas) e procura separar estrelas de galáxias a partir de correlações entre estes parâmetros. Tais metodologias são empíricas e levam em consideração as características do ruído associado à medida imagem somente de maneira indireta. Em contraposição, o

método descrito em (a), denominado “estimador Bayesiano” (e. g. Sebok, 1979), utiliza a distribuição  $I(x,y)$ , incluindo as propriedades do ruído do detetor utilizado na obtenção de  $I(x,y)$ . A classificação é feita comparando-se  $I(x,y)$  com distribuições esperadas de intensidade de objetos de diversas classes. Este processo envolve a maximização da probabilidade de decidir corretamente sobre a classificação da imagem em questão. Na próxima seção apresentaremos em maior detalhe os fundamentos do classificador.

### 3.2 - O Classificador

Após a fase de detecção, cada pixel (dentro da área definida pelo objeto detectado) contém o dado básico acerca da imagem do objeto, isto é, o valor de intensidade ou contagem de fótons. A distribuição de ruído em um detector astronômico ideal é descrita por uma estatística de Poisson, e este fato é considerado no método de classificação adotado pelo FOCAS. A partir da contagem observada de fótons, o método Bayesiano escolhe uma classificação para o objeto, associando-o à classe de objetos que mais provavelmente pode gerar aquela contagem de fótons. Matematicamente, escolhe-se a classe  $C_j$  que maximiza a probabilidade de que, dada a contagem observada de fótons,  $N_i$ , o objeto seja de classe  $C_j$ . Esta probabilidade é dada por  $P(C_j | N_i)$ , que, pelo Teorema de Bayes, pode ser escrita como:

$$P(C_j | N_i) = \frac{P(N_i | C_j)P(C_j)}{P(N_i)} \quad (1)$$

onde

$P(N_i | C_j) \equiv$  probabilidade de que os  $N_i$  sejam obtidos, dado que o objeto é de classe  $C_j$ .

$P(C_j) \equiv$  probabilidade a priori de que o objeto seja de classe  $C_j$ .

$P(N_i) \equiv$  probabilidade de se obter as contagens  $N_i$ .



$i \equiv$  indexador dos pixels da imagem (soma em  $i$  significa somar sobre toda a área da imagem).

As probabilidades  $P(C_j)$  e  $P(N_i)$  são iguais para um classificador sem “viés”, e, portanto,  $P(C_j | N_i)$  será máxima quando  $P(N_i | C_j)$  também for. E, ainda,  $P(N_i | C_j)$  pode ser obtida a partir das características do ruído do detector e das intensidades esperadas para um objeto de classe  $C_j$ , como será observado adiante.

Numa imagem, as contagens de fótons livres de ruído podem ser escritas como:

$$\langle N_i \rangle = N_o t_i + N_s \quad (2)$$

onde

$N_o \equiv$  escala de intensidade específica

$N_s \equiv$  valor médio do fundo de céu

$t_i \equiv$  “templates” que geram a forma da imagem

O “template” estelar é gerado a partir da média de várias imagens de estrelas brilhantes e não-saturadas retiradas do catálogo examinado. Para imagens resolvidas (neste caso, Sebok usa um modelo simples de galáxia), o classificador do FOCAS usa um conjunto de “templates” de dois parâmetros, dado por:

$$t(r_i) = (1 - \beta)s(r_i) + \beta s(r_i/\alpha) \quad (3)$$

onde

$r_i \equiv$  posição do pixel  $i$

$\alpha \equiv$  parâmetro de alargamento (ou “estreitamento”, se  $\alpha < 1$ )

$\beta \equiv$  fração alargada da estrela

$s(r_i) \equiv$  "template" estelar

Os "templates" consistem de uma parte puramente estelar,  $(1 - \beta)s(r_i)$ , e uma parte estelar alargada,  $\beta s(r_i/\alpha)$ . Não é necessário utilizar um modelo de galáxia para estimar a probabilidade da imagem ser resolvida, já que um objeto resolvido sempre dará um melhor ajuste para um modelo com  $\alpha > 1$  do que para um modelo de imagem não-resolvida com  $\alpha \approx 1$ . Ou seja, as galáxias possuirão uma maior probabilidade de ajuste a um template ligeiramente resolvido do que para um totalmente não-resolvido. Portanto, o classificador se empenha em separar os objetos como não-resolvidos/resolvidos, ao invés da classificação estrela/galáxia. Isto é, ao invés de usar um modelo particular de galáxia, o classificador parte de um único "template" não-resolvido e verifica se uma maior probabilidade resulta quando este "template" é ampliado em várias escalas.

É necessário se calcular a probabilidade de que o conjunto de valores de intensidades observadas,  $N_i$ , seja resultante de uma classe de objetos representados por um dos templates, livres de ruído, dado pela eq. (2). Um modelo para a distribuição de ruído pode ser descrito por uma distribuição de Poisson, que fornece as flutuações de  $Q_i$ , no pixel  $i$ , em relação ao seu valor médio,  $\langle Q_i \rangle$ :

$$P(Q_i) = \frac{\langle Q_i \rangle^{Q_i}}{Q_i!} \exp(-\langle Q_i \rangle) \quad (4)$$

$\langle Q_i \rangle$  é chamado de "Noise Equivalent Quanta" (NEQ), e descreve a estatística do ruído de saída. Ou seja, a eq. (4) é aplicada para se encontrar a probabilidade de que um conjunto observado de intensidades,  $I(x,y)$ , seja proveniente de um objeto com perfil livre de ruído dado pela eq. (2).

O comportamento de entrada/saída da razão sinal/ruído que caracteriza um detector é dado por:

$$DQE(\langle N \rangle) = \frac{(S/N)_{sai}^2}{(S/N)_{ent}^2} = \frac{\langle Q \rangle}{\langle N \rangle} \quad (5)$$

DQE é chamado de "Detective Quantum Efficiency". Uma aproximação simples para a relação do parâmetro DQE, apropriada para a maioria das placas fotográficas em uso na astronomia, é dada por:

$$DQE(\langle N \rangle) = \frac{q}{\langle N \rangle} \quad (6)$$

onde  $q$  é uma constante. O estimador de máxima verossimilhança é obtido a partir da eq. (4), levando-se em conta que a distribuição de intensidades do objeto é descrita pela eq. (2). Portanto, a probabilidade é obtida multiplicando-se a eq. (4) sobre todos os pixels da imagem:

$$\ln P(\langle Q_i \rangle) = \sum_i Q_i \ln \langle Q_i \rangle - \ln Q_i! - \langle Q_i \rangle \quad (7)$$

Utilizando a fórmula de Stirling, dada por  $\ln Q_i! \approx Q_i \ln Q_i - Q_i$ , encontramos que:

$$\ln P(\langle Q_i \rangle) = \sum_i Q_i \ln \langle Q_i \rangle - Q_i \ln Q_i + Q_i - \langle Q_i \rangle \quad (8)$$

que podemos reescrever como:

$$\ln P(Q_i | \langle Q_i \rangle) = \sum_i \langle Q_i \rangle \left( \frac{Q_i}{\langle Q_i \rangle} (1 - \ln(Q_i / \langle Q_i \rangle)) - 1 \right) \quad (9)$$

Utilizando  $\frac{Q_i}{\langle Q_i \rangle} = \frac{N_i}{\langle N_i \rangle}$  e as eqs. (5), (6):

$$\ln P(N_i | \langle N_i \rangle) = q \sum_i \left( \frac{N_i}{\langle N_i \rangle} (1 - \ln(N_i / \langle N_i \rangle)) - 1 \right) \quad (10)$$

Tendo em vista a eq. (2) e a dependência funcional do "template" dada por (3), obtemos:

$$\lambda = \ln P(N_i | \alpha, \beta) = q \sum_i \left( \frac{N_i}{(N_o t_i + N_s)} \left( 1 - \ln \frac{N_i}{(N_o t_i + N_s)} \right) - 1 \right) \quad (11)$$

Na expressão acima,  $\lambda$  é o estimador de máxima verossimilhança. Quanto mais próxima uma imagem estiver do “template” em análise, maior é o estimador.  $N_s$  é encontrado a partir da média dos pixels do fundo de céu, vizinhos à imagem.  $N_o$ , para um dado “template”, é encontrado maximizando-se  $\lambda$  com respeito a  $N_o$ .

A imagem deve estar corretamente centrada para o ajuste de templates, a fim de que a probabilidade Bayesiana tenha significado. O método usado no FOCAS determina  $\lambda$  para o “template” estelar centrado numa faixa de pixels próxima ao centro de máxima luminosidade. A posição de  $\lambda_{max}$  é comparável a um ajuste Gaussiano. Este centro é usado para todos os “templates”, isto é, é dado ao “template” estelar a melhor chance de maximizar a probabilidade. Se a melhor tentativa de se ajustar uma imagem a um “template” não-resolvido fornecer uma probabilidade menor do que qualquer outro “template”, então a imagem é resolvida. Isto torna, portanto, desnecessário realizar o processo de maximização do centro para todos os outros “templates”.

Podemos, então, resumir os passos de classificação abordados acima da seguinte forma:

- ◇ a - Um “template” estelar é obtido, numa abertura quadrangular, a partir da média de um certo número de estrelas brilhantes e não-saturadas do catálogo.
- ◇ b - Uma série de “templates” alternados é elaborada a partir do “template” estelar puro, através da variação de diferentes escalas.
- ◇ c - Para cada objeto, um centro da imagem é determinado, maximizando  $\lambda$  (eq. 11) para o “template” estelar.
- ◇ d - Os valores de  $\lambda$  para os “templates” do espaço  $(\alpha, \beta)$  são computados, dentro da área definida pela intersecção do “template” quadrangular com a área isofotal da imagem.

- ◇ e - Os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  que maximizam  $\lambda$ ,  $(\alpha_{max}, \beta_{max})$ , descrevem o “template” mais provável.
- ◇ f - As classes  $C_j$  que podem ser associadas ao objeto são obtidas a partir da partição do espaço  $(\alpha, \beta)$ , sendo possível, devido às várias partições permitidas, a adoção de várias classificações intermediárias (ex: estrelas difusas, galáxias compactas, etc).
- ◇ g - Cada classe pode ser associada a uma probabilidade, através da integração de  $P(N_i | \alpha, \beta)$  sobre a partição correspondente à classe  $C_j$ , isto é:

$$P(N_i | C_j) = \int_{C_j} P(N_i | \alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (12)$$

Por exemplo, sejam dois objetos diferentes, uma estrela e uma galáxia, em que os máximos de  $\lambda$  ocorrem no mesmo  $\alpha$  (e  $\beta = 1$ ). As probabilidades, dadas por (12), ao longo de um intervalo  $d\alpha$  serão duas curvas distintas. A curva da estrela terá um pico acentuado no ponto  $\alpha$ , fornecendo uma maior probabilidade de classificá-la como estrela. A curva de probabilidade da galáxia será bem mais “achatada”, o que indica uma probabilidade significativa de possuir escalas muito maiores do que o “template” estelar (e.g., Valdes 1982, Figura 1).

- ◇ h - Existem casos em que o “template” mais provável não corresponde à classe mais provável, e isso acontece quando o template está próximo à fronteira entre duas classes no espaço  $(\alpha, \beta)$ , ou quando  $P(N_i | \alpha, \beta)$  tem uma distribuição muito alargada (imagens de objetos de baixo fluxo total). No entanto, não se trata de um erro do classificador, mas sim devido às incertezas na partição do espaço  $(\alpha, \beta)$  em classe astronômicas. Sabemos que um classificador automático classifica as imagens (que formam um conjunto contínuo), e não os objetos físicos (que, por sua vez, formam um conjunto discreto, isto é, de estrelas, galáxias, etc). Neste sentido, portanto, a partição do espaço  $(\alpha, \beta)$  é dita “subjativa”. Ou seja, o conhecimento das probabilidades, dadas por este método de classificação, permite a liberdade de se identificar objetos de fronteira, e agir de acordo com a conveniência na análise de classificação.

## 4. Resultados

É de grande interesse o estudo detalhado do aglomerado de A3558, que faz parte da chamada Concentração Shapley, composta de 25 aglomerados de galáxias (Bardelli et al. 1993). A Tabela 1 lista as características gerais deste aglomerado. Mais precisamente, os aglomerados A3558, A3556, A3562 e SC1329-314 parecem compor o núcleo da Concentração Shapley, interagindo gravitacionalmente entre si e formando uma estrutura alongada. O baricentro deste superaglomerado se encontra numa direção relativamente próxima tanto do chamado "Grande Atrator" ( $\Delta\theta \sim 10^\circ$ ) como da direção do movimento peculiar do Grupo Local ( $\Delta\theta \sim 30^\circ$ ) com respeito ao referencial definido pela radiação cósmica de fundo (Vetolani et al. 1990, Melnick & Moles 1987). O estudo de A3558 torna-se interessante tanto do ponto de vista de suas propriedades dinâmicas, quanto por suas propriedades em termos das estruturas em grande escala.

Neste capítulo, apresentamos os principais resultados obtidos para A3558. Além do estudo do perfil de densidade superficial e da função de luminosidade (FL), analisamos também a possível presença de sub-estruturas e o fenômeno de segregação.

### 4.1 - Propriedades Globais do A3558

#### 4.1.1 - Perfil de Densidade Superficial

A determinação da distribuição espacial de galáxias nos aglomerados é de fundamental importância, não só para o estudo de suas propriedades intrínsecas mas também em termos da determinação de parâmetros cosmológicos (Bahcall 1975, 1979). A maioria dos aglomerados, por apresentarem uma morfologia regular, são aproximados como estruturas esfericamente simétricas, com uma alta concentração central. Este comportamento pode ser caracterizado

por alguns parâmetros globais, como: (1) posição do centro do aglomerado no céu; (2) densidade central projetada de galáxias por unidade de área,  $\mu_0$ ; e (3) escala de tamanho, tal como o raio do “núcleo”,  $r_n$ . Por exemplo, o ajuste dos valores observados de densidade superficial ao modelo de distribuição considerado fornece uma escala de tamanho. Esta escala, juntamente com medidas de dispersão de velocidades central,  $\sigma$ , determina a densidade central de massa ( $\rho_0$ ) do aglomerado através da relação  $4\pi G\rho_0 r_n^2 = 9\sigma^2$ . Este é um exemplo do tipo de informação que podemos obter a partir do ajuste do perfil de densidade superficial.

Vários modelos foram propostos para ajustar a distribuição projetada de galáxias. Os modelos isotérmicos são os mais simples, e assumem *a priori* que: (1) a distribuição de velocidades radiais das galáxias do aglomerado é Gaussiana; (2) a distribuição de velocidades é isotrópica e independente da posição; (3) a distribuição de galáxias é estacionária e suas posições não se correlacionam.

Observando que a escala de tempo para a interação gravitacional de dois corpos num aglomerado é muito maior do que o tempo de “travessia” das galáxias no sistema, então as galáxias podem ser consideradas “partículas” de um gás onde a colisão é desprezível. Portanto, a densidade do espaço de fase é conservada ao longo da trajetória da partícula, como estabelece o Teorema de Liouville, assim como a densidade do espaço de fase é função somente das integrais de movimento, segundo o Teorema de Jeans. Tais considerações levam ao desenvolvimento de uma equação para a distribuição de densidade de galáxias em um aglomerado que é idêntica àquela que representa uma esfera de gás isotérmico em equilíbrio hidrostático (Sarazin 1986). Observando que a esfera isotérmica não pode representar corretamente as regiões externas de um aglomerado finito (pois em grandes raios, o número total de galáxias diverge em proporção ao raio), a solução é truncar a distribuição em algum raio de interesse.

King (1962) mostrou que a função analítica  $\sigma(b) = \sigma_0 [1 + (b/r_n)^2]^{-1}$ , onde  $\sigma_0 = 2n_0 r_n$ , e  $n_0$  é a densidade central ( $r = 0$ ), é uma aproximação razoável para as regiões internas de uma função isotérmica (embora também haja necessidade de truncagem):

O procedimento utilizado neste trabalho para a obtenção da distribuição de densidade superficial é análogo àquele descrito por Bahcall (1975). Isto é, a imagem foi dividida em

um conjunto de anéis concêntricos e centrados aproximadamente na galáxia cD, e foi feita uma contagem das galáxias pertencentes a cada anel, sendo esta contagem corrigida da contaminação do fundo de céu. A densidade superficial para cada anel é, portanto, o número de galáxias em cada anel dividido pela área do anel em questão.

O ajuste do perfil de densidade superficial pela função de King é mostrado na Figura 1, com um valor de  $\chi_\nu = 0.15$  atestando a qualidade do ajuste. É interessante ilustrar neste ponto um problema já conhecido há muitas décadas. Usando a expressão  $4\pi G\rho_0 r_n^2 = 9\sigma^2$ , o valor de ajuste da função de King  $r_n = 0.45$  Mpc e o valor de  $\sigma = 986$  km/s obtido a partir de Bardelli et al. (1993), podemos estimar a razão massa-luminosidade,  $M/L$ , da ordem de  $480 M_\odot/L_\odot$  na banda B. Este valor no núcleo de um aglomerado é um exemplo do problema da massa “faltante” ou problema da matéria escura originalmente estudado por Zwicky (1933).

Como a função de King é uma aproximação para a região interna de uma esfera isotérmica, inferimos que A3558 possui um grau significativo de relaxamento dinâmico central. Este resultado concorda com a observação de que os aglomerados com a presença de galáxias cD representam sistemas dinamicamente mais evoluídos (Dressler 1984).

