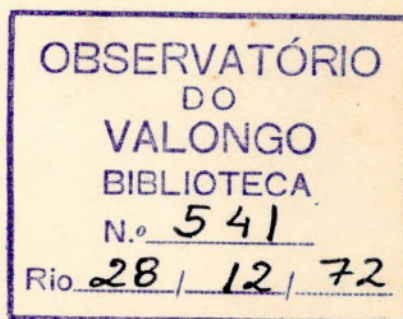


UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA

OBSERVATÓRIO DO VALONGO

LEIS DA REFRAÇÃO NA DETERMINAÇÃO DA
LATITUDE POR OBSERVAÇÕES MERIDIANAS



FERNANDO DE AZEVEDO PRADO

- ÍNDICE -

	página
I- Introdução	1
II- Descrição da experiência	3
2.1- Teoria	3
2.2- Resultados experimentais	6
III- Análise dos resultados	45
Bibliografia	47

LEIS DA REFRAÇÃO NA DETERMINAÇÃO DA
LATITUDE POR OBSERVAÇÕES MERIDIANAS

I- INTRODUÇÃO

Quando nos propomos a fazer a determinação da latitude de um lugar, introduzimos sempre uma série de erros nos n valores que conduzem à latitude final. Estes erros envolvem os erros instrumentais, erros pessoais e erros de refração; os erros instrumentais e os pessoais são aproximadamente eliminados pela aplicação do método dos mínimos quadrados, que nos permite obter a latitude mais provável da nossa série de observações. Mas para a refração, que podemos obter por fórmulas gerais para cada distância zenital observada, devemos introduzir uma correção que nos dará a possibilidade de obter melhores resultados em nossas determinações.

Minha idéia inicial foi, a partir de observações na passagem meridiana de estrelas e utilizando fórmulas que contenham a refração, formar equações de condição que me permitissem obter as quantidades $\Delta\varphi$ e ΔR , sendo ΔR a correção para a refração dada pela fórmula de Laplace ou pelas tabelas, e $\Delta\varphi$ a correção para a latitude suposta. ?

O principal objetivo deste projeto é o de obter valores para a latitude de um lugar, tão livres do efeito da refração quanto possível, levando-se em consideração que somente a refração obtida por tabelas ou por fórmulas, não é suficiente para eliminar os erros totais que ela introduz na obtenção de distâncias zenitais verdadeiras. Se chamamos por R o valor total da refração, isto é, refração média mais correção para pressão e temperatura, chamaremos de ΔR o valor que devemos adicionar a R a fim de obtermos a refração total verdadeira de um astro. Ao fazermos a soma de R , ΔR , e z , onde z é a distância zenital observada, que por aplicação de uma fórmula de redução, nos leva facilmente a um valor da latitude.

Um outro objetivo, seria o desenvolvimento de uma pesquisa sobre a obtenção de valores para a latitude, tendo-se em vista que as observações de estrelas, neste projeto, foram feitas, independentemente uma das outras; isto é, não houve necessidade de se formar pares de estrelas, como é feito no método de Horrebow para a determinação da latitude. Se for comprovado realmente que observação meridiana de estrelas, feitas independentemente, conduzem a bons resultados, poder-se-á obter dados para reduções muito rapidamente, e eliminar os erros instrumentais, através de duas séries de observações, uma ao sul e outra ao norte do zenite, independentes.

Contudo a precisão deste método só poderá ser discutida após a redução das observações. 9

O valor bem determinado da latitude de um lugar tem aplicações práticas nas comunicações servindo aos correios e telégrafos e à instalação de antenas para telecomunicações; e aplicações técnicas para a Geodésia na amarração das redes geodésicas e nos pontos para determinação do desvio da vertical.

II- DESCRIÇÃO DA EXPERIÊNCIA

A partir de um certo número de observações, formular equações de condição envolvendo a correção $\Delta\ell$ para a latitude e a correção ΔR para a refração.

Com um teodolite nivelado e montado no meridiano do lugar de observação, e com um programa prévio de observações, obtive as distâncias zenitais aparentes das estrelas observadas, como também pressão e temperatura locais utilizadas na obtenção da refração. Fazendo a soma da distância zenital observada com a refração, obtive a distância zenital verdadeira para cada estrela observada.

As declinações das estrelas, necessárias à redução das observações, foram obtidas para o dia da observação segundo interpolações de Bessel.

Com as distâncias zenitais verdadeiras, as declinações correspondentes, e a latitude suposta do local de observação, foram formadas equações de condição e a partir destas, pelo método dos mínimos quadrados, as equações normais que nos dá os valores de $\Delta\ell$ e ΔR .

2.1- TEORIA

As fórmulas empregadas na realização deste projeto foram as seguintes:

$$1) z = \ell - \delta ,$$

uma das fórmulas fundamentais da Astronomia, particular para observações meridianas. Esta fórmula, da maneira que está disposta, foi utilizada para o preparo do programa prévio de observações. ℓ e δ são aproximados e o sinal de z nos indica a região do meridiano a ser observada; se z é positivo, observamos ao sul do zenite, e se negativo, ao norte;

$$2) \Delta\ell - \Delta R = \xi + \delta - \ell = n ,$$

equação de condição obtida a partir da equação $\ell = \xi + \delta$, substituindo-se ℓ por $\ell + \Delta\ell$ e ξ por $\xi + \Delta R$, isto é, adicionando-se às quantidades ℓ e ξ , as respectivas cor-

reções $\Delta \ell$ e ΔR . Nas fórmulas indicadas acima, ζ é a distância zenital verdadeira tendo sido obtida por $\zeta = z + R$, onde z é a distância zenital observada e R , a refração;

3) $f_n = f_0 + n \Delta_{1/2}' + B_n'' (\Delta_0'' + \Delta_1'')$ (Apparent Places of fundamental Stars, 1969),

onde f é a função a ser interpolada, n é o fator de interpolação, os Δ são as diferenças, e $B_n'' (\Delta_0'' + \Delta_1'')$, a correção para as segundas diferenças;

4) $R = [\alpha_0] (1 - [\beta_0]) \text{tg } z - [\alpha_0] ([\beta_0] - \frac{[\alpha_0]}{2}) \text{tg}^3 z$
(Danjon, 1959),

onde

$[\alpha_0] = \alpha_0 \frac{P}{760} \cdot \frac{273}{273 + t}$ e $[\beta_0] = \beta_0 \frac{273 + t}{273}$.

A fórmula (4), denominada de Laplace, nos dá a refração a partir da distância zenital observada, e da pressão e temperatura. Sua solução foi programada para a calculadora eletrônica Hewlett-Packard 9100B e que veremos no decorrer deste projeto. α_0 e β_0 são constantes cujos valores são 0,000292 e 0,001254, respectivamente;

5) $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ (Dwight, 1960),

sendo utilizada no cálculo desta integral (integral de erro), a série

$\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

através do programa anexo;

6) $R = A \cdot \text{tg } z + B \cdot \text{tg}^3 z$ (Kamp, 1967).

A esta fórmula (a mesma fórmula de Laplace, com alterações evidentes) foram introduzidas as correções ΔR , ΔA , e ΔB , da seguinte forma:

$R + \Delta R = (A + \Delta A) \text{tg } z + (B + \Delta B) \text{tg}^3 z$

donde

$\Delta A \cdot \text{tg } z + \Delta B \cdot \text{tg}^3 z = \Delta R ;$

$$7) \Delta \ell = \Delta A \cdot \operatorname{tg} z - \Delta B \cdot \operatorname{tg}^3 z = n ,$$

é a equação de condição final, deduzida a partir de $\ell = z + \delta$ da seguinte maneira:

$$\ell + \Delta \ell = z + R + \Delta R + \delta ,$$

onde substituindo-se $z + R$ por ξ , ΔR por $\Delta A \cdot \operatorname{tg} z + \Delta B \cdot \operatorname{tg}^3 z$, e chamando $\xi + \delta - \ell$ por n , obtivemos a equação de condição desejada. Esta equação contém 3 incógnitas, $\Delta \ell$, ΔA , e ΔB , e uma constante ℓ , contida em n , que é a latitude suposta do lugar de observação;

$$8) \chi^2 - 1 = \frac{m - \mu - n}{m} (1 - \lambda^2) ,$$

usada no critério proposto por Pierce para rejeição de observações duvidosas; fornece a razão entre o limite de erro necessário à rejeição de n observações e o erro médio ϵ , de tal maneira que $\chi \epsilon$ é o limite de erro para além do qual observações são rejeitadas. Nesta fórmula, m representa o número de observações, μ o número de incógnitas, n o número de observações propostas para rejeição, e λ^2 é obtido por

$$\lambda^2 = \left(T/R \right)^{\frac{2n}{m - \mu}}$$

onde

$$T = \frac{n \cdot n' \cdot n'}{m^m} \quad \text{e} \quad R = e^{(1/2)(\chi^2 - 1)} \cdot \nu \chi \quad \text{onde}$$

