

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
OBSERVATÓRIO DO VALONGO



PERTURBAÇÃO DE SATÉLITES ARTIFICIAIS PELO
GЕOPOTENCIAL - MÉTODO DE NEWCOMB-LAPLACE.

EVANDRO PAIVA DE ANDRADE

Astronomia

Mecânica Celeste

Rio de Janeiro , 5 de março de 1982

S U M Á R I O

	Página
INTRODUÇÃO	6
1ª PROPÓSITO : Obter o geopotencial V para pontos exteriores à superfície terrestre	9
2ª PROPÓSITO : Impor a V as condições de Dirichlet e de es- tabilidade dinâmica do modelo matemático / que aproxima a superfície geopotencial.....	14
3ª PROPÓSITO : A teoria gravitacional de 1ª ordem	16
4ª PROPÓSITO : O Método de Newcomb-Laplace	18
5ª PROPÓSITO : As Derivadas da Função de Perturbação do Ge- opotencial	24
6ª PROPÓSITO : Os elementos perturbados	26
CONCLUSÃO :	33
BIBLIOGRAFIA :	34

À Vânia Carolina

Meus agradecimentos aos professores
do Observatório do Valongo, especi-
almente a José Augusto Buarque de
Nazareth pela participação primordi-
al em minha formação profissional .
A Everardo Paiva de Andrade por ter
cedido gentilmente as folhas que o-
ra apresento o trabalho.

... não se pode coligir observações nem evidência documentária se primeiro não se tem um problema.

Pier ainda de que a tentativa de aplicar um método inaplicável é o culto ao ídolo do conhecimento certo, ou infalível, ou autorizado, que não se deve confundir com o ideal da ciência. Admitidamente, todos nos esforçamos por evitar erro; e deveríamos ficar tristes ao cometer um engano. Todavia, evitar erros é um ideal pobre: se não os usarmos atacar problemas tão difíceis que o erro seja quase inevitável, então não haverá crescimento do conhecimento. De fato, é com essas teorias mais ousadas, inclusive as que são errôneas, que mais aprendemos. Ninguém está isento de cometer enganos; a grande coisa é aprender com eles. [5]

INTRODUÇÃO

Estudar Mecânica Celeste é situar-se muito próximo de uma nova realidade brasileira na área das telecomunicações : a compra do satélite doméstico pelo Ministério das Comunicações. É bom lembrar que no acordo de compra do satélite brasileiro, " o governo exige transferência de tecnologia PRINCIPALMENTE quanto a sistemas de controle terrestres " [†] - domínio da Mecânica Celeste - ^{Int} como transferência de tecnologia dos sistemas de estabilização do satélite, etc. Diante disso, nada mais oportuno que concluir um curso de Mecânica Celeste com um projeto afim à nova conjuntura tecnológica brasileira.

Vasculhando revistas de Mecânica Celeste, nada se vê quanto à aplicação do método de Newcomb-Laplace na teoria do movimento de satélites artificiais, método este que parece feito sob medida para aplicação numa teoria gravitacional de primeira ordem, onde a função de perturbação R apresenta uma forma simples em função dos elementos orbitais

$$R = R (r, i, w, \omega),$$

de onde poderemos elementarmente obter as relações

$$\frac{\partial R}{\partial \rho}, \frac{\partial R}{\partial i}, \frac{\partial R}{\partial w}, \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \frac{\partial R}{\partial \omega},$$

para introduzi-las nas integrações dos elementos orbitais perturbados

$$\delta \rho, \delta w, \delta i, \delta \Omega,$$

† Ref. [9] . O grifo é nosso.

Hipótese do Trabalho : O método de Newcomb-Laplace simplifica consideravelmente o tratamento de perturbação de satélites artificiais pelo geopotencial, uma vez que tal tratamento pela teoria planetária de Lagrange (estudado durante o curso de especialização em Mecânica Celeste) mostrou-se extenuante : além de compor-se de 6 equações integrais , apresenta também 6 derivadas parciais da função de perturbação em relação a elementos que podem não aparecer explicitamente em sua expressão. (ref. [2] , pág. 186)

Começaremos então o projeto com a obtenção do geopotencial para pontos exteriores à superfície terrestre, onde introduzimos as funções associadas de Legendre e o conceito de harmônicos zonais, que terá no harmônico zonal de grau 2 o termo de perturbação para a teoria gravitacional de primeira ordem. A seguir impomos ao geopotencial as condições de Dirichlet e de estabilidade do modelo matemático, onde definimos o elipsóide de revolução que aproxima a superfície da Terra e chegamos a uma expressão do geopotencial onde somente consta harmônicos zonais. A simplificação para tratamento com apenas um harmônico zonal fica por conta da teoria gravitacional de primeira ordem, que vem prestar um auxílio valiosíssimo de economia de tempo e trabalho sem contudo alterar a proposta básica do Trabalho. Apresentamos nessa altura o método de Newcomb-Laplace quando se faz uma nova simplificação : desenvolver uma teoria em primeira ordem nas excentricidades que, como veremos, se justifica

plenamente. Passamos intermediariamente pela obtenção das derivadas da função de perturbação para chegarmos, enfim, à parte mais laboriosa do projeto : a integração dos elementos perturbados.

Avisamos, contudo, que o presente Trabalho está longe de concluir o que enuncia : Perturbação de Satélites Artificiais pelo Geopotencial - Método de Newcomb-Laplace. Pretende preferivelmente estabelecer conceitos elementares da referida teoria e acomodar num plano de simplificação básico a futura vivência científica do estudante, recém-chegado ao vasto domínio da Mecânica Celeste.

Numa simplificação complementar, notificamos que integraremos os elementos orbitais como se eles fossem obtidos referenciados a um sistema inercial, evitando assim acrescentar termos que apenas dariam conta de uma transferência de sistema de coordenadas. O artifício utilizado para compensar essa simplificação será apresentado no tópico anunciado pelo 4º propósito.

1ª Propósito : Obter o geopotencial para pontos exteriores à superfície terrestre.

Considere a fig. 1.1

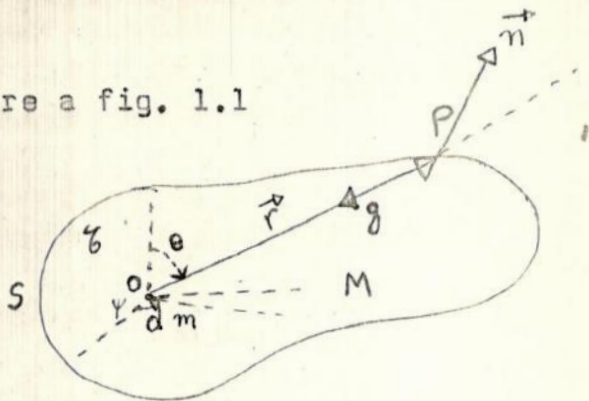


Fig.1-1 — Lei de Gauss e o princípio de superposição de campos.