#### 4.1.2 - Função de Luminosidade

O conhecimento da FL dos aglomerados de galáxias é de grande importância para a cosmologia observacional (Schechter 1976, Binggeli et al. 1988). É também considerada uma ferramenta de muito interesse na investigação de processos de formação e evolução de galáxias e aglomerados de galáxias (Dressler 1984).

A FL diferencial descreve a distribuição em luminosidade do número de galáxias,  $\phi(L)$ , por intervalo de luminosidade,  $dL$ , e por unidade de volume,  $dV$ . A forma analítica mais usualmente utilizada para representar a FL diferencial foi proposta por Schechter (1976), através da expressão:

$$\phi(L)dL = \phi^* \exp(-L/L^*)(L/L^*)^\alpha d(L/L^*)$$



onde  $L^*$  representa um valor característico de “corte” na distribuição (também expresso através da magnitude absoluta característica,  $M^*$ ). Schechter propôs a “universalidade” da FL a partir da análise dos dados obtidos por Oemler (1974) para aglomerados de galáxias.

De fato, as funções de luminosidade dos aglomerados parecem bastante similares entre si, consistindo de um comportamento “achatado” na região de galáxias com baixa luminosidade (onde a função tende a uma lei de potência em  $\alpha$ ), e com um corte abrupto na região de galáxias de alta luminosidade.

Esta universalidade da FL de aglomerados poderia ser compreendida supondo-se que as galáxias se formaram anteriormente aos aglomerados, sob condições aproximadamente uniformes em grandes volumes do espaço. Ou seja, a função de luminosidade de cada aglomerado refletiria uma seleção puramente estatística de um conjunto de galáxias com uma função de luminosidade universal. No entanto, a existência de variações significativas entre as funções de luminosidade de vários aglomerados, como observado por Dressler (1978), sugere outras alternativas:

- 1 - a existência de não-homogeneidades em larga escala no universo primordial;
- 2 - o ambiente dos aglomerados como fonte de mudanças evolutivas (tais como a coalescência entre galáxias, canibalismo, etc), e portanto de alterações na função de luminosidade original; e
- 3 - os aglomerados teriam se formado anteriormente às galáxias.

Estas observações são preliminares, no sentido de que ainda é necessária uma investigação mais sistemática acerca da natureza da FL das galáxias. Como observado por Postman, Geller & Huchra (1988), uma determinação aceitável de  $M^*$  depende de uma determinação acurada de  $\alpha$ . E isto é bastante dificultado pela contaminação crescente das galáxias de “campo”, na medida em que se observa galáxias com fluxo total cada vez menor, e da incompletude da amostra.

A FL para o A3558 foi construída da seguinte maneira:

1 - Contamos o número de galáxias por grau quadrado em intervalos de 0.25 magnitude.

2 - Corrigimos a FL da contribuição da densidade superficial de galáxias do “campo”, ou seja, das galáxias que não pertencem ao aglomerado. Neste trabalho, efetuamos uma correção estatística, usando uma lei de distribuição uniforme da forma  $N(m) = N_0 10^{0.6(m-m_0)}$ , onde  $N$  é o número de objetos por grau quadrado até magnitude aparente  $m$ . Utilizamos a normalização de Quintana & Havlen (1979). Na Figura 2 apresentamos um histograma em magnitude aparente (banda B-Johnson), em intervalos de 0.25 mag. A curva contínua mostra o número esperado de galáxias de campo em cada intervalo.

3 - Mostramos na Figura 3 a FL de A3558 após a correção de “campo”. As barras de erro representam o desvio médio quadrático para cada intervalo de magnitude. O ajuste da função de Schechter foi feito utilizando-se o programa GAUSSFIT descrito em Jefferys et al. (1988). Nesta figura, a curva contínua representa o melhor ajuste para a FL, para o qual obtivemos os valores:  $\alpha = -1.57 \pm 0.18$  e  $M^* = -21.50 \pm 0.25$ , para  $H_0 = 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Este resultado é consistente com os valores obtidos por Schechter para os aglomerados de galáxias. Nesta figura, também apresentamos outros ajustes, fixando o parâmetro  $\alpha$  em  $-1.3$  (linha tracejada) e em  $-1.0$  (linha pontilhada). A FL de A3558 é conhecida até o limite de completeza do catálogo ( $\sim 18.75$ ) que a uma distância de  $\sim 14242 \text{ km/s}$  corresponde a  $-18.8$ . Isto equivale a somente  $\sim 3$  mag além de  $M^*$ . Assim, a estimativa de  $\alpha$  se torna insensível pelo desconhecimento do comportamento da FL para os limites de baixo fluxo total. Podemos observar que no intervalo de magnitudes correspondente às galáxias brilhantes todas as curvas representam igualmente bem a FL.

## 4.2 - Análise da Estrutura do A3558

### 4.2.1 - Estudo de Segregação

A estrutura geral de um aglomerado de galáxias pode fornecer uma indicação dos processos formativos que ocorreram (ou que ainda ocorrem) no sistema, como por exemplo, o mecanismo de fricção dinâmica. Este é um processo em que as galáxias mais massivas perdem energia para as menos massivas, como deduzido por Chandrasekhar (1942). Em consequência, as galáxias mais massivas caem em direção ao centro (poço de potencial) do aglomerado. Dependendo do grau de equipartição de energia, esperamos observar características de segregação consequentes do processo. Ou seja, existindo evidências de segregação sistemática em luminosidade (e, indiretamente, em massa), podemos esperar que o processo de equipartição tenha ocorrido ou esteja ocorrendo no aglomerado. No entanto, a escala de tempo para a ocorrência de segregação em aglomerados é pouco conhecida.

Na avaliação do estágio dinâmico do A3558, verificamos o grau de segregação em luminosidade do aglomerado. Analisamos a presença de segregação de forma quantitativa através de dois métodos:

1 - No primeiro método, mais sensível às propriedades globais do sistema, tentamos observar se as galáxias (em cada intervalo de magnitude) estão sistematicamente mais próximas ao centro. Baseamo-nos fundamentalmente no método de Dressler (1978). Para cada intervalo de magnitude, computamos a distância média das galáxias ao centro do aglomerado. O resultado é apresentado na Figura 4, onde a linha traçada representa a distância média de todas as galáxias ao centro. Analisamos o comportamento da distribuição incluindo e excluindo a galáxia cD, como indicado na figura. As barras de erro representam o desvio médio quadrático das distâncias ao centro. Dois intervalos de magnitude (centrados em 15 e 17.25) apresentam uma tendência das galáxias se encontrarem mais próximas ao centro. Esta tendência é ressaltada ao incluirmos a galáxia cD nesta análise. Observamos que as flutuações nos raios médios para um dado intervalo de magnitude são menores do que  $1 \sigma$  do valor médio de distância ao centro do aglomerado. Desta forma, concluimos que a segregação em luminosidade no A3558 não é significativa, sob um aspecto geral.

Este é um resultado interessante de ser comparado à amostra de Dressler, onde todos os aglomerados com cD analisados por ele também não apresentam evidências de equipartição.

Se os aglomerados com galáxias cD são dinamicamente mais evoluídos, deveríamos esperar encontrar um efeito de segregação mais evidente nestes sistemas. No entanto, como justifica Dressler, esta é uma conclusão “ingênua”, visto que esperaríamos, de fato, pelo menos três tipos de comportamento no caso de fricção dinâmica. Estes comportamentos refletiriam os seguintes estágios evolutivos:

◊ **Primeiro Estágio** → devido ao tempo insuficiente para a ocorrência de equipartição de maneira significativa, a distribuição não mostraria evidências das galáxias mais luminosas estarem sistematicamente mais próximas ao centro.

◊ **Segundo Estágio** → com o tempo suficiente para o desenvolvimento da equipartição, as evidências se iniciariam no ponto em que as galáxias mais luminosas se encontrariam de forma nítida a distâncias sistematicamente menores do centro.

◊ **Terceiro Estágio** → as galáxias mais luminosas perderiam suas identidades no processo de “canibalismo” da galáxia cD.

No caso de A3558, que se trata de um aglomerado com uma galáxia cD central bem determinada, há uma possibilidade de que qualquer efeito de equipartição tenha sido compensado pela destruição de galáxias brilhantes. Portanto, poderíamos a princípio caracterizar dinamicamente o A3558 entre o segundo e terceiro estágios citados acima.

2 - No segundo método (Figura 5), avaliamos a densidade média local associada às galáxias para cada intervalo de magnitude, usando a distância da sexta galáxia mais próxima. Utilizamos o método adotado por Sodré et al. (1992) para a determinação de segregação. Se há segregação, as galáxias mais luminosas devem se encontrar em regiões preferencialmente mais densas. O procedimento é descrito a seguir:

i → Para cada galáxia, computou-se a densidade superficial local tomando-se como base a definição de “local” como o círculo cujo raio é a distância à sexta vizinha.

ii → Agrupamos as galáxias em intervalos de 0.5 mag (exceto para o primeiro intervalo), e computamos a densidade média para cada intervalo.

iii → Para a determinação das barras de erro, refizemos os processos i e ii, porém fixando a posição de cada galáxia e redistribuindo aleatoriamente suas magnitudes. Este processo foi repetido 1000 vezes, de forma que as barras de erro representam o desvio médio quadrático dos valores de densidade média encontrados.

A linha tracejada no gráfico representa a média dos valores médios de densidade superficial local para cada intervalo. Novamente nenhuma tendência significativa de segregação é encontrada em A3558.

#### 4.2.2 - Determinação de Possíveis Sub-estruturas Através da Estatística de Lee

A determinação de sub-estruturas em aglomerados de galáxias é um ponto importante no estudo dinâmico destes sistemas. A fim de se obter uma modelagem dinâmica de um aglomerado, é essencial a determinação de seu estado de “relaxação”. No entanto, a presença de sub-estruturas no aglomerado seria uma indicação de um processo de relaxação ainda ocorrendo e/ou de queda secundária de estrutura no sistema já virializado (Fitchett 1988a).

A fim de determinarmos possíveis sub-estruturas no A3558, adotamos um método estatístico baseado na técnica de máxima verossimilhança, denominada de Estatística de Lee. Baseamo-nos fundamentalmente no artigo de Fitchett (1988b) para o desenvolvimento deste estudo. Apresentamos a seguir alguns conceitos básicos do método adotado.

O método tem como objetivo a quantificação de possíveis sub-estruturas, isto é, a associação de uma significância estatística para qualquer sub-estrutura encontrada. O método é baseado no uso de um teste de máxima verossimilhança. Consideremos duas hipóteses a serem testadas: a hipótese nula,  $H_0$ , indica que a distribuição dos objetos da imagem é formada a partir de somente um grupo, enquanto que a hipótese alternativa,  $H_1$ , indica a presença de 2 grupos. Quanto maior o estimador de máxima verossimilhança, mais a hipótese  $H_0$  será rejeitada como menos provável, em caso contrário  $H_0$  deverá ser aceita como hipótese mais provável.

Os passos seguintes foram utilizados para o estabelecimento da Função de Lee, onde os pontos máximos da função (que formam a Estatística de Lee) indicam os ângulos da imagem onde a presença de sub-estrutura é mais provável:

- ◇ 1 - As posições x,y de cada galáxia detectada pelo FOCAS foram projetadas em uma linha horizontal ( $\phi = 0^\circ$ , direção oeste-leste), gerando N pontos em uma dimensão.
- ◇ 2 - Para cada ponto  $i$  das partições geradas, avaliou-se:

$$B/W = \frac{\sigma_T}{\sigma_e + \sigma_d} - 1$$

onde  $B/W$  é chamado de espalhamento dos grupos “entre” as partições e “dentro” das partições, com os índices  $T \equiv$  total,  $e \equiv$  à esquerda do ponto  $i$ ,  $d \equiv$  à direita do ponto  $i$ ;  $\sigma =$  desvio padrão da contagem dos pontos, e  $\mu =$  média dos pontos, isto é:

$$\sigma = \sum_{i=1}^K (x_i - \mu)^2$$

$$\mu = \sum_{i=1}^K x_i / K$$

- ◇ 3 - Encontrou-se o valor máximo de  $B/W$  de todas as partições. Este valor máximo é denominado  $L(\phi)$ , onde  $\phi$  é o ângulo entre a linha com que os pontos  $x$ ,  $y$  são projetados e a linha horizontal (neste estágio, até agora,  $\phi = 0^\circ$ ).
- ◇ 4 - Rotacionou-se a linha em um pequeno ângulo (usamos  $\delta\phi = 10^\circ$ ) e repetiu-se os passos 1 a 3.

Para  $L(\phi)_{max}$ , deve-se rejeitar a hipótese  $H_0$ , de um só grupo, isto é, em  $\phi_{max}$  é definida a direção em que a probabilidade de existir duas sub-estruturas é maior. Isto é,  $L(\phi)_{max}$  é o estimador de máxima verossimilhança para o teste das hipóteses  $H_0$  e  $H_1$ .

Utilizamos o mapa de isodensidades (Figura 6) como um indicador da distribuição global de galáxias em A3558. Para a elaboração do mapa, baseamo-nos no método de Geller & Beers (1982). A configuração central de A3558 é aproximadamente esférica, porém a presença de sub-estrutura em regiões mais afastadas do centro não é descartada. Podemos observar, por exemplo, uma concentração na região inferior esquerda do mapa da Figura 6. A presença desta sub-estrutura foi sugerida por Metcalfe et al. (1987), e melhor caracterizada recentemente por Bardelli et al. (1993). A Função de Lee (Figura 7) apresenta as direções com maior probabilidade de presença de sub-estrutura (ângulos  $\sim 35^\circ$  e  $\sim 140^\circ$ , contados no sentido oeste-leste), coerente com o que podemos verificar visualmente a partir da Figura 6.

Entretanto, os valores da Função de Lee para o A3558 não são significativos em comparação a aglomerados visivelmente compostos de dois grupos principais (e.g. Fitchett 1988). Quanto menor a faixa de valores de  $L(\phi)$  obtida, menos podemos afirmar com confiança sobre a presença de sub-estrutura. Isto significa que a função de Lee para o A3558 indica somente a possibilidade de existência de uma sub-estrutura. Portanto, uma caracterização mais precisa é necessária através da obtenção de mais um parâmetro (deslocamento para o vermelho de cada galáxia). Esta necessidade se evidencia ainda mais pela complexidade dinâmica da região em que se encontra A3558, como evidenciado por Bardelli et al. (1993).

TABELA 1

## Dados Gerais do Aglomerado de Abell A3558

---

Ascensão Reta	13 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> 06 <sup>s</sup>	
Declinação	-31° 14'	
Outras denominações	SC1325-311 ou Shapley 8	
Classificação RS	tipo cD	Rood & Sastry (1971)
Classificação BM	tipo I	Bautz & Morgan (1970)
Riqueza	classe 4	mais rico do catálogo ACO Abell, Corwin & Olowin (1989)
Velocidade Radial Média	14242 <i>km/s</i>	Bardelli et al. (1993)
Dispersão de velocidades	986 <i>km/s</i>	Bardelli et al. (1993)
Luminosidade estimada na faixa [2 – 10] keV	8.7 × 10 <sup>44</sup> <i>ergs/s</i>	Day et al. (1991)

---



### 4.3 Índice de Figuras

Figura 1 - Perfil de densidade superficial do aglomerado A3558. Apresentamos o ajuste do modelo de King, com o valor do raio do “núcleo”,  $r_n$ , indicado na figura. As barras de erro expressam o desvio médio quadrático das contagens de galáxias em cada anel, como descrito no texto.

Figura 2 - Histograma de todas as galáxias detectadas, com intervalos de 0.25 mag. A curva contínua representa a contribuição estimada de contaminação por galáxias de “campo”.

Figura 3 - Função de Luminosidade cuja construção é descrita no texto. A linha contínua representa o ajuste obtido. Também apresentamos outros ajustes fixando o parâmetro  $\alpha$  em  $-1.3$  (linha tracejada) e em  $-1.0$  (linha pontilhada).

Figura 4 - Nesta figura, apresentamos a distribuição da distância média das galáxias ao centro do aglomerado, por intervalo de 0.5 mag (exceto para o primeiro intervalo), de acordo com o método de Dressler (1978).

Figura 5 - Distribuição de densidades superficiais locais médias para cada intervalo de magnitude, de acordo com o trabalho de Sodré et al. (1992), utilizando o mesmo intervalo de magnitude da Figura 4.

Figura 6 - Mapa de isodensidades, elaborado de acordo com Geller & Beers (1982). Note a simetria aproximadamente esférica central e a subestrutura a sudeste.

Figura 7 - Nesta figura, apresentamos a Função de Lee, que fornece as direções onde há maior probabilidade de existir sub-estrutura. No caso, os ângulos obtidos são de  $\sim 35^\circ$  e  $\sim 140^\circ$ , contados no sentido oeste-leste.

