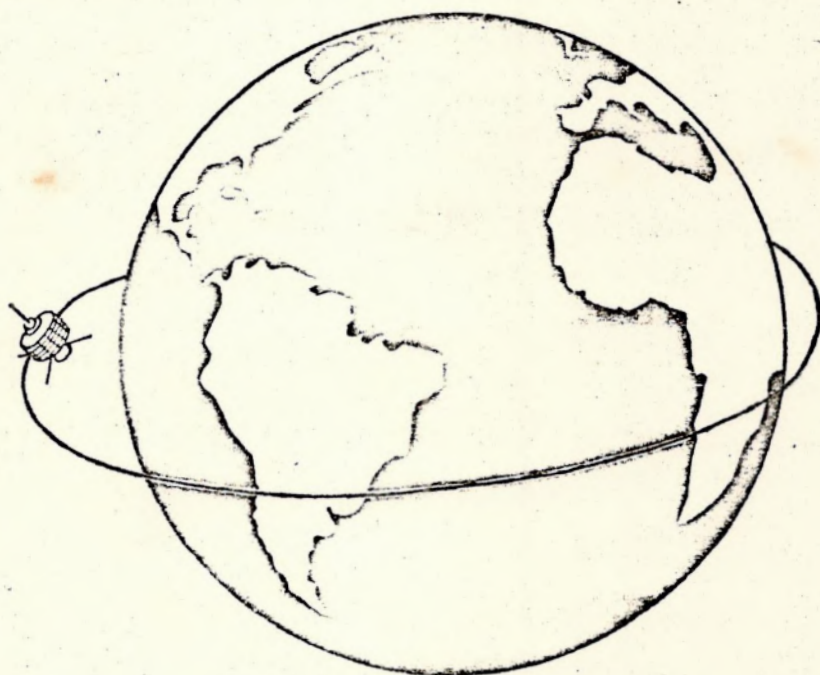




71

SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA TEORIA DE BRILLOUIN-LYDDANE  
PARA SATELITES ARTIFICIAIS (SEM ARRASTE ATMOSFÉRICO)



Observatório do Valongo - UFRJ

Curso de Astronomia - Projeto de final de curso - Março/1986

Aluno: Maurício Moreira Bottino

Orientadora: Sueli Aparecida Guillens

defesa: 18/3/86

1986

AGRADECIMENTOS

A Deus, por mais um degrau galgado em minha vida;

A minha orientadora Sueli Aparecida Guillens, por sua incansável dedicação;

Aos meus pais e familiares que me apoiaram;

Ao Laboratório Nacional de Computação Científica (LnCC), pela cessão de tempo em seu computador, onde todo o trabalho computacional foi executado; e enfim

A todos que de alguma forma ajudaram na elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, e

Àqueles que dedicaram suas vidas em prol do  
Conhecimento Humano.

INDICE

Índice .....4

Introdução .....5

Capítulo 1 - Teoria do Mov. de sat. art. (sem arr. atm.) ..6

    1.1 - Preliminares .....6

    1.2 - A Teoria de Brouwer .....9

    1.3 - A Teoria de Brouwer-Lyddane .....19

Capítulo 2 - Testes Numéricos e Conclusões .....23

    2.1 - Procedimento .....23

    2.2 - Conclusões .....25

Apêndice A .....28

Referências Bibliográficas .....41

## INTRODUÇÃO

A Teoria de Brouwer nos dá a solução do movimento de um satélite artificial, desenvolvida em potências de um pequeno parâmetro  $k_2$  e em variáveis canônicas de Delaunay, através do Método de von Zeipel, considerando o potencial gravitacional terrestre até o 5º harmônico e desprezando o arraste atmosférico. No entanto, essa solução possui singularidades, quando implementada computacionalmente, se a excentricidade e/ou a inclinação da órbita tendem a zero. Lyddane propôs a remoção das singularidades dessa solução (com exceção da inclinação crítica), através de uma transformação das variáveis canônicas de Delaunay para as variáveis canônicas de Poincaré, de forma que pudesse ser aproveitado todo o desenvolvimento de Brouwer. Essa solução é conhecida como Teoria de Brouwer-Lyddane para satélites artificiais sem arraste atmosférico.

Esse trabalho tem como meta principal a implementação computacional dessa teoria, verificando o comportamento da mesma quando comparada à Teoria de Brouwer e à integração numérica.

CAPÍTULO 1

TEORIA DO MOVIMENTO DE SATÉLITES ARTIFICIAIS  
(SEM ARRASTE ATMOSFÉRICO)

1.1 - Preliminares:

Desprezando-se todas as perturbações, temos que as trajetórias de duas partículas de massa interagindo gravitacionalmente serão cônicas, com focos no centro de massa do sistema, resultado este bem conhecido do Problema de dois corpos. Caso a Terra fosse formada por camadas esféricas concêntricas e homogêneas, o satélite artificial descreveria uma órbita elíptica fechada ao redor dela, com um dos focos no centro de massa da mesma, e obedecendo às três Leis de Kepler. Esse movimento não perturbado (movimento kepleriano) deve ser descrito por um conjunto de seis elementos, os quais definem o estado do satélite artificial num dado instante  $t$ , tais como os elementos orbitais, definidos segundo a Fig. 1:

$a$ =semi-eixo maior da elipse orbital,

$e$ =excentricidade da órbita ,

$i$ =inclinação da órbita ,

$M$ =anomalia média ,

$\omega$ =argumento do perigeu , e

$\Omega$ =longitude do nodo ascendente (E1).

## ELEMENTOS ORBITAIS

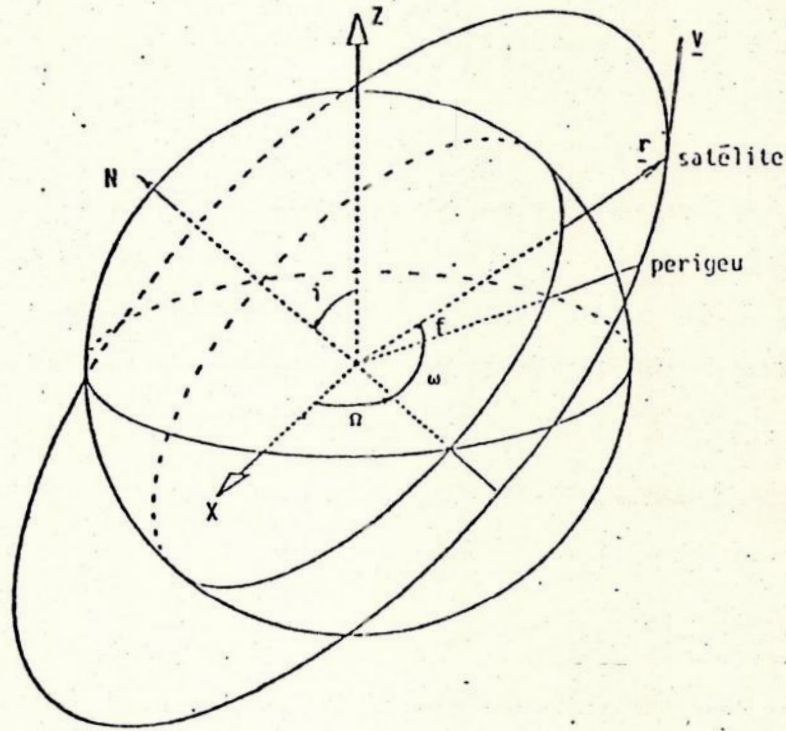


Figura 1: Os Elementos Orbitais.

No movimento kepleriano os elementos orbitais são constantes, com exceção do  $M$  que é uma função linear do tempo, e o satélite artificial está sujeito à função potencial  $U = \mu/r$ , onde  $r$  é a distância entre os centros de massa do satélite e o da Terra, e  $\mu = k^2 M_T$ , sendo  $M_T$  a massa da Terra e  $k$  a constante gravitacional terrestre. Porém, há várias perturbações que alteram a órbita do satélite tais como: o achatamento da Terra, o arraste atmosférico, a pressão de radiação solar e outras,

fazendo com que os elementos osculadores<sup>1</sup> da órbita do mesmo sejam funções complicadas do tempo.

Considerando-se apenas a perturbação devido a não esfericidade da Terra, e supondo uma simetria de rotação em torno do seu eixo polar, a função potencial gravitacional a qual o satélite artificial fica sujeito é dada por:

$$U = U_0 \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n[\sin(\beta)] \right\} \quad (E2),$$

onde:  $U_0$  é a função potencial kepleriano, os  $J_n$  são coeficientes relacionados à forma da Terra,  $R$  o raio equatorial terrestre,  $\beta$  a latitude do ponto e  $P_n[\sin(\beta)]$  o Polinômio de Legendre de grau  $n$  e argumento  $\sin(\beta)$ .

No próximo ítem apresentaremos a Teoria de Brouwer, a qual soluciona o movimento de um satélite artificial sujeito a essa função potencial desenvolvida até o 5º harmônico.

---

<sup>1</sup> Os elementos orbitais referentes a órbita que um satélite artificial assumiria se num dado instante  $t$  fossem suprimidas todas as perturbações, são ditos elementos osculadores no instante considerado.



## 1.2 - A Teoria de Brouwer:

A teoria de Brouwer nos dá a solução do movimento de um satélite artificial (sem arraste atmosférico) em termos de um pequeno parâmetro  $k_2$ , onde os termos periódicos foram desenvolvidos até  $O(k_2)$ , e os seculares até  $O(k_2^2)$ , tendo sido usada a função potencial desenvolvida até o 5º harmônico dada por:

$$U = \mu/r + \mu k_2^2 [1 - 3 \operatorname{sen}^2(\beta)]/r^3 + \mu A_{30} [-3/2 \operatorname{sen}(\beta) + 5/2 \operatorname{sen}^3(\beta)]/r^4 + \\ + \mu k_4^2 [1 - 10 \operatorname{sen}^2(\beta) + 35/3 \operatorname{sen}^4(\beta)]/r^5 + \mu A_{50} [15/8 \operatorname{sen}(\beta) + \\ - 35/4 \operatorname{sen}^3(\beta) + 63/8 \operatorname{sen}^5(\beta)]/r^6 \quad (E3), \text{ onde os coeficientes}$$

$A_{30}$ ,  $k_4$ , e  $A_{50}$  são da ordem de  $k_2^2$ , e todos eles relacionam-se com os  $J_n$  [1].

