



A PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS

E A POSIÇÃO MÉDIA

POR

LUIZ HERCULANO RODRIGUES

Orientador: profº Luiz Eduardo da S. Machado

A PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS  
E A POSIÇÃO MÉDIA

por

Luiz Herculano Rodrigues

---

Projeto de Fim de Curso  
Departamento de Astronomia  
Instituto de Geociências - UFRJ  
Como Requisito Parcial à Obtenção do  
Diploma de Astrônomo

Março, 1982



## Agradecimentos

### Agradeço

Ao prof. Luiz Eduardo da Silva Machado pela pronta orientação neste projeto e pela oferta da capa e pelos meios para sua execução.

Ao prof. José Augusto Buarque de Nazareth pelas inumeras duvidas esclarecidas.

Ao prof. Victor de A. d'Avila pelas duvidas esclarecidas.

Ao Claudio Cesar Saraiva Coelho, Rosa Maria Machado e Mauricéa Moreira Mariano, pelo / excelente trabalho de datilografia executado.

## SUMÁRIO

Trata o presente projeto do estudo da precessão e da posição média. O histórico aponta o uso dos eclipses da Lua para a obtenção da longitude celeste das estrelas, a descoberta da precessão, as interpretações de seu descobridor Hiparco: a esfera das fixas e a retrogradação do ponto vernal. Apresenta, em seguida, as explicações de Copérnico, de Newton e aborda a aplicação do movimento giroscópico na precessão.

É efetuada a conceituação da precessão e dos planos fundamentais, com a apresentação das definições julgadas relevantes.

São passadas em revistas as principais consequências da precessão, denominadas "efeitos": mudanças seculares das constelações e pólos celestes, variação na data do início das estações do ano, a retrogradação dos signos zodiacais em relação às constelações que lhes deram os nomes, o deslocamento do periélio e a alteração da duração do ano trópico.

É apresentada a classificação obrigatória e já histórica da precessão nos tipos: luni-solar, planetária e geral.

As coordenadas médias isto é a posição média das estrelas, são analisadas com especial cuidado. As reduções para os vários equinócios e épocas são tratadas com ênfase especial: métodos aproximados e rigorosos, bem como tabelas são examinados e discutidos.

A precessão diferencial é igualmente analisada, pois seus efeitos são, praticamente, importantes nos estudos teóricos das órbitas das estrelas duplas.

Os vários anexos não só apresentam tabelas úteis para a redução das posições médias, como atualizam os valores das constantes fundamentais inbutidas nos cálculos precessionais, e de acôrdo com as resoluções mais recentes da União Astronômica Internacional.

O trabalho procura, antes de mais nada, conceituar didática e historicamente a precessão bem como apresentar criteriosamente os métodos mais adequados para as várias possibilidades das transferências das coordenadas médias de uma origem para outra.

A estruturação, redação técnica, referenciamento bibliográfico, uniformização redacional e gráfica do presente projeto foram normalizadas consoante a publicação especializada das professoras Lilia da Rocha Bastos, Lyra Paixão e Lucia Monteiro Fernandes "Manual para a elaboração de projetos e relatórios de pesquisa, teses e dissertações".

## ÍNDICE

	Página
LISTA DE ANEXOS.....	vii
LISTA DE TABELAS.....	ix
LISTA DE FIGURAS.....	x

### Capítulo

I. HISTÓRICO.....	1
Introdução	
A precessão de Hiparco: esfera das fixas	
A precessão de Hiparco: retrogradação do ponto vernal	
Explicação de Newton	
A precessão e o movimento giroscópico	
Valores históricos da precessão	
II. CONCEITUAÇÃO.....	18
A precessão e os planos fundamentais	
Definições básicas	
III. EFEITOS.....	26
Introdução	
Mudanças seculares das constelações e pólos celestes	
Início das estações do ano	
Retrogradação dos signos zodiacais	
Deslocamento do periélio	
Variação na duração do ano trópico	

IV. TIPOS DE PRECESSÃO.....	32
Precessão luni-solar	
Precessão geral	
V. POSIÇÃO MÉDIA.....	47
Coordenadas médias: método aproximado	
Coordenadas médias: método rigoroso	
VI. PRECESSÃO DIFERENCIAL .....	59
Introdução	
Coordenadas Polares	
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	69
ANEXOS.....	73

· LISTA DE ANEXOS

Anexo	Página
1. Yale Catalogue: zone catalogue $-2^{\circ}$ to $-6^{\circ}$ , epoch 1933.2 and equinox 1950.0 .....	74
2. American Ephemeris 1980: Precessional Constants, 1980 .....	76
3. FK4: Equinox and epoch 1950.0 and 1975.0 .....	78
4. A. Danjon: Fórmulas para precessão e nutação , coeficiente e tabelas para o cálculo da pre- cessão.....	81
5. Astronomy and Astrophysics: Expressions for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants.....	86
6. SAO Star Catalog: equinócio e época para 1950.0.	103

LISTA DE TABELAS

Tabela		Página
1.1	Valores Históricos da Precessão (diver <u>sos</u> autores).....	16
1.2	Valores Históricos da Precessão (P.Tannery).....	17
2.1	Começo do ano trópico .....	25
3.1	Duração das Estações do Ano.....	28
4.1	Constantes da Precessão.....	46
5.1	Comparação dos Resultados do cálculo da Posição Média da estrela (por <u>mé</u> todos diversos) .....	58

## LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1.1	Precessão de Hiparco: Esfera das <u>fi</u> xas .....	33
1.2	A ação do Sol sobre a parte esférica da Terra .....	6
1.3	A ação do Sol sobre a parte da dila- tação equatorial da Terra .....	7
1.4	O modelo da decomposição de um vetor, M, que representa o momento exercido pelo Sol sobre o elipsóide homogêneo terrestre, seja no plano do equador, M <sub>1</sub> um vetor invariável dirigido para o ponto $\gamma$ ; M <sub>2</sub> um vetor de mesmo módu- lo que o primeiro, mas móvel, e sime- trico de M <sub>1</sub> em relação a reta CU, nor- mal ao círculo horário CS do Sol, $\bar{M}$ um vetor resultante da direção CU. ....	9
1.5	Movimento do pólo norte, do ponto $\gamma$ , e do Equador celeste na esfera celes- te devido ao efeito dos dois momentos, M <sub>1</sub> e M <sub>2</sub> . ....	10
1.6	Representação do movimento do pólo da Terra pela ação dos pares Solar e lu- nar .....	11
1.7	Representação do movimento cônico de precessão do pião em rotação sob ação de seu peso .....	13
1.8	A Retrogradação do ponto $\gamma$ ao longo da eclíptica, na direção $\gamma\gamma'$ e o movimen- to cônico do eixo equatorial celeste em torno do eixo da eclíptica cujo pó- lo é Q, é descrito pelo pólo norte $\bar{c}$ leste P. ....	14
2.1	A precessão e os planos fundamentais .....	19

2.2	Gráfico da variação da longitude (l) de uma estrela, em função do tempo, para a precessão a curva é o ramo de parábola (P), para a nutação a curva aproximadamente senoidal (N), e para o movimento resultante (S) é a soma dos dois movimentos.....	21 21
3.1	Mudanças seculares das constelações e pólos celestes .....	27
2.2	A configuração dos limites modernos das constelações zodiacais (U.A.I., Assembleia Geral, 1925) e dos signos zodiacais (zodíaco trópico). .....	29
3.3	Deslocamento do periélio e os arcos percorridos pelo Sol em sua orbita e com as respectivas posições na ecliptica com a representação do movimento do ponto $\gamma$ e do deslocamento do perigeu. ....	30
4.1	O movimento do sistema de referência equatorial na esfera celeste sob efeito da precessão luni-solar .....	33
4.2	Representação dos triângulos esféricos que tem por vértices comuns o pólo elevado (P), o equador celeste e o pólo eclíptico (Q), um dos triângulos é formado pela estrela fixa (A), é o triângulo PQA e o outro com vertice no ponto $\gamma$ forma o triângulo PQY .....	34
4.3	A representação no triedro do sistema de referência equatorial celeste, (xyz), para as duas rotações infinitesimais $d\mu$ e $dj$ a partir de uma época $\tau$ a outra $\tau + dt$ , em torno dos eixos y, z. O eixo dos x está na direção do ponto $\gamma$ .....	40
4.3 a	Para a rotação $d\mu$ do triedro equatorial (xyz) em torno do eixo dos z durante o intervalo de tempo $dt$ . O eixo dos z se encontra na direção do pólo equatorial celeste norte. ....	40

Figura		Página
4.3b	Para a rotação $dj$ do triedro equatorial $(xyz)$ em torno do eixo dos $y$ . O eixo dos $y$ situa-se no equador a $90^\circ$ da direção do ponto $\gamma$ .....	40
4.4	O efeito da precessão geral nas coordenadas celestes .....	44
5.1	O efeito da rotação do sistema equatorial celeste para uma estrela na esfera celeste em suas coordenadas .....	54
6.1a	As coordenadas diferenciais de dois pontos próximos da superfície da esfera celeste. ....	60
6.1b	As coordenadas polares de dois pontos próximos da esfera celeste vista por um observador no interior da esfera celeste .....	61
6.2	O triângulo esférico .....	62
6.3	O giro do círculo horário do ponto $X$ pelo efeito da rotação infinitesimal do sistema de referência equatorial celeste fazendo aumentar o ângulo de posição formado por uma estrela próxima de $X$ , representada por $B$ .....	65

I HISTÓRICO

## CAPÍTULO I

### HISTÓRICO

#### Introdução

A variação secular das longitudes a que se dá o nome de precessão, foi descoberta no segundo século antes de Cristo pelo Astrônomo Hiparco (161 A.C. a 125 A.C.), comparando a longitude da estrela  $\alpha$  virginis (Espiga da Virgem) por ele determinada / com a que Timocharis tinha obtido um século e meio antes.

Sabendo-se que os antigos - por não possuírem relógios de precisão - não podiam obter posições absolutas das estrelas por meio das passagens meridianas, suas observações eram efetuadas indiretamente através de medidas relativas. Nesse sentido, referiam, durante a noite, a posição (distância angular) das estrelas à Lua ou aos planetas brilhantes (Venus em particular). Em seguida, durante o crepúsculo, ou mesmo, quando possível, em pleno dia, era efetuada a medida da distância angular do astro de referência ao Sol. O seu movimento próprio, de oeste para leste, na época conhecido, era, como é óbvio, levado em consideração.

Timocharis e Hiparco utilizaram, também, uma engenhosa variante, tomando como ponto de referência, durante os eclipses lunares, a região mais obscurecida (centro da sombra projetada da Terra), cuja longitude celeste difere de  $180^\circ$  da do Sol. Esse ponto se encontra em oposição, sendo sua longitude igual a  $L_\odot + 180^\circ$ , onde  $L_\odot$  é a longitude do Sol, obtida das tábuas alexandrinas do movimento solar.

Dessa forma foi possível a Hiparco levantar as primeiras tábuas numéricas, pela fixação das épocas em que o Sol passava pelo perigeu. Com isso, era possível determinar a posição / do Sol no zodíaco para uma data posterior. Os dados obtidos não ultrapassavam, no entanto, a 600 anos, posto que, como havia su-

posto o próprio astrônomo, os erros iniciais eram cumulativos. De passagem, tal assertiva é notável para a época, Boquet (1925).

Timocharis, em 273 A.C., conseguiu, pelo processo da referenciação de  $\alpha$  virginis ao centro da sombra projetada da Terra na Lua obter para sua longitude celeste o valor de  $172^{\circ}$ . No ano 129 A.C., Hiparco encontrou  $174^{\circ}$ . Explicou a diferença -  $2^{\circ}$  em 144 anos - pelo deslocamento até então insuspeito do ponto vernal, a origem da contagem das longitudes celestes e igualmente conhecido como ponto equinocial da primavera (para o hemisfério geográfico norte) ou, mais modernamente, e mais precisamente, por equinócio de março, Danjon (1963).

#### A precessão de Hiparco: esfera das fixas

Hiparco comparando as longitudes por ele determinadas com as obtidas, dois séculos antes, para as mesmas estrelas, por Aristille e Timocharis, concluiu que todas se achavam aumentadas de cerca de  $2,5^{\circ}$  ao passo que as distâncias ao pólo da eclíptica permaneciam sensivelmente constantes.

Havia duas hipóteses a escolher:

- a) o ponto vernal retrogradava cerca de  $50''$  por ano;
- b) as estrelas, como um todo, estariam animadas de um movimento paralelo ao plano da eclíptica, descrevendo círculos menores, lugares geométricos dos pontos de latitude celeste constante.

Para a primeira suposição, e tendo-se presente que o ponto vernal pertence simultaneamente à eclíptica e ao equador celeste, é necessário que o eixo dos pólos role conicamente ao redor do eixo da eclíptica, mantendo constante a sua obliquidade / (ângulo determinado pelos planos da eclíptica e do equador celeste).

Nesse caso, a Terra sendo suposta fixa no centro do mundo, convicção admitida em quase toda a antiguidade (salvo esporádicas exceções), o deslocamento cônico da linha dos pólos se refletiria numa mudança contínua da latitude de cada lugar, o que não se mostrava real pelas medições efetuadas.

Por esse motivo, a segunda hipótese pareceria mais / plausível, lançando então Hiparco a afirmativa que as estrelas deviam se mover lentamente em torno do eixo da eclíptica, fazendo / uma volta completa em:

$$\frac{360^{\circ}}{50''} = \frac{1\ 296\ 000''}{50''} = 25\ 920 \text{ anos}$$

ou, aproximadamente, 26 000 anos.

Como as estrelas eram supostas fixas, tal deslocamento global só poderia ser explicado por um movimento da esfera cristalina, na qual se achavam encrustadas como pontos brilhantes.

Geometricamente, esse movimento lento e contínuo era imaginado como ocasionado pela rotação de uma esfera exterior à das fixas a qual por sua vez, gira em 24 horas siderais em torno da Terra - movimento diurno. Dessa forma, a chamada "máquina do mundo" é estruturada como na figura 1.1 :

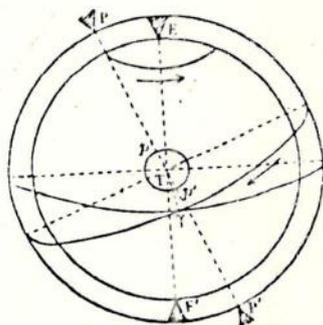


Fig. 1.1

A esfera exterior, com eixo PP', gira em 24 horas ao redor da Terra (é a origem do movimento diurno). Por dois pontos, EE', estaria ligada (espécie de mancal) à esfera das fixas. O mo

vimento da mais externa causa a sucessão dos dias e das noites . Ao mesmo tempo, a esfera interior girava, em torno dos pontos EE', no sentido direto (de oeste para leste), oposto ao movimento diurno (de leste para oeste) com o período de 26 000 anos, aproximadamente.

A Terra imóvel no centro do mundo seria constantemente perfurada nos pontos p e p' pelo eixo imóvel PP', de sorte que as coordenadas geográficas permaneceriam invariáveis, enquanto / que o observador terrestre veria as estrelas - em massa - girarem lentamente (independentemente do movimento diurno) em torno da / eclíptica.

O ponto  $\gamma$  permaneceria imóvel, mas as longitudes celestes das estrelas aumentariam pouco a pouco, porque seus meridianos se afastariam desse ponto no sentido das longitudes crescentes. Por exemplo, as estrelas situadas sobre o paralelo de  $23^{\circ}$  de distância do pólo da eclíptica desfilariam diante do pólo P do equador celeste ou da última esfera, de maneira a se tornarem estrelas polares, uma após outra, na sequência dos séculos, Faye (1883).

#### A precessão de Hiparco: retrogradação do ponto vernal

"os antigos determinavam o comprimento do ano por duas maneiras distintas, conduzindo ao mesmo resultado: a primeira, observando o retorno do Sol às mesmas estrelas (nascer ou ocaso helíacos de determinadas estrelas brilhantes); a segunda, determinando, como atualmente, os instantes dos equinócios, isto é, os instantes em que o Sol passa pelo equador celeste (por efeito de seu movimento próprio). A primeira avaliação fornece o ano sideral; a segunda, o ano trópico.

De acordo com a primeira, a revolução anual do Sol devia se cumprir em 365,256 dias. Hiparco tendo avaliado pelas / observações de Aristille e Timocharis os instantes dos equinócios para duzentos anos antes de sua época, pode compará-los com seus valores observacionais, bastando para isso acrescentar 200 vezes 365,256 dias à data do antigo equinócio. Achou, deste modo, uma

diferença de 2,8 dias (três dias aproximadamente). Por esse motivo, o equinócio observado chegava 3 dias mais cedo, isto é precederia de 2,8 dias a época em que teoricamente deveria ter ocorrido. A esse avanço da chegada do Sol ao primeiro ponto de aries, denominou, com propriedade, de precessão dos equinócios.

Resultava deste modo para o ano trópico uma duração mais curta de  $2,8/200$  anos = 0,014 dias/ano, passando a valer 365,242 dias.

Se a revolução do Sol em torno da Terra parece diferente de acordo com a origem que se considera como ponto de partida, uma estrela ou o ponto vernal, e desde que somente um destes pontos não é fixo, é necessário que o ponto vernal se mova em sentido retrógrado cada ano, de uma distância igual a que é percorrida/pelo Sol em 0,014 dias, isto é, de  $0,014 \times 59'8'' = 50''$  (onde  $59'8'' = 3548''$  é o valor do movimento angular médio diário do Sol), (Faye ob. cit.).

#### A precessão de Copérnico

Admitindo-se contrariamente que a Terra se move anualmente em torno do Sol, ao mesmo tempo que gira em um dia em torno da linha dos pólos, as estrelas devem ser consideradas como pontos distribuídos a qualquer distância da Terra e não como pontos de uma mesma esfera, interligados por uma mesma superfície, na qual estariam engastadas. Com essa suposição, não mais se compreende/que sejam animadas por um mesmo movimento angular em torno do eixo da órbita terrestre. Assim o ponto  $\gamma$  é que se desloca em sentido retrógrado sobre a eclíptica fixa, de maneira a descrever  $360^\circ$  em 26 000 anos em torno de uma linha paralela ao eixo da eclíptica.

Desta forma as longitudes celestes de todos os astros aumentam de 50" por ano, devido ao recuo, sobre a eclíptica, do ponto vernal dessa mesma quantidade. A verdadeira revolução do Sol e, então, a sideral, isto é  $365,256^d$ . A revolução trópica não é senão o período dos retornos sucessivos do Sol ao ponto vernal/ou aos solstícios. Em resumo, a precessão dos equinócios é devida a retrogradação dos pontos equinociais, Koyre (1934).

Por outro lado, como as coordenadas geográficas dos / pontos da Terra permanecem invariáveis, é o globo terrestre, como um todo, que, sob a ação de uma causa desconhecida na época de Copérnico, deve girar como um pião, com eixo de rotação inclinado sobre a vertical (giro cônico ao redor da vertical).

### Explicação de Newton

Supondo que a Terra seja um elipsóide de revolução / achatado e homogêneo, qual seria o efeito da atração solar sobre sua rotação? Demonstra-se facilmente que ela se traduz não apenas por uma força, que faz gravitar a Terra em torno do Sol, mas também, por um par de forças, que tende a fazer coincidir o plano do equador terrestre com o da eclíptica.

Mostraremos primeiro que a atração solar sobre a massa contida no interior da esfera C, tangente interiormente ao elipsóide em seus dois pólos, se reduz à uma força. Figuraremos, então a secção desta esfera por um plano contendo os centros do Sol e da Terra, Fig. 1.2:

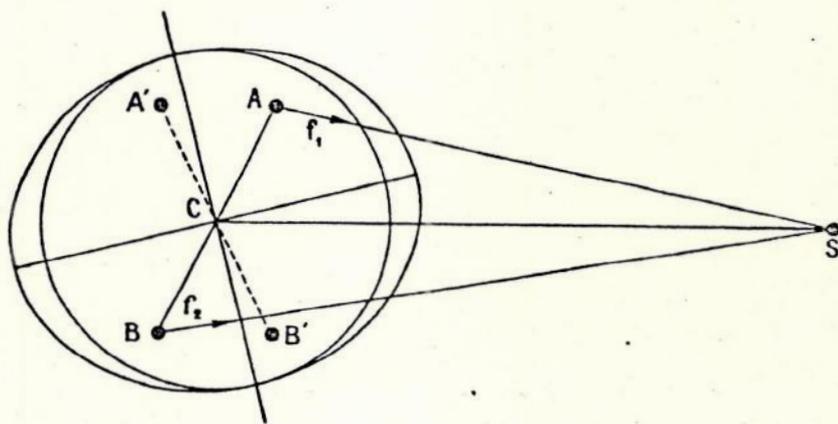


Fig. 1.2

Sejam A e B duas fileiras de elementos materiais, nor mais ao plano da figura e simétricos em relação ao centro C. As forças de atração  $f_1$  e  $f_2$  que o Sol exerce sobre essas duas cama-

das não são equipolentes, em geral, visto que não poder ser simultaneamente iguais em intensidade e paralelas. Podem, no entanto, ser substituídas por uma força aplicada no centro da Terra e por um par cujo momento é normal ao plano da figura. Se reduzirmos / da mesma maneira as forças de atração exercidas pelo Sol sobre as fileiras de elementos A' e B' simétricos das camadas A e B em relação ao plano traçado por C perpendicularmente à CS, obtemos uma força igual àquela que dão as camadas AB, e um par, cujo o momento é diretamente oposto ao primeiro. Como a massa da esfera pode ser inteiramente decomposta em grupos tais que ABA'B', o par resultante é nulo.

Por outro lado, ao par aplicado à parte do elipsóide exterior, hachuriado na figura 1.3, e que Newton denominou dilatação equatorial, a simetria que assegurava, no caso anterior, a / compensação dos momentos não mais existe. A ação do Sol sobre a Terra inteira se traduz por uma força aplicada no centro C (isto é a força sob o efeito da qual a Terra gravita em torno do Sol) e por um par cujo momento está situado no equador terrestre normalmente ao plano da figura. O par se anula apenas em dois casos: quando o centro atrativo S está situado no plano do equador terrestre (para o Sol na época dos equinócios), ou sobre o eixo do elipsóide (que jamais ocorre para a Terra, o Sol, ou mesmo a Lua).

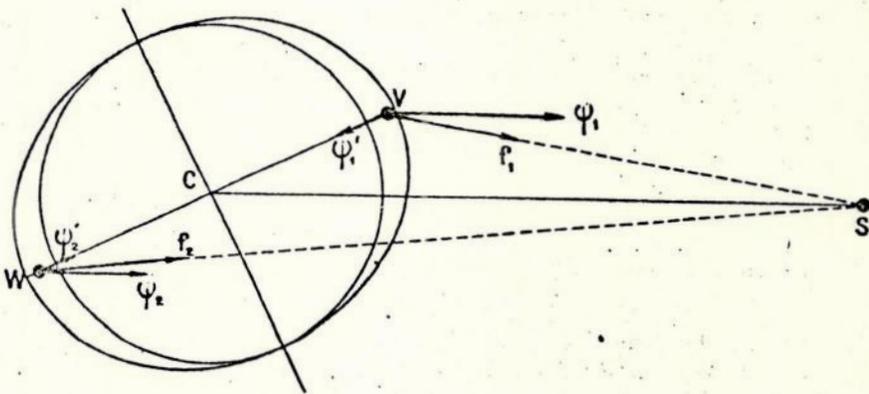


Fig. 1.3

Se V e W são elementos pontuais da dilatação equatorial (fig.1.3) escolhidos no equador terrestre e no plano da figura, simétricos em relação à C, é possível decompor a força de atração  $f_1$  que o Sol exerce sobre o ponto material V em duas outras, uma,  $\psi_1'$ , dirigida segundo CV e cujo momento é nulo em relação à C, a outra,  $\psi_1$ , paralela à CS; do mesmo modo, se decompõe a força  $f_2$  / aplicada a W em duas outras  $\psi_2$  e  $\psi_2'$ .

Pode ser facilmente verificado que as forças  $\psi_1$  e  $\psi_2$  variam na razão inversa dos cubos das distâncias ao Sol, VS e WS.

Sendo V (ou W) um elemento pontual da dilatação equatorial terrestre, de massa  $dm$  (fig. 1.3),  $a$  a distância CS,  $r$  a distância CV (ou CW),  $\rho$  a distância VS (ou WS). Se a massa do Sol é 1, a força exercida sobre a unidade de massa situada no ponto V (ou W) é:  $k/\rho^2$ . Pode ser decomposta em dois vetores respectivamente segundo VC (ou WC) e segundo uma direção paralela à CS. O primeiro desses vetores tem um momento nulo em relação à C; nos podemos desprezar. O segundo vetor, que é responsável pela força perturbadora, tem por grandeza.  $ka/\rho^3$ , onde  $k$  é a constante gaussiana da gravitação.

Observa-se que para um dado instante a força de perturbação depende da distância,  $\rho$ , do elemento pontual ao Sol, enquanto que a distância  $a$ , de C à S, independe da posição do elemento pontual. As forças de gravitação  $f_1$  e  $f_2$  sendo elas mesmas inversamente proporcionais ao quadrado das distâncias, o momento das / forças  $f_1$  e  $f_2$  é representado por um vetor normal ao plano da figura, e dirigido para dentro; seu efeito é fazer gira o segmento/VW no sentido dos ponteiros do relógio, isto é de diminuir a inclinação do plano equador terrestre sobre a eclíptica, suposta fixa.

Em resumo, e sem alongar mais, podemos concluir que o Sol exerce sobre o elipsóide ao qual é assimilada a Terra, um par cujo momento é variável com a sua declinação. Tal par é nulo nos equinócios e máximo nos solstícios (o Sol não se aproxima suficientemente dos pólos para que o par atinja seu maior valor teórico e

decreça em seguida). O momento desse par é situado no plano do equador terrestre e tende a fazer decrescer a obliquidade.

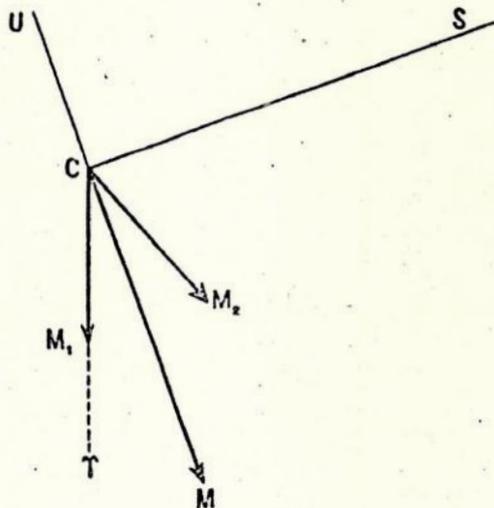


Fig. 1.4

É fácil construir um vetor que possua qualitativamente estas propriedades. Seja, no plano do equador do plano terrestre (Fig. 1.4)  $M_1$  um vetor invariável para o ponto  $\gamma$ ;  $M_2$  um vetor de mesmo módulo que o primeiro, mas simétrico de  $M_1$  em relação a reta CU, normal ao círculo horário CS do Sol.

A resultante M desses vetores é nula nos equinócios e máxima nos solstícios.

Estudemos, agora, separadamente o efeito dos momentos  $M_1$  e  $M_2$ . O primeiro tende a imprimir ao globo terrestre um movimento de rotação em torno de C, no sentido indicado. Considerando a Terra em rotação em torno do seu eixo, sua velocidade angular pode ser representada por um vetor, dirigido para o pólo norte, P. A perturbação causada pela atração solar tende a aproximar, sobre a esfera celeste, o pólo P do ponto  $\gamma$ . Em outros termos, o pólo instantâneo de rotação se desloca de tal maneira que sua velocidade  $v$  permanece tangente ao círculo horário do ponto  $\gamma$  /

(Fig. 1.5). Desta forma o círculo horário permanece também tangente ao ponto P, em um pequeno círculo tendo por centro o pólo Q da eclíptica, sendo  $PQ = \epsilon$  ( $\epsilon$  é a obliquidade da eclíptica). Apresenta a direção tangente comum aos dois círculos. O ponto Q suposto fixo, o pólo P descreve esse pequeno círculo, e a obliquidade, medida pelo arco PQ, permanece constante. O movimento do pólo P sobre o círculo é uniforme e retrógrado. Quanto ao equador celeste, seu deslocamento elementar consiste em uma rotação em torno de um diâmetro  $MM'$  perpendicular ao círculo horário P, visto que a velocidade  $v$  do ponto P é contida no plano deste círculo.

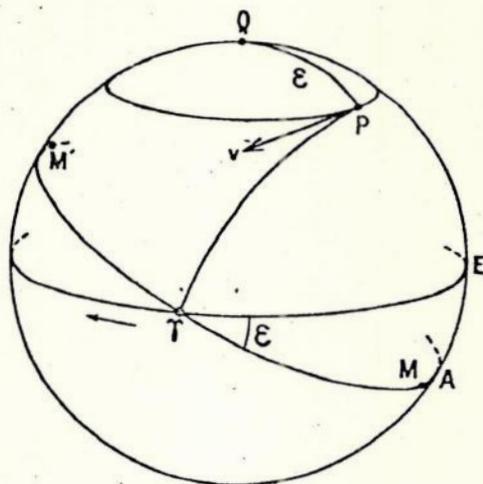


Fig. 1.5

Em um ano, o ponto  $\gamma$  retrograda de  $15,8''$  sob a ação do momento perturbador  $M_1$ . O deslocamento corresponde ao círculo de centro Q é, evidentemente,  $15,8'' \sin \epsilon = 6,3''$ . Desse valor também gira, o equador celeste em torno de  $MM'$ .

O efeito instantâneo do par de momento  $M_2$  e o seguinte: se o par agisse sozinho, o vetor velocidade do ponto P sobre a esfera celeste estaria contido no círculo horário do ponto figurativo do momento  $M_2$ . Ora, esse ponto é móvel sobre o equador e completa duas revoluções trópicas em um ano trópico, nas passagens do Sol pelos equinócios; é oposto ao ponto vernal, e com ele coincide nos solstícios. A velocidade do ponto P, é pois, móvel

em torno de P, no plano tangente à esfera (nesse ponto) e completa duas revoluções por ano. Em consequência:

- 1º) o deslocamento do ponto P correspondente ao momento  $M_2$  se faz segundo uma órbita periódica, que se afasta pouco de um círculo de  $0,55''$  de raio, com um período de 6 meses, Danjon (ob. cit.);
- 2º) esta nutação se traduz por um deslocamento/periódico do ponto  $\gamma$ , e por uma variação periódica da obliquidade.

A semi-amplitude da nutação (em longitude) do ponto  $\gamma$  é de  $1,3''$ ; aquela, da nutação em obliquidade é máxima nos equinócios e mínima nos solstícios, Danjon (ob. cit.).

Compondo os efeitos da precessão e nutação solares / ter-se-á: a trajetória resultante do pólo é uma curva de forma/cicloidial, (S) Fig. 1.6, seus pontos de reversão correspondem aos equinócios; nesses instantes, o binário perturbador se anula, como já foi exposto.

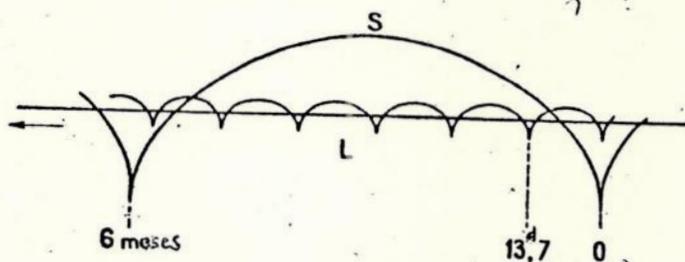


Fig. 1.6

E o pólo é estacionário (velocidade nula). A amplitude dos arcos é de  $3,2''$  sua altura de  $1,1''$ . O pólo descreve 2 por ano, Danjon (ob. cit.).

Tudo o que foi referido a propósito do Sol pode se aplicar à Lua. As forças perturbadoras estão na razão direta das massas dos corpos perturbadores, e na razão inversa do cubo de suas distâncias. Acha-se assim que o par perturbador devido à Lua vale em média 2,2 vezes mais que o do Sol. A precessão lunar atinge cerca de 34,6" por ano, se bem que o deslocamento total do ponto  $\gamma$  sob a ação da Lua e do Sol seja de 50,37" por ano. Esse efeito constitui a precessão luni-solar.

Quanto a nutação lunar, como calculada por Newton, é muito pequena: seu período é de meia revolução trópica da Lua, ou 13,7<sup>d</sup>. O ponto pode avançar ou retardar de 0,2" e a obliquidade pode ser aumentada ou diminuída de 0,09". Pode-se representar aproximadamente esta nutação pela revolução do pólo sobre um pequeno círculo de raio de 0,09". Composto com a precessão, obtém-se a trajetória do pólo sob a ação exclusiva da Lua, que ainda é uma curva de forma cicloidal, contando com cerca de 27 arcos por ano, semelhante àquela devida apenas ao Sol, com uma relação de similitude igual ao produto da razão entre o mês trópico e o ano trópico por 2,2, ou seja cerca de 0,16 (Fig. 6, em L) (a ação da Lua é 2,2 vezes mais forte que o Sol e o movimento em longitude da Lua é 13,4 vezes mais rápido que o do Sol).

Para obter a trajetória do pólo verdadeiro, é suficiente compor a precessão luni-solar com as duas nutações, solar e lunar.

#### A precessão e o movimento giroscópico

O movimento cônico da Terra, conhecido pelo nome de precessão, é semelhante ao movimento de um pião (Fig. 1.7) girando rapidamente em torno do seu eixo OC inclinado de um ângulo  $i$  com a vertical OD. O é o seu ponto de contato com uma superfície horizontal

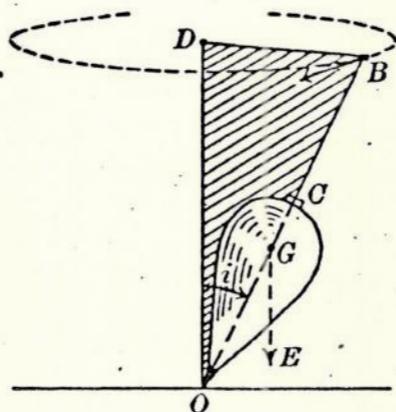


Fig. 1.7

Se  $G$  for o centro de massa do pião, seu peso, atuando na direção  $GE$ , no sentido de  $G$  para  $E$ , dará origem a um momento / em relação ao ponto de contato  $O$ . A primeira vista, seu efeito / seria de aumentar o ângulo  $\widehat{C\hat{O}D}(=i)$ , fazendo tombar o pião. Devido, todavia, à sua rotação em torno de  $OC$ , o movimento resulta / completamente diverso. Com efeito, o seu eixo  $OC$  é obrigado a girar uniformemente em torno da vertical,  $OD$ , com o que, cada ponto  $B$  do seu eixo descreverá um círculo, paralelo à superfície de apoio, tendo como centro um ponto da vertical (no caso, o ponto  $D$ ). O eixo do pião,  $OC$ , varrerá, assim, no espaço, uma superfície cônica. Ao invés de cair sobre a superfície de apoio, o eixo  $OC$ , em cada instante, desloca-se perpendicularmente ao plano determinado por  $OC$  e  $OD$ . Esse movimento do eixo é denominado precessão.

Consideremos agora a terra girando rapidamente em torno do seu eixo polar, sob a ação das forças de atração gravitacional ocasionadas pelo Sol e pela Lua. Supondo a Terra uma esfera, a densidade de sua matéria em cada ponto depende somente da distância ao centro. As direções das atrações solar e lunar, passariam através do centro e não causariam mudanças no eixo de rotação. Como é um esferóide, com o equador como o plano principal, e não estando o Sol e a Lua situadas no plano equatorial, exceto /

em duas ocasiões durante seus períodos orbitais (nos equinócios e nos nodos, respectivamente) as direções das atrações gravitacionais do Sol e da Lua não passam pelo centro da Terra.

Desta forma, as forças atrativas apresentam momentos/ em relação a esse centro. Para o Sol, o momento de sua atração/ teria por efeito obrigar o plano equatorial da Terra a se mover em direção à eclíptica, tal como no caso do pião (Fig.1.7): O momento do seu peso em relação ao ponto O faz com que seu eixo se aproxime da superfície em que se apóia.