Figura 1

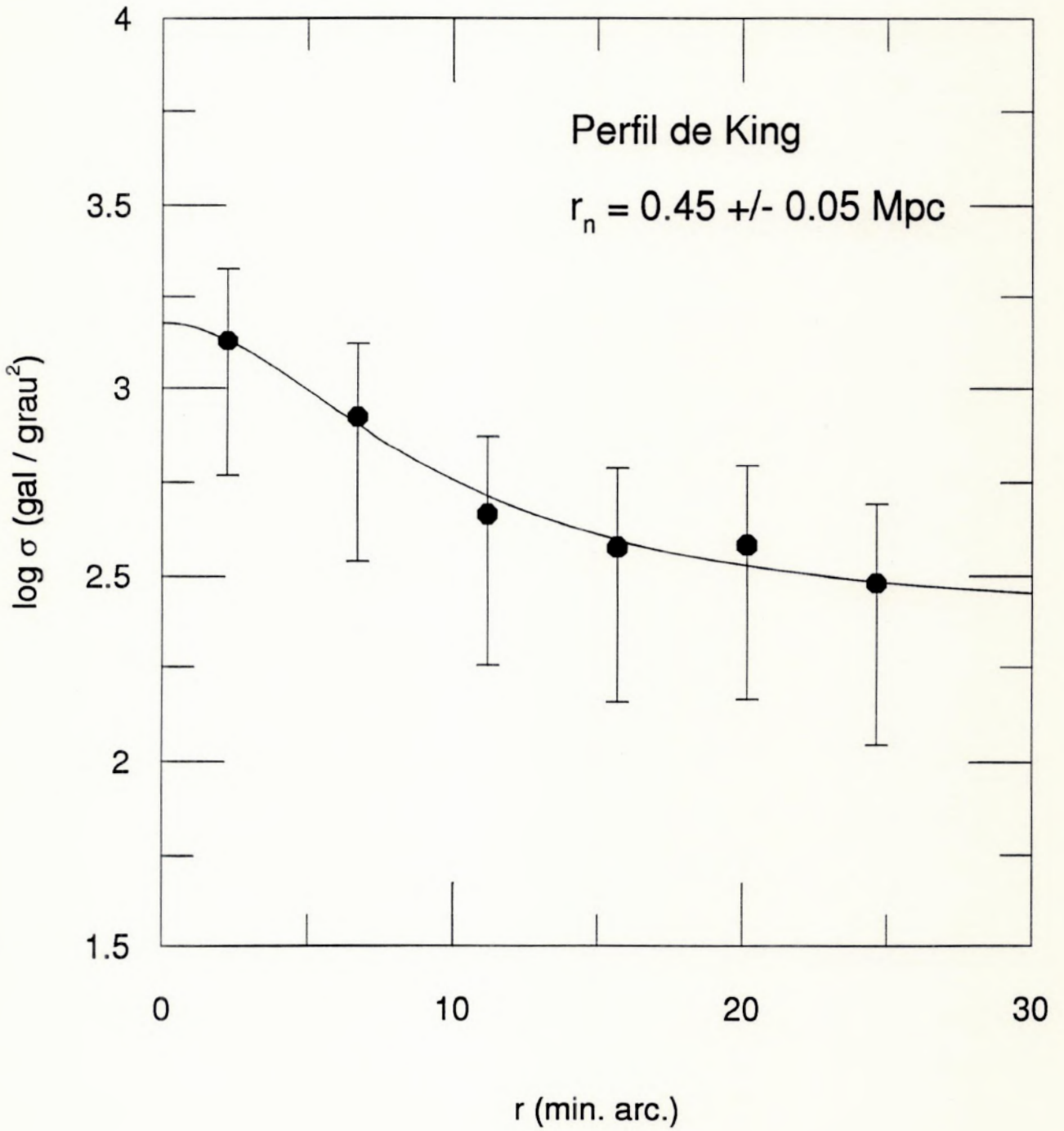


Figura 2

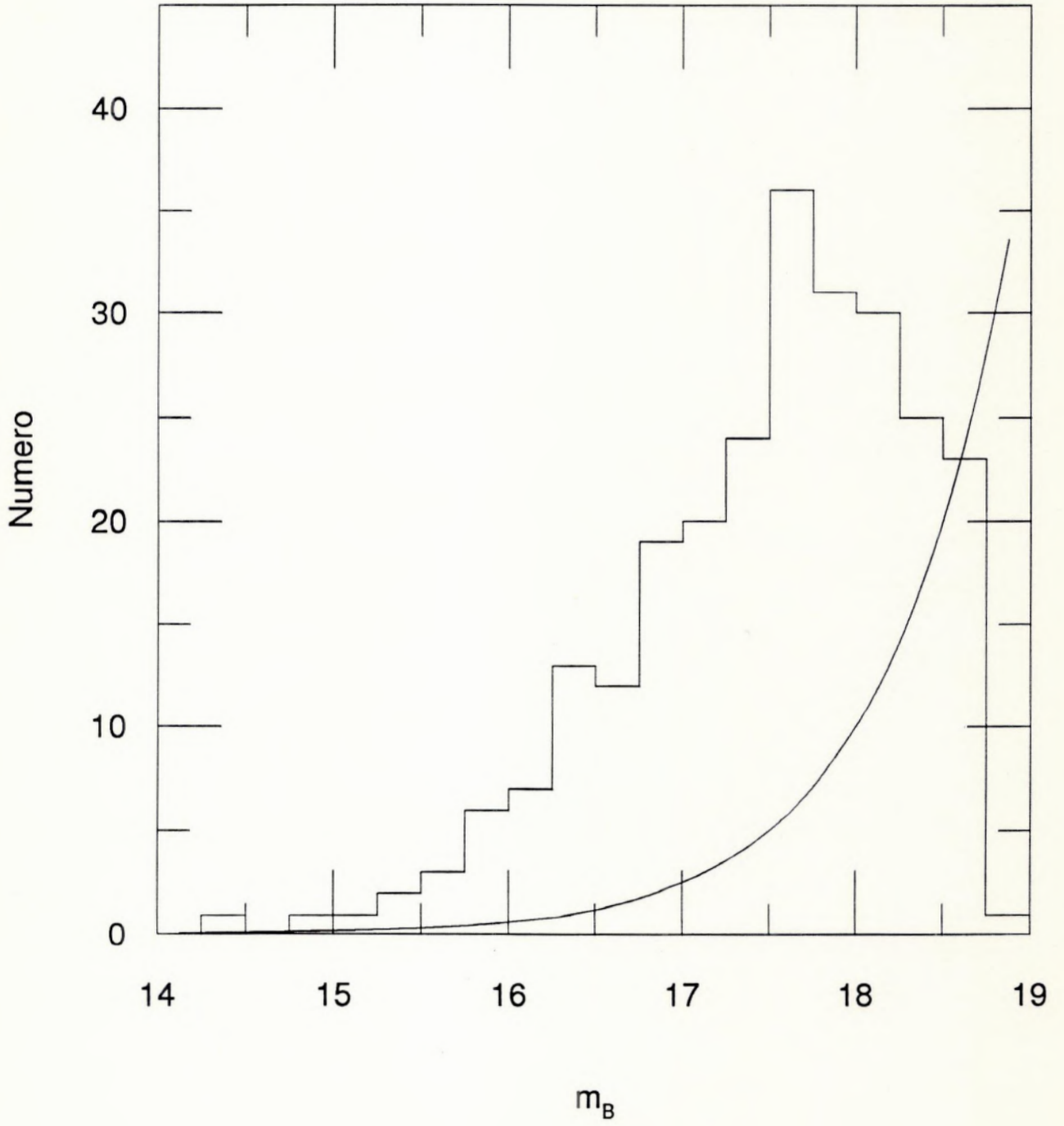


Figura 3

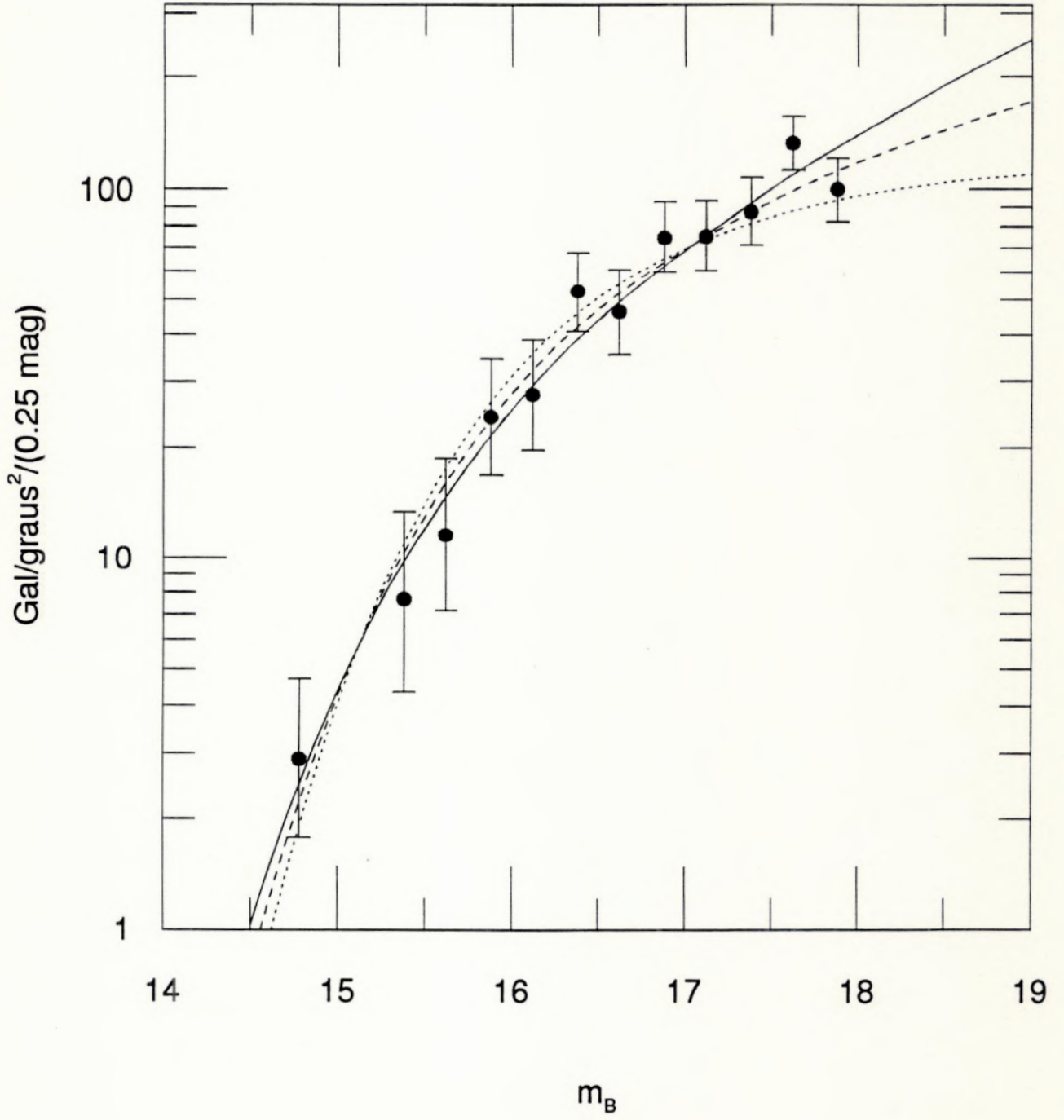


Figura 4

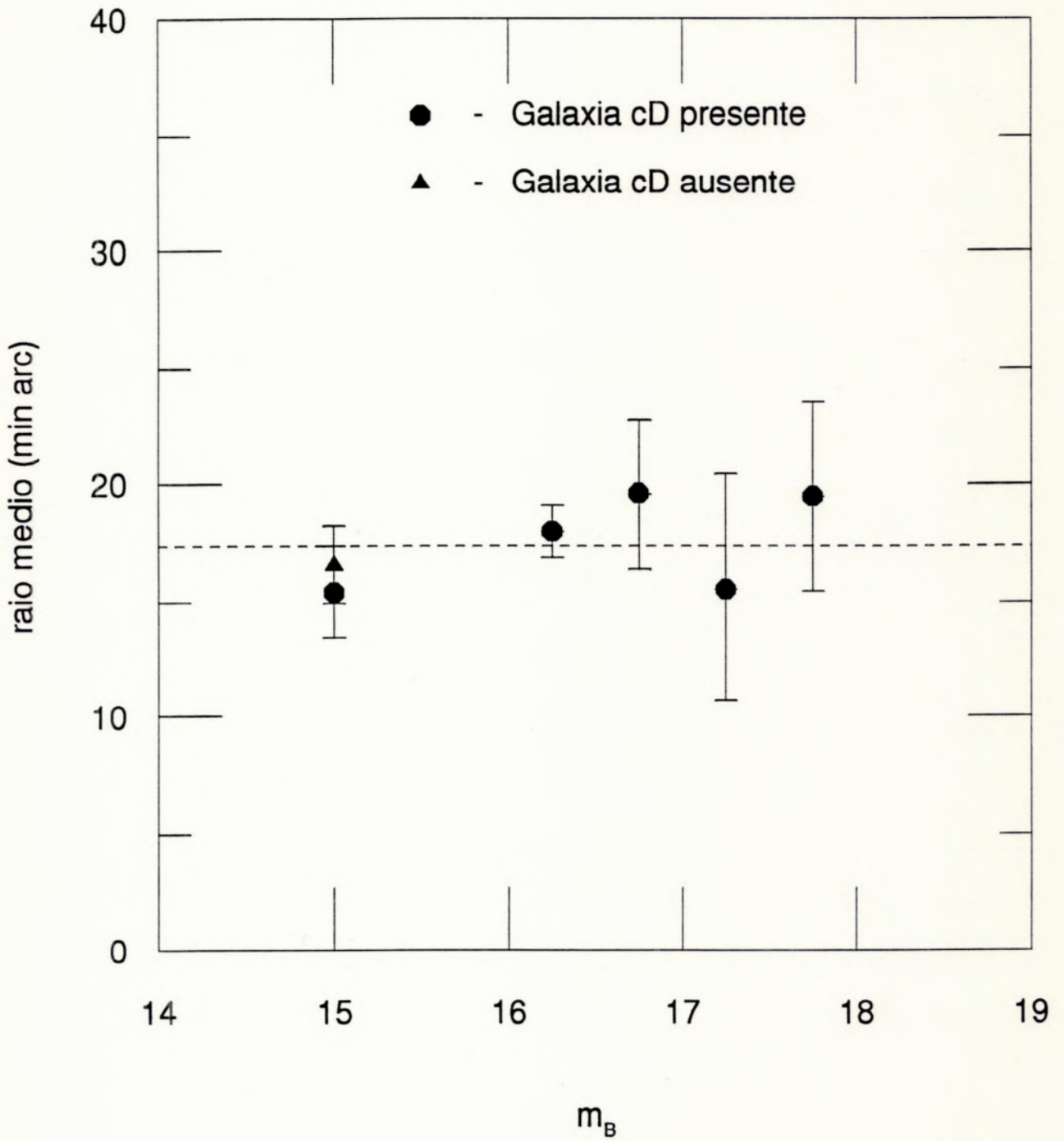


Figura 5

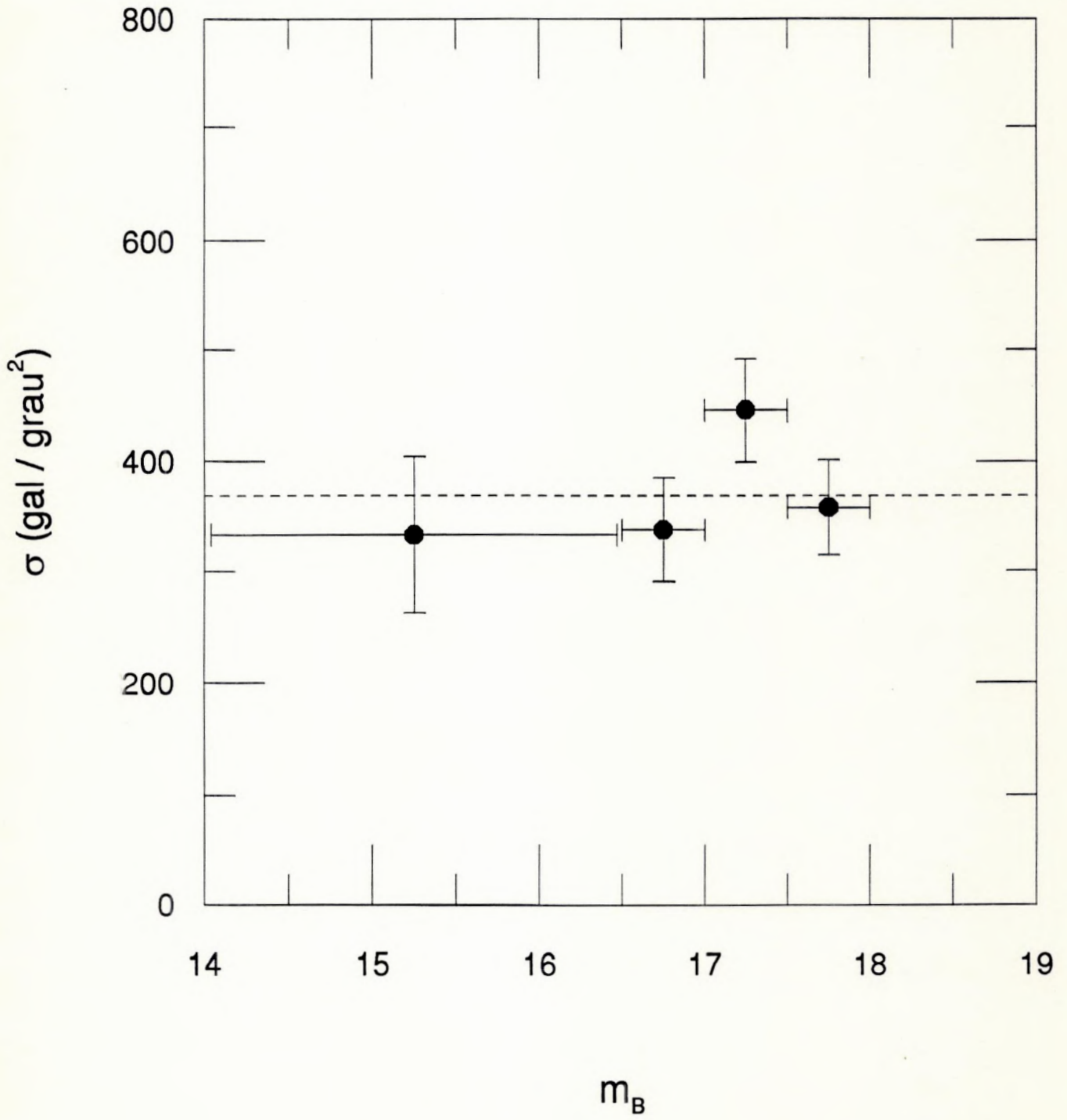


Figura 6

N

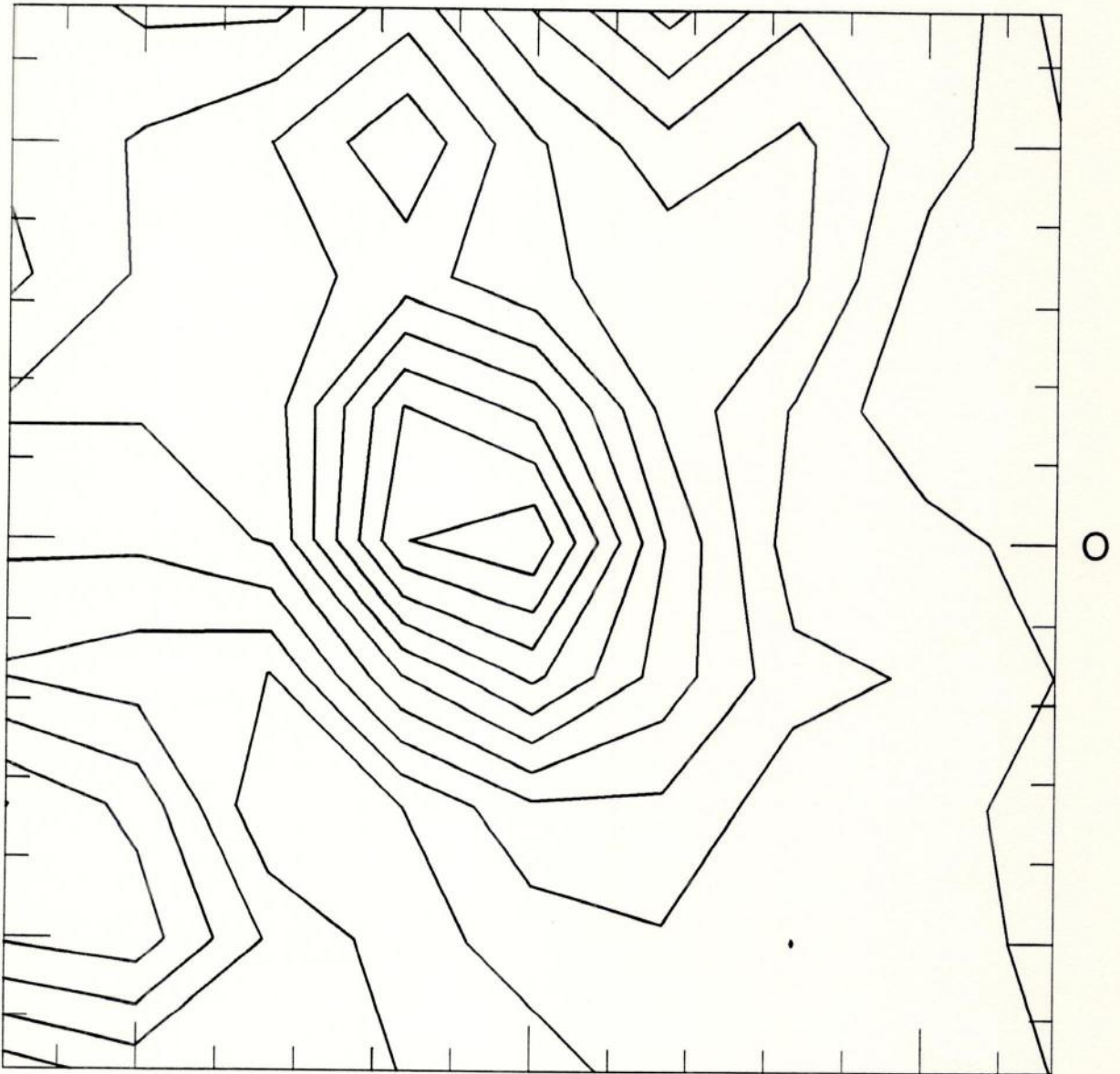
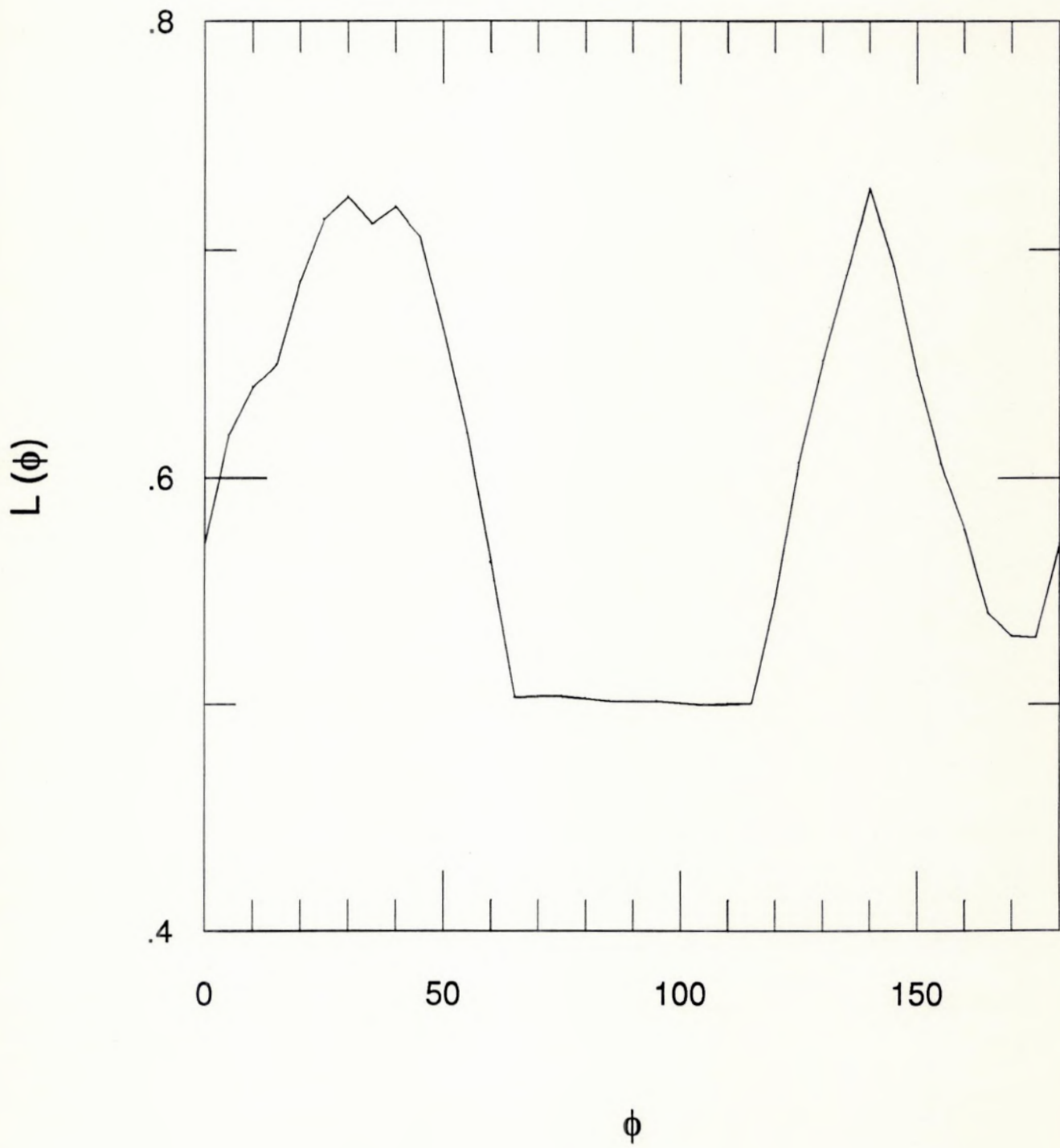


Figura 7





## 5. Conclusão

Neste trabalho iniciamos a investigação sistemática do aglomerado de galáxias A3558, no sentido de estabelecer suas propriedades morfológicas e estruturais. Utilizamos uma imagem digitalizada, obtida a partir do conjunto de rastreamentos das placas fotográficas IIIa-J, cedida pelo STScI (Space Telescope Science Institute).

O estudo do aglomerado foi feito de maneira objetiva usando o programa FOCAS ("Faint Object Classification and Analysis System"). Uma inspeção visual do catálogo permitiu eliminarmos objetos espúrios que o classificador não conseguiu separar ou eliminar.

Neste trabalho avaliamos o nível de confiabilidade do catálogo obtido, estudando como os parâmetros fundamentais de detecção (área mínima e nível de corte acima do fundo de céu), afetam o catálogo final. Após extensivos testes definimos um catálogo estatisticamente completo até  $m_B = 18.75$ .

Apresentamos o estudo das propriedades físicas fundamentais de A3558 em termos de seu perfil de densidade superficial e de sua função de luminosidade. A partir desta análise inferimos que A3558 possui um grau significativo de relaxamento dinâmico central. Além disso, o problema da estimativa do parâmetro  $\alpha$  da função de Schechter (1975) é estudado e mostramos que o desconhecimento do comportamento da função de luminosidade para os limites de baixo fluxo total torna a estimativa de  $\alpha$  tremendamente imprecisa.

Um resultado igualmente importante neste trabalho foi a avaliação do estado dinâmico de A3558 através do estudo de segregação e determinação de sub-estruturas. Através da investigação das propriedades físicas globais e locais, não encontramos evidências de segregação em luminosidade até a magnitude limite da amostra. Localizamos uma sub-estrutura à sudeste de A3558 através da inspeção visual dos níveis de isodensidade e através de uma análise quantitativa usando o indicador de Lee. Evidenciamos a necessidade de uma caracterização mais precisa desta subestrutura, em relação às propriedades dinâmicas complexas da região vizinha (Bardelli et al 1993).

As perspectivas futuras deste trabalho estão no prosseguimento do estudo dinâmico de A3558, através do levantamento de velocidades radiais das galáxias identificadas neste projeto, assim como a detecção de galáxias “anãs” presentes no aglomerado. Uma outra perspectiva é estender a análise elaborada neste trabalho a uma investigação da região central da Concentração Shapley, à qual A3558 pertence.

Finalmente, é importante mencionar que este projeto serviu como uma base preliminar no estudo sistemático das propriedades físicas de estruturas em grande escala de uma maneira geral e de aglomerados em particular. Também permitiu estabelecer uma rotina de operação onde, a partir de uma imagem digitalizada de uma região qualquer do céu, podemos obter uma lista de objetos com limites de completeza bem determinados.

## Apêndice A

O objetivo deste apêndice é estudar a evolução das flutuações de densidade no modelo do "Hot Big Bang". A motivação para esta análise surge da necessidade de compreendermos como as estruturas em grande escala se formam. Isto é, como regiões de maior contraste de densidade começam a colapsar considerando condições iniciais de caráter homogêneo e isotrópico. Uma vez que as perturbações iniciais atingem  $\delta\rho/\rho \sim 1$ , dá início o estágio não-linear da evolução, que em última análise termina na formação de estruturas tal como observamos atualmente.

Estruturas como galáxias e aglomerados de galáxias, provavelmente se formaram relativamente tarde no Universo. As densidades médias típicas destes objetos, observados atualmente, fornecem valores de contrastes de densidade  $\delta\rho/\rho$  da ordem de  $\sim 10^6$  para galáxias e  $\sim 10^3$  para aglomerados de galáxias. Como a densidade de matéria no Universo varia com  $(1+z)^3$ , onde  $z$  é o deslocamento para o vermelho, deduzimos que as galáxias não poderiam ter se tornado objetos discretos em  $z$  maiores do que  $\sim 100$ , e aglomerados de galáxias em  $z$  não superiores a  $\sim 10$ .