Brouwer expressou a hamiltoniana do sistema<sup>2</sup> em termos das variáveis canônicas de Delaunay, assim definidas:

$$L = (\mu a)^{1/2},$$

$$G = L(1 - e^2)^{1/2},$$

$$H = G \cos(i),$$

$$l = M,$$

$$g = \omega,$$

$$h = \Omega \quad (E4), \text{ que satisfazem:}$$

$$d(L, G, H)/dt = \partial F / \partial (l, g, h) \text{ e}$$

$$d(l, g, h)/dt = -\partial F / \partial (L, G, H) \quad (E5), \text{ obtendo, assim:}$$

<sup>2</sup> Na verdade, o que estamos chamando de hamiltoniana é a hamiltoniana multiplicada por -1.

$$\begin{aligned}
F = & \mu^2 / (2L^2) + \mu^4 k_2 / L^6 [ (-1/2 + 3H^2 / (2G^2)) a^3 / r^3 + (3/2 + \\
& - 3H^2 / (2G^2)) a^3 \cos(2g+2f) / r^3 ] + \mu^5 A_{30} / L^8 [ (3/8 - 15H^2 / (8G^2)) a^4 \sin(g+ \\
& + f) / r^4 - 5/8 (1 - H^2 / G^2) a^4 \sin(3g+3f) / r^4 ] (1 - H^2 / G^2)^{1/2} + \\
& + \mu^6 k_4 / L^{10} [ (3/8 - 15H^2 / (4G^2) + 35H^4 / (8G^4)) a^5 / r^5 + (-5/8 + \\
& + 20H^2 / (3G^2) - 35H^4 / (6G^4)) a^5 \cos(2g+2f) / r^5 + (35/24 - 35H^2 / (12G^2) + \\
& + 35H^4 / (24G^4)) a^5 \cos(4g+4f) / r^5 ] + \mu^7 A_{50} / L^{12} (1 - H^2 / G^2)^{1/2} [ 15/64 (1 + \\
& - 14H^2 / G^2 + 21H^4 / G^4) a^6 \sin(g+f) / r^6 - 35/128 (1 - 10H^2 / G^2 + \\
& + 9H^4 / G^4) a^6 \sin(3g+3f) / r^6 + 63/128 (1 - 2H^2 / G^2 + H^4 / G^4) a^6 \sin(5g+ \\
& + 5f) / r^6 ] \quad (E6), \quad \text{que } \epsilon \text{ \u00e9 uma constante do movimento}^3.
\end{aligned}$$

Podemos ver de (E5) e (E6) que como F independe de h, temos:

$$H = c_{t\epsilon 1},$$

$h = c_{t\epsilon 2} + c_{t\epsilon 3} t$  (E7), ou seja, H constante e h linear no tempo.

Brouwer efetuou duas transforma\u00e7\u00f5es can\u00f4nicas de vari\u00e1veis, de forma que a hamiltoniana gerada pela segunda transforma\u00e7\u00e3o independesse das novas vari\u00e1veis  $l''$ ,  $q''$  e  $h''$ , obtendo, assim,  $L''$ ,  $G''$  e  $H''$  constantes e  $l''$ ,  $q''$  e  $h''$  lineares no tempo, resolvendo o problema. Ap\u00f3s isso, ele retornou \u00e0s vari\u00e1veis originais atrav\u00e9s das equa\u00e7\u00f5es de transforma\u00e7\u00e3o inversas. Para efetuar as transforma\u00e7\u00f5es necess\u00e1rias, Brouwer baseou-se no M\u00e9todo de von Zeipel, aplicando-o por duas vezes no sistema.

<sup>3</sup> Os termos que aparecem na hamiltoniana e n\u00e3o apresentam depend\u00eancia expl\u00edcita das vari\u00e1veis de Delaunay podem ser expandidos como fun\u00e7\u00f5es destas.

Para efeito de ilustração do referido método, detalharemos apenas a primeira aplicação do mesmo na solução de 1ª ordem do problema principal do satélite artificial, ou seja, consideraremos a hamiltoniana do sistema somente até o 2º harmônico. Dessa forma, a hamiltoniana pode ser escrita como sendo:

$$F(L, G, H, l, q, \dots) = F_0(L) + F_1(L, G, H, l, q, \dots) \quad (E8),$$

onde os índices denotam a ordem em  $k_2$  do termo em questão\*.

Seja a transformação canônica de variáveis  $(L, G, H, l, q, h) \rightarrow (L', G', H', l', q', h')$ , obtida através da função geradora  $S(L', G', H', l, q, h)$ . Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} d(L', G', H')/dt &= \partial F^*/\partial (l', q', h') \quad , \\ d(l', q', h')/dt &= -\partial F^*/\partial (L', G', H') \quad (E9) \text{ e} \end{aligned}$$

$$(L, G, H, l', q', h') = \partial S(L', G', H', l, q, h) / \partial (l, q, h, L', G', H') \quad (E10).$$

A função geradora  $S$  é obtida de forma que a nova hamiltoniana  $F^*$  independa da nova variável  $l'$ . Como a  $F^*$  não depende também de  $h'$ , pois a  $F$  independe de  $h$ , então temos de (E9) que  $L'$  e  $H'$  serão constantes, e  $l'$  e  $h'$  lineares no tempo.

Como o nosso problema introduz apenas pequenas

---

\* O índice zero refere-se ao problema kepleriano (problema não perturbado).

perturbações no problema kepleriano, é conveniente que  $S$  e  $F^*$  sejam, assim como  $F$ , expansões em  $k_2$ , sendo o 1º termo referente ao problema não perturbado. Dessa forma, podemos escrever:

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \dots \quad (E11) \text{ e}$$

$F^* = F_0^* + F_1^* + F_2^* + \dots$  (E12), onde  $S_0$  é a função geradora identidade, ou seja:

$$S_0 = L'l + G'g + H'h \quad (E13), \text{ que substituída em (E10) nos leva a:}$$

$$(L, G, H, l, g, h) = (L', G', H', l, g, h) + \frac{\partial S_1}{\partial (l, g, h, L', G', H')} + \frac{\partial S_2}{\partial (l, g, h, L', G', H')} + \dots \quad (E14).$$

Como a hamiltoniana é uma constante do sistema, temos

$$F(L, G, H, l, g, \dots) = F^*(L', G', H', \dots, g', \dots) \quad (E15), \text{ e de (E8) e (E12), truncando-se em } O(k_2^2), \text{ vem:}$$

$$F_0(L) + F_1(L, G, H, l, g, \dots) = F_0^*(L') + F_1^*(L', G', H', \dots, g', \dots) + F_2^*(L', G', H', \dots, g', \dots) \quad (E16).$$

Substituindo (E10) em (E16), vem:

$$F_0(\frac{\partial S}{\partial l}) + F_1(\frac{\partial S}{\partial (l, g, h)}, l, g, \dots) = F_0^*(L') + F_1^*(L', G', H', \dots, \frac{\partial S}{\partial G'}, \dots) + F_2^*(L', G', H', \dots, \frac{\partial S}{\partial G'}, \dots) \quad (E17).$$

De forma a podemos igualar os termos de mesma ordem em  $k_2$ , e assim obtermos  $F^*$  para calcularmos as novas variáveis  $(L', G', H', l', g', h')$ , expandiremos a equação (E17) em série de Taylor nas vizinhanças de  $(L', G', H', l, g, h)$ .

Após essa expansão, truncada em  $O(k_2^2)$ , chega-se a:

$$\begin{aligned}
 & F_0(L') + F_1(L', G', H', l, g, \dots) + \partial S_1 / \partial l \partial F_0 / \partial L' + \partial S_2 / \partial l \partial F_0 / \partial L' + \\
 & + 1/2 (\partial S_1 / \partial l)^2 \partial^2 F_0 / \partial L'^2 + \partial S_1 / \partial l \partial F_1 / \partial L' + \partial S_1 / \partial g \partial F_1 / \partial G' = F_0^*(L') + \\
 & + F_1^*(L', G', H', \dots, g, \dots) + F_2^*(L', G', H', \dots, g, \dots) + \\
 & + \partial S_1 / \partial G' \partial F_1^* / \partial g \quad (E18) .
 \end{aligned}$$

Igualando-se os termos de mesma ordem em  $k_2$ , obtemos:

$$k_2^0 : F_0 = F_0^* \quad (E19) ,$$

$$k_2^1 : F_1 + \partial S_1 / \partial l \partial F_0 / \partial L' = F_1^* \quad (E20) , \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
 k_2^2 : & \partial S_2 / \partial l \partial F_0 / \partial L' + 1/2 (\partial S_1 / \partial l)^2 \partial^2 F_0 / \partial L'^2 + \partial S_1 / \partial l \partial F_1 / \partial L' + \\
 & + \partial S_1 / \partial g \partial F_1 / \partial G' = F_2^* + \partial S_1 / \partial G' \partial F_1^* / \partial g \quad (E21) .
 \end{aligned}$$

Temos que  $F_1$  pode ser dividida em  $F_1 = F_{1s} + F_{1p}$ , onde  $F_{1s}$  é a parte independente de  $l$  (secular) e  $F_{1p}$  é a parte dependente de  $l$  (periódica). Se impormos que  $F_1^*$  seja igual a  $F_{1s}$ , teremos de (E20):

$$F_1^* = F_{1s} ,$$

$$\partial S_1 / \partial l \partial F_0 / \partial L' = -F_{1p} \quad (E22) .$$

Como conhecemos  $F_0$  e  $F_{1p}$ , podemos calcular a  $S_1$  através de (E22).

De posse dessas relações, podemos calcular  $S$ , e através de (E14) chegar às novas variáveis  $(L', G', H', l', g', h')$ .

Após isso, Brouwer efetuou uma segunda transformação  $(L', G', H', l', q', h')$  -----  $(L'', G'', H'', l'', q'', h'')$ , cujo intuito foi o de eliminar a variável  $q'$  da  $F^*$  obtida anteriormente, através de uma nova função geradora  $S^* = S_0^* + S_1^* + S_2^* + \dots$ , e de modo análogo calculou a nova hamiltoniana  $F^{**}$  independente de  $l''$ ,  $q''$  e  $h''$ , obtendo em seguida a solução do problema principal do satélite artificial.

Após isso, Brouwer ainda acrescentou à solução os termos perturbadores seculares referentes às contribuições dos 3º, 4º e 5º harmônicos, os quais foram calculados separadamente. Posto isto, temos a solução expressa em termos dos elementos orbitais, envolvendo os três conjuntos a seguir:

- $(a, e, i, l, q, h)$  ----- elementos osculadores,
- $(a', e', i', l', q', h')$  ----- elementos de longo período, e
- $(a'', e'', i'', l'', q'', h'')$  ----- elementos médios.