Tudo se passa, dinamicamente falando, como se a Terra fosse um gigantesco pião, girando em torno do seu eixo instantâneo de rotação e apresentando a tendência de se deslocar para o plano da eclíptica. O eixo de rotação da Terra em cada instante move-se perpendicularmente ao plano contendo o próprio eixo terrestre e o Sol. Conseqüentemente, apresenta um movimento cônico relativo do eixo da eclíptica, cujo pólo é Q (Fig. 1.8). O ponto vernal,  $\gamma$ , por sua vez, move-se retrogradando ao longo da eclíptica, na direção  $\gamma\gamma'$ . A ação principal da Lua na direção do eixo de rotação / da Terra é de natureza similar. Ao movimento retrógrado (do ponto vernal) resultante da ação do Sol e da Lua se denomina precessão luni-solar. Cerca de 2/3 do efeito

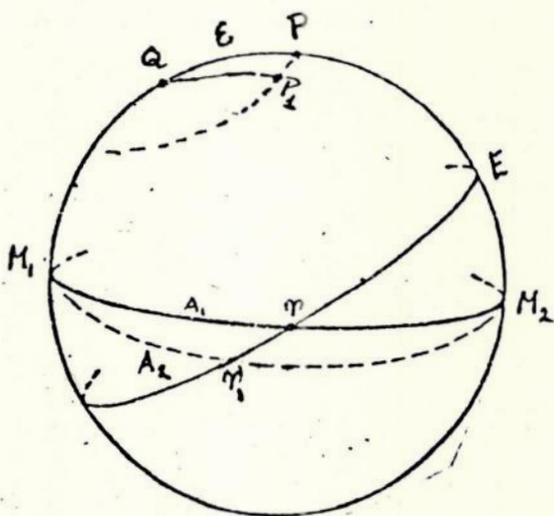


Fig. 1.8

é devida à Lua, dada sua proximidade da Terra, Smart (1971).

### Valores históricos da precessão

A título de informação, o quadro 1 fornece, resumidamente, os valores da precessão anual como apresentados por vários autores. É interessante ressaltar a disparidade desses valores, que se dispersam entre 36" e 50" por ano.

O quadro 2, igualmente sintomático, é extraído de /  
P. Tannery (1893).

Valores históricos da precessão

ESTRELA	INTERVALO	OBSERVAÇÃO		VALOR ANUAL DA PRECESSÃO	FONTES
		ANTERIOR	POSTERIOR		
$\alpha$ virginis	1 <sup>o</sup> em 80 anos	Timocharis (294A.C. e 283A.C.)	Hiparco (129 A.C.)	45" ou 46"	S.L.E.Dreyer
4 estrelas (em geral)	1 <sup>o</sup> em 100 anos  1 <sup>o</sup> em 100 anos	Timocharis e Hiparco  Obs:valores comparados 150 anos antes de Hiparco	Agripa e Menelaus por Ptolomeu  Hiparco	36"  36"	idem  W.M. Smart
$\alpha$ virginis	2 <sup>o</sup> em 150 anos	Timocharis e Aristille	Hiparco	48"	Arthur Berry
$\alpha$ virginis	2 <sup>o</sup> em 150 anos	Timocharis	Hiparco	48"	F. Boquet
	2 <sup>o</sup> em 150 anos	Aristille e Timocharis	Hiparco	48"	idem
	1 <sup>o</sup> em 100 anos	?	Hiparco	36"	Arthur Berry
$\alpha$ virginis	2 <sup>o</sup> em 144 anos	Timocharis	Hiparco	50"	André Danjon
	1 <sup>o</sup> em 100 anos	Aristille e Timocharis	Hiparco	36"	Pierre Simon-
	1 <sup>o</sup> em 100 anos	?	Hiparco	36"	M.De Laplace
	2 <sup>o</sup> em 150 anos	?	Hiparco	48"	Pierre Duhem
$\alpha$ virginis	2 <sup>o</sup> em 200 anos	Timocharis	Hiparco	36"	M. l'Abbé Halma
	1 <sup>o</sup> em 100 anos		Ptolomeu	36"	idem

Quadro 2

VALORES DA PRECESSÃO SEGUNDO P. TANNERY

ESTRELA	INTERVALO	OBSERVAÇÃO		VALOR ANUAL DA PRECESSÃO
		ANTERIOR	POSTERIOR	
α Leonis Pleiades	2° 40' em 265 anos	Hiparco	Ptolomeu	37"
	3° 45' em 375 anos	Timocharis	Agripa em Bitylhe (93 D.C.)	36"
α virginis α Scorpii	3° 45' em 379 anos	Timocharis	Meneles	35,6"
	3° 55' em 391 anos	Timocharis	Meneles	36"
	3° em 300 anos		Hiparco	36"
	4° 29'8" em 345 anos		Hiparco	46,8"

## II CONCEITUAÇÃO

## CAPITULO II

### CONCEITUAÇÃO

#### A precessão e o planos fundamentais

Seja, na Fig. 2.1

$P_1$  e  $P_2$  os pólos do equador para os instantes  $t_1$  e  $t_2$

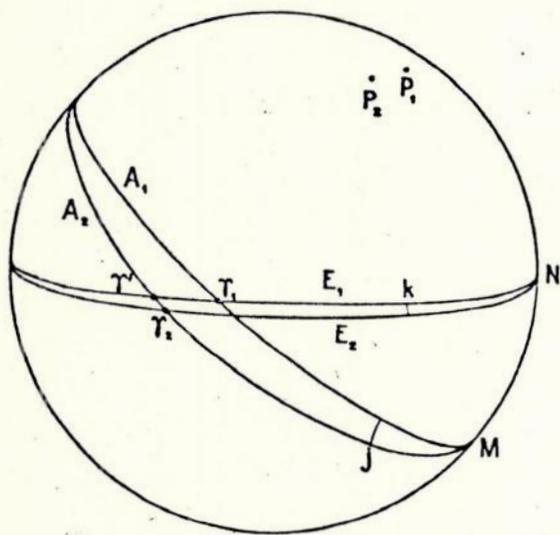
$E_1$  e  $E_2$  as eclípticas para os instantes  $t_1$  e  $t_2$

$\gamma_1$  e  $\gamma_2$  os equinócios para os instantes  $t_1$  e  $t_2$

$A_1$  e  $A_2$  os equadores celestes para os instantes  $t_1$  e  $t_2$

$M$  é o nodo ascendente de  $A_2$  em relação à  $A_1$

$N$  é o nodo ascendente de  $E_2$  em relação à  $E_1$



Obs.: supondo  $t_2$  posterior à  $t_1$ ; Em caso contrário é necessário substituir ascendente / por descendente

Fig. 2.1

$j$  = ao ângulo entre os equadores dos instantes  $t_1$  e  $t_2$

$k$  = ao ângulo entre as eclípticas dos instantes  $t_1$  e  $t_2$

A mudança de coordenadas ficará completamente determinada pelos valores atribuídos a  $N$ ,  $M$ ,  $j$  e  $k$ .

O cálculo das coordenadas equatoriais  $\bar{\alpha}_2$  e  $\delta_2$  de uma estrela para o instante  $t_2$ , conhecendo-se as coordenadas  $\alpha_1$  e  $\delta_1$  da mesma estrela para o instante  $t_1$ , não oferece, em princípio / grandes dificuldades.

Seja  $t = t_2 - t_1$  da ordem de dezenas de anos (no máximo, um século). Procurando-se exprimir o ângulo  $j$  (Fig.2.1) em função do tempo aparecerá um termo periódico (representando a precessão de Hiparco) cujo período pode ser considerado como grande, visto atingir cerca de 26 000 anos.

Todavia é mais cômodo utilizar um desenvolvimento em série, limitado a alguns termos. O desenvolvimento é levado, geralmente, até a 3ª ordem, deste que  $t$  não seja demasiadamente longe. Acha-se também, na expressão de  $j$  termos de curto período representando a nutação, que não podem ser representados da mesma forma. Serão representados pela notação  $\Sigma_{t_2}(P) + \Sigma_{t_1}(P)$ : Ter-se-á, desta forma:

$$j = at + bt^2 + ct^3 + \Sigma_{t_2}(P) + \Sigma_{t_1}(P), \text{ ----- (1)}$$

sendo os termos periódicos no intervalo  $t$ . Para os arcos  $\gamma_1^M$ ,  $\gamma_2^M$ ,  $\gamma_1^N$ ,  $\gamma_2^N$ , assim como para as coordenadas celestes das estrelas fixas, obter-se-ão expressões similares.

#### DEFINIÇÕES BÁSICAS

Qualquer que seja a grandeza representada, a expressão da forma 1 incluirá:

- 1º) Termos seculares: designam os termos dependentes das primeira potências de  $t$ ;
- 2º) Termos periódicos.

Todavia, como afirma Danjon (ob.cit.), a diferença / acima não é essencial, uma vez que os termos seculares podem ser considerados como periódicos de período muito longo. Podem existir, ainda, termos seculares verdadeiros, por exemplo na expressão da longitude celeste de uma estrela fixa há um termo em  $t$ , correspondente à precessão, que cresce de  $360^\circ$  em 26 000 anos.

De qualquer forma, é dado o nome genérico de precessão aos termos que dependem diretamente do tempo e de suas primeiras / potências, quer se trate de termos pseudo-seculares, isto é, provenientes do desenvolvimento de termos periódicos de período muito grande. quer de termos seculares verdadeiros. E dado o nome geral de nutação à soma de todos os termos periódicos explicitamente conservados como tais.

A precessão, cujo valor numérico, nulo na época inicial, cresce sem cessar, pode ser representada em função do tempo por um arco de parábola, geralmente cúbica.

Quanto à nutação, cujo valor na origem não é nulo, varia de maneira muito mais complexa, permanecendo limitada entre / dois extremos. Sua variação é representada por uma curva ondulada. A figura 2.2 representa esquematicamente a precessão P, a nutação N e seus efeitos combinados, a soma S.

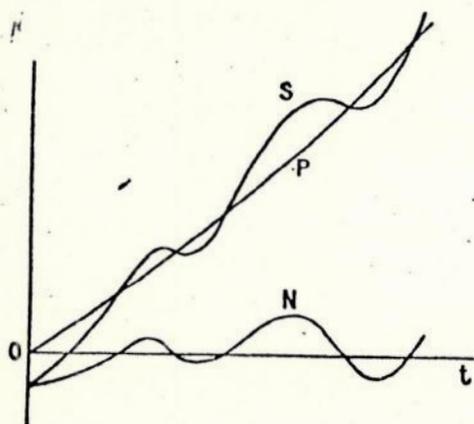


Fig. 2.2.

Isto posto, concebe-se que haja vantagem em separar o cálculo da precessão do da nutação. Esta divisão conduz a uma distinção básica.

- a. Planos Verdadeiros
- b. Planos Médios

Plano Médio é o plano fundamental afetado unicamente pela precessão.

Na Fig. 2.2, o arco de parábola, P, corresponderá a um elemento médio. A curva S corresponderá ao elemento verdadeiro (afetado simultaneamente da precessão e da nutação).

Desta forma, referem-se as coordenadas de uma estrela fixa, seja aos planos verdadeiros (afetados da precessão e da nutação), obtendo-se as coordenadas verdadeiras (ou posição verdadeira) seja aos planos médios (afetados somente da precessão), obtendo-se as coordenadas médias (ou posição média).

Precisemos ainda alguns pontos. O equador verdadeiro e, a cada instante, o plano normal ao eixo instantâneo de rotação da Terra, o qual se afasta muito pouco do seu eixo principal de inércia. Como já foi visto, a precessão e a nutação que afetam a posição desse plano são devidas às ações perturbadoras do Sol e da Lua na rotação da Terra.

A definição da eclíptica demanda, porém, explicações mais complexas. A eclíptica verdadeira é, em cada instante, o plano que contém o raio vetor Terra-Sol e o vetor velocidade orbital terrestre.

Deve ser aqui lembrado que o ponto material, ao qual se aplicam as leis do movimento kepleriano, não é, na realidade o centro da Terra, mas sim o centro de massa do sistema Terra-Lua (denominado na geo-dinâmica de baricentro). A eclíptica verdadeira é, deste modo - e com todo rigor - definida pelo centro do Sol, pelo baricentro e pelo vetor velocidade relativa do baricentro em relação ao Sol.

Em Mecânica Celeste essa definição da eclíptica / corresponde ao plano da órbita osculatriz do baricentro, Danjon (ob.cit.).

Quanto a eclíptica média, difere da verdadeira devido às perturbações planetárias de curto período, as quais não / está afetada. As principais são devidas a ação de Venus e Júpiter.

Querendo conservar as expressões verdadeiro e médio no sentido geral que lhes é atribuído acima, deve-se definir o equinócio verdadeiro como o nodo ascendente da eclíptica verdadeira com o equador verdadeiro. A expressão da nutação (nutação em longitude e em obliquidade) encerraria, neste caso, os termos planetários correspondentes às perturbações exercidas, principalmente, por Venus e Júpiter. Uso diferente tem prevalecido / nas efemérides astronômicas. O equinócio verdadeiro não é, aqui, empregado, em seu sentido pleno, visto que essas coordenadas / não são afetadas de uma nutação planetária, como seriam se fossem referidas à eclíptica verdadeira. Essa observação, de grande valor conceitual, é encontrada em Danjon (ob.cit.).

Com as ressalvas acima, é fácil justificar, a convenção em uso. A observação meridiana nos fornece imediatamente as coordenadas equatoriais dos astros, referidas ao equador / verdadeiro; Nenhum método, atualmente, permite obter as coordenadas eclípticas, que, portanto, aparecem apenas como intermediárias no cálculo. Como consequência, pouco importa que elas sejam referidas à eclíptica verdadeira ou à eclíptica média. Os cálculos serão obviamente simplificados adotando-se o plano médio para referir o sistema de coordenadas definidoras das posições dos corpos celestes. O mesmo se aplica ao equinócio, origem convencional das ascensões retas, por não ser diretamente / acessível às observações astronômicas. Não o afetando da nutação planetária em ascensão reta, os cálculos são facilitados , sem perda do rigor.

É ainda oportuno ressaltar a diferença entre os termos equinócio e época. Equinócio é a origem do sistema de coordenadas que referenciam a posição média dos corpos celestes. É representado por símbolo numérico com 5 algarismos, o quarto

separado do último (0) por uma vírgula. Os quatro primeiros indicam o milésimo astronômico e quinto, o início do ano fictício de Bessel, Por exemplo: equinócios: 1950,0, 2000,0. Época é o instante que referencia os movimentos próprios ( $\mu_\alpha$ ,  $\mu_\delta$ ) dos corpos celestes. No SAO (Star Catalog) a época e o equinócio / (1950,0) são coincidentes, o que facilita sobretudo as reduções astronômicas. No catálogo de Yale (SUPPLEMENTARY VOLUME TO THE YALE ZONE CATALOGUES), o equinócio é 1950,0 e a época 1932, 2 (anexo 1).

Como observação final, o comprimento do ano trópico é bem definido, mas o mesmo não sucede com a sua origem. Os astrônomos, de acordo com a sugestão de Bessel, definem o início/ do ano trópico (ou solar) como o instante para o qual a ascensão reta do Sol médio (ou a longitude celeste média do Sol verdadeiro) for exatamente 18h 40min ou seja  $280^\circ$ . Esse instante ocorre sempre nas proximidades do começo do ano civil (1º de janeiro). O ano convencional assim definido é denominado em homenagem ao grande astrônomo alemão, de ano fictício de Bessel. Assim Smart (ob.cit.), 1931,0 corresponde a 1931 Jan. 1,322<sup>d</sup> (T.U.) ou seja 7h 43,68min T.U. do dia 1 de janeiro de 1931. Para 1932, basta acrescentar 365,242 dias ao valor acima. Desta forma: / 1932,0 = 1932 Jan. 1,564d (T.U.).

Para facilitar o cálculo do início do ano trópico, a tabela 2.1 fornece, segundo as tábuas de S.Newcomb o intervalo de tempo, expresso em dias solares médios, entre o começo do ano civil (1º de janeiro, 0h T.U.) e o começo do ano fictício / de Bessel. Para compatibilizar a tabela 2.1 com as tábuas de Le Verrier subtrair 0,000 3 dias até 1966, inclusive e 0,000 4 dias, a partir de 1967.

TABELA 2.1

## Começo do ano trópico

1940	+ 0,5014 <sup>a</sup>	+ 0,00137 <sup>a</sup>	1960	+ 0,3453 <sup>d</sup>	+ 0,00095 <sup>a</sup>	1980	+ 0,1892 <sup>d</sup>	+ 0,00052 <sup>a</sup>
1	- 0,2564	- 70	1	- 0,4125	- 113	1	- 0,5686	- 156
2	- 0,0142	- 4	2	- 0,1703	- 47	2	- 0,3264	- 89
3	+ 0,2280	+ 62	3	+ 0,0719	+ 20	3	- 0,0842	- 23
4	+ 0,4702	+ 129	4	+ 0,3141	+ 86	4	+ 0,1580	+ 43
5	- 0,2876	- 79	5	- 0,4437	- 121	5	- 0,5998	- 164
6	- 0,0454	- 12	6	- 0,2015	- 55	6	- 0,3576	- 98
7	+ 0,1968	+ 54	7	+ 0,0407	+ 11	7	- 0,1154	- 32
8	+ 0,4390	+ 120	8	+ 0,2829	+ 77	8	+ 0,1268	+ 35
9	- 0,3188	- 87	9	- 0,4749	- 130	9	- 0,6310	- 173
1950	- 0,0766	- 0,00021	1970	- 0,2327	- 0,00064	1990	- 0,3888	- 0,00106
1	+ 0,1656	+ 45	1	+ 0,0095	+ 3	1	- 0,1456	- 40
2	+ 0,4078	+ 112	2	+ 0,2517	+ 69	2	+ 0,0956	+ 26
3	- 0,3500	- 96	3	- 0,5061	- 139	3	- 0,6622	- 181
4	- 0,1078	- 30	4	- 0,2639	- 72	4	- 0,4200	- 115
5	+ 0,1343	+ 37	5	- 0,0217	- 6	5	- 0,1778	- 49
6	+ 0,3765	+ 103	6	+ 0,2205	+ 60	6	+ 0,0644	+ 18
7	- 0,3813	- 104	7	- 0,5373	- 147	7	- 0,6934	- 190
8	- 0,1391	- 38	8	- 0,2952	- 81	8	- 0,4512	- 124
9	+ 0,1031	+ 28	9	- 0,0530	- 15	9	- 0,2090	- 57
1960	+ 0,3453	+ 0,00095	1980	+ 0,1892	+ 0,00052	2000	+ 0,0332	+ 0,00009

Exemplo: Determinar o início do ano trópico para 1981.

Pela tabela 2.1, tem-se:

1981	-0,5686 <sup>d</sup>
------	----------------------

Início do ano civil: Jan. 1: 0h T.U.

Início do ano trópico: Jan. 1: 0h - 0,5686<sup>d</sup>=

1980 Dez 31,4314 =

1980 Dez 31 às 10<sup>h</sup> 21<sup>min</sup> 12,96<sup>s</sup> T.U.

III EFEITOS

## CAPÍTULO III

### EFEITOS

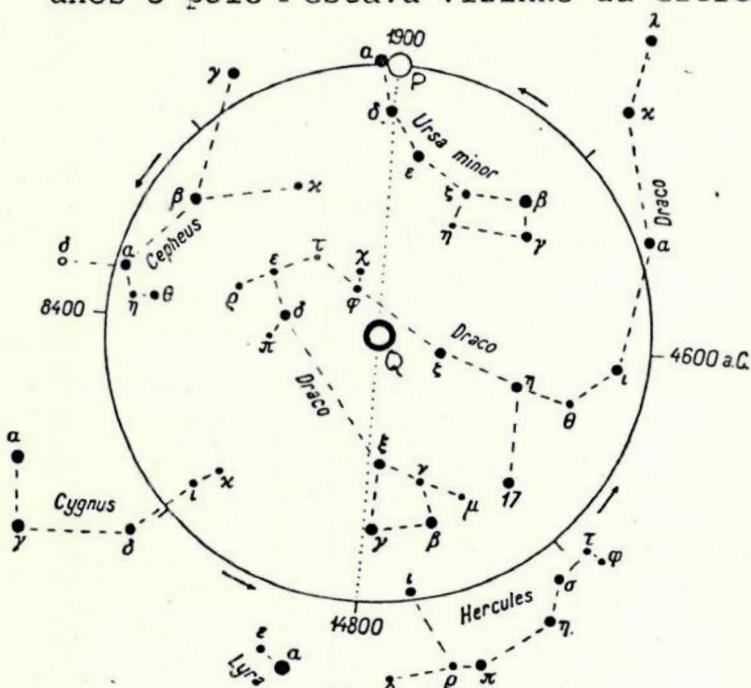
#### Introdução

A precessão dos equinócios, além de ocasionar uma variação na posição dos corpos celestes que será estudada com todas as minúcias nos próximos capítulos, produz efeitos que devem ser mencionados, a título de exemplo, ainda que resumidamente.

#### Mudanças seculares das constelações e pólos celestes

É considerado como fixo, (vide fig. 3.1) o pólo da eclíptica, Q, situado na constelação do Dragão (Draco). O polo P da rotação aparente da esfera celeste descreve em torno de Q um círculo de raio  $23^{\circ}27'$  em aproximadamente 26 000 anos. Há 4 000 anos o pólo Pestava vizinho da estrela  $\alpha$  Draconis. Nos nossos /

dias, ele está situado a menos de  $1^{\circ}$  de  $\alpha$ Ursae Minoris que é a estrela polar para o hemisfério boreal. Em seguida o polo P atravessará Cepheus, e, em 12 000 anos, passará nas proximidades de Vega ( $\alpha$  Lyrae), que, então será a estrela polar norte, a Polaris da época.



#### Início das estações do ano

A retrogradação do ponto  $\gamma$  corresponde a um avanço, a cada ano, do início do equinócio, avanço que justifica a denominação precessão dos equinócios dada a essa retrogradação.

Esse movimento de retrogradação causa ainda, a diferença entre o ano sideral (intervalo de tempo necessário para que a longitude celeste do Sol aumente de  $360^{\circ}$ ) e o ano trópico (o intervalo de tempo que decorre entre duas passagens consecutivas do Sol pelo ponto  $\gamma$ ). É este último que condiciona o ciclo das estações. A diferença de duração corresponde ao tempo necessário para que a longitude celeste do Sol cresça de  $50,26''$  (ou  $3,4^s$ ) no qual o Sol leva  $0,0141^d$  (ou  $20^m 23^s$ ) para percorrer sobre a eclíptica o arco de precessão. A tabela 3.1, fornece as durações previstas para as Estações do Ano.

Tabela 3.1.

Duração das Estações do Ano

ARCO	ESTAÇÃO DO ANO (hemisfério norte)	DURAÇÃO ATUAL	
		d	h
1. $\Gamma\Sigma$	Primavera	92	21
2. $\Sigma\Gamma'$	Verão	93	14
3. $\Gamma\Sigma'$	Outono	89	19
4. $\Sigma\Gamma$	Inverno	89	00

Retrogradação dos signos zodiacais

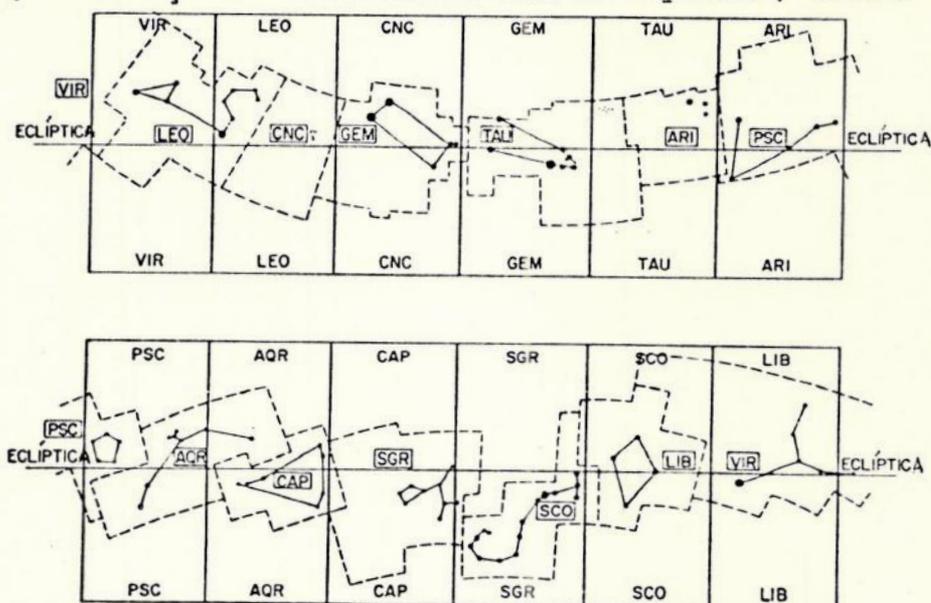
Ao deslocamento do ponto  $\gamma$  corresponderá, fatalmente, uma retrogradação dos signos do zodíaco. O início das eras de Aquário, Peixes e Carneiro, por exemplo são determinadas pelo deslocamento do ponto vernal, 1º ponto de Aries, sobre a eclíptica.

Esse movimento secular é lento e não uniforme. Em / 1900 seu valor era de  $50,2564''/\text{ano}$ . No ano 2000 será:  $50,2787''/\text{ano}$ .

Assim em 1867 A.C. o ponto vernal passou de Taurus / para Aries (dando início a chamada era de Carneiro). Em 69 A.C.

entrou na constelação de Peixes (início da era de Peixes).

Atualmente o ponto vernal deve ainda percorrer 9° (nove) em Peixes. Somente no ano 2597 é que se encontrará no limite que demarca a constelação de Aquarius, dando-se, então e só então, o começo da denominada era de Aquário, Meeus ( 1979 ).



A Fig. 3.2 ilustra a configuração dos limites modernos das constelações zodiacais (U.A.I. União Astronômica Internacional, Assembléia Geral, 1925) e dos signos zodiacais ( zodiaco trópico, como alguns pretendem identificá-los) e foi extraída de Culver e Ianna (citado por Kelly, 1980)

### Deslocamento do periélio

A observação mostra, ainda que o periélio da órbita terrestre apresenta um deslocamento de 11,46" por ano, no sentido direto. A mecânica celeste atribui esse movimento às perturbações planetárias sobre o sistema Terra-Lua. Devido a retrogradação do ponto vernal, a longitude do periélio cresce anualmente de 61,71".

Como curiosidade, no ano 1250 havia igualdade entre os arcos  $\Gamma E$  e  $\Sigma \Gamma'$ , bem como entre os arcos  $\Gamma \Sigma'$  e  $\Sigma \Gamma$ , fig. 3.3

A duração que separa duas passagens consecutivas da Terra pelo periélio é denominada de ano anomalístico. É igual a  $365^d 6^h 13^m 53^s$  ou seja 365,2596412 dias.

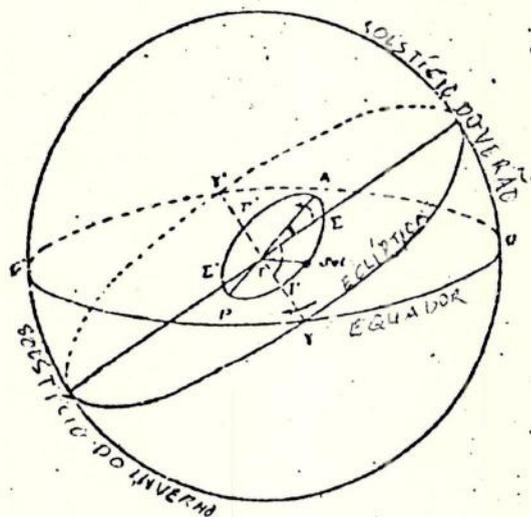


Fig. 3.3

### Variação na duração do ano trópico

O termo em  $t^2$  da precessão geral provoca uma ligeira diminuição progressiva da duração do ano trópico de uma fração do dia igual à  $\frac{0,00022}{3548} = 6 \times 10^{-8}$  dias (1), seja  $0,53^s$  por século,

Tardi (1949)

- (1) O numerador 0,00022 exprime em segundos o dobro do coeficiente do termo em  $t^2$  da precessão geral dada pela fórmula:  
 $= 50,256''t + 1,1''(t/100)^2$ ,  $t$  sendo expresso em ano juliano de

365,2422 dias, o denominador  $3548 = \frac{360 \times 60 \times 60}{365,2422}$ , é o acréscimo diá

rio da longitude do Sol, em segundos de arco.

#### IV. TIPOS DE PRECESSÃO

## CAPÍTULO IV

### TIPOS DE PRECESSÃO

#### Precessão luni-solar

Supondo-se invariável a posição do plano da eclíptica no espaço, o pólo P da esfera celeste descreverá um pequeno círculo, cujo centro é o ponto Q, pólo da eclíptica, à razão de 50,37" por ano (fig.4.1), por efeito da precessão luni-solar.

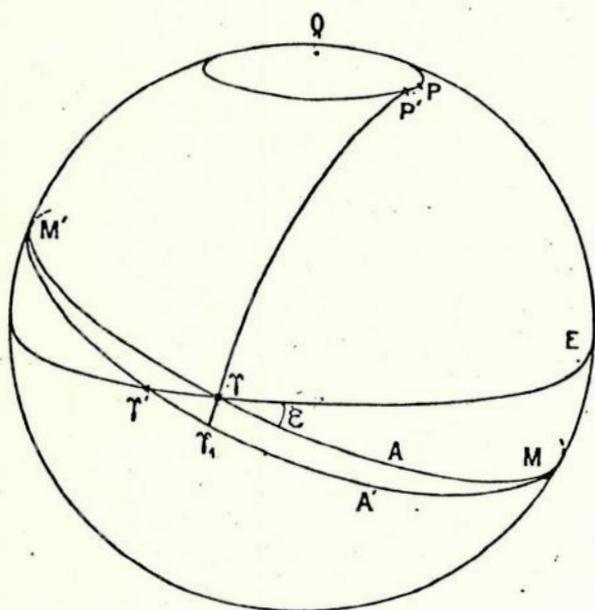


Fig. 4.1

Em um intervalo de tempo infinitamente pequeno  $dt$ , o equinócio ( $\gamma$ ) retrograda do arco  $d\lambda$  ( $d\lambda = \gamma\gamma'$ ); o equador celeste gira em torno da perpendicular /  $MM'$  à linha dos equinócios, de um ângulo  $dj$ . O equinócio transporta-se de  $\gamma$  a  $\gamma'$ . O pólo P descreve um arco infinitamente pequeno  $PP'$ , que pode ser considerado como carregado pelo círculo horário inicial, que passa por  $\gamma$ . O arco  $\gamma\gamma_1$  mede o ângulo  $dj$ . Tem-se assim,  $PP' = dj$

Chama-se precessão em longitude celeste ao arco  $d\lambda$ ; precessão em ascensão reta ao arco  $d\mu = \gamma_1\gamma'$ ; precessão em declinação ao ângulo  $dj = \gamma\gamma_1$ . Os sentidos positivos são tais que  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $j$  são funções crescentes do tempo. Tem-se evidentemente:

$$d\mu = d\lambda \cos \epsilon$$

$$dj = d\lambda \sin \epsilon$$

Fazendo:

$$m = \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \cos \epsilon$$

$$n = \frac{dj}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \sin \epsilon$$

Se a unidade de tempo for o ano trópico, ter-se-á:

$$m = 46,1''$$

$$n = 20,0''$$

A letra  $j$  não tem, agora, a mesma significação, que a da relação (1) do capítulo II. Daqui por diante representará soma dos termos seculares do segundo membro desta relação (com exclusão dos termos periódicos). Em outros termos, ela representa unicamente a precessão, e não mais a soma da precessão e da nutação.

Sejam  $l$  (longitude celeste) e  $b$  (latitude celeste) as coordenadas eclípticas de uma estrela fixa. Tem-se evidentemente.

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \quad e \quad \frac{db}{dt} = 0$$

A, sendo a posição de uma estrela fixa na esfera celeste, o triângulo esférico PQA fornece (Fig. 4.2)

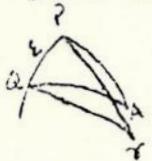


Fig.4.2

	PQ = $\epsilon$	Ângulos	$\hat{P} = 90^\circ + \alpha$
Lados	PA = $90^\circ - \delta$		$\hat{Q} = 90^\circ - l$
	QA = $90^\circ - b$		

Como PQ e QP são retos, o triângulo PQ é bi-retângulo, tem-se:

$$\text{sen} \delta = \text{cos} \epsilon \text{ sen} b + \text{sen} \epsilon \text{ cos} b \text{ sen} l \dots\dots\dots (4.1)$$

$$\text{cos} \alpha \text{ cos} \delta = \text{cos} b \text{ cos} l \dots\dots\dots (4.2)$$

$$\text{cos} \delta \text{ sen} \alpha = -\text{sen} \epsilon \text{ sen} b + \text{cos} \epsilon \text{ cos} b \text{ sen} l \dots\dots (4.3)$$

Derivando e supondo  $\epsilon$  e  $b$  constantes vem:

$$\text{cos} \delta \frac{d\delta}{dt} = \text{sen} \epsilon \text{ cos} b \text{ cos} l \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \text{sen} \epsilon \text{ cos} \alpha \frac{dl}{dt}$$

A relação (3) fornece  $d\alpha/dt$ :

$$\text{cos} \delta \text{ cos} \alpha \frac{d\alpha}{dt} - \text{sen} \alpha \text{ sen} \delta \frac{d\delta}{dt} = \text{cos} \epsilon \text{ cos} \alpha \text{ cos} \delta \frac{dl}{dt}$$

$$\cos\delta \cos\alpha \frac{d\alpha}{dt} = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\epsilon \cos \frac{d\lambda}{dt} + \operatorname{cose}\epsilon \cos\alpha \cos\delta \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\cos\delta \cos\alpha \frac{d\alpha}{dt} = (\operatorname{cose}\epsilon + \operatorname{sen}\epsilon \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\delta) \cos\delta \cos\alpha \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\operatorname{cose}\epsilon + \operatorname{sen}\epsilon \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\delta) \frac{d\lambda}{dt}$$

Seja enfim

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= m + n \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\delta & m &= 46,1'' = 3,07^S \\ & & \text{onde} & & \dots\dots\dots (4.4) \\ \frac{d\delta}{dt} &= n \cos\alpha & n &= 20,0'' = 1,34^S \end{aligned}$$

Graças as expressões (4.4), é fácil reconhecer o sentido da variação de cada uma das coordenadas. A declinação é / crescente em todo hemisfério onde  $\cos\alpha$  for positivo. Este hemisfério tem por pólo, o ponto  $\gamma$ . Ela é decrescente no hemisfério / oposto. Estes resultados podem ser enunciados a priori. Como o círculo máximo participa do movimento do seu pólo  $\gamma$ , a declinação de uma dada estrela fixa é alternativamente crescente e decrescente com um período de 26000 anos.

Fica, portanto, compreendida entre um máximo e um mínimo.

Quanto a ascensão reta, é geralmente crescente, em razão da preponderância do termo  $m$ . É, todavia, estacionária ou decrescente em certos pontos da esfera celeste. Ela é estacionária para todos os pontos da esfera celeste definidos em um instante dado pela equação:

$$m + n \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\delta = 0 \dots\dots\dots (4,5)$$

substituindo  $m$ ,  $n$  dados por:

$$m = \frac{d\lambda}{dt} \operatorname{cose}\epsilon$$

$$n = \frac{d\lambda}{dt} \operatorname{sen}\epsilon ,$$

em (4.5), vem:  $\frac{d\lambda}{dt} \operatorname{cose}\epsilon + \frac{d\lambda}{dt} \operatorname{sen}\epsilon \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\delta = 0$

dividindo-se por  $\frac{d\lambda}{dt}$  vem:

$$\cos \epsilon + \operatorname{sen} \epsilon \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \delta = 0$$

Substituindo  $\operatorname{tg} \delta$  por:

$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{sen} \delta / \cos \delta$ , e simplificando tem-se:

$$\cos \epsilon \cos \delta + \operatorname{sen} \epsilon \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta = 0$$

esta equação exprime que o triângulo Astro, Pólo da Eclíptica e Pólo do Equador Celeste é retângulo no astro.