Apresentaremos inicialmente as equações básicas da dinâmica de um fluido sob a ação da gravidade. Estas equações descrevem a dinâmica de um fluido de densidade  $\rho$  e pressão  $p$ , com uma distribuição de velocidade  $\mathbf{v}$ . Em coordenadas Eulerianas (onde as derivadas parciais descrevem a variação das quantidades *num ponto fixo* do espaço), as equações da hidrodinâmica são escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi \quad (2)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \quad (3)$$

(1) → Equação de Continuidade. Expressa o fato de que a densidade numa região *aumenta* ( $\partial\rho/\partial t > 0$ ) se a massa flui *para dentro* da região considerada ( $\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) < 0$ ), isto é, há convergência da massa com velocidade  $\mathbf{v}$  para o interior da região. Reciprocamente, a densidade diminui se há divergência do fluxo de massa.

(2) → Equação de Movimento (Euler). Descreve o movimento do fluido sob a ação de um campo gravitacional, onde a força resultante sobre o fluido é dada em termos do gradiente de pressão ( $\nabla p$ ) e do gradiente do campo gravitacional ( $\nabla\Phi$ ).

(3) → Equação de Poisson. Equação cuja solução fornece o potencial gravitacional  $\Phi$  para cada ponto do espaço.

Podemos reescrever as equações (1), (2) e (3) do ponto de vista da descrição Lagrangeana. Este formalismo, ao contrário da descrição espacial (Euleriana), nos permite acompanhar cada elemento do fluido. Como estamos interessados no comportamento de um elemento particular do fluido, e não de um ponto fixo no espaço, na medida em que o Universo se expande, desejamos obter as mesmas equações (1), (2) e (3) na forma dita “co-móvel”. Para isto, iremos reescrever as equações acima utilizando o operador abaixo (em coordenadas cartesianas):

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \quad (4)$$

Expandindo a equação (1), temos que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5)$$

Identificando o termo entre parênteses da equação (5) com o operador definido em (4), temos que:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Isto é:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (6)$$

Da mesma forma, identificamos o primeiro e segundo termos da equação (2) com o operador definido em (4), o que diretamente nos leva a:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad (7)$$

A equação (3) permanece a mesma na descrição Lagrangeana:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (8)$$

Estamos interessados nas soluções de ordem zero para a velocidade  $\mathbf{v}$ , a densidade  $\rho$ , a pressão  $p$  e o potencial gravitacional  $\Phi$ . As soluções de ordem zero são:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \quad \rho = \rho_0 \quad p = p_0 \quad \Phi = \Phi_0 \quad (9)$$

Isto é, as soluções propostas em (9) satisfazem (6), (7) e (8):

$$\frac{d\rho_0}{dt} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \quad (10)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p_0 - \nabla\Phi_0 \quad (11)$$

$$\nabla^2\Phi_0 = 4\pi G\rho_0 \quad (12)$$

As soluções de primeira ordem são dadas por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v} \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho \quad p = p_0 + \delta p \quad \Phi = \Phi_0 + \delta\Phi \quad (13)$$

Substituindo as soluções propostas em (13) na equação de continuidade (6), temos que:

$$\frac{d}{dt}(\rho_0 + \delta\rho) = -(\rho_0 + \delta\rho)[\nabla \cdot (\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v})]$$

Isto é:

$$\frac{d\rho_0}{dt} + \frac{d(\delta\rho)}{dt} = -\rho_0(\nabla \cdot \mathbf{v}_0) - \rho_0(\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) - \delta\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}_0) - \delta\rho(\nabla \cdot \delta\mathbf{v})$$

Os dois últimos termos do lado direito da equação acima são de segunda ordem, e portanto podem ser negligenciados. Já o primeiro termo do lado esquerdo da equação se cancela com o primeiro da direita, de acordo com a equação (10). Logo a equação acima se reduz a:

$$\frac{d(\delta\rho)}{dt} = -\rho_0(\nabla \cdot \delta\mathbf{v})$$

Isto é:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) = -\nabla \cdot \delta\mathbf{v} \quad (14)$$

A quantidade  $\delta\rho/\rho_0 \equiv \Delta$  é denominada *contraste de densidade* e seu crescimento com a época cósmica é o foco de maior atenção neste apêndice.