Seguem-se agora as fórmulas finais do desenvolvimento de Brouwer [1]:

Os elementos médios de Brouwer são obtidos de:

$$a'' = a_0'' ,$$

$$e'' = e_0'' ,$$

$$i'' = i_0'' ,$$

$$l'' = l_0'' + l_1 t ,$$

$$g'' = g_0'' + g_1 t , \text{ e}$$

$$h'' = h_0'' + h_1 t \quad (\text{E23}), \text{ onde o índice zero indica as constantes}$$

de integração, e o índice 1 os coeficientes dos termos seculares definidos a seguir:

$$l_1 = \eta_0 / 32 \{ 32 + 48\delta_2' \eta (-1 + 3\theta^2) + 3\delta_2'^2 \eta [-15 + 16\eta + 25\eta^2 + (30 - 96\eta + 90\eta^2)\theta^2 + (105 + 144\eta + 25\eta^2)\theta^4] + 30\delta_4' \eta e''^2 (3 - 30\theta^2 + 35\theta^4) \}$$

$$g_1 = \eta_0 / 32 \{ 48\delta_2' (-1 + 5\theta^2) + 3\delta_2'^2 [-35 + 24\eta + 25\eta^2 + (90 - 192\eta - 126\eta^2)\theta^2 + (385 + 360\eta + 45\eta^2)\theta^4] + 10\delta_4' [21 - 9\eta^2 + (-270 + 126\eta^2)\theta^2 + (385 - 189\eta^2)\theta^4] \} ,$$

$$h_1 = \eta_0 / 8 \{ -24\delta_2' \theta + 3\delta_2'^2 [(-5 + 12\eta + 9\eta^2)\theta - (35 + 36\eta + 5\eta^2)\theta^3] + 10\delta_4' (5 - 3\eta^2)(3 - 7\theta^2)\theta \} \quad (\text{E24}), \text{ sendo:}$$

$$\eta_0 = (\mu / a''^3)^{1/2} ,$$

$$\eta = (1 - e''^2)^{1/2} ,$$

$$\theta = \cos(i'') ,$$

$$\delta_2' = k_2 / a''^2 ,$$

$$\delta_3' = A_{3,0} / a''^3 ,$$

$$\delta_4' = k_4 / a''^4 ,$$

$$\delta_5' = A_{5,0} / a''^5 ,$$

$$\delta_i' = \delta_i \eta^{-2i} , \quad i = 2, 3, 4, 5 \quad (\text{E25}).$$

Os elementos de longo período são obtidos de:

$$a' = a'',$$

$$e' = e'' + \delta_e,$$

$$i' = i'' + \delta_i,$$

$$l' = l'' + \delta_l,$$

$$g' = g'' + \delta_g, \text{ e}$$

$$h' = h'' + \delta_h \quad (\text{E26}), \text{ onde } \delta_e, \delta_i, \delta_l, \delta_g \text{ e } \delta_h \text{ são os termos}$$

de longo período, definidos a seguir:

$$\begin{aligned} \delta_e = & \{ \delta_2' e'' \eta^2 / 3 [ 1 - 11\theta^2 - 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} ] - 5\delta_4' e'' \eta^2 / (12\delta_2') [ 1 - 3\theta^2 + \\ & - 8\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} ] \cos(2g'') + \{ \delta_3' / (4\delta_2') + 5\delta_5' (4 + 3e''^2) / (64\delta_2' \eta^4) [ 1 + \\ & - 9\theta^2 - 24\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} ] \} \eta^2 \sin(i'') \sin(g'') + \\ & - 35\delta_5' e'' \eta^2 \sin(i'') / (384\delta_2') [ 1 - 5\theta^2 - 16\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} ] \sin(3g'') \}, \end{aligned}$$

$$\delta_i = -e'' \delta_e / (\eta^2 \tan(i'')) ,$$

$$\begin{aligned} \delta_l = & \{ \delta_2' \eta^3 / 3 [ 1 - 11\theta^2 - 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} ] - 5\delta_4' \eta^3 / (12\delta_2') [ 1 - 3\theta^2 - 8\theta^4 (1 + \\ & - 5\theta^2)^{-1} ] \} \sin(2g'') - \eta^3 \sin(i'') / (4e'') \{ \delta_3' / \delta_2' + \\ & + 5\delta_5' (4 + 9e''^2) / (16\delta_2') [ 1 - 9\theta^2 - 24\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} ] \} \cos(g'') + \\ & + 35\delta_5' e'' \eta^3 \sin(i'') / (384\delta_2') [ 1 - 5\theta^2 - 16\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} ] \cos(3g'') \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_g = & \{ -\delta_2' / 16 [ (2 + e''^2) - 11(2 + 3e''^2)\theta^2 - 40(2 + 5e''^2)\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} + \\ & - 400e''^2\theta^6 (1 - 5\theta^2)^{-2} ] + 5\delta_4' / (24\delta_2') [ (2 + e''^2) - 3(2 + 3e''^2)\theta^2 + \\ & - 8(2 + 5e''^2)\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} - 80e''^2\theta^6 (1 - 5\theta^2)^{-2} ] \} \sin(2g'') + \\ & + \{ \delta_3' / (4\delta_2') (\sin(i'') / e'' - e''\theta^2 / \sin(i'')) + \\ & + 5\delta_5' / (64\delta_2') [ (\eta^2 \sin(i'') / e'' - e''\theta^2 / \sin(i'')) (4 + 3e''^2) + \\ & + e'' \sin(i'') (26 + 9e''^2) ] [ 1 - 9\theta^2 - 24\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} ] + \\ & - 15\delta_5' e'' \theta^2 \sin(i'') (4 + 3e''^2) / (35\delta_2') [ 3 + 16\theta^2 (1 - 5\theta^2)^{-1} + \\ & + 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-2} ] \} \cos(g'') + \{ -35\delta_5' / (1152\delta_2') [ e'' \sin(i'') (3 + \\ & + 2e''^2) - e''^3 \theta^2 / \sin(i'') ] [ 1 - 5\theta^2 - 16\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} ] - \\ & + 35\delta_5' e''^3 \theta^2 \sin(i'') / (576\delta_2') [ 5 + 32\theta^2 (1 - 5\theta^2)^{-1} + 80\theta^4 (1 + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -5\theta^2)^{-2}] \cos(3g'') , e \\
\delta_1 h = & \{-\delta_2' / 8 [ 11 + 80\theta^2 (1 - 5\theta^2)^{-1} + 200\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-2} ] + 5\delta_4' / (12\delta_2') [ 3 + \\
& + 16\theta^2 (1 - 5\theta^2)^{-1} + 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-2} ] \} e''^2 \theta \sin(2g'') + \\
& + \{ \delta_3' e'' \theta / (4\delta_2' \sin(i'')) + 5\delta_5' e'' \theta (4 + 3e''^2) / (64\delta_2' \sin(i'')) [ 1 - 9\theta^2 + \\
& - 24\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} ] + 15\delta_5' e'' \theta \sin(i'') (4 + 3e''^2) / (32\delta_2') [ 3 + 16\theta^2 (1 + \\
& - 5\theta^2)^{-1} + 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-2} ] \} \cos(g'') + \{ -35\delta_5' e''^3 \theta / (1152\delta_2' \sin(i'')) \\
& [ 1 - 5\theta^2 - 16\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} ] - 35\delta_5' e''^3 \theta \sin(i'') / (576\delta_2') [ 5 + 32\theta^2 (1 + \\
& - 5\theta^2)^{-1} + 80\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-2} ] \} \cos(3g'') \quad (E27) .
\end{aligned}$$

Os elementos osculadores , já somados os termos de curto período, são calculados por:

$$\begin{aligned}
a &= a'' \{ 1 + \delta_2' [ (-1 + 3\theta^2) (a''^3 / r'^3 - \eta^{-3}) + 3(1 - \theta^2) a''^3 / r'^3 \cos(2g' + 2f') ] \} , \\
e &= e'' + \eta^2 / (2e'') \{ \delta_2' [ (-1 + 3\theta^2) (a''^3 / r'^3 - \eta^{-3}) + 3(1 - \theta^2) (a''^3 / r'^3 - \eta^{-4}) \\
& \cos(2g' + 2f') ] - \delta_2' (1 - \theta^2) [ 3e'' \cos(2g' + f') + e'' \cos(2g' + 3f') ] \} , \\
i &= i'' + \delta_2' \theta / 2 (1 - \theta^2)^{1/2} [ 3 \cos(2g' + 2f') + 3e'' \cos(2g' + f') + \\
& + e'' \cos(2g' + 3f') ] , \\
l &= l'' - \eta^3 \delta_2' / (4e'') \{ 2(-1 + 3\theta^2) (\eta^2 a''^2 / r'^2 + a'' / r' + 1) \sin(f') + \\
& + 3(1 - \theta^2) [ (-\eta^2 a''^2 / r'^2 - a'' / r' + 1) \sin(2g' + f') + (\eta^2 a''^2 / r'^2 + \\
& + a'' / r' + 1/3) \sin(2g' + 3f') ] \} , \\
q &= q'' + \eta^2 \delta_2' / (4e'') \{ 2(-1 + 3\theta^2) (\eta^2 a''^2 / r'^2 + a'' / r' + 1) \sin(f') + \\
& + 3(1 - \theta^2) [ (-\eta^2 a''^2 / r'^2 - a'' / r' + 1) \sin(2g' + f') + (\eta^2 a''^2 / r'^2 + \\
& + a'' / r' + 1/3) \sin(2g' + 3f') ] \} + \delta_2' / 4 \{ 6(-1 + 5\theta^2) (f' - l' + e'' \sin(f')) + \\
& + (3 - 5\theta^2) [ 3 \sin(2g' + 2f') + 3e'' \sin(2g' + f') + e'' \sin(2g' + 3f') ] \} , e \\
h &= h'' - \delta_2' \theta / 2 [ 6(f' - l' + e'' \sin(f')) - 3 \sin(2g' + 2f') - 3e'' \sin(2g' + f') + \\
& - e'' \sin(2g' + 3f') ] \quad (E28) .
\end{aligned}$$

Como podemos ver , as equações acima possuem singularidades para  $e''$  e/ou  $i''$  pequenos e também para uma

determinada inclinação crítica, pois o termo  $[1-5\cos^2(i'')]$  aparece como denominador. Porém, embora a singularidade relativa à inclinação crítica represente um fenômeno físico (a libração do argumento do perigeu próximo a essa inclinação), ambas as outras são apenas singularidades aparentes, já que as coordenadas do satélite artificial são não singulares.

### 1.3 - A Teoria de Brouwer-Lyddane:

A solução do movimento de um satélite artificial (sem arraste atmosférico) foi dada por Brouwer (1959). As fórmulas resultantes que dão os elementos osculadores da órbita contêm singularidades para  $e''$  e/ou  $i''$  pequenos. Como não há singularidades nas coordenadas do satélite, é possível escrever equações bem determinadas para ambos os casos críticos, expandindo-se as coordenadas em séries de Taylor nos elementos perturbadores.

Porém, embora os termos de 1ª ordem sejam regulares, os de ordem superior são singulares e não devem ser desprezados. Uma forma de contornar esse problema, proposta por Lyddane, foi a de formular a teoria de perturbação em termos das variáveis de Poincaré, dadas a seguir:

$$x_1 = L ,$$

$$x_2 = (2(L-G))^{1/2} \cos(q+h) ,$$

$$x_3 = (2(G-H))^{1/2} \cos(h) ,$$

$$y_1 = 1+q+h ,$$

$$y_2 = -(2(L-G))^{1/2} \sin(q+h) , \text{ e}$$

$$y_3 = -(2(G-H))^{1/2} \sin(h) \quad (E29) ,$$

ao invés das variáveis de Delaunay (E4), como foi feito por Brouwer, uma vez que o potencial perturbador pode ser escrito como uma série de potências em  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $y_2$  e  $y_3$ .

O procedimento de Lyddane está descrito a seguir.