$n' = m - n$ e $\nu \chi$ é dado pela integral de erro (5) subtraída da unidade;

$$9) \epsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{m - \mu}} ,$$

fornece o erro médio de cada observação, onde $[vv]$ é o somatório dos quadrados ^{dos} resíduos das observações, m é o número de observações, e μ é o número de incógnitas;

$$10) \epsilon_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{m(m - \mu)}} ,$$

é o erro médio da média aritmética das observações;

$$11) r = 0,6745 \sqrt{\frac{[vv]}{m - \mu}} ,$$

é o erro provável de cada observação;

$$12) r_o = 0,6745 \sqrt{\frac{v}{m(m-\mu)}} \quad ;$$

é o erro provável da média aritmética das observações.

2.2- RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O primeiro passo para a realização deste projeto foi a formação de um programa prévio de observações, para estrelas culminando ao sul e ao norte do zenite. Este programa contém valores aproximados das distâncias zenitais a serem observadas, tendo-se usado uma latitude aproximada do local de observação ($\ell = -23^\circ$) e ascensões retas e declinações tiradas diretamente do *Apparent Places of Fundamental Stars* para 1972.

Sul do zenite	A.R.	DEC.	z
γ Sagittarii	19h 05m	- 27° 42'	4° 42'
α Sagittarii	19 21	- 40 40	17 40
59 G. Telescopii	19 25	- 54 22	31 22
ζ Telescopii	19 33	- 48 09	25 09
δ Telescopii	19 45	- 56 25	23 25
ζ Sagittarii	19 53	- 41 56	18 56
ϵ Pavonis	19 57	- 72 58	49 58
62 Sagittarii	20 00	- 27 47	4 47
ζ Pavonis	20 05	- 66 15	43 15
χ^1 Sagittarii	20 20	- 42 08	19 08
α Pavonis	20 23	- 56 49	33 49
α Indi	20 35	- 47 23	24 23
13 G. Microscopii	20 38	- 33 31	10 31
η Indi	20 41	- 52 01	29 01
β Pavonis	20 42	- 66 17	43 17
ν Capricorni	20 44	- 25 22	2 22
ζ Microscopii	20 46	- 44 05	21 05
ω Capricorni	20 50	- 27 01	4 01
β Indi	20 52	- 58 33	35 33
ν Microscopii	20 59	- 32 21	9 21
α Octantis	21 01	- 77 07	54 07

A	Capricorni	21h 05m	- 25 06'	2 06'
0	Pavonis	21 10	- 70 14	47 14
E	Microscopii	21 16	- 32 17	9 17
δ^1	Microscopii	21 18	- 40 55	17 55
γ	Pavonis	21 24	- 65 29	42 29
3	G. Gruis	21 31	- 44 58	21 58
γ	Octantis	21 38	- 77 30	54 30
L	Piscis Austrini	21 43	- 33 08	10 08
0	Indi	21 48	- 69 45	46 45
γ	Gruis	21 52	- 37 29	14 29
δ	Indi	21 56	- 55 07	32 07
E	Indi	22 01	- 56 53	33 53
λ	Gruis	22 04	- 39 40	16 40
α	Gruis	22 06	- 47 05	24 05
λ	Piscis Austrini	22 12	- 27 53	4 53
α	Tucanae	22 16	- 60 23	37 23
E	Octantis	22 16	- 80 34	57 34
δ^1	Gruis	22 27	- 43 37	20 37
β	Piscis Austrini	22 29	- 32 28	9 28
E	Piscis Austrini	22 39	- 27 10	4 10
β	Gruis	22 41	- 47 01	24 01
E	Gruis	22 46	- 51 27	28 27
69	G. Gruis	22 49	- 39 17	16 17
α	Piscis Austrini	22 56	- 29 45	6 45
π	Piscis Austrini	23 01	- 34 53	11 53
L	Gruis	23 08	- 45 23	22 23
γ	Tucanae	23 15	- 58 22	35 22
γ	Sculptoris	23 17	- 32 40	9 40
11	G. Sculptoris	23 19	- 27 07	4 07
0	Gruis	23 25	- 52 52	29 52
β	Sculptoris	23 31	- 37 57	14 57
L	Phoenicis	23 33	- 42 45	19 45
11	G. Phoenicis	23 36	- 45 38	22 38
μ	Sculptoris	23 39	- 32 13	9 13
δ	Sculptoris	23 47	- 28 16	5 16
π	Phoenicis	23 57	- 52 53	29 53
E	Tucanae	23 58	- 65 43	42 43

\varnothing Octantis	0h 00m	- 77° 12'	54° 12'
ϵ Phoenicis	0 07	- 45 53	22 53
\varnothing Sculptoris	0 10	- 35 16	12 16
ζ Tucanae	0 18	- 65 01	42 01
β Hydri	0 24	- 77 24	54 24
α Phoenicis	0 24	- 42 26	19 26
λ^1 Phoenicis	0 30	- 48 56	25 56
58 G. Phoenicis	0 33	- 52 31	29 31
μ Phoenicis	0 40	- 46 13	23 13
η Phoenicis	0 42	- 57 36	34 36
λ Hydri	0 47	- 75 03	52 03
λ^2 Tucanae	0 53	- 69 40	46 40
α Sculptoris	0 57	- 29 29	6 29
σ Sculptoris	1 01	- 31 41	8 41
ζ Tucanae	1 06	- 61 54	38 54
\varnothing Phoenicis	1 27	- 43 27	20 27
δ Phoenicis	1 30	- 49 12	26 12
α Eridani	1 36	- 57 22	34 22
π Sculptoris	1 40	- 32 27	9 27
ϵ Sculptoris	1 44	- 25 10	2 10
ν Phoenicis	1 52	- 46 25	23 25
η^2 Hydri	1 54	- 67 46	44 46
α Hydri	1 57	- 61 41	38 41
\varnothing Fornacis	2 03	- 29 25	6 25
μ Fornacis	2 11	- 30 50	7 50
\varnothing Eridani	2 15	- 51 37	28 37
δ Hydri	2 21	- 68 46	45 46
χ Eridani	2 25	- 47 49	24 49

Norte do zenite

	A.R.	DEC.	z
α Pegasi	23h 03m	15° 03'	38° 03'
\varnothing Aquarii	23 13	- 6 11	16 49
\varnothing Piscium	23 15	3 07	26 07
γ Pegasi	23 19	23 35	46 35
\varnothing Pegasi	23 24	23 15	46 15
\varnothing Piscium	23 26	6 13	29 13
λ Andromedae	23 36	46 18	69 18

φ Pegasi	23h 56m	24° 59'	47° 59'
α Andromedae	0 06	28 56	51 56
π Pegasi	0 11	15 01	38 01
σ Andromedae	0 16	36 37	59 37
π Andromedae	0 35	33 33	56 33
δ Andromedae	0 37	30 42	53 42
0 Cassiopeiae	0 43	48 08	71 08
ξ Andromedae	0 45	24 06	47 06
δ Piscium	0 47	7 25	30 25
μ Andromedae	0 55	38 20	61 20
ϵ Piscium	1 01	7 44	30 44
η Ceti	1 07	- 10 19	12 41
γ Piscium	1 10	29 56	52 56
θ Piscium	1 18	27 07	50 07
θ Ceti	1 22	- 8 19	14 41
48 Ceti	1 28	- 21 45	1 15
η Piscium	1 29	15 12	38 12
δ Piscium	1 39	5 20	28 20
175 G. Ceti	1 41	- 3 49	19 11
γ Ceti	1 42	- 16 04	6 56
0 Piscium	1 43	9 01	32 01
ζ Ceti	1 50	- 10 27	12 33
α Trianguli	1 51	29 26	52 26
β Arietis	1 53	20 40	43 40
θ Ceti	1 58	- 21 12	1 48
ξ Ceti	2 11	8 42	31 42
θ Ceti	2 24	- 12 24	10 36
θ Ceti	2 26	8 20	31 20
θ Ceti	2 30	- 15 21	7 39
δ Ceti	2 38	0 12	23 12
35 Arietis	2 41	27 35	50 35
μ Ceti	2 43	9 59	32 59
41 Arietis	2 48	27 08	50 08
η Eridani	2 55	- 9 00	14 00
λ Ceti	2 58	8 47	31 47
α Ceti	3 00	3 58	26 58
β Persei	3 06	40 50	63 50