Se \vec{g} é o campo gravitacional em pontos P de uma superfície fechada S devido a fontes interiores a essa superfície e M é a massa total no volume Z envolvida por S, temos

$$(1.1) \quad \iint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi K^2 M, \quad (\text{Lei de Gauss})$$

onde
$$M = \iiint_Z \sigma \, d\sigma,$$

σ = densidade de massa

Sabendo que o campo gravitacional newtoniano \vec{g} é conservativo, \vec{g} é obtido a partir de um potencial escalar V

$$\vec{g} = -\nabla V,$$

Segue que

$$(1.2) \quad \nabla^2 V = -4\pi K^2 \sigma, \quad (\text{Equação de Poisson})$$

Em particular, para pontos exteriores à superfície, $\sigma = 0$ e

$$(1.3) \quad \nabla^2 V = 0, \quad (\text{Equação de Laplace})$$

A equação de Laplace para a função $V(r, \theta, \psi)$ em coordenadas esféricas tem a forma

$$(1.4) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = 0,$$

Considerando o harmônico esférico sólido de grau n

$$V_n = r^n Y(\theta, \psi) ,$$

como solução da equação de Laplace, obtemos as soluções Y em (1.5), denominadas harmônicos esféricos superficiais de grau n ,

$$(1.5) \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \csc^2 \theta \frac{\partial^2 Y}{\partial \psi^2} + n(n+1)Y = 0 ,$$

que pelo método de separação de variáveis, assumindo soluções Y da forma

$$(1.6) \quad Y(\theta, \psi) = \Theta(\theta) \Psi(\psi) ,$$

resulta em

$$(1.7) \quad \Psi'' + m^2 \Psi = 0 ,$$

$$(1.8) \quad \Theta'' + \cot \theta \Theta' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 ,$$

m^2 sendo uma constante de separação de variáveis, m inteiro, que leva Ψ (variável azimutal) a ter soluções de período 2π .

A solução geral de (1.7) é

$$(1.9) \quad \Psi = C_1 \cos(m\psi) + C_2 \sin(m\psi) ,$$

C_1, C_2 constantes arbitrárias.

Equação (1.8) é referida como equação associada de Legendre que na sua forma algébrica, obtida após a transformação de variável $s = \cos \theta$, se escreve :

$$(1.10) \quad (1-s^2) \frac{d^2 \Theta}{ds^2} - 2s \frac{d\Theta}{ds} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-s^2} \right] \Theta = 0 ,$$

cujas soluções são da forma

$$(1.11) \quad P_n^m(s) = (1-s^2)^{m/2} \frac{d^m}{ds^m} P_n(s) ,$$

para valores naturais de n e m , onde $P_n(s)$ são os polinômios de Legendre definidos por

$$(1.12) \quad P_n(s) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (2n-2j)! s^{n-2j}}{j! (n-j)! (n-2j)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$e \begin{cases} N = \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ N = \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Cada $P_n^m(s)$ é chamada uma função associada de Legendre de grau n e ordem m .

Para dados valores de m e n ,

$$Y_n^m(s, \psi) = \left[a_{n,m} \operatorname{sen}(m\psi) + b_{n,m} \operatorname{cos}(m\psi) \right] P_n^m(s),$$

é um harmônico esférico superficial de grau n e ordem m . Quando $m = 0$,

$$Y_n^0(s, \psi) = b_{n,0} P_n(s),$$

e as $P_n(s)$ são ditas harmônicos zonais. Quando $0 < m < n$, as $Y_n^m(s, \psi)$ são chamados harmônicos tesserais. Quando $m = n$ as $Y_n^m(s, \psi)$ são chamados harmônicos setoriais.

Podemos observar que se V_n é um harmônico esférico de grau n , então $r^{-(2n+1)} V_n$ é um harmônico esférico sólido de grau $-(n+1)$, ambas soluções particulares da equação de Laplace. Já que a equação de Laplace é uma equação diferencial parcial linear, a soma de qualquer número finito de soluções é também solução. Daí, funções da forma

$$(1.13.a) \quad V = r^n \sum_{m=0}^n \left[a_{n,m} \operatorname{sen}(m\psi) + b_{n,m} \operatorname{cos}(m\psi) \right] P_n^m(s),$$

$$(1.13.b) \quad V = r^{-(n+1)} \sum_{m=0}^n \left[A_{n,m} \operatorname{sen}(m\psi) + B_{n,m} \operatorname{cos}(m\psi) \right] P_n^m(s),$$

com $a_{n,m}$, $b_{n,m}$, $A_{n,m}$ e $B_{n,m}$ constantes arbitrárias, são também soluções particulares da equação de Laplace.

Podemos estender os resultados à combinações lineares de funções para o conj. infinito $\{V_0, V_1, \dots, V_n, \dots\}$ de modo que

$$(1.14.a) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n \left[a_{n,m} \operatorname{sen}(m\psi) + b_{n,m} \operatorname{cos}(m\psi) \right] P_n^m(s),$$

$$(1.14.b) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \sum_{m=0}^n \left[A_{n,m} \sin(m\psi) + B_{n,m} \cos(m\psi) \right] P_n^m(s),$$

também seja solução da equação de Laplace, onde as constantes devem ser escolhidas de maneira a ser estabelecida, garantindo a convergência uniforme da série infinita (Fourier-Legendre) para o domínio requerido das variáveis independentes.

Procuramos uma função harmônica esférica $V(r, \theta, \psi)$ de modo que

$$1. \quad V \text{ satisfaça } \nabla^2 V(r, \theta, \psi) = 0 \text{ no domínio } r > a, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi,$$

$$2. \quad \lim_{r \rightarrow a} V(r, \theta, \psi) = V_0(\theta, \psi); \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \theta, \psi) = 0,$$

3. V seja contínua no domínio $r \geq a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$; as derivadas parciais de segunda ordem sejam contínuas no domínio $r > a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$.

$$4. \quad rV, \quad r^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right), \quad r^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right), \quad r^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} \right) \text{ são limitadas.}$$

Já que $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \theta, \psi) = 0$, admitiremos uma solução V da forma

$$(1.15) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n P_n^m(s) \left[A_{n,m} \sin(m\psi) + B_{n,m} \cos(m\psi) \right],$$

onde (a) é o raio equatorial da Terra.

Podemos escrever (1.15) como

$$(1.16) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} B_{n,0} P_n(s) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=1}^n B_{n,m} P_n^m(s) \cdot \\ \cdot \cos m\psi + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=1}^n A_{n,m} P_n^m(s) \sin m\psi.$$

A condição de fronteira de Dirichlet é satisfeita quando

$$(1.17) \quad V_0(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,0} P_n(s) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n B_{n,m} P_n^m(s) \cos(m\psi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n A_{n,m} P_n^m(s) \sin(m\psi),$$

tem os coeficientes $B_{n,0}, B_{n,m}, A_{n,m}$ dados por

$$(1.18) \quad B_{n,0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} V_0(\theta, \psi) P_n(s) d\psi ds,$$

$$(1.19) \quad B_{n,m} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} V_0(\theta, \psi) P_n^m(s) \cos(m\psi) d\psi ds,$$

$$(1.20) \quad A_{n,m} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2^{m+1} n!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} V_0(\theta, \psi) P_n^m(s) \sin(m\psi) d\psi ds,$$

que são os coeficientes da série Fourier-Legendre.