Seja  $\tilde{F}$  a hamiltoniana escrita em função das variáveis de Poincaré. Então, temos:

$$\tilde{F}(x_i(L, G, H, l, q, h), y_i(L, G, H, l, q, h)) = F(L, G, H, l, q, h), \quad i=1, 2, 3 \quad (E30).$$

$\tilde{F}$  e  $F$  representam a mesma quantidade dinâmica, porém possuem formas funcionais diferentes. Lyddane efetua a transformação  $(x_i, y_i) \rightarrow (x_i'', y_i'')$ , de acordo com as equações:

$$x_i = \partial \tilde{S} / \partial y_i \quad \text{e} \\ y_i'' = \partial \tilde{S} / \partial x_i'' \quad (E31), \quad \text{onde } \tilde{S} \text{ é a função geradora}$$

$$\tilde{S}(x_i'', y_i) = x_1'' y_1 + x_2'' y_2 + x_3'' y_3 + \tilde{S}_1(x_i'', y_i) + \tilde{S}_1^*(x_i'', y_i) \quad (E32), \quad \text{sendo } \tilde{S}_1^* \text{ definido como a parte do termo de } 1^{\text{a}} \text{ ordem em } k_2 \text{ independente de } y_1.$$

Posto isto, o método de von Zeipel anteriormente descrito é aplicado, porém todas as quantidades envolvidas serão funções de  $(x_i'', y_i'')$ , ao invés de  $(x_i'', y_i)$ , como seria usual. Isto se deve ao fato de que com tal aproximação, a qual nos leva a um erro de 2ª ordem nos termos periódicos, teremos:

$$x_i = A_i(L, G, H, l, q, h) \quad x_i'' = A_i(L'', G'', H'', l'', q'', h'') \\ y_i = B_i(L, G, H, l, q, h) \quad \text{e} \quad y_i'' = B_i(L'', G'', H'', l'', q'', h'') \quad (E33),$$

o que nos permite o reaproveitamento do trabalho de Brouwer.

Tomando-se as eqs. (E31) escritas nas variáveis de Delaunay, e definindo-se convenientemente:

$$\delta l = -(S_1 + S_1^*)_L ,$$

$$\delta g = -(S_1 + S_1^*)_G ,$$

$$\delta h = -(S_1 + S_1^*)_H ,$$

$$\delta L = S_{10} , \text{ e}$$

$$\delta G = +(S_1 + S_1^*)_g \quad (E34), \text{ sendo:}$$

$$\delta L = L'' \delta a / (2a'') , \text{ e}$$

$$\delta G = -L'' z e'' \delta e / G'' + G'' \delta a / (2a'') = G'' \tan(i'') \delta i \quad (E35), \text{ chega-se,}$$

após algumas manipulações algébricas, às fórmulas mais convenientes para o cálculo dos elementos osculadores:

$$a = a'' + \delta a ,$$

$$l + g + h = l'' - g'' - h'' + \delta(l + g + h) ,$$

$$e \cos(l) = (e'' + \delta e) \cos(l'') - e'' \delta l \sin(l'') ,$$

$$e \sin(l) = (e'' + \delta e) \sin(l'') + e'' \delta l \cos(l'') ,$$

$$\begin{aligned} \sin(i/2) \cos(h) = & [\sin(i''/2) + \cos(i''/2) \delta i/2] \cos(h'') + \\ & - \sin(i''/2) \delta h \sin(h'') \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(i/2) \sin(h) = & [\sin(i''/2) + \cos(i''/2) \delta i/2] \sin(h'') + \\ & + \sin(i''/2) \delta h \cos(h'') \quad (E36), \text{ onde os} \end{aligned}$$

elementos que aparecem no 1º membro denominamos de elementos osculadores de Lyddane, os termos '' são os elementos médios de Brouwer (E23), e os  $\delta$  são as somas dos termos de longo e curto período da Teoria de Brouwer.

Os elementos osculadores de Lyddane são calculados com erro de 2ª ordem nos termos periódicos. Por exemplo,

consideremos  $\delta l_g$  e  $\delta l_L$  respectivamente as perturbações em  $l$  calculadas via TB e TBL, onde:  $\delta l_g = \delta l_L + \text{termos de } O(k_2^2)$ , pois  $\delta l_g = -(S_1 + S_1^*)_L$  e  $\delta l_L = -(S_1 + S_1^*)_L$ .

A manipulação de (E36) nos leva às equações não singulares dos elementos osculadores da órbita (com exceção da inclinação crítica), resolvendo, portanto, os problemas das equações de Brouwer.

Antes de explicitarmos o procedimento adotado para o cálculo dos elementos osculadores de Lyddane, é conveniente ressaltarmos os seguintes pontos: no cálculo dos termos de curto período devemos usar  $l''$  e  $g''$  ao invés de  $l'$  e  $g'$ ; a singularidade  $(1-\eta)/e''$  que aparece na soma  $l+q$  é aparente, pois  $(1-\eta)/e'' = e''/(1+\eta)$ ; devemos somar manualmente as equações de  $l$ ,  $g$  e  $h$  antes de calcularmos computacionalmente a soma  $l+q+h$ ; e no cálculo de  $\delta e$  devemos usar as identidades abaixo:

$$\begin{aligned} & [ (a''/r'')^3 - \eta^{-3} ] / e'' = \eta^{-6} [ e''\eta + e''(1+\eta)^{-1} + 3\cos(f'') + \\ & \qquad \qquad \qquad + 3e''\cos^2(f'') + e''^2\cos^3(f'') ] , e \\ & [ (a''/r'')^3 - \eta^{-4} ] / e'' = \eta^{-6} [ e'' + 3\cos(f'') + 3e''\cos^2(f'') + e''^2\cos^3(f'') ] . \end{aligned}$$

Embora as equações de Lyddane dêem, para casos não críticos, o mesmo resultado das equações de Brouwer com um trabalho adicional, o fato de ter-se um único algoritmo computacional para ambos os casos justifica essa pequena desvantagem.

CAPÍTULO 2

TESTES NUMÉRICOS E CONCLUSÕES

2.1 - Procedimento:

Após terem sido feitas todas as manipulações algébricas necessárias à Teoria de B-Lyddane, foi implementado um programa computacional em FORTRAN IV, com precisão estendida, tomando-se o cuidado de otimizar conjuntamente a precisão nos cálculos envolvidos, a velocidade de processamento e a memória ocupada pelo mesmo.

Dividimos o nosso estudo em quatro casos distintos, variando  $e''$  e  $i''$ , e mantendo-se constantes os demais elementos. tais casos são:

CASO	$e''$	$i''$ (rad)
1	0.2000	0.5000
2	0.2000	0.0001
3	0.0001	0.5000
4	0.0001	0.0001

Tal divisão foi feita com o objetivo de verificar a compatibilidade das equações de Lyddane com a Teoria de Brouwer para um caso não crítico (CASO 1), e obter o comportamento de ambas as teorias para diversos casos críticos (CASOS 2, 3 e 4).

Para cada situação foram feitas as seguintes

comparações: TEORIA DE BROUWER (TB) - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA (INT), TEORIA DE B-LYDDANE (TBL) - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA e TEORIA DE BROUWER - TEORIA DE B-LYDDANE, gerando-se gráficos de erro, relativos ao raio-vetor e à velocidade do satélite artificial, para cada par CASO-COMPARAÇÃO. De acordo com as condições iniciais consideradas, o intervalo de integração da órbita do satélite artificial foi de 20 horas, o que equivale a 10 revoluções do mesmo ao redor da Terra, numa faixa de altitudes (1580km) onde as perturbações devido ao potencial gravitacional terrestre são preponderantes. Todo o trabalho foi executado em precisão estendida num computador IBM 370/158. Após reduzir-se o sistema original de 2ª ordem a um de 1ª ordem, a integração numérica foi realizada com o Método Preditor-Corretor de Adams-Moulton, tendo sido requerida uma precisão de  $10^{-17}$  unidades em questão. Os referidos gráficos com suas respectivas legendas estão contidos no Apêndice A. Os coeficientes  $J_n$  utilizados foram os do GEM 10 [7]. A integração da Equação de Kepler foi feita baseada nos resultados do artigo do Danby [3], onde ele compara vários métodos de iteração e vários valores iniciais, verificando quais os melhores método e valor inicial na iteração dessa equação. A conversão do vetor dos elementos orbitais para o vetor de posição e velocidade, em coordenadas cartesianas, foi feita através de equações que não envolvem funções do tipo arco-trigonométrico [5]. Esse cuidado foi tomado porque computacionalmente essas funções possuem precisão menor do que as funções trigonométricas simples.



## 2.2 - Conclusões:

O erro máximo obtido pela comparação TB-TBL para o caso não crítico (CASO 1:  $e''=0.2000$  e  $i''=0.5000$  rad) foi da ordem de 15 metros {A3}, o que é justificado pelo fato de que Lyddane, ao obter suas equações de transformação, cometeu erros de 2ª ordem em  $k_2$  nos termos periódicos. Dessa forma, concluímos que as equações de Lyddane são compatíveis com as equações de Brouwer para o caso não crítico.

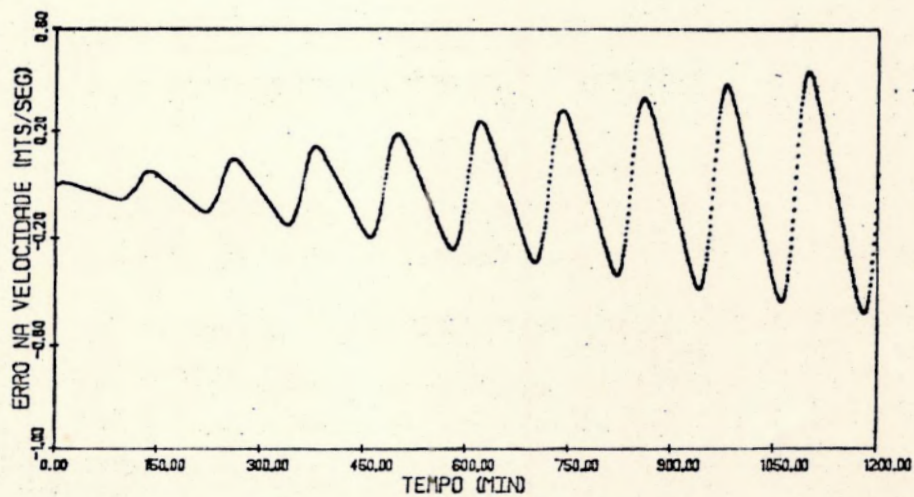
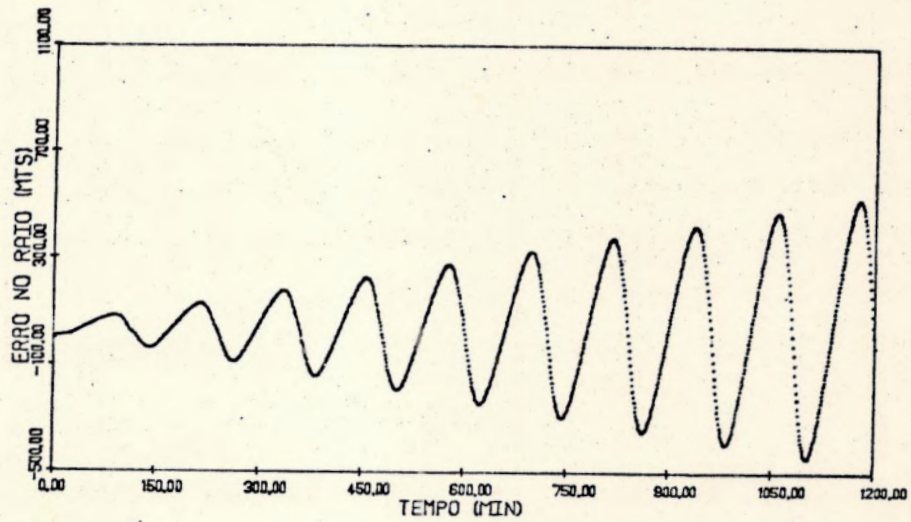
Analisando primeiramente os resultados obtidos da comparação TB-INT, verificamos que quanto mais crítico for o caso, maiores serão os erros envolvidos ({A1}, {A4}, {A7} e {A10}).

