UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA

OBSERVATÓRIO DO VALONGO

TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM DO ARRASTO PARA SATÉLITES ARTIFICIAIS TERRESTRES : UMA APROXIMAÇÃO SUPERIOR

REINALDO PINTO DA SILVA

ORIENTADOR: JOSÉ AUGUSTO BUARQUE DE NAZARETH

Rio de Janeiro, 16 de abril de 1984

A meu pai, que já partiu desta para a outra vida, e à minha mãe, que tudo fizeram e fazem para a minha felicidade.

AGRADECIMENTO

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que de alguma forma contribuiram para que eu chegasse onde cheguei, em especial ao prof. José Augusto, pela sua inestimável ajuda, e a Sílvia Arenásio Pereira, pela colaboração na datilografia. A todos os professores, em geral, endereço a minha gratidão.

Finalmente, quero agradecer a Deus por tudo, pois nesta Terra nada somos e nada temos se não estamos com Ele...

O TEMPO

Deus pede 'strita conta do meu tempo,
É forçoso do tempo já dar conta,
Mas como dar em tempo tanta conta
Eu, que gastei sem conta tanto tempo ?

Para ter minha conta feita a tempo,
Dado me foi bem tempo e não fiz conta.
Não quis, sobrando tempo, fazer conta,
Quero hoje fazer conta e falta tempo.

Oh! vós, que tendes tempo sem ter conta,
Não gasteis esse tempo em passatempo.
Cuidai, enquanto é tempo, em fazer conta.

Mas oh! se os que contam com seu tempo
Fizessem desse tempo alguma conta,
Não choravam sem conta o não ter tempo.

Laurindo Rabelo

RESUMO

Procuramos, no presente projeto, analisar o efeito do arrasto sobre o movimento orbital de um satélite artificial terrestre, considerando uma aproximação superior da velocidade ambiente. Deduzimos um grupo de equações variacionais para os elementos orbitais, do qual integramos analiticamente a equação para o semi-eixo maior durante um período orbital, considerando até termos de ordem do cubo da excentricidade e supondo a atmosfera terrestre com achatamento e rotação, com a densidade do ar descrita pela lei exponencial, dentro da nossa faixa de interesse. Comparamos então tal aproximação com a já existente, a fim de termos uma idéia da precisão alcançada.

Palavras chave : satélite artificial terrestre: movimento orbital; equações de Gauss; atmosfera terrestre; arrasto.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Como um satélite artificial move-se através da atmosfera da Terra, seu movimento orbital é perturbado pela resistência do ar. Tal resistência é uma das mais importantes influências perturbadoras no regime de altitude de 150 a 600 km. A resistência do ar tem, em geral, seis componentes, três sendo forças e três sendo momentos de forças, que tendem a tornar muito complexo o movimento de um corpo assimétrico. No caso de uma esfera sem rotação, a resistência reduz-se a uma única componente, chamada "força de arrasto" ('drag'). Para corpos alongados, como alguns satélites artificiais terrestres e todos os projéteis comuns, a principal componente da resistência, além do arrasto, é uma força de "sustentação" ('lift') perpendicular à direção do movimento e dependente do ângulo entre o eixo de simetria e a direção do movimento; frequentemente ela excede a força de arrasto em quantidade. Existe um momento associado e, se há rotação, existem ainda outros momentos, afetando a orientação e portanto influenciando as forças de sustentação e arrasto. A previsão precisa do movimento orbital de tais corpos pareceria impraticável na ausência de informação completa acerca da orientação e da rotação ao longo de toda a órbita e de conhecimento completo acerca da dependência funcional das seis componentes da força aerodinâmica sobre os parâmetros físicos e geométricos relevantes.

Em alguns problemas relacionados a satélites artificiais não esféricos, o emprego de uma força de arrasto média e o desprezo da sustentação é o melhor procedimento praticável. A média a longo prazo da força de sustentação tenderá estatisticamente a zero por causa da variação das orientações, e uma força de arrasto média calculada sobre as diversas orientações pode ser utilizada; porém deve-se ter em mente que os movimentos previstos desse modo estarão sujeitos a incertezas estatísticas, que tenderão a inutilizar uma análise dinâmica refinada.

No presente projeto analisaremos apenas a ação do arrasto sobre o movimento orbital do satélite artificial. Fitzpatrick [1] apresenta uma teoria de primeira ordem do arrasto desprezando termos de or dem S e acima na velocidade ambiente, procedimento este já executado por Sterne [2] . Abordaremos aqui uma aproximação superior para a velocidade ambiente, em que desprezaremos os termos de ordem S^2 e acima, e introduziremos tal aproximação nas equações de Gauss, obtendo assim um conjunto de equações para os elementos orbitais do satélite. Considerando o modelo exponencial para a densidade atmosférica, calcularemos a variação do semi-eixo maior da órbita durante uma revolução, levando-se em conta apenas até os termos da ordem do cubo da excentricidade, que é a ordem empregada nos desenvolvimentos de Fitzpatrick e Sterne (op. cit.). Feito isto, poderemos ter uma idéia da precisão alcançada por esta aproximação, comparando-a numericamente com o resultado obtido ao empregarmos as fórmulas deduzidas pelos dois autores anteriormente citados, considerando-se um exemplo de um satélite artificial com os elementos da órbita osculadora previamente estabelecidos. A esse objetivo nos propomos e apresentamos nas páginas seguintes o desenvolvimento matemático que nos permitirá avaliar as consequências de nossa hipótese inicial.