A tabela seguinte fornece as funções associadas de Legendre até 4ª ordem.

TABELA 1 - 1

Forma Explícita das Cinco Primeiras Funções Associadas de Legendre

$n \backslash m$	0	1	2	3	4
0	1				
1	$\cos \theta$	$\sin \theta$			
2	$\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}$	$3 \sin \theta \cos \theta$	$3 \sin^2 \theta$		
3	$\frac{5}{2} (\cos^3 \theta - \frac{3}{5} \cos \theta)$	$\frac{3}{2} \sin \theta (\cos^2 \theta - \frac{1}{5})$	$15 \sin^2 \theta \cos \theta$	$15 \sin^3 \theta$	
4	$\frac{35}{8} (\cos^4 \theta - \frac{6}{5} \cos^2 \theta + \frac{3}{8})$	$\frac{3}{2} \sin \theta (\cos^3 \theta - \frac{3}{5} \cos \theta)$	$\frac{3}{2} \sin^3 \theta (\cos^2 \theta - \frac{1}{5})$	$105 \sin^3 \theta \cos \theta$	$105 \sin^4 \theta$

O potencial gravitacional será escrito então como

$$(1.21) \quad V = \frac{aB_{0,0}}{r} \left\{ 1 + \left(\frac{a}{r}\right) [C_{1,0}P_1(s) + C_{1,1}P_1^1(s) \cos \psi + S_{1,1}P_1^1(s) \sin \psi] \right. \\ + \left(\frac{a}{r}\right)^2 [C_{2,0}P_2(s) + C_{2,1}P_2^1(s) \cos \psi + C_{2,2}P_2^2(s) \cos 2\psi \\ + S_{2,1}P_2^1(s) \sin \psi + S_{2,2}P_2^2(s) \sin 2\psi] \\ + \left(\frac{a}{r}\right)^3 [C_{3,0}P_3(s) + C_{3,1}P_3^1(s) \cos \psi + C_{3,2}P_3^2(s) \cos 2\psi \\ + C_{3,3}P_3^3(s) \cos 3\psi + S_{3,1}P_3^1(s) \sin \psi + S_{3,2}P_3^2(s) \sin 2\psi \\ + S_{3,3}P_3^3(s) \sin 3\psi] \\ + \left(\frac{a}{r}\right)^4 [C_{4,0}P_4(s) + C_{4,1}P_4^1(s) \cos \psi + C_{4,2}P_4^2(s) \cos 2\psi \\ + C_{4,3}P_4^3(s) \cos 3\psi + C_{4,4}P_4^4(s) \cos 4\psi + S_{4,1}P_4^1(s) \sin \psi \\ + S_{4,2}P_4^2(s) \sin 2\psi + S_{4,3}P_4^3(s) \sin 3\psi + S_{4,4}P_4^4(s) \sin 4\psi] \\ \left. + \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_n^m(s) [C_{n,m} \cos(m\psi) + S_{n,m} \sin(m\psi)] \right\},$$

onde

$$C_{n,m} = \frac{B_{n,m}}{B_{n,0}},$$

$$S_{n,m} = \frac{A_{n,m}}{B_{n,0}}.$$

Para maiores detalhes, recomendamos a referência [2] da bibliografia.

2º Propósito : Imper a V as condições de Dirichlet e de estabilidade dinâmica do modelo matemático que aproxima a superfície geopotencial.

Ao aplicarmos o potencial V anterior para descrever o campo gravitacional da Terra, sua adequação às condições de fronteira de Dirichlet não é simples, já que não se tem um conhecimento preciso do formato da Terra. Somos obrigados a estabelecer uma figura de referência, um modelo matemático.

Se ignorarmos a influência da atmosfera e os efeitos de maré causados pelo Sol e Lua, a Terra se nos apresentará mantendo em equilíbrio o campo total de seu potencial V e seu potencial centrífugo Ω^* .

Na formulação do modelo matemático, assumiremos que a superfície livre dos oceanos está em equilíbrio. Não haverá, portanto, componente do campo total paralelo à superfície da água. Daí, a superfície do mar é uma superfície equipotencial no qual o potencial total

$$(2.1) \quad \Phi = V + \Omega^*,$$

é constante, onde Ω^* é o potencial centrífugo que para um ponto na superfície da Terra, participando de sua rotação, tem o valor

$$(2.2) \quad \Omega^* = \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \theta}{2},$$

Então,

$$(2.3) \quad \Phi = V + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \theta}{2},$$

A figura de referência de melhor tratamento matemático, que geralmente se usa na prática, é a de um elipsóide de revolução de eixo maior (2a) e eixo menor (2b) com as propriedades:

1. O volume do elipsóide é igual ao volume do geóide (entendido como a superfície matemática de referência que se obtém prolongando o nível de mar pelos continentes). O achatamento do elipsóide é

$$f = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{297.0} ;$$

2. Contendo a mesma massa M que a Terra, o elipsóide gira em torno de seu eixo menor com a mesma velocidade angular que a Terra e seu centro de massa coincide com o da Terra. O elipsóide apresenta simetria equatorial.

3. A superfície do elipsóide é uma superfície equipotencial para a soma de seu potencial newtoniano V e seu potencial centrífugo Ω^* . Designa-se por Φ seu potencial total de modo que

$$\Phi = V + \Omega^* = V + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \theta}{2} = \text{constante.}$$

O elipsóide de revolução descrito acima terá um potencial gravitacional V da forma

$$(2.4) \quad V = \frac{a^3 \rho_{0,0}}{r} \left[1 + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n C_{n,0} P_n(\cos \theta) \right],$$

se o eixo z é escolhido coincidindo com o eixo de rotação. A equação (2.4) decorre do fato de que :

1. V é independente de $\psi \rightarrow m=0$;
2. $P_n(s) = -P_n(-s)$ para (n) ímpar, o que viola a hipótese de simetria equatorial.

Pela imposição da condição de estabilidade do modelo matemático ($\Phi = \text{constante}$) podemos obter as constantes $C_{n,0}$ a partir das demais grandezas físicas do elipsóide de referência (veja Kaula [1]).

3º Propósito : A teoria gravitacional de 1º ordem.