Observa-se que as coordenadas invariáveis (no pólo / norte:  $\alpha = 18^h, \delta = 90^\circ - \epsilon$ ), com a condição, todavia, de considerar a eclíptica como fixa em relação as estrelas.

### Precessão geral

As fórmulas da precessão luni-solar dadas no parágrafo anterior são apenas aproximadas, pois foram estabelecidas na hipótese de uma obliquidade invariável. Cabe agora definir a precessão levando em conta o deslocamento da eclíptica.

Para o fazer, é conveniente retornar à figura 2.1. Desta feita, os planos representados serão móveis: um para a época inicial (zero) e o outro para uma época qualquer (t). Os elementos relativos à época inicial serão chamados fixos. Os outros (relativos às épocas t) serão considerados móveis.

Chama-se precessão luni-solar -  $\psi$  - ao deslocamento  $\gamma, \gamma'$  do ponto equinocial de março ( $\gamma$ ) devido a ação gravitacional do Sol e da Lua, supondo que a eclíptica permaneça invariável.

Chama-se precessão planetária -  $\chi$  - ao deslocamento / do equinócio  $\chi = \gamma_2$  devido ao deslocamento secular da eclíptica.

Precessão geral em longitude é a diferença  $\lambda = \gamma_2 N - \gamma_1 N$

Precessão geral em ascensão reta é a diferença

$$\mu = \gamma_2 M - \gamma_1 M$$

Precessão em latitude é o ângulo k da eclíptica móvel com a eclíptica fixa.

Precessão em declinação é o ângulo j dos dois equadores.

Para a determinação da posição dos corpos celestes em relação aos planos móveis e aos planos fixos, é preciso conhecer o valor dos arcos  $\rho = \gamma_1 M$  e  $\phi = \gamma_1 N$  no instante t, assim como, a obliquidade média,  $\epsilon_1$ .

Para empreender o cálculo da precessão, é necessário determinar os valores numéricos das diversas quantidades enumeradas. Adota-se como unidade de tempo, o ano trópico; como época inicial, 1900,0 ; tem-se, então, Danjon (ob.cit.).

$$\begin{aligned}
\rho &= 90^{\circ} - 23,043''t \\
\phi &= 173^{\circ} 57' 3'' - 8,694''t \\
\psi &= 50,3708''t - 0,000107''t^2 \\
\chi &= 0,1247''t - 0,000238''t^2 \\
\lambda &= 50,2564''t + 0,000 111''t^2 \\
\mu &= 46,0851''t + 0,000 140''t^2 \\
\kappa &= 0,4711''t - 0,000 003''t^2 \\
j &= 20,0469''t - 0,000 043''t^2 \\
\varepsilon &= 23^{\circ} 27' 8,26'' - 0,4684''t - 0,000 000 6''t^2 \\
\varepsilon_1 &= 23^{\circ} 27' 8,26'' + 0,000 006 1''t^2
\end{aligned} \tag{4.6}$$

A notação  $\varepsilon_1$  representa a obliquidade do equador móvel referida à eclíptica fixa. Seu valor é praticamente invariável, visto que sua expressão não contém termos de primeira ordem.

As constantes das expressões 4.6 das quais se solicita o valor numérico à observação são: a obliquidade inicial, e a constante da precessão, isto é o fator de  $t$  na expressão da precessão geral em longitude. Os valores numéricos dos outros coeficientes são fornecidos pela mecânica celeste.

Em outras palavras, caso se deseje adotar para a eclíptica e equador fixos não mais eclíptica e o equador de 1900,0, mas os planos médios para 1900,0+ $\tau$ , outros valores para os coeficientes numéricos das expressões 4.6 deverão ser empregados. As quantidades  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ , etc... são funções de duas variáveis  $\tau$  e  $t$ . Sendo a época para a qual se referem os elementos fixos e  $\tau + t$  época para a qual se exprimem os elementos móveis (1). Forneceremos a seguir expressões mais significativas de  $\mu$  e  $j$ . Os termos  $\tau$  e  $\tau + t$  são contados a partir de 1900,0 em anos trópicos. De acordo com Newcomb, vem:

$$\begin{aligned}
\mu &= mt + m_1 t^2 + m_2 t^3 \\
j &= nt + n_1 t^2 + n_2 t^3 \dots \dots \dots (4.7)
\end{aligned}$$

com

$$m = 46,08506'' + 0,27945'' \frac{\tau}{1000} + 0,000 12'' \left( \frac{\tau}{1000} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 0,000\ 139\ 73'' + 0,000\ 000\ 12'' \frac{\tau}{1000} \\
 m_2 &= 0,000\ 000\ 036\ 32'' \\
 &\dots\dots(4.8) \\
 n &= 20,046\ 85'' - 0,085\ 33'' \frac{\tau}{1000} + 0,00037'' \left(\frac{\tau}{1000}\right)^2 \\
 n_1 &= - 0,000\ 042\ 67'' - 0,000\ 000\ 37'' \frac{\tau}{1000} \\
 n_2 &= - 0,000\ 000\ 041\ 80''
 \end{aligned}$$

- (1) (Na pag.422 do livro de Danjon, (Ob.cit.) a Tabela XVI sumariza os valores das diversas precessões em função dessas duas variáveis, ver anexo 4).

Para terminar, as fórmulas (4.4) podem representar as derivadas das coordenadas equatoriais de uma estrela fixa com a condição de substituir as constantes  $m$  e  $n$  por funções lentamente variáveis com o tempo.

Nesse sentido, seja  $Oxyz$  a posição do sistema equatorial de referência para época  $\tau$  (Fig.4.3). Sua posição para época  $\tau + dt$  é obtida por uma rotação  $dj$ , no sentido retrógrado, em torno de  $Oy$ , seguida de uma rotação  $d\mu$ , de sentido retrógrado, em torno de  $Oz$ . As fórmulas de transformação de coordenadas são fornecidas por:

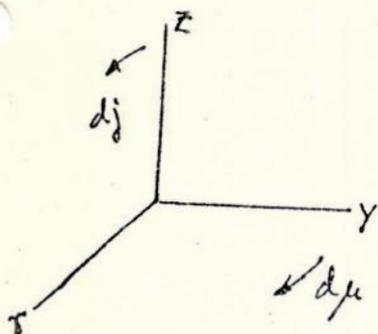


Fig. 4.3

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos dj + z \cos(90^\circ + dj) \\ x_1 &= x \cos dj - z \sin dj \\ y_1 &= y \\ z_1 &= z \cos dj + x \cos(90^\circ - dj) \\ z_1 &= z \cos dj + x \sin dj \\ x_1 &= x \cos dj + 0 \cdot y - z \sin dj \\ y_1 &= 0 \cdot x + y + 0 \cdot z \\ z_1 &= x \sin dj + 0 \cdot y + z \cos dj \end{aligned}$$

ou com a forma matricial, correspondentes as figuras 4.3.a e 4.3.b, vem:

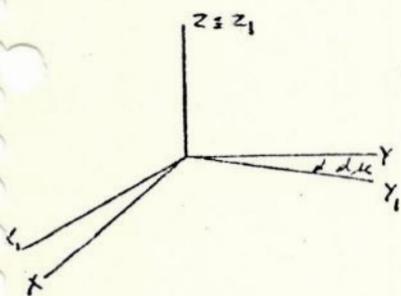


Fig. 4.3a

$$(a) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos dj & 0 & -\sin dj \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin dj & 0 & \cos dj \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

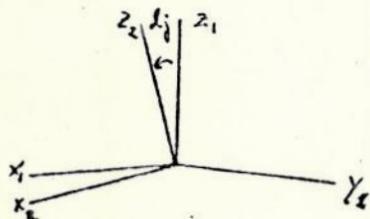


Fig. 4.3b

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos d\mu + y_1 \cos(90^\circ + d\mu) \\ y_2 &= x_1 \cos(90^\circ - d\mu) + y_1 \cos d\mu \\ z_2 &= z_1 \\ x_2 &= x_1 \cos d\mu - y_1 \sin d\mu + 0 \cdot z_1 \\ y_2 &= x_1 \sin d\mu + y_1 \cos d\mu + 0 \cdot z_1 \\ z_2 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + z_1 \end{aligned}$$

ou ainda

$$(b) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos d\mu & -\text{send}\mu & 0 \\ \text{send}\mu & \cos d\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

De (b) em (a) vem:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos dj & 0 & -\text{send}j \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{send}j & 0 & \cos dj \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos d\mu & -\text{send}\mu & 0 \\ \text{send}\mu & \cos d\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Efetuando o produto matricial vem:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos dj \cos d\mu & -\cos dj \text{send}\mu & -\text{send}j \\ \text{send}\mu & \cos d\mu & 0 \\ \text{send}j \cos d\mu & -\text{send}j \text{send}\mu & \cos dj \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Como as rotações são infinitesimais tem-se que:

$$\cos d\mu \approx 1 \quad \cos dj \approx 1 \quad \text{send}\mu \approx d\mu \quad \text{send}j \approx dj$$

$$\text{send}j \text{send}\mu \approx dj d\mu \approx 0$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d\mu & -dj \\ d\mu & 1 & 0 \\ dj & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d\mu & -dj \\ d\mu & 0 & 0 \\ dj & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d\mu & -dj \\ d\mu & 0 & 0 \\ dj & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

logo temos:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d\mu & -dj \\ d\mu & 0 & 0 \\ dj & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} dx &= -y d\mu - z dj \\ dy &= x d\mu \\ dz &= x dj \end{aligned} \quad (4.9)$$

Voltando, agora, às relações (2), porém utilizando as notações do presente parágrafo:

$$\frac{d\mu}{dt} \Big|_{t=0} = m(\tau) \quad \text{e} \quad \frac{dj}{dt} \Big|_{t=0} = n(\tau)$$

reencontra-se as fórmulas (4.4) do parágrafo anterior

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \delta \quad (4.10)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = n \operatorname{cos} \alpha$$

Sendo, agora, as quantidades  $m$  e  $n$  funções de  $\tau$

As fórmulas (4.9) resolvem ainda o seguinte problema: sendo  $x, y, z$ , as coordenadas de um ponto, referidas ao sistema equatorial da época, calcular as coordenadas  $x', y', z'$  do mesmo ponto para a época  $\tau + dt$ . Tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -my - nz \\ \frac{dy}{dt} &= mx \\ \frac{dz}{dt} &= nx \end{aligned} \quad (4.11)$$

Se o intervalo de tempo que corresponde a precessão for pequeno, pode-se escrever ( $m$  e  $n$  para a época  $\tau$ ), por simples integração:

$$\begin{aligned} x' &= x - (my + nz) t \\ y' &= y + mx t \\ z' &= z + nx t \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde em radianos,  $m$  e  $n$  são expressos por

$$m = 0,000\ 223\ 427 + 0,000\ 001\ 35 \frac{\tau}{1000}$$

$$n = 0,000\ 097 - 0,000\ 000\ 41 \frac{\tau}{1000}$$

As fórmulas (4.12) servem, particularmente, para referir a um equinócio qualquer as coordenadas retilíneas  $X, Y, Z$  do Sol publicadas nas efemérides astronômicas.

Observação:

O efeito da precessão geral nas coordenadas celestes, de acordo com a Fig. 4.4, Newcomb (1895), é dado por:

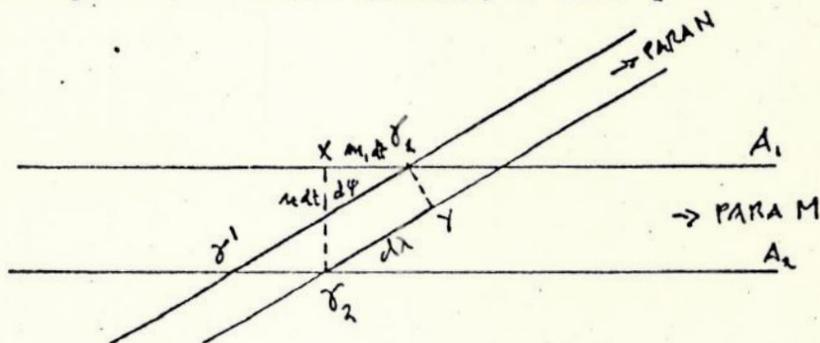


Fig. 4.4

$A_1$  e  $E_1$  são respectivamente o equador e a eclíptica na época inicial  $\tau$  e  $A_2$  e  $E_2$ , na época seguinte,  $\tau + dt$ ;

$\gamma_1 \gamma'_1 = d\psi$ , a precessão luni-solar;

$\gamma_1 \gamma'_1 - \gamma'_1 \gamma_2 \cos \epsilon_1 = d\lambda$ , a precessão geral em longitude

$\gamma_1 \gamma'_1 = d\delta$ , a precessão em latitude

$\gamma_1 \gamma'_1 = d\chi$  a precessão planetária no equador

Supondo-se os deslocamentos em um curto intervalo de tempo  $dt$ , como infinitesimais.

A precessão geral em ascensão reta é:

$$\chi \gamma_1 = m_1 dt = d\psi \cos \epsilon_1 - d\chi$$

A precessão em declinação:

$$\chi \gamma_2 = n dt = d\psi \sin \epsilon_1$$

Portanto o efeito da precessão geral nas coordenadas equatoriais celestes durante o intervalo de tempo  $dt$  é:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (m_1 + n \sin \epsilon_1 \operatorname{tg} \delta_1) dt$$

$$\delta_2 - \delta_1 = n \cos \epsilon_1 dt$$

(4.13)

Considerando o intervalo de tempo, por exemplo, igual a um ano, as fórmulas (4.12) tornam-se:

$$\begin{aligned}\alpha_2 - \alpha_1 &= m_1 + n \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{tg} \delta_1 \\ \delta_2 - \delta_1 &= n \operatorname{cos} \alpha_1\end{aligned}\tag{4.14}$$

Se  $l$  e  $b$  são as coordenadas eclípticas de uma estrela qualquer, o efeito da precessão geral em suas coordenadas, de acordo com a Fig. 4.3, serão, em longitude e latitude celestes:

$$dl = d\lambda = d\psi - d\chi \operatorname{cos} \epsilon_1\tag{4.15}$$

$$db = \gamma_1 Y = \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sen} \epsilon_1$$

Quando  $d\psi = 0$  e  $d\lambda = d\psi$  recai-se no caso da precessão lunisolar, supondo que a eclíptica seja fixa..

Constantes da precessão para 1980

Para a exata aplicação das fórmulas até agora apresentadas é necessário empregar os valores atualizados e compatibilizados dos coeficientes relativos à precessão. Nesse sentido são transcritos, sob forma de tabela (tabela 4.1), os valores que se acham na pag. 9 da American Ephemeris and Nautical Almanac para o ano de 1980.

Tabela 4.1

Constantes da precessão

---

obliquidade média	$23^{\circ} 26' 30,782'' = 23,441884^{\circ}$
precessão geral anual	$50,2742'' = 0,0139650^{\circ}$
precessão anual em A.R. (m)	$3,07383^{\text{S}} = 46,1074''$
precessão anual em Dec. (n)	$1,33600^{\text{S}} = 20,041''$
longitude do eixo da eclíptica	$\Pi = \frac{d\phi}{dt} = 174^{\circ} 40,9' = 174,681^{\circ}$
rotação anual da eclíptica	$\pi = \frac{dk}{dt} = 0,4705 = 0,000 130 7^{\circ}$
ângulos definidos a	$r = -11' 31,58'' = 46,106^{\text{S}}$
precessão total a partir da	$s = -11' 31,51'' = 46,101^{\text{S}}$
época para o equinócio de	$j = -10' 01,24'' = -40,082^{\text{S}}$
1950.0	

---

V. POSIÇÃO MÉDIA

## CAPITULO V

### POSIÇÃO MÉDIA

#### Coordenadas médias: método aproximado

Quando a estrela para a qual se quer calcular a preces são entre as épocas  $\tau$  e  $\tau+t$  não está muito próxima do pólo e quando o intervalo de tempo não for considerável, pode-se utilizar fórmulas aproximadas, sob a forma de desenvolvimentos finitos, em função de  $t$ , colocando:

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha_{\tau} &= a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \\ \delta - \delta_{\tau} &= d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + \dots\end{aligned}\tag{5.1}$$

Na prática, são conservados, de acordo com cada caso, 1, 2 ou 3 termos. Os coeficientes  $a_1$  e  $d_1$ ,  $a_2$  e  $d_2$ , etc... dependem das coordenadas  $\alpha_{\tau}$  e  $\delta_{\tau}$  para a época  $\tau$ , assim como do próprio tempo.

Pelas expressões obtidas no 1º parágrafo do cap, IV, fórmulas (4.4) que fornecem imediatamente as derivadas primeiras das coordenadas são:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d\mu}{dt} + \frac{dj}{dt} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\delta \\ \frac{d\delta}{dt} &= \frac{dj}{dt} \operatorname{cos}\alpha\end{aligned}\tag{5.2}$$

$d\mu$  e  $dj$  sendo as rotações do triedro de coordenadas ao redor de OZ e OY. Tem-se portanto:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \frac{d^2\mu}{dt^2} + \frac{d^2j}{dt^2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\delta + \frac{1}{2} \left(\frac{dj}{dt}\right)^2 \operatorname{sen}2\alpha (1+2\operatorname{tg}^2\delta) + \left(\frac{d\mu}{dt}\right) \left(\frac{dj}{dt}\right) \operatorname{cos}\alpha \operatorname{tg}\delta \\ \frac{d^2\delta}{dt^2} &= \frac{d^2j}{dt^2} \operatorname{cos}\alpha - \frac{dj}{dt} \left(\frac{d\mu}{dt} + \frac{dj}{dt} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\delta\right) \operatorname{sen}\alpha\end{aligned}\tag{5.3}$$

Obter-se-ã sem esforço as derivadas das ordens imediatamente superiores.

Por outro lado, as rotações  $\mu$  e  $j$  foram apresentadas sob a forma

$$\begin{aligned}\mu &= mt + m_1 t^2 + m_2 t^3 \\ j &= nt + n_1 t + n_2 t^3\end{aligned}\tag{5.4}$$

os coeficientes  $m, n, \text{etc.}$ , sendo funções de  $\tau$  cujas expressões são dadas em (4.8).

Calculando agora os coeficientes das fórmulas (5.1):

$$a_1 = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = m + n \operatorname{sen} \alpha_{\tau} \operatorname{tg} \delta_{\tau}$$

$$d_1 = \left(\frac{d\delta}{dt}\right) n \operatorname{cos} \alpha_{\tau}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) = (m_1 + n_1 \operatorname{sen} \alpha_{\tau} \operatorname{tg} \delta_{\tau}) + \frac{1}{4} n^2 \operatorname{sen}^2 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \delta_{\tau}) + \frac{1}{2} m n \operatorname{cos} \alpha_{\tau} \operatorname{tg} \delta_{\tau}$$

$$d_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right) = n_1 \operatorname{cos} \alpha_{\tau} - \frac{1}{2} n \operatorname{sen} \alpha_{\tau} (m + n \operatorname{sen} \alpha_{\tau} \operatorname{tg} \delta_{\tau})$$

etc...

Essas quantidades que dependem de 3 parâmetros  $\alpha, \tau, \delta$  não podem ser comodamente tabuladas, senão para uma época determinada. É contudo fácil levar em conta as variações de  $m$  e  $n$  nos primeiros coeficientes  $a_1$  e  $d_1$ . As tabelas XVII à XXIII de Danjon (ob. cit.), transcritas no anexo 4 fornecem, para o equinócio / 1950,0 as quantidades acima mencionadas, bem como os coeficientes  $a_3$  e  $d_3$ .

As tabelas referidas são extraídas de J. Peters, completadas por duas tabelas auxiliares (XVII), dando uma, os valores de  $m$  e  $n$  para uma época qualquer,  $\tau$ , compreendidas entre 1850 e 2050 e a outra, o fator pelo qual se deve multiplicar  $n \operatorname{sen} \alpha_{\tau}$  e  $n \operatorname{cos} \alpha_{\tau}$ , para obter os valores correspondentes àquela mesma época  $\tau$ . Dever-se-ã, portanto, multiplicar por esse fator os dados for

precisos pelas tabelas XVII e XIX. A variação dos termos de 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> ordem não atingem, para nenhum deles, a um milésimo de seus valores por século. Com esse raciocínio, as tabelas, como se apresentam, podem ser utilizadas, de 1850 à 2050.

Os catálogos de estrelas fornecem, em geral, além das coordenadas médias de cada estrela para a época, suas derivadas primeiras e segundas; as derivadas primeira são dadas na coluna intitulada: precessão; devem ser multiplicadas pelo tempo  $t$  expresso em anos. Quanto às derivadas segundas, isto é, seu produto por 100, figuram habitualmente nas colunas intituladas variação secular. A unidade de tempo é o ano. Devem ser multiplicadas por  $t^2/200$ . Nos anexos 6 e 1 é fornecida uma cópia, a título de exemplo, do catálogo SAO e do catálogo de Yale. Contudo, o uso tende a se modificar: os catálogos mais recentes, para as derivadas segundas, dão o produto por 50 e não por 100. O fator correspondente é, então,  $t^2/100$ . Quando a declinação da estrela ultrapassar  $75^\circ$ , é conveniente introduzir, no cálculo, o terceiro termo. Em geral, seu valor, tirado do catálogo, deve ser multiplicado por  $(\frac{t}{100})^3$ .

Quanto a variação das derivadas primeiras em função do tempo puder ser suposta linear, com uma boa aproximação (o que acontece para valores moderados de  $t$  e para distâncias ao pólo suficientemente grandes) se obtém um valor aproximado de suas integrais, multiplicado pelo intervalo  $t$  os valores dessas derivadas para a época intermediária  $t + \frac{1}{2}t$ . Sendo  $m'$ ,  $n'$ ,  $\alpha'$  e  $\delta'$  os valores de  $m$ ,  $n$ ,  $\alpha$  e  $\delta$  para esta época, pode ser escrito:

$$\alpha - \alpha_{\tau} = \frac{d}{dt} dt = (m' + n' \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{tg} \delta') t$$

$$\delta - \delta_{\tau} = \frac{d}{dt} dt = n' \operatorname{cos} \alpha' t$$

(5.5)

Pode-se tirar  $m'$  e  $n'$  de uma tabela especial publicada para cada ano, por exemplo, no The American Ephemeris, pag. 9, 1980, que consta no anexo 2 ou qualquer outra tabela de precessão. As coordenadas  $\alpha'$  e  $\delta'$  para época intermediária, podem ser obtidas, com a aproximação adequada, por meio de:

$$\alpha' = \alpha_{\tau} + \frac{t}{2} (m' + n' \operatorname{sen} \alpha_{\tau} \operatorname{tg} \delta_{\tau})$$

$$\delta' = \delta_{\tau} + \frac{tn'}{2} \operatorname{cos} \alpha_{\tau}$$
(5.6)

Nos casos de estrelas muito próximas do pólo e para intervalos de tempo consideráveis, é preciso utilizar fórmulas rigorosas.

### Exemplos

1º - Calcular as coordenadas médias da estrela  $\alpha$  Cygni para 1980,0 sabendo-se que as suas coordenadas para 1950,0 são:

$$\alpha_{\tau} = 20^{\text{h}} 39^{\text{m}} 43,539^{\text{s}}$$

$$\delta_{\tau} = 45^{\circ} 06' 03,12''$$

A estrela é bem distante do pólo, o intervalo de tempo bem pequeno para que o método aproximado se aplique com vantagem. Os valores,  $m'$  e  $n'$ , para a época intermediária são fornecidas pela tabela XVII, anexo 4, ou pelo "The American Ephemeris and Nautical Almanac" ("The Astronomical Almanac", a partir de 1981).

Para a época intermediária (1965) tem-se:

$$m' = 3,07355^{\text{s}} = 46.10325''$$

$$n' = 1,33609^{\text{s}} = 20,04135''$$

Por outro lado,

$$\operatorname{tg} \delta_{\tau} = 1,003527124$$

$$\operatorname{sen} \alpha_{\tau} = -0,766813361$$

$$\operatorname{cos} \alpha_{\tau} = 0,641870135$$

e pela fórmula (5.6)

$$\alpha' = 309,9314125^{\circ} + 0,128063805^{\circ} = 310,0594763^{\circ} = 20^{\text{h}} 40^{\text{m}} 14,2743119^{\text{s}}$$

$$\delta' = 45,10086667^{\circ} + 0,053599633^{\circ} = 45,15446630^{\circ}$$

logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta' &= 1,005406480 \\ \operatorname{sen} \alpha' &= -0,765379317 \\ \operatorname{cos} \alpha' &= 0,643579317 \end{aligned}$$

O movimento próprio anual é:

$$\mu_{\alpha} = 0,0001^{\text{S}}$$

$$\mu_{\delta} = 0,005''$$

É preciso aplicar as correções correspondentes para 30 anos:

$$\alpha = 309,9314125^{\circ} + 0,255675700^{\circ} + 0,000125^{\circ} = 310,1870982^{\circ} = 20^{\text{h}}40^{\text{m}}44,9041678^{\text{S}}$$

$$\delta = 45,10086667^{\circ} + 0,10748501^{\circ} + 0,00004167^{\circ} = 45,20839417^{\circ} = 45^{\circ}12'30,21604092''$$

ou seja

$$\begin{aligned} \alpha &= 20^{\text{h}}40^{\text{m}}44,904^{\text{S}} \\ 1980,0 \\ \delta &= 45^{\circ}12'30,22'' \end{aligned}$$

Pelo "Aparent Places of Fundamental Stars" para o ano de 1980,0, ter-se-ia:

$$\begin{aligned} \alpha &= 20^{\text{h}}40^{\text{m}}40,812^{\text{S}} \\ 1980,0 \\ \delta &= 45^{\circ}11'64,35'' \end{aligned}$$

Obs:  $\mu_{\alpha}$  e  $\mu_{\delta}$  bem como  $\alpha_{1950}$  e  $\delta_{1950}$  para  $\alpha$  Cygni são obtidos do S.A.O. Star Catalogue (1966).

2º - Calcular as coordenadas médias da estrela  $\mu$  Ursae Majoris para 1980,0. Aham-se suas coordenadas médias e as componentes do movimento próprio para 1950,0 no S.A.O., e com os coeficientes das fórmulas (5.1), fornecidos pelas tabelas, que constam no anexo 4:

$$\begin{aligned} \alpha_{\tau} &= 10^{\text{h}}19^{\text{m}}21,469^{\text{S}} & \delta_{\tau} &= 41^{\circ}45'6,25'' \\ 100a_1 &= 358,03 & 100d_1 &= -1841,05'' \\ (100)^2 a_2 &= 1,77^{\text{S}} & (100)^2 d_2 &= 6,9'' \\ (100)^3 a_3 &= 0,02^2 & (100)^3 d_3 &= 0,2'' \\ \mu_{\alpha} &= -0,0074^{\text{S}} & \mu_{\delta} &= 0,030'' \end{aligned}$$

As componentes  $\mu_\alpha$  e  $\mu_\delta$  do movimento próprio devem ser adicionadas aos fatores  $a_1$  e  $d_1$ . Tem-se portanto, exprimindo-se  $t$  em anos:

$$\alpha - \alpha_\tau = 3,5729^S t + 1,77^S \left(\frac{t}{100}\right)^2 + 0,02^S \left(\frac{t}{100}\right)^3$$

$$\delta - \delta_\tau = -18,3805'' + 6,9'' \left(\frac{t}{100}\right)^2 + 0,2'' \left(\frac{t}{100}\right)^3$$

seja, para  $t=30$  anos,

$$\alpha - \alpha_\tau = 107,1870^S + 0,1593^S + 0,00054^S = 107,346840^S$$

$$\delta - \delta_\tau = -551,415'' + 0,621'' + 0,0054'' = -550,7886''$$

$$\alpha = 10^h 21^m 08,816^S$$

1980,0

$$\delta = 41^\circ 35' 55,46''$$

Obs: os coeficientes das fórmulas (5.1), também são dados no FK4, anexo 3, como exemplo.

#### Coordenadas médias: método rigoroso

Quando o emprego de fórmulas diferenciais ou das fórmulas aproximadas não é legítima, isto é, se a estrela é vizinha do pólo ou se o intervalo de tempo é considerável, as fórmulas rigorosas desenvolvidas abaixo resolvem completamente o problema.

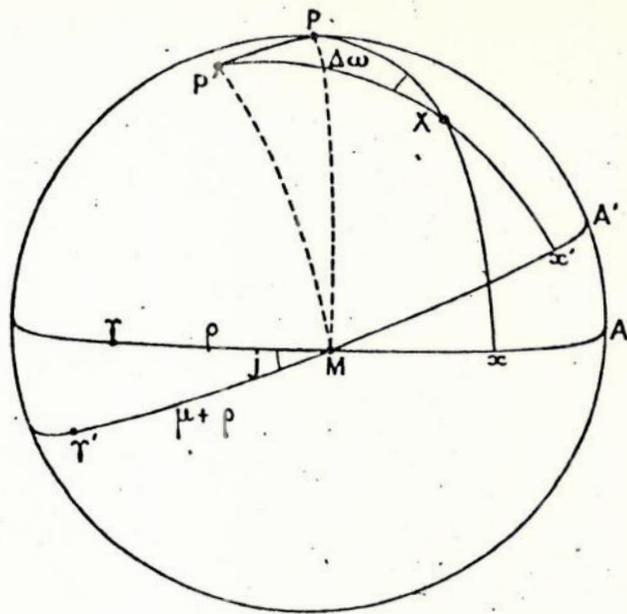
Sejam  $A$  e  $A'$  (Fig.5.1) os equadores médios para a época  $\tau$  e  $\tau + t$ ,  $P$  e  $P'$  seus pólos, e os equinócios médios correspondentes. Possuimos além disso as relações do 2º parágrafo no capítulo IV.

$$\gamma_M = \rho \quad \cdot \quad M\gamma' - M\gamma = \mu \quad \gamma \widehat{M} \gamma' = j$$

e em consequência: fazendo

$$\rho = 90^\circ - r \quad \mu + \rho = 90^\circ + s$$

$r$  e  $s$  sendo funções do tempo, que se anulam para  $t = 0$ .



(Fig. 5.1)

seja uma estrela  $X$ ,  $\alpha_\tau$  e  $\delta_\tau$  suas coordenadas médias para o tempo  $\tau$  e  $\alpha$  e  $\delta$  suas coordenadas no tempo  $\tau + t$ .

No triângulo  $PP'X$ , Fig.8.1

$$PX = T = 90^\circ - \delta_\tau$$

$$XPP' = 90^\circ + \alpha_\tau - \rho = \alpha_\tau + r$$

$$P'X = T' = 90^\circ - \delta$$

$$XP'P = 90^\circ - \alpha + (\mu + \rho) = 180^\circ - \alpha + s$$

$$PP' = j$$

Escrevendo:  $A = \alpha_\tau + r$        $A' = \alpha - s$ ,

tem-se:

$$\text{sen } T' \cos A' = -\cos T \text{sen } j + \text{sen } T \cos j \cos A$$

$$\text{sen } T' \text{sen } A' = \text{sen } T \text{sen } A$$

(5.7)

$$\cos T' = \cos T \cos j + \text{sen } T \text{sen } j \cos A$$

Quando a estrela é vizinha do pólo, a 3ª dessas equações não oferece interesse prático. Num exemplo será indicado como se pode resolver as duas primeiras levando em conta que os valores de  $j$ ,  $T$  e  $T'$  são bastante pequenos.

O triângulo pode ser resolvido com ajuda das analogias de Neper e se tem (caso geral):

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A' + \Delta W) &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (T + j)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (T - j)} \\
 \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A' - \Delta W) &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} (T + j)}{\operatorname{cos} \frac{1}{2} (T - j)} \\
 \operatorname{tg} \frac{T'}{2} &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} (T \pm j) \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} (A' - \Delta W)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A' + \Delta W)}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Obs: no sistema (5.8), quando no primeiro membro da última fórmula adotar-se o sinal menos, corresponde tomar no segundo membro o cosseno, e quando for positivo, no segundo membro se usa o seno.

Multiplicando as duas primeiras equações do sistema 5.7 por  $-\operatorname{sen} A$  e  $+\operatorname{cos} A$ , respectivamente, e em seguida por  $\operatorname{cos} A$  e  $\operatorname{sen} A$ , vem:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{cos} \delta \operatorname{sen} (A' - A) &= \operatorname{sen} \delta_{\tau} \operatorname{sen} j \operatorname{sen} A - \operatorname{cos} \delta_{\tau} \operatorname{cos} A \operatorname{sen} A (1 - \operatorname{cos} j) \\
 &= \operatorname{cos} \delta_{\tau} (1 - \operatorname{cos} A \operatorname{sen} j (\operatorname{tg} \delta_{\tau} + \operatorname{cos} A \operatorname{tg} j))
 \end{aligned}$$

$$\text{donde:} \quad \operatorname{tg} (A' - A) = \frac{\operatorname{sen} j \operatorname{sen} A (\operatorname{tg} \delta_{\tau} + \operatorname{tg} (j/2) \operatorname{cos} A)}{1 - \operatorname{cos} A \operatorname{sen} j (\operatorname{tg} \delta_{\tau} + \operatorname{tg} (j/2) \operatorname{cos} A)} \tag{5.9}$$

$$\alpha - \alpha' = A' - A + s + r$$

A precessão em declinação é dada diretamente pela analogia de Neper:

$$\operatorname{tg} \frac{T - T'}{2} = \operatorname{tg} \frac{j}{2} \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{180^{\circ} - A' - A}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{180^{\circ} - A' + A}{2} \right)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{((90^{\circ} - \delta_{\tau}) - (90^{\circ} - \delta))}{2} = \operatorname{tg} \frac{j}{2} \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} (A' + A)}{\operatorname{cos} \frac{1}{2} (A' - A)}$$

ou:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta - \delta_{\tau}) = \operatorname{tg} \frac{j}{2} \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} (A' + A)}{\operatorname{cos} \frac{1}{2} (A' - A)}$$

Os coeficientes numéricos necessários para o cálculo, são transcritos no anexo 4.

$$\begin{aligned}
 r &= (23042,53'' + 139,75''\tau + 0,06''\tau^2)t + (30,26'' - 0,27''\tau)t^2 + 18,00''t^3 \\
 s &= r + (79,27'' + 0,66''\tau)t^2 + 0,32''t^3 \\
 j &= (20046,85'' - 85,33''\tau - 0,37''\tau^2)t + (-42,67'' - 0,37''\tau)t^2 - 41,80''t^3
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

O tempo  $\tau$  é contado a partir de 1900,0 em milhares de anos trópicos; a mesma unidade é empregada para  $t$ .

Exemplo:

Calcular as coordenadas médias da estrela 10G.Octantis, para 1980,0 sabendo que as suas coordenadas em 1950,0 eram:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\tau} &= 10^{\text{h}}34^{\text{m}}08,536^{\text{s}} & \delta_{\tau} &= -85^{\circ}49'55,73'' \\
 \tau &= 0,05 & t &= 0,03
 \end{aligned}$$

$$r = 0,19208700^{\circ}$$

$$s = 0,19210683^{\circ}$$

$$j = 0,16701747^{\circ}$$

$$A = 158,7276537^{\circ}$$

$$T = 175,8321472^{\circ}$$

Utilizando as fórmulas 5.7, é inútil calcular  $\cos T'$  que se acharia muito vizinho da unidade. Com as duas primeiras relações obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \cos A &= 0,93186644 & \cos j &= 0,99999575 & \cos T &= -0,99735541 \\
 \sen A &= 0,36280151 & \sen j &= 0,00291500 & \sen T &= 0,07267862 \\
 \sen T' \sen A' &= 0,02636791 \\
 \sen T' \cos A' &= -0,06481919 \\
 \text{tg } A' &= -0,40679179; & A' &= 157,8639120^{\circ} \\
 & & s &= 0,19210683^{\circ}
 \end{aligned}$$

$$\alpha = 158,0560189^{\circ} = 10^{\text{h}}32^{\text{m}}13,445^{\text{s}}$$

$$\sen T' = 0,0699771; \quad \delta = 90^{\circ} - 175,9873285^{\circ}$$

$$\begin{aligned}
 1980,0 \quad \alpha &= 10^{\text{h}}32^{\text{m}}13,445^{\text{s}} \\
 \delta &= -85^{\circ}59'14,38''
 \end{aligned}$$

Este método é o que contém o menor número de operações, porém requer que se proceda decisão sobre o quadrante adequado.