Os resultados obtidos para a comparação TBL-INT merecem uma descrição mais detalhada. Devemos ressaltar que, como foi verificado, quando da manipulação das transformações de Lyddane nas equações de Brouwer, a TBL não possui singularidades em  $e''$  e/ou  $i''$  (com exceção da inclinação crítica). Podemos observar dos gráficos {A2} e {A5} ou {A8} e {A11} que quando mantém-se a excentricidade constante e diminui-se a inclinação, os erros aumentam. Se o considerado é o inverso, ou seja, se mantém-se a inclinação constante e diminui-se a excentricidade (gráficos {A2} e {A8} ou {A5} e {A11}), então os erros diminuem. Isso é justificado pelo fato de que a excentricidade aparece, nas equações de Brouwer, como fator multiplicativo em vários termos, enquanto que a inclinação aparece somente como argumento de funções trigonométricas. Dessa forma, a TBL é mais sensível a

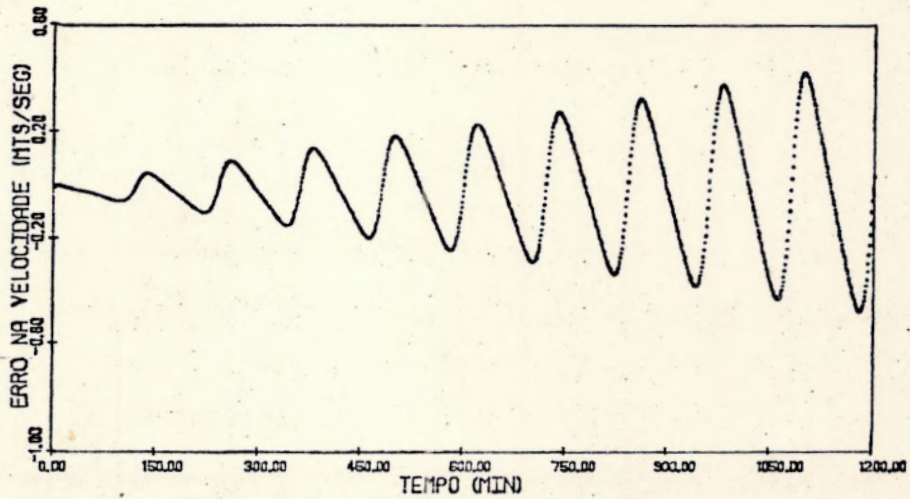
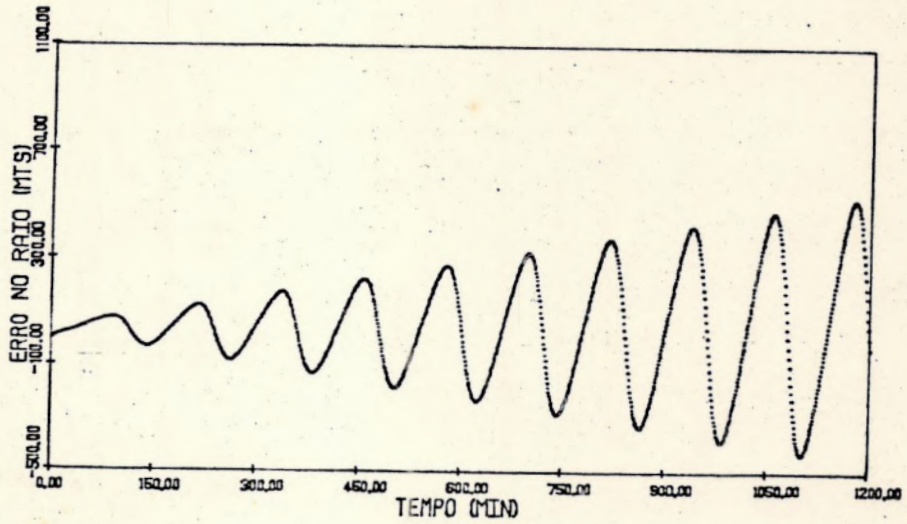
variações na excentricidade do que na inclinação. Além disso, as equações de Brouwer utilizam as expansões na excentricidade do movimento elíptico truncadas, expansões essas que possuem maior precisão quanto menor for a excentricidade. Por outro lado, excentricidades grandes fazem com que as condições iniciais da integração numérica sejam calculadas com menor precisão, acarretando desvios maiores entre a teoria e os resultados numéricos. Podemos observar, dos gráficos {A3}, {A6}, {A9} e {A12}, que quanto mais crítico é o caso, maior é a divergência entre TB e TBL. Os gráficos obtidos foram todos contínuos e periódicos. Como estávamos interessados no comportamento dos erros máximos ao longo do tempo, os gráficos foram feitos abrangendo todo o intervalo de integração, o que condensou os gráficos dos tipos {A7} e {A10}. De forma a ressaltar a continuidade e a periodicidade desses tipos, eles foram refeitos para somente dois períodos de revolução {A13}. Acreditamos que os resultados da integração numérica seriam melhores, conforme a referência (Fox, K.. Numerical Integration of the Equations of Motion of Celestial Mechanics. Celestial Mechanics, 33 :127-142, 1984.), se tivéssemos usado uma rotina que integrasse diretamente um sistema de 2ª ordem, ao invés de reduzi-lo a um de 1ª ordem e então integrá-lo. Isso não foi feito, pois não foi encontrada nenhuma rotina desse tipo disponível nos pacotes científicos procurados.

Diante dos resultados obtidos para os casos testados, podemos concluir que a Teoria de Brouwer-Lyddane é um algoritmo não singular satisfatório (com exceção da inclinação crítica), para a determinação das efemérides de um satélite artificial sem arraste atmosférico.

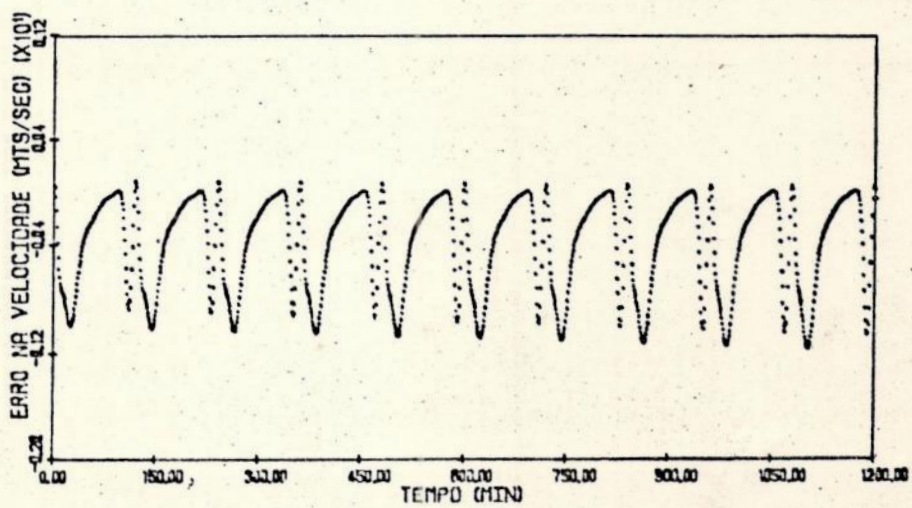
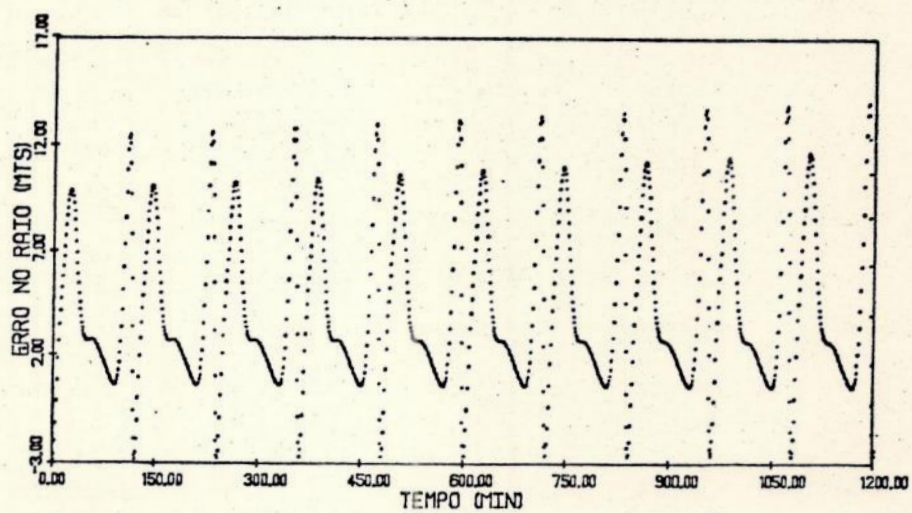
APÊNDICE A:



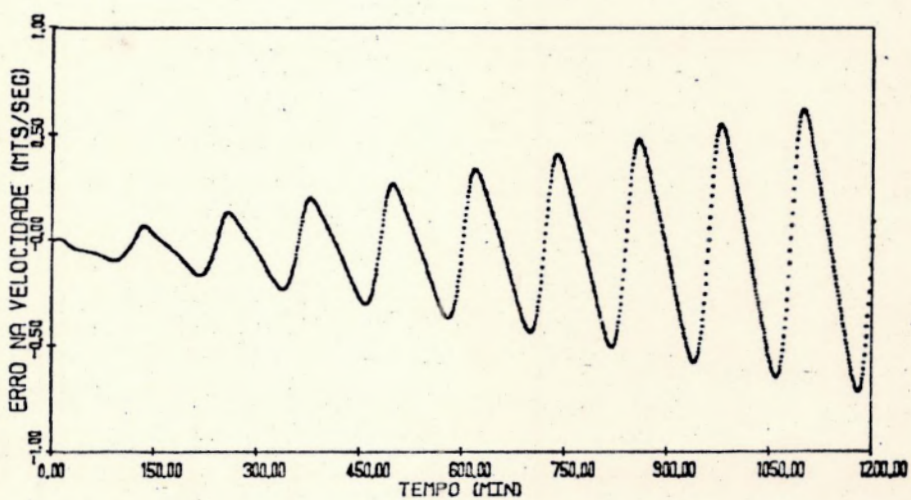
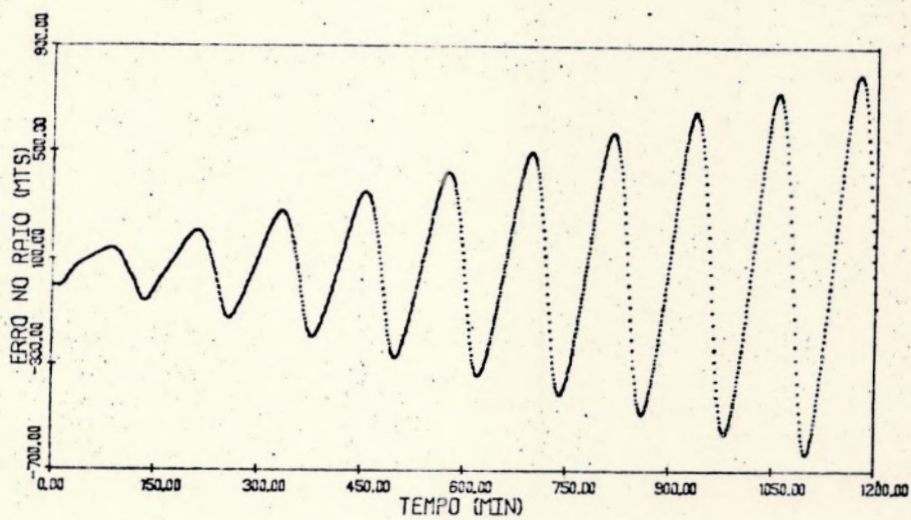
{A1} - Gráficos de erros no raio-vetor e na velocidade do satélite artificial, obtidos na comparação TB-INT para o CASO 1 ( $e_0''=0.2000$  e  $i_0''=0.5000$  rad).



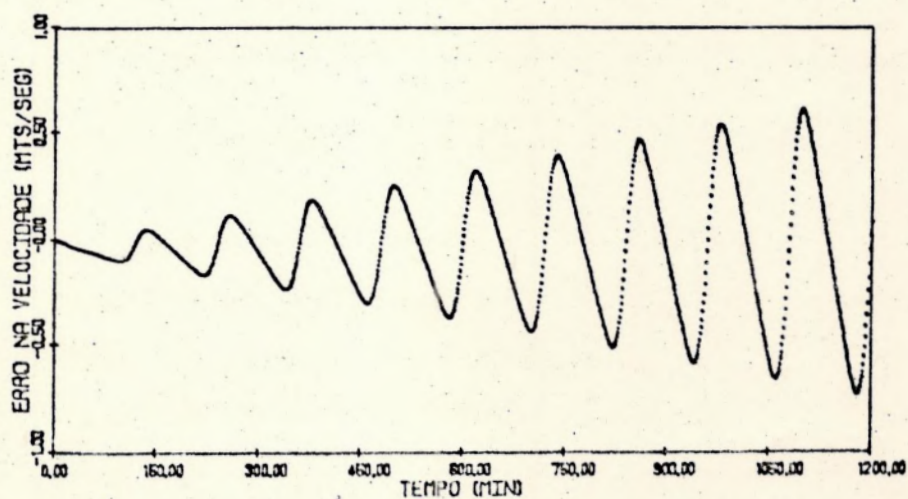
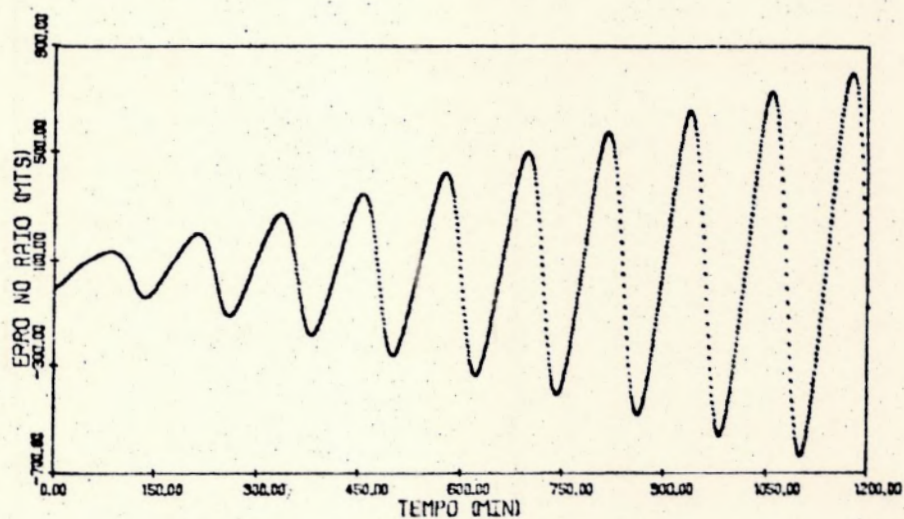
{A2} - Gráficos de erros no raio-vetor e na velocidade do satélite artificial, obtidos na comparação TBL-INT para o CASO 1 ( $e_0''=0.2000$  e  $i_0''=0.5000$  rad).



{A3} - Gráficos de erros no raio-vetor e na velocidade do satélite artificial, obtidos na comparação TB-TBL para o CASO 1 ( $e''=0.2000$  e  $i''=0.5000$  rad).

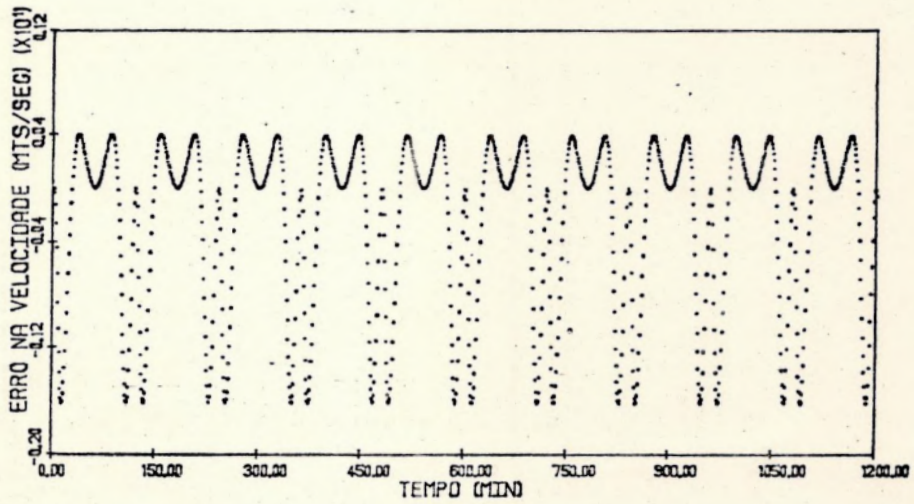
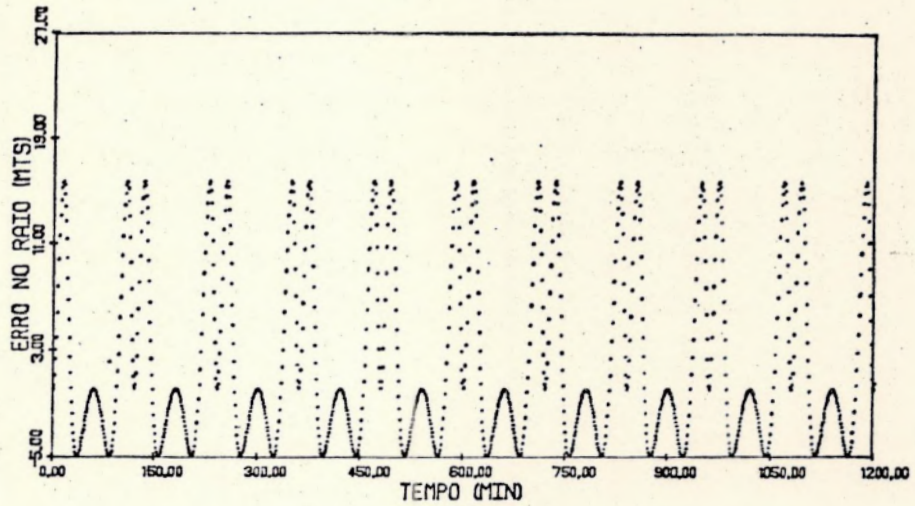


{A4} - Gráficos de erros no raio-vetor e na velocidade do satélite artificial, obtidos na comparação TB-INT para o CASO 2 ( $e''=0.2000$  e  $i''=0.0001$  rad).

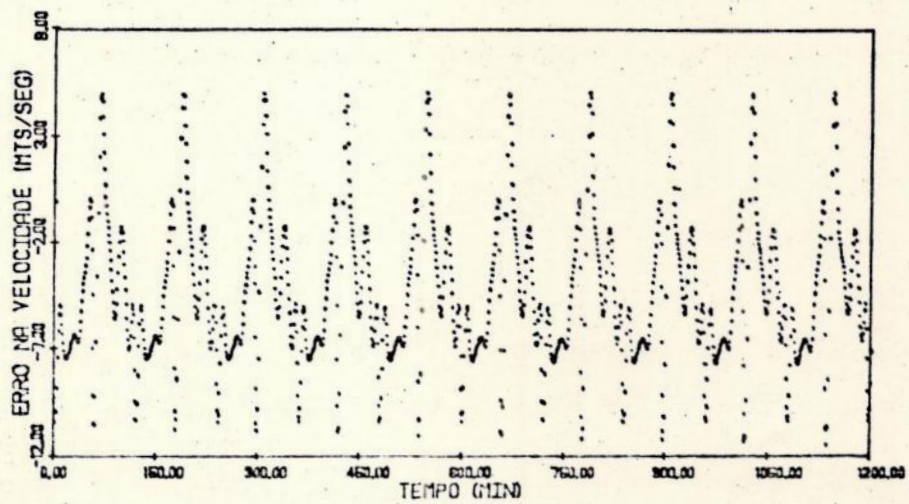
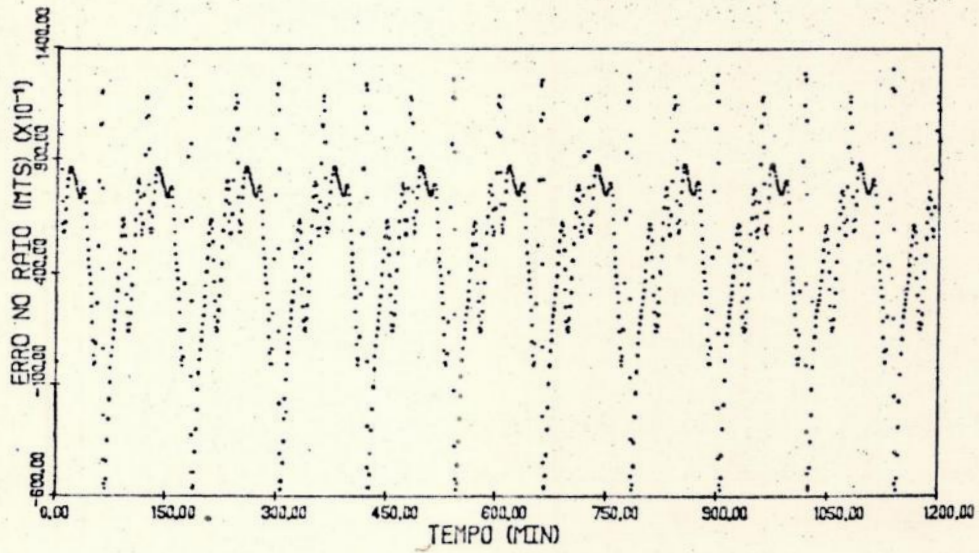


{A5} - Gráficos de erros no raio-vetor e na velocidade do satélite artificial, obtidos na comparação TBL-INT para o CASO 2 ( $e_0''=0.2000$  e  $i_0''=0.0001$  rad).