Acrescentando à consideração preliminar de simetria equatorial a simplificação prática de tratarmos uma teoria em 1º ordem, estaremos alcançando, não obstante, o que tem sido proposto pelo presente trabalho, ou seja, discutir a viabilidade de aplicação do método de Newcomb-Laplace para estudar a perturbação da órbita de um satélite artificial pelo geopotencial, um dos principais agentes de perturbação desses corpos.

Com a simplificação admitida, podemos escrever

$$(3.1) \quad V = \frac{aB_{0,0}}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 C_{2,0} P_2(\cos \theta) \right],$$

O 2º termo dentro dos colchetes, o termo de perturbação, tende a zero rapidamente com a distância e consiste, como pode ser facilmente visto, do bojo da figura matemática que utilizamos. Já o primeiro termo, que se identifica com o fator que multiplica os colchetes, consiste, portanto, do geopotencial newtoniano, se tal figura fosse uma esfera:

$$(3.2) \quad V = \frac{GM}{r} = \frac{aB_{0,0}}{r},$$

o que implica em

$$(3.3) \quad GM = aB_{0,0},$$

onde G é a constante universal da gravitação e M a massa do elipsóide de revolução.

Será conveniente, nesse ponto, definirmos completamente o sistema de coordenadas esféricas que utilizaremos. Com origem coincidente com o centro de massa do elipsóide, nesse sistema equatorial terá o eixo-x dirigido para o ponto vernal, e que sugere elegermos as conhecidas coordenadas esféricas (r, λ, δ) : r é a distância radial do centro de massa do elipsóide, λ é a ascensão reta do satélite artifici-

al e δ sua declinação.

Assim, (3.1) pode ser escrita como

$$(3.4) \quad V = - \left(\frac{\mu}{r} + R \right) ,$$

onde

$$(3.5) \quad R = \frac{G a_{2,0}}{2 r^3} (3 \operatorname{sen}^2 \delta - 1) ,$$

$$(3.6) \quad a_{2,0} = M a^2 C_{2,0} .$$

O sinal negativo que precede o lado direito de (3.4) indica que o campo de gravidade exterior ao elipsóide é dado por $-\nabla V$.

Como trataremos o problema do ponto de vista do método de Newcomb-Laplace, que apresenta equações onde se requer derivadas parciais da função de perturbação, a saber

$$(3.7) \quad \frac{\partial R}{\partial r} , \frac{\partial R}{\partial w} , \frac{\partial R}{\partial \omega} , \frac{\partial R}{\partial \Omega} , \frac{\partial R}{\partial i} ,$$

precisaremos expressar, a seguir, as variáveis independentes em (3.5) em termos das variáveis implícitas de R sugerido por (3.7). Mas isto é imediato, pois (veja Fitzpatrick [2], pág. 121) .

$$(3.8) \quad \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} (w + \omega) .$$

Podemos ver, desde já, a que simplicidade se reduzirá a obtenção das derivadas parciais da função de perturbação pelo método de Newcomb-Laplace nesse problema particular que consideramos. Passaremos a ver no que consiste tal método.

4º Propósito : O Método de Newcomb-Laplace.

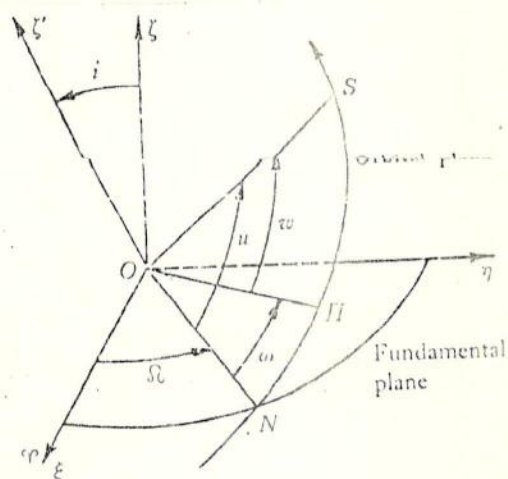
Por volta de 1880, Newcomb aperfeiçoou o método de Laplace de tratamento das perturbações planetárias para chegar à teoria de movimento planetário. A condição básica que justifica a aplicação desse método no presente estudo é que o sistema Terra-Satélite Artificial seja um sistema isolado sobre o qual não atuem forças externas. Consequentemente o centro de inércia do sistema move uniformemente sobre uma linha reta em relação a qualquer sistema estacionário absoluto de coordenadas cartesianas retangulares. Com essa condição seremos forçados a realizar as integrações das perturbações em intervalos de tempo em que possamos considerar a trajetória da Terra em torno do Sol aproximadamente retilínea. Para isso será preciso reatualizarmos as condições iniciais nas integrais que localizam o satélite na órbita e a órbita no espaço várias vezes durante o período de vida útil do satélite.

Para tratarmos o movimento do satélite artificial perturbado pelo geopotencial, tomaremos o equador da Terra como plano fundamental e para plano orbital no sistema de coordenadas equatoriais o plano variável passando pelo centro de massa da Terra onde, em cada dado momento, a órbita do satélite está situada.

As coordenadas que utilizamos em nosso estudo são mostradas na fig. 4-1.

Fig.4-1

Sistema de coordenadas retangulares $O\xi\eta\zeta$



Com referência à figura, temos

w : anomalia verdadeira ;

ON : linha dos nodos ;

N : nodo ascendente ;

Ω , $0 \leq \Omega \leq 360^\circ$: ascensão reta do nodo ascendente ;

i , $0 \leq i \leq 180^\circ$: ângulo de inclinação. O movimento é dito ser direto se $0 \leq i \leq 90^\circ$ e retrógrado se $i > 90^\circ$.

ω : argumento do perigeu. O ângulo ω define a orientação da órbita no plano orbital.

T : época da passagem pelo perigeu. O parâmetro T especifica um instante em que o satélite passou pelo perigeu $\overline{\Pi}$.

u : argumento de latitude. É medido positivo (assim como w) na direção do movimento mostrado na figura.

$\bar{\omega} = \Omega + \omega$: ascensão reta do pericentro. É frequentemente usado se $i = 0^\circ$ ou $i = 180^\circ$; e ω não existe.

$\Phi = \Omega + u = \bar{\omega} + w$: definido para $i = 0^\circ$ ou $i = 180^\circ$.

$L = \bar{\omega} + M = \bar{\omega} + n (t - T)$: ascensão reta média na órbita.

$L_0 = \bar{\omega} + n (t_0 - T)$: ascensão reta média na órbita na época t_0 .
Claramente $L = L_0 + n (t - t_0)$. Às vezes, o símbolo (ϵ) é usado para L_0 e (ϵ) é usado como elemento orbital ao invés de T .

Outros elementos :

$n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$: movimento médio ;

a, e : que especificam tamanho e formato da órbita.