CAPÍTULO I

A FORÇA DE ARRASTO

Neste capítulo nos propomos a deduzir uma expressão matemática para a força de arrasto e suas componentes, a fim de introduzí-la nas equações de Gauss. No caso de uma esfera sem rotação cuja área da seção transversal é A, movendo-se com velocidade $\vec{V}$ através de um fluido de densidade ρ, a força de arrasto é dada por

$$\vec{F}a = -\frac{1}{2} Ca \frac{A}{m} \rho V \vec{V} \qquad (1.1)$$

onde m é a massa da esfera e o sinal "-" indica que a força tem sentido oposto ao de $\vec{V}$. Na expressão acima, Ca é uma função adimensional, chamada "coeficiente de arrasto aerodinâmico", de quantidades adimensionais como o número de Mach, o número de Reynold e a razão entre o raio da esfera e o livre percurso médio das moléculas do fluido. Para esferas grandes comparadas com o livre percurso médio, Ca é da ordem de grandeza da unidade, mas tem um valor próximo a 2 quando a esfera é pequena em comparação com o livre percurso médio.

Para um satélite não esférico, a força de arrasto é ainda dada pela expressão acima, porém A deve ter um valor médio. No caso de um corpo cuja superfície intercepta uma linha reta não mais que duas vezes (isto é, um corpo convexo), A (que é a área da seção transversal efetiva do corpo) é exatamente igual a 1/4 da área superficial total. Ao analizarmos o movimento de um satélite artificial terrestre, o símbolo ρ representa a densidade atmosférica local, que depende da posição e do tempo de um modo muito complicado, e $\vec{V}$ é a velocidade da atmosfera em relação ao satélite (chamada velocidade ambiente). Definamos

$$b = Ca\ A/2m \qquad (1.2)$$

Então,

$$\vec{F}a = -b \rho V \vec{V} \qquad (1.3)$$

É necessário agora encontrar a expressão para a velocidade $\vec{V}$ e seu módulo V. Tomamos o centro de massa da Terra (O) como origem do sistema equatorial inercial $Ox_q y_q z_q$ em que o eixo x_q está dirigido para o primeiro ponto de Áries e o eixo z_q coincide com o eixo polar (desprezamos aqui os efeitos da precessão e da nutação). É conveniente usar coordenadas esféricas (r, α, δ) definidas como se segue: r é a distância radial do centro de massa da Terra até o satélite artificial, α é a sua ascensão reta e δ é a sua declinação. O sistema $Ox_q y_q z_q$ tem por base $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$. Definimos outro sistema de coordenadas tendo por base $(\hat{r}_1, \hat{s}_1, \hat{k}'')$, sendo o versor $\hat{r}_1$ dirigido do centro de massa da Terra para o satélite, $\hat{k}''$ tendo a mesma direção e sentido do momento angular do satélite (na órbita osculadora) e $\hat{s}_1 = \hat{k}'' \times \hat{r}_1$. Feito isto, podemos escrever

$$\vec{F}a = - b\rho V \vec{V} = R\, \hat{r}_1 + S\, \hat{s}_1 + F_{\zeta''}\, \hat{k}'' \tag{1.4}$$

onde procuramos expressar ρV em termos dos elementos orbitais e $\vec{V}$ como uma combinação linear dos vetores base $(\hat{r}_1, \hat{s}_1, \hat{k}'')$. Após esse passo , as componentes R, S e F são determinadas igualando-se os coeficientes em (1.4).

A velocidade ambiente $\vec{V}$ é dada por

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{V}a \tag{1.5}$$

onde a velocidade instantânea $\vec{v}$ do satélite, em relação ao sistema inercial $Ox_q y_q z_q$, é dada por

$$\vec{v} = \dot{r}\, \hat{r}_1 + r\, \dot{w}\, \hat{s}_1 \tag{1.6}$$

e $\vec{V}a$ é a velocidade de um ponto da atmosfera relativa a $Ox_q y_q z_q$. Assume-se que a atmosfera gire com a Terra com velocidade angular ℓ em torno do eixo z_q. Logo $\vec{V}a$ é paralela ao plano equatorial e pode ser expressa na forma

$$\vec{V}a = \ell\, r \cos\delta \left[-\mathrm{sen}(\alpha - \Omega)\, \hat{i}' + \cos(\alpha - \Omega)\, \hat{j}^* \right] \tag{1.7}$$

onde $\hat{i}'$ é um vetor unitário dirigido ao longo da linha dos nodos para o nodo ascendente e $\hat{j}^* = \hat{k} \times \hat{i}'$. A base $(\hat{i}', \hat{j}^*, \hat{k})$ está relacionada à ba se $(\hat{r}_1, \hat{s}_1, \hat{k}'')$ através da transformação

$$\begin{pmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & -\text{sen}\, u & 0 \\ \cos i\ \text{sen}\, u & \cos i \cos u & -\text{sen}\, i \\ \text{sen}\, i\ \text{sen}\, u & \text{sen}\, i \cos u & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{s}_1 \\ \hat{k}'' \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Com o auxílio de (1.8) e das identidades

$$\begin{aligned} \cos\delta \cos(\alpha - \Omega) &= \cos u \\ \cos\delta\, \text{sen}(\alpha - \Omega) &= \text{sen}\, u \cos i \end{aligned} \tag{1.9}$$

onde $u = w + \omega$, podemos escrever

$$\vec{V}a = \ell r \cos i\ \hat{s}_1 - \ell r \cos u\ \text{sen}\, i\ \hat{k}'' \tag{1.10}$$