Resolvendo o mesmo problema com ajuda das fórmulas 5.8 tem-se:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 5,32485378$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 5,32485378$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} (T + j) = 0,9993906$$

$$\operatorname{cos} \frac{1}{2} (T + j) = 0,0349068$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} (T - j) = 0,9992846$$

$$\operatorname{cos} \frac{1}{2} (T - j) = 0,0378199$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A' + \Delta W) = 5,3254226$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A' - \Delta W) = 4,9147104$$

$$A' = 157,8639121^{\circ}$$

$$s = 0,1921068^{\circ}$$

$$\alpha = 158,0560189^{\circ} = 10^{\text{h}} 32^{\text{m}} 13,445300^{\text{S}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (T - j) = 26,4222193$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (T + j) = 28,6302696$$

$$\operatorname{cos} \frac{1}{2} (A' - \Delta W) = 0,1993853$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A' - \Delta W) = 0,9799212$$

$$\operatorname{cos} \frac{1}{2} (A' + \Delta W) = 0,1845530$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A' + \Delta W) = 0,9828226$$

$$\operatorname{tg} \frac{T'}{2} = 28,5457497$$

$$\operatorname{tg} \frac{T'}{2} = 28,5457498$$

$$\frac{T'}{2} = 87,9936642^{\circ}$$

$$\frac{T'}{2} = 87,9936642^{\circ}$$

$$T' = 175,9873284^{\circ}$$

$$T' = 175^{\circ} 59' 14,3824056''$$

$$\delta = -85^{\circ} 59' 14,3824056''$$

$$1980,0 \quad \alpha = 10^{\text{h}} 32^{\text{m}} 13,445300^{\text{S}}$$

$$\delta = -85^{\circ} 59' 14,3824056''$$

com a correção de movimento próprio anual, vem:

$$\mu_{\alpha} = -0,0016^{\text{S}}$$

$$\mu_{\delta} = 0,004''$$

Para o intervalo de 30 anos, ter-se-ã, finalmente:

$$\alpha = 10^{\text{h}}32^{\text{m}}13,445300^{\text{S}} - 0,0480^{\text{S}}$$

$$\delta = -85^{\circ}59'14,3824056'' + 0,120''$$

$$1980,0 \quad \alpha = 10^{\text{h}}32^{\text{m}}13,3973^{\text{S}}$$

$$\delta = -85^{\circ}59'14,502''$$

Este método é o mais seguro, pois a tangente é dada em função do arco metade, sendo mais imediata a decisão do quadrante. Obs.: os dados para ascensão reta, declinação e componentes do movimento próprio, para 1950,0, foram extraídos do SAO Star Catalogue (1966).

Os resultados obtidos podem ser facilmente comparados se agrupados conforme a tabela 5.1.

Tabela 5.1

Comparação dos Resultados (\*)  
 ε Ursae Minoris  
 1950,0/1980,0

Coordenadas	Método aproximado	Tabelas	Método rigoroso	Apparent Places of Fundamental Stars 1980
$\alpha$	$16^{\text{h}}48^{\text{m}}25,735^{\text{S}}$	$16^{\text{h}}47^{\text{m}}57,124^{\text{S}}$	$16^{\text{h}}47^{\text{m}}58,049^{\text{S}}$	$16^{\text{h}}47^{\text{m}}58,06^{\text{S}}$
$\delta$	$82^{\circ}04'19,53''$	$82^{\circ}04'25,55''$	$82^{\circ}04'19,54''$	$82^{\circ}04'19,56''$

(\*) Para 1950,0 foram usados os valores do SAO Star Catalogue (1966).

Observação final.- O erro residual ( $\alpha, e\delta$ ), para cada caso, é obtido efetuando-se a diferença dos resultados / obtidos com os diversos métodos pelo o que é fornecido do Apparent Places of Fundamental / Stars, 1980. O método rigoroso é o que fornece o menor resíduo.

VI. PRECESSÃO DIFERENCIAL

## CAPÍTULO VI

### PRECESSÃO DIFERENCIAL

#### Introdução

O deslocamento do plano fundamental e de sua origem ocasiona uma variação nas coordenadas diferenciais de um ponto / da superfície da esfera celeste em relação a outro. Essa variação lenta com o tempo é denominada precessão diferencial.

#### Coordenadas Polares

Sejam A e B (Fig. 6.1.a) dois pontos próximos da superfície da esfera celeste, tais que o quadrado do arco AB seja desprezível. As coordenadas do ponto A sendo  $\psi$  e  $\theta$ , é natural / escrever as coordenadas do ponto B sob a forma  
Os ângulos  $\Delta\psi$  e  $\Delta\theta$  são as coordenadas diferenciais de B em relação a A. O ângulo  $\Delta\theta$  é pequeno em todos os casos. O ângulo  $\Delta\psi$  também o é, com a condição todavia que o ponto A não seja vizinho do pólo das coordenadas.

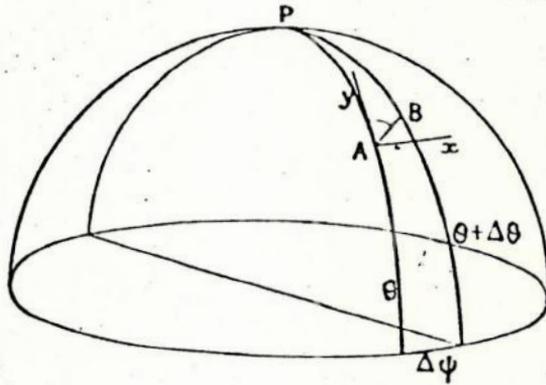


Fig.6.1.a

Pode se expressar de outra maneira a posição de B em relação a A.

Fazendo:  $r = AB,$   $\omega = P\hat{A}B.$

O ângulo  $\omega$  é chamado de ângulo de posição de B em relação a A. Contar-se-á de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ , no sentido trigonométrico para um observador situado no centro da esfera celeste, a direção da origem sendo aquela do pólo positivo de coordenadas, Fig.6.1.b:

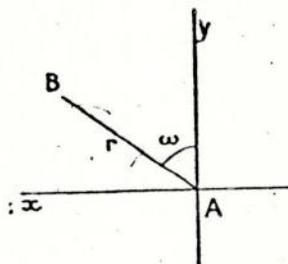


Fig. 6.1.b

Suponhamos enfim que se tenha traçado dois eixos de coordenadas retangulares pelo ponto A, no plano tangente à esfera nesse ponto (Fig.6.1a). O semi-eixo Ax é paralelo ao plano fundamental e dirigido no sentido positivo deste. O semi-eixo Ay é tangente ao círculo máximo AP, e dirigido para o pólo positivo. Se o sistema de coordenadas esféricas é dextrorso, o que está sendo suposto, os eixos retangulares, vistos do centro da esfera, são orientados como indica a figura 6.1b.

Sendo suposto desprezível o quadrado de  $r$ , podem ser escritas as seguintes relações entre as coordenadas retilíneas  $(x,y)$  e as polares  $(r,\omega)$  de B:

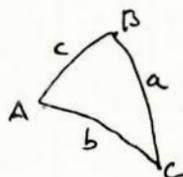
$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \omega \\ y &= r \operatorname{cos} \omega \end{aligned} \quad (6.1)$$

Nessa ordem de idéia, as coordenadas  $x,y$  e  $r,\omega$  podem ser imaginadas como coordenadas diferenciais planas de B em relação a A.

As duas últimas são particularmente interessantes, / por serem acessíveis à mensurações objetivas (micrômetros). As duas outras podem ser medidas nos coordenatôgrafos, por meio de placas fotográficas.

Vamos mostrar como se pode obter as coordenadas diferenciais esféricas,  $\Delta\psi$  e  $\Delta\theta$ , a partir das diferenciais planas. O problema que agora focalizamos é o do relacionamento de um astro móvel, planeta ou cometa, de uma estrela não catalogada a uma outra de coordenadas conhecidas, ou ainda, do posicionamento de uma estrela dupla.

Estabeleceremos primeiro a relação geral que dá a diferença de dois lados de um triângulo esférico qualquer. De acordo com as formulas que relacionam 3 ângulos 2 lados e 2 ângulos, ter-se-á, Fig. 6.2



$$\begin{aligned} \cos b \operatorname{sen} A &= \cos B \operatorname{sen} C + \operatorname{sen} B \cos C \cos a \\ \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A &= \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \end{aligned} \quad (6.2)$$

Multipliquemos a primeira relação por  $\operatorname{sen} a$ , a segunda por  $-\cos a$ , adicionando-as:

$$\operatorname{sen} a \cos b \operatorname{sen} A - \cos a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \cos B \operatorname{sen} C + \operatorname{sen} a \cos a \operatorname{sen} B \cos C - \operatorname{sen} a \cos a \operatorname{sen} B.$$

Grupando vem:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos B \operatorname{sen} C - \operatorname{sen} a \cos a \operatorname{sen} B (1 - \cos C),$$

ou dividindo m.a.m. por  $\operatorname{sen} A$  e grupando a parte comum do 2º membro:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} (\cos B \operatorname{sen} C - \cos a \operatorname{sen} B (1 - \cos C))$$

pela 2ª. relação de (6.2) a lei dos senos (como é conhecida) tem-se:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

logo:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C} (\operatorname{sen} C \cos B - \cos a \operatorname{sen} B (1 - \cos C))$$

então vem:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} c \cos B - \operatorname{sen} c \cos a \operatorname{sen} B \frac{1 - \cos C}{\operatorname{sen} C}$$

$$\text{no 2º termo do 2º membro tem-se: } \frac{1 - \cos C}{\operatorname{sen} C} = \frac{\frac{\operatorname{sen} C}{2}}{\operatorname{sen} C \frac{\cos C}{2}} = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

logo:

$$\text{sen}(a-b) = \text{senc} \cos B - \text{senc} \cos a \text{sen} B \text{tg} \frac{C}{2}$$

pondo em evidencia senc no 2º membro tem-se:

$$\text{sen}(a-b) = \text{senc} (\cos B - \cos a \text{sen} B \text{tg} \frac{C}{2})$$

Voltando agora ao triângulo PAB. Uma relação dada pelos 4 elementos (2 lados e 2 ângulos) aplicada a este triângulo / fornece imediatamente:

$$\text{sen} \theta \cos \omega = \cos \theta \cot r - \text{sen} \omega \cot \Delta \psi$$

Tem-se, finalmente:

$$\text{tg} \Delta \psi = \frac{\text{sen} r \text{sen} \omega}{\cos r \cos \theta - \text{sen} r \cos \omega \text{sen} \theta} \quad (6.3)$$

$$\text{sen} \Delta \theta = \text{sen} r (\cos \omega - \text{sen} \omega \text{sen} \theta \text{tg} \frac{\Delta \psi}{2}).$$

As relações são rigorosas e podem ser aplicadas a dois pontos quaisquer da esfera celeste mesmo que suas distâncias não sejam desprezíveis.

Sendo possível desprezar o quadrado da distância, e substituindo

$\text{sen} r \text{sen} \omega$	por	$x = r \text{sen} \omega$
$\text{sen} r \cos \omega$	por	$y = r \cos \omega$
$\cos r$	por	1

vem:

$$\cos \theta \text{tg} \Delta \psi = \frac{x}{1 - y \text{tg} \theta} \quad (6.4)$$

$$\text{sen} \Delta \theta = y - x \text{sen} \theta \text{tg} \frac{\Delta \psi}{2}$$

As fórmulas (6.4) são aplicáveis, com a reserva feita a propósito de  $r$ , qualquer que seja a posição do ponto A sobre a esfera, mesmo nas vizinhanças dos pólos das coordenadas.

Para o problema inverso, é suficiente resolver as equações (6.4) em relação as novas variáveis desconhecidas. Acha-se, então:

$$x = \frac{\cos\theta \operatorname{tg}\Delta\psi (1 - \operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\Delta\psi)}{1 + \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{tg}\Delta\psi \operatorname{tg}\Delta\psi/2} \quad (6.5)$$

$$y = \frac{\operatorname{sen}\Delta\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{tg}\Delta\psi \operatorname{tg}\Delta\psi/2}{1 + \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{tg}\Delta\psi \operatorname{tg}\Delta\psi/2}$$

Nessas últimas fórmulas,, é legítimo de substituir os denominadores pela unidade, salvo quando  $\Delta\psi$  não for um ângulo pequeno, o que não se pode apresentar senão nas vizinhanças imediatas de um pólo. Além disso, dentro das fórmulas (6.4) e (6.5), pode-se, em qualquer caso, confundir  $\operatorname{sen}\Delta\theta$  com  $\Delta\theta$ , na condição suposta de que  $r$  seja pequeno. ( $\Delta\theta$  expresso em radianos, como é óbvio).

Finalmente, se o ponto A não for vizinho do pólo, o ângulo  $\Delta\psi$  permanece pequeno, os termos de 2a. ordem em relação a  $x$ ,  $y$ ,  $\Delta\psi$  e  $\Delta\theta$  são todos desprezíveis, e as fórmulas (6.4) se reduzem as seguintes:

$$\begin{aligned} \cos\theta \cdot \Delta\psi &= x = r \operatorname{sen}\omega, \\ \Delta\theta &= y = r \cos\omega. \end{aligned} \quad (6.6)$$

As fórmulas (6.6) são de uso corrente. Por esse motivo vamos deduzi-las diretamente. A primeira se obtém da analogia dos senos:

$$\operatorname{sen}A\hat{P}B \operatorname{sen}PB = \operatorname{sen}P\hat{A}B \operatorname{sen}AB.$$

Quando o ângulo  $APB$  e o lado  $AB$  são pequenos, se pode confundir um e outro com seu seno; pode-se assim confundir  $\operatorname{sen}PB$  com  $\cos\theta$  obtendo-se a primeira das fórmulas (6.4). Quanto à segunda, ela exprime que, nas condições enunciadas, a diferença dos lados  $PA$  e  $PB$  se confunde com a projeção do lado  $AB$  sobre  $PA$ .

Exemplos:  $\theta = +23^{\circ}26' 58''$   
 Sendo  $r = 288,2''$  , obter  $x$  e  $y$   $\Delta\psi$  e  $\Delta\theta$   
 $\omega = 298^{\circ}9,1'$

As condições para aplicações das fórmulas (6.6) estão evidentemente satisfeitas. Tem-se:

$$\begin{aligned} \sec\theta &= 1,0900, & x &= -254,1'', & \Delta\psi &= -277,0'' = -18,46^s \\ \operatorname{sen}\omega &= -0,8817, & y &= +136,0'', & \Delta\theta &= +136,0''. \\ \cos\omega &= 0,4718; \end{aligned}$$

2º Conservando os valores precedentes de  $r$  e  $\omega$ , de  $x$  e  $y$ , mas

sendo, agora,  $\theta = +88^{\circ}56'58,2''$ , obter  $\Delta\psi$  e  $\Delta\theta$

A origem, agora está situada a apenas  $63'$  do pólo. É, portanto, necessário recorrer às fórmulas (6.4).

$$\begin{aligned} \sec\theta &= 54,54, \\ \operatorname{tg}\theta &= 54,53, \\ \operatorname{sen}\theta &= 0,9998; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -254,1'' = -0,0012319 \\ y &= 136,0'' = 0,0006593; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\Delta\psi = \frac{-0,06719}{1 - 0,0395} = -0,06970,$$

$$\Delta\psi = -3^{\circ}59'14'' = -15^m 56,9^s,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\psi}{2} = -0,0348,$$

$$\Delta\theta = 136,0'' - 8,8'' = +127,2''.$$

Sejam  $P$  e  $P'$  duas posições consecutivas do pólo celeste (Fig. 6.3) nos instantes  $T_0$  e  $t$ . Sabe-se que:

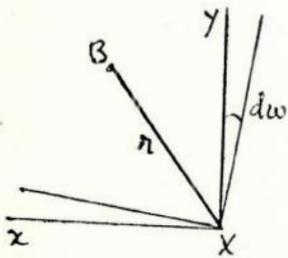


Fig.6.3

$$PP' = n(t - t_0) \quad n = 20,05'' = 0,0056^{\circ} = 0,000097 \text{ rd.}$$

O círculo horário do ponto  $X$  gira, no tempo  $dt$  de um ângulo  $d\omega$  (Fig.6.3) contado positivamente no sentido inverso dos ângulos de posição.

Tem-se portanto:

$$\cos \delta \frac{d\omega}{dt} = n \operatorname{sen} \alpha \dots\dots\dots (6.7)$$

Se, no instante  $t_0$ , o ângulo de posição de um ponto  $B$  em relação ao ponto  $X$  é  $\omega_0$ , no instante  $t$ , ele terá por valor

$$\omega = \omega_0 + n \sec \delta \operatorname{sen} \alpha (t - t_0) \dots\dots\dots (6.8)$$

As coordenadas diferenciais de  $B$ , fig. 6.3, têm por expressão:

$$\begin{aligned} x &= \cos \delta \Delta \alpha = r \operatorname{sen} \omega \\ y &= \Delta \delta = r \cos \omega \end{aligned}$$

Diferenciando, ter-se-ã:

$$\begin{aligned} \cos\delta \, d(\Delta\alpha) - \operatorname{sen}\delta \Delta\alpha \, d\delta &= r \cos\omega \, d\omega \\ \cos\delta \, d(\Delta\alpha) - \operatorname{sen}\delta \Delta\alpha \, d\delta &= \Delta\delta \, d\omega \\ \cdot \cdot \quad d(\Delta\delta) &= -r \operatorname{sen}\omega \, d\omega \\ d(\Delta\delta) &= -\cos\delta \Delta\alpha \, d\omega \end{aligned}$$

com:

$$d\delta = n \cos\alpha \, dt; \quad d\omega = n \sec\delta \operatorname{sen}\alpha \, dt.$$

Todas reduções feitas, se obtêm as derivadas das coordenadas diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= n \sec\delta (\Delta\alpha \cos\alpha \operatorname{sen}\delta + \operatorname{sen}\alpha \sec\delta) \\ \frac{d\delta}{dt} &= -n \Delta\alpha \operatorname{sen}\alpha \end{aligned} \quad (6.9)$$

A fórmula (6.8) serve para corrigir os ângulos de posição dos efeitos da precessão diferencial. Assim, quando é proposto determinar a órbita de uma estrela dupla cujas, as observações abarcando grande intervalo de tempo, é indispensável referir os ângulos de posição ao mesmo equinócio.

Desta forma, dos ângulos de posição medidos deve ser subtraída a seguinte expressão (correção):

$$n \sec\delta \operatorname{sen}\alpha (t - t_0) = 0,0056^\circ \sec\delta \operatorname{sen}\alpha (t - t_0)$$

onde  $t$  e  $t_0$  representam respectivamente a época ( $t$  e  $t_0$  expressos em anos trópicos) da observação e a época adotada como origem.

As fórmulas (6.8) servem para calcular as coordenadas diferenciais para época  $t$ , conhecendo-se seu valor para época  $t_0$ . Quando necessário deve ser levado em conta os movimentos próprios relativos dos astros, caso sejam conhecidos

### Exemplos

1º) Reduzir para 2000,0 o ângulo de posição da estrela dupla J 1031 (2000,0 :  $\alpha = 15^{\text{h}} 52,8^{\text{m}}$ ;  $\delta = +48^\circ 9'$ ). Seu valor em 1950,08 era:  $\omega_0 = 162,5^\circ$ .

Tem-se:  $n = 20,0383''$  (1)

$\text{sen}\alpha = -0,8499$

$\text{sec}\delta = 1,4988$

$t - t_0 = 49,92$  anos

A correção a suprimir é, de acordo com a fórmula (6.8)

$-0,0540 = 0,4$ .

O ângulo  $\omega$  será dado por:

$$\omega = 162,5^\circ - 0,4^\circ = 162,1^\circ$$

Obs.:  $\alpha$  e  $\delta$  são tirados do CATALOGUE GÉNÉRAL DE 3350 ÉTOILES DOUBLES DE FAIBLE ÉCLAT OBSERVÉES DE 1906 A 1962 de ROBERT JONCKHEERF para o equinócio de 2000,0, onde J 1031 refere-se ao código da estrela. O ângulo de posição é extraído do mesmo catálogo.

29 ) Duas estrelas têm por coordenadas médias aproximadas:

1900,0	$2^{\text{h}} 12^{\text{m}} 53^{\text{s}}$	$+56^\circ 51' 26''$
	$2^{\text{h}} 11^{\text{m}} 22^{\text{s}}$	$+56^\circ 32' 49''$

Medidas micrométricas precisas forneceram, para a mesma época, o seguinte valor para a diferença de suas declinações:

$$\Delta\delta = 1116,49''$$

Reduzir esta diferença para uma época qualquer. O movimento próprio relativo sendo desprezível.

A segunda fórmula de (6.9) responde a questão. É necessário fazer:

$$n = 0,000097 \quad \Delta\alpha = 1^{\text{m}} 31^{\text{s}} = 1365'' \quad \text{sen}\alpha = 0,5423$$

Acha-se imediatamente:

$$\Delta\alpha = 1116,49'' - 0,072''(t - 1900,0),$$

$t$  sendo a data expressa em anos. Se o intervalo de tempo for considerável, deveria ser introduzido o termo de 2ª ordem.

Para 1980,0 ter-se-ia:  $\Delta\delta=1110,73''$

As duas estrelas que se citam se acham no aglomerado  
h Persei.

São geralmente empregadas na obtenção do valor da /  
constante do parafuso dos micrômetros.

( 1) n é o valor dado pela tabela XVII no anexo 4.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Astronomisches Rechen-Institut. Apparent Places of Fundamental Stars for 1980. Produced under the auspices of International Astronomical Union. Heidelberg: Verlag und Hertellung, 1978.
- Barney, Ida. Translations of the Astronomical Observatory of Yale University, Vol. 23 Supplementary Volume to the Yale Zone Catalogues,  $-30^{\circ}$  a  $+30^{\circ}$ . New Halen: The Observatory, 1951.
- Bastos, Lilia R., Paixão, Lyra & Fernandes, Lucia M. Manual para a elaboração de projetos e relatórios de pesquisa, teses e dissertações. Rio de Janeiro: Zahar, 1979.
- Berry, Arthur. A Short History of Astronomy. New York: Dover, 1961.
- Boquet, F. Histoire de l'Astronomie. Paris: Payot, 1925.
- Cajori, Florian. Newton's Principia. Berkeley, California: University of California Press, 1946.
- Danjon, André. Astronomie Générale. Paris: J. & R. Sennac, 1963.
- Dreyer, J.L.E. A History of Astronomy from Thales to Kepler. New York: Dover, 1953.
- Duhem, Pierre. Le Système du Monde - Histoire des doctrines cosmologiques de Platon a Copernic. Paris: Hermann, 1950.
- Faye, H. Cours d'Astronomie. Paris: Gauthier-Villares, 1883.
- Halma, M. l'Abbé. Composition Mathématique de Claude Ptolémé (Almageste). Paris: Chez Henri Grand, 1813.
- Jonckheere, Robert. Catalogue Général de 3350 Étoiles Doubles de Faible Éclat Observées de 1906 a 1962. Marseille: Journal des Observateurs, 1962.

- Kelly, Ivan. The Scientific Case Against Astrology. Mercury. São Francisco: Astronomical Society of Pacific. Vol IX. nº 6/Novembro, 1980, 139-142 e 157.
- Koyré, A. Copernic.. Des Revolutions Des Orbes Célestes. Paris: Libraire Félix Alcan, 1934.
- Laplace, M. Le Marquis De. Précis de l'Histoire de l'Astronomie. Paris: Mallet-Bachelier, 1963.
- Lieske, J.H., Lederle, T., Fricke, W. e Morando, B. Expressions for the Precession Quantities based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants of Astronomy and Astrophysics. 58, 1-16 (1977). Astronomy and Astrophysics, 1977, 58, 1-16.
- Meeus, Jean. Letters. Sky and Telescope. Mass. U.S.A:Vol. 48, Nº 3/setembro 1974, 139 e 147
- Newcomb, Simon. A Compendium of Astronomy. New York: Dover, 1960.
- Smart, W.M. Text-Book on Spherical Astronomy. Cambridge: The University Press, 1971.
- Tannery, Paul. Recherches sur l'Histoire de l'Astronomie Ancienne. Paris: Gautier-Villars & Fils, 1893.
- Tardi, M.Pierre. Sur quelques particularités de la rotation terrestre. Annuaire pour l'an 1949, Le Bureau des Longitudes. Paris: Gauthier-Villars, 1949, A.1 a A.48.
- Smithsonian Astrophysical Observatory. Stars Catalog, positions and proper motions of 258,997 stars for the epoch and equinox of 1950,0. Washington, D.C.: Smithsonian Institution, 1966.
- U.S.Naval Observatory & Science Research Council. The American Ephemeris and Nautical Almanac, 1965, 1980. Washington and London: Os autores, 1980.
- Veröffentlichungen des Astronomischen, Rechen-Instituts. Fourth Fundamental Catalogue (FK4), Resulting from the revision of

the Third Fundamental Catalogue (Fk3). Carried out under supervision of W.Fricke A. Kopff in collaboration with W.Gliese, F. Gondo Latsch, T.Lederle, H.Nowacki, W.Strobel, P.Stumpff. Heidelberg: Verlag G. Braun. Karlsruhe, 1963.

ANEXOS

ANEXO I

YALE CATALOGUE: zone catalogue  $-2^{\circ}$  to  $-6^{\circ}$ ,  
epoch 1933.2 and equinox 1950.0

# YALE CATALOGUE

ZONE CATALOGUE,  $-2^{\circ}$  to  $-6^{\circ}$

35

AG No	Magn Spect	RA 1950		Prec. and $\frac{1}{2}$ Sec. Var.		Decl 1950		Prec. and $\frac{1}{2}$ Sec. Var.		Proper Motions		BD No
		h <sup>h</sup> m <sup>m</sup> s <sup>s</sup>	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	in RA	in Decl			
3739	9.4 G5	9 <sup>h</sup> 34 <sup>m</sup> 2.267	+2.9948	-.10	-5° 38' 32.43	-16.113	-12.6	-".004 ± 6	-.014 ± 6	-5° 2846		
3740	8.4 G0	9 34 14.420	3.0222	.14	3 40 54.36	16.124	12.7	- 69 6	+ 135 6	3 2726		
3742	9.1 F5	9 35 10.306	3.0199	.14	3 52 11.46	16.172	12.7	- 4 9	- 47 9	3 2729		
3744	9.1 G0	9 35 13.535	3.0112	.13	4 29 47.08	16.175	12.6	- 65 9	+ 3 9	4 2678		
3745	9.0	9 35 15.321	3.0325	.16	2 57 43.76	16.177	12.7	- 18 6	- 6 6	2 2940		
3747	9.9 G0	9 35 35.147	+2.9825	-.09	-6 34 31.76	-16.194	-12.5	+ 2 ± 8	- 12 ± 8	-6 2960		
3749	9.1 K0	9 35 48.649	3.0033	.11	5 4 59.32	16.205	12.5	- 17 8	+ 15 8	4 2683		
3751	8.9 F0	9 35 52.601	3.0206	.14	3 50 9.27	16.209	12.6	- 57 9	+ 13 9	3 2734		
3756	8.7 K0	9 36 44.041	3.0305	.15	3 7 47.95	16.253	12.6	- 15 7	+ 1 7	2 2947		
3759	8.8 G5	9 36 56.094	3.0355	.16	2 46 12.90	16.263	12.6	- 20 9	- 19 9	2 2949		
3761	9.2	9 37 7.058	+3.0182	-.13	-4 2 27.90	-16.272	-12.5	- 16 ± 6	+ 4 ± 6	-3 2740		
3765	9.1 K0	9 38 12.032	3.0166	.13	4 10 54.19	16.327	12.4	+ 5 7	- 17 7	3 2742		
3768	9.1 F5	9 39 6.200	3.0274	.14	3 24 14.53	16.373	12.4	- 44 6	- 4 6	2 2954		
3769	8.9 A5	9 39 16.411	3.0233	.14	3 42 45.10	16.382	12.4	- 31 9	+ 23 9	3 2745		
3770	9.1 K2	9 39 20.919	3.0249	.14	3 36 1.74	16.385	12.4	- 22 6	- 16 6	3 2746		
3777	9.0 K2	9 40 25.303	+3.0105	-.12	-4 41 53.62	-16.439	-12.2	- 41 ± 9	- 31 ± 9	-4 2701		
3778	9.0 K0	9 40 30.361	3.0376	.16	2 40 20.72	16.443	12.3	- 17 9	- 17 9	2 2958		
3783	8.8 F5	9 41 20.411	3.0232	.13	3 46 8.85	16.485	12.2	- 41 7	- 15 7	3 2755		
3784	8.8 K0	9 41 22.372	3.0249	.14	3 38 34.32	16.487	12.2	- 32 8	- 27 8	3 2756		
3785	8.7 K5	9 41 28.814	3.0121	.12	4 36 32.59	16.492	12.1	- 9 9	- 15 9	4 2704		
3791	9.1 G0	9 42 22.281	+3.0005	-.10	-5 30 12.89	-16.536	-12.0	- 83 ± 9	- 73 ± 9	-5 2888		
3793	9.1 F5	9 42 47.585	3.0385	.15	2 38 46.93	16.557	12.1	- 36 6	0 6	2 2965		
3794	9.0 G5	9 43 12.795	3.0180	.12	4 12 30.54	16.578	12.0	+ 53 9	- 101 9	3 2765		
3799	9.0 G0	9 43 39.085	3.0407	.16	2 29 21.12	16.599	12.1	0 9	- 18 9	2 2972		
3820	9.1 F5	9 45 54.191	3.0164	.11	4 24 26.33	16.709	11.8	- 7 8	- 44 8	3 2783		
3848	9.2 G0	9 51 39.693	+3.0179	-.10	-4 27 44.41	-16.981	-11.3	+ 23 ± 7	- 22 ± 7	-4 2750		
3926	9.3 K2	10 4 47.420	3.0181	.07	4 54 7.81	17.563	10.2	- 18 8	- 7 8	4 2803		
3934	8.8 G0	10 7 15.750	3.0205	.07	4 46 49.27	17.666	10.0	- 161 8	- 41 8	4 2807		
3966	9.1 K5	10 14 0.081	3.0464	.11	2 34 36.04	17.937	9.5	- 1 9	- 4 9	2 3106		
3990	9.0 F8	10 17 9.091	3.0280	.06	4 27 54.61	18.058	9.2	- 50 9	- 23 9	3 2897		
3993	9.0 K2	10 17 40.768	+3.0295	-.06	-4 20 39.03	-18.078	- 9.2	- 3 ± 9	- 5 ± 9	-3 2901		
4004	9.0 K0	10 20 8.351	3.0226	.04	5 8 6.84	18.170	8.9	- 36 9	- 19 9	4 2853		
4007	9.1 K0	10 20 24.954	3.0288	.05	4 31 2.68	18.180	8.9	- 31 9	+ 17 9	4 2855		
4013	9.6 K0	10 22 19.507	3.0124	.01	6 17 39.35	18.250	8.7	- 69 8	+ 1 8	5 3060		
4016	8.9 K5	10 22 47.032	3.0314	.05	4 21 32.33	18.266	8.7	- 10 7	+ 4 7	3 2916		
4017	9.0 G5	10 22 52.873	+3.0172	-.02	-5 49 42.34	-18.270	- 8.7	- 47 ± 8	+ 13 ± 8	-5 3061		
4018	9.1 G5	10 22 55.942	3.0308	.05	4 25 38.44	18.272	8.7	- 25 6	- 5 6	3 2917		
4019	9.4 A5	10 23 40.201	3.0296	.04	4 34 36.78	18.298	8.6	- 5 9	- 2 9	4 2869		
4022	9.3 K5	10 24 10.535	3.0138	.00	6 15 34.14	18.316	8.5	- 9 8	- 656 8	5 3063		
4031	9.0 K5	10 25 22.852	3.0224	-.02	5 25 10.20	18.359	8.5	- 36 9	- 10 9	4 2877		
4039	9.3 G5	10 26 22.511	+3.0322	-.04	-4 25 49.60	-18.393	- 8.4	+ 22 ± 8	+ 2 ± 8	-3 2930		
4044	9.2 G0	10 27 3.631	3.0229	-.02	5 27 47.46	18.417	8.3	- 108 9	- 5 9	4 2888		
4078	8.9 G0	10 33 59.180	3.0193	+0.02	6 17 33.09	18.648	7.7	- 33 9	- 24 9	5 3104		
4080	9.3 F8	10 34 30.477	3.0280	.00	5 18 54.61	18.664	7.7	- 90 9	- 15 9	4 2912		
4084	9.1 K0	10 34 53.509	3.0185	+0.03	6 26 41.19	18.677	7.6	- 13 8	- 1 8	5 3107		
4088	9.4 A5	10 35 40.562	+3.0255	+0.01	-5 40 42.84	-18.701	- 7.5	- 10 ± 9	+ 10 ± 9	-5 3111		
4089	9.3 G0	10 36 11.775	3.0341	-.01	4 41 0.61	18.718	7.5	- 5 8	- 52 8	4 2917		
4095	9.1 K0	10 37 54.914	3.0222	+0.03	6 13 16.86	18.771	7.3	- 50 8	0 8	5 3121		
4102	9.2 G5	10 39 32.975	3.0308	+0.01	5 17 16.00	18.820	7.2	+ 9 9	+ 11 9	4 2927		
4105	9.3 K2	10 40 26.491	3.0213	+0.04	6 31 33.47	18.847	7.1	- 38 9	- 1 9	6 3216		

Mean epoch of observation 1933.2

ANEXO II

AMERICAN EPHEMERIS 1980: Precessional Constants, 1980

PRECESSIONAL CONSTANTS, 1980

		Epoch 1980.0	Epoch 1981.0
Mean obliquity	$\epsilon$	$23^{\circ}26'30''.782 = 23^{\circ}.441\ 884$	$23^{\circ}26'30''.313 = 23^{\circ}.441\ 754$
Annual general precession	$p$	$50''.2742 = 0^{\circ}.013\ 9650$	$50''.2744 = 0^{\circ}.013\ 9651$
Annual precession in R.A.	$m$	$3^s.07383 = 46^m.1074$	$3^s.07385 = 46^m.1077$
Annual precession in Dec.	$n$	$1^s.33600 = 20^m.0401$	$1^s.33600 = 20^m.0400$
Rotation of the ecliptic			
Longitude of axis	$\Pi$	$174^{\circ}40'.9 = 174^{\circ}.681$	$174^{\circ}41'.4 = 174^{\circ}.690$
Annual rate of rotation	$\pi$	$0''.4705 = 0^{\circ}.000\ 1307$	$0''.4705 = 0^{\circ}.000\ 1307$
Angles defining total precession	$\zeta_0$	$-11'31''.58 = -46^s.106$	$-11'54''.64 = -47^s.643$
from epoch to equinox	$z$	$-11'31''.51 = -46^s.101$	$-11'54''.56 = -47^s.638$
and equator of 1950.0	$\theta$	$-10'01''.24 = -40^s.082$	$-10'21''.28 = -41^s.418$
Coefficients for approximate reduction of R.A. and Dec.	$M$	$-92^s.206 = -1383^m.10$	$-95^s.280 = -1429^m.20$
	$N$	$-40^s.082 = -601^m.24$	$-41^s.418 = -621^m.28$
Coefficients for approximate reduction of ecliptic coordinates and orbital elements	$a$	$-25'08''.12 = -0^{\circ}.41892$	$-25'58''.40 = -0^{\circ}.43289$
	$b$	$-14''.12 = -0^{\circ}.003\ 922$	$-14''.59 = -0^{\circ}.004\ 053$
	$c$	$+5^{\circ}14'.8 = +5^{\circ}.246$	$+5^{\circ}14'.1 = +5^{\circ}.235$
	$c'$	$+5^{\circ}39'.9 = +5^{\circ}.665$	$+5^{\circ}40'.1 = +5^{\circ}.668$

Formulae for reduction to 1950.0

$$\alpha_0 = \alpha + M + N \sin \alpha_m \tan \delta_m$$

$$\delta_0 = \delta + N \cos \alpha_m$$

$$\lambda_0 = \lambda + a - b \cos (\lambda + c) \tan \beta$$

$$\beta_0 = \beta + b \sin (\lambda + c)$$

$$\Omega_0 = \Omega + a - b \sin (\Omega + c) \cot i$$

$$i_0 = i + b \cos (\Omega + c)$$

$$\omega_0 = \omega + b \sin (\Omega + c) \operatorname{cosec} i$$

Formulae for reduction from 1950.0

$$\alpha = \alpha_0 - M - N \sin \alpha_m \tan \delta_m$$

$$\delta = \delta_0 - N \cos \alpha_m$$

$$\lambda = \lambda_0 - a + b \cos (\lambda_0 + c) \tan \beta_0$$

$$\beta = \beta_0 - b \sin (\lambda_0 + c)$$

$$\Omega = \Omega_0 - a + b \sin (\Omega_0 + c) \cot i_0$$

$$i = i_0 - b \cos (\Omega_0 + c)$$

$$\omega = \omega_0 - b \sin (\Omega_0 + c) \operatorname{cosec} i_0$$

Subscript zero refers to epoch 1950.0;  $\alpha_m, \delta_m$  refer to the mean epoch.