Antes de desenvolvermos a equação de movimento, observamos que de acordo com a definição (4):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

Substituindo a solução de primeira ordem para  $\mathbf{v}$ , proposta em (13), temos que a equação acima se torna:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) + [(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) \cdot \nabla](\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v})$$

Desenvolvendo a equação acima, temos que:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) = \frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial(\delta\mathbf{v})}{\partial t} + [\mathbf{v}_0 \cdot \nabla + \delta\mathbf{v} \cdot \nabla](\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v})$$

Isto é:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) = \frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial(\delta\mathbf{v})}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} \quad (15)$$

Como, de acordo com a definição (4):

$$\frac{d(\delta\mathbf{v})}{dt} = \frac{\partial(\delta\mathbf{v})}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta\mathbf{v}$$

$$\frac{d(\delta\mathbf{v})}{dt} = \frac{\partial(\delta\mathbf{v})}{\partial t} + [(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) \cdot \nabla]\delta\mathbf{v}$$

$$\frac{d(\delta \mathbf{v})}{dt} = \frac{\partial(\delta \mathbf{v})}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla)\delta \mathbf{v}$$

Observando que a equação acima está implícita na equação (15), podemos reescrever:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_0 + \delta \mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 + \frac{d(\delta \mathbf{v})}{dt} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 \quad (16)$$

Desenvolvendo agora a equação (7) em termos de soluções de primeira ordem, isto é, inserindo as soluções propostas em (13) na equação (7), encontramos que:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_0 + \delta \mathbf{v}) = -\frac{1}{(\rho_0 + \delta \rho)} \nabla(p_0 + \delta p) - \nabla(\Phi_0 + \delta \Phi)$$

Utilizando o resultado (16) na equação acima, reescrevemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 + \frac{d(\delta \mathbf{v})}{dt} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{1}{(\rho_0 + \delta \rho)} \nabla(p_0 + \delta p) - \nabla(\Phi_0 + \delta \Phi)$$

Observamos novamente que o primeiro e segundo termos do lado esquerdo da equação acima podem ser reescritos em termos do operador definido em (4):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_0 + \frac{d}{dt}(\delta \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{1}{(\rho_0 + \delta \rho)} \nabla(p_0 + \delta p) - \nabla\Phi_0 + \nabla(\delta \Phi)$$

Desprezamos  $\delta \rho$  no denominador do primeiro termo do lado direito da equação acima. Assumindo um meio homogêneo e isotrópico para o estado inicial, teremos que  $\nabla p_0 = 0$ . Logo, a equação (11) é reduzida a  $d\mathbf{v}_0/dt = -\nabla\Phi_0$ . Substituindo este resultado na equação anterior, obtemos :

$$-\nabla\Phi_0 + \frac{d(\delta \mathbf{v})}{dt} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla(\delta p)}{\rho_0} - \nabla\Phi_0 - \nabla(\delta \Phi)$$



Isto é:

$$\frac{d(\delta\mathbf{v})}{dt} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla(\delta p)}{\rho_0} - \nabla(\delta\Phi) \quad (17)$$

Desenvolvendo agora a equação de Poisson em termos das soluções de primeira ordem, isto é, inserindo as soluções propostas em (13) na equação (8), encontramos que:

$$\nabla^2(\Phi_0 + \delta\Phi) = 4\pi G(\rho_0 + \delta\rho)$$

Isto é:

$$\nabla^2\Phi_0 + \nabla^2(\delta\Phi) = 4\pi G\rho_0 + 4\pi G\delta\rho$$

$$(\nabla^2\Phi_0 - 4\pi G\rho_0) + \nabla^2(\delta\Phi) = 4\pi G\delta\rho$$

No entanto, pela equação (12), verificamos que o primeiro termo entre parênteses da equação acima se anula. Logo, a equação acima se torna:

$$\nabla^2(\delta\Phi) = 4\pi G\delta\rho \quad (18)$$

As equações (14), (17) e (18) são as equações diferenciais fundamentais no estudo da evolução de flutuações de densidade. Antes de prosseguirmos nesta descrição, é importante introduzir alguns conceitos básicos sobre o sistema de coordenadas. Estes conceitos são relativos à forma pela qual entendemos distância num Universo em expansão. Definimos um *Sistema de Coordenadas Co-móveis* (SCC) como um sistema de coordenadas que está “fixo” no espaço e compartilha com a expansão do Universo. A expansão uniforme do Universo é definida de tal forma que entre duas épocas cósmicas,  $t_1$  e  $t_2$ , as distâncias entre quaisquer dois observadores fundamentais  $i$  e  $j$ , se relacionam da seguinte forma:

$$\frac{x_i(t_1)}{x_j(t_1)} = \frac{x_i(t_2)}{x_j(t_2)} = \text{constante}$$

Ou seja:

$$\frac{x_i(t_1)}{x_i(t_2)} = \frac{x_j(t_1)}{x_j(t_2)} = \dots = \text{constante} = \frac{R(t_1)}{R(t_2)} \quad (19)$$

$R(t)$  é uma função universal que descreve como a distância relativa entre dois observadores fundamentais quaisquer muda com o tempo cósmico  $t$ .  $R(t)$  é denominado “fator de escala”. Num Universo em expansão, este fator aumenta com o tempo e, numa dada época cósmica qualquer, tem o mesmo valor em todos os pontos do espaço. Na época presente,  $t_0$ , tomemos  $R(t_0) = 1$ , por definição. Seja, também na época presente  $t_0$ , o valor  $x(t_0) \equiv r$ . Na equação (19), faremos a seguinte substituição:

$$t_1 \rightarrow t$$

$$t_2 \rightarrow t_0$$

Logo, a equação (19) pode ser escrita da seguinte forma:

$$x(t) = R(t) r \quad (20)$$

$r$  é denominada “distância radial co-móvel”. Interpretamos esta distância da seguinte forma: se dois pontos estão sempre fixos em relação ao SCC, ao longo do tempo, então a distância  $r$  entre eles permanece constante *em relação ao SCC*.  $x(t)$  é uma medida de “distância própria” entre dois pontos. As variações de  $x(t)$  são, portanto, proporcionais a  $R(t)$ .

Iremos agora estudar o caso de perturbações num Universo em expansão. De acordo com a equação (20), temos que:

$$\delta \mathbf{x} = \delta [R(t) \mathbf{r}]$$

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{r} \delta R(t) + R(t) \delta \mathbf{r} \quad (21)$$

A velocidade própria pode ser escrita como:

$$\mathbf{v} = \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta t}$$

De acordo com a equação (21):

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \frac{\delta R(t)}{\delta t} + R(t) \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$$

$$\mathbf{v} = \dot{R} \mathbf{r} + R \dot{\mathbf{r}}$$

Mas, pela primeira equação de (13), isto é,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta \mathbf{v}$$

identificamos os seguintes termos:

$$\mathbf{v}_0 = \dot{R} \mathbf{r} \quad (22 - a)$$

$$\delta \mathbf{v} = R \dot{\mathbf{r}} \quad (22 - b)$$

Estes termos têm a seguinte denominação:

(22-a) → termo de expansão de Hubble (“Hubble flow”)

(22-b) → termo de perturbação do “Hubble flow”

Seja  $\mathbf{u}$  a velocidade co-móvel perturbada, isto é,  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}$ . A equação de movimento (17) então é reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d(R \mathbf{u})}{dt} + (R \mathbf{u} \cdot \nabla) \dot{R} \mathbf{r} = -\frac{\nabla(\delta p)}{\rho_0} - \nabla(\delta \Phi) \quad (23)$$

Iremos agora escrever as derivadas com respeito à coordenada co-móvel  $\mathbf{r}$ , ao invés de  $\mathbf{x}$ , de tal forma que (tendo em vista a equação (20) ):

$$d\mathbf{x} = R d\mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d}{d\mathbf{x}} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\mathbf{r}} \Leftrightarrow \nabla = \frac{1}{R} \nabla_c \quad (24)$$

onde  $\nabla_c \equiv$  derivada em relação às coordenadas co-móveis. Observando que:

$$(R \mathbf{u} \cdot \nabla) \dot{R} \mathbf{r} = (R \mathbf{u} \cdot \frac{1}{R} \nabla_c) \dot{R} \mathbf{r} = (\mathbf{u} \cdot \nabla_c) \dot{R} \mathbf{r} = \dot{R} (\mathbf{u} \cdot \nabla_c) \mathbf{r} = \dot{R} \mathbf{u} \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}} \mathbf{r} = \mathbf{u} \dot{R} \quad (25)$$

A equação (23), portanto, pode ser escrita como:

$$\frac{d(R \mathbf{u})}{dt} + \mathbf{u} \dot{R} = -\frac{\nabla(\delta p)}{\rho_0} - \nabla(\delta \Phi)$$

Desenvolvendo  $d(R \mathbf{u})/dt$  e, tendo em vista a transformação da equação (24), a equação acima se torna:

$$(\dot{R} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}} R) + \mathbf{u} \dot{R} = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{1}{R} \nabla_c \right) (\delta p) - \left( \frac{1}{R} \nabla_c \right) (\delta \Phi)$$

$$2\dot{R} \mathbf{u} + \frac{d\mathbf{u}}{dt} R = -\frac{1}{\rho_0 R} \nabla_c(\delta p) - \frac{1}{R} \nabla_c(\delta \Phi)$$

Dividindo a equação acima por  $R$ :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0 R^2} \nabla_c(\delta p) - \frac{1}{R^2} \nabla_c(\delta \Phi) \quad (26)$$

Consideraremos aqui perturbações adiabáticas nas quais perturbações em pressão e densidade são relacionadas à velocidade do som  $c_s^2$  pela equação

$$\frac{\delta p}{\delta \rho} = c_s^2 \quad (27)$$

Inserindo (27) na equação (26), temos que:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right) \mathbf{u} = -\frac{c_s^2}{\rho_0 R^2} \nabla_c(\delta \rho) - \frac{1}{R^2} \nabla_c(\delta \Phi) \quad (28)$$

Tomando o divergente ( $\nabla_c \cdot$ ) da equação (28), encontramos que:

$$\nabla_c \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right) \nabla_c \cdot \mathbf{u} = -\frac{c_s^2}{\rho_0 R^2} \nabla_c^2(\delta \rho) - \frac{1}{R^2} \nabla_c^2(\delta \Phi) \quad (29)$$

Tomando a derivada ( $d/dt$ ) da equação (14), e tendo em vista a transformação do operador dada pela equação (24), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) &= -\frac{d}{dt} (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{R} \nabla_c \cdot \delta \mathbf{v} \right) = \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{R} \nabla_c \cdot (R \mathbf{u}) \right) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{R}{R} \nabla_c \cdot \mathbf{u} \right) = -\nabla_c \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) = -\nabla_c \cdot \dot{\mathbf{u}}$$

Observe que na dedução acima utilizamos (22-b) na substituição de  $\delta \mathbf{v}$ , onde  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}$ . O termo entre parênteses da equação acima é o contraste de densidade,  $\Delta$ , logo:

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta = -\nabla_c \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (30)$$

A equação (30) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \Delta \right) = \frac{d}{dt} (-\nabla_c \cdot \mathbf{u})$$

$$\frac{d}{dt} \Delta = -\nabla_c \cdot \mathbf{u} \quad (31)$$

Agora, iremos inserir os resultados (30) e (31) na equação (29), onde obtemos:

$$-\frac{d^2}{dt^2} \Delta - 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right) \frac{d}{dt} \Delta = -\frac{c_s^2}{\rho_0 R^2} \nabla_c^2 (\delta \rho) - \frac{1}{R^2} \nabla_c^2 (\delta \Phi)$$

Multiplicando a equação acima por  $(-1)$ , obtemos:

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta + 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right) \frac{d}{dt} \Delta = \frac{c_s^2}{\rho_0 R^2} \nabla_c^2 (\delta \rho) + \frac{1}{R^2} \nabla_c^2 (\delta \Phi) \quad (31 - a)$$

Aplicando (24) em (18), obtemos:

$$\frac{1}{R^2} \nabla_c^2 (\delta \Phi) = 4\pi G \delta \rho \quad (31 - b)$$

Inserindo (31-b) em (31-a), obtemos:

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta + 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right) \frac{d}{dt} \Delta = \frac{c_s^2}{\rho_0 R^2} \nabla_c^2 (\delta \rho) + 4\pi G \delta \rho \quad (32)$$

Procuraremos soluções para  $\Delta = \delta\rho / \rho_0$  da forma  $\Delta \propto \exp i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ . Ao considerarmos perturbações adiabáticas do fluido, assumimos que as flutuações de densidade se propagam através do espaço e do tempo como uma onda acústica. A solução proposta é um caso particular em que  $\Delta(\mathbf{r}, t)$  é uma função harmônica para a propagação. Tal proposta de solução é razoável, visto que qualquer movimento ondulatório pode ser expresso como uma superposição de movimentos harmônicos simples. Procuremos então soluções da forma:

$$\delta\rho = \rho_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (33)$$

Como

$$\nabla_c(\delta\rho) = ik_c \rho_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\nabla_c^2(\delta\rho) = (ik_c)(ik_c)\rho_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\nabla_c^2(\delta\rho) = -k_c^2 \rho_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = -k_c^2 \delta\rho \quad (34)$$

Inserindo (34) na equação (32), obtemos:

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta + 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right) \frac{d}{dt} \Delta = -\frac{c_s^2}{\rho_0 R^2} k_c^2 \delta\rho + 4\pi G \delta\rho$$

Observamos que podemos, na equação (20), associar dimensionalmente  $\mathbf{x}$  a um determinado comprimento de onda  $\lambda$ , assim como  $\mathbf{r}$  a um comprimento de onda co-móvel  $\lambda_c$ . Isto é:

$$\lambda = R(t) \lambda_c \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = R(t) \frac{2\pi}{\lambda_c} \Leftrightarrow k_c = R(t) k$$

Como  $\delta\rho = \rho_0 \Delta$ , substituímos estas relações na equação de onda acima, onde obtemos, finalmente:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)\frac{d}{dt}\Delta = -\frac{c_s^2}{\rho_0 R^2}(R^2 k^2)(\rho_0 \Delta) + 4\pi G(\rho_0 \Delta)$$

Ou seja:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)\frac{d}{dt}\Delta = \Delta(4\pi G\rho_0 - k^2 c_s^2) \quad (35)$$

Esta é a equação diferencial que descreve a evolução das flutuações de densidade no modelo do "Hot Big Bang" que desejávamos encontrar.

Analisemos agora dois casos para o desenvolvimento das perturbações: (a) meio estático e (b) meio em expansão.

(a) Meio estático.

Para obtermos a equação para o colapso gravitacional neste caso, teremos que  $\dot{R} = 0$ . A equação (35) se reduz a :

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta = \Delta(4\pi G\rho_0 - k^2 c_s^2) \quad (36)$$

Substituiremos na equação (36) soluções de onda da forma:

$$\Delta = \Delta_0 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (37)$$

Assim, obtemos a seguinte relação de dispersão:

$$-\omega^2 \Delta = \Delta(4\pi G\rho_0 - k^2 c_s^2)$$



$$\omega^2 = k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (38)$$

A relação (38) produz dois modos: oscilações ( $\omega^2 > 0$ ) ou instabilidade ( $\omega^2 < 0$ ). No primeiro caso,  $\omega$  é um número real, logo a equação (37) descreve um movimento oscilatório com fase  $i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ . No segundo caso,  $\omega$  é um número complexo, que pode ser escrito como  $\omega = i\beta$ . Substituindo na equação (37) obtemos:

$$\Delta = \Delta_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \beta t)$$

$$\Delta = e^{\beta t} \Delta_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Esta relação descreve um movimento instável no tempo, que cresce ou decai exponencialmente, dependendo do sinal de  $\beta$ . Verificaremos estes casos com detalhe a seguir:

I.  $\omega^2 > 0 \Rightarrow$  *Oscilações.*

Ou seja,  $c_s^2 k^2 > 4\pi G \rho_0$ . Esta relação fornece o valor máximo do comprimento de onda  $\lambda$  ocupado pela flutuação de densidade:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 > 4\pi G \rho_0 / c_s^2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} > \frac{G \rho_0}{c_s^2 \pi} \Rightarrow \lambda < c_s \left(\frac{\pi}{G \rho_0}\right)^{1/2}$$

As soluções estáveis são encontradas para comprimentos de onda menores do que o *comprimento de Jeans* ( $\lambda_J$ ), que é o comprimento mínimo a partir do qual a auto-gravidade da região excede a oposição oferecida pelo gradiente de pressão. Isto é:

$$k_J^2 = \frac{4\pi G \rho}{c_s^2} \Rightarrow k_J = \frac{(4\pi G \rho)^{1/2}}{c_s} \quad (39)$$

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J}$$

Inserindo (39) na equação acima:

$$\lambda_J = \frac{2\pi c_s}{(4\pi G\rho)^{1/2}} = c_s \left( \frac{4\pi^2}{4\pi G\rho} \right)^{1/2}$$

$$\lambda_J = c_s \left( \frac{\pi}{G\rho} \right)^{1/2} > \lambda \quad (40)$$

Ou seja, como a flutuação de densidade ocupa uma escala de comprimento de onda  $\lambda < \lambda_J$ , o tempo de resposta acústica  $\lambda/c_s$  é menor do que o tempo de colapso  $\lambda_J/c_s$ . Logo, a flutuação de densidade oscila como uma onda acústica, visto que consideramos que a matéria se comporta como um fluido perfeito.