Portanto, de (1.5), (1.6) e (1.10) vem que

$$\vec{V} = \dot{r}\,\hat{r}_1 + (r\,\dot{w} - \ell r \cos i)\ \hat{s}_1 + \ell r \cos u\ \text{sen}\, i\ \hat{k}'' \tag{1.11}$$

e

$$V^2 = v^2 - 2\, r^2 \dot{w}\, \ell \cos i + \ell^2 r^2 (\cos^2 i + \cos^2 u\ \text{sen}^2 i) \tag{1.12}$$

Expressando v^2, r e $r^2\dot{w}$ em termos dos elementos orbitais e de E,

errata

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{w}^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \\ r &= a(1 - e \cos E) \\ r^2\dot{w} &= [\mu a\ (1-e^2)]^{1/2} \end{aligned} \tag{1.13}$$

encontramos que, com as definições

$$\begin{aligned} n &= \mu^{1/2} a^{-3/2} \\ d &= \frac{\ell}{n}\ (1-e^2)^{1/2} \cos i \\ \tau &= d\ \frac{(1-e \cos E)}{(1+e \cos E)} \\ s &= \frac{\ell^2}{2n^2}\left(\frac{1-e \cos E}{1+e \cos E}\right)^2 (\cos^2 i + \cos^2 u\ \text{sen}^2 i)(1 - e^2 \cos^2 E) \end{aligned} \tag{1.14}$$

e

$$\gamma = 2(\tau - s)$$

temos

$$V = \left(\frac{\mu}{a}\right)^{1/2} \left(\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}\right)^{1/2} (1 - \gamma)^{1/2} \tag{1.15}$$

Para a maioria dos satélites, ζ e s possuem valores numéricos que não ultrapassam 0,07 e 0,002 respectivamente [1] . Logo o valor numérico de γ é positivo e usualmente menor que 0,14. Desprezando termos de ordem s^2, podemos escrever

$$V = \left(\frac{\mu}{a}\right)^{1/2}\left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}\right)^{1/2}\left(1-\zeta+s-\frac{1}{2}\zeta^2+\zeta s\right) \tag{1.16}$$

Se, em (1.11), expressamos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= a\,e\,\mathrm{sen}\,E\,\hat{E} \\ n &= (1-e\cos E)\,\hat{E} \\ r\,\dot{w} &= a\,(1-e^2)^{1/2}\hat{E} \\ r &= \frac{a}{n}\,(1-e\cos E)^2\hat{E} \end{aligned} \tag{1.17}$$

então $\vec{F}a$ pode ser expressa na forma

$$\vec{F}a = -b\rho V\left\{a\,e\,\mathrm{sen}\,E\,\hat{E}\,\hat{r}_1 + \left[a(1-e^2)^{1/2}\hat{E} - \frac{\ell a}{n}\cos i(1-e\cos E)^2\hat{E}\right]\hat{S}_1 + \frac{\ell a}{n}\cos u\,\mathrm{sen}\,i(1-e\cos E)^2\hat{E}\,\hat{k}''\right\} \tag{1.18}$$

De (1.4) e (1.18) vemos que as componentes R, S e $F_{\zeta''}$ são dadas pelas equações

$$\begin{aligned} R &= -b\,a\,e\,\rho\,V\,\mathrm{sen}\,E\,\hat{E} \\ S &= -b\,a\,\rho\,V\,(1-e^2)^{1/2}C\,\hat{E} \\ F_{\zeta''} &= -b\,\rho\,V\,\frac{\ell a}{n}\,\mathrm{sen}\,i\,\cos u\,(1-e\cos E)^2\hat{E} \end{aligned} \tag{1.19}$$

onde

$$C = 1 - \frac{d(1-e\cos E)^2}{(1-e^2)} \tag{1.20}$$

e onde a, e, i, ω, Ω, E, w e M são o semi-eixo maior da órbita, a excentricidade, a inclinação, o argumento do perigeu, a longitude do nodo ascendente, a anomalia excêntrica, a anomalia verdadeira e a anomalia média, respectivamente, como é o usual na Mecânica Celeste.

CAPÍTULO II

AS EQUAÇÕES DE GAUSS

Para estudar o efeito do arrasto no movimento do satélite, introduziremos (1.1) como uma perturbação nas equações de Gauss para a, e, i, ω, Ω e M, dadas abaixo:

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{(\mu p^*)^{1/2}} \left[e \text{ sen } w\ R + \frac{p^*}{r} S \right]$$

$$\dot{e} = \left(\frac{p^*}{\mu}\right)^{1/2} \left[\text{sen } w\ R + \frac{(r + p^*)\cos w + e\, r}{p^*} S \right]$$

$$(i)^{\bullet} = \frac{r \cos u}{(\mu p^*)^{1/2}} F_{\zeta''}$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{e} \left(\frac{p^*}{\mu}\right)^{1/2} \left[-\cos w\ R + \frac{(r + p^*)\text{sen } w}{p^*} S - \frac{r\, e \text{ sen } u \text{ cotg } i}{p^*} F_{\zeta''} \right] \qquad (2.1)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r \text{ sen } u}{\text{sen } i\ (\mu p^*)^{1/2}} F_{\zeta''}$$

$$\dot{M} = n - \frac{1}{(\mu a)^{1/2}} \cdot \left[\left(2r - \frac{p^*}{e} \cos w\right) R + \frac{(r + p^*) \text{ sen } w}{e} S \right]$$

onde

$$u = w + \omega$$
$$p^* = a(1-e^2) \qquad (2.2)$$

e R, S e $F_{\zeta''}$ são dados por (1.19). Por conveniência no cálculo, trabalharemos aqui com a anomalia excêntrica E ao invés de utilizarmos a anomalia verdadeira w; para tal contamos com as seguintes fórmulas auxiliares:

$$\text{sen } w = \frac{(1-e^2)^{1/2} \text{sen } E}{1-e \cos E}$$

$$\cos w = \frac{\cos E - e}{1-e \cos E} \qquad (2.3)$$

Como estamos desenvolvendo uma teoria de 1º ordem, consideramos a substituição do tempo como variável de integração pela anomalia excêntrica não perturbada através da condição diferencial

$$(1-e\cos E)\,dE = n\,dt \tag{2.4}$$

deduzida a partir da equação de Kepler

$$E - e\,\text{sen}\,E = M = n\,(t - T)$$

Tratamos então a anomalia excêntrica que aparece nos integrandos como não perturbada, na execução da integração. Onde E aparece nos resultados integrados, será subentendido estar relacionada ao movimento não perturbado e pode ser calculada como função de t das equações do problema de dois corpos quando os valores iniciais dos elementos orbitais são prescritos. Sendo assim, se h é um elemento orbital, podemos considerar

$$\dot{h} = \frac{dh}{dE}\,\dot{E} \tag{2.5}$$

Podemos então deduzir as equações variacionais para os elementos orbitais introduzindo (1.16), (1.19), (2.2), (2.3) e (2.5) em (2.1). Em todo o desenvolvimento foram abandonados os termos de ordem s^2.

Com o auxílio das identidades

$$\begin{aligned} &e^2\text{sen}^2E + (1-e^2)\,C = (1-\zeta)(1-e^2\cos^2E)\\ &C = 1 - \zeta - \frac{\zeta e^2\,\text{sen}^2E}{(1-e^2)} \end{aligned} \tag{2,6}$$

obtemos

$$\frac{da}{dE} = -2ba^2\rho\,\frac{(1+e\cos E)^{3/2}}{(1-e\cos E)^{1/2}}\,(1 - 2\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 + s) \tag{2.7a}$$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dE} = &-2ba\rho\,(1-e^2)\left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}\right)^{1/2}\cos E\,(1-2\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 + s) -\\ &-ba\rho\,ed\,\frac{(1-e\cos E)^{3/2}}{(1+e\cos E)^{1/2}}\,\text{sen}^2E\,(1-\zeta + s - \frac{1}{2}\zeta^2 + \zeta s) \end{aligned} \tag{2.7b}$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dE} = &-\frac{b}{2}\,\ell\,\rho\,\frac{a}{n}\,\text{sen}\,i\,(1-e^2)^{-1/2}(1+e\cos E)^{1/2}(1-e\cos E)^{5/2}\times\\ &\times(1-\cos 2u)(1-\zeta + s - \frac{1}{2}\zeta^2 + \zeta s) \end{aligned} \tag{2.7c}$$

$$\frac{d\omega}{dE} = -\cos i \frac{d\Omega}{dE} - 2b\rho\frac{a}{e}\,(1-e^2)^{1/2}\,\mathrm{sen}E\left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}\right)^{1/2} \times$$

$$\times\,\left(1-\tau+s-\frac{1}{2}\tau^2+\tau s\right)\left[1-\frac{d}{2(1-e^2)}(1-e\cos E)(2-e^2-e\cos E)\right] \qquad (2.7d)$$

$$\frac{d\Omega}{dE} = -\frac{b}{2}\rho\ell\frac{a}{n}(1-e^2)^{-1/2}\,\mathrm{sen}2u\,(1+e\cos E)^{1/2}(1-e\cos E)^{5/2} \times$$

$$\times\,\left(1-\tau+s-\frac{1}{2}\tau^2+\tau s\right) \qquad (2.7e)$$

$$\frac{dM}{dE} = 1-e\cos E-\frac{2ba}{e}\rho\,(1-e^3\cos E)\left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}\right)^{1/2}\mathrm{sen}E\left(1-\tau+s-\frac{1}{2}\tau^2+\tau s\right)\times$$

$$\times\left[1-\frac{d(1-e\cos E)}{2(1-e^3\cos E)}(2-e^2-e\cos E)\right] \qquad (2.7f)$$

Para fins de comparação, Fitzpatrick (op.cit.) apresenta as equações variacionais desprezando termos de ordem s e acima na velocidade ambiente, conforme é apresentado abaixo:

$$\frac{da}{dE} = -2b\rho\, a^2\frac{(1+e\cos E)^{3/2}}{(1-e\cos E)^{1/2}}\,(1-\tau)^2 \qquad (2.8a)$$

$$\frac{de}{dE} = -2b\rho\, a(1-e^2)\left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}\right)^{1/2}(1-\tau)^2\cos E -$$

$$-b\rho\, aed\,\frac{(1-e\cos E)^{3/2}}{(1+e\cos E)^{1/2}}\,(1-\tau)\,\mathrm{sen}^2E \qquad (2.8b)$$

$$\frac{di}{dE} = -\frac{b}{2}\ell\rho\frac{a}{n}\,\mathrm{sen}\,i(1-e^2)^{-1/2}(1+e\cos E)^{1/2}\times$$

$$\times\,(1-e\cos E)^{5/2}(1-\cos 2u)(1-\tau) \qquad (2.8c)$$

$$\frac{d\omega}{dE} = -\cos i\,\frac{d\Omega}{dE} - 2b\,\rho\frac{a}{e}\,(1-e^2)^{1/2}\,\mathrm{sen}\,E\,(1-\tau)\times$$

$$\times\left[1-\frac{d}{2(1-e^2)}\,(1-e\cos E)(2-e^2-e\cos E)\right] \qquad (2.8d)$$

$$\frac{d\Omega}{dE} = -\frac{b}{2}\ell\rho\frac{a}{n}\,(1-e^2)^{-1/2}\,\mathrm{sen}2u(1+e\cos E)^{1/2}(1-e\cos E)^{5/2}(1-\tau) \qquad (2.8e)$$

$$\frac{dM}{dE} = 1-e\cos E -2b\rho\frac{a}{e}(1-e^3\cos E)(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E})^{1/2}\text{sen}E\ (1-\tau)\ X$$

$$X\left[1-\frac{d(1-e\cos E)}{2(1-e^3\cos E)}(2-e^2-e\cos E)\right] \qquad (2.8f)$$