A expressão para a perturbação do logaritmo do raio vetor, ρ , será, (veja Chebotarev, [3])

$$(4.1) \quad \delta \rho = \frac{1}{nr_0^2} (q \int p (Q + 2C_1) dt - p \int q (Q + 2C_1) dt + K_1 p + K_2 q) ,$$

onde

r_0 : raio vetor para órbita não perturbada ;

$$n = (1 - e \cos E) \frac{dE}{dt} ;$$

$$q = \text{sen } E;$$

$$p = \text{cos } E - e;$$

$$C_1, K_1, K_2 \longrightarrow$$

E = anomalia ecêntrica do satélite;

e = excentricidade;

constantes de integração.

Será desenvolvida uma teoria também em 1ª ordem nas excentricidades o que se justifica plenamente tendo em vista o objetivo do projeto. Como se não bastasse o carácter apenas teórico do projeto, na prática as excentricidades, em geral, também são baixas como mostra a seguinte tabela extraída da referência [4], pág. 127.



Satellite	i (deg)	e	q(km)	Length arc days	Obs. day	Total no. arcs	Total obs.
590012	33	0.183	557	15	7	2	226
5900701	33	0.190	515	15	10	4	541
6000902	47	0.012	1500	14	10	8	1094
6100401	39	0.119	640	8	200	27	3995
6101501	67	0.008	870	15	5	10	838
6101502	67	0.008	870	15	5	19	1576
6102801	95	0.011	3500	30	20	1	205
6202901*	45	0.292	950	15	8	20	3144
6206001	50	0.007	1070	11	15	21	2505
6302601 1	50	0.061	419	8	10	10	724
6304902* 2	90	0.005	1080			3	181
6305301* 1	79	0.113	602	11	15	9	1732
6400101 1	70	0.002	930	18	7	8	1163
6406401* 1	20	0.012	916	20	2	5	297
6508101* 1	87	0.075	430	19	3	5	312
6508901* 1	59	0.072	1120	27	3	4	400

* Designates a new satellite.

Precisaremos expressar a anomalia ecêntrica na expressão dos elementos p e q em termos da anomalia verdadeira já que as integrais dos elementos perturbados de Newcomb-Laplace podem ser transformadas de integrais no tempo para integrais nessa variável, como vere-

mos mais adiante. Para isso, considere as relações $E = f(w)$ dados pela referência bibliográfica [4], pág. 99.

$$\text{sen } E = (1 - \beta^2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \beta^{n-1} \text{sen } nw,$$

onde,

$$\beta = \frac{1 - (1 - e^2)^{1/2}}{e},$$

desenvolvendo $(1 - e^2)^{1/2}$ em série de Taylor até segunda ordem nas excentricidades

$$(1 - e^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} e^2,$$

então,

$$\beta = \frac{1 - 1 + e^2/2}{e} \rightarrow \beta = \frac{e}{2}, \text{ substituindo na eq. de sen } E$$

$$\text{sen } E = \left(1 - \frac{e^2}{4}\right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{e}{2}\right)^{n-1} \text{sen } nw,$$

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{e}{2}\right)^{n-1} \text{sen } nw,$$

desenvolvendo até primeira ordem nas excentricidades

$$(4.2) \quad q = \text{sen } w - \frac{e}{2} \text{sen } 2w;$$

$$\text{cos } E = \beta + (1 - \beta^2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \beta^{n-1} \text{cos } nw,$$

novamente

$$\text{cos } E = \frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{e}{2}\right)^{n-1} \text{cos } nw,$$

assim:

$$p = \frac{e}{2} + \text{cos } w - \frac{e}{2} \text{cos } 2w - e,$$

$$(4.3) \quad p = \text{cos } w - \frac{e}{2} \text{cos } 2w - \frac{e}{2}.$$

Como estamos considerando termos de perturbação de 1ª ordem

$$(4.4) \quad Q = 2 \int d'R + \frac{dR}{d\rho}, \quad (\text{Veja Chebotarev [3], pág. 34})$$

onde,

$$\dot{R} = \left(\frac{\partial R}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial R}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} \right) dt ,$$

Se a perturbação do logaritmo do raio vetor do satélite é conhecido, a perturbação na anomalia verdadeira será dada por

$$(4.5) \quad \delta w = \int \frac{1}{r_0^2} \left(\int \frac{\partial R}{\partial w} dt + m' C_2 - 2 a^2 n \delta \rho \right) dt + C_3 ,$$

onde C_3 é constante de integração. E ainda

$$m' C_2 = C - a^2 n . \quad (\text{Veja Chebotarev [3] , pág. 37})$$

Resta determinar a posição no espaço do plano da órbita osciladora, que é dada pelos dois ângulos i e Ω . O ângulo i determina a inclinação da órbita em relação ao plano de referência, no caso o plano do equador terrestre, enquanto o ângulo Ω dá a ascensão reta do nodo ascendente em relação ao ponto vernal na época T_0 , por exemplo, $T_0 = 1950.0$. As perturbações dos elementos i e Ω são obtidas pelas equações de Lagrange (Apêndice 1, Chebotarev [3])

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cot i}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \Omega} ,$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i} ,$$

onde a, i, Ω, ω, n são os elementos da órbita do satélite; R é a função de perturbação. Se apenas perturbações em 1ª ordem são consideradas, então os valores não perturbados dos elementos orbitais são usados como primeira aproximação. A integração dessas equações produz (veja Chebotarev [3] , pág. 38)

$$\delta i = \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2} \int \left(\cos i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) dt + C_4 , \quad (4.6)$$

$$\delta \Omega = \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2} \int \frac{\partial R}{\partial i} dt + C_5 , \quad (4.7)$$

onde C_4, C_5 são constantes de integração.

As equações para δi , $\delta \Omega$, $\delta \rho$, δw descrevem as perturbações em primeira ordem da órbita do satélite em qualquer tempo t .

As setes constantes C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 , K_1 , K_2 , que a parecem nos elementos perturbados não são independentes entre si, já que temos duas equações de 2ª ordem e duas de 1ª ordem, exigindo, portanto, apenas seis constantes arbitrárias que podem ser determinadas pela condição de que no tempo de osculação $t = t_0$ as perturbações das coordenadas ρ e w , suas derivadas temporais e também os elementos perturbados i e Ω sejam nulos. Assim, obtemos

$$(\delta \rho)_{t=t_0} = 0 ,$$

$$(\delta w)_{t=t_0} = 0 ,$$

$$\left(\frac{d \delta \rho}{dt} \right)_{t=t_0} = 0 ,$$

$$\left(\frac{d \delta w}{dt} \right)_{t=t_0} = 0 ,$$

$$(\delta i)_{t=t_0} = 0 ,$$

$$(\delta \Omega)_{t=t_0} = 0 .$$

5ª Propósito : As Derivadas da Função de Perturbação do Geopotencial.