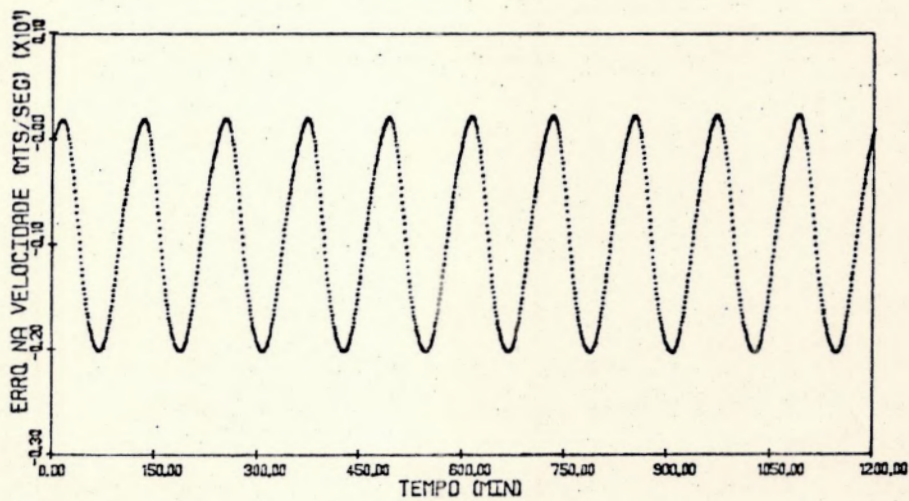
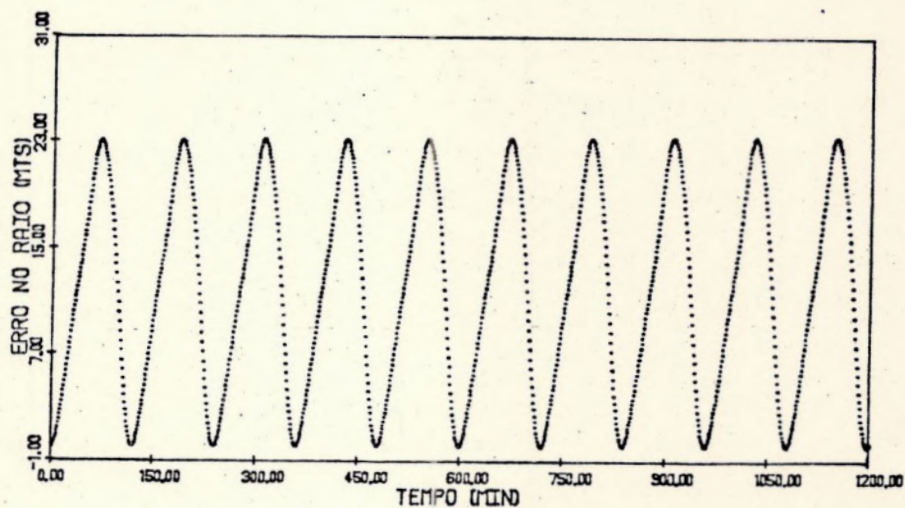




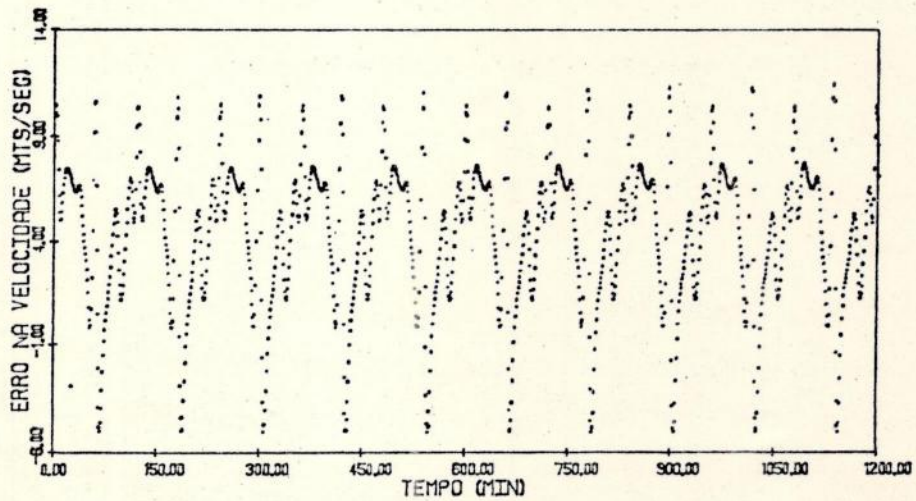
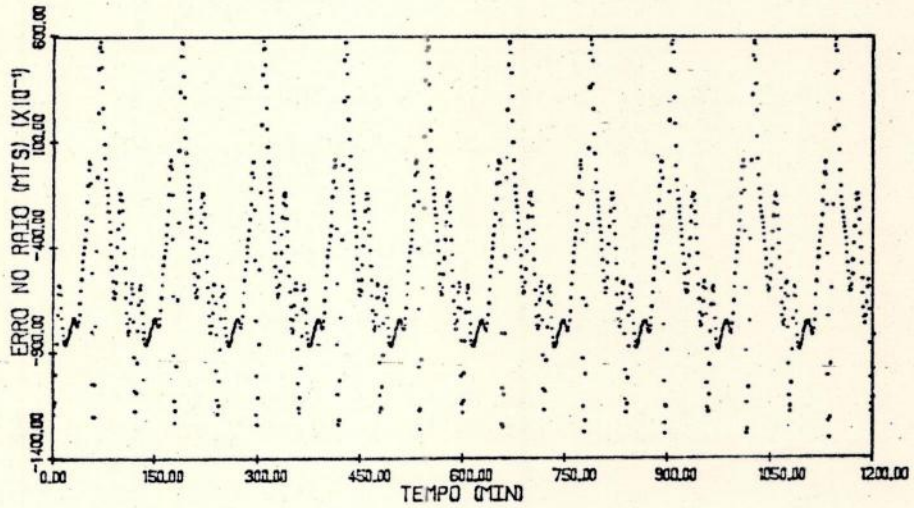
{A6} - Gráficos de erros no raio-vetor e na velocidade do satélite artificial, obtidos na comparação TB-TBL para o CASO 2 ( $e_0''=0.2000$  e  $i_0''=0.0001$  rad).



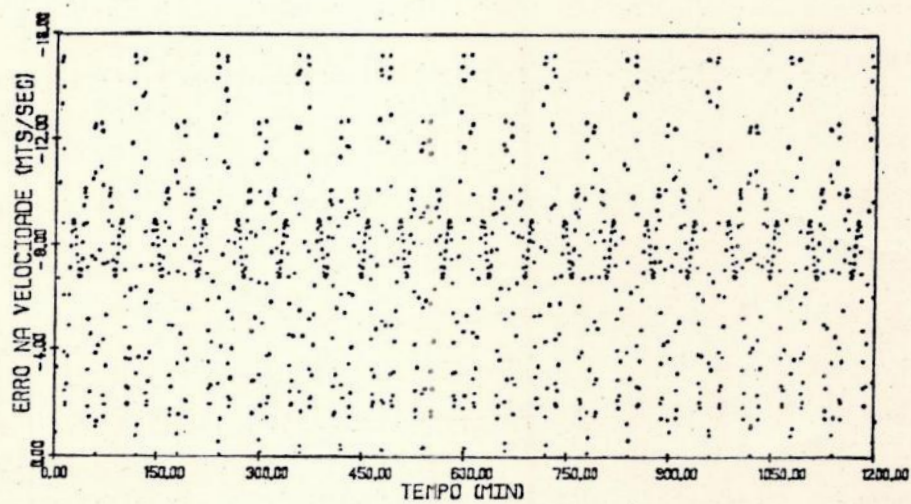
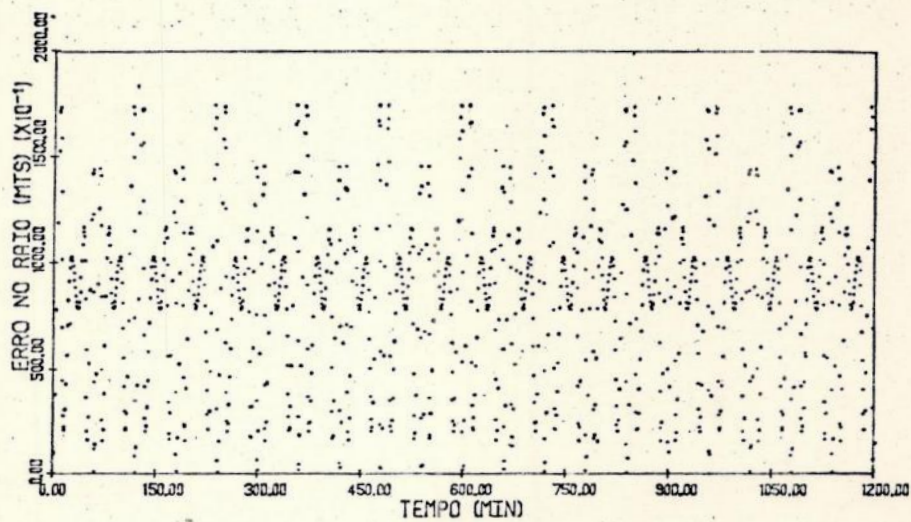
{A7} - Gráficos de erros no raio-vetor e na velocidade do satélite artificial, obtidos na comparação TB-INT para o CASO 3 ( $e''=0.0001$  e  $i''=0.5000$  rad).