ϵ Arietis	3h 13m	20° 56'	43° 56'
λ Ceti	3 17	3 16	26 16
0 Tauri	3 23	8 55	31 55
ϵ Tauri	3 25	9 38	32 38

A partir daí foram usados os seguintes instrumentos para a observação de estrelas: um teodolito Wild T2, um cronômetro de marinha indicando tempo sideral local, um termômetro, e um barógrafo. A tabela anexa a este projeto foi idealizada para registros de observações, sendo que as colunas correspondentes a instantes observados e nível não foram utilizadas porque não eram necessárias à elaboração deste projeto.

Veremos a seguir, tabelas (descrito acima) contendo as observações que foram realizadas no pilar do Observatório do Valongo, na ordem em que foram feitas.

LOCAL DE OBSERVAÇÃO: Observatório do Valongo

INSTRUMENTO: Teodolito Wild T2

DATA: 2/3 - 10 - 1972

n.º?

OBSERVADOR: Fernando

RELÓGIO: Cronômetro de Marinha

n.º

7

CÍRCULO LESTE										
ESTRELA	A.R.		±s(S) ou -z(N)		INSTANTES OBSERVADOS	DIST. ZENITAL OBSERVADA	NIVEL		TEMP.	PRESSÃO
							L	W		
θ Octantis 4.7	0h	00m	54°	12'		54° 17' 48,6"			26,0°C	753 mm Hg
ε Phoenicis 3.9	0	07	22	53		22 59 28,2			25,5	"
ζ Tucanae 4.3	0	18	42	01		42 07 27,5			"	"
β Hydri 2.9	0	24	54	24		54 29 09,3			"	"
λ ¹ Phoenicis 4.9	0	30	25	56		26 02 48,8			"	"
58 G. Phoenicis 5.6	0	33	29	31		29 36 48,0			"	"

CÍRCULO OESTE										
ESTRELA	A.R.		±s(S) ou -z(N)		INSTANTES OBSERVADOS	DIST. ZENITAL OBSERVADA	NIVEL		TEMP.	PRESSÃO
							L	W		
η Phoenicis 4.5	0h	42m	34°	36'		34° 42' 01,1"			25,2°C	753 mm Hg
α Sculptoris 4.4	0	57	6	29		6 36 05,6			"	"
ζ Tucanae 5.3	1	06	38	54		39 00 28,7			"	"
τ Phoenicis 3.4	1	27	20	27		20 32 58,0			25,0	"
δ Phoenicis 4.0	1	30	26	12		26 18 16,8			"	"
α Eridani 0.6	1	36	34	22		34 27 47,0			"	"

LOCAL DE OBSERVAÇÃO:

Observatório do Valongo

INSTRUMENTO:

Teodolito Wild T2

DATA:

18.10.1972

OBSERVADOR:

Fernando

RELÓGIO:

Cronômetro de Marinha

CÍRCULO LESTE		A.R.		±z(S) ou -z(N)		INSTANTES OBSERVADOS	DIST. ZENITAL OBSERVADA	NIVEL		TEMP.	PRESSÃO
ESTRELA								L	W		
α Tucanae 2.9	22h	16m	37°	23'		37° 29' 16,9"			20,0 °C	765 mm Hg	
δ ¹ Gruis 4.0	22	27	20	37		20 43 56,2			"	"	
β P.Aust. 4.4	22	29	9	28		9 35 12,7			21,0	"	
ε P.Aust. 4.2	22	39	4	10		4 17 11,6			"	"	
β Gruis 2.2	22	41	24	01		24 07 22,3			"	"	
α P.Aust. 1.3	22	56	6	45		6 51 56,0			"	"	

CÍRCULO OESTE		A.R.		±z(S) ou -z(N)		INSTANTES OBSERVADOS	DIST. ZENITAL OBSERVADA	NIVEL		TEMP.	PRESSÃO
ESTRELA								L	W		
α Pegasi 2.6	23h	03m	-38°	03'		37° 57' 01,8'			21,0 °C	765 mm Hg	
ε Aquarii 4.4	23	13	-16	49		16 42 03,9			"	"	
γ Piscium 3.9	23	15	-26	07		26 01 40,0			20,0 "	"	
γ Pegasi 4.7	23	19	-46	35		46 28 40,4			"	"	
δ Pegasi 4.6	23	24	-46	15		46 08 35,0			"	"	
δ Piscium 4.5	23	26	-29	13		29 07 22,0			21,0	"	

LOCAL DE OBSERVAÇÃO: Observatório do Valongo

INSTRUMENTO: Teodolito Wild T2

DATA: 18 - 10 - 1972

OBSERVADOR: Fernando

RELÓGIO: Cronômetro de Marinha

CÍRCULO LESTE										
ESTRELA	A. R.		±z(S) ou -z(N)		INSTANTES OBSERVADOS	DIST. ZENITAL OBSERVADA	NIVEL		TEMP.	PRESSÃO
							L	W		
λ Andromedae 4.0	23h	36m	-69°	18'		69° 10' 25,7"			21,0 °C	765 mm Hg

CIRCULO OESTE										

LOCAL DE OBSERVAÇÃO: Observatório do Valongo

INSTRUMENTO: Teodolito Wild T2

DATA: 19 - 10 - 1972

OBSERVADOR: Fernando

RELÓGIO: Cronômetro de Marinha

CÍRCULO LESTE											
ESTRELA	A.R.		±z(S) ou -z(N)	INSTANTES OBSERVADOS	DIST. ZENITAL OBSERVADA			NIVEL		TEMP.	PRESSÃO
								L	N		
ζ Andromedae 4.3	0h	45m	-47° 06'		47° 00'	28,1"			20,0 °C	763 mm Hg	
δ Piscium 4.6	0	47	-30 25		30 19	44,0			"	"	
μ Andromedae ^{3.9}	0	55	-61 20		61 13	36,1			"	"	
ε Piscium 4.5	1	01	-30 44		30 38	16,0			"	"	
η Ceti 3.6	1	07	-12 41		12 34	29,3			"	"	
γ Piscium 4.7	1	10	-52 56		52 49	48,8			"	"	

CÍRCULO OESTE										
ν Piscium 4.7	1h	18m	-50° 07'		50° 00'	25,8"			20,0 °C	763 mm Hg
β Ceti 3.8	1	22	-14 41		14 34	31,8			"	"
48 Ceti 5.1	1	28	- 1 15		1 07	57,5			"	"
η Piscium 3.7	1	29	-38 12		38 05	52,6			"	"
γ Piscium 4.7	1	39	-28 20		28 14	41,1			"	"
175G. Ceti 5.3	1	41	-19 11		19 04	19,0			"	"

LOCAL DE OBSERVAÇÃO: Observatório do Valongo

INSTRUMENTO: Teodolito Wild T2

DATA: 19 - 10 - 1972

OBSERVADOR: Fernando

RELÓGIO: Cronômetro de Marinha

CÍRCULO LESTE												
ESTRELA	A. R.		±z(S) ou -z(N)		INSTANTES OBSERVADOS	DIST. ZENITAL OBSERVADA			NIVEL		TEMP.	PRESSÃO
									L	W		
γ Ceti 3.6	1h	42m	- 6°	56'		6°	49'	16,3"			20,0 °C	763 mm Hg
○ Piscium 4.5	1	43	-32	01		31	54	55,7			"	"
≡ Ceti 3.9	1	50	-12	33		12	25	53,3			"	"
α Trianguli 3.6	1	51	-52	26		52	19	49,3			"	"
β Arietis 2.7	1	53	-43	40		43	33	50,0			"	"
ν Ceti 4.2	1	58	- 1	48		1	41	35,7			"	"