Temos

$$(3.5) \quad R = \frac{Ga_{2,0}}{2r^3} (3 \operatorname{sen}^2 \delta - 1),$$

usando (3.8)

$$(5.1) \quad R = \frac{Ga_{2,0}}{2r^3} [3 \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2(w) - 1],$$

utilizando a conhecida equação de uma cônica

$$r = \frac{p^*}{1 + e \cos w}$$

temos, após aproximações de 1ª ordem nas excentricidades

$$R = \frac{Ga_{2,0}}{2p^{*3}} (1 + 3e \cos w) \left[\left(\frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i - 1 \right) - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \cdot \cos(2w + 2\omega) \right],$$

onde já fizemos a substituição

$$\operatorname{sen}^2(w + \omega) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2w + 2\omega)).$$

Efetuando a multiplicação obtemos

$$(5.2) \quad R = \frac{Ga_{2,0}}{2p^{*3}} \left(\frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i - 1 \right) + \frac{3eGa_{2,0}}{2p^{*3}} \left(\frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i - 1 \right) \cos w - \\ - \frac{3}{4} \frac{Ga_{2,0}}{p^{*3}} \operatorname{sen}^2 i \cos(2w + 2\omega) - \frac{9eGa_{2,0}}{8p^{*3}} \operatorname{sen}^2 i \cos(3w + 2\omega) - \\ - \frac{9eGa_{2,0}}{8p^{*3}} \operatorname{sen}^2 i \cos(w + 2\omega).$$

Na obtenção das derivadas parciais usaremos a eq. (5.1).

$$(5.3) \quad \frac{\partial R}{\partial p} = \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial p},$$

O primeiro fator é evidente

$$\frac{\partial R}{\partial r} = - \frac{3Ga_{2,0}}{2r^4} [3 \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2(w + \omega) - 1],$$

Para obter o segundo fator procedemos de

$$r = e^{\rho}$$

Com

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = e^{\rho} = r .$$

Logo

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = - \frac{3G_{a_{2,0}}}{2r^4} \left[3 \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2(w+\omega) - 1 \right] r ,$$

Ou seja

$$(5.4) \quad \frac{\partial R}{\partial \rho} = -3R .$$

É imediato que

$$(5.5) \quad \frac{\partial R}{\partial w} = \frac{3G_{a_{2,0}}}{2r^3} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen} (2w+2\omega) ;$$

$$(5.6) \quad \frac{\partial R}{\partial \omega} = \frac{3G_{a_{2,0}}}{2r^3} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen} (2w+2\omega) ;$$

$$(5.7) \quad \frac{\partial R}{\partial \Omega} = 0 ;$$

$$(5.8) \quad \frac{\partial R}{\partial i} = \frac{3G_{a_{2,0}}}{2r^3} \operatorname{sen} 2i \operatorname{sen}^2(w+\omega) ;$$

6º Propósito : Os elementos perturbados

No desenvolvimento de uma teoria em primeira ordem podemos substituir o tempo como variável de integração pela anomalia verdadeira w não perturbada do problema dos dois corpos.

$$(6.1) \quad r^2 \dot{w} = h, \quad (\text{momento angular constante})$$

$$(6.2) \quad dt = \frac{r^2}{h} dw.$$

Assim trataremos a anomalia verdadeira quando ela aparece no integrando como a anomalia não perturbada. Onde w aparecer no resultado integrado, deve ser entendido como w do movimento não perturbado e pode ser calculado como função de t pelas equações dos dois corpos quando valores iniciais são prescritos. Então,

$$(6.3) \quad \delta\rho = \frac{1}{nr_0^2} \left[q \int p (Q + 2C_1) dt - p \int q (Q + 2C_1) dt + K_1 p + K_2 q \right],$$

onde,

$$(6.4) \quad Q = 2 \int d'R + \frac{\partial R}{\partial \rho},$$

e

$$(6.5) \quad d'R = \left(\frac{\partial R}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial R}{\partial w} \frac{dw}{dt} \right) dt,$$

$$d'R = \frac{\partial R}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dw} dw + \frac{\partial R}{\partial w} dw.$$

Temos que,

$$r = e^\rho = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos w},$$

$$e^\rho \frac{d\rho}{dw} = \frac{\frac{h^2}{\mu} e \cdot \text{sen } w}{(1 + e \cos w)^2},$$

$$(6.6) \quad \frac{d\rho}{dw} = \frac{e \text{ sen } w}{1 + e \cos w},$$

que introduzindo em (6.5) já como integrando, vem

$$\int d'R = \int \left[\frac{-3Re \operatorname{sen} w}{1+e \cdot \cos w} + \frac{\partial R}{\partial w} \right] dw,$$

Usando (5.1), (5.5), as aproximações

$$(1+e \cos w)^3 = 1+3e \cos w,$$

$$(1+e \cos w)^2 = 1+2e \cos w,$$

e integrando, obtemos

$$(6.7) \quad \int d'R = \frac{3Ga_{2,0}}{2p^3} \left\{ \left(\frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i - 1 \right) e \cos w - \frac{\operatorname{sen}^2 i}{2} \cos (2w + 2w) - \frac{e}{2} \operatorname{sen}^2 i \cos (3w+2w) - \frac{3}{2} e \operatorname{sen}^2 i \cos (w+2w) - \frac{3}{20} e \operatorname{sen}^2 i \cos (5w+4w) + \frac{e}{4} \operatorname{sen}^2 i \cos (3w+4w) \right\}.$$

Introduzindo (6.7), (5.4) e (5.2) em (6.4), obtemos após devidas reduções

$$(6.8) \quad Q = \frac{Ga_{2,0}}{2p^3} \left\{ 3 \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) - 3e \cos w - \frac{9}{4} e \operatorname{sen}^2 i \cos (w + 2w) + \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \cos (2w+2w) + \frac{25e}{4} \operatorname{sen}^2 i \cos (3w+2w) + \frac{3}{2} e \operatorname{sen}^2 i \cos (3w+4w) - \frac{9e}{10} \operatorname{sen}^2 i \cos (5w+4w) \right\}.$$

Se no termo

$$(6.9) \quad \int p (Q + 2C_1) dt,$$

introduzirmos (4.3), (6.2) e (6.8), realizarmos a integração e multiplicá-la por q como dado em (4.2), obtemos

$$(6.10) \quad q \int p (Q + 2C_1) dt = \frac{Ga_{2,0}}{2hp^3} \left\{ \left[- (6 + 3C_1) e - \frac{9}{4} e \operatorname{sen}^2 i \cdot \cos 2w + \frac{27e}{4} \operatorname{sen}^2 i \right] w \operatorname{sen} w + \left[\frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \cos 2w + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \operatorname{sen}^2 i \right) + C_1 \right] - \frac{3e}{16} \operatorname{sen}^2 i \cos (w - 2w) + \left[\frac{45 \operatorname{sen}^2 i}{4} - 9 - 5C_1 \right] \frac{e}{4} \cos w - \frac{9e}{16} \operatorname{sen}^2 i \cos (w+2w) + \frac{3e}{16} \operatorname{sen}^2 i \cdot \cos (w+4w) - \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) + C_1 \right] \cos 2w - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\text{sen}^2 i}{4} \cos (2w + 2\omega) - \left[\frac{45 \text{sen}^2 i}{4} - 9 - 5C_1 \right] \frac{e}{4} \cos 3w + \\
& + \frac{15}{16} e \text{sen}^2 i \cos (3w + 2\omega) - \frac{3e}{20} \text{sen}^2 i \cos (3w + 4\omega) - \\
& - \frac{\text{sen}^2 i}{8} \cos (4w + 2\omega) - \frac{3e}{16} \text{sen}^2 i \cos (5w + 2\omega) - \frac{3e}{40} \text{sen}^2 i \\
& \cdot \cos (5w + 4\omega) + \frac{3e}{80} \text{sen}^2 i \cos (7w + 4\omega).
\end{aligned}$$