Values for epoch 1980.0

$\sin \epsilon$	+0.397 81867	$\operatorname{cosec} \epsilon$	+2.513 70806
$\cos \epsilon$	+0.917 46406	$\sec \epsilon$	+1.089 96095
$\tan \epsilon$	+0.433 60682	$\cot \epsilon$	+2.306 23680
$\sin \theta$	-0.002 91488	$\tan \frac{1}{2}\theta$	-0.001 45744
$\cos \theta$	+0.999 99575		

Values for epoch 1981.0

$\sin \epsilon$	+0.397 81659	$\operatorname{cosec} \epsilon$	+2.513 72123
$\cos \epsilon$	+0.917 46497	$\sec \epsilon$	+1.089 95988
$\tan \epsilon$	+0.433 60412	$\cot \epsilon$	+2.306 25117
$\sin \theta$	-0.003 01203	$\tan \frac{1}{2}\theta$	-0.001 50602
$\cos \theta$	+0.999 99546		

Formulae for the reduction of equatorial rectangular coordinates

To 1950.0

$$x = +0.999\ 97327\ x_0 + 0.006\ 70537\ y_0 + 0.002\ 91486\ z_0$$

from 1980.0

$$y = -0.006\ 70537\ x_0 + 0.999\ 97752\ y_0 - 0.000\ 00977\ z_0$$

$$z = -0.002\ 91486\ x_0 - 0.000\ 00977\ y_0 + 0.999\ 99575\ z_0$$

To 1980.0

$$x_0 = +0.999\ 97327\ x - 0.006\ 70537\ y - 0.002\ 91486\ z$$

from 1950.0

$$y_0 = +0.006\ 70537\ x + 0.999\ 97752\ y - 0.000\ 00977\ z$$

$$z_0 = +0.002\ 91486\ x - 0.000\ 00977\ y + 0.999\ 99575\ z$$

To 1950.0

$$x = +0.999\ 97146\ x_0 + 0.006\ 92890\ y_0 + 0.003\ 01201\ z_0$$

from 1981.0

$$y = -0.006\ 92890\ x_0 + 0.999\ 97599\ y_0 - 0.000\ 01043\ z_0$$

$$z = -0.003\ 01201\ x_0 - 0.000\ 01044\ y_0 + 0.999\ 99546\ z_0$$

To 1981.0

$$x_0 = +0.999\ 97146\ x - 0.006\ 92890\ y - 0.003\ 01201\ z$$

from 1950.0

$$y_0 = +0.006\ 92890\ x + 0.999\ 97599\ y - 0.000\ 01044\ z$$

$$z_0 = +0.003\ 01201\ x - 0.000\ 01043\ y + 0.999\ 99546\ z$$

ANEXO III

FK4: Equinox and epoch 1950.0 and 1975.0

## EQUINOX AND EPOCH 1950.0 AND 1975.0

No.	Name	Mag.	Sp.	$\alpha$	$d\alpha$ $dT$	$\frac{1}{2} \frac{d^2\alpha}{dT^2}$	$\mu$	$\frac{d\mu}{dT}$	Ep. ( $\alpha$ )	$m(\alpha)$	$m(\mu)$
1266	23 Sex	6.53	B 3	10 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 27.090 10 19 44.528	+ 309.808 + 309.699	- 0.220 - 0.215	- 0.062 - 0.062	0.000 0.000	22.00	2.1	11
386	$\mu$ UMa	3.21	K 5	10 19 21.469 10 20 50.682	+ 357.292 + 356.413	- 1.765 - 1.752	- 0.741 - 0.739	+0.007 +0.007	15.21	1.8	8
1268	204 G. Vel	4.99	K 5	10 20 10.666 10 21 15.051	+ 257.373 + 257.707	+ 0.663 + 0.673	- 0.256 - 0.256	+0.001 0.000	12.74	5.1	24
1267	27 LMi	5.83	A 3	10 20 13.866 10 21 40.151	+ 345.466 + 344.813	- 1.310 - 1.301	- 0.099 - 0.099	0.000 0.000	24.54	3.0	15
387	30 H. UMa	4.92	A 0	10 20 33.038 10 22 20.760	+ 432.297 + 429.487	- 5.656 - 5.584	- 0.149 - 0.149	-0.001 -0.001	20.19	3.6	19
388	25 Sex	6.10	B 9	10 20 54.805 10 22 10.609	+ 303.233 + 303.202	- 0.065 - 0.059	- 0.355 - 0.355	0.000 0.000	19.38	2.0	12
1269	64 G. Ant	5.40	A 3	10 21 17.698 10 22 23.423	+ 262.751 + 263.053	+ 0.599 + 0.608	- 1.375 - 1.378	-0.012 -0.012	11.63	4.8	32
391	I Car	4.08	F 5	10 23 24.484 10 23 54.166	+ 119.023 + 118.429	- 1.175 - 1.203	- 0.438 - 0.444	-0.024 -0.024	10.38	12.7	61
389	$\mu$ Hya	4.06	K 5	10 23 40.213 10 24 52.771	+ 290.176 + 290.284	+ 0.213 + 0.219	- 0.917 - 0.918	-0.005 -0.005	13.01	1.4	7
392	$\alpha$ Ant	4.42	K 5	10 24 51.646 10 26 0.328	+ 274.600 + 274.853	+ 0.502 + 0.510	- 0.587 - 0.588	-0.003 -0.003	10.62	2.8	14
390	$\beta$ LMi	4.41	K 0	10 24 59.888 10 26 26.505	+ 346.831 + 346.107	- 1.452 - 1.441	- 0.996 - 0.995	+0.002 +0.002	17.03	1.0	8
393	196 G. Car	4.08	F 0	10 26 2.328 10 26 57.454	+ 220.293 + 220.717	+ 0.842 + 0.856	- 0.179 - 0.180	-0.003 -0.003	19.50	7.2	40
1270	$\delta$ Sex	5.24	B 9	10 26 56.300 10 28 12.469	+ 304.695 + 304.654	- 0.084 - 0.078	- 0.344 - 0.344	-0.001 -0.001	15.13	2.2	11
1271	+29°2057 LMi	6.92	K 0	10 27 5.709 10 28 29.743	+ 336.398 + 335.876	- 1.047 - 1.039	+ 0.057 + 0.057	0.000 0.000	28.08	2.9	17
394	36 UMa	4.84	F 5	10 27 26.446 10 29 2.178	+ 383.735 + 382.124	- 3.236 - 3.205	- 2.140 - 2.134	+0.026 +0.026	21.70	2.8	13
1272	46 Leo	5.74	M 0	10 29 31.730 10 30 51.756	+ 320.233 + 319.973	- 0.523 - 0.517	- 0.282 - 0.282	+0.001 +0.001	20.87	2.6	10
396	$\rho$ Leo	3.85	B 0 p	10 30 10.762 10 31 29.705	+ 315.868 + 315.677	- 0.383 - 0.378	- 0.059 - 0.059	0.000 0.000	10.15	1.2	5
397	203 G. Car	3.58	B 5 p	10 30 14.487 10 31 7.890	+ 213.393 + 213.832	+ 0.870 + 0.885	- 0.280 - 0.281	-0.004 -0.004	15.69	6.9	38
1273	219 G. Vel	5.14	K 0	10 30 50.030 10 31 53.412	+ 253.321 + 253.739	+ 0.829 + 0.841	- 0.136 - 0.136	-0.001 -0.001	19.59	7.8	47
395	9 H. Dra	5.04	G 5	10 30 54.070 10 33 0.563	+ 509.188 + 502.779	-12.975 -12.663	- 0.844 - 0.837	+0.028 +0.028	20.32	5.4	24
399	44 Hya	5.32	K 2	10 31 38.019 10 32 49.393	+ 285.400 + 285.596	+ 0.387 + 0.395	- 0.090 - 0.090	0.000 0.000	14.29	2.2	13
398	37 UMa	5.16	F 0	10 31 57.350 10 33 33.704	+ 386.269 + 384.570	- 3.415 - 3.380	+ 0.815 + 0.813	-0.008 -0.008	21.64	2.9	13
1274	236 G. Hya	5.85	F 8	10 34 2.883 10 35 17.576	+ 298.739 + 298.808	+ 0.135 + 0.142	+ 1.781 + 1.778	-0.013 -0.013	22.68	2.6	14
401	$\gamma$ Cha	4.10	M 0	10 34 53.647 10 35 11.139	+ 70.904 + 69.022	- 3.701 - 3.828	- 1.298 - 1.310	-0.048 -0.049	15.17	16.2	105
1275	37 LMi	4.77	G 0	10 35 54.672 10 37 18.989	+ 337.561 + 336.972	- 1.182 - 1.173	+ 0.007 + 0.007	0.000 0.000	25.16	2.4	11
402	225 G. Vel	4.37	G 0	10 37 18.653 10 38 18.424	+ 238.830 + 239.341	+ 1.013 + 1.029	- 0.267 - 0.268	-0.004 -0.004	19.64	8.0	41
404	33 Sex	6.40	K 0	10 38 51.535 10 40 7.830	+ 305.199 + 305.159	- 0.085 - 0.079	- 0.932 - 0.933	-0.003 -0.003	18.48	1.4	8
403	35 H. UMa	5.23	K 0	10 39 31.060 10 41 17.945	+ 429.235 + 425.857	- 6.813 - 6.698	+ 0.021 + 0.020	-0.003 -0.003	22.20	4.5	19
1277	78 G. Ant	5.73	A 0	10 40 23.909 10 41 33.490	+ 278.170 + 278.480	+ 0.615 + 0.624	- 0.234 - 0.234	-0.001 -0.001	17.01	5.0	25
1276	Pi 10 <sup>h</sup> 135 UMa	5.28	F 0	10 40 37.108 10 42 5.097	+ 352.462 + 351.447	- 2.040 - 2.022	- 2.610 - 2.605	+0.022 +0.022	30.06	3.5	14

No.	$\delta$	$\frac{d\delta}{dT}$	$\frac{1}{2} \frac{d^2\delta}{dT^2}$	$\mu'$	$\frac{d\mu'}{dT}$	Ep. ( $\delta$ )	$m$ ( $\delta$ )	$m$ ( $\mu'$ )	GC	N30
1266	+ 2° 32' 30.78 + 2 24 57.35	-1811.39 -1816.01	- 9.29 - 9.17	- 0.68 - 0.68	0.00 0.00	20.00	3.4	16	14204	2457
386	+41 45 6.25 +41 37 32.82	-1811.08 -1816.37	-10.66 -10.48	+ 3.01 + 3.02	+0.05 +0.04	08.29	2.4	9	14232	2460
1268	-41 23 52.28 -41 31 25.75	-1812.00 -1815.74	- 7.52 - 7.45	+ 5.13 + 5.13	+0.02 +0.02	10.65	5.2	24	14248	2462
1267	+34 9 40.67 +34 2 5.43	-1818.40 -1823.47	-10.23 -10.06	- 1.07 - 1.07	+0.01 +0.01	21.22	3.7	17	14252	2463
387	+65 49 12.47 +65 41 36.41	-1821.03 -1827.38	-12.85 -12.54	- 2.53 - 2.53	+0.01 +0.01	13.83	2.8	13	14260	2464
388	- 3 49 14.54 - 3 56 50.06	-1819.89 -1824.29	- 8.86 - 8.75	- 0.05 - 0.04	+0.02 +0.02	19.63	3.4	16	14268	2465
1269	-37 45 19.89 -37 52 57.14	-1827.11 -1830.88	- 7.56 - 7.49	- 5.88 - 5.86	+0.08 +0.08	11.57	5.2	30	14281	2466
391	-73 46 36.88 -73 54 15.08	-1832.01 -1833.57	- 3.15 - 3.14	- 3.14 - 3.13	+0.03 +0.03	12.36	4.8	23	14323	2474
389	-16 34 49.56 -16 42 29.61	-1838.15 -1842.23	- 8.21 - 8.11	- 8.34 - 8.33	+0.05 +0.05	13.23	2.3	11	14326	2477
392	-30 48 45.30 -30 56 24.06	-1833.14 -1836.95	- 7.66 - 7.58	+ 0.89 + 0.90	+0.03 +0.03	12.81	3.7	19	14352	2482
390	+36 57 50.88 +36 50 9.01	-1845.06 -1849.90	- 9.76 - 9.59	-10.55 -10.54	+0.06 +0.06	12.69	2.8	11	14358	2485
393	-58 29 1.15 -58 36 41.21	-1838.74 -1841.73	- 6.00 - 5.95	- 0.58 - 0.58	+0.01 +0.01	14.43	5.0	29	14388	2491
1270	- 2 28 57.21 - 2 36 38.50	-1843.08 -1847.24	- 8.37 - 8.25	- 1.80 - 1.80	+0.02 +0.02	15.74	3.3	17	14403	2493
1271	+28 50 15.73 +28 42 34.61	-1842.19 -1846.79	- 9.28 - 9.12	- 0.37 - 0.37	0.00 0.00	26.04	3.8	23	14409	2494
394	+56 14 15.65 +56 6 33.37	-1846.50 -1851.72	-10.54 -10.31	- 3.49 - 3.46	+0.12 +0.12	14.50	2.7	10	14427	2495
1272	+14 23 40.08 +14 15 57.48	-1848.28 -1852.54	- 8.57 - 8.44	+ 1.83 + 1.83	+0.02 +0.02	16.47	4.0	14	14468	2497
396	+ 9 33 52.22 + 9 26 8.47	-1852.90 -1857.07	- 8.40 - 8.27	- 0.61 - 0.61	0.00 0.00	09.19	1.9	7	14487	2499
397	-61 25 39.68 -61 33 23.01	-1851.93 -1854.69	- 5.53 - 5.49	+ 0.57 + 0.57	+0.02 +0.02	16.28	4.8	23	14489	2500
1273	-46 44 43.18 -46 52 27.20	-1854.42 -1857.71	- 6.60 - 6.54	+ 0.05 + 0.05	+0.01 +0.01	20.50	6.9	37	14505	2504
395	+75 58 17.36 +75 50 32.69	-1855.31 -1862.01	-13.65 -13.16	- 0.62 - 0.61	+0.05 +0.05	09.31	2.4	9	14507	2505
399	-23 29 12.97 -23 36 57.28	-1855.37 -1859.06	- 7.42 - 7.33	+ 1.74 + 1.74	0.00 0.00	14.53	3.7	22	14524	2506
398	+57 20 27.14 +57 12 42.85	-1854.63 -1859.66	-10.18 - 9.95	+ 3.54 + 3.53	-0.04 -0.04	13.29	2.8	11	14527	2508
1274	-11 57 40.42 -12 5 44.13	-1932.94 -1936.73	- 7.62 - 7.51	- 67.99 - 68.01	-0.09 -0.09	20.93	4.1	22	14582	2514
401	-78 20 53.72 -78 28 40.32	-1866.05 -1866.76	- 1.44 - 1.39	+ 1.60 + 1.62	+0.07 +0.07	15.71	4.7	27	14604	2519
1275	+32 14 11.49 +32 6 23.30	-1870.68 -1874.85	- 8.43 - 8.27	+ 0.18 + 0.18	0.00 0.00	17.21	3.2	13	14624	2521
402	-55 20 32.70 -55 28 21.88	-1875.27 -1878.13	- 5.74 - 5.68	- 0.06 - 0.06	+0.01 +0.01	15.15	6.8	38	14662	2524
404	- 1 28 41.50 - 1 36 35.07	-1892.45 -1896.06	- 7.29 - 7.17	-12.50 -12.49	+0.05 +0.05	16.36	2.3	12	14694	2529
403	+69 20 18.38 +69 12 26.85	-1883.57 -1888.67	-10.36 -10.05	- 1.63 - 1.63	0.00 0.00	15.14	3.1	12	14713	2533
1277	-32 27 12.42 -32 35 4.03	-1884.82 -1888.04	- 6.49 - 6.40	- 0.24 - 0.24	+0.01 +0.01	20.05	5.4	27	14732	2536
1276	+46 28 1.90 +46 20 8.28	-1892.43 -1896.51	- 8.26 - 8.08	- 7.20 - 7.17	+0.13 +0.12	21.39	4.3	14	14737	2538

ANEXO IV

A. Danjon: Fórmulas para precessão e nutação, coeficiente e tabelas para o cálculo da precessão.

## XVI

## PRÉCESSION .

Les formules suivantes donnent la précession entre deux époques quelconques  $\tau$  et  $\tau+t$ , d'après Newcomb. Les temps  $\tau$  sont comptés à partir de 1900,0;  $\tau$  et  $t$  sont exprimés en milliers d'années tropiques. Les autres notations sont celles des paragraphes 44 et 46.

$$\begin{aligned} \varphi &= 173^{\circ}57'3'' + 32869''\tau + 56''\tau^2 + (-8694'' - 55''\tau)t + 3''t^2 \\ k &= (471'',07 - 6'',75\tau + 0'',57\tau^2)t \\ &\quad + (-3'',37 + 0'',57\tau)t^2 + 0'',05t^3. \\ \varepsilon &= 23^{\circ}27'8'',26 - 468'',44\tau - 0'',60\tau^2 + 1'',83\tau^3. \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon + (6'',06 - 9'',20\tau)t^2 - 7'',73t^3 \\ \psi &= (50370'',84 + 49'',30\tau - 0'',04\tau^2)t \\ &\quad + (-107'',20 - 1'',48\tau)t^2 - 1'',53t^3. \\ \chi &= (124'',73 - 188'',70\tau - 0'',14\tau^2)t \\ &\quad + (-238'',07 - 1'',57\tau)t^2 - 1'',66t^3. \\ \lambda &= (50256'',41 + 222'',29\tau + 0'',26\tau^2)t \\ &\quad + (111'',15 + 0'',26\tau)t^2 + 0'',10t^3. \\ \mu &= (46085'',06 + 279'',45\tau + 0'',12\tau^2)t \\ &\quad + (139'',73 + 0'',12\tau)t^2 + 36'',32t^3. \\ j &= (20046'',85 - 85'',33\tau - 0'',37\tau^2)t \\ &\quad + (-42'',67 - 0'',37\tau)t^2 - 41'',80t^3. \\ r &= \frac{\pi}{2} - \rho = (23042'',53 + 139'',73\tau + 0'',06\tau^2)t \\ &\quad + (30'',23 - 0'',27\tau)t^2 + 18'',00t^3. \\ s &= r + (79'',27 + 0'',66\tau)t^2 + 0'',32t^3. \end{aligned}$$

## NUTATION

Les formules suivantes donnent la nutation d'après Newcomb. Dans ces formules,  $\odot$  est la longitude moyenne du soleil et  $\omega$  la longitude de son périhélie;  $\zeta$  est la longitude moyenne de la lune,  $\theta$  la longitude moyenne de son nœud ascendant,  $M'$  son anomalie moyenne.  $\tau$  est le temps, en siècles juliens de 36 525 jours, écoulé depuis 1900,0

$$\begin{aligned} N &= -(17'',234 + 0'',017\tau) \sin \theta + 0'',209 \sin 2\theta \\ &\quad - 1'',272 \sin 2\odot + 0'',126 \sin (\odot - \omega) + 0'',021 \sin (\odot + \omega) \\ &\quad - 0'',050 \sin (3\odot - \omega) + 0'',012 \sin (2\odot - \theta). \\ dN &= -0'',204 \sin 2\zeta + 0'',068 \sin M' - 0'',034 \sin (2\zeta - \theta) \\ &\quad - 0'',026 \sin (2\zeta + M') + 0'',011 \sin (2\zeta - M') \\ &\quad + 0'',006 \sin (2\zeta - 2\odot) + 0'',015 \sin (2\zeta - 2\odot - M'). \\ \Omega &= +(9'',210 + 0'',0009\tau) \cos \theta - 0'',090 \cos 2\theta \\ &\quad + 0'',551 \cos 2\odot + 0'',022 \cos (3\odot - \omega) - 0'',009 \cos (\odot + \omega) \\ &\quad - 0'',007 \cos (2\odot - \theta). \\ d\omega &= +0'',089 \cos 2\zeta + 0'',018 \cos (2\zeta - \theta) \\ &\quad + 0'',011 \cos (2\zeta + M') - 0'',005 \cos (2\zeta - M'). \end{aligned}$$

## XVII

## COEFFICIENTS POUR LE CALCUL DE LA PRÉCESSION

$\tau$	$m$	$n$	$f = \frac{n_{\tau}}{n_{1950}}$
1850	$3^s,07141 = 46''.0711$	$1^s,33674 = 20''.0511$	1,000426
60	159 0739	668 0503	1,000383
70	178 0767	663 0494	1,000341
80	196 0795	657 0486	1,000298
90	215 0823	651 0477	1,000255
1900	234 0851	646 0469	1,000213
10	252 0878	640 0460	1,000170
20	271 0906	634 0451	1,000128
30	290 0934	629 0443	1,000085
40	308 0962	623 0434	1,000043
50	327 0990	617 0426	1,000000
60	346 1018	612 0417	0,999957
70	364 1046	606 0409	0,999915
80	383 1074	600 0400	0,999872
90	401 1102	594 0392	0,999830
2000	420 1130	589 0383	0,999787

XVIII. TABLE POUR LE CALCUL DE LA PRÉCESSION EN ASCENSION DROITE

$n \sin \alpha (1950, 0)$

$[ p_{\alpha} = m + n \sin \alpha \text{ tang } \delta ]$

$\alpha$	$0^h +$ $12^h -$	$1^h +$ $13^h -$	$2^h +$ $14^h -$	$3^h +$ $15^h -$	$4^h +$ $16^h -$	$5^h +$ $17^h -$	
$0^m$	0,0000	0,3458	0,6681	0,9448	1,1572	1,2906	$60^m$
5	0,0291 <sup>291</sup>	0,3739 <sup>281</sup>	0,6932 <sup>251</sup>	0,9652 <sup>204</sup>	1,1715 <sup>143</sup>	1,2979 <sup>73</sup>	55
10	0,0583 <sup>292</sup>	0,4018 <sup>279</sup>	0,7179 <sup>247</sup>	0,9851 <sup>199</sup>	1,1852 <sup>137</sup>	1,3045 <sup>66</sup>	50
15	0,0874 <sup>291</sup>	0,4295 <sup>277</sup>	0,7423 <sup>244</sup>	1,0046 <sup>195</sup>	1,1984 <sup>132</sup>	1,3105 <sup>60</sup>	45
20	0,1165 <sup>291</sup>	0,4570 <sup>275</sup>	0,7664 <sup>241</sup>	1,0236 <sup>190</sup>	1,2110 <sup>126</sup>	1,3159 <sup>54</sup>	40
25	0,1455 <sup>290</sup>	0,4843 <sup>273</sup>	0,7901 <sup>237</sup>	1,0421 <sup>185</sup>	1,2230 <sup>120</sup>	1,3206 <sup>47</sup>	35
30	0,1744 <sup>289</sup>	0,5113 <sup>270</sup>	0,8134 <sup>233</sup>	1,0601 <sup>180</sup>	1,2345 <sup>115</sup>	1,3247 <sup>41</sup>	30
35	0,2033 <sup>289</sup>	0,5381 <sup>268</sup>	0,8363 <sup>229</sup>	1,0775 <sup>174</sup>	1,2453 <sup>108</sup>	1,3282 <sup>35</sup>	25
40	0,2320 <sup>287</sup>	0,5647 <sup>266</sup>	0,8589 <sup>226</sup>	1,0945 <sup>170</sup>	1,2556 <sup>103</sup>	1,3311 <sup>29</sup>	20
45	0,2607 <sup>287</sup>	0,5910 <sup>263</sup>	0,8810 <sup>221</sup>	1,1110 <sup>165</sup>	1,2653 <sup>97</sup>	1,3333 <sup>22</sup>	15
50	0,2892 <sup>285</sup>	0,6170 <sup>260</sup>	0,9027 <sup>217</sup>	1,1269 <sup>159</sup>	1,2743 <sup>90</sup>	1,3349 <sup>16</sup>	10
55	0,3176 <sup>284</sup>	0,6427 <sup>257</sup>	0,9240 <sup>213</sup>	1,1423 <sup>154</sup>	1,2828 <sup>85</sup>	1,3358 <sup>9</sup>	05
60	0,3458 <sup>282</sup>	0,6681 <sup>254</sup>	0,9448 <sup>208</sup>	1,1572 <sup>149</sup>	1,2906 <sup>78</sup>	1,3362 <sup>4</sup>	00
	$11^h +$ $23^h -$	$10^h +$ $22^h -$	$9^h +$ $21^h -$	$8^h +$ $20^h -$	$7^h +$ $19^h -$	$6^h +$ $18^h -$	$\alpha$

XIX. PRÉCESSION EN DÉCLINAISON

$p \delta (1950, 0)$

$\alpha$	$0^h +$ $12^h -$	$1^h +$ $13^h -$	$2^h +$ $14^h -$	$3^h +$ $15^h -$	$4^h +$ $16^h -$	$5^h +$ $17^h -$	
$0^m$	20,0426	19,3596	17,3574	14,1722	10,0213	5,1874	$60^m$
5	20,0378 <sup>48</sup>	19,2419 <sup>1177</sup>	17,1346 <sup>2228</sup>	13,8597 <sup>3125</sup>	9,6403 <sup>3810</sup>	4,7638 <sup>4236</sup>	55
10	20,0235 <sup>143</sup>	19,1149 <sup>1270</sup>	16,9037 <sup>2309</sup>	13,5406 <sup>3191</sup>	9,2546 <sup>3857</sup>	4,3380 <sup>4258</sup>	50
15	19,9997 <sup>238</sup>	18,9789 <sup>1360</sup>	16,6648 <sup>2389</sup>	13,2150 <sup>3256</sup>	8,8646 <sup>3900</sup>	3,9101 <sup>4279</sup>	45
20	19,9663 <sup>334</sup>	18,8339 <sup>1450</sup>	16,4179 <sup>2469</sup>	12,8831 <sup>3319</sup>	8,4704 <sup>3942</sup>	3,4809 <sup>4292</sup>	40
25	19,9234 <sup>429</sup>	18,6798 <sup>1541</sup>	16,1632 <sup>2547</sup>	12,5451 <sup>3380</sup>	8,0721 <sup>3983</sup>	3,0489 <sup>4320</sup>	35
30	19,8711 <sup>523</sup>	18,5169 <sup>1629</sup>	15,9008 <sup>2624</sup>	12,2011 <sup>3440</sup>	7,6700 <sup>4021</sup>	2,6161 <sup>4328</sup>	30
35	19,8093 <sup>618</sup>	18,3452 <sup>1717</sup>	15,6309 <sup>2699</sup>	11,8514 <sup>3497</sup>	7,2642 <sup>4048</sup>	2,1820 <sup>4341</sup>	25
40	19,7381 <sup>712</sup>	18,1648 <sup>1804</sup>	15,3535 <sup>2774</sup>	11,4959 <sup>3555</sup>	6,8550 <sup>4092</sup>	1,7468 <sup>4352</sup>	20
45	19,6575 <sup>806</sup>	17,9756 <sup>1892</sup>	15,0688 <sup>2847</sup>	11,1351 <sup>3608</sup>	6,4425 <sup>4125</sup>	1,3108 <sup>4360</sup>	15
50	19,5675 <sup>900</sup>	17,7780 <sup>1976</sup>	14,7769 <sup>2919</sup>	10,7689 <sup>3662</sup>	6,0269 <sup>4156</sup>	0,8742 <sup>4366</sup>	10
55	19,4682 <sup>993</sup>	17,5719 <sup>2061</sup>	14,4780 <sup>2989</sup>	10,3975 <sup>3714</sup>	5,6085 <sup>4184</sup>	0,4372 <sup>4370</sup>	05
60	19,3596 <sup>1086</sup>	17,3574 <sup>2145</sup>	14,1722 <sup>3058</sup>	10,0213 <sup>3762</sup>	5,1874 <sup>4211</sup>	0,0000 <sup>4372</sup>	00
	$11^h -$ $23^h +$	$10^h -$ $22^h +$	$9^h -$ $21^h +$	$8^h -$ $20^h +$	$7^h -$ $19^h +$	$6^h -$ $18^h +$	$\alpha$





ANEXO V

Astronomy and Astrophysics: Expressions for  
the Precession Quantities Based upon the IAU  
(1976) System of Astronomical Constants.

## Expressions for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants

J. H. Lieske<sup>1</sup>, T. Lederle<sup>2</sup>, W. Fricke<sup>2</sup> and B. Morando<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Jet Propulsion Laboratory, 4800 Oak Grove Drive, Pasadena, CA 91103, USA

<sup>2</sup>Astronomisches Rechen-Institut, Mönchhofstraße 12-14, D-6900 Heidelberg 1, Federal Republic of Germany

<sup>3</sup>Bureau des Longitudes, 77 Ave Denfert-Rochereau, F-75014 Paris, France

Received October 15, 1976

**Summary.** Expressions for the precession quantities enabling one to precess to and from an arbitrary epoch are developed as a function of the fundamental astronomical constants. The expressions with numerical values of the coefficients are given relative to epoch J2000.0 in Table 5 for the IAU (1976) System of Astronomical Constants adopted at the XVI General Assembly of the IAU in Grenoble. They must be used with the introduction of the new constants into the ephemerides and in constructing the new fundamental reference system, the FK5. Finally, the developments presented here are applicable for revising relevant precession quantities whenever the system of astronomical constants is changed.

**Key words:** precession expressions — reference system — astronomical constants

### Introduction

In comparing astronomical observations with calculated places of celestial objects, reductions have to be made to refer either the observed or the calculated positions to the same reference coordinate system. Such reductions include such well-known effects as aberration, parallax, precession and nutation. Although rather lengthy numerical expressions are usually given for the parameters describing precession, the expressions, in fact, only depend upon a rather limited set of basic parameters or fundamental constants and are thus amenable to revision.

In this paper we will examine the structure of the expressions usually employed in calculating the effects of precession and we will outline the method by which the expressions are revised to account for changes in the fundamental astronomical constants. It will be shown that the basic set of parameters, upon which the lengthy polynomials for calculating the mean obliquity of date and the elements of the precession matrix depend, consists of the mean obliquity and the speed of general

precession in longitude at a fixed epoch  $\delta_0$  together with the system of planetary masses. We will also present the new precession quantities at epoch J2000.0 (JED 2451545.0) which result from the revision of astronomical constants adopted by the International Astronomical Union (IAU) at the XVI General Assembly in Grenoble (Transactions IAU 16B, 1977).

Attention should be drawn to the fact that, as it was expressed by Newcomb (1906, p. 226), "There is no formula by which the actual positions of the two poles [those of the ecliptic and the equator] can be expressed rigorously for any time. But their instantaneous motions, which appear as derivatives of the elements of position relative to the time, may be expressed numerically through a period of several centuries before and after any epoch."

The development of the usual precession quantities depends upon the dynamical motion of the ecliptic pole relative to a fixed ecliptic, due to planetary perturbations, and it depends upon the dynamical motion of the celestial pole due to luni-solar torques on the oblate earth. The former effect is treated by Newcomb (1894) who calculates the components of the earth's angular momentum upon a fixed ecliptic of 1850.0, while the latter effect (Newcomb, 1906; Andoyer, 1911; deSitter and Brouwer, 1938) is treated by *inferring* Newcomb's "Precessional Constant"  $P_0$  (which depends upon the internal structure of the earth) from an observationally-determined value of the "general precession" (more rigorously called the "speed of general precession in longitude"). Based on Newcomb's values, Andoyer (1911) has derived the expressions for the precession quantities referred to the basic epoch of 1850.0; in the annual volumes of the *Connaissance des Temps* the same expressions reduced to 1900.0 are given.

In this paper we have divided the development into sections on Definitions, Motion of the Ecliptic Pole, Formulation for a Basic Epoch, Formulation for an Arbitrary Epoch, concluding with sections on Ecliptic Motion Relative to Basic Epoch, Numerical Results and Summary.

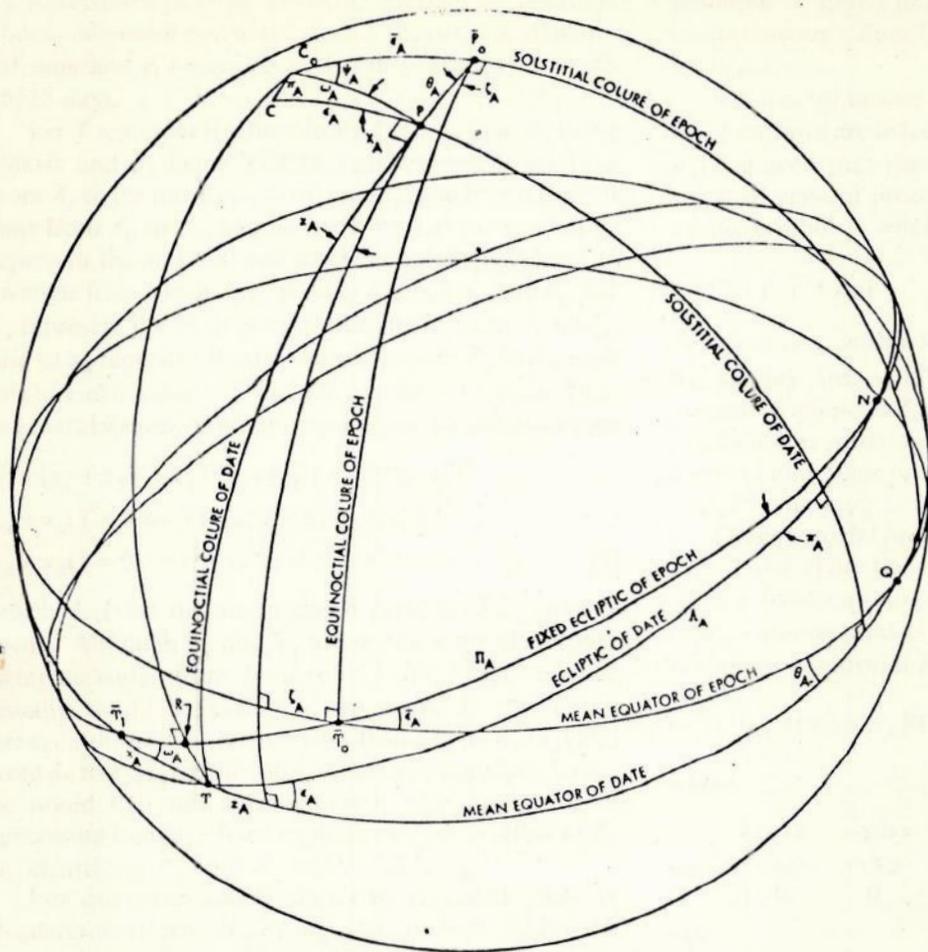


Fig. 1. Celestial sphere depicting mean ecliptics and equators at epochs  $\epsilon_F$  and  $\epsilon_D$ . Ecliptic poles are represented by  $\bar{C}_0$  and  $C$  with  $\bar{P}_0$  and  $P$  representing the pole of the equator at the two epochs. Light lines represent curves on the back side of the celestial sphere. The point  $R$  is employed in Newcomb's definition of general precession (see text)

## Definitions

In developing the precession quantities, three epochs often occur: a basic epoch ( $\epsilon_0$ ), an arbitrary fixed epoch ( $\epsilon_F$ ) and the mean epoch of date ( $\epsilon_D$ ). It is apparent that at least  $\epsilon_0$  and  $\epsilon_D$  must be present, but it is somewhat less obvious why one also requires a second fixed epoch  $\epsilon_F$ . It often happens that although one might have expressions for  $\epsilon_D$  relative to  $\epsilon_0$ , he requires the expressions for  $\epsilon_D$  relative to  $\epsilon_F$ . For example, in the currently employed precession quantities,  $\epsilon_0$  is 1900.0 (the basic epoch for which the fundamental constants are defined), yet most astronomers employ another epoch  $\epsilon_F$  (viz. 1950.0) in analyzing and discussing their data. Similarly, Newcomb (1894) develops expressions for the motion of the ecliptic pole relative to the ecliptic of 1850.0 ( $\epsilon_0$ ), yet we might require the comparable values relative to 1900.0 ( $\epsilon_F$ ) where the fundamental constants are defined. Or, as in the current situation, our basic epoch  $\epsilon_0$  will be J2000.0, and we must find a means of relating to Newcomb's results for the motion of the ecliptic pole relative to 1850.0. It is for the purpose of transferring from one fixed epoch ( $\epsilon_0$ ) to another ( $\epsilon_F$ ) that it is convenient to develop the expression quantities relative to two fixed epochs. One first solves the easier problem of expressing the quantities for  $\epsilon_D$  relative to  $\epsilon_0$  and one then develops the expressions for  $\epsilon_D$  relative to  $\epsilon_F$ .