Portanto, se h é um elemento orbital e se designamos $\frac{dh}{dE}^{(1)}$ como a aproximação de ordem superior que obtivemos, expressa pelas equações (2.7), e $\frac{dh}{dE}^{(0)}$ como a aproximação apresentada por Fitzpatrick (op.cit.), expressa pelas equações (2.8), e definindo

$$\frac{dh}{dE}^{(1-0)} = \frac{dh}{dE}^{(1)} - \frac{dh}{dE}^{(0)} \qquad (2.9)$$

a diferença entre as duas aproximações será dada por

$$\frac{da}{dE}^{(1-0)} = -2ba^2\rho\frac{(1+e\cos E)^{3/2}}{(1-e\cos E)^{1/2}}(s-\frac{1}{2}\tau^2) \qquad (2.10a)$$

$$\frac{de}{dE}^{(1-0)} = -2ba\rho(1-e^2)(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E})^{1/2}\cos E\ (s-\frac{1}{2}\tau^2) -$$

$$-ba\rho\, ed\frac{(1-e\cos E)^{3/2}}{(1+e\cos E)^{1/2}}\text{sen}^2E\ (s-\frac{1}{2}\tau^2-\tau s) \qquad (2.10b)$$

$$\frac{di}{dE}^{(1-0)} = -\frac{b}{2}\ell\rho\frac{a}{n}\text{sen }i(1-e^2)^{-1/2}(1+e\cos E)^{1/2}(1-e\cos E)^{5/2}X$$

$$X\ (1-\cos 2u)(s-\frac{1}{2}\tau^2+\tau s) \qquad (2.10c)$$

$$\frac{d\omega}{dE}^{(1-0)} = -\cos i\frac{d\Omega}{dE}^{(1-0)} - 2b\rho\frac{a}{e}(1-e^2)^{1/2}\text{sen}E\ (\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E})^{1/2}X$$

$$X(s-\frac{1}{2}\tau^2+\tau s)\left[1-\frac{d}{2(1-e^2)}(1-e\cos E)(2-e^2-e\cos E)\right] \qquad (2.10d)$$

$$\frac{d\Omega}{dE}^{(1-0)} = -\frac{b}{2}\ell\rho\frac{a}{n}(1-e^2)^{-1/2}\text{sen}2u(1+e\cos E)^{1/2}(1-e\cos E)^{5/2}X$$

$$\times \left(s - \frac{1}{2}\tau^2 + \zeta s\right) \qquad (2.10e)$$

$$\frac{dM^{(1-0)}}{dE} = 2b\rho\frac{a}{e}(1-e^3\cos E)\left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}\right)^{1/2}\operatorname{sen} E \times$$

$$\times\left(s - \frac{1}{2}\tau^2 + \tau s\right)\left[1 - \frac{d(1-e\cos E)}{2(1-e^3\cos E)}(2-e^2-e\cos E)\right] \qquad (2.10f)$$

As perturbações periódicas e seculares nos elementos orbitais, que tomam lugar durante uma revolução por causa do arrasto, podem ser avaliadas mediante a integração numérica das equações variacionais apresentadas acima. Aparecem, nas integrais indefinidas que surgem, os quatro elementos orbitais a, e, i e ω, que podem ser considerados constantes iguais a seus valores iniciais durante um intervalo de 2π em E. Nos próximos capítulos será esboçado um esquema de integração analítica de uma das equações (2.10).

CAPÍTULO III

UMA REPRESENTAÇÃO ANALÍTICA DA DENSIDADE DO AR NAS EQUAÇÕES VARIACIONAIS

De modo a integrar analiticamente as equações variacionais, deve-se admitir alguma representação da dependência do espaço e do tempo para a densidade do ar ρ. Não é tão simples, no entanto, descrever um modelo matemático realista da atmosfera por causa da natureza complexa da distribuição de densidade e do nosso conhecimento limitado do seu comportamento espaço-temporal. Foram apresentados alguns modelos da atmosfera que ajudaram a esclarecer a dependência da densidade sobre o espaço e o tempo no regime de altitude entre 150 e 750 km (referido como atmosfera superior). Esses modelos estão sendo constantemente aperfeiçoados numa tentativa de refletir o corrente estado de conhecimento das variações observadas na atmosfera superior. Na descrição de uma teoria de 1º ordem para as perturbações de arrasto, consideramos somente uma representação empírica de ρ. A despeito da grande variabilidade na densidade com respeito ao tempo, certas representações analíticas de ρ foram usadas com considerável sucesso nas integrações das equações variacionais tanto sobre um período orbital quanto sobre todo o tempo de vida do satélite. Os modelos matemáticos da densidade do ar a que somos conduzidos mais naturalmente são ou a lei de potência ou a lei exponencial de variação com a altitude.