Analogamente obtemos

$$\begin{aligned}
(6.11) \quad p \int q (Q + 2C_1) dt = \frac{Ga_{2,0}}{2hp^*} \left\{ \frac{9}{4} e \text{sen}^2 i \text{sen} 2w w \cos w + \right. \\
+ \left[\frac{3}{8} \text{sen}^2 i \cos 2w - \frac{3}{2} - C_1 + \frac{9}{4} \text{sen}^2 i \right] - \frac{3e}{16} \text{sen}^2 i \cos (w - \\
- 2w) + \frac{3}{4} e \left(5 + 3C_1 - \frac{27 \text{sen}^2 i}{4} \right) \cos w + \frac{3}{4} e \text{sen}^2 i \cdot \\
\cdot \cos (w + 2w) + \frac{3e}{16} \text{sen}^2 i \cos (w + 4w) - \left[\frac{3}{2} + C_1 - \right. \\
- \left. \frac{9}{4} \text{sen}^2 i \right] \cos 2w + \frac{\text{sen}^2 i}{4} \cos (2w + 2\omega) + \frac{e}{4} \left(9 + \right. \\
+ 5C_1 - \frac{45 \text{sen}^2 i}{4} \left. \right) \cos 3w + \frac{3}{4} e \text{sen}^2 i \cos (3w + 2\omega) + \\
+ \frac{3e}{80} \text{sen}^2 i \cos (3w + 4\omega) - \frac{\text{sen}^2 i}{8} \cos (4w + 2\omega) - \frac{3e}{16} \cdot \\
\cdot \text{sen}^2 i \cos (5w + 2\omega) - \frac{9e}{80} \text{sen}^2 i \cos (5w + 4\omega) + \frac{3e}{80} \cdot \\
\left. \cdot \text{sen}^2 i \cos (7w + 4\omega) \right\}.
\end{aligned}$$

Assim introduzindo (4.2), (4.3), (6.10) e (6.11) em (4.1), chegamos finalmente ao resultado

$$\begin{aligned}
(6.12) \quad \delta \rho = \frac{Ga_{2,0}}{2nr_0^2 hp^*} \left\{ \left[- (6 + 3C_1) - \frac{9}{4} \text{sen}^2 i \cos 2w + \frac{27 \text{sen}^2 i}{4} \right] \cdot \right. \\
\left. \cdot e w \text{sen} w - \frac{9}{4} e \text{sen}^2 i \text{sen} 2w w \cos w + \left(3 + 2C_1 - \frac{9}{2} \text{sen}^2 i \right) \right. \\
+ \left. \left(\frac{63}{8} \text{sen}^2 i - 6 - \frac{7}{2} C_1 \right) e \cos w - \frac{21}{16} e \text{sen}^2 i \cos (w + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\omega) - \frac{\text{sen}^2 i}{2} \cos(2\omega + 2\omega) + \frac{3e}{16} \text{sen}^2 i \cos(3\omega + 2\omega) - \\
 & - \frac{3e}{16} \text{sen}^2 i \cos(3\omega + 4\omega) + \frac{3e}{80} \text{sen}^2 i \cos(5\omega + 4\omega) \Big\} + \\
 & + \frac{K_1}{nr_0^2} \left(\cos \omega - \frac{e}{2} \cos 2\omega - \frac{e}{2} \right) + \frac{K_2}{nr_0^2} \left(\text{sen} \omega - \frac{e}{2} \text{sen} 2\omega \right).
 \end{aligned}$$

Considere agora a eq. (4.5)

$$(4.5) \quad \delta w = \int \frac{1}{r_0^2} \left(\int \frac{\partial R}{\partial w} dt + m'c_2 - 2a^2 n \delta \rho \right) dt + C_3.$$

Integrando (5.5), obtemos

$$(6.13) \quad \int \frac{\partial R}{\partial w} dt = \frac{-3Ga_{2,0} \text{sen}^2 i}{2hp^*} \left[\frac{e}{2} \cos(\omega + 2\omega) + \frac{\cos(2\omega + 2\omega)}{2} + \frac{e}{3} \cos(3\omega + 2\omega) \right];$$

e

$$(6.14) \quad \int \frac{1}{r_0^2} \left(\int \frac{\partial R}{\partial w} dt \right) dt = \frac{-3Ga_{2,0} \text{sen}^2 i}{2h^2 p^*} \left[\frac{e}{2} \text{sen}(\omega + 2\omega) + \frac{\text{sen}(2\omega + 2\omega)}{4} + \frac{e}{9} \text{sen}(3\omega + 2\omega) \right];$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{m'c_2}{r_0^2} dt &= \int \frac{(C - a^2 n)}{r_0^2} dt = \int \frac{C}{r_0^2} dt - a^2 \int \frac{n}{r_0^2} dt = \frac{Cw}{h} - \\
 &- a^2 \int \frac{1 - e \cos E}{a^2 (1 - e \cos E)^2} \frac{dE}{dt} dt = \frac{Cw}{h} - \int \frac{dE}{1 - e \cos E} = \\
 &= \frac{Cw}{h} - \int (1 + e \cos E) dE,
 \end{aligned}$$

$$(6.15) \quad \int \frac{m'c_2}{r_0^2} dt = \frac{Cw}{h} - (E + e \text{sen} E),$$