In Figure 1 we depict the celestial sphere with ecliptics and equators shown for two epochs  $\epsilon_F$  and  $\epsilon_D$ .  $\bar{P}_0$  and  $P$  represent the mean pole of earth's equator at the fixed epoch  $\epsilon_F$  and the epoch of date  $\epsilon_D$  while  $\bar{C}_0$  and  $C$  represent the ecliptic pole at those two epochs. Light lines represent portions of great circles on the back side of the sphere. The vernal equinox at  $\epsilon_F$  is denoted by  $\bar{Y}_0$  while the mean equinox of date is denoted by  $Y$ . The relevant precession quantities are also depicted in the figure and the symbols are further defined in Table 1. In Figure 2 we present a polar diagram of the precession quantities. As given in Column 2 of Table 1, we have attempted to develop a consistent method for describing the accumulated precessional angles and their rates. We have attempted to develop a system of notation which does not contain any ambiguity, which has a logical structure, and which retains as many elements of the conventional notation as possible. In the past there have been numerous conflicting sets of symbols employed and much confusion exists in the notation for precessional quantities.

Since it often is important to carefully distinguish between the angle due to the accumulated precessional displacement ( $\alpha_A$ ) from a fixed epoch, and the instantaneous rate of change ( $z$ ) of a precessional quantity,

we have developed the following method of notation. Unless otherwise noted, the time is regarded as dynamical time and is measured in Julian centuries of length 36525 days.

Let  $T$  represent the time from  $\mathcal{E}_0$  to  $\mathcal{E}_F$  (e.g.  $\mathcal{E}_0$  being 1900.0, and  $\mathcal{E}_F$  being 1950.0). Let  $t$  represent the time from  $\mathcal{E}_F$  to the mean epoch of date  $\mathcal{E}_D$ , and let  $\tau$  represent time from  $\mathcal{E}_0$  to  $\mathcal{E}_D$ , so that  $\tau = T + t$ . Let the symbol  $\alpha_A$  represent the accumulated precessional displacement in an angle from epoch  $\mathcal{E}_F$  to the mean epoch of date  $\mathcal{E}_D$ . Let  $\bar{\alpha}_A$  represent the analogous displacement from  $\mathcal{E}_0$  to  $\mathcal{E}_F$ , and let  $\tilde{\alpha}_A$  represent the displacement from  $\mathcal{E}_0$  to  $\mathcal{E}_D$ , each displacement being measured in its relevant system. Then in general we seek to obtain expressions for the quantities

$$\begin{aligned} \alpha_A &= (\alpha_1 + \alpha_2 T + \alpha_3 T^2)t + (\alpha'_1 + \alpha'_2 T)t^2 + \alpha''_1 t^3 \\ \bar{\alpha}_A &= \alpha_A(T=0, t=T) = \alpha_1 T + \alpha'_1 T^2 + \alpha''_1 T^3 \\ \tilde{\alpha}_A &= \alpha_A(T=0, t=\tau) = \alpha_1 \tau + \alpha'_1 \tau^2 + \alpha''_1 \tau^3 \end{aligned} \quad (1)$$

which describe the accumulated precessional displacements. Although  $\bar{\alpha}_A$  and  $\tilde{\alpha}_A$  are of the same class (both being measured from  $T=0$ , i.e.  $\mathcal{E}_0$ ), and hence only one usually would be sufficient, we explicitly distinguish between the accumulated angles from  $\mathcal{E}_0$  to  $\mathcal{E}_F$  ( $\bar{\alpha}_A$ ) and from  $\mathcal{E}_0$  to  $\mathcal{E}_D$  ( $\tilde{\alpha}_A$ ) in the subsequent developments. It may be noted that our formulation is also applicable in precessing from one fixed equinox at  $\mathcal{E}_1$  to another at  $\mathcal{E}_2$  by identifying  $\mathcal{E}_1$  with  $\mathcal{E}_F$  and  $\mathcal{E}_2$  with  $\mathcal{E}_D$ .

For quantities which cannot be regarded solely as displacements (i.e.  $H_A, \epsilon_A, \omega_A$ ), we include additional terms, as given in Table 1, which are independent of  $t$ .

By the symbol  $\alpha$  (no subscript) we will denote the instantaneous rate of change of the corresponding angle,

$$\alpha = \left( \frac{d\alpha_A}{dt} \right)_{t=0} = \alpha_1 + \alpha_2 T + \alpha_3 T^2. \quad (2)$$

It is seen that in our notation, the power of time ( $T$  or  $t$ ) present in the accumulated precessional displacement is represented by the sum of subscripts and superscripts (e.g.  $\alpha_3, \alpha'_2$  and  $\alpha''_1$  contain time to the third power in the accumulated precessional displacements, namely  $T^2 t, T t^2$  and  $t^3$ ). The convention adopted for  $\alpha$  is the usual one for precessional speeds, but it avoids confusion by clearly showing at which point it is evaluated. Note that for angles measured relative to an equinox,  $\alpha$  is the speed relative to the equinox of date (since  $t=0$ ), and is fundamentally different from  $(d\alpha_A/dt)_{T=0}$  (vide Clemence, 1948 and errata). Similarly, denoting by  $\alpha'$  and  $\alpha''$  (no subscripts) the quantities

$$\alpha' = \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 \alpha_A}{dt^2} \right)_{t=0}$$

$$\alpha'' = \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3 \alpha_A}{dt^3} \right)_{t=0}$$

we may also write Equation (1) in the compact form

$$\alpha_A = \alpha t + \alpha' t^2 + \alpha'' t^3.$$

It should be noted that for  $H, \epsilon$  and  $\omega$  which designate instantaneous values, Equation (2) has to be replaced by  $\alpha = (\alpha_A)_{t=0}$ .

Various notations which have been employed by other authors are listed in Table 2. From the table (entry  $p_A$ ) it is seen that the "general precession" (strictly, the speed of general precession in longitude) is represented by the symbol  $p$ , where

$$p = p_1 + p_2 T + p_3 T^2 \quad (3)$$

in accordance with conventional usage. Note that here we employ the symbol  $p_1$  to represent the general precession at epoch  $\mathcal{E}_0$ , and not for speed of the luni-solar precession as other authors do. The new symbol for the speed of luni-solar precession (entry  $\psi_A$ ) is  $\psi = \psi_1 + \psi_2 T + \psi_3 T^2$  where  $\psi_1$  is the speed at  $\mathcal{E}_0$ .

The equatorial precession quantities  $\zeta_A, z_A$  and  $\theta_A$  (see Figs. 1 and 2) are the angles most appropriate to precess from a fixed equinox and equator at epoch  $\mathcal{E}_F$  to the mean equinox and equator of date  $\mathcal{E}_D$ , the transformation in equatorial rectangular coordinates being

$$(x, y, z)_{\mathcal{E}_D} = (x, y, z)_{\mathcal{E}_F} R(-\zeta_A) Q(\theta_A) R(-z_A) = (x, y, z)_{\mathcal{E}_F} A \quad (4)$$

where

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Performing the matrix multiplications yields the elements of the matrix  $A = R(-\zeta_A) Q(\theta_A) R(-z_A)$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \zeta_A \cos \theta_A \cos z_A - \sin \zeta_A \sin z_A \\ a_{12} &= \cos \zeta_A \cos \theta_A \sin z_A + \sin \zeta_A \cos z_A \\ a_{13} &= \cos \zeta_A \sin \theta_A \\ a_{21} &= -\sin \zeta_A \cos \theta_A \cos z_A - \cos \zeta_A \sin z_A \\ a_{22} &= -\sin \zeta_A \cos \theta_A \sin z_A + \cos \zeta_A \cos z_A \\ a_{23} &= -\sin \zeta_A \sin \theta_A \\ a_{31} &= -\sin \theta_A \cos z_A \\ a_{32} &= -\sin \theta_A \sin z_A \\ a_{33} &= \cos \theta_A \end{aligned} \quad (5)$$

which are given in numerical form (for Newcomb's value of general precession) in the *Explanatory Supplement* (p. 34). The precessional parameters  $m$  and  $n$ , used in describing the speed of precession in right ascension and declination, are represented by

$$m = \frac{d}{dt} (\zeta_A + z_A)_{t=0} = (\zeta_1 + z_1) + (\zeta_2 + z_2)T + (\zeta_3 + z_3)T^2$$

TABLE 1. NOMENCLATURE

Symbol	General Form <sup>a</sup>	Name	Reference Plane	Initial Point	Final Point
$\epsilon_A$	$(q_1 + q_2T + q_3T^2)\epsilon + (q'_1 + q'_2T)\epsilon^2 + q''_1\epsilon^3$	Angle between ecliptics	Inclination	$\epsilon_F$ ecliptic	$\epsilon_D$ ecliptic
$\bar{\epsilon}_A$	$q_1T + q'_1T^2 + q''_1T^3$		Inclination	$\epsilon_0$ ecliptic	$\epsilon_F$ ecliptic
$\tilde{\epsilon}_A$	$q_1T + q'_1T^2 + q''_1T^3$		Inclination	$\epsilon_0$ ecliptic	$\epsilon_D$ ecliptic
$\Pi_A$	$x_0 + x_1T + x_2T^2 + (y_1 + y_2T)\epsilon + y'_1\epsilon^2$	Longitude of node of moving ecliptic upon fixed ecliptic	$\epsilon_F$ ecliptic	$\epsilon_F$ equinox	$\epsilon_D$ ecliptic
$\bar{\Pi}_A$	$x_0 + y_1T + y'_1\epsilon^2$		$\epsilon_0$ ecliptic	$\epsilon_0$ equinox	$\epsilon_F$ ecliptic
$\tilde{\Pi}_A$	$x_0 + y_1T + y'_1\epsilon^2$		$\epsilon_0$ ecliptic	$\epsilon_0$ equinox	$\epsilon_D$ ecliptic
$\sin \epsilon_A \sin \Pi_A$	$(s_1 + s_2T + s_3T^2)\epsilon + (s'_1 + s'_2T)\epsilon^2 + s''_1\epsilon^3$	Expressions (via Newcomb) for planetary perturbations of ecliptic plane	$\epsilon_F$ ecliptic		
$\sin \bar{\epsilon}_A \sin \bar{\Pi}_A$	$s_1T + s'_1T^2 + s''_1T^3$		$\epsilon_0$ ecliptic		
$\sin \tilde{\epsilon}_A \sin \tilde{\Pi}_A$	$s_1T + s'_1T^2 + s''_1T^3$		$\epsilon_0$ ecliptic		
$\sin \epsilon_A \cos \Pi_A$	$(c_1 + c_2T + c_3T^2)\epsilon + (c'_1 + c'_2T)\epsilon^2 + c''_1\epsilon^3$	Expressions (via Newcomb) for planetary perturbations of ecliptic plane	$\epsilon_F$ ecliptic		
$\sin \bar{\epsilon}_A \cos \bar{\Pi}_A$	$c_1T + c'_1T^2 + c''_1T^3$		$\epsilon_0$ ecliptic		
$\sin \tilde{\epsilon}_A \cos \tilde{\Pi}_A$	$c_1T + c'_1T^2 + c''_1T^3$		$\epsilon_0$ ecliptic		
$c_0$	$c_0$	Obliquity of the ecliptic	Inclination	$\epsilon_0$ ecliptic	$\epsilon_0$ equator
$\bar{c}_A$	$\bar{c}_A + (c_1 + c_2T + c_3T^2)\epsilon + (c'_1 + c'_2T)\epsilon^2 + c''_1\epsilon^3$		Inclination	$\epsilon_D$ ecliptic	$\epsilon_D$ equator
$\tilde{c}_A$	$c_0 + c_1T + c'_1T^2 + c''_1T^3$		Inclination	$\epsilon_F$ ecliptic	$\epsilon_F$ equator
$\omega_A$	$\bar{c}_A + (\omega'_1 + \omega'_2T)\epsilon^2 + \omega''_1\epsilon^3$	Inclination of moving equator on fixed ecliptic	Inclination	$\epsilon_F$ ecliptic	$\epsilon_D$ equator
$\bar{\omega}_A$	$c_0 + \omega'_1T^2 + \omega''_1T^3$		Inclination	$\epsilon_0$ ecliptic	$\epsilon_F$ equator
$\tilde{\omega}_A$	$c_0 + \omega'_1T^2 + \omega''_1T^3$		Inclination	$\epsilon_0$ ecliptic	$\epsilon_D$ equator
$\psi_A$	$(\psi_1 + \psi_2T + \psi_3T^2)\epsilon + (\psi'_1 + \psi'_2T)\epsilon^2 + \psi''_1\epsilon^3$	Luni-solar precession	$\epsilon_F$ ecliptic	$\epsilon_F$ equinox	$\epsilon_D$ equator
$\bar{\psi}_A$	$\psi_1T + \psi'_1T^2 + \psi''_1T^3$		$\epsilon_0$ ecliptic	$\epsilon_0$ equinox	$\epsilon_F$ equator
$\tilde{\psi}_A$	$\psi_1T + \psi'_1T^2 + \psi''_1T^3$		$\epsilon_0$ ecliptic	$\epsilon_0$ equinox	$\epsilon_D$ equator
$\chi_A$	$(x_1 + x_2T + x_3T^2)\epsilon + (x'_1 + x'_2T)\epsilon^2 + x''_1\epsilon^3$	Planetary precession	$\epsilon_D$ equator	$\epsilon_F$ ecliptic	$\epsilon_D$ equinox
$\bar{\chi}_A$	$x_1T + x'_1T^2 + x''_1T^3$		$\epsilon_F$ equator	$\epsilon_0$ ecliptic	$\epsilon_F$ equinox
$\tilde{\chi}_A$	$x_1T + x'_1T^2 + x''_1T^3$		$\epsilon_0$ equator	$\epsilon_0$ ecliptic	$\epsilon_D$ equinox

Symbol	General Form	Name	Reference Plane	Initial Point	Final Point
$\lambda_A$	-	Ecliptic longitude of axis of rotation	$\mathcal{E}_D$ ecliptic	$\mathcal{E}_D$ equinox	$\mathcal{E}_F$ ecliptic
$\bar{\lambda}_A$	-		$\mathcal{E}_F$ ecliptic	$\mathcal{E}_F$ equinox	$\mathcal{E}_D$ ecliptic
$\tilde{\lambda}_A$	-		$\mathcal{E}_D$ ecliptic	$\mathcal{E}_D$ equinox	$\mathcal{E}_D$ ecliptic
$P_A = \lambda_A - \Pi_A$	$(p_1 + p_2T + p_3T^2)t + (p_1' + p_2'T)t^2 + p_1''t^3$	General precession (Andoyer)	A: $\mathcal{E}_D$ ecliptic II: $\mathcal{E}_F$ ecliptic	A: $\mathcal{E}_D$ equinox II: $\mathcal{E}_E$ equinox	$\mathcal{E}_F$ ecliptic $\mathcal{E}_D$ ecliptic
$\bar{P}_A = \bar{\lambda}_A - \bar{\Pi}_A$	$p_1T + p_1'T^2 + p_1''T^3$		A: $\mathcal{E}_F$ ecliptic II: $\mathcal{E}_D$ ecliptic	A: $\mathcal{E}_F$ equinox II: $\mathcal{E}_D$ equinox	$\mathcal{E}_D$ ecliptic $\mathcal{E}_F$ ecliptic
$\tilde{P}_A = \tilde{\lambda}_A - \tilde{\Pi}_A$	$p_1T + p_1'T^2 + p_1''T^3$		A: $\mathcal{E}_D$ ecliptic II: $\mathcal{E}_D$ ecliptic	A: $\mathcal{E}_D$ equinox A: $\mathcal{E}_D$ equinox	$\mathcal{E}_D$ ecliptic $\mathcal{E}_D$ ecliptic
$P_N$	$P_A + (\eta_1' + \eta_2'T)t^2 + \eta_1''t^3$	General precession (Newcomb)	$\mathcal{E}_F$ ecliptic	$\mathcal{E}_F$ equinox	$K_D(C_F)$
$\bar{P}_N$	$\bar{P}_A + \eta_1'T^2 + \eta_1''T^3$		$\mathcal{E}_D$ ecliptic	$\mathcal{E}_D$ equinox	$K_F(C_D)$
$\tilde{P}_N$	$\tilde{P}_A + \eta_1'T^2 + \eta_1''T^3$		$\mathcal{E}_D$ ecliptic	$\mathcal{E}_D$ equinox	$K_D(C_D)$
$\zeta_A$	$(\zeta_1 + \zeta_2T + \zeta_3T^2)t + (\zeta_1' + \zeta_2'T)t^2 + \zeta_1''t^3$	Equatorial precession parameter. Description is for $90^\circ - \zeta_A$	$\mathcal{E}_F$ equator	$\mathcal{E}_F$ equinox	$\mathcal{E}_D$ equator
$\bar{\zeta}_A$	$\zeta_1T + \zeta_1'T^2 + \zeta_1''T^3$		$\mathcal{E}_D$ equator	$\mathcal{E}_D$ equinox	$\mathcal{E}_F$ equator
$\tilde{\zeta}_A$	$\zeta_1T + \zeta_1'T^2 + \zeta_1''T^3$		$\mathcal{E}_D$ equator	$\mathcal{E}_D$ equinox	$\mathcal{E}_D$ equator
$z_A$	$(z_1 + z_2T + z_3T^2)t + (z_1' + z_2'T)t^2 + z_1''t^3$	Equatorial precession parameter. Description is for $90^\circ + z_A$	$\mathcal{E}_D$ equator	$\mathcal{E}_D$ equinox	$\mathcal{E}_F$ equator
$\bar{z}_A$	$z_1T + z_1'T^2 + z_1''T^3$		$\mathcal{E}_F$ equator	$\mathcal{E}_F$ equinox	$\mathcal{E}_D$ equator
$\tilde{z}_A$	$z_1T + z_1'T^2 + z_1''T^3$		$\mathcal{E}_D$ equator	$\mathcal{E}_D$ equinox	$\mathcal{E}_D$ equator
$\theta_A$	$(\theta_1 + \theta_2T + \theta_3T^2)t + (\theta_1' + \theta_2'T)t^2 + \theta_1''t^3$	Equatorial precession parameter. Angle between equators	Inclination	$\mathcal{E}_F$ equator	$\mathcal{E}_D$ equator
$\bar{\theta}_A$	$\theta_1T + \theta_1'T^2 + \theta_1''T^3$		Inclination	$\mathcal{E}_D$ equator	$\mathcal{E}_F$ equator
$\tilde{\theta}_A$	$\theta_1T + \theta_1'T^2 + \theta_1''T^3$		Inclination	$\mathcal{E}_D$ equator	$\mathcal{E}_D$ equator

} See discussion

- Notes: (1)  $\mathcal{E}_D$  represents the basic epoch (e.g., J2000.0)  
 $\mathcal{E}_F$  represents an arbitrary fixed epoch (e.g., J2050.0)  
 $\mathcal{E}_D$  represents the mean epoch of date
- (2)  $T$  represents time from  $\mathcal{E}_D$  to  $\mathcal{E}_F$   
 $t$  represents time from  $\mathcal{E}_F$  to  $\mathcal{E}_D$   
 $T + t$  represents time from  $\mathcal{E}_D$  to  $\mathcal{E}_D$
- (3) The symbol  $z_A = (z_1 + z_2T + z_3T^2)t + (z_1' + z_2'T)t^2 + z_1''t^3$  represents the accumulated angle from  $\mathcal{E}_F$  to  $\mathcal{E}_D$   
 The symbol  $\bar{z}_A = z_A(T = 0, t = T) = z_1T + z_1'T^2 + z_1''T^3$  represents the accumulated angle from  $\mathcal{E}_D$  to  $\mathcal{E}_F$   
 The symbol  $\tilde{z}_A = z_A(T = 0, t = t) = z_1t + z_1't^2 + z_1''t^3$  represents the accumulated angle from  $\mathcal{E}_D$  to  $\mathcal{E}_D$
- (4) The symbol  $\dot{z}_A = (dz_A/dt)_{t=0}$  represents the instantaneous rate of change of  $z_A$  at time  $T$
- (5) The suffix A denotes the accumulated value, without exception.

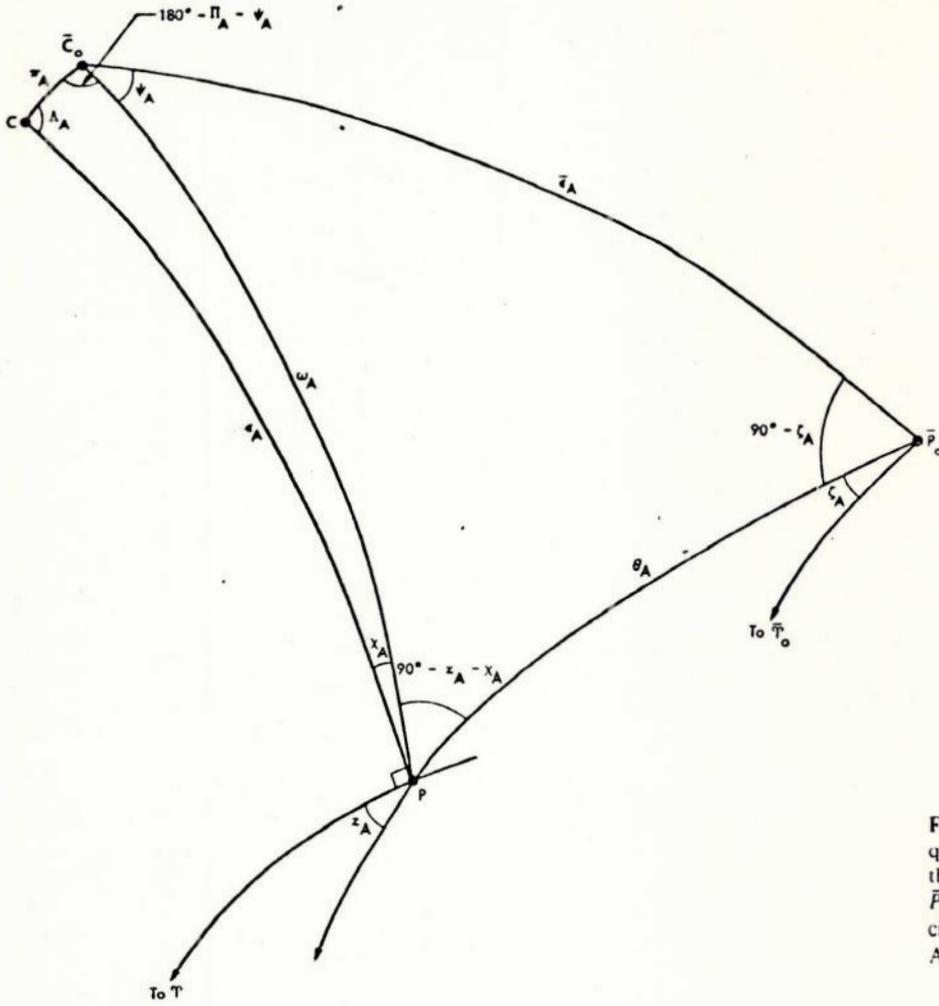


Fig. 2. Polar diagram of precession quantities depicted in Figure 1. Shown are the ecliptic poles  $\bar{C}_0$ ,  $C$  and equatorial poles  $\bar{P}_0$ ,  $P$ . The arc  $\bar{P}_0P$  is a portion of a great circle passing through the celestial poles. Also shown are the equinoctial colures

and

$$n = \frac{d}{dt} (\theta_A)_{t=0} = \theta_1 + \theta_2 T + \theta_3 T^2. \tag{6}$$

We will now proceed to develop the formulation which yields values for the various coefficients in the expressions for the precession quantities  $\chi_A$ .

**Motion of Ecliptic Pole**

The motion of the ecliptic pole at epoch  $\mathcal{E}_D$  relative to the fixed ecliptic at the basic epoch  $\mathcal{E}_0$  is generally described in terms of the angles  $\tilde{\pi}_A$  and  $\tilde{\Pi}_A$ , in the form given in Table 1 which represents the angular momentum components,

$$\begin{aligned} \sin \tilde{\pi}_A \sin \tilde{\Pi}_A &= s_1 \tau + s'_1 \tau^2 + s''_1 \tau^3 \\ \sin \tilde{\pi}_A \cos \tilde{\Pi}_A &= c_1 \tau + c'_1 \tau^2 + c''_1 \tau^3. \end{aligned} \tag{7}$$

These quantities  $s$  and  $c$ , coupled with  $\epsilon_0$  and  $p$ , enable one to calculate power series expressions for all the precession quantities. Although we will also give the individual components  $\pi_A$  and  $\Pi_A$  in our final expressions, it is to be understood that the more basic

quantities are  $\sin \pi_A \sin \Pi_A$  and  $\sin \pi_A \cos \Pi_A$ , the individual angles being determined by their trigonometric relations.

Newcomb (1894) derived values of  $\kappa \sin L$  and  $\kappa \cos L$ , which are equivalent to  $d(\sin \tilde{\pi}_A \sin \tilde{\Pi}_A)/d\tau$  and  $d(\sin \tilde{\pi}_A \cos \tilde{\Pi}_A)/d\tau$ , respectively. Newcomb's values, however, were expressed relative to the fixed 1850.0 ecliptic for epochs 1600, 1850 and 2100. Since 1850.0 will not, in general, be our basic epoch  $\mathcal{E}_0$  we will employ  $\sin \pi^* \sin \Pi^*$  and  $\sin \pi^* \cos \Pi^*$  to represent Newcomb's data in the form

$$\begin{aligned} \sin \pi^* \sin \Pi^* &= s_1^* T_1 + s_1'^* T_1^2 + s_1''^* T_1^3 \\ \sin \pi^* \cos \Pi^* &= c_1^* T_1 + c_1'^* T_1^2 + c_1''^* T_1^3 \end{aligned} \tag{8}$$

where  $T_1$  is measured in Julian centuries relative to 1850.0 (taken as JED 2396758.20358095). The epochs 1600 and 2100 are assumed to lie exactly 2.5 Julian centuries on either side of 1850.0. We subsequently will develop a means of obtaining  $\sin \tilde{\pi}_A \sin \tilde{\Pi}_A$  and  $\sin \tilde{\pi}_A \cos \tilde{\Pi}_A$  relative to the fixed basic epoch  $\mathcal{E}_0$ , given the values relative to 1850.0.

The planetary components  $\kappa \sin L$  and  $\kappa \cos L$  are presented in Table 3 for Newcomb's planetary masses at epochs 1600, 1850 and 2100. The values in parentheses

TABLE 2. EQUIVALENT NOTATIONS FOR DISPLACEMENTS AND RATES\*

NEW	Bessel	Opp	Newcomb	Andoyer	deBall	IAU	W&C	Lieske	ARI	CdT	AE
Displacements											
$\pi_A$		$\pi$	$k$	$(k)$	$\pi_r$		$\pi_1$	$\bar{\pi}_1$	$(\pi)$	$k$	
$\Pi_A$		$\Pi$	$180^\circ - N$	$(\varphi)$	$\Pi_r$		$\Pi_1$	$\bar{\Pi}_1$	$(\Pi)$	$\varphi$	
$e_A$		$e_0$	$e_0$	$e_0$	$e_0$			$e_0$	$e_0$		
$e_A$		$e$		$(e)$	$(e)_r$		$e$	$\bar{e}$			
$\omega_A$		$e'$	$e_1$	$(e_1)$	$(e')_r$		$e_1$	$\bar{e}_1$	$(e_1)$	$\omega_1$	$e_1$
$\psi_A$		$l'$	$\psi$	$(\psi)$	$(-\psi)_r$		$\psi_1$	$\bar{\psi}$	$(\psi_1)$	$\psi$	
$\chi_A$		$a$	$\lambda$	$(\chi)$	$(a)_r$		$a$	$\bar{\lambda}$	$(a)$	$\chi$	
$\Lambda_A$				$(\omega)$				$\bar{\Lambda}$			
$\rho_A (= \Lambda_A - \Pi_A)$		$l$		$(\omega) - (\varphi)$	$(\Lambda)_r$		$\psi$	$\bar{\Lambda} - \bar{\Pi}_1$	$(\psi)$	$\lambda$	
$\xi_A$		$p$	$\xi_0$	$90^\circ - (\rho)$	$p$	$\xi$	$\xi_0$	$\bar{\xi}_0$	$90^\circ - (N)$	$90^\circ - \rho$	$\xi_0$
$z_A$		$m - p$	$z$	$(\mu) - 90^\circ$	$m - p$		$z$	$\bar{z}$	$(N) + (m) - 90^\circ$	$\mu + \rho - 90^\circ$	$z$
$\theta_A$		$n$	$\theta$	$(l)$	$n$	$\nu$	$J$	$\bar{\theta}$	$(n)$	$l$	$\theta$
$\bar{\pi}_A$	$\pi$	$(\pi)$		$k$	$\pi$	$\pi$		$\pi_1$			$\pi$
$\bar{\Pi}_A$	$\Pi$	$(\Pi)$		$\varphi$	$\Pi$	$\Pi$		$\Pi_1$			$\Pi$
$\bar{e}_A$	$\omega$	$(e)$	$e$	$e$	$(e)$	$e$	$e^*$	$\bar{e}_0$	$e$	$\omega$	$e$
$\bar{\psi}_A$	$\psi$	$(l')$		$\psi$	$(-\psi)$			$\psi$			
$\bar{\chi}_A$	$\lambda$	$(a)$		$\chi$	$(a)$			$\lambda$			
$\bar{\Lambda}_A$				$\omega$				$\Lambda$			
$\bar{\rho}_A$	$\psi_1$	$(l)$		$\omega - \varphi$	$(\Lambda)$			$\Lambda - \Pi_1$			
$\bar{\xi}_A$	$z'$	$(\rho)$		$90^\circ - \rho$				$\xi_0$			
$\bar{z}_A$	$z$	$(m) - (\rho)$		$\mu - 90^\circ$				$z$			
$\bar{\theta}_A$	$\theta$	$(n)$		$l$				$\theta$			
Rates $\left[ \frac{d\alpha_A}{dt} \right]_{t=0}$											
$\dot{\psi}$		$L'_1$	$p$	$f$	$-\dot{\psi}$	$p_1$	$f_1$	$\bar{f}$	$\psi_1$	$p_1$	$\dot{\psi}'$
$\dot{\chi}$		$A'_1$	$\lambda'$	$g$	$a$	$p_2$	$z_1$	$\bar{g}$	$a$		$\lambda'$
$\dot{p}$		$L_1$	$l$	$h$	$\Lambda$	$p$	$h_1$	$\bar{h}$	$\psi$	$p_2$	$p$
$\dot{\xi}$		$\frac{1}{2}m_1$	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}r$	$\frac{1}{2}m_1$		$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}\bar{r}$	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$
$\dot{z}$		$\frac{1}{2}m_1$	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}r$	$\frac{1}{2}m_1$		$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}\bar{r}$	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$
$\dot{\theta}$		$n_1$	$n$	$s$	$n_1$		$n$	$\bar{\omega}$	$n$	$n$	$n$

\*Sources

- NEW: Notation used in this paper
- Bessel: Bessel, F. W. 1830, *Tabulae Regiomontanae*.
- Opp: Oppolzer, Th. R. v. 1882, *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten*, 1. Bd., 2. Aufl., Leipzig.
- Newcomb: Newcomb, S. 1906, *A Compendium of Spherical Astronomy*, New York.
- Andoyer: Andoyer, H. 1911, *Bull. Astr.* 28, 67.
- deBall: de Ball, L. 1912, *Lehrbuch der Sphärischen Astronomie*, Leipzig.
- IAU: International Astronomical Union, *Transactions* 6, 346 (1938).
- W & C: Woolard, E. W. and G. M. Clemence, 1966, *Spherical Astronomy*.
- Lieske: Lieske, J. H. 1967, NASA Technical Report 32-1044.
- ARI: Astronomisches Rechen-Institut Heidelberg, cf. Kopff, A. and F. Gondolatsch 1950, *Grundbegriffe der Sphärischen Astronomie*.
- CdT: *Connaissance des Temps* (Bureau des Longitudes, Paris), annual volumes from 1914 onwards.
- AE: *Astronomical Ephemeris*, in particular: *Explanatory Supplement to the A.E.*, London, 1961.

are the original numbers of Newcomb (1894, p. 377), while the extended precision values have been derived by repeating Newcomb's calculations. The entries for Pluto are due to Clemence (1948). The extended precision values are needed for two reasons: (a) Newcomb's original values were only given to 0.001 which results in truncation difficulties with the higher-order terms upon integrating  $\kappa \sin L$  and  $\kappa \cos L$  to obtain  $\sin \pi^* \sin \Pi^*$  and  $\sin \pi^* \cos \Pi^*$ , and (b) round-off errors are introduced in

calculating the components of  $\kappa \sin L$  and  $\kappa \cos L$  for revised values of planetary masses. In addition, it is impossible to duplicate Andoyer's (1911) expressions for the precession quantities if one employs Newcomb's components listed in Table 3. The reason is that Andoyer employed the pre-rounded sum of the components, which is no longer available. (If one sums the components, excluding Pluto, for  $\kappa \sin L$  at epoch 1600, for example, he finds +4.274, but Newcomb listed the sum

Table 3. Newcomb values of  $\frac{d}{dt}(\sin \pi^* \frac{\sin \Pi^*}{\cos \Pi^*})$  for 3 epochs\*

Planet	Newcomb inverse Mass $M_{\odot}^{-1}$	$\kappa \sin L = \frac{d}{dt}(\sin \pi^* \sin \Pi^*)$			$\kappa \cos L = \frac{d}{dt}(\sin \pi^* \cos \Pi^*)$		
		1600	1850	2100	1600	1850	2100
Mercury	7500000	+0.247266 (+0.247	+0.250818 +0.251	+0.254359 +0.254	-0.211715 - 0.212	- 0.209848 - 0.210	- 0.207971 - 0.208)
Venus	410000	+6.789930 (+6.790	+7.411897 +7.412	+8.031934 +8.032	-28.472881 -28.473	-28.332065 -28.332	-28.185002 -28.185)
Mars	3093500	+0.617570 (+0.617	+0.634309 +0.634	+0.650891 +0.651	- 0.734839 - 0.735	- 0.719136 - 0.719	- 0.702991 - 0.703)
Jupiter	1047.88	-2.804002 (-2.804	-2.511528 -2.511	-2.224385 -2.224	-16.169696 -16.170	-16.046939 -16.047	-15.919290 -15.919)
Saturn	3501.6	-0.574201 (-0.574	-0.542325 -0.542	-0.510169 -0.510	- 1.311104 - 1.310	- 1.318862 - 1.318	- 1.325625 - 1.325)
Uranus	22756	+0.002028 (+0.002	+0.002375 +0.002	+0.002720 +0.003	-0.007909 - 0.008	- 0.007873 - 0.008	- 0.007831 - 0.008)
Neptune	19540	-0.003798 (-0.004	-0.003694 -0.004	-0.003589 -0.004	- 0.004388 - 0.004	- 0.004377 - 0.004	- 0.004364 - 0.004)
Pluto	360000	-0.0004 (-0.0004	-0.0004 -0.0004	-0.0004 -0.0004	- 0.0012 - 0.0012	- 0.0012 - 0.0012	- 0.0012 - 0.0012

\* Units are arcseconds per Julian century and are referred to the fixed ecliptic of 1850.0. Values listed in parentheses are Newcomb's original numbers taken from *Astron. Pap.* 5, Part 4, page 377 (1894)

as +4".275.) For these reasons it was found necessary to repeat Newcomb's calculations and to derive the extended precision results listed in Table 3. In redeveloping Newcomb's (1894) values, we employed his basic data regarding planetary orbits (pp. 336-338). Newcomb's values result from employing the disturbing function (p. 305)

$$F = \frac{1}{2} \{ P_{00}^{00} + (e^2 + e'^2) P_{00}^{20} + e^4 P_{00}^{40} + \dots \} + \{ ee' P_{-11}^{11} + e^3 e' P_{11}^{31} + \dots \} \cos(\omega - \omega') + \dots \quad (9)$$

where  $P_{jj}^{nn}$  are Newcomb operators and where  $e, e'$  and  $\omega, \omega'$  are the eccentricities and arguments of perihelion, respectively, for inner and outer planets. We employed Newcomb's general formulation for the operators  $P_{jj}^{nn}$  in terms of orbital elements, rather than the low-precision numerical values ("Special Values") which he also listed<sup>1</sup>.