Para a camada de 300 a 400 km, que será do nosso interesse, dispomos dos seguintes dados, extraídos de Mc Cartney [3]:

Altitude(km)	Temperatura(ºK)	densidade(kg m^{-3})
300	1432	$3,59\times10^{-11}$
400	1488	$6,50\times10^{-12}$

Portanto, em vista da pouca variação da temperatura dentro da nossa faixa de interesse, podemos fazer uso do modelo isotérmico, considerando esta camada com uma temperatura constante e igual a 1460ºK (média aritmética das temperaturas dos extremos). Neste caso a lei exponencial ajusta-se razoavelmente e ρ pode ser dada por

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \tag{3.1}$$

onde ρ_0 é a densidade no nível de referência, z é a altitude acima do nível de referência e H é a escala de altura, dada por

$$H = \frac{R\,T}{g} \tag{3.2}$$

onde, no nosso caso, R é a constante específica do ar, cujo valor é de $2{,}8706 \times 10^{2}$ J $kg^{-1}K^{-1}$, T é a temperatura da camada (1460ºK) e g é o campo gravitacional terrestre, dado aproximadamente por

$$g = \frac{G\,Mt}{D^2} \tag{3.3}$$

onde G é a constante da gravitação universal ($6{,}670 \times 10^{-11}$ MKS), Mt é a massa da Terra ($5{,}98 \times 10^{24}$ kg) e D é a distância ao centro de massa da Terra, que pode ser tomada, em média, como sendo igual ao semi-eixo maior da órbita osculadora do satélite.

A densidade da atmosfera é provavelmente mais uma função da altitude acima de um planeta esferoidal que da distância ao centro do planeta. A altitude de um satélite acima de um planeta esferoidal é dada por

$$z' = a(1-e\cos E) - a_t\left[1-f\,\mathrm{sen}^2 i\,\mathrm{sen}^2(w+\omega)\right] \tag{3.4}$$

onde a_t e b_t são respectivamente os raios equatorial e polar da Terra, e f é o achatamento, dado por $(a_t-b_t)/a_t$ ($\sim 0{,}0034$). Tomando-se o perigeu como nível de referência, ou seja,

$$z'_{ref} = a(1-e) - a_t\left(1-f\,\mathrm{sen}^2 i\,\mathrm{sen}^2\omega\right) \tag{3.5}$$

temos que, utilizando (3.4), (3.5) e (2.3),

$$z = z' - z'_{ref} = Hc(1-\cos E) + Hq\cos 2\omega\,\frac{(1-e^2)\,\mathrm{sen}^2 E}{(1-e\cos E)^2} +$$

$$+ Hq(1-e^2)^{1/2} \operatorname{sen}2\omega \frac{\operatorname{sen}E(\cos E-e)}{(1-e\cos E)^2} \tag{3.6}$$

onde

$$Hc = ae$$
$$Hq = a_t f \operatorname{sen}^2 i \tag{3.7}$$

A quantidade q é usualmente menor que 0,4 [1] . Usando a notação

$$k_1 = q \cos 2\omega \, (1-e^2)$$
$$k_2 = q \operatorname{sen}2\omega \, (1-e^2)^{1/2}$$
$$\alpha = \operatorname{sen}^2 E \, (1-e\cos E)^{-2} \tag{3.8}$$
$$\beta = (\cos E-e)(1-e\cos E)^{-2}$$

vemos que ρ é dada pela função

$$\rho = \rho_\pi \exp(-c)\exp(c \cos E)\exp(-k_1 \alpha - k_2 \beta \operatorname{sen}E) \tag{3.9}$$

onde ρ_π é a densidade no perigeu. Uma expansão desta função que nos será útil mais adiante é dada por

$$\rho = \rho_\pi \exp(-c)\exp(c \cos E)\cdot\Big\{(k_1\alpha - 1)k_2\beta \operatorname{sen}E + 1 + q_1 + q_2 +$$
$$+ 2e(q_1+2q_2)\cos E + \left[(3e^2-1)q_1-2q_2\right]\cos^2 E - 2e(q_1+4q_2)\cos^3 E -$$
$$- (3e^2 q_1 - q_2)\cos^4 E + 4eq_2 \cos^5 E\Big\} \tag{3.10}$$

onde

$$q_1 = (1-e^2)(-q\cos 2\omega + \frac{1}{2} q^2 \operatorname{sen}^2 2\omega)$$
$$q_2 = \frac{1}{2}(1-e^2)^2 q^2 \cos 4\omega \tag{3.11}$$

e onde foram abandonados termos de ordem superior a e^3, $q_1 e^2$ e $q_2 e$.

CAPÍTULO IV

INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES VARIACIONAIS

Se a expressão da densidade dada por (3.9) é substituída nas equações variacionais, podemos integrá-las analiticamente. Um meio de fazê-lo é considerar a expansão (3.10) e', a menos do fator exp(c cosE), expandir o membro direito das equações em séries de potências de e, os coeficientes das quais contendo potências das funções trigonométricas senE e cosE. No nosso caso, desenvolveremos apenas a equação (2.10a), a qual integraremos de $-\pi$ a π, ou seja, durante apenas um período orbital (perigeu a perigeu), o que nos fornecerá a variação sofrida pelo semi-eixo maior durante tal período, além do resultado apresentado por Fitzpatrick (op.cit.).