Por fim, utilizando (6.12) e (6.2), obtemos

$$\begin{aligned}
(6.16) \quad -2a^2 \int \frac{1}{r_0^2} n \delta \rho dt = & \frac{-a^2 G a_{2,0}}{h^2 p^3} \left\{ \left(3 + 2C_1 - \frac{9}{2} \text{sen}^2 i \right) w - \right. \\
& - \frac{9}{4} e \text{sen}^2 i \text{sen} 2\omega w \text{sen} w + \left[6 + 3C_1 + \frac{9}{4} \text{sen}^2 i \cos 2\omega - \right. \\
& \left. \left. - \frac{27}{4} \text{sen}^2 i \right] ew \cos w - \left(18 + \frac{21C_1}{2} - \frac{171}{8} \text{sen}^2 i \right) e \text{sen} w - \right. \\
& - \frac{29}{16} e \text{sen}^2 i \text{sen} (w + 2\omega) - \frac{\text{sen}^2 i}{4} \text{sen} (2w + 2\omega) - \\
& - \frac{5e}{48} \text{sen}^2 i \text{sen} (3w + 2\omega) - \frac{e \text{sen}^2 i}{16} \text{sen} (3w + 4\omega) + \\
& \left. \frac{3e \text{sen}^2 i \text{sen} (5w + 4\omega) - \frac{9}{4} e \text{sen}^2 i \text{sen} 2\omega \cos w \right\} - \\
& - \frac{ea^2 K_1}{h^2 p^2} w + \frac{2a^2 K_1}{h^2 p^2} \text{sen} w + \frac{a^2 e K_1}{2h^2 p^2} \text{sen} 2w - \frac{2a^2 K_2}{h^2 p^2} \cos w + \\
& + \frac{ea^2 K_2}{2h^2 p^2} \cos 2w .
\end{aligned}$$

Introduzindo (6.14), (6.15) e (6.16) em (4.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
(6.17) \quad \delta w = & \frac{-3G a_{2,0} \text{sen}^2 i}{2h^2 p^3} \left[\frac{e}{2} \text{sen} (w + 2\omega) + \frac{1}{4} \text{sen} (2w + 2\omega) + \right. \\
& \left. + \frac{e}{9} \text{sen} (3w + 2\omega) \right] - (E + e \text{sen} E) - \frac{a^2 G a_{2,0}}{h^2 p^3} \left\{ \left(3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2C_1 - \frac{9}{2} \text{sen}^2 i \right) w - \frac{9}{4} e \text{sen}^2 i \text{sen} 2\omega w \text{sen} w + \left(6 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3C_1 + \frac{9}{4} \text{sen}^2 i \cos 2\omega - \frac{27}{4} \text{sen}^2 i \right) ew \cos w - \left(18 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{21C_1}{2} - \frac{171}{8} \text{sen}^2 i \right) e \text{sen} w - \frac{29}{16} e \text{sen}^2 i \text{sen} (w + 2\omega) - \right. \\
& - \frac{\text{sen}^2 i}{4} \text{sen} (2w + 2\omega) - \frac{5e}{48} \text{sen}^2 i \text{sen} (3w + 2\omega) - \frac{e}{16} \\
& \cdot \text{sen}^2 i \text{sen} (3w + 4\omega) + \frac{3e \text{sen}^2 i \text{sen} (5w + 4\omega) - \frac{9}{4} \\
& \cdot e \text{sen}^2 i \text{sen} 2\omega \cos 2w \left. \right\} + \left(C - \frac{ea^2 K_1}{h^2 p^2} \right) \frac{w}{h} - \frac{2a^2}{h^2 p^2} (K_1 \cdot
\end{aligned}$$

$$\cdot \text{sen } w - K_2 \cos w) + \frac{ea^2}{2h^2 p^2} (K_1 \text{sen } 2w + K_2 \cos 2w) .$$

Considere agora a eq. (4.6)

$$(4.6) \quad \delta i = \frac{\text{cosec } i}{na^2} \int (\cos i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \Omega}) dt + C_4 ,$$

onde, se introduzirmos (5.6) e (5.7) resulta, utilizando os elementos orbitais não perturbados dentro do integrando numa primeira aproximação,

$$\delta i = \frac{\text{cotg } i}{na^2} \int \frac{\partial R}{\partial \omega} dt + C_4 .$$

A integral acima já foi obtida anteriormente. Temos, após simplificação

$$(6.18) \quad \delta i = - \frac{3Ga_{2,0} \text{sen } 2i}{4na^2 h p^*} \left[\frac{e}{2} \cos (w + 2w) + \frac{1}{2} \cos (2w + 2w) + \frac{e}{3} \cos (3w + 2w) \right] + C_4 .$$

Considere, por fim, a eq. (4.7)

$$(4.7) \quad \delta \Omega = \frac{\text{cosec } i}{na^2} \int \frac{\partial R}{\partial i} dt + C_5 ;$$

que, utilizando (5.8), (6.2) e os elementos não perturbados de dois corpos como 1ª aproximação no integrando, produz

$$(6.19) \quad \delta \Omega = \frac{3Ga_{2,0} \cos i}{2na^2 h p^*} \int \left[1 + e \cos w - \frac{e}{2} \cos (w + 2w) - \cos (2w + 2w) - \frac{e}{2} \cos (3w + 2w) \right] dw + C_5 ,$$

onde

$$p^* = a (1 - e^2) ;$$

$$na^3 = \mu = K^2 (m_0 + m_{\text{sat}}) ; K = \text{cte. gaussiana}$$

Integrando (6.19), obtemos

$$(6.20) \quad \delta \Omega = \frac{3Ga_{2,0} \cos i}{2h^2 p} \left[w + e \operatorname{sen} w - \frac{e}{2} \operatorname{sen} (w + 2\omega) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \operatorname{sen} (2w + 2\omega) - \frac{e}{6} \operatorname{sen} (3w + 2\omega) \right] + C_5 .$$

CONCLUSÃO

Com a simplificação admitida de não trabalharmos no presente projeto com termos não-inerciais, resultou, sem dúvida, uma redução significativa de operações ao tratarmos perturbações de satélites artificiais pelo geopotencial segundo o método de Newcomb-Laplace, relativamente ao que se nos havia apresentado no tratamento segundo a teoria planetária de Lagrange.

Fica enunciado, assim, um projeto de pesquisa para responder mais conclusivamente o que um estudo inicial mostrou satisfatório, ou seja, a hipótese inicial do trabalho parece se cumprir. Mas há muito ainda o que fazer a partir do que, por ora, constitui o ponto de partida, o projeto de final de curso, o projeto de início de carreira.

BIBLIOGRAFIA

1. Kaula, W. M. , Determination of the Earth's Gravitational Field, Rev. Geophys. 1,507 (1963).
2. Fitzpatrick, P. M. , Principles of Celestial Mechanics, Academic Press (1970).
3. Chebotarev, G.A. , Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics, American Elsevier Publishing Company (1967).
4. Lundquist, C. A. & Veis, G. , Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth, SAO Special Rept Nº 200, Vol.2 (1966).
5. Popper, K.R. , Conhecimento Objetivo; Uma abordagem Evolucionária, Ed. da Universidade de São Paulo (1975).
6. Cervo, A. L. & Bervian, P. A. , Metodologia Científica, São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, (1975).
7. Rudio, F. V. , Introdução ao Projeto de Pesquisa Científica. Petrópolis: Vozes (1980).
8. Holanda, A. B. , Novo Dicionário da Língua Portuguesa, Editora Nova Fronteira (1975).
9. Prado, J.R. , Brasil ganha o espaço para comunicação, Jornal do Brasil, Especial, 27 de dezembro de 1981.