CÍRCULO OESTE												
ESTRELA	A. R.		±z(S) ou -z(N)		INSTANTES OBSERVADOS	DIST. ZENITAL OBSERVADA			NIVEL		TEMP.	PRESSÃO
									L	W		

Tendo-se agora 43 observações, 18 ao sul e 25 ao norte do zenite, foram determinadas as refrações correspondentes às distâncias zenitais observadas levando-se em conta a pressão e a temperatura. Essas refrações foram obtidas com o auxílio do Anuário do Observatório de São Paulo, e são as seguintes:

Nº	ESTRELA	R_m	R_p	R_t	R
1	θ Octantis	83,89"	- 00,70"	-07,92"	75,27"
2	ϵ Phoenicis	25,98	00,00	-02,33	23,65
3	ζ Tucanae	54,25	-00,70	-04,52	49,03
4	β Hydri	84,46	-00,70	-07,89	75,87
5	λ^1 Phoenicis	29,09	00,00	-02,67	26,42
6	58 θ Phoenicis	34,23	00,00	-03,06	31,17
7	η Phoenicis	41,70	-00,33	-03,51	37,86
8	α Sculptoris	06,92	00,00	-00,66	06,26
9	ζ Tucanae	49,01	-00,63	-03,94	44,44
10	η Phoenicis	22,55	00,00	-02,05	20,50
11	δ Phoenicis	29,61	00,00	-02,63	26,98
12	α Eridani	41,46	-00,31	-03,45	37,70
13	α Tucanae	45,98	00,37	-03,50	42,85
14	δ^1 Gruis	22,73	00,00	-02,00	20,73
15	β P. Austrini	10,50	00,00	-00,96	09,54
16	ϵ P. Austrini	04,29	00,00	-00,43	03,86
17	β Gruis	27,12	00,00	-02,08	25,04
18	α P. Austrini	07,24	00,00	-00,69	06,55
19	α Pegasi	46,90	00,40	-03,63	43,67
20	φ Aquarii	18,04	00,00	-01,67	16,37
21	η Piscium	29,06	00,00	-02,00	27,06
22	γ Pegasi	62,96	00,50	-04,30	59,16
23	θ Pegasi	62,29	00,50	-04,23	58,56
24	θ Piscium	33,25	00,00	-02,18	31,07
25	λ Andromedae	156,74	01,00	-11,90	145,84
26	ζ Andromedae	64,02	00,30	-04,40	59,92
27	δ Piscium	35,33	00,01	-02,07	33,27
28	μ Andromedae	108,91	00,37	-07,49	101,72

29	ϵ	Piscium	35,64"	00,02"	-02,13"	33,53"
30	η	Ceti	13,57	00,00	-01,26	12,31
31	γ	Piscium	79,49	00,30	-05,57	74,22
32	ν	Piscium	72,01	00,30	-05,00	67,31
33	θ	Ceti	15,58	00,00	-01,46	14,12
34	48	Ceti	01,13	00,00	-00,11	01,02
35	ζ	Piscium	47,20	00,24	-03,62	43,82
36	δ	Piscium	32,24	00,00	-02,00	30,24
37	175 G.	Ceti	20,89	00,00	-01,91	18,98
38	τ	Ceti	07,19	00,00	-00,68	06,51
39	o	Piscium	37,83	00,06	-02,19	35,70
40	ξ	Ceti	13,43	00,00	-01,24	12,19
41	α	Trianguli	77,99	00,30	-05,47	72,82
42	β	Arietis	57,13	00,30	-04,00	53,43
43	ν	Ceti	01,69	00,00	-00,17	01,52

A partir das refrações, obtemos diretamente as distâncias zenitais verdadeiras das estrelas observadas :

1)	54° 19' 03,87"	2)	22° 59' 51,85"
3)	42 08 16,53	4)	54 30 25,17
5)	26 03 15,22	6)	29 37 19,17
7)	34 42 38,96	8)	6 36 11,86
9)	39 01 13,14	10)	20 33 18,50
11)	26 18 43,78	12)	34 28 24,70
13)	37 29 59,75	14)	20 44 16,93
15)	9 35 22,24	16)	4 17 15,46
17)	24 07 47,34	18)	6 52 02,55
19)-	37 57 45,47	20)-	16 42 20,27
21)-	26 02 07,06	22)-	46 29 39,56
23)-	46 09 33,56	24)-	29 07 53,07
25)-	69 12 51,54	26)-	47 01 28,02
27)-	30 20 17,27	28)-	61 15 17,82
29)-	30 38 49,53	30)-	12 34 41,61
31)-	52 51 03,02	32)-	50 01 33,12

33)- 14° 34' 45,92"
 35)- 38 06 36,42
 37)- 19 04 37,98
 39)- 31 55 31,40
 41)- 52 21 02,12
 43)- 1 41 37,22

34)- 1° 07' 58,52"
 36)- 28 15 11,34
 38)- 6 49 22,81
 40)- 12 26 05,49
 42)- 43 34 43,43

As declinações das estrelas observadas, segun
do interpolações de Bessel, são as seguintes:

1) - 77° 12' 53,86"
 3) - 65 01 57,97
 5) - 48 57 03,69
 7) - 57 36 33,73
 9) - 61 55 01,55
 11)- 49 12 34,71
 13)- 60 23 51,60
 15)- 32 29 07,54
 17)- 47 01 39,91
 19) 15 03 46,30
 21) 3 08 13,42
 23) 23 15 31,92
 25) 46 18 57,17
 27) 7 26 28,90
 29) 7 44 53,07
 31) 29 56 59,54
 33)- 8 19 10,09
 35) 15 12 36,41
 37)- 3 49 21,98
 39) 9 01 31,37
 41) 29 27 02,90
 43)- 21 12 18,79

2) - 45° 53' 42,48"
 4) - 77 24 21,22
 6) - 52 31 14,25
 8) - 29 30 01,74
 10)- 43 27 11,33
 12)- 57 22 14,02
 14)- 43 38 07,79
 16)- 27 11 05,13
 18)- 29 45 56,25
 20)- 6 11 34,27
 22) 23 35 45,40
 24) 6 13 59,56
 26) 24 07 25,88
 28) 38 21 23,51
 30)- 10 19 20,75
 32) 27 07 32,68
 34)- 21 45 57,89
 36) 5 21 16,19
 38)- 16 04 35,20
 40)- 10 27 53,97
 42) 20 40 46,49

Sendo obtidos ξ e δ para cada estrela observada, utilizei a fórmula $\varphi = \xi + \delta$ para verificar a correção dos resultados a serem posteriormente obtidos quando da redução por mínimos quadrados. São os seguintes os valores das latitudes, por observações ao sul e ao norte do zenite:

Para observações ao sul do zenite

1) - 22° 53' 49,99"	2) - 22° 53' 51,63"
3) 41,44	4) 56,05
5) 48,47	6) 55,08
7) 54,77	8) 49,88
9) 48,41	10) 52,83
11) 50,93	12) 49,32
13) 51,85	14) 50,86
15) 46,30	16) 49,67
17) 52,57	18) 53,70

Para observações ao norte do zenite

19) - 22° 53' 59,17	20) - 22° 53' 54,54"
21) 54,64	22) 54,16
23) - 22 54 01,64	24) 53,51
25) - 22 53 54,37	26) - 22 54 02,14
27) 48,37	28) - 22 53 54,31
29) 56,46	30) - 22 54 02,36
31) - 22 54 03,48	32) 00,43
33) - 22 53 56,01	34) - 22 53 56,41
35) - 22 54 00,01	36) 55,15
37) - 22 53 59,96	38) 58,01
39) - 22 54 00,03	40) 59,46
41) - 22 53 59,22	42) 56,94
43) 56,01	

Por reduções independentes, isto é, uma para as estrelas ao sul do zenite e outra para estrelas ao norte do zenite, foram obtidas as duas médias aritméticas da lati-

tude, e a partir destas, os resíduos.