In redeveloping the extended precision expressions listed in Table 3 it was also found that Newcomb's calculated results for Saturn employed the wrong mass. Apparently (see p. 336 entry  $\log M = 3.58865$ , implying  $M = 3878.4$ ) Newcomb employed the wrong mass  $\mu$  in calculating the mass factor for Saturn's effect on the earth,

$$M = n_{\oplus} \alpha m_{\eta} / \mu \quad (10)$$

<sup>1</sup> The relevant operators are given by Newcomb on pages 350-351, 356-357, 363-367 for planetary perturbations on the earth. The following typographical errors were corrected:

Venus p. 357	$P_{00}^{22} : 922 \sigma$	should read $922 \sigma^2$
Mars p. 363	$P_{00}^{20} : -3683 \sigma^2$	should read $-36.83 \sigma^2$
Mars p. 364	$P_{-11}^{14} : -12 M \sigma^4$	should read $-1.2 M \sigma^4$
Jupiter p. 364	$P_{00}^{20} : -200.3 m \sigma^2$	should read $-209.3 m \sigma^2$
Uranus p. 367	$P_{-11}^{11} : -2.1 \sigma^2$	should read $-2.1 m \sigma^2$
Neptune p. 367	$P_{00}^{22} :$	should read $1.255 m - 7.6 m \sigma^2$

where  $n_{\oplus}$  is the earth's sidereal mean motion,  $\alpha = a_{\oplus} / a_{\eta}$  and  $\mu = 1 + m_{\eta}$ . The correct equation is  $\mu = 1 + m_{\oplus}$ , as used for other calculations. This error accounts for the Saturn disagreement in Table 3 between Newcomb's original value and our extended precision value. Newcomb's original result corresponds to a Saturn mass of  $m_{\eta}^{-1} = 3503$ . With the preceding discrepancies taken into account, we are able to duplicate Andoyer's series if we employ the masses given in Table 3.

To derive the series for  $\sin \pi^* \sin \Pi^*$  and  $\sin \pi^* \cos \Pi^*$  from the data in Table 3, we proceed as follows. Denote by  $\alpha_{-1}, \alpha_0$  and  $\alpha_1$  the sum of the planetary contributions to  $\kappa \sin L$  for epochs 1600, 1850 and 2100, respectively. Let  $\beta_j$  denote similar results for  $\kappa \cos L$ . If the mass of a planet relative to the sun is denoted by  $M$  (the inverse masses  $M^{-1}$  are listed in Table 3 for Newcomb and in Table 4 for the recently adopted IAU values), then, for example, we will have for  $\frac{d}{dT_1}(\sin \pi^* \sin \Pi^*)$  at epoch 1600 referred to the ecliptic of 1850.0,

$$\alpha_{-1} = 0''.247266 \cdot (7\,500\,000 M_{\odot}) + 6''.789930 \cdot (410\,000 M_{\odot}) + 0''.617570 \cdot (3\,093\,500 M_{\odot}) - 2''.804002 \cdot (1047.88 M_{\text{J}}) - 0''.574201 \cdot (3501.6 M_{\text{S}}) + 0''.002028 \cdot (22\,756 M_{\text{U}}) - 0''.003798 \cdot (19\,540 M_{\text{N}}) - 0''.0004 \cdot (360\,000 M_{\text{P}}). \quad (11)$$

We can then obtain, at time  $T_1$  from 1850.0, the power series expansion, relative to the 1850.0 ecliptic, from Stirling's interpolation formula as

$$\begin{aligned} \sin \pi^* \sin \Pi^* &= \alpha_0 T_1 + \frac{1}{10} (\alpha_1 - \alpha_{-1}) T_1^2 + \frac{2}{75} (\alpha_1 - 2\alpha_0 + \alpha_{-1}) T_1^3 \\ \sin \pi^* \cos \Pi^* &= \beta_0 T_1 + \frac{1}{10} (\beta_1 - \beta_{-1}) T_1^2 + \frac{2}{75} (\beta_1 - 2\beta_0 + \beta_{-1}) T_1^3. \end{aligned} \quad (12)$$

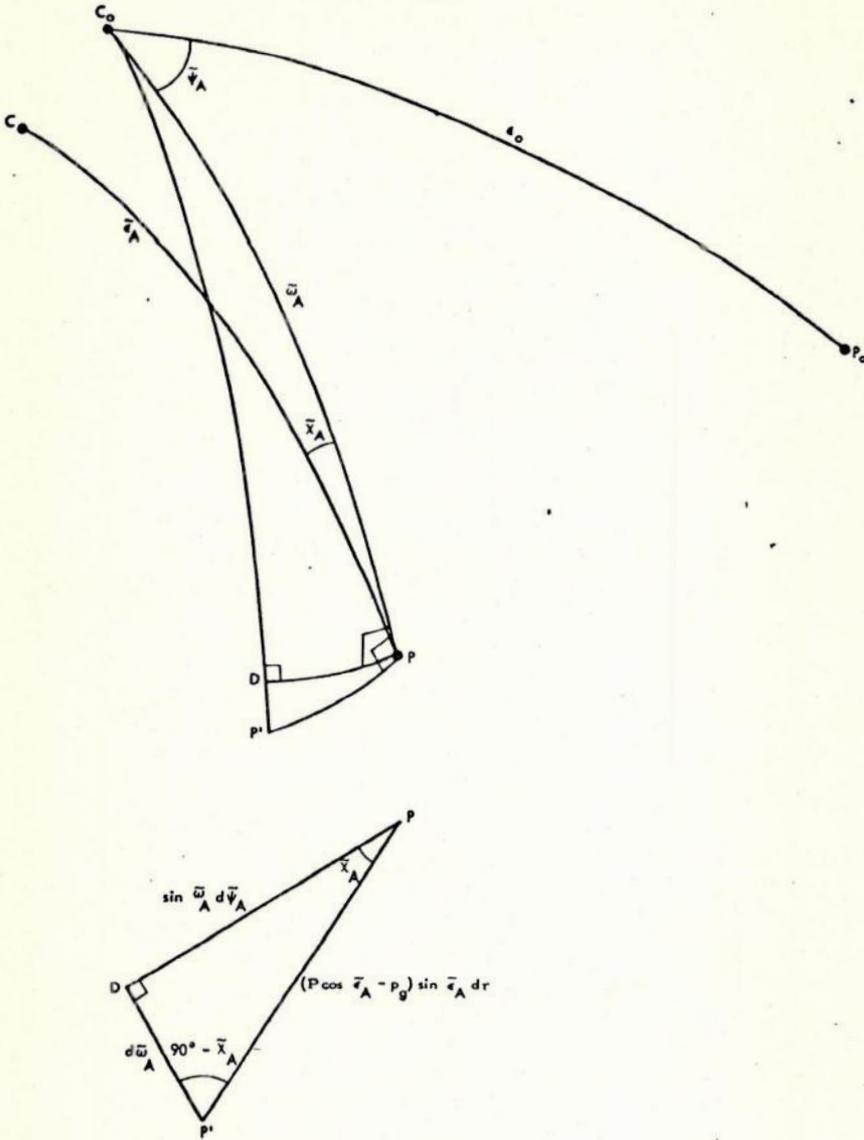


Fig. 3. Polar precessional diagram for epoch  $\epsilon_D$  relative to  $\epsilon_0$ . The enlarged portion depicts the spherical triangle  $PDP'$ . The celestial pole  $P$  moves in a small circle  $PP'$  about the ecliptic pole of date  $C$

These expressions define the quantities  $s^*$ ,  $s_1^*$ ,  $s_1^{**}$  and  $c_1^*$ ,  $c_1^{**}$  of Equation (8). Previous questions as to the accuracy of Newcomb's expressions for the motion of the ecliptic pole have been largely answered by Lieske's (1970) theoretical comparison via a numerical integration, and on the observational side, by Duncombe and van Flandern (1976).

We subsequently will develop means to refer  $\sin \pi^*$  and  $\cos \pi^*$  to the basic epoch  $\epsilon_0$ . At this stage, however, we may assume that the parameters  $s_1$ ,  $s_1'$ ,  $s_1''$ ,  $c_1$ ,  $c_1'$ , and  $c_1''$  appearing in Equation (7) are known at epoch  $\epsilon_0$ . We next need to develop the motion of the equatorial pole and to derive the precession quantities for epoch  $\epsilon_D$  relative to  $\epsilon_0$ .

**Formulation for Basic Epoch**

In Figure 3 we depict the equatorial pole  $P_0$  and ecliptic pole  $C_0$  at epoch  $\epsilon_0$ , along with the equatorial ( $P$ ) and

ecliptic ( $C$ ) poles at epoch  $\epsilon_D$ . The celestial pole of date  $P$  moves in a small circle about the ecliptic pole  $C$  with speed  $(P \cos \bar{\epsilon}_A - p_g) \sin \bar{\epsilon}_A$  where  $P$  is Newcomb's "Precessional Constant" (Newcomb, 1906, p. 228). Hence, in the interval  $d\tau$ , we have the geometry given in triangle  $DPP'$  of Figure 3. The small parameter  $p_g$  is the so-called geodesic precession (de Sitter and Brouwer, 1938), given by them as

$$p_g = \frac{1}{2} k^2 (1 - e_\oplus^2) n_\oplus \tag{13}$$

where  $k$  is the constant of aberration. The value of  $p_g$ , used here is

$$p_g = 1''.92 \text{ per century.}$$

As shown by Barker and O'Connell (1970), this small relativistic effect is one-half the earth's relativistic motion of its longitude of perihelion [See their Equations (14), (28) and (76a)].

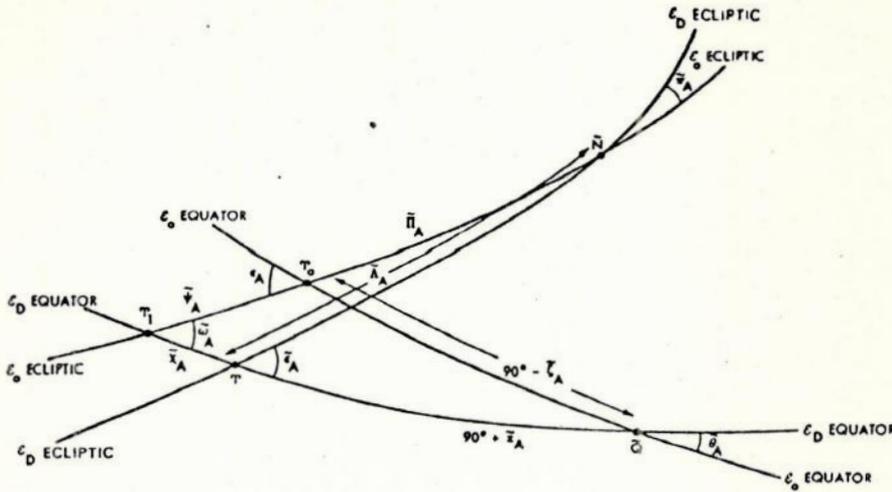


Fig. 4. Definitions of ecliptic-equator precession quantities for mean epoch of date  $\epsilon_D$  relative to fixed basic epoch  $\epsilon_0$ . The vernal equinox at  $\epsilon_0$  is represented by  $Y_0$ , while  $Y$  represents the mean equinox at epoch  $\epsilon_D$ .

From the geometry depicted in Figure 3 one can write the dynamical equation (Lieske, 1967)

$$\left. \begin{aligned} \sin \tilde{\omega}_A \frac{d\tilde{\psi}_A}{d\tau} &= (P \cos \tilde{\epsilon}_A - p_g) \sin \tilde{\epsilon}_A \cos \tilde{\chi}_A \\ \frac{d\tilde{\omega}_A}{d\tau} &= (P \cos \tilde{\epsilon}_A - p_g) \sin \tilde{\epsilon}_A \sin \tilde{\chi}_A \\ \frac{d\tilde{\epsilon}_A}{d\tau} &= \cos(\tilde{\lambda}_A - \tilde{\Pi}_A) \frac{d}{d\tau} (\sin \tilde{\pi}_A \cos \tilde{\Pi}_A) \\ &\quad - \sin(\tilde{\lambda}_A - \tilde{\Pi}_A) \frac{d}{d\tau} (\sin \tilde{\pi}_A \sin \tilde{\Pi}_A) \\ &\quad + 2 \sin^2 \frac{\tilde{\pi}_A}{2} \cos \tilde{\lambda}_A \frac{d\tilde{\pi}_A}{d\tau} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

and, for the equatorial parameters,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}_A}{d\tau} &= (P \cos \tilde{\epsilon}_A - p_g) \sin \tilde{\epsilon}_A \cos \tilde{z}_A \\ \sin \tilde{\theta}_A \frac{d\tilde{z}_A}{d\tau} &= (P \cos \tilde{\epsilon}_A - p_g) \sin \tilde{\epsilon}_A \sin \tilde{z}_A \end{aligned} \right\}$$

The various angles are depicted in Figure 4 for epoch  $\epsilon_D$  relative to epoch  $\epsilon_0$ .

From Equations (7) and (11)–(14) it is seen that if one is given the set of planetary masses, together with the constants  $\epsilon_0$ ,  $P$  and  $p_g$  at epoch  $\epsilon_0$ , then one can solve Equation (14) for the other precession parameters and thus obtain power series for the angles  $\tilde{\alpha}_A$  as listed in Table 1. Newcomb's "Precessional Constant"  $P$  is a function of the moments of inertia of the earth and also of the elements of the earth's orbit (de Sitter and Brouwer, 1938). Because it has been impossible, so far, to calculate  $P$  from its theoretical dependence upon geodetic parameters,  $P$  has to be inferred from observationally determined values of the general precession  $p$ . Hence  $P$  is replaced by the general precession  $p$  in the list of astronomical constants. There is a slight dependence of  $P$  upon time ( $P = P_0 + P_1 t$ ), the variation being approximately  $P_1 = -0.00369$  per century, which is due mainly

to changes in the eccentricity of the earth's orbit. From the work of de Sitter and Brouwer (1938) it can be shown that the centennial variation is

$$P_1 = -0.00001 - 7.313 \times 10^{-7} p - 2.5 \times 10^{-3} v \quad (15)$$

where  $p$  is the general precession (units: arc seconds per century) and where  $v$  is defined by the mass of the moon relative to the earth ( $\mu$ ),

$$\frac{M}{E} = \mu = 0.0123(1 + v). \quad (16)$$

The resultant series one obtains for  $\tilde{\alpha}_A$  will not be presented in this section, but are a part (viz.  $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1$ ) of the terms given later relative to  $\epsilon_F$ . The basic developments of de Sitter and Brouwer (1938), Woolard (1953), Woolard and Clemence (1966), Lieske (1967), and Hristov (1970), all depend upon the original work of Andoyer (1911).

Before proceeding to the development relative to an arbitrary fixed epoch  $\epsilon_F$ , we will briefly discuss several definitions of the accumulated angle sometimes called the general precession in longitude. As employed in this paper, and originally developed by Andoyer, we denote the accumulated angle  $p_A$  (which corresponds to the instantaneous rate  $p$  of general precession) of "general precession in longitude" by the symbol  $p_A = \lambda_A - \Pi_A$ . Our measure is thus defined by the subtraction of two angles measured in different planes. As may be seen from Figure 1 and Table 1,  $\lambda_A$  is measured along the mean ecliptic of date from the equinox of date to the point  $N$ , which is the intersection of the ecliptic of date with the fixed ecliptic, while the angle  $\Pi_A$  is measured along the fixed ecliptic from the fixed equinox to the point  $N$ . We prefer Andoyer's definition since in any rigorous reduction for precession one will generally employ rotation matrices, or their equivalent, and our angles  $\Pi_A$  and  $\lambda_A$  implicitly are calculated. However, Newcomb (1906, p. 234; see also Woolard and Clemence, 1966, p. 237) employs the definition shown in Figure 5, where  $p_N$  is the arc  $\tilde{Y}_0 R$ . Newcomb thus defines the accumulated general

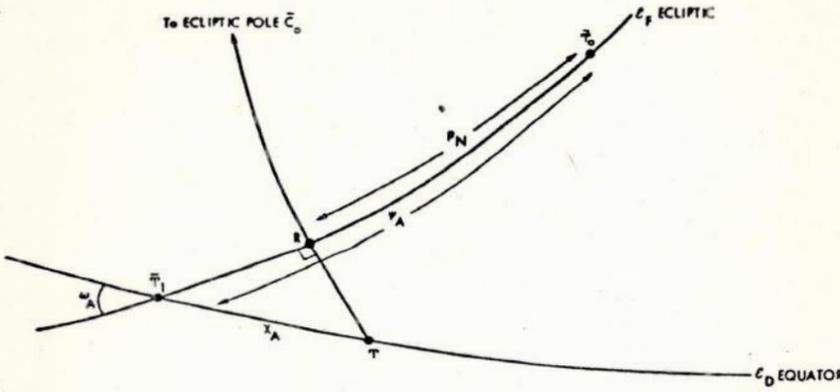


Fig. 5. Diagram showing Newcomb's measure of the accumulated general precession in longitude  $p_N$ : the arc, measured along the fixed ecliptic, from the fixed equinox  $\bar{Y}_0$  to the point  $R$ , which is the intersection with the fixed ecliptic of the great circle from  $\bar{C}_0$  to  $Y$

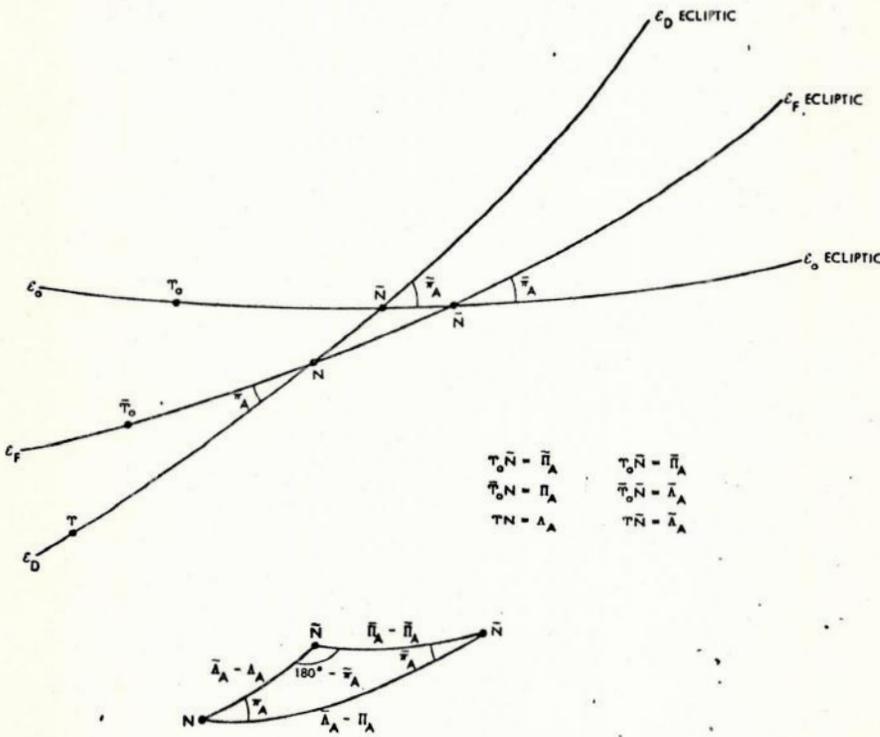


Fig. 6. Diagram showing the ecliptic precession quantities for three epochs  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_F$  and  $\epsilon_D$

precession as measured along the fixed ecliptic from the fixed equinox  $\bar{Y}_0$  to the point  $R$ , which is the intersection with the fixed ecliptic, of the great circle from the equinox of date  $Y$  to the fixed ecliptic pole  $\bar{C}_0$  at epoch  $\epsilon_F$ . The two definitions differ only by  $0''.0005 t^2$  but we prefer Andoyer's definition since it places more emphasis on the accumulated precession via Eulerian angles (and is more readily handled by rotation matrices), while Newcomb's expression is perhaps more readily understood in discussing instantaneous rates. With either definition, the instantaneous rates are identical, so that the fundamental constant  $p$  represents both interpretations. Aside from the accumulated precessional displacements  $p_A$  and  $p_N$ , no other quantities are affected by adopting Andoyer's definition of general precession.

From the geometry shown in Figure 5 it is seen that the two expressions for the accumulated angles  $p_A$  (our

recommended definition, due to Andoyer) and  $p_N$  (Newcomb's definition) are related by

$$\tan(\psi_A - p_N) = \cos \omega_A \tan \chi_A \tag{17}$$

and, as given in Tables 1 and 5, by

$$p_N = p_A + (\eta'_1 + \eta'_2 T)t^2 + \eta''_1 t^3$$

where the  $\eta$  values [see Equation (22) and Table 5] are all less than  $0''.0005$ .

### Formulation for an Arbitrary Epoch

Having, in principle, expressions for the precession quantities at epoch  $\epsilon_D$  relative to the basic epoch  $\epsilon_0$ , we can proceed to develop them relative to an arbitrary fixed epoch  $\epsilon_F$ . The ecliptics and relevant angles at epochs  $\epsilon_D$ ,  $\epsilon_F$  and  $\epsilon_0$  are depicted in Figure 6, while the equatorial

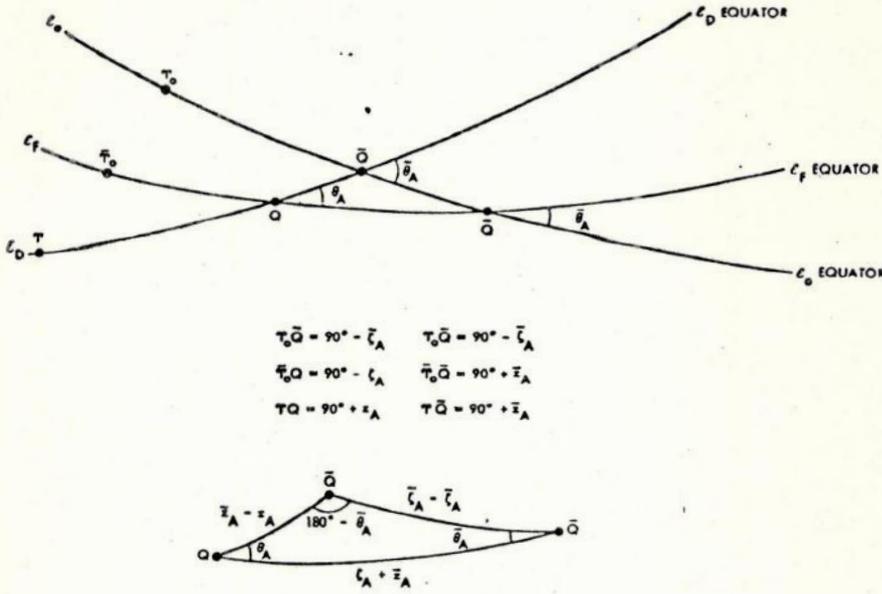


Fig. 7. Diagram showing the equatorial precession quantities for three epochs  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_F$  and  $\epsilon_D$

quantities for similar epochs are shown in Figure 7. The development proceeds as follows.

From the expressions developed in the preceding section, one in principle has the known quantities  $\sin \tilde{\pi}_A \sin \tilde{\Pi}_A$ ,  $\sin \tilde{\pi}_A \cos \tilde{\Pi}_A$ ,  $\tilde{\epsilon}_A$ ,  $p$ ,  $P_1$  and  $p_g$ . From the expressions in Equation (7) we can also write the known series for  $\sin \tilde{\pi}_A \sin \tilde{\Pi}_A$  and  $\sin \tilde{\pi}_A \cos \tilde{\Pi}_A$  at epoch  $\epsilon_F$  relative to epoch  $\epsilon_0$  as

$$\begin{aligned} \sin \tilde{\pi}_A \sin \tilde{\Pi}_A &= s_1 T + s'_1 T^2 + s''_1 T^3 \\ \sin \tilde{\pi}_A \cos \tilde{\Pi}_A &= c_1 T + c'_1 T^2 + c''_1 T^3, \end{aligned} \tag{18}$$

and similarly, for the accumulated precession  $\bar{p}_A$ ,

$$\bar{p}_A = \bar{\lambda}_A - \bar{\Pi}_A = p_1 T + p'_1 T^2 + p''_1 T^3. \tag{19}$$

From the triangle  $NN\bar{N}$  in Figure 6 we can relate  $\sin \pi_A \sin \Pi_A$  and  $\sin \pi_A \cos \Pi_A$  at epoch  $\epsilon_D$  relative to  $\epsilon_F$  to the known series for the quantities given in Equations (18) and (19). From the well-known relations of spherical trigonometry we have

$$\begin{aligned} \sin \pi_A \sin(\bar{\lambda}_A - \Pi_A) &= \sin \tilde{\pi}_A \sin(\tilde{\Pi}_A - \bar{\Pi}_A) \\ \sin \pi_A \cos(\bar{\lambda}_A - \Pi_A) &= \sin \tilde{\pi}_A \cos \tilde{\pi}_A \cos(\tilde{\Pi}_A - \bar{\Pi}_A) \\ &\quad - \sin \tilde{\pi}_A \cos \tilde{\pi}_A \end{aligned} \tag{20}$$

which yields the desired expressions

$$\begin{aligned} \sin \pi_A \sin \Pi_A &= (\sin \tilde{\pi}_A \sin \tilde{\Pi}_A) \cos(\bar{\lambda}_A - \bar{\Pi}_A) \\ &\quad + (\sin \tilde{\pi}_A \cos \tilde{\Pi}_A) \sin(\bar{\lambda}_A - \bar{\Pi}_A) \\ &\quad - 2 \sin^2 \frac{\tilde{\pi}_A}{2} \sin \tilde{\pi}_A \sin \bar{\lambda}_A \cos(\tilde{\Pi}_A - \bar{\Pi}_A) \\ &\quad - \sin \tilde{\pi}_A \sin \bar{\lambda}_A \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\tilde{\pi}_A}{2} \right) \end{aligned}$$

and (21)

$$\begin{aligned} \sin \pi_A \cos \Pi_A &= (\sin \tilde{\pi}_A \cos \tilde{\Pi}_A) \cos(\bar{\lambda}_A - \bar{\Pi}_A) \\ &\quad - (\sin \tilde{\pi}_A \sin \tilde{\Pi}_A) \sin(\bar{\lambda}_A - \bar{\Pi}_A) \\ &\quad - 2 \sin^2 \frac{\tilde{\pi}_A}{2} \sin \tilde{\pi}_A \cos \bar{\lambda}_A \cos(\tilde{\Pi}_A - \bar{\Pi}_A) \\ &\quad - \sin \tilde{\pi}_A \cos \bar{\lambda}_A \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\tilde{\pi}_A}{2} \right). \end{aligned}$$

The coefficients  $s_1, s_2, s_3$ , etc. for  $\sin \pi_A \sin \Pi_A$  and  $\sin \pi_A \cos \Pi_A$  described in Table 1 may be derived from the known series. From the differential equations in Equation (14) and the geometry shown in Figures 6 and 7, one finds the following expressions for the coefficients of the precession quantities [Andoyer (1911); or Lieske (1967), who uses Andoyer's development but introduces  $p_g$ ] using the notations of Table 1:

Equation 22

Constant Terms

$$x_0 = \tan^{-1}(s_1/c_1)$$

Coefficients of  $t$

$$\epsilon_1 = c_1$$

$$\chi_1 = s'_1 \text{csc} \epsilon_0$$

$$\psi_1 = p_1 + \chi_1 \text{cos} \epsilon_0$$

$$P_0 = (p_1 + p_g) \text{sec} \epsilon_0 + \chi_1$$

$$z_1 - \zeta_1 = 0$$

$$z_1 + \zeta_1 = \psi_1 \text{cos} \epsilon_0 - \chi_1$$

$$\theta_1 = \psi_1 \text{sin} \epsilon_0$$

$$q_1 = (s_1^2 + c_1^2)^{1/2}$$

$$y_1 = (c_1 s'_1 - s_1 c'_1) / q_1^2$$

*Coefficients of  $t^2$* 

$$e'_1 = c'_1 - s_1 p_1 / 2$$

$$\omega'_1 = s_1 \psi_1 / 2$$

$$\psi'_1 = c_1 \psi_1 \cot 2\varepsilon_0 + (P_1 \cos \varepsilon_0 - c_1 p_g \tan \varepsilon_0) / 2$$

$$\chi'_1 = (s'_1 + c_1 p_1) \csc \varepsilon_0$$

$$p'_1 = \psi'_1 - \chi'_1 \cos \varepsilon_0 + s_1 c_1 / 2$$

$$\eta'_1 = -s_1 c_1 / 2$$

$$z'_1 - \zeta'_1 = (\psi'_1 \chi_1 - \psi_1 \chi'_1) / 3 \psi_1$$

$$z'_1 + \zeta'_1 = \psi'_1 \cos \varepsilon_0 - \chi'_1 = z_2 = \zeta_2$$

$$\theta'_1 = \psi'_1 \sin \varepsilon_0$$

$$q'_1 = (s_1 s'_1 + c_1 c'_1) / q_1$$

$$y'_1 = (c_1 s''_1 - s_1 c''_1) / q_1^2 - y_1 (c'_1 + s_1 y_1) / c_1$$

*Coefficients of  $t^3$* 

$$e''_1 = c''_1 - (2s'_1 p_1 + s_1 p'_1) / 3 - c_1 (p_1^2 - s_1^2 - c_1^2) / 6$$

$$\omega''_1 = \sin \varepsilon_0 (2\psi'_1 \chi_1 + \psi_1 \chi'_1) / 3$$

$$3\psi''_1 = (c_1 P_1 + \varepsilon'_1 P_0) \cos 2\varepsilon_0 \csc \varepsilon_0 - \psi_1 \omega'_1 \cot \varepsilon_0 - \psi_1 (4c_1^2 + \chi_1^2) / 2 - p_g (3c_1^2 + 2\varepsilon'_1 \cot \varepsilon_0) / 2$$

$$\chi''_1 = (s''_1 + c'_1 p_1 + c_1 p'_1 - s_1 \omega'_1 \cot \varepsilon_0 - s_1 p_1^2 / 2) \csc \varepsilon_0 + \chi_1^3 / 6$$

$$p''_1 = \psi''_1 - \chi''_1 \cos \varepsilon_0 + \sin \varepsilon_0 [(e'_1 + \omega'_1) \chi_1 + c_1 \chi'_1] / 2$$

$$2\eta''_1 = p_1 (s_1^2 - c_1^2) - (s_1 c'_1 + c_1 s'_1)$$

$$z''_1 - \zeta''_1 = \text{See entry after coefficients } z'_2 - \zeta'_2 \text{ of } Tt^2$$

$$z''_1 + \zeta''_1 = \psi''_1 \cos \varepsilon_0 - \chi''_1 + \psi_1^2 \sin^2 \varepsilon_0 (\psi_1 \cos \varepsilon_0 - 3\chi_1) / 12$$

$$\theta''_1 = \psi''_1 \sin \varepsilon_0 + \psi_1 \sin \varepsilon_0 (3\chi_1^2 + 6\psi_1 \chi_1 \cos \varepsilon_0 - \psi_1^2 \cos^2 \varepsilon_0) / 24$$

$$q''_1 = (2s_1 s''_1 + 2c_1 c''_1 + s_1^2 + c_1^2 - q_1^2) / 2q_1 + q_1^3 / 6$$

*Coefficients of  $T$* 

$$x_1 = 2y_1 + p_1$$

*Coefficients of  $Tt$* 

$$s_2 = 2s'_1 + c_1 p_1$$

$$c_2 = 2c'_1 - s_1 p_1$$

$$\varepsilon_2 = c_2 = 2\varepsilon'_1$$

$$\psi_2 = -c_1 P_0 \sin \varepsilon_0 + P_1 \cos \varepsilon_0$$

$$\chi_2 = s_2 \csc \varepsilon_0 - c_1 \chi_1 \cot \varepsilon_0$$

$$p_2 = \psi_2 - \chi_2 \cos \varepsilon_0 + c_1 \chi_1 \sin \varepsilon_0 = 2p'_1$$

$$z_2 - \zeta_2 = 0$$

$$z_2 + \zeta_2 = \psi_2 \cos \varepsilon_0 - c_1 \psi_1 \sin \varepsilon_0 - \chi_2 = 2(z'_1 + \zeta'_1)$$

$$\theta_2 = \psi_2 \sin \varepsilon_0 + c_1 \psi_1 \cos \varepsilon_0 = 2\theta'_1$$

$$q_2 = (s_1 s_2 + c_1 c_2) / q_1 = 2q'_1$$

$$y_2 = 3(c_1 s''_1 - s_1 c''_1) / q_1^2 - 4y_1 (c'_1 + s_1 y_1) / c_1$$

*Coefficients of  $T^2 t$* 

$$s_3 = 3s''_1 + 2c'_1 p_1 + c_1 p'_1 - s_1 (p_1^2 - s_1^2 - c_1^2) / 2$$

$$c_3 = 3\varepsilon''_1$$

$$\varepsilon_3 = c_3 = 3\varepsilon''_1$$

$$\psi_3 = -\frac{1}{2} c_1^2 P_0 \cos \varepsilon_0 - \varepsilon'_1 P_0 \sin \varepsilon_0 - c_1 P_1 \sin \varepsilon_0$$

$$\chi_3 = s_3 \csc \varepsilon_0 - c_1 \chi_2 \cot \varepsilon_0 + \chi_1 (\frac{1}{2} c_1^2 - \varepsilon'_1 \cot \varepsilon_0)$$

$$p_3 = \psi_3 - \chi_3 \cos \varepsilon_0 + c_1 \chi_2 \sin \varepsilon_0 + \varepsilon'_1 \chi_1 \sin \varepsilon_0 + \frac{1}{2} c_1^2 \chi_1 \cos \varepsilon_0$$

$$z_3 - \zeta_3 = 0$$

$$z_3 + \zeta_3 = \psi_3 \cos \varepsilon_0 - c_1 \psi_2 \sin \varepsilon_0 - \chi_3 - \frac{1}{2} c_1^2 \psi_1 \cos \varepsilon_0 - \varepsilon'_1 \psi_1 \sin \varepsilon_0$$

$$\theta_3 = \psi_3 \sin \varepsilon_0 + c_1 \psi_2 \cos \varepsilon_0 + \varepsilon'_1 \psi_1 \cos \varepsilon_0 - \frac{1}{2} c_1^2 \psi_1 \sin \varepsilon_0 = \theta'_2$$

$$q_3 = [s_2^2 + c_2^2 + 2(s_1 s_3 + c_1 c_3) - q_2^2] / 2q_1$$

*Coefficients of  $T^2$* 

$$x_2 = (c_1 s_3 - s_1 c_3) / q_1^2 - 2x_1 (c'_1 + s_1 y_1) / c_1$$

*Coefficients of  $Tt^2$* 

$$s'_2 = 3s''_1 + c'_1 p_1 + s_1 (s_1^2 + c_1^2) / 2$$

$$c'_2 = 3c''_1 - s'_1 p_1 + c_1 (s_1^2 + c_1^2) / 2$$

$$e'_2 = c'_2 - (s_2 p_1 + s_1 p_2) / 2 = 3\varepsilon''_1$$

$$\omega'_2 = (s_1 \psi_2 - s_2 \psi_1) / 2$$

$$2\psi'_2 = P_0 \csc \varepsilon_0 [c_2 \cos 2\varepsilon_0 - c_1^2 (\cot \varepsilon_0 + \sin 2\varepsilon_0)] + c_1 P_1 \csc \varepsilon_0 (\cos 2\varepsilon_0 - \sin^2 \varepsilon_0) + p_g \csc \varepsilon_0 (c_1^2 \csc \varepsilon_0 - c_2 \cos \varepsilon_0)$$

$$\chi'_2 = (s'_2 + c_1 p_2 + c_2 p_1) \csc \varepsilon_0 - c_1 \cot \varepsilon_0 \csc \varepsilon_0 (s'_1 + c_1 p_1)$$

$$p'_2 = \psi'_2 + c_1 \chi'_1 \sin \varepsilon_0 - \chi'_2 \cos \varepsilon_0 + (s_2 c_1 + c_2 s_1) / 2$$

$$\eta'_2 = -(s_2 c_1 + c_2 s_1) / 2$$

$$z'_2 - \zeta'_2 = [\chi_1 (\psi'_2 - \psi_2 \psi'_1 / \psi_1) + \psi'_1 \chi_2 - \psi_1 \chi'_2] / 3 \psi_1$$

$$z'_2 + \zeta'_2 = \frac{1}{2} (z'_2 - \zeta'_2)$$

$$z'_2 + \zeta'_2 = \psi'_1 \cos \varepsilon_0 - c_1 \psi'_1 \sin \varepsilon_0 - \chi'_2 = z_3 + \zeta_3$$

$$q'_2 = (s_1 s'_2 + s'_1 s_2 + c_1 c'_2 + c'_1 c_2 - q_1 q_2) / q_1 = q_3$$

$$\theta'_2 = \psi'_2 \sin \varepsilon_0 - c_1 \psi'_1 \cos \varepsilon_0 = \theta_3$$

Employing the two argument form  $\alpha_A(T, t)$ , where the first argument represents  $\varepsilon_F - \varepsilon_0$  and the second  $\varepsilon_D - \varepsilon_F$ , one can derive some of the identities given in Equation (22). Since  $\tilde{\alpha}_A = \alpha_A(0, T+t)$ , we can write, for example,  $\tilde{\varepsilon}_A = \varepsilon_A(0, T+t)$  which from geometric considerations is also  $\varepsilon_A(T, t)$ . Thus, relations such as  $\varepsilon_A(T, t) = \varepsilon_A(0, T+t) = \varepsilon_A(T+t, 0)$ ,  $\pi_A(T, t) = -\pi_A(T+t, -t)$ ,  $\theta_A(T, t) = -\theta_A(T+t, -t)$ ,  $z_A(T, t) = -\zeta_A(T+t, -t)$  and  $\zeta_A(T, t) = -z_A(T+t, -t)$  yield identities given in Equation (22).