II.  $\omega^2 < 0 \Rightarrow$  *Instabilidade.*

Ou seja,  $c_s^2 k^2 < 4\pi G\rho_0$ . Esta relação implica que  $\lambda > \lambda_J$ . As soluções podem ser escritas da forma:

$$\Delta = \Delta_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \beta t), \quad (41)$$

onde  $\beta$  é a taxa de crescimento da instabilidade. Substituindo a equação (41) na equação (36), obtemos:

$$\beta^2 \Delta = \Delta(4\pi G\rho_0 - k^2 c_s^2) \quad (42)$$

Como

$$k^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \quad (43 - a)$$

e, a partir da equação (40):

$$c_s^2 = \frac{G\rho_0}{\pi} \lambda_J^2 \quad (43 - b)$$

Podemos, então, inserir (43-a) e (43-b) em (42), obtendo

$$\beta^2 = 4\pi G\rho_0 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{G\rho_0}{\pi} \lambda_J^2$$

$$\beta^2 = 4\pi G\rho_0 - \frac{4\pi^2 G\rho_0}{\pi \lambda^2} \lambda_J^2$$

$$\beta^2 = 4\pi G\rho_0 \left(1 - \frac{\lambda_J^2}{\lambda^2}\right)$$

$$\beta = \pm \left(4\pi G\rho_0 \left(1 - \frac{\lambda_J^2}{\lambda^2}\right)\right)^{1/2} \quad (44)$$

Observamos que, a partir do resultado da equação (44), existirão modos de *crescimento exponencial* da instabilidade para o caso  $\beta > 0$ . Para as regiões que serão *instáveis* ao colapso gravitacional, isto é,  $\lambda \gg \lambda_J$ , a taxa de crescimento da instabilidade será:

$$\beta = (4\pi G\rho_0)^{1/2} \quad (45)$$

Neste caso o tempo característico para o crescimento da instabilidade é dado por:

$$\tau = \frac{1}{\beta} = (4\pi G\rho_0)^{-1/2} \Rightarrow \tau \sim (G\rho_0)^{-1/2} \quad (46)$$

Este modo de instabilidade é denominada *Instabilidade de Jeans*. Observamos que  $\lambda_J = c_s \tau$ . Ou seja,  $\lambda_J$  é a distância que uma onda de som atravessa durante o tempo de

colapso  $\tau$ . A instabilidade de uma região com densidade  $\rho_0$  é devida à auto-gravitação da região (maior  $\rho_0$ , menor  $\tau$ ). O gradiente de pressão interna se opõe ao colapso. Mas se a região ocupa um espaço de dimensão maior do que  $\lambda_J$ , a gravidade supera o gradiente de pressão interna, o que leva ao colapso da região.

(b) Meio em Expansão. Perturbações de pequena amplitude.

Retornamos à equação (35). Neste caso o critério de instabilidade de Jeans também se aplica porém com uma taxa de crescimento significativamente modificada. Isto é, verificamos que, substituindo a solução proposta (37) em (35), obtemos:

$$-\omega^2 - 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right) \omega \Delta = \Delta (4\pi G \rho_0 - k^2 c_s^2)$$

$$\omega^2 + 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right) \omega = k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0$$

Ou seja, obtemos uma relação de dispersão ( $\omega$  em função de  $k$ ) que ainda satisfaz o fato de que se o sinal da expressão do lado direito da equação acima for positivo, a relação de dispersão descreve modos de oscilação, e se for negativo, modos de instabilidade. O termo adicional  $2\dot{R}\omega/R$  será responsável pela modificação na taxa de crescimento da instabilidade ( $\beta$ ), ao ser efetuada uma análise análoga ao caso II. Para determinarmos esta nova taxa de crescimento, tomemos o caso em que  $\lambda \gg \lambda_J$ , isto é, no limite de comprimentos de onda muito grande. Como  $\lambda \propto 1/k$ , desprezamos o termo de pressão  $k^2 c_s^2$ . A expressão (35) se reduz a:

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta + 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right) \frac{d}{dt} \Delta = \Delta 4\pi G \rho_0 \quad (49)$$

Para resolvermos esta nova equação, ao invés de derivarmos a solução geral, nos deteremos em dois casos particulares.

I. Estudo do caso  $\Omega = 1$  (Modelo de Einstein - de Sitter).

$$\Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H_0^2} = 1 \Rightarrow 4\pi G\rho = \frac{3}{2}H_0^2 \quad (50)$$

Usando a relação:

$$R(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}$$

temos que:

$$\frac{d}{dt}R = \left(\frac{3}{2}H_0\right)^{2/3} \frac{2}{3}t^{-1/3} \quad (51)$$

Dividindo a equação (51) por  $R$  temos:

$$H_0 = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{2}{3}t^{-2/3}t^{-1/3} \Rightarrow H_0 = \frac{2}{3t} \quad (52)$$

$$H_0 = \frac{2}{3t} \Rightarrow H_0^2 = \frac{4}{9t^2} \quad (53)$$

Inserindo (53) em (50), obtemos:

$$4\pi G\rho = \frac{3}{2} \frac{4}{9t^2} \Rightarrow 4\pi G\rho = \frac{2}{3t^2} \quad (54)$$

Inserindo os resultados (52), e (54) na equação (49), isto é, na equação diferencial para a evolução das flutuações no caso do meio em expansão, obtemos:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta + \frac{4}{3t} \frac{d}{dt}\Delta - \frac{2}{3t^2}\Delta = 0 \quad (55)$$

Devido à dependência em potências de  $t$ , procuramos soluções da forma:

$$\Delta = at^n \quad (56)$$

Inserindo a solução proposta (56) em (55), obtemos:

$$\frac{d}{dt}at^n = nat^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}at^n = n(n-1)at^{n-2}$$

$$n(n-1)at^{n-2} + \frac{4}{3t}nat^{n-1} - \frac{2}{3t^2}at^n = 0$$

$$n(n-1) + \frac{4}{3}n - \frac{2}{3} = 0$$

As soluções para  $n$  na equação acima são:

$$n = \frac{2}{3} \quad n = -1 \quad (57)$$

$n = -1 \Rightarrow$  Modo de *decaimento*.

$n = 2/3 \Rightarrow$  Modo de *crescimento algébrico*.

Este segundo caso é o que estávamos procurando. Ou seja, estamos investigando soluções para o crescimento das perturbações que podem dar origem à formação de estruturas como observamos atualmente.

Observamos que  $\Delta$  cresce em proporção a  $R$ , neste segundo caso. Ou seja:

$$\Delta = at^{2/3} \Rightarrow \Delta \propto t^{2/3}$$

Como  $R \propto t^{2/3}$ :

$$\Delta = \frac{\delta\rho}{\rho} \propto R \quad (58)$$

Utilizamos aqui a relação entre o fator de escala e o desvio para o vermelho,  $z$

$$R(t) = \frac{1}{1+z}$$

onde  $z$  é dado por:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}$$

Nesta relação,  $\lambda_e$  é o comprimento de onda emitido da fonte, e  $\lambda_0$  é o comprimento de onda observado. Logo, podemos exprimir a solução aqui encontrada para o crescimento de  $\Delta$  em termos de  $z$ :

$$\Delta \propto \frac{1}{1+z}$$

II. Estudo do caso  $\Omega = 0$  (Modelo de Milne).

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \Rightarrow \rho = 0 \quad (59)$$

Neste modelo  $R(t) = H_0 t$ , logo:

$$\frac{d}{dt}R = H_0$$

Dividindo a equação acima por  $R$ , obtemos:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{H_0}{H_0 t} = \frac{1}{t} \quad (60)$$

Inserindo (59) e (60) em (49), obtemos:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta + \frac{2}{t}\frac{d}{dt}\Delta = 0$$

Procurando soluções da forma (56) e utilizando o mesmo procedimento do caso I acima, obtemos as soluções:

$$n = 0 \quad n = -1 \quad (61)$$

$n = -1 \Rightarrow$  Modo de *decaimento*.

$n = 0 \Rightarrow$  Amplitude das perturbações *constante*.

Isto é, de acordo com a equação (56), para o segundo caso acima:

$$\Delta = a = \text{constante} \quad (62)$$

O modelo  $\Omega = 0$  é uma aproximação para a descrição do Universo sem matéria escura, onde a densidade atual  $\rho_0$  seria igual à densidade das galáxias  $\rho_{gal}$ . Como  $\rho_{gal}$  seria muito pequena, as galáxias poderiam ser consideradas simplesmente “partículas-teste”, onde suas interações gravitacionais mútuas seriam desprezíveis. Isto significa que o Modelo de Milne é desenvolvido puramente da cinemática cósmica. Uma interpretação da equação (62) é que, no limite de  $\Omega \sim 0$ , o crescimento de  $\Delta$  é muito lento. Logo, neste limite, o contraste de densidade terá atingido um determinado valor em relação à densidade de fundo, e se manterá constante ao longo da expansão.

Os casos estudados acima descrevem a evolução das perturbações de pequenas amplitudes ( $\delta\rho/\rho \ll 1$ ). Nos estágios iniciais da fase do Universo dominado pela matéria, a dinâmica dos modelos de Universo aproxima-se do Modelo de Einstein - de Sitter, onde  $\Delta$  cresce linearmente com  $R$ . Nos estágios posteriores, quando o Universo pode ser aproximado ao Modelo de Milne, as perturbações crescem lentamente.



As análises efetuadas até o momento não indicam o *motivo físico* das perturbações crescerem somente de forma linear com a época cósmica nos estágios iniciais do Universo, após o desacoplamento entre matéria e radiação (de acordo com o modelo  $\Omega = 1$ ). Para compreendermos a razão física deste processo, devemos considerar a dinâmica dos modelos de Friedman, que são soluções para as equações de campo de Einstein. Consideraremos o caso em que a constante cosmológica  $\Lambda = 0$ . A equação dinâmica se reduz a :

$$\dot{R}^2 = \frac{\Omega H_0^2}{R} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} \quad (63)$$

onde  $\mathfrak{R}$  é o raio de curvatura da geometria do modelo de Universo na época presente.

Podemos obter um resultado interessante ao inserirmos na equação acima os valores de  $t$  e  $R$  para a época atual, isto é:

$$t = t_0 \quad R = 1$$

Ou seja:

$$H_0 = \left( \frac{\dot{R}}{R} \right) = \frac{\dot{R}}{1} \Rightarrow \dot{R}^2 = H_0^2$$

Inserindo este resultado em (63), obtemos:

$$H_0^2 = \frac{\Omega H_0^2}{1} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} \Rightarrow \mathfrak{R} = \frac{c/H_0}{(\Omega - 1)^{1/2}} \quad (64)$$

Como a curvatura do espaço é dada por  $\kappa = 1/\mathfrak{R}^2$ , obtemos:

$$\kappa = \frac{\Omega - 1}{(c/H_0)^2} \quad (65)$$

Ou seja, observamos em (65) que há uma relação direta entre a curvatura do espaço e a densidade do Universo.

Podemos modelar o desenvolvimento de uma perturbação esférica num Universo em expansão inserindo uma região esférica de densidade  $\rho + \delta\rho$  num Universo de densidade uniforme  $\rho$ . Esta região esférica se comporta como um Universo de densidade ligeiramente maior. Este argumento provém do fato que, devido às considerações de isotropia, a física local é descrita da mesma forma que a física global (isto é, à dinâmica em larga escala). Podemos portanto utilizar a equação (63) para obtermos o comportamento do fator de escala  $R$  em função de  $t$  para esta região esférica. Inserindo (64) em (63), obtemos:

$$\dot{R}^2 = \frac{\Omega H_0^2}{R} - \frac{c^2 H_0^2 (\Omega - 1)}{c^2} = H_0^2 \left( \frac{\Omega}{R} + 1 - \Omega \right)$$

$$\frac{d}{dt} R = H_0 \left( \frac{\Omega}{R} + 1 - \Omega \right)^{1/2} \quad (66)$$

A solução para a equação (66) é uma curva do tipo cicloide, que pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$R = a(1 - \cos \theta) \quad t = b(\theta - \text{sen} \theta) \quad (67)$$

onde:

$$a = \frac{\Omega}{2(\Omega - 1)} \quad b = \frac{\Omega}{2H_0(\Omega - 1)^{3/2}} \quad (68)$$

Para pequenos valores de  $\theta$ ,  $R$  e  $t$  tendem a 0, correspondendo a épocas iniciais do Universo dominado pela matéria. Expandindo em primeira ordem  $\cos \theta$  e  $\text{sen} \theta$ , temos:

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \quad \text{sen} \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 \quad (69)$$

Inserindo (69) em (67), obtemos:

$$R = a \left( 1 - 1 + \frac{1}{2}\theta^2 \right) = \frac{a}{2}\theta^2 \quad (70)$$

$$t = b \left( \theta - \theta + \frac{1}{6}\theta^3 \right) = \frac{b}{6}\theta^3 \Rightarrow \theta^2 = \left( \frac{6t}{b} \right)^{2/3} \quad (71)$$

Inserindo (71) em (70), obtemos:

$$R = \frac{a}{2} \left( \frac{6t}{b} \right)^{2/3} \quad (72)$$

Substituindo os valores de  $a$  e  $b$  dados por (68) em (72), temos:

$$R = \frac{\Omega}{4(\Omega - 1)} \left( \frac{6}{\Omega} 2H_0(\Omega - 1)^{2/3}t \right)^{2/3} = \Omega^{1/3} \left( \frac{12}{4^{3/2}} H_0 t \right)^{2/3}$$

$$R = \Omega^{1/3} \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3} \quad (73)$$

A solução (73) corresponde à conclusão de que, nos estágios iniciais com  $\Omega = 1$ , temos que  $R \propto t^{2/3}$ , o que nos leva à mesma conclusão que a relação (58).

Tomemos agora uma outra região com densidade ligeiramente maior, englobada pela região que foi modelada nos parágrafos precedentes. Expandiremos as expressões para  $R$  e  $t$  em ordens superiores, isto é:

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 \dots \quad (74 - a)$$

$$\text{sen} \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 \dots \quad (74 - b)$$

Seguindo a mesma análise anterior, encontramos:

$$\bar{R} = a \left( 1 - 1 + \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{24}\theta^4 \right) = a \frac{\theta^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{12}\theta^2 \right)$$

Das equações (70) e (71), a expressão acima se reduz a:

$$\bar{R} = R \left( 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{6t}{b} \right)^{2/3} \right) \quad (75)$$

Ou seja, o fator de expansão  $\bar{R}$  da não-homogeneidade esférica é igual ao fator de expansão  $R$  do fundo, com uma pequena correção.

Similarmente para  $\bar{t}$ , encontramos:

$$\bar{t} = t \left( 1 - \frac{1}{20} \left( \frac{6t}{b} \right)^{2/3} \right)$$

Da equação (73), obtemos:

$$\bar{R} = \Omega^{1/3} \left( \frac{3H_0 t}{2} \right)^{2/3} \left( 1 - \frac{1}{20} \left( \frac{6t}{b} \right)^{2/3} \right) \quad (76)$$

A partir deste resultado, iremos desenvolver a expressão para a evolução da densidade do modelo com a época cósmica. Inserindo a equação (68) na equação (75), obtemos:

$$\bar{R} = R \left( 1 - \frac{1}{20} \left( \frac{6t}{\Omega} 2H_0 (\Omega - 1)^{3/2} \right)^{2/3} \right) = R \left( 1 - \frac{(\Omega - 1)}{20} \left( \frac{12tH_0}{\Omega} \right)^{2/3} \right) \quad (77)$$

Obtemos o valor de  $t$  em função de  $R$  a partir da equação (73):

$$t = \frac{2}{3H_0} \frac{R^{3/2}}{\Omega^{1/2}} \quad (78)$$

Inserindo (78) em (77), obtemos:

$$\bar{R} = R \left( 1 - \frac{(\Omega - 1)}{20} \left( \frac{12H_0}{\Omega} \frac{2R^{3/2}}{3H_0\Omega^{1/2}} \right)^{2/3} \right) = R \left( 1 - \frac{1}{5} \frac{(\Omega - 1)}{\Omega} R \right) \quad (79)$$

A densidade varia com  $\bar{R}$  num meio uniforme e isotrópico de acordo com a expressão:

$$\rho(R) = \rho_0 \bar{R}^{-3} \quad (80)$$

Inserindo (79) em (80), obtemos:

$$\rho(R) = \rho_0 R^{-3} \left( 1 - \frac{1}{5} \frac{(\Omega - 1)}{\Omega} R \right)^{-3} \quad (81)$$

Utilizando a expansão binomial para a equação (81), dada por:

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \dots$$

Obtemos, finalmente:

$$\rho(R) = \rho_0 R^{-3} \left( 1 + (-3) \left( -\frac{1}{5} \frac{(\Omega - 1)}{\Omega} R \right) \right)$$
$$\rho(R) = \rho_0 R^{-3} \left( 1 + \frac{3}{5} \frac{(\Omega - 1)}{\Omega} R \right) \quad (82)$$

Observamos na equação (82) que, se  $\Omega = 1$ :

$$\rho(R) = \rho_0 R^{-3} \quad (83)$$

Isto significa que não há crescimento da perturbação para o caso crítico  $\Omega = 1$ . A perturbação de densidade pode ser considerada um mini-universo de densidade ligeiramente maior ( $\Omega > 1$ ), inserido no modelo  $\Omega = 1$ . Definindo o contraste de densidade como a diferença entre o modelo  $\Omega > 1$  e o modelo  $\Omega = 1$ , encontramos, a partir das equações (82) e (83):

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho_{\Omega>1}(R) - \rho_{\Omega=1}(R)}{\rho_{\Omega=1}(R)} = \frac{\rho_0 R^{-3} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{(\Omega-1)}{\Omega} R\right) - \rho_0 R^{-3}}{\rho_0 R^{-3}}$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{3}{5} \frac{(\Omega-1)}{\Omega} R \quad (84)$$

Este resultado mostra a razão física para que a perturbação cresça somente de forma linear com a época cósmica. O crescimento corresponde à *pequena divergência entre a variação dos fatores de escala com a época cósmica*, considerando o modelo crítico e um outro modelo com densidade ligeiramente maior. Este resultado é válido para flutuações de qualquer escala física, visto que as condições locais são também globais num Universo homogêneo e isotrópico.