Integrando (2.10a) temos

$$\Delta a^{(1-0)} = - 2ba^2\int_{-\pi}^{\pi}\rho \frac{(1+e\cos E)^{3/2}}{(1-e\cos E)^{1/2}} (s- \frac{1}{2} \tau^2)dE \qquad (4.1)$$

sendo s e τ dados por (1.14) e ρ dada por (3.9) ou por sua expansão em (3.10). Como já dissemos, o integrando de (4.1) pode ser expandido em uma série de potências de e, e portanto (4.1) pode ser escrita como uma soma de integrais dos tipos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}E\cos^m E\exp(c\cos E)dE \qquad (4.2)$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^m E\exp(c\cos E)dE \qquad (4.3)$$

onde m é um inteiro não negativo. Os integrandos em (4.2) são funções ímpares de E e as integrais definidas de $-\pi$ a π se anularão. Visto que as integrais definidas da forma (4.3) são combinações lineares das funções modificadas de Bessel de primeira espécie e de ordem inteira, elas podem ser expressas como combinações lineares das funções modificadas de Bessel de primeira espécie, $I_0(c)$ e $I_1(c)$, de ordem zero e um respectivamente, através do uso de relações de recorrência bem conheci das (veja Apêndice).

Se os detalhes da integração de (4.1) são levados a têrmo e são abandonados termos de ordem superior a e^3, $q_1 e^2$, $q_2 e$, $q_3 e^2$ e $q_4 e$, pode-se mostrar que

$$\Delta a^{(1-0)} = -\frac{2\pi b a^2 \ell^2}{n^2} \rho_\pi \exp(-c)\left[B_0 I_0(c) + B_1 I_1(c)\right] \tag{4.4}$$

onde

$$\begin{aligned}
B_0 = & -\frac{2e^3}{c} - \left\{\left\{1+\frac{1}{2}e^2\left[1-\frac{2}{c}(e+\frac{3}{c})\right]\right\}\operatorname{sen}^2\omega - \right.\\
& - \left\{1+\frac{1}{2}e^2\left[1+\frac{1}{c}(2e-\frac{3}{c})\right]\right\}\left.\right\}\operatorname{sen}^2 i + \\
& + \frac{3q_1}{c^2}\left\{e^2 + \left\{\left[2(1-\frac{8e}{c}) + \frac{5}{2}e^2(1+\frac{40}{c^2})\right]\operatorname{sen}^2\omega - \right.\right.\\
& - \left[1-\frac{8e}{c} + 2e^2(1+\frac{25}{c^2})\right]\left.\right\}\operatorname{sen}^2 i\left.\right\} - \\
& - \frac{3\operatorname{sen}^2 i}{c^2} q_2\left\{\left[1+\frac{40}{c^2} - \frac{48e}{c}(1+\frac{20}{c^2})\right]\operatorname{sen}^2\omega - \right.\\
& - \left[1+\frac{20}{c^2} - \frac{4e}{c}(7+\frac{120}{c^2})\right]\left.\right\} - \\
& - \frac{3\operatorname{sen}^2 i\operatorname{sen}2\omega}{c^2} q_3\left[1-\frac{8e}{c} + e^2(1+\frac{50}{c^2})\right] - \\
& - \frac{3\operatorname{sen}^2 i\operatorname{sen}2}{c^2} q_4\left[1+\frac{20}{c^2} - \frac{4e}{c}(7+\frac{120}{c^2})\right]
\end{aligned} \tag{4.5a}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = & e^2\left[\frac{1}{c} + e(1+\frac{4}{c^2})\right] + \left\{2\left\{\frac{1}{c}\left[1-\frac{1}{4}e^2(5+\frac{12}{c^2})\right] + e(1-\frac{e^2}{c^2})\right\}\operatorname{sen}^2\omega - \right.\\
& - \left\{\frac{1}{c}(1-\frac{3e^2}{c^2}) + 2e\left[1-\frac{1}{2}e^2(1-\frac{2}{c^2})\right]\right\}\left.\right\}\operatorname{sen}^2 i - \\
& - \frac{q_1}{c}\left\{\frac{6e^2}{c^2} + \left\{\left\{1-\frac{12}{c}\left[e-\frac{1}{c}(1-\frac{8e}{c})\right] - \frac{1}{2}e^2\left[1-\frac{60}{c^2}(3+\frac{20}{c^2})\right]\right\}\operatorname{sen}^2\omega - \right.\right.\\
& - \left\{1-\frac{6}{c}\left[e-\frac{1}{c}(1-\frac{8e}{c})\right] - \frac{1}{2}e^2\left[1-\frac{3}{c^2}(33+\frac{200}{c^2})\right]\right\}\left.\right\}\operatorname{sen}^2 i\left.\right\} + \\
& + \frac{3\operatorname{sen}^2 i}{c^2} q_2\left\{2\left\{\frac{2}{c}(3+\frac{20}{c^2}) - e\left[1+\frac{24}{c^2}(7+\frac{40}{c^2})\right]\right\}\operatorname{sen}^2\omega - \right.
\end{aligned}$$

$$- \left\{ \frac{1}{c}(7+ \frac{40}{c^2}) -2e\left[1+ \frac{8}{c^2}(11+ \frac{60}{c^2})\right]\right\}\Bigg\}+$$

$$+ \frac{sen^2 i sen2\omega}{c} q_3 \left\{1- \frac{6}{c}\left[e- \frac{1}{c}(1- \frac{8e}{c})\right]- \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}e^2\left[1- \frac{3}{c^2}(29+ \frac{200}{c^2})\right]\right\} +$$

$$+ \frac{3sen^2 i sen2\omega}{c^2} q_4 \left\{\frac{1}{c}(7+ \frac{40}{c^2}) -2e\left[1+ \frac{8}{c^2}(11+ \frac{60}{c^2})\right]\right\} \qquad (4.5b)$$

$$q_3 = qsen2\omega(1-e^2) \qquad (4.6a)$$

$$q_4 = \frac{1}{2}q^2 sen4\omega(1-e^2)^2 \qquad (4.6b)$$

Para a equação (2.8a), dispomos do seguinte resultado[1] :