*Ecliptic Motion Relative to Basic Epoch*

The expressions given above are the desired coefficients for all the precession quantities. From the development it

is seen that they depend upon relatively few fundamental constants: the general precession  $p$ , the obliquity of the ecliptic  $\varepsilon_0$  and the system of planetary masses. One slight problem, however, is still present. From Newcomb's development as given in Table 3 we have values for the coefficients describing the motion of the ecliptic pole relative to 1850.0. Usually, however, the other fundamental constants are referred to the basic epoch  $\varepsilon_0$  which may be 1900.0 for the currently employed precession quantities or J2000.0 for our revised expressions. Hence, some method must be developed to update the values of  $\sin \pi^* \sin \Pi^*$  and  $\sin \pi^* \cos \Pi^*$  in Equations (8) and (12) to epoch  $\varepsilon_0$ , knowing only the astronomical constants  $\varepsilon_0$  and  $p$  at epoch  $\varepsilon_0$ . One may iterate, using the results in Equation (22) to develop expressions for the quantities relative to 1850.0 and then update them to  $\varepsilon_0$  which is  $T_1$  Julian centuries from 1850.0 with the proviso that the relevant constants in Equation (22) refer to 1850.0 and  $T$  is replaced by  $T_1$  in Table 1.

However, since the updating is really only sensitive to the value of general precession  $p$ , we can perform the iteration only once, employing some arbitrary value  $p^*$  and express the results for the updating of  $\sin \pi^* \sin \Pi^*$  and  $\sin \pi^* \cos \Pi^*$  to epoch  $\varepsilon_0$  by employing  $p = p^* + \Delta p^*$ , the algebraic quantity  $\Delta p^*$  handling any difference from  $p^*$ . In performing the updating, it is necessary to introduce fourth powers of time to conserve precision. We will use

$$\begin{aligned} \sin \pi^* \sin \tilde{\Pi}^* = & (s_1^* + s_2^* T_1 + s_3^* T_1^2 + s_4^* T_1^3) \tau \\ & + (s_1^{*'} + s_2^{*'} T_1 + s_3^{*'} T_1^2) \tau^2 + (s_1^{*''} + s_2^{*''} T_1) \tau^3 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sin \pi^* \cos \tilde{\Pi}^* = & (c_1^* + c_2^* T_1 + c_3^* T_1^2 + c_4^* T_1^3) \tau \\ & + (c_1^{*'} + c_2^{*'} T_1 + c_3^{*'} T_1^2) \tau^2 + (c_1^{*''} + c_2^{*''} T_1) \tau^3 \end{aligned}$$

where  $s_1^*$ ,  $s_1^{*'}$ ,  $s_1^{*''}$  and the corresponding  $c^*$ 's are defined in Equation (12). The quantities  $s_j^*$ ,  $s_j^{*'}$  and  $s_j^{*''}$  ( $j > 1$ ) up to third order are given in Equation (22) (interpreted relative to 1850.0) and it is found that the fourth-order terms are

$$\begin{aligned} s_4^* = & c_1 p_1'' + c_2 p_1' + c_2 p_1 - \frac{1}{6} c_1 p_1^3 + s_1' (2s_1^2 + \frac{1}{2} c_1^2) \\ & + \frac{3}{2} s_1 c_1 c_1' \\ s_3^{*'} = & c_2' p_1 + c_1' p_1' + s_1' (\frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} c_1^2 + 3s_1^2) + \frac{5}{2} s_1 c_1 c_1' \\ s_2^{*''} = & c_1'' p_1 + s_1 (s_1 s_1' + c_1 c_1') \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} c_4^* = & s_1 p_1'' - s_2 p_1' - s_2' p_1 + \frac{1}{6} s_1 p_1^3 + c_1' (\frac{1}{2} s_1^2 + 2c_1^2) + \frac{3}{2} s_1 c_1 s_1' \\ c_3^{*'} = & -s_2' p_1 - s_1' p_1' + c_1' (\frac{1}{2} p_1^2 + 3c_1^2 + \frac{1}{2} s_1^2) + \frac{5}{2} s_1 c_1 s_1' \\ c_2^{*''} = & -s_1'' p_1 + c_1 (s_1 s_1' + c_1 c_1') \end{aligned}$$

with all terms being evaluated at 1850.0. The basic quantities required for our general expressions in Equation (22) relative to  $\varepsilon_0$  and  $\varepsilon_f$  are then, by inspection,

$$\begin{aligned} s_1 = & s_1^* + s_2^* T_1 + s_3^* T_1^2 + s_4^* T_1^3 \\ s_1' = & s_1^{*'} + s_2^{*'} T_1 + s_3^{*'} T_1^2 \\ s_1'' = & s_1^{*''} + s_2^{*''} T_1 \end{aligned}$$

and (25)

$$\begin{aligned} c_1 = & c_1^* + c_2^* T_1 + c_3^* T_1^2 + c_4^* T_1^3 \\ c_1' = & c_1^{*'} + c_2^{*'} T_1 + c_3^{*'} T_1^2 \\ c_1'' = & c_1^{*''} + c_2^{*''} T_1 \end{aligned}$$

We will evaluate the expressions in Equations (23) to (25) for the value  $p^* = 5029''.0966$  per Julian century at J2000.0 using  $p = p^* + \Delta p^*$  to handle any other values of general precession. The following equivalent values of  $p^*$  may be useful for various epochs in determining the appropriate  $\Delta p^*$ :

$$\begin{aligned} p^* = & 5029''.0966 \text{ per Julian century at J2000.0} \\ & 5027''.878 \text{ per tropical century at 1950.0} \\ & 5026''.767 \text{ per tropical century at 1900.0} \\ & 5025''.656 \text{ per tropical century at 1850.0.} \end{aligned} \quad (26)$$

The reference value  $p^*$  has been selected to coincide with the value recently adopted by the IAU. The value  $\Delta p^* = -1''.127$  is appropriate for Newcomb's general precession of  $p = 5025''.64$  per tropical century at 1900.0.

We find for the basic quantities in Equation (25) relative to  $\varepsilon_0$  the following expressions:

$$\begin{aligned} s_1 = & \alpha_0 + T_1 [(\alpha_1 - \alpha_{-1})/5 + 0.02436 5588 \beta_0 \\ & - 0.000222 690 \Delta p^*] \\ & + T_1^2 [-0.16029 6815 \alpha_0 + 2(\alpha_1 + \alpha_{-1})/25 \\ & + 0.00487 312(\beta_1 - \beta_{-1}) - 8.49 \times 10^{-8} \Delta p^* \\ & - 0''.0002 5207] \\ & + T_1^3 [2''.2506 \times 10^{-5}] \\ s_1' = & (\alpha_1 - \alpha_{-1})/10 + T_1 [2(\alpha_1 - 2\alpha_0 + \alpha_{-1})/25 \\ & + 0.00243 656(\beta_1 - \beta_{-1}) + 2.72 \times 10^{-7} \Delta p^* \\ & + 1''.39 \times 10^{-7}] + T_1^2 [-3''.2512 \times 10^{-5}] \\ s_1'' = & 2(\alpha_1 - 2\alpha_0 + \alpha_{-1})/75 + T_1 [8''.201 \times 10^{-6}] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} c_1 = & \beta_0 + T_1 [(\beta_1 - \beta_{-1})/5 - 0.02436 5588 \alpha_0 \\ & - 0.00002 583 \Delta p^*] \\ & + T_1^2 [-0.16029 6815 \beta_0 + 2(\beta_1 + \beta_{-1})/25 \\ & - 0.00487 312(\alpha_1 - \alpha_{-1}) + 3.654 \times 10^{-6} \Delta p^* \\ & - 5''.386 \times 10^{-6}] \\ & + T_1^3 [-2''.473 \times 10^{-6}] \\ c_1' = & (\beta_1 - \beta_{-1})/10 + T_1 [2(\beta_1 - 2\beta_0 + \beta_{-1})/25 \\ & - 0.00243 656(\alpha_1 - \alpha_{-1}) - 9.37 \times 10^{-7} \Delta p^* \\ & - 1''.220 \times 10^{-6}] \\ & + T_1^2 [-3''.746 \times 10^{-6}] \end{aligned}$$

$$c_1'' = 2(\beta_1 - 2\beta_0 + \beta_{-1})/75 + T_1 [4''.655 \times 10^{-6}]$$

where all quantities are expressed in arc seconds and where  $T_1 = \varepsilon_0 - 1850.0$ , expressed in Julian centuries.

The quantities  $\alpha_j$  and  $\beta_j$  are dependent upon the system of planetary masses and are defined in Equation (11), (12) and Table 3. The value  $\Delta p^*$  is expressed in arc seconds per century

Table 4. Astronomical constants employed in precession calculations

Obliquity at J2000.0 (JED 2451545.0)	$\epsilon_0 = 23\ 26'21''.448$
Speed of general precession in longitude at J2000.0	$p = 5029''.0966$ per Julian century
Rate of change of Newcomb's Precessional Constant*	$P_1 = -0''.00369$ per Julian century
Geodesic precession*	$p_g = 1''.92$ per Julian century
Inverse Planetary Masses $M^{-1}$	
Mercury	6023600
Venus	408523.5
Mars	3098710
Jupiter	1047.355
Saturn	3498.5
Uranus	22869
Neptune	19314
Pluto	3000000

\* Note that  $P_1$  and  $p_g$  are not part of the IAU (1976) System of Astronomical Constants, but are derived from them via Equations (13) and (15)

Table 5. Numerical expressions for precession quantities\*

$\sin z_A \sin \Pi_A$	$(4''.1976 - 0''.75250 T + 0''.000431 T^2)t + (0''.19447 + 0''.000697 T)t^2 - 0''.000179 t^3$
$\sin z_A \cos \Pi_A$	$(-46''.8150 - 0''.00117 T + 0''.005439 T^2)t + (0''.05059 - 0''.003712 T)t^2 + 0''.000344 t^3$
$\pi_A$	$(47''.0029 - 0''.06603 T + 0''.000598 T^2)t + (-0''.03302 + 0''.000598 T)t^2 + 0''.000060 t^3$
$\Pi_A$	$174\ 52'34''.982 + 3289''.4789 T + 0''.60622 T^2 + (-869''.8089 - 0''.50491 T)t + 0''.03536 t^2$
$\epsilon_0$	$23\ 26'21''.448$
$\bar{\epsilon}_A$	$\epsilon_0 - 46''.8150 T - 0''.00059 T^2 + 0''.001813 T^3$
$e_A$	$\bar{\epsilon}_A + (-46''.8150 - 0''.00117 T + 0''.005439 T^2)t + (-0''.00059 + 0''.005439 T)t^2 + 0''.001813 t^3$
$\omega_A$	$\bar{\epsilon}_A + (0''.05127 - 0''.009186 T)t^2 - 0''.007726 t^3$
$\psi_A$	$(5038''.7784 + 0''.49263 T - 0''.000124 T^2)t + (-1''.07259 - 0''.001106 T)t^2 - 0''.001147 t^3$
$\chi_A$	$(10''.5526 - 1''.88623 T + 0''.000096 T^2)t + (-2''.38064 - 0''.000833 T)t^2 - 0''.001125 t^3$
$\bar{p}_A$	$(5029''.0966 + 2''.22226 T - 0''.000042 T^2)t + (17''.11113 - 0''.000042 T)t^2 - 0''.000006 t^3$
$p_A$	$p_A + (0''.00048 - 0''.000085 T)t^2 - 0''.000107 t^3$
$z_A$	$(2306''.2181 + 1''.39656 T - 0''.000139 T^2)t + (0''.30188 - 0''.000345 T)t^2 + 0''.017998 t^3$
$\zeta_A$	$(2306''.2181 + 1''.39656 T - 0''.000139 T^2)t + (1''.09468 + 0''.000066 T)t^2 + 0''.018203 t^3$
$\theta_A$	$(2004''.3109 - 0''.85330 T - 0''.000217 T^2)t + (-0''.42665 - 0''.000217 T)t^2 - 0''.041833 t^3$

\* Basic epoch  $\mathcal{E}_0$  is J2000 (JED 2451545.0). The parameters  $T$  and  $t$  are  $\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_0$  and  $\mathcal{E}_D - \mathcal{E}_F$ , respectively, measured in Julian centuries of 36525 days,  $T = [\text{JED}(\mathcal{E}_F) - \text{JED}(\mathcal{E}_0)]/36525$ ,  $t = [\text{JED}(\mathcal{E}_D) - \text{JED}(\mathcal{E}_F)]/36525$

We now have the means available for obtaining numerical values for the precession quantities relative to any basic epoch  $\mathcal{E}_0$ . As noted earlier, the fundamental constants are the obliquity of the ecliptic  $\epsilon_0$  and the general precession  $p$  at epoch  $\mathcal{E}_0$ , coupled with the system of planetary masses which yield the basic quantities  $s$  and  $c$  of Equation (27). With these values one can evaluate all of the precession quantities of Table 1, as given by the formulas in Equation (22).

Numerical Results and Summary

Employing the fundamental astronomical constants listed in Table 4 we have evaluated the expressions of Equation (22) for the precession quantities and obtain the numerical results given in Table 5 for the basic epoch  $\mathcal{E}_0$  of J2000.0. All the quantities are expressed in arc seconds and time in Julian centuries. The symbol  $T$  represents  $\mathcal{E}_F - \text{J2000.0}$  and  $t$  represents  $\mathcal{E}_D - \mathcal{E}_F$ . Normally the table will be used with  $T=0$  (viz. precession to and from J2000.0), but means are available via  $T$  to adopt another epoch  $\mathcal{E}_F$ . Often one is required to precess from one fixed equinox at epoch  $\mathcal{E}_1$  to another fixed equinox at  $\mathcal{E}_2$ . It should be noted that our formulation is also applicable to this case if one identifies  $\mathcal{E}_1$  with  $\mathcal{E}_F$  and  $\mathcal{E}_2$  with  $\mathcal{E}_D$  in the present formulation. The values in Table 4 are those adopted at the XVI General Assembly of the IAU

(Transactions IAU, 16B, 1977). The value of  $p$  results from Newcomb's value of general precession  $p = 5025''.64$  per tropical century at 1900.0, coupled with Fricke's (1967, 1971) correction to luni-solar precession  $\Delta\psi = +1''.10$  per century at 1900.0 and the correction to planetary precession at 1900.0,  $\Delta\chi = -0''.029$ , which is due to the revised system of masses. These corrections yield, for the general precession at 1900.0,  $p = \psi - \chi \cos \epsilon_0 = 5026''.7666$  per tropical century. This value corresponds to the newly adopted value  $p = 5029''.0966$  per Julian century at  $\mathcal{E}_0 = \text{J2000.0}$ , using the conventional values of 36524.2198781 days for the length of the tropical century and JED 2415020.31352 for the epoch 1900.0. The value newly adopted for the obliquity at J2000.0 ( $\epsilon_0 = 23\ 26'21''.448$ ) corresponds to the previously adopted value at 1900.0 ( $\epsilon_0 = 23^\circ 27'8''.26$ ) evaluated at J2000.0 using the revised rates of change.

The expressions at epoch  $\mathcal{E}_F$  for the rates per Julian century of general precession in right ascension and declination are, from Equation (6),

$$m = \frac{d}{dt} (\zeta_A + z_A)|_{t=0} = 4612''.4362 + 2''.79312T - 0''.000278T^2$$

and

$$n = \frac{d}{dt} (\theta_A)|_{t=0} = 2004''.3109 - 0''.85330T - 0''.000217T^2$$

It is often convenient, especially in constructing star catalogues, to employ a Taylor series expansion for the precession reductions

$$\begin{aligned} \alpha_D &= \alpha_F + t \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_{t=0} + \frac{1}{2} t^2 \left( \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right)_{t=0} + \dots \\ \delta_D &= \delta_F + t \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{t=0} + \frac{1}{2} t^2 \left( \frac{d^2\delta}{dt^2} \right)_{t=0} + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

where  $(\alpha_F, \delta_F)$  represent the right ascension and declination at the catalogue equinox ( $\mathcal{E}_F$ ) and where  $(\alpha_D, \delta_D)$  represent similar quantities at an equinox ( $\mathcal{E}_D$ ) which is  $t$  centuries from the catalogue equinox. Woolard and Clemence (1966, pp. 278–279) list the components of the expansion as

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= m + n \sin \alpha \tan \delta \\ \frac{d\delta}{dt} &= n \cos \alpha \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= n^2 \sin 2\alpha \left[ \frac{1}{2} + \tan^2 \delta \right] + mn \tan \delta \cos \alpha \\ &\quad + \frac{dm}{dt} + \frac{dn}{dt} \tan \delta \sin \alpha \\ \frac{d^2\delta}{dt^2} &= -n^2 \sin^2 \alpha \tan \delta - mn \sin \alpha + \frac{dn}{dt} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (30)$$

If we denote  $\zeta_A + z_A$  by  $m_A$  and if we denote  $\theta_A$  by  $n_A$ , then the series can be written in our notation of Equation (2) as

$$\begin{aligned} m_A &= mt + \frac{1}{2} t^2 \frac{dm}{dt} + \frac{1}{6} t^3 \frac{d^2m}{dt^2} = mt + m' t^2 + m'' t^3 \\ n_A &= nt + \frac{1}{2} t^2 \frac{dn}{dt} + \frac{1}{6} t^3 \frac{d^2n}{dt^2} = nt + n' t^2 + n'' t^3 \end{aligned} \quad (31)$$

where

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 T + m_3 T^2 \\ &= (\zeta_1 + z_1) + (\zeta_2 + z_2) T + (\zeta_3 + z_3) T^2 \\ n &= n_1 + n_2 T + n_3 T^2 = \theta_1 + \theta_2 T + \theta_3 T^2. \end{aligned}$$

From Equation (31) one can readily deduce the values of  $dm/dt$  and  $dn/dt$  required in Equation (30) as twice the coefficient of  $t^2$  in  $m_A$  and  $n_A$ . Because of the relationships among the coefficients given in Equation (22), it can readily be shown that the expressions for  $dm/dt$  and  $dn/dt$  can also be obtained from the expressions for  $m$  and  $n$  of Equation (28) as

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{dm}{dT} \\ \frac{dn}{dt} &= \frac{dn}{dT} \end{aligned} \quad (32)$$

and it may be noted that the values given in the FK4 (Fricke and Kopff, 1963) were obtained in this manner.

In comparing our results with other expressions, the reader is cautioned to remember that our times are

measured in Julian centuries and one must be careful to clearly distinguish the reference planes for the various angles. For example, the expression given in the *Explanatory Supplement* (p. 38) lists

$$\Pi = 173^\circ 57' 06'' + 54.77 T_0$$

and it should be noted that the  $\Pi$  given there is measured relative to the *mean equinox of date*, with  $T_0$  in tropical centuries from 1900.0. Our expression

$$\begin{aligned} \Pi_A &= 174^\circ 52' 34''.982 + 3289''.4789 T + 0''.60622 T^2 \\ &\quad + (-869''.8089 - 0''.50491 T) t + 0''.03536 t^2 \end{aligned}$$

is measured relative to the *fixed equinox*  $\mathcal{E}_F$ .

The value of  $\Pi$  given there corresponds to our value  $\Pi_A(T=\tau, t=0)$ , since in general  $\alpha_A(T=\tau, t=0)$  yields an angle measured relative to the fundamental plane of date, while  $\alpha_A(T=0, t=\tau)$  or  $\tilde{\alpha}_A$  yields the angle measured relative to the fundamental plane of epoch.

The expressions presented here are intended to be used with the introduction of the revised system of astronomical constants upon which they are based. The expressions and their derivation serve to thoroughly document the dependence of the precession quantities on the astronomical constants. It is hoped that the formulation will also provide suitable means for the revision of the precession quantities if in the future any changes in the system of constants will become necessary.

*Acknowledgements.* This formulation grew from our joint efforts and discussions to develop adequate expressions for the precession quantities for a revised system of astronomical constants. We are indebted to Dr. X.X. Newhall of JPL for producing the computer-drawn geometry of Figure 1 and M. Rocher of the Bureau des Longitudes who assisted in some numerical verifications. The effort of one of us (JHL) represents the results of one phase of research carried out at the Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, under Contract No. NAS 7-100, sponsored by the National Aeronautics and Space Administration.

## References

- Andoyer, H.: 1911, *Bull. Astron.* **28**, 67–76  
 Barker, B.M., O'Connell, R.F.: 1970, *Phys. Rev.* **D2**, 1428–1435  
 Clemence, G.M.: 1948, *Astron. J.* **53**, 169–179. Errata in *Bull. Astron.* **2<sup>nd</sup> ser.** **15**, 190 (1950)  
 de Sitter, W., Brouwer, D.: 1938, *Bull. Astron. Inst. Neth.* **8**, 213–231  
 Duncombe, R.L., Van Flandern, T.C.: 1976, *Astron. J.* **81**, 281–284  
*Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris*, H.M. Nautical Almanac Office, London, 1961  
 Fricke, W.: 1967, *Astron. J.* **72**, 1368–1379  
 Fricke, W.: 1971, *Astron. Astrophys.* **13**, 298–308  
 Fricke, W., Kopff, A.: 1963, *Fourth Fundamental Catalogue (FK4)*, Veröff. Astron. Rechen-Institut, Nr. 10, Heidelberg  
 Hristov, V.K.: 1970, *Izv. Tsent. Lab. Bulg. Akad. Nauk.* **11**, 25–45  
 International Astronomical Union, *Transactions* **16B**, 1977 (In Press)  
 Lieske, J.H.: 1967, *Expressions for the Precession Quantities and Their Partial Derivatives*, NASA Tech. Report. 32–1044, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena  
 Lieske, J.H.: 1970, *Astron. Astrophys.* **5**, 90–101  
 Newcomb, S.: 1894, *Astron. Papers Am. Ephemeris* **5**, Part 4, 301–378  
 Newcomb, S.: 1906, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Dover Publications, New York, 1960  
 Woolard, E.W.: 1953, *Astron. Papers Am. Ephemeris* **15**, Part 1  
 Woolard, E.W., Clemence, G.M.: 1966, *Spherical Astronomy*, Academic Press, New York

ANEXO VI

SAO Star Catalog: equinócio e época para 1950.0

002200			EPOCH 1950										ORIGINAL EPOCH					SOURCE		+80°				
NUMBER	MAGNITUDES		$\alpha$ 1950			$\mu$	$\sigma$	$\delta$ 1950			$\mu'$	$\sigma'$	$\alpha_2$		$\sigma$	ep.	$\delta_2$		$\sigma'$	ep.	SP.	CAT.	STAR NUMBER	DM NUMBER
	m <sub>pg</sub>	m <sub>v</sub>	h	m	s	''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''				
1	10.8	8.9A	13	20	51.674	-0.0773	0.6	85	17	35.11	-0.062	0.6	0.13	51.487	13	31.3	55.12	13	51.3	K2	U	26A	556	85 273
2	10.8	9.3B		21	19.252	-0.0516	0.9	81	9	16.93	-0.019	0.9	0.25	19.221	17	30.3	17.31	17	30.3	AG		398	81 424	
3	10.5	9.3B		21	19.252	-0.0516	0.9	80	32	50.40	-0.016	0.9	0.25	32.161	17	30.3	50.71	17	30.3	AG		297	81 423	
4	10.5	9.3B		21	19.252	-0.0516	0.9	83	44	27.69	-0.007	0.9	0.24	48.164	16	30.3	27.22	16	30.3	AG		347	84 309	
5	10.8	8.3B		22	15.334	-0.0120	0.9	81	45	29.57	-0.028	0.9	0.25	15.807	17	30.3	30.12	17	30.3	AG		399	82 393	
6	10.8	9.4B		22	27.342	-0.0038	0.9	81	35	42.49	-0.007	0.9	0.25	27.267	17	30.3	42.62	17	30.3	AG		400	82 394	
7	10.8	9.0A		22	49.011	-0.0192	0.6	86	1	58.65	-0.066	0.6	0.13	48.985	13	51.3	58.64	13	51.3	F2	U	26A	557	86 191
8	10.8	9.5B		23	0.072	-0.0037	0.9	81	17	37.10	-0.011	0.9	0.25	39.961	17	30.3	37.31	17	30.3	AG		401	81 425	
9	10.8	9.4B		23	43.219	-0.0031	1.0	83	24	1.91	-0.016	1.0	0.26	43.157	17	30.3	2.22	17	30.3	AG		348	83 386	
10	10.6	9.3B		24	29.743	-0.0170	0.9	81	20	14.66	-0.023	0.9	0.25	30.081	17	30.3	15.11	17	30.3	AG		402	81 426	
11	10.4	8.5B		24	41.500	-0.0068	0.9	83	43	21.36	-0.003	0.9	0.25	41.674	17	30.3	21.42	17	30.3	AG		349	84 310	
12	11.3	9.5B		25	28.845	-0.0141	1.0	83	43	41.98	-0.038	1.0	0.27	29.124	18	30.3	42.72	18	30.3	AG		350	84 312	
13	10.8	9.4B		25	29.354	-0.0109	0.9	81	25	20.28	-0.032	0.9	0.25	29.151	17	30.3	21.31	17	30.3	AG		403	81 428	
14	10.8	9.3B		25	35.957	-0.0170	0.9	83	34	0.45	-0.101	0.9	0.41	34.496	17	30.3	35.85	18	30.3	G5	CC	16201	84 311	
15	9.9	9.2B		25	37.657	-0.0024	0.9	80	42	49.99	-0.001	0.9	0.24	37.701	16	30.3	50.01	16	30.3	G5	AZ	AG	298	81 427
16	10.8	9.3B		25	49.068	-0.0063	0.9	81	17	7.40	-0.026	0.9	0.25	49.191	17	30.3	7.91	17	30.3	AG		404	81 429	
17	10.8	9.0A		26	54.431	-0.0440	0.9	85	34	30.37	-0.069	0.6	0.13	54.510	13	51.3	30.29	13	51.3	G2	U	26A	558	86 192
18	10.8	8.5B		26	7.033	-0.0104	0.9	81	31	22.73	-0.006	0.9	0.24	7.237	16	30.3	22.62	16	30.3	A5	AG	405	82 395	
19	10.0	9.2B		26	34.497	-0.0035	0.9	81	0	58.91	-0.020	0.9	0.24	34.901	16	30.3	58.51	16	30.3	AG		406	81 430	
20	10.8	8.6B		28	43.237	-0.0025	0.9	80	21	1.89	-0.027	0.9	0.24	43.289	16	30.3	2.41	16	30.3	K	AG	299	80 412	
21	11.3	9.3B		29	7.054	-0.0170	1.0	82	41	24.07	-0.009	1.0	0.26	7.388	18	30.3	23.92	18	30.3	AG		390	83 387	
22	11.3	9.3B		29	17.393	-0.0020	0.6	83	31	42.26	-0.006	0.6	0.13	17.350	13	51.3	42.27	13	51.3	F5	U	26A	559	86 193
23	11.3	9.0A		29	18.803	-0.0181	0.6	86	45	30.33	-0.007	0.6	0.13	18.778	13	51.3	50.40	13	51.3	A5	U	26A	560	87 124
24	11.3	9.2B		29	28.207	-0.0008	1.0	83	8	23.57	-0.023	1.0	0.27	28.198	19	30.3	24.02	19	30.3	AG		352	83 388	
25	10.8	9.5B		29	43.121	-0.0020	0.9	81	1	57.20	-0.040	0.9	0.25	43.081	17	30.3	58.11	17	30.3	AG		407	81 431	
26	10.5	9.0B		30	14.750	-0.0053	0.9	80	33	16.27	-0.027	0.9	0.25	15.259	17	30.3	16.81	17	30.3	AG		300	81 433	
27	11.0	8.0B		30	17.358	-0.0035	0.9	80	32	12.56	-0.002	0.9	0.25	17.358	18	30.3	12.61	18	30.3	AG		301	81 438	
28	11.0	9.4B		30	20.157	-0.0019	0.9	82	4	1.76	-0.023	0.9	0.25	20.353	17	30.3	2.22	17	30.3	AG		391	83 389	
29	11.8	9.5B		30	31.470	-0.0017	1.1	82	7	4.03	-0.004	1.0	0.28	31.662	20	30.3	4.12	20	30.3	AG		392	32 396	
30	11.8	9.5A		30	57.904	-0.0053	0.6	85	4	14.56	-0.017	0.6	0.13	57.911	13	51.3	14.54	13	51.3	F8	U	26A	561	85 227
31	10.5	9.1B		31	1.079	-0.0090	0.9	82	45	4.05	-0.034	0.9	0.25	0.922	17	30.3	4.72	17	30.3	AG		393	83 390	
32	10.5	8.8B		31	23.667	-0.0053	0.9	82	15	1.72	-0.015	0.9	0.24	23.776	16	30.3	2.02	16	30.3	B6	AG	394	82 397	
33	10.1	8.6B		32	44.117	-0.0133	0.9	80	34	43.95	-0.008	0.9	0.24	44.379	16	30.3	44.11	16	30.3	K0	AG	395	81 435	
34	11.4	9.5B		32	51.452	-0.0021	1.0	82	13	54.78	-0.028	1.0	0.27	51.412	19	30.3	55.52	19	30.3	AG		392	82 398	
35	10.2	9.3B		33	34.365	-0.0034	0.9	81	2	51.76	-0.023	0.9	0.24	34.298	16	30.3	52.21	16	30.3	AG		408	81 436	
36	11.0	9.3B		33	39.566	-0.0240	0.6	81	14	24.29	-0.011	1.0	0.26	40.038	16	30.3	24.51	16	30.3	G5	U	26A	562	81 437
37	11.0	9.3A		34	12.825	-0.0073	0.6	85	53	38.61	-0.014	0.6	0.13	12.860	13	51.3	36.60	13	51.3	G5	U	26A	562	86 134
38	11.0	9.5B		34	14.634	-0.0030	0.9	80	37	17.49	-0.011	0.9	0.26	14.578	18	30.3	17.81	18	30.3	AG		393	81 438	
39	10.6	9.8B		34	28.722	-0.0316	0.6	86	34	50.87	-0.016	1.0	0.49	27.257	19	30.3	50.13	19	30.3	G5	AG	18397	87 125	
40	10.6	9.5B		34	39.564	-0.0061	0.9	81	36	48.06	-0.007	0.9	0.25	39.723	17	30.3	46.22	17	30.3	AG		410	82 399	
41	11.6	9.2A		35	24.787	-0.0029	0.6	86	19	25.37	-0.002	0.6	0.13	24.783	13	51.3	25.37	13	51.3	K0	U	26A	564	86 195
42	11.6	8.5B		36	17.312	-0.0010	0.6	86	1	1.44	-0.014	1.0	0.27	17.234	19	30.3	1.72	19	30.3	AG		394	84 315	
43	10.4	8.9B		36	57.473	-0.0139	0.9	82	3	7.58	-0.023	0.9	0.25	57.575	17	30.3	8.02	17	30.3	AG		396	82 400	
44	11.2	9.5B		37	25.031	-0.0136	1.0	83	28	37.79	-0.012	1.0	0.26	25.263	18	30.3	38.02	18	30.3	AG		354	83 393	
45	9.4	8.7B		37	27.533	-0.0226	0.9	80	44	16.99	-0.001	0.9	0.24	27.978	16	30.3	17.01	16	30.3	F5	AG	304	81 440	
46	10.8	9.3A		37	28.614	-0.0157	0.6	86	36	8.45	-0.006	0.6	0.13	28.793	13	51.3	8.49	13	51.3	G2	U	26A	565	87 126
47	10.8	9.5B		37	30.643	-0.0085	0.9	81	37	23.20	-0.016	0.9	0.25	30.693	17	30.3	23.52	17	30.3	G2	U	26A	565	81 411
48	10.8	9.3A		38	0.444	-0.0037	0.6	85	0	21.64	-0.014	0.6	0.13	0.433	13	51.3	21.63	13	51.3	G8	U	26A	566	85 231
49	10.8	9.0A		38	14.422	-0.0312	0.6	87	24	43.55	-0.015	0.6	0.13	14.416	13	51.3	43.57	13	51.3	A2	U	26A	567	87 127
50	10.8	8.5A		38	52.703	-0.0055	0.6	85	30	34.95	-0.006	0.6	0.13	52.655	13	51.3	34.94	13	51.3	G0	U	26A	568	85 243
51	10.7	9.2B		13	39	1.341	-0.0079	0.9	81	17	23.62	-0.005	0.9	0.25	1.498	17	30.3	23.71	17	30.3	AG		412	81 441
52	11.4	9.5B		39	7.623	-0.0181	1.0	83	12	55.16	-0.003	1.0	0.27	7.989	19	30.3	53.22	19	30.3	AG		355	83 395	
53	10.6	9.1B		39	13.531	-0.0010	0.9	82	53	17.79	-0.002	0.9	0.25	13.512	17	30.3	18.82	17	30.3	AG		397	83 394	
54	10.3	9.4B		40	2.311	-0.0068	0.9	81	27	7.33	-0.002	0.9	0.25	2.177	17	30.3	7.81	17	30.3	AG		413	81 442	
55	10.8	9.3A		40	7.598	-0.0068	0.6	86	7	48.53	-0.009	0.6	0.13	7.509	13	51.3	48.52	13	51.3	K0	U	26A	569	86 196
56	10.8	9.2B		40	33.395	-0.0074	0.9	84	44	30.13	-0.031	0.9	0.25	33.114	17	30.3	29.52	17	30.3	AG		291	85 232	
57	9.4	8.2B		40	47.234	-0.0017	0.6	81	18	29.78	-0.016	0.6	0.13	47.238	16	30.3	30.11	16	30.3	K2	AG	414	81 443	
58	10.8	9.0B		40	59.451	-0.0066	0.9	81	27	15.82	-0.02													