Observamos, a partir da variação cicloidal do fator de escala  $R$ , dada pela equação (67) que, se  $\theta = \pi$ :

$$R = a(1 - \cos\pi) = 2a = R_{max}$$

A perturbação cessa de expandir em  $\theta = \pi$ , pois  $\dot{R} = 0$ , isto é:

$$\frac{d}{d\theta} R = \text{sen}\theta \Rightarrow dR = \text{sen}\theta d\theta$$

$$\frac{d}{d\theta} t = b - \cos\theta \Rightarrow dt = (b - \cos\theta)d\theta$$

$$\frac{d}{dt}R = \frac{\text{sen}\theta}{b - \text{cos}\theta} \Rightarrow \left(\frac{d}{dt}R\right)_{\theta=\pi} = \frac{\text{sen}\pi}{b - \text{cos}\pi} = 0$$

Logo, o raio máximo é também igual ao raio da perturbação ao cessar de expandir, isto é,  $R_{max} \equiv R_p$ , e pela equação (68):

$$R_p = 2a = \frac{\Omega}{\Omega - 1} \quad (85)$$

A partir das equações (67) e (68) deduzimos que  $t$  é dado por:

$$t = b(\pi - \text{sen}\pi) \Rightarrow t = \pi b \Rightarrow t = \frac{\pi\Omega}{2H_0(\Omega - 1)^{3/2}} \quad (86)$$

A equação (86) pode ser escrita em termos da equação (85):

$$t = \frac{\pi}{2H_0} \frac{R_p}{(\Omega - 1)^{1/2}} \quad (86 - a)$$

Seja  $\Omega = 1$  para o modelo de "fundo". A razão entre a perturbação de densidade  $\rho_p$  e a densidade de fundo  $\rho_0$  é dada por:

$$\frac{\rho_p}{\rho_0} = \frac{R_0^3}{R_p^3} \quad (87)$$

Pela equação (73),  $R_0$  é dado por (onde  $\Omega = 1$ ):

$$R_0 = \left(\frac{3}{2}H_0t\right)^{2/3} \quad (88)$$

Inserindo a equação (86-a) na equação (88), obtemos:

$$R_0 = \left(\frac{3H_0}{2} \frac{\pi R_p}{2H_0(\Omega - 1)^{1/2}}\right)^{2/3} = \left(\frac{3\pi R_p}{4}\right)^{2/3} \frac{1}{(\Omega - 1)^{1/3}} \quad (89)$$

Inserindo (89) em (87), obtemos:

$$\frac{\rho_p}{\rho_0} = \frac{9\pi^2}{16} \frac{R_p^2}{(\Omega - 1)} \times \frac{1}{R_p^3} = \frac{9\pi^2}{16} \frac{1}{(\Omega - 1)R_p}$$

Substituindo a equação (85) na equação acima, obtemos:

$$\frac{\rho_p}{\rho_0} = \frac{9\pi^2}{16} \frac{(\Omega - 1)}{(\Omega - 1)\Omega} = \frac{9\pi^2}{16} \frac{1}{\Omega}$$

Neste caso,  $\Omega$  é ligeiramente maior do que 1, portanto, podemos fazer a aproximação  $\frac{1}{\Omega} \sim 1$ , logo:

$$\frac{\rho_p}{\rho_0} = \frac{9\pi^2}{16} \sim 5.55 \quad (90)$$

Isto significa que, no momento em que a esfera co-móvel perturbada para de expandir, sua densidade é  $\sim 5.55$  vezes a densidade de fundo. Como  $R \propto (1+z)^{-1} \propto t^{2/3}$ , a relação entre o deslocamento para o vermelho na expansão máxima,  $z_{max}$ , e o deslocamento para o vermelho no colapso,  $z_{form}$ , será dada por:

$$\frac{R_{max}}{R_{form}} = \frac{1+z_{form}}{1+z_{max}} = \left( \frac{t_{max}}{t_{form}} \right)^{2/3} \quad (91)$$

$t_{max}$  é dado pela equação (86), e o tempo de colapso,  $t_{form}$ , é obtido para  $\theta = 2\pi$ , isto é:

$$t_{form} = b(2\pi - \text{sen}2\pi) = \frac{\Omega}{2H_0(\Omega - 1)^{3/2}} 2\pi \Rightarrow t_{form} = \frac{\pi\Omega}{H_0(\Omega - 1)^{3/2}} \quad (92)$$

Inserindo as equações (92) e (86) em (91), obtemos:

$$\frac{1+z_{form}}{1+z_{max}} = \left( \frac{\pi\Omega}{2H_0(\Omega - 1)^{3/2}} \frac{H_0(\Omega - 1)^{3/2}}{\pi\Omega} \right)^{2/3} = 2^{-2/3} \quad (93)$$



O resultado acima mostra que o colapso ocorre muito rápido. Por exemplo, se  $z_{max} = 10$ , então  $z_{orm} = 6$ . Em casos mais realísticos, devemos levar em conta processos não-lineares, tais como o fato da perturbação não ser perfeitamente esférica. O colapso de uma estrutura atinge eventualmente o equilíbrio dinâmico. Este estado deve satisfazer ao Teorema do Virial, que estabelece que a energia cinética do sistema é igual à metade (negativa) da sua energia potencial gravitacional. Em  $z_{max}$ , toda a energia do sistema é energia potencial gravitacional:

$$\Omega_{p,R} = -\frac{GM^2}{R} \quad (94)$$

Se o sistema colapsa para a metade deste raio, a energia potencial gravitacional será:

$$\Omega_{p,R/2} = -\frac{GM^2}{(R/2)} \quad (95)$$

Pela conservação da energia, a energia cinética adquirida será:

$$K_{R \rightarrow R/2} = \frac{1}{2}Mv^2 = \Omega_{p,R} - \Omega_{p,R/2} = \frac{GM^2}{R} = -\frac{1}{2}\Omega_{p,R/2} \quad (96)$$

Logo, observamos pela equação (96) que, para atingir o equilíbrio dinâmico, o raio da perturbação deve diminuir por um fator 2, e conseqüentemente, a densidade deve aumentar por um fator 8. Portanto, a densidade final da região é no mínimo  $5.55 \times 8$  vezes maior que a densidade de fundo. Podemos escrever que a densidade da região virializada é:

$$\rho_{vir} \gtrsim 5.55 \times 8 \times \rho_{fundo}$$

Observamos que:

$$\rho_{fundo} = \rho_0(1 + z_{max})^3$$

$$\Omega = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2} \Rightarrow \rho_0 = \frac{3H_0\Omega}{8\pi G}$$

Assim, obtemos:

$$\rho_{vir} \gtrsim 5.55 \times 8 \times \frac{3H_0\Omega}{8\pi G} (1 + z_{max})^3 \quad (97)$$

Para um raio  $R$ , o Teorema do Virial estabelece que:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{R} \quad (98)$$

onde  $v^2$  é a dispersão de velocidades do sistema. Observamos que, a partir da equação acima, obtemos  $\rho_{vir}$ :

$$R = \frac{GM}{v^2} \Rightarrow \rho_{vir} \sim \frac{massa}{volume} \sim \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \sim \frac{M}{\frac{4}{3}\pi} \frac{v^6}{G^3 M^3} \sim \frac{v^6}{\frac{4}{3}\pi G^3 M^2} \quad (99)$$

Inserindo a equação (99) em (97), obtemos, de forma normalizada:

$$1 + z_{max} \lesssim 0.62 \left( \frac{v}{100 \text{ km/s}} \right)^2 \left( \frac{M}{10^{12} M_\odot} \right)^{-2/3} (\Omega h^2)^{-1/3} \quad (100)$$

onde  $h = \frac{H_0}{100 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}$ .

Para o caso de aglomerados de galáxias, com  $v \sim 1000 \text{ km/s}$ ,  $M \sim 10^{15} M_\odot$ , verificamos que  $z_{form}$  não pode ser muito maior do que 1. Este é um cálculo um pouco mais refinado do que aquele sugerido no início deste apêndice. Em média, os aglomerados de galáxias parecem ter se formado num passado relativamente recente no Universo.

Concluimos neste apêndice, portanto, os fundamentos essenciais ao estudo dos problemas clássicos de formação de galáxias no modelo do "Hot Big Bang".

## Apêndice B

Neste apêndice listamos os parâmetros obtidos para todas as galáxias detectadas em A3558 até a magnitude limite  $m_B = 18.75$ . Esta tabela encontra-se disponível em arquivo ASCII (contactar [reinaldo@kepler.on.br](mailto:reinaldo@kepler.on.br)). As colunas são apresentadas na seguinte ordem:

Coluna (1) - Número de Galáxias no catálogo final;

Coluna (2) - Ascensão reta para 1950.0;

Coluna (3) - Declinação para 1950.0;

Coluna (4) - Magnitude total na banda B - Johnson;

Coluna (5) - Ângulo de posição para cada objeto detectado pelo FOCAS;

Coluna (6) - Elipticidade de cada objeto detectado pelo FOCAS;

Coluna (7) - Área total em pixels<sup>2</sup> para cada objeto detectado pelo FOCAS;

## A3558

#	A.R. (1950.0)	DEC.	Bt	AP (graus)	elp.	Area (px <sup>2</sup> )
1	13 24 7.79	-31 42 42.54	16.26	110.	0.70	279.0
2	13 25 2.70	-31 41 30.41	17.67	114.	0.52	264.0
3	13 23 45.18	-31 41 24.54	17.53	33.	0.27	207.0
4	13 27 12.62	-31 41 21.94	18.18	166.	0.39	228.0
5	13 24 8.93	-31 40 35.47	17.21	32.	0.38	280.0
6	13 24 24.29	-31 40 22.48	16.77	165.	0.64	473.0
7	13 26 5.35	-31 39 42.30	16.97	157.	0.64	384.0
8	13 24 31.21	-31 39 20.37	17.94	122.	0.86	180.0
9	13 23 6.31	-31 39 17.71	18.12	169.	0.85	251.0
10	13 22 53.80	-31 38 23.79	17.74	6.	0.48	251.0
11	13 26 44.69	-31 37 58.88	18.27	10.	0.25	248.0
12	13 25 46.55	-31 37 52.79	16.69	67.	0.22	500.0
13	13 23 17.10	-31 37 37.10	18.03	87.	0.82	173.0
14	13 26 18.22	-31 37 22.95	18.03	92.	0.40	208.0
15	13 24 14.66	-31 36 53.32	17.56	173.	0.78	253.0
16	13 23 49.92	-31 36 39.87	17.57	172.	0.78	326.0
17	13 26 8.74	-31 36 8.00	17.19	176.	0.42	356.0
18	13 24 17.96	-31 36 9.81	16.62	128.	0.29	679.0
19	13 25 36.15	-31 35 59.71	14.94	156.	0.79	1979.0
20	13 24 3.88	-31 34 56.54	17.61	47.	0.46	386.0
21	13 26 41.73	-31 34 36.60	18.22	40.	0.37	225.0
22	13 26 25.71	-31 34 7.66	18.15	150.	0.66	191.0
23	13 26 41.65	-31 33 48.99	17.81	87.	0.21	215.0
24	13 24 28.04	-31 33 45.08	17.64	98.	0.34	290.0
25	13 26 49.58	-31 33 41.21	18.24	152.	0.71	192.0
26	13 26 8.27	-31 33 43.08	16.29	85.	0.65	669.0
27	13 26 38.77	-31 33 5.71	18.54	94.	0.07	129.0
28	13 26 34.25	-31 33 5.79	17.90	126.	0.05	230.0
29	13 25 38.75	-31 32 50.78	17.67	151.	0.03	244.0
30	13 25 29.37	-31 32 48.83	16.87	95.	0.51	423.0
31	13 25 12.17	-31 32 41.06	17.68	77.	0.14	222.0
32	13 24 5.66	-31 32 49.08	16.68	135.	0.87	560.0
33	13 23 3.42	-31 32 31.64	18.73	136.	0.35	166.0
34	13 26 41.69	-31 32 36.79	18.71	114.	0.64	120.0
35	13 26 15.33	-31 32 26.77	17.06	164.	0.57	296.0
36	13 27 9.00	-31 32 19.24	17.06	123.	0.14	419.0
37	13 24 56.95	-31 32 19.85	15.27	115.	0.36	2029.0
38	13 26 30.78	-31 31 40.70	18.61	58.	0.68	126.0
39	13 25 41.27	-31 31 47.65	17.15	125.	0.23	316.0
40	13 25 13.34	-31 31 23.00	17.54	65.	0.52	333.0
41	13 23 4.17	-31 31 14.76	16.79	152.	0.09	469.0
42	13 25 13.28	-31 30 42.09	17.79	105.	0.72	246.0
43	13 27 4.39	-31 30 43.42	17.64	98.	0.29	250.0
44	13 23 57.06	-31 30 22.25	17.53	137.	0.31	251.0
45	13 25 34.49	-31 30 2.47	18.75	140.	0.47	109.0
46	13 25 17.81	-31 29 56.32	17.47	147.	0.65	391.0
47	13 25 14.04	-31 29 49.11	15.84	146.	0.71	472.0
48	13 25 12.19	-31 29 27.76	16.92	39.	0.63	283.0
49	13 24 1.59	-31 29 16.78	18.41	116.	0.19	133.0
50	13 25 46.01	-31 29 17.38	16.38	26.	0.44	449.0

## A3558

#	A.R. (1950.0)	DEC.	Bt	AP (graus)	elp.	Area (px^2)
51	13 26 25.31	-31 29 16.65	17.09	15.	0.70	467.0
52	13 26 10.37	-31 28 48.74	18.17	121.	0.79	148.0
53	13 27 9.11	-31 28 43.85	17.63	71.	0.17	282.0
54	13 24 25.65	-31 28 34.32	18.15	77.	0.59	166.0
55	13 23 47.40	-31 28 13.50	16.45	70.	0.62	470.0
56	13 25 13.68	-31 28 11.40	17.89	149.	0.50	180.0
57	13 26 12.73	-31 28 10.90	17.68	146.	0.68	242.0
58	13 25 23.23	-31 28 10.46	16.47	102.	0.67	404.0
59	13 27 7.72	-31 28 1.91	18.02	95.	0.32	225.0
60	13 24 38.41	-31 27 51.26	17.50	99.	0.70	356.0
61	13 24 49.18	-31 27 42.25	17.51	20.	0.07	348.0
62	13 26 6.07	-31 27 13.42	17.84	160.	0.82	255.0
63	13 23 7.89	-31 27 0.75	16.68	61.	0.24	454.0
64	13 27 1.23	-31 26 56.33	16.81	173.	0.48	461.0
65	13 27 19.15	-31 26 47.02	16.90	155.	0.03	348.0
66	13 22 52.71	-31 26 22.46	18.64	66.	0.48	168.0
67	13 25 24.83	-31 26 30.40	17.63	99.	0.25	243.0
68	13 25 58.42	-31 26 7.71	16.97	116.	0.47	354.0
69	13 25 45.51	-31 25 59.46	18.35	38.	0.55	122.0
70	13 23 48.30	-31 25 52.82	17.37	141.	0.40	320.0
71	13 24 3.24	-31 25 40.32	17.42	22.	0.22	234.0
72	13 24 38.41	-31 25 37.56	17.48	18.	0.03	289.0
73	13 24 36.06	-31 25 13.59	17.42	161.	0.16	240.0
74	13 25 20.18	-31 25 24.28	16.90	22.	0.88	356.0
75	13 25 35.47	-31 25 7.79	17.83	30.	0.31	199.0
76	13 24 33.31	-31 24 55.72	18.06	137.	0.79	199.0
77	13 25 59.53	-31 24 19.64	17.85	95.	0.24	203.0
78	13 26 34.49	-31 24 25.30	16.72	14.	0.39	584.0
79	13 25 50.59	-31 24 13.60	17.39	84.	0.70	294.0
80	13 23 16.62	-31 23 58.28	18.47	148.	0.71	127.0
81	13 26 39.60	-31 23 59.64	17.19	99.	0.53	298.0
82	13 25 8.64	-31 23 46.37	17.79	115.	0.18	210.0
83	13 26 25.67	-31 23 44.66	18.23	169.	0.26	135.0
84	13 26 52.64	-31 23 40.59	18.08	128.	0.44	202.0
85	13 25 51.81	-31 23 40.23	17.58	74.	0.71	260.0
86	13 23 28.95	-31 23 14.31	17.78	154.	0.24	359.0
87	13 25 54.30	-31 23 12.70	16.88	23.	0.67	263.0
88	13 24 25.55	-31 22 51.11	18.05	156.	0.59	173.0
89	13 24 20.93	-31 22 49.89	15.73	175.	0.27	1295.0
90	13 26 24.93	-31 22 57.34	17.79	53.	0.37	141.0
91	13 24 22.29	-31 21 56.43	17.43	66.	0.66	352.0
92	13 25 50.51	-31 21 19.70	17.37	18.	0.42	251.0
93	13 26 58.66	-31 21 0.96	15.99	119.	0.08	1246.0
94	13 27 16.49	-31 20 40.75	18.47	106.	0.37	135.0
95	13 25 13.10	-31 20 5.69	18.02	106.	0.44	187.0
96	13 25 6.60	-31 20 2.51	18.40	83.	0.68	208.0
97	13 24 42.78	-31 20 3.27	17.77	8.	0.71	263.0
98	13 23 48.47	-31 19 45.93	18.53	60.	0.77	140.0
99	13 26 45.16	-31 19 40.59	18.21	76.	0.28	187.0
100	13 26 11.65	-31 19 41.97	18.37	172.	0.44	122.0