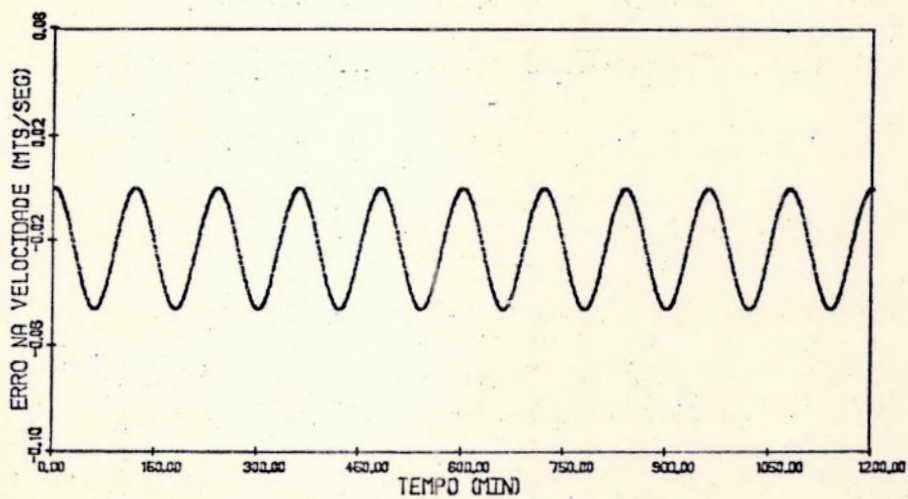
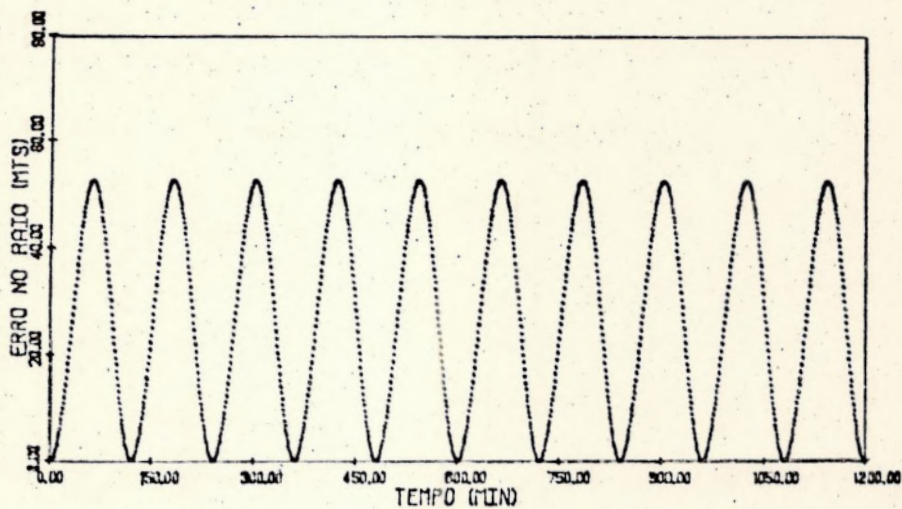
{A8} - Gráficos de erros no raio-vetor e na velocidade do satélite artificial, obtidos na comparação TBL-INT para o CASO 3 ( $a''=0.0001$  e  $i''=0.5000$  rad).



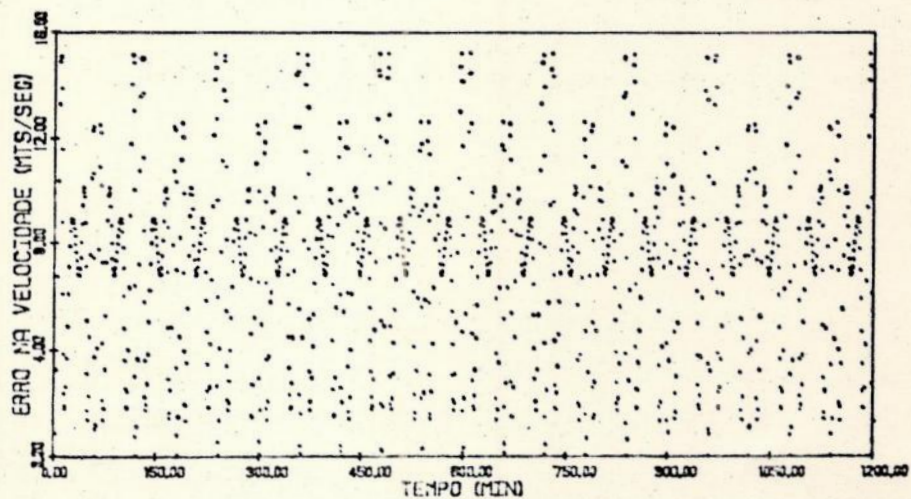
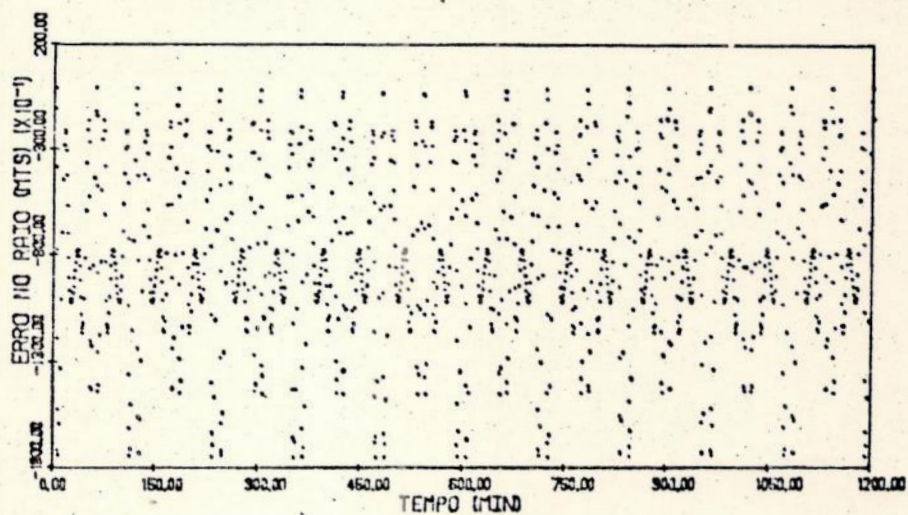
[A9] - Gráficos de erros no raio-vetor e na velocidade do satélite artificial, obtidos na comparação TB-TBL para o CASO 3 ( $e''=0.0001$  e  $i''=0.5000$  rad).



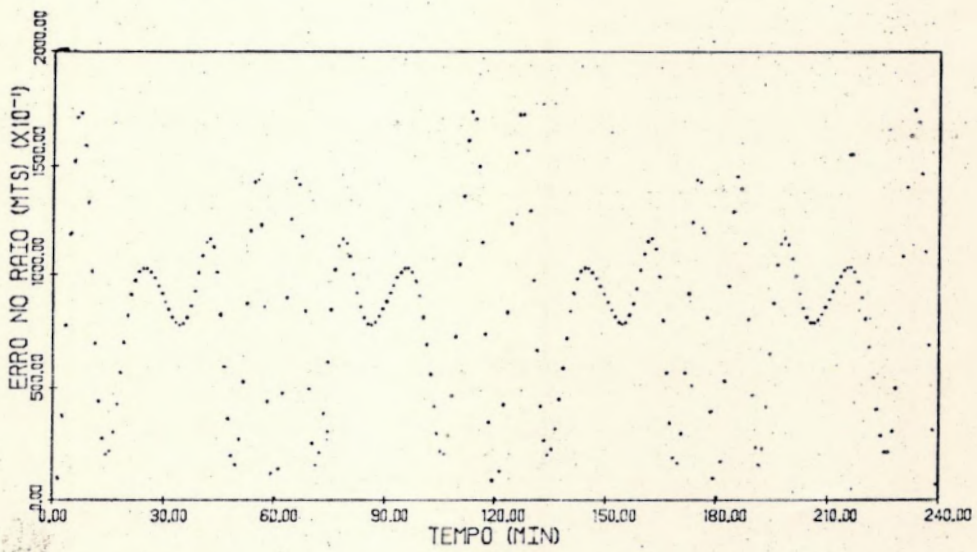
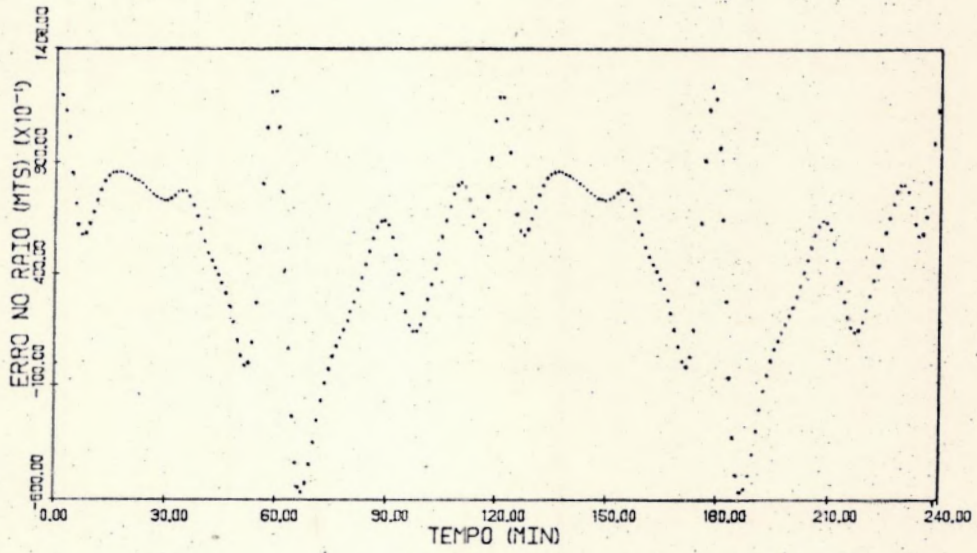
{A10} - Gráficos de erros no raio-vetor e na velocidade do satélite artificial, obtidos na comparação TB-INT para o CASO 4 ( $e''=0.0001$  e  $i''=0.0001$  rad).



{A11} - Gráficos de erros no raio-vetor e na velocidade do satélite artificial, obtidos na comparação TBL-INT para o CASO 4 ( $\epsilon''=0.0001$  e  $i''=0.0001$  rad).



{A12} - Gráficos de erros no raio-vetor e na velocidade do satélite artificial, obtidos na comparação TB-TBL para o CASO 4 ( $e''=0.0001$  e  $i''=0.0001$  rad):



{A13} - Ampliação dos gráficos dos tipos {A7} e {A10} .



Referências Bibliográficas

[1] Brouwer, D.. Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory Without Drag. The Astronomical Journal, 64(9):378-397, Nov. 1959.

[2] Brouwer, D.; Clemence, G.M.. Methods of Celestial Mechanics. New York, NY, Academic Press, 1961.

[3] Danby, J.M.A.; Burkardt, T.M.. The Solution of Kepler's Equation, I. Celestial Mechanics, 31:95-107, 1983.

[4] De Luca, N.. Mecânica Celeste. Curitiba, Paraná, Editora da Universidade Federal do Paraná, 1982.

[5] Fitzpatrick, P.M. Principles of Celestial Mechanics. New York, NY, Academic Press, 1970.

[6] Lyddane, R.H.. Small Eccentricities or Inclinations in the Brouwer Theory of the Artificial Satellite. The Astronomical Journal, 68(8):555-558, Oct. 1963.

[7] Medeiros, V.M.. Análise de Missões: Definição da Geometria Orbital de Satélites Artificiais. Dissertação de Mestrado. São José dos Campos, SP, INPE, Ago. 1983.