$$\Delta a^{(0)} = -4ba^2(1-d)^2\pi\rho_\pi \exp(-c) \left[H_o I_o(c) + H_1 I_1(c)\right] \qquad (4.7)$$

onde

$$H_o = 1+e^2(j^2+ \frac{1}{2}) - \frac{e^3 j}{c} + \frac{q_1 e}{c}\left[2(j+1)- \frac{3e}{c}(j^2+4j+ \frac{7}{2})\right]+$$

$$+ \frac{3q_2}{c^2}\left[1- \frac{8e}{c}(j+2)\right] \qquad (4.8a)$$

$$H_1 = 2ej- \frac{e^2}{c}(j^2+ \frac{1}{2}) + (1+ \frac{2}{c^2})je^3 +$$

$$+ \frac{q_1}{c}\left[1- \frac{4e}{c}(j+1) + e^2(1+ \frac{6}{c^2})(j^2+4j+ \frac{7}{2})\right] -$$

$$- \frac{6q_2}{c^2}\left[\frac{1}{c} - (1+ \frac{8}{c^2})e(j+2)\right] \qquad (4.8b)$$

$$j = \frac{1+d}{1-d}$$

de onde então vemos que

$$\Delta a^{(1)} = \Delta a^{(0)} + \Delta a^{(1-0)}$$

que é a integração da equação (2.7a).

Para uma comparação simples, podemos considerar o exemplo de um satélite em órbita equatorial baixa, com $i = \omega = \Omega = 0$, possuindo os valores $a = 6745{,}847$ km e $e = 0{,}01$. Calculamos então a variação relativa entre as aproximações $\Delta a^{(1)}$ e $\Delta a^{(0)}$, dada por

$$\frac{\Delta a^{(1-0)}}{\Delta a^{(0)}} = \frac{\ell^2}{2n^2(1-d)^2} \frac{B_o I_o(c) + B_1 I_1(c)}{H_o I_o(c) + H_1 I_1(c)} = 9{,}09 \times 10^{-8} \sim 10^{-7}$$

isto é, uma variação percentual de $10^{-5}\%$.

CONCLUSÃO

Vimos, no presente projeto, o resultado de uma aproximação superior na velocidade ambiente, quando consideramos os desenvolvimentos em série até o cubo da excentricidade. É evidente, então, que tal aproximação, assim como aquela apresentada nas referências 1 e 2, é válida somente nos casos em que a quarta potência da excentricidade seja desprezível em face da precisão desejada. Para o exemplo em questão, notamos que a variação percentual é de apenas $10^{-5}\%$, o que indica que a aproximação fornecida pelas referências acima citadas já é bastante razoável.

Sugere-se que, em futuros trabalhos, desenvolva-se até uma ordem a mais na excentricidade. Tal tentativa, no entanto, poderá ser um tanto trabalhosa, como já o foi o presente trabalho e como são, em geral, os desenvolvimentos em Mecânica Celeste; é, porém, um caminho para novas pesquisas. Modelos mais aperfeiçoados para a densidade do ar poderão também ser empregados, o que nos forneceria um resultado ainda mais preciso.

APÊNDICE

FÓRMULAS AUXILIARES

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} 2 \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)x + \binom{2n}{n} \right\}$$

$$\cos^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \cos(2n-2k-1)x \right\}$$

Função modificada de Bessel de 1º espécie e ordem inteira p:

$$I_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(x \cos\theta)\cos(p\theta)\,d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!\,(k+p)!}$$

Relações deduzidas a partir das fórmulas apresentadas acima:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^m\theta \, \exp(x \cos\theta)\,d\theta =$$

$$= I_0(x), \quad m = 0$$

$$I_1(x), \quad m = 1$$

$$I_0(x) - \frac{1}{x} I_1(x), \quad m = 2$$

$$-\frac{1}{x} I_0(x) + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) I_1(x), \quad m = 3$$

$$\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)\left(I_0(x) - \frac{2}{x} I_1(x) \right), \quad m = 4$$

$$-\frac{2}{x}\left(1 + \frac{6}{x^2}\right) I_0(x) + \left(1 + \frac{7}{x^2} + \frac{24}{x^4}\right) I_1(x), \quad m = 5$$

$$\left(1 + \frac{9}{x^2} + \frac{60}{x^4}\right) I_0(x) - \frac{3}{x}\left(1 + \frac{11}{x^2} + \frac{40}{x^4}\right) I_1(x), \quad m = 6$$

$$-\frac{3}{x}\left(1 + \frac{17}{x^2} + \frac{120}{x^4}\right) I_0(x) + \left(1 + \frac{15}{x^2} + \frac{192}{x^4} + \frac{720}{x^6}\right) I_1(x), \quad m = 7$$

Relação de recorrência: $I_p(x) = I_{p-2}(x) - \frac{2(p-1)}{x} I_{p-1}(x)$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. FITZPATRICK, Philip M. - "Principles of Celestial Mechanics". Academic Press, New York, 1970.
2. STERNE, T. E. - "An Introduction to Celestial Mechanics". Wiley (Interscience), New York, 1960.
3. McCARTNEY, Earl J. - "Optics of the Atmosphere". Jonh Wiley & Sons, New York, 1976.
4. HILDEBRAND, F. B. - "Metodos de calculo para Ingenieros". Aguilar S.A. de Ediciones, Madrid, 1965.
5. RYSHIK, I. M. and GRADSTEIN, I. S. - "Tables of series, products and integrals". VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.