## A3558

#	A.R. (1950.0)	DEC.	Bt	AP (graus)	elp.	Area (px <sup>2</sup> )
101	13 25 21.64	-31 19 36.92	17.79	127.	0.43	238.0
102	13 25 0.60	-31 19 44.15	18.49	154.	0.80	254.0
103	13 25 21.19	-31 19 11.11	18.69	40.	0.62	110.0
104	13 25 13.64	-31 19 15.70	17.36	10.	0.06	240.0
105	13 26 31.97	-31 19 18.03	17.81	12.	0.40	240.0
106	13 26 0.52	-31 19 6.07	16.13	57.	0.27	650.0
107	13 24 0.10	-31 18 48.53	17.22	150.	0.37	415.0
108	13 23 33.41	-31 18 40.63	17.49	130.	0.13	261.0
109	13 26 27.03	-31 18 41.69	17.80	52.	0.47	223.0
110	13 25 2.15	-31 18 37.09	16.64	131.	0.46	445.0
111	13 25 26.83	-31 18 46.76	18.38	7.	0.44	124.0
112	13 25 48.29	-31 18 30.44	17.74	99.	0.11	264.0
113	13 25 30.58	-31 18 22.26	16.42	89.	0.29	246.0
114	13 25 28.46	-31 18 10.70	17.30	81.	0.86	172.0
115	13 26 39.33	-31 17 38.63	15.57	86.	0.46	907.0
116	13 24 46.54	-31 17 34.37	16.28	24.	0.77	750.0
117	13 26 21.20	-31 17 21.93	17.27	139.	0.03	288.0
118	13 26 20.74	-31 16 56.52	18.67	105.	0.60	125.0
119	13 26 31.81	-31 16 58.22	16.14	91.	0.52	888.0
120	13 25 22.46	-31 16 50.54	18.28	1.	0.86	218.0
121	13 24 50.57	-31 16 54.78	15.89	47.	0.16	798.0
122	13 26 17.37	-31 16 41.03	17.96	124.	0.62	195.0
123	13 25 6.31	-31 16 50.00	15.36	93.	0.33	1572.0
124	13 25 40.03	-31 16 36.41	17.55	132.	0.90	327.0
125	13 23 57.65	-31 16 13.07	17.99	29.	0.88	221.0
126	13 25 13.59	-31 16 15.80	17.05	170.	0.10	293.0
127	13 25 25.57	-31 16 29.02	17.66	80.	0.46	209.0
128	13 25 20.86	-31 18 9.80	16.76	108.	0.68	599.0
129	13 26 7.33	-31 15 53.15	18.43	149.	0.93	245.0
130	13 25 34.72	-31 15 45.17	16.70	90.	0.76	462.0
131	13 25 41.51	-31 15 24.65	17.55	56.	0.53	258.0
132	13 25 47.07	-31 15 27.00	18.01	162.	0.93	257.0
133	13 25 37.16	-31 14 50.74	18.43	84.	0.53	130.0
134	13 24 59.98	-31 14 22.13	18.50	139.	0.78	171.0
135	13 24 42.80	-31 14 30.57	17.91	32.	0.58	309.0
136	13 25 22.45	-31 13 47.74	17.17	119.	0.07	407.0
137	13 26 5.48	-31 13 50.70	16.27	162.	0.31	1041.0
138	13 24 42.84	-31 13 30.27	18.27	171.	0.40	196.0
139	13 25 4.53	-31 14 7.36	17.49	136.	0.43	132.0
140	13 25 8.24	-31 14 15.46	14.31	20.	0.42	2518.0
141	13 25 7.03	-31 13 28.12	17.30	133.	0.71	149.0
142	13 25 0.00	-31 13 17.13	17.21	59.	0.42	317.0
143	13 24 56.03	-31 13 13.73	17.48	99.	0.10	206.0
144	13 23 53.81	-31 13 27.47	16.02	3.	0.72	603.0
145	13 23 10.16	-31 13 6.01	18.23	34.	0.63	136.0
146	13 25 28.15	-31 13 3.59	18.57	35.	0.41	116.0
147	13 25 7.12	-31 12 58.33	17.88	154.	0.10	172.0
148	13 25 44.65	-31 12 57.54	18.11	114.	0.69	150.0
149	13 25 0.91	-31 12 32.26	18.00	142.	0.36	135.0
150	13 25 37.72	-31 12 32.55	17.50	169.	0.64	304.0

## A3558

#	A.R. (1950.0)	DEC.	Bt	AP (graus)	elp.	Area (px <sup>2</sup> )
151	13 23 32.73	-31 12 26.71	16.33	103.	0.24	796.0
152	13 24 49.11	-31 12 19.64	18.16	142.	0.60	191.0
153	13 26 30.67	-31 11 47.89	17.92	47.	0.45	201.0
154	13 24 58.08	-31 11 47.18	16.68	113.	0.11	536.0
155	13 23 37.52	-31 11 50.43	16.79	39.	0.32	577.0
156	13 25 24.37	-31 10 56.39	17.10	145.	0.13	290.0
157	13 25 45.63	-31 10 55.16	15.86	65.	0.59	851.0
158	13 26 49.61	-31 10 35.81	18.25	28.	0.59	123.0
159	13 26 31.99	-31 10 35.33	17.50	2.	0.85	280.0
160	13 25 7.17	-31 10 25.83	18.52	123.	0.27	191.0
161	13 25 22.96	-31 10 16.75	18.00	36.	0.10	307.0
162	13 22 59.58	-31 10 3.73	17.50	44.	0.37	298.0
163	13 24 45.05	-31 9 57.13	17.87	68.	0.23	227.0
164	13 24 7.65	-31 9 57.23	17.30	95.	0.11	274.0
165	13 26 32.74	-31 9 47.35	18.68	57.	0.59	113.0
166	13 24 59.28	-31 9 21.81	17.06	130.	0.72	372.0
167	13 24 7.58	-31 9 16.93	17.44	46.	0.34	246.0
168	13 26 43.63	-31 9 3.14	18.06	51.	0.56	142.0
169	13 27 16.22	-31 9 10.64	16.02	46.	0.91	618.0
170	13 24 57.75	-31 8 48.77	16.97	85.	0.30	490.0
171	13 26 34.51	-31 8 34.49	17.40	111.	0.88	294.0
172	13 24 25.23	-31 8 25.30	17.34	117.	0.09	278.0
173	13 23 30.89	-31 8 13.26	17.11	179.	0.15	262.0
174	13 24 1.47	-31 8 13.27	16.09	129.	0.96	600.0
175	13 23 1.95	-31 7 38.00	17.28	44.	0.78	283.0
176	13 24 41.20	-31 7 56.93	15.18	6.	0.34	1916.0
177	13 25 22.01	-31 7 40.23	16.55	138.	0.27	654.0
178	13 26 35.51	-31 7 12.92	17.23	117.	0.88	360.0
179	13 24 44.28	-31 6 43.01	17.69	100.	0.87	306.0
180	13 24 20.51	-31 5 54.38	17.85	136.	0.81	239.0
181	13 25 21.83	-31 5 29.12	16.79	109.	0.06	388.0
182	13 23 47.11	-31 5 19.29	17.64	61.	0.58	303.0
183	13 22 53.07	-31 5 17.56	17.62	169.	0.16	232.0
184	13 25 50.11	-31 5 21.49	16.20	82.	0.24	715.0
185	13 24 15.97	-31 4 37.85	17.42	174.	0.48	239.0
186	13 22 53.79	-31 4 25.78	17.65	109.	0.73	311.0
187	13 27 6.27	-31 4 31.27	15.55	4.	0.12	1524.0
188	13 25 25.25	-31 4 20.11	17.68	150.	0.68	308.0
189	13 26 18.01	-31 3 49.04	17.42	145.	0.83	259.0
190	13 26 23.60	-31 3 13.10	17.17	82.	0.57	295.0
191	13 24 6.22	-31 3 14.20	18.15	51.	0.92	306.0
192	13 23 46.40	-31 3 12.37	18.69	151.	0.66	172.0
193	13 26 59.19	-31 3 21.77	15.76	37.	0.70	1028.0
194	13 26 11.78	-31 2 44.37	18.05	161.	0.68	211.0
195	13 23 1.88	-31 2 7.09	18.64	136.	0.57	139.0
196	13 26 45.01	-31 2 10.58	17.71	23.	0.20	236.0
197	13 26 17.74	-31 1 45.34	17.81	112.	0.56	221.0
198	13 24 57.72	-31 1 46.67	18.57	157.	0.61	218.0
199	13 26 26.32	-31 1 17.97	16.48	89.	0.72	437.0
200	13 26 31.49	-31 1 12.61	17.54	76.	0.40	260.0

## A3558

#	A.R. (1950.0)	DEC.	Bt	AP (graus)	elp.	Area (px <sup>2</sup> )
201	13 23 50.58	-31 1 3.38	17.86	120.	0.12	206.0
202	13 24 44.36	-31 0 53.81	18.36	9.	0.57	186.0
203	13 26 32.76	-31 0 51.75	18.25	130.	0.13	191.0
204	13 26 24.49	-31 0 32.62	16.87	137.	0.57	243.0
205	13 26 59.61	-31 0 34.18	16.48	24.	0.56	877.0
206	13 25 33.46	-31 0 11.83	17.46	110.	0.34	325.0
207	13 24 46.67	-31 0 12.57	16.12	149.	0.62	792.0
208	13 26 18.13	-30 59 26.65	17.56	166.	0.66	224.0
209	13 25 3.04	-30 59 16.11	17.91	35.	0.35	185.0
210	13 25 35.77	-30 59 10.60	17.43	94.	0.47	284.0
211	13 24 11.81	-30 58 51.84	18.05	78.	0.56	195.0
212	13 25 55.73	-30 58 46.34	17.03	55.	0.63	417.0
213	13 27 16.42	-30 58 27.84	17.62	72.	0.78	244.0
214	13 24 59.48	-30 58 29.02	16.68	174.	0.85	558.0
215	13 26 25.37	-30 57 56.94	17.90	108.	0.65	222.0
216	13 25 55.86	-30 57 56.64	16.92	124.	0.60	307.0
217	13 24 15.11	-30 58 1.23	16.39	60.	0.07	737.0
218	13 26 5.73	-30 57 27.61	18.30	16.	0.87	204.0
219	13 24 37.37	-30 57 18.13	17.98	78.	0.43	250.0
220	13 24 40.39	-30 57 1.41	18.42	133.	0.25	215.0
221	13 23 51.00	-30 57 2.69	15.90	160.	0.57	890.0
222	13 25 14.92	-30 56 28.73	18.63	82.	0.73	134.0
223	13 27 8.70	-30 55 41.73	16.74	102.	0.60	621.0
224	13 25 34.98	-30 54 56.37	17.54	26.	0.25	312.0
225	13 23 50.51	-30 54 45.98	18.04	85.	0.36	257.0
226	13 23 10.63	-30 54 1.32	18.16	142.	0.79	202.0
227	13 23 48.60	-30 53 51.63	17.93	115.	0.02	222.0
228	13 25 26.36	-30 53 40.64	18.50	161.	0.45	109.0
229	13 27 5.41	-30 53 18.04	17.75	46.	0.58	253.0
230	13 26 45.60	-30 53 14.70	18.28	99.	0.39	136.0
231	13 24 25.16	-30 53 8.90	18.47	84.	0.35	203.0
232	13 23 18.30	-30 52 24.72	18.61	25.	0.24	180.0
233	13 25 40.76	-30 52 27.83	16.95	136.	0.23	386.0
234	13 26 48.33	-30 52 15.57	18.25	175.	0.59	123.0
235	13 26 26.61	-30 52 17.68	16.79	165.	0.32	377.0
236	13 25 6.69	-30 52 21.51	16.48	124.	0.60	710.0
237	13 25 45.30	-30 51 37.45	18.56	171.	0.64	131.0
238	13 22 53.19	-30 51 5.16	16.95	103.	0.10	402.0
239	13 24 21.18	-30 51 10.39	18.19	168.	0.66	206.0
240	13 27 5.35	-30 50 57.24	18.10	49.	0.06	236.0
241	13 23 51.75	-30 50 44.71	16.60	20.	0.15	496.0
242	13 27 15.28	-30 50 15.61	17.74	40.	0.46	207.0
243	13 25 59.64	-30 50 4.04	17.13	129.	0.39	357.0
244	13 26 56.30	-30 49 12.59	17.95	100.	0.37	188.0
245	13 23 12.22	-30 48 50.46	18.45	110.	0.25	172.0
246	13 25 32.71	-30 48 36.31	17.16	5.	0.18	256.0
247	13 24 45.66	-30 48 31.95	18.50	111.	0.35	219.0
248	13 24 3.24	-30 48 3.91	18.64	8.	0.82	232.0
249	13 25 43.04	-30 47 39.49	17.84	119.	0.35	214.0
250	13 25 34.23	-30 47 33.95	18.66	28.	0.52	136.0
251	13 25 16.69	-30 46 58.18	17.12	52.	0.50	235.0
252	13 25 26.90	-30 46 30.36	18.54	54.	0.22	215.0
253	13 23 20.27	-30 46 19.68	18.42	15.	0.32	123.0
254	13 27 4.29	-30 45 53.61	18.46	134.	0.69	137.0
255	13 25 46.09	-30 45 58.37	18.33	139.	0.52	279.0



## Referências

- Abell, G. O., 1958, *ApJS*, 3, 211.
- Abell, G. O., Corwin Jr., H. G., & Olowin, R.P., 1989, *ApJS*, 70, 1.
- Bahcall, N. A., 1975, *ApJ*, 198, 249.
- Bahcall, N. A. 1979, *ApJ*, 232, 689.
- Bahcall, N. A., Soneira, R. M., & Burgett, W. S., 1986, *ApJ*, 311, 15
- Bardelli, S., et al., 1993, *MNRAS*, in press.
- Bautz, L. P. & Morgan, W. W. 1970, *ApJ Lett.*, 162, L149.
- Binggeli, B., Sandage, A., & Tammann, G. A., 1988, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 26, 509.
- Cavaliere, A. & Colafrancesco, S., 1990, em *Clusters of Galaxies, STScI Symposium Series, No. 4*, p. 43.
- Chandrasekhar, S. 1943, *ApJ*, 97, 255.
- Colles, M. M., 1987, *Tese de Doutorado*, University of Cambridge.
- Day, C. S. R. et al., 1991, *MNRAS*, 252, 394.
- Dressler, A. 1978, *ApJ*, 226, 55.
- Dressler, A. 1980, *ApJ*, 236, 351.
- Dressler, A. 1984, *Ann. Rev. Astron. Astroph.*, 22, 185.
- Dressler, A. & Schectman, S., 1988, *AJ*, 95, 284.
- Faber, S. M. et al., 1989, *ApJS*, 69, 763.
- Faber, S. M. & Gallagher, J. S., 1979, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 17, 135.

- Fabricant, D. et al., 1986, ApJ, 308, 530.
- Fitchett, M. J., The Minnesota Lectures on Clusters of Galaxies & Large Scale Structure, Ast. Soc. of the Pacific Conference Series, Vol 5, 1988a, p. 143.
- Fitchett, M. J. 1988b, MNRAS, 230, 161.
- Geller, M. J. & Beers, T. C. 1982, PASP, 94, 421.
- Geller, M. J., 1990, em Clusters of Galaxies, STScI Symposium Series, No. 4, p. 25.
- Hubble, E. & Hummason, M. L., 1931, ApJ, 74, 43.
- Jarvis, J. F. & Tyson, J. A., 1979, Instrumentation in Astronomy III, SPIE, 172, 422.
- Jefferys, W. H., Fitzpatrick, M. J., & McArthur, B. E., 1988, Cel. Mech., 41, 39.
- King, I. R. 1962, AJ, 67, 471.
- Lasker, B. M. et al., 1990, AJ, 99, 2019.
- Lucey, J. R., Currie, M. J., & Dickens, R. J., 1986, MNRAS, 221, 453.
- Melnick, J. & Quintana, H. 1984, AJ, 89, 1288.
- Melnick, J. & Moles, M. 1987, Rev. Mexicana Astron. Astrof., 14, 72.
- Metcalfe, N., Godwin, J. G. & Spenser, S. D. 1987, MNRAS, 225, 581.
- Oemler, A., 1974, ApJ, 194, 1.
- Picard, A., 1991, Tese de Doutorado, California Institute of Technology.
- Postman, M. & Geller, M. J., 1984, ApJ, 281, 95.
- Postman, M., Geller, M. J., & Huchra, J. P., 1986, AJ, 91, 1267.
- Postman, M., Geller, M. J., & Huchra, J. P., 1988, AJ, 95, 267.
- Quintana, H. & Havlen, R. J., 1979, A&A, 79, 70.

- Ribeiro, A. B., 1993, Tese de Graduação, UFRJ.
- Rood, H. J., Sastry, G. N., 1971, PASP, 83, 313.
- Sarazin, C. L., 1986, Rev. Mod. Phys., Vol. 58, No. 1.
- Schechter, P., 1975, Tese de Doutorado, California Institute of Technology.
- Schechter, P., 1976, ApJ, 203, 297.
- Sebok, W. L., 1979, AJ, 84, 1526.
- Sodré, L., Capelato, H. V., Steiner, J. E., Proust, D., Mazure, A., 1992, MNRAS, 259, 233.
- Valdes, F., 1982, Instrumentation in Astronomy IV, S.P.I.E. Proceedings, Vol. 331.
- Vettolani, G., Chincarini, G., Scaramella, R., Zamorani, G., 1990, AJ, 99, 1709.
- Zabludoff, A. I., Huchra, J. P., & Geller, M. J., 1990, ApJS in press.
- Zwicky, F., 1933, Helv. Phys. Acta, 6, 10.
- Zwicky, F. et al. 1961-1968, Catalogue of Galaxies and Clusters of Galaxies, 6 Volumes, Pasadena, California Institute of Technology.