SUL		NORTE			
$\varphi_m = - 22^\circ 53' 50,768''$		$\varphi_m = - 22^\circ 53' 57,112''$			
	v	vv			
1)	- 0,778"	0,605	19)	2,058 "	4,235
2)	0,862	0,743	20)	- 2,572	6,615
3)	- 9,328	87,012	21)	- 2,472	6,111
4)	5,282	27,900	22)	- 2,952	8,714
5)	- 2,298	5,281	23)	4,528	20,503
6)	4,312	18,593	24)	- 3,602	12,974
7)	4,002	16,016	25)	- 2,742	7,519
8)	- 0,888	0,789	26)	5,028	25,281
9)	- 2,358	5,560	27)	-10,742	115,391
10)	2,062	4,252	28)	- 2,802	7,851
11)	0,162	0,026	29)	- 0,652	0,425
12)	- 1,448	2,097	30)	5,248	27,542
13)	1,082	1,171	31)	6,368	40,551
14)	0,092	0,008	32)	3,318	11,009
15)	- 4,468	19,963	33)	- 1,102	1,214
16)	- 1,098	1,206	34)	- 0,702	0,493
17)	1,802	3,247	35)	2,898	8,398
18)	2,932	8,597	36)	- 1,962	3,849
			37)	2,848	8,111
			38)	0,898	0,806
			39)	2,918	8,515
			40)	2,348	5,513
			41)	2,108	4,444
			42)	- 0,172	0,030
			43)	- 1,102	1,214

Nesta redução foram eliminadas as observações (3), (4), (6), (7), (15), e (18) ao sul do zenite; e as observações (22), (23), (24), (26), (27), (28), (30), (31), (32), (35), (37), e (39) ao norte do zenite.

Convém lembrar que estas eliminações foram realizadas sem levar em conta nenhum método de rejeição de observações, apenas eliminando as observações cujos resíduos são os mais discrepantes.

Sendo eliminadas estas observações, foram determinadas novas médias de latitudes e novos resíduos:

SUL		NORTE	
$\varphi_m = - 22^\circ 53' 50,534''$		$\varphi_m = - 22^\circ 53' 56,645''$	
	V VV		V VV
1) - 0,544"	0,296	19) 2,525"	6,376
2) 1,096	1,201	20) - 2,105	4,431
5) - 2,064	4,260	21) - 2,005	4,020
8) - 0,654	0,428	25) - 2,275	5,176
9) - 2,124	4,511	29) - 0,185	0,034
10) 2,296	5,272	33) - 0,635	0,403
11) 0,396	0,157	34) - 0,235	0,055
12) - 1,214	1,474	36) - 1,495	2,235
13) 1,316	1,732	38) 1,365	1,863
14) 0,326	0,106	40) 2,815	7,924
16) - 0,864	0,746	41) 2,575	6,631
17) 2,036	4,145	42) 0,295	0,087
		43) - 0,635	0,403

Procedendo analogamente à redução anterior, foram eliminadas as observações (5), (9), (10), e (17) ao sul do zenite; e as observações (19), (25), (40), e (41) ao norte do zenite. Foram obtidas novas médias e novos resíduos:

SUL		NORTE	
$\varphi_m = - 22^\circ 53' 50,516''$		$\varphi_m = - 22^\circ 53' 56,019''$	
	V VV		V VV
1) - 0,526"	0,277	20) - 1,479"	2,187
2) 1,114	1,241	21) - 1,379	1,902
8) - 0,636	0,404	29) 0,441	0,194
11) 0,414	0,171	33) - 0,009	0,000

12)- 1,196"	1,430	34) 0,391"	0,153
13) 1,334	1,780	36)- 0,869	0,755
14) 0,344	0,118	38) 1,991	3,964
16)- 0,846	0,716	42) 0,921	0,848
		43)- 0,009	0,000

A partir destes resíduos foram eliminadas as observações (12), e (13) ao sul do zenite; e as observações (20), (21), e (38) ao norte do zenite. Tal como anteriormente, foram obtidas novas médias de latitudes e novos resíduos:

SUL		NORTE	
$\varphi_m = - 22^\circ 53' 50,493''$		$\varphi_m = - 22^\circ 53' 56,163''$	
	v	vv	
1) - 0,503"	0,253	29) 0,297"	0,088
2) 1,137	1,293	33)- 0,153	0,023
8) - 0,613	0,376	34) 0,247	0,061
11) 0,437	0,191	36)- 1,013	1,026
14) 0,367	0,135	42) 0,777	0,604
16)- 0,823	0,677	43)- 0,153	0,023

Desta redução foram eliminadas somente duas observações, a (2) ao sul do zenite, e a (36) ao norte.

Para o cálculo dos erros médios e prováveis, determinamos novamente as médias das latitudes e os resíduos:

SUL		NORTE	
$\varphi_m = - 22^\circ 53' 50,266''$		$\varphi_m = - 22^\circ 53' 56,366''$	
	v	vv	
1) - 0,276"	0,076	29) 0,094"	0,009
8) - 0,386	0,149	33)- 0,356	0,127
11) 0,664	0,441	34) 0,044	0,002
14) 0,594	0,353	42) 0,574	0,329
16)- 0,596	0,355	43)- 0,356	0,127

$$[vv] = 1,374$$

$$[vv] = 0,594$$

Das fórmulas (10) e (12), descritas no parágrafo 2.1, teremos, respectivamente:

SUL	NORTE
$\epsilon_0 = 0,262''$	$\epsilon_0 = 0,172''$
$r_0 = 0,177$	$r_0 = 0,116$

e as latitudes médias serão

$$\varphi_s = -22^\circ 53' 50,266'' \pm 00,177'' ;$$

$$\varphi_n = -22^\circ 53' 56,366'' \pm 00,116'' .$$

O valor final da latitude será a média aritmética destes dois valores acima, e seu erro provável será dado por

$$\bar{r}_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(0,177)^2 + (0,116)^2} = 0,106''$$

LATITUDE MÉDIA FINAL

$$-22^\circ 53' 53,316'' \pm 00,106''$$

Como já foi dito anteriormente, essas reduções foram feitas para verificar a correção dos resultados a serem posteriormente obtidos, e não foi empregado nenhum método para rejeição das observações.

A seguir foram formadas equações de condição a partir de $\Delta\varrho = \Delta R = \zeta + \xi - \varrho$, sendo ϱ a latitude suposta do local de observação, adotada como $-22^\circ 54'$. Essas equações foram formadas independentemente para observações ao sul e ao norte do zenite.

Com este método não foi possível reduzir as equações de condição às equações normais, fato este decorrente da própria estrutura das equações de condição. Por isso, só serão mostradas, como exemplo, 4 equações de condição:

SUL

NORTE

1) $\Delta\ell - \Delta R = 10,01''$

19) $\Delta\ell - \Delta R_1 = 00,83''$

16) $\Delta\ell - \Delta R = 10,33$

34) $\Delta\ell - \Delta R_1 = 03,59$

9
Tendo falhado esta primeira tentativa para a formação das equações normais, tomei as duas observações de mais baixas distâncias zenitais, uma ao sul e outra ao norte do zenite, e considerei estas com peso 1. Dividindo o fator n (descrito no parágrafo 2.1) da equação de peso 1 por cada fator n correspondente às outras equações, foram obtidos os pesos de todas as equações. Em seguida, cada equação de condição foi multiplicada pelo próprio peso, no propósito de se conseguir obter as equações normais. Infelizmente este processo também falhou, o que significou que eu teria que seguir por outros processos para a obtenção das equações normais.

Como exemplo, mostraremos novamente 4 equações de condição com seus respectivos pesos:

SUL

1) $1,032 \Delta\ell - 1,032 \Delta R - 10,330'' = 0$

(p = 1,032)

16) $\Delta\ell - \Delta R - 10,332 = 0$

(p = 1)

NORTE

19) $4,325 \Delta\ell - 4,325 \Delta R_1 - 03,590'' = 0$

(p = 4,325)

34) $\Delta\ell - \Delta R_1 - 03,590 = 0$

(p = 1)

Ao testar a fórmula de Laplace (4), descrita no parágrafo 2.1, para a obtenção de refrações a partir da distância zenital observada, da pressão, e da temperatura, notei que o desvio em relação àsquelas obtidas pelas tabelas, era bem considerável. Então, a partir deste fato, resolvi determinar novas refrações pela aplicação da fórmula de Laplace.

A seguir veremos a fórmula de Laplace programada para a calculadora eletrônica Hewlett-Packard 9100B. Entramos com a temperatura, pressão, e distância zenital observada, respectivamente no display, em z, y, e x. O resultado desejado aparece em y, e expresso em segundos de arco.

Step	Key	Code	Display		
			x	y	z
00	Clear	20			
01	Stop	41	z	p	t
02	tan x	71			
03	x → ()	23			
04	a	13			
05	y → ()	40			
06	b	14			
07	÷	25			
08	2	02			
09	7	07			
0a	3	03			
0b	+	33			
0c	÷	35			
0d	y → ()	40			
10	c	16			
11	.	21			
12	0	00			
13	0	00			
14	1	01			
15	2	02			
16	5	05			
17	4	04			
18	x	36			
19	y ↺ ()	24			
1a	c	16			
1b	1	01			
1c	x ↺ y	30			
1d	÷	35			
20	b	14			
21	4	27			
22	7	07			
23	6	06			
24	0	00			
25	÷	35			
26	.	21			

Step	Key	Code	Display		
			x	y	z
27	0	00			
28	0	00			
29	0	00			
2a	2	02			
2b	9	11			
2c	2	02			
2d	x	36			
30	↓	25			
31	x	36			
32	y → ()	40			
33	b	14			
34	a	13			
35	x	36			
36	1	01			
37	Δ ↓	27			
38	e	16			
39	-	34			
3a	↓	25			
3b	x	36			
3c	y → ()	40			
3d	d	17			
40	c	16			
41	Δ ↓	27			
42	b	14			
43	Δ ↓	27			
44	2	02			
45	÷	35			
46	↓	25			
47	-	34			
48	b	14			
49	x	36			
4a	a	13			
4b	Δ ↓	27			
4c	x	36			
4d	x	36			
50	↓	25			
51	x	36			
52	d	17			
53	x ↺ y	30			
54	-	34			
55	1	01			
56	Δ ↓	27			
57	6	06			
58	0	00			
59	÷	35			
5a	÷	35			
5b	↓	25			
5c	sin x	70			
5d	÷	35			
60	Print	45			R"
61	Go To() ()	44			
62	0	00			
63	0	00			
64	End	46			

Nota- Os 3 dados de entrada no programa, isto é, distância zenital, pressão, e temperatura, têm que ser expressos, respectivamente, em grau, mm de Hg, e graus Celsius.

Obtidas as novas refrações, e pela aplicação direta da fórmula $\xi = z + R$, determinamos as novas distâncias zenitais verdadeiras:

1)	54° 19' 04,13"	2)	22° 59' 51,32"
3)	42 08 16,74	4)	54 30 25,48
5)	26 03 15,43	6)	29 37 18,97
7)	34 42 38,85	8)	6 36 11,91
9)	39 01 12,86	10)	20 33 18,46
11)	26 18 43,78	12)	34 28 24,45
13)	37 30 00,14	14)	20 44 17,55
15)	9 35 22,20	16)	4 17 15,81
17)	24 07 47,47	18)	6 52 02,77
19)-	37 57 45,61	20)-	16 42 20,77
21)-	26 02 07,54	22)-	46 29 39,72
23)-	46 09 33,63	24)-	29 07 53,31
25)-	69 12 52,25	26)-	47 01 28,37
27)-	30 20 16,90	28)-	61 15 18,15
29)-	30 38 49,31	30)-	12 34 41,85
31)-	52 51 02,85	32)-	50 01 32,75
33)-	14 34 46,43	34)-	1 07 58,61
35)-	38 06 36,68	36)-	28 15 11,31
37)-	19 04 38,45	38)-	6 49 23,03
39)-	31 55 30,73	40)-	12 26 05,70
41)-	52 21 02,03	42)-	43 34 43,45
43)-	1 41 37,36		

Repetindo o processo empregado na página 19, determinamos novos valores de latitude ao sul e ao norte do zenite para verificar a correção dos resultados a serem posteriormente obtidos quando forem aplicadas as novas equações de condição.

Para observações ao sul do zenite

1) - 22° 53' 49,73"	2) - 22° 53' 51,16"
3) 41,23	4) 55,74
5) 48,26	6) 55,28
7) 54,88	8) 49,83
9) 48,69	10) 52,87
11) 50,93	12) 49,57
13) 51,46	14) 50,24
15) 45,34	16) 49,28
17) 52,44	18) 53,48

Para observações ao norte do zenite

19)- 22° 53' 59,31"	20)- 22° 53' 55,04"
21) 54,12	22) 54,32
23)- 22 54 01,71	24) 53,75
25)- 22 53 55,08	26)- 22 54 02,49
27) 48,00	28)- 22 53 54,64
29) 56,24	30)- 22 54 02,60
31)- 22 54 03,31	32) 00,07
33)- 22 53 56,52	34)- 22 53 56,50
35)- 22 54 00,27	36) 55,12
37) 00,43	38) 58,23
39)- 22 53 59,36	40) 59,67
41) 59,13	42) 56,96
43) 56,15	

Antes da formação das equações de condição, a gora dadas por (7) (parágrafo 2.1), se fez necessária uma eliminação das observações duvidosas, isto é, fazer constar somente as observações que assegurassem um valor médio razoável da latitude. Inicialmente foi utilizado o critério de Pience para rejeição de observações duvidosas. Como neste critério usamos a integral de erro (5), começaremos mostrando a programação feita para a calculadora eletrônica Hewlett-Packard 9100B.

Entramos com o valor do limite superior da in
tegral no display x, e o resultado desejado aparecerá em y.

Step	Key	Code	x	Display y	z
00	Clear	20			
01	Stop	41	x	0	0
02	x \rightarrow ()	23			
03	a	13			
04	0	00			
05	x \rightarrow ()	23			
06	b	14			
07	If x = y	50			
08	ARC ∇	72			
09	1	01			
0a	\uparrow	27			
0b	\uparrow	27			
0c	1	01			
0d	-	34			
10	If x > y	53			
11	1	01			
12	9	11			
13	ROLL \uparrow	31			
14	X	36			
15	ROLL \uparrow	22			
16	Go To () ()	44			
17	0	00			
18	d	17			
19	0	00			
1a	ROLL \downarrow	31			
1b	b	14			
1c	\uparrow	27			
1d	2	02			
20	X	36			
21	1	01			
22	+	33			
23	\downarrow	25			
24	X	36			
25	y \rightarrow ()	40			
26	c	16			
27	a	13			
28	ln x	65			
29	\uparrow	27			
2a	b	14			
2b	\uparrow	27			
2c	2	02			
2d	X	36			
30	\downarrow	25			
31	X	36			
32	\downarrow	25			
33	e^x	74			
34	\uparrow	27			
35	c	16			
36	\div	35			

Step	Key	Code	Display		
			x	y	z
37	$y \rightarrow ()$	40			
38	c	16			
39	ENTER EXP.	26			
3a	1	01			
3b	0	00			
3c	CHG SIGN	32			
3d	If $x > y$	53			
40	6	06			
41	4	04			
42	b	14			
43	↑	27			
44	2	02			
45	÷	35			
46	↓	25			
47	↑	27			
48	Int x	64			
49	=	34			
4a	0	00			
4b	If $x = y$	50			
4c	5	05			
4d	6	06			
50	ROLL ↑	22			
51	CHG SIGN	32			
52	ACC +	60			
53	Go To $()()$	44			
54	5	05			
55	8	10			
56	ROLL ↑	22			
57	ACC +	60			
58	0	00			
59	↑	27			
5a	b	14			
5b	↑	27			
5c	1	01			
5d	+	33			
60	↓	25			
61	Go To $()()$	44			
62	0	00			
63	5	05			
64	RCL	61			
65	↑	27			
66	a	13			
67	↑	27			
68	2	02			
69	X	36			
6a	↑	56			
6b	\sqrt{x}	76			
6c	÷	35			
6d	↓	25			
70	X	36			
71	PRINT	45		enf x	
72	Go To $()()$	44			
73	0	00			
74	0	00			
75	End	46			

Para aplicar o critério de Pierce, devemos ter inicialmente os resíduos das observações. A partir da média aritmética das latitudes ao sul e ao norte do zenite, obtemos os resíduos das observações e os dois somatórios dos quadrados dos resíduos:

SUL		NORTE			
$\varphi_m = - 22^\circ 53' 50,578''$		$\varphi_m = - 22^\circ 53' 57,561''$			
	V	VV			
1)	- 0,848"	0,719	19)	1,749"	3,059
2)	0,582	0,339	20)	- 2,521	6,355
3)	- 9,348	87,385	21)	- 3,441	11,840
4)	5,162	26,646	22)	- 3,241	10,504
5)	- 2,318	5,373	23)	4,149	17,214
6)	4,702	22,109	24)	- 3,811	14,524
7)	4,302	18,507	25)	- 2,481	6,155
8)	- 0,748	0,560	26)	4,929	24,295
9)	- 1,888	3,565	27)	- 9,561	91,413
10)	2,292	5,253	28)	- 2,921	8,532
11)	0,352	0,124	29)	- 1,321	1,745
12)	- 1,008	1,016	30)	5,039	25,392
13)	0,882	0,778	31)	5,749	33,051
14)	- 0,338	0,114	32)	2,509	6,295
15)	- 5,238	27,437	33)	- 1,041	1,084
16)	- 1,298	1,685	34)	- 1,061	1,126
17)	1,862	3,467	35)	2,709	7,339
18)	2,902	8,422	36)	- 2,441	5,958
			37)	2,869	8,231
			38)	0,669	0,448
			39)	1,799	3,236
			40)	2,109	4,448
			41)	1,569	2,462
			42)	- 0,601	0,361
			43)	- 1,411	1,991

$$[vv] = 213,499$$

$$[vv] = 297,058$$

Com [vv] podemos obter os erros prováveis de cada observação, e a partir destes procedemos da seguinte maneira:

- 1) Se n é o número de observações propostas para rejeição, tentaremos primeiro a hipótese de uma observação duvidosa, ou $n = 1$;
- 2) A partir do erro médio de cada observação, damos um valor suposto a χ (definido no parágrafo 2.1);
- 3) Estando satisfeito os itens (1) e (2), passaremos a utilizar as fórmulas (5) e (8) (ver parágrafo 2.1) que, juntamente com suas auxiliares, nos leva a um novo valor de χ ;
- 4) Reaplicando este novo valor de χ nas equações em questão, obteremos uma nova aproximação para este valor;
- 5) A operação do item (4) foi repetida até que as duas primeiras casas decimais dos dois últimos χ obtidos se iguallassem;
- 6) Formar o produto $\chi\epsilon$ a partir do χ obtido pela última aproximação e do ϵ inicial. Qualquer resíduo que estiver fora do limite $\pm\chi\epsilon$ é eliminado;
- 7) Voltar ao item (1), fazendo agora $n = 2$.

Obs: Faz-se $n = 1, 2, 3, \dots$ até que não haja mais nenhum resíduo a ser eliminado.

Nos cálculos apresentados a seguir, procederemos rigorosamente de acordo com a seqüência acima numerada:

Para observações ao sul do zenite

- 1) $n = 1$;
- 2) $\chi = 3$;
- 3) $\psi\chi = 0,00270$ e $\chi = 2,06802$;
- 4) $\chi = 2,17187$;
- 5) $\chi = 2,15940$, $\chi = 2,16085$, e $\chi = 2,16070$;
- 6) $\chi\epsilon = 7,655''$ onde $\epsilon = 3,544''$, elimina a observação (3).

- 1) $n = 2$;
- 2) $\chi = 3$;
- 3) $\sqrt{\chi} = 0,00270$ e $\chi = 2,44565$;
- 4) $\chi = 2,46651$;
- 5) $\chi = 2,46565$;
- 6) $\chi E = 8,718''$ onde $E = 3,544''$, que não elimina mais nenhuma observação.

Para observações ao norte do zenite

- 1) $n = 1$;
- 2) $\chi = 3$;
- 3) $\sqrt{\chi} = 0,00270$ e $\chi = 2,23296$;
- 4) $\chi = 2,31587$;
- 5) $\chi = 2,30637$ e $\chi = 2,30739$;
- 6) $\chi E = 8,091''$ onde $E = 3,518''$, que elimina a observação (27).

Analogamente às observações ao sul do zenite, para $n = 2$ na redução ao norte do zenite, nenhuma observação foi eliminada.

O critério de Pierce não produziu o resultado desejado, que era o de eliminar um número suficiente de observações duvidosas. Talvez este fato tenha origem na não uniformidade dos resíduos das observações, pois todos os exemplos que tive a oportunidade de verificar, os resíduos eram apresentados de uma forma bem homogênea. Contudo, a teoria do critério de Pierce nada afirma sobre a homogeneidade ou a heterogeneidade dos resíduos a serem aplicados no critério. Não consideraremos mais este aspecto da questão, contudo, fica aqui a sugestão para uma interessante pesquisa de ordem teórica. Tentaremos contornar esta dificuldade de outra forma.

Para tanto, em primeiro lugar temos que, a formação das equações normais quando o número de equações de condição é muito grande, se torna muito trabalhosa e arriscada. Também poderíamos levar em consideração que somente as

duas observações eliminadas pelo critério de Pierce não foram suficientes para melhorar a média das latitudes.

Com o propósito de simplificar o número de equações de condição, e de deixar permanecer somente as observações que mais se aproximassem das médias das duas latitudes (sul e norte do zenite), foi aplicada a eliminação de observações que estivessem fora do limite.

LATITUDE MÉDIA \pm DESVIO PADRÃO.

Este método foi aplicado com o auxílio do programa 70801 -"Mean and Standard Deviation" para a calculadora eletrônica Hewlett-Packard 9100B.

Para observações ao sul do zenite

Primeira aproximação: 18 observações

$$\varphi_m = -22^\circ 53' 50,5783'' \quad s = 3,5438''$$

Nota: s é o desvio padrão;

$$\varphi_m + s = -22^\circ 53' 47,0345'' ; \varphi_m - s = -22^\circ 53' 54,1221'',$$

que elimina as observações (3), (4), (6), (7), e (15).

Segunda aproximação: 13 observações

$$\varphi_m = -22^\circ 53' 50,6108'' \quad s = 1,6176''$$

$$\varphi_m + s = -22^\circ 53' 48,9932'' ; \varphi_m - s = -22^\circ 53' 52,2284'',$$

que elimina as observações (5), (9), (10), (17), e (18).

É fácil se verificar que com somente duas aproximações, pode-se eliminar as observações que mais se afastam da média. Com isso também conseguimos um número razoável de observações para formarmos as equações normais; as observações ao norte do zenite receberão tratamento idêntico.

Para observações ao norte do zenite

Primeira aproximação: 25 observações

$$\varphi_m = -22^\circ 53' 57,5608'' \quad s = 3,5182''$$

$$\varphi_m + s = -22^\circ 53' 54,0426'' ; \varphi_m - s = -22^\circ 54' 01,0790'',$$

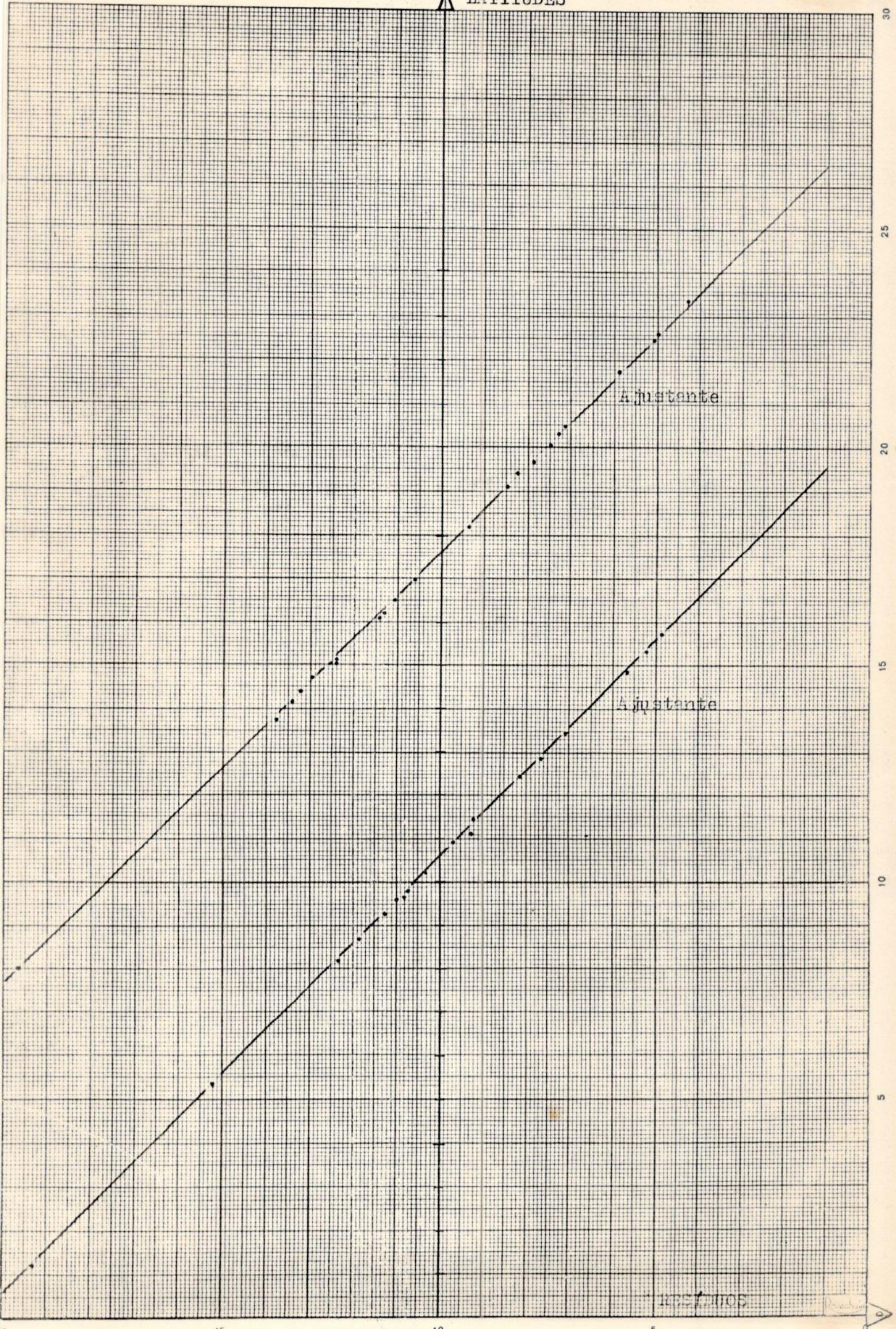
que elimina as observações (23), (24), (26), (27), (30), e (31).

Segunda aproximação: 19 observações

$$\ell_m = - 22^\circ 53' 57,2189'' \qquad s = 2,2230''$$

$\ell_m + s = - 22^\circ 53' 54,9960''$; $\ell_m - s = - 22^\circ 53' 59,4419''$,
que elimina as observações (21), (22), (28), (32), (35) ,
(37), e (40).

A seguir mostraremos um gráfico das latitudes obtidas pelas novas refrações contra os resíduos das observações.



Temos agora 20 observações que serão aproveitadas para a formação das equações de condição, quando tivermos 8 equações para as observações ao sul do zenite, e 12 para as observações ao norte do zenite.

A equação de condição a ser usada é a seguinte:

$$\Delta\ell - \Delta A \cdot \operatorname{tg} z - \Delta B \cdot \operatorname{tg}^3 z = \zeta + \delta - \ell = n.$$

Para facilitar a formação das equações de condição, foi preparada uma tabela com seus elementos necessários:

Nº da obs.	Estrela	z	tg z	tg ³ z	n
1	\varnothing Octantis	54,296833	1,3915	2,6942	10,27"
2	ϵ Phoenicis	22,991167	0,4243	0,0764	08,84
8	α Sculptoris	6,601556	0,1157	0,0016	10,17
11	δ Phoenicis	26,304667	0,4943	0,1208	09,07
12	α Eridani	34,463056	0,6863	0,3233	10,43
13	α Tucanae	37,488028	0,7670	0,4512	08,54
14	δ^1 Gruis	20,732278	0,3785	0,0542	09,76
16	ϵ P. Austr.	4,286556	0,0750	0,0004	10,68
19	α Pegasi	-37,950500	-0,7799	-0,4744	00,69
20	ϵ Aquarii	-16,701083	-0,3000	-0,0270	04,96
25	λ Andromedae	-69,173806	-2,6289	-18,1686	04,92
29	ϵ Piscium	-30,637778	-0,5923	-0,2078	03,76
33	\varnothing Ceti	-14,575500	-0,2600	-0,0176	03,48
34	48 Ceti	-1,132639	-0,0198	0	03,50
36	δ Piscium	-28,244750	-0,5372	-0,1550	04,88
38	γ Ceti	-6,821194	-0,1196	-0,0017	01,77
39	θ Piscium	-31,915472	-0,6228	-0,2416	00,64
41	α Trianguli	-52,330361	-1,2953	-2,1731	00,87
42	β Arietis	-43,563889	-0,9511	-0,8603	03,04
43	ν Ceti	-1,693250	-0,0296	0	03,85

A seguir veremos numeradas de 1 a 20, as equações de condição:

1	$\Delta\varphi - 1,3915 \Delta A - 2,6942 \Delta B - 10,27'' = 0$
2	$\Delta\varphi - 0,4243 \Delta A - 0,0764 \Delta B - 08,84 = 0$
3	$\Delta\varphi - 0,1157 \Delta A - 0,0016 \Delta B - 10,17 = 0$
4	$\Delta\varphi - 0,4943 \Delta A - 0,1208 \Delta B - 09,07 = 0$
5	$\Delta\varphi - 0,6863 \Delta A - 0,3233 \Delta B - 10,43 = 0$
6	$\Delta\varphi - 0,7670 \Delta A - 0,4512 \Delta B - 08,54 = 0$
7	$\Delta\varphi - 0,3785 \Delta A - 0,0542 \Delta B - 09,76 = 0$
8	$\Delta\varphi - 0,0750 \Delta A - 0,0004 \Delta B - 10,68 = 0$
9	$\Delta\varphi + 0,7799 \Delta A + 0,4744 \Delta B - 00,69 = 0$
10	$\Delta\varphi + 0,3000 \Delta A + 0,0270 \Delta B - 04,96 = 0$
11	$\Delta\varphi + 2,6289 \Delta A + 18,1686 \Delta B - 04,92 = 0$
12	$\Delta\varphi + 0,5923 \Delta A + 0,2078 \Delta B - 03,76 = 0$
13	$\Delta\varphi + 0,2600 \Delta A + 0,0176 \Delta B - 03,48 = 0$
14	$\Delta\varphi + 0,0198 \Delta A + 0 \Delta B - 03,50 = 0$
15	$\Delta\varphi + 0,5372 \Delta A + 0,1550 \Delta B - 04,88 = 0$
16	$\Delta\varphi + 0,1196 \Delta A + 0,0017 \Delta B - 01,77 = 0$
17	$\Delta\varphi + 0,6228 \Delta A + 0,2416 \Delta B - 00,64 = 0$
18	$\Delta\varphi + 1,2953 \Delta A + 2,1731 \Delta B - 00,87 = 0$
19	$\Delta\varphi + 0,9511 \Delta A + 0,8603 \Delta B - 03,04 = 0$
20	$\Delta\varphi + 0,0296 \Delta A + 0 \Delta B - 03,85 = 0$

Tendo-se 2 grupos de equações de condição, isto é, um para observações ao sul e outro para observações ao norte do zenite, formaremos as equações normais da seguinte maneira:

- 1) Multiplica-se toda a primeira equação de condição pelo coeficiente de $\Delta\varphi$;
- 2) Repete-se o processo de (1) para todas as outras equações, e faz-se a soma de todas as equações obtidas. Com isso, temos a primeira equação normal;
- 3) Multiplica-se toda a primeira equação de condição pelo coeficiente de ΔA ;
- 4) Analogamente para as outras equações, e fazendo-se a soma, obteremos a segunda equação normal;

5) Finalmente, e analogamente para o coeficiente de ΔB , obteremos a terceira e última equação normal.

A seguir, mostraremos, como exemplo, a formação de somente uma equação normal:

$$\begin{array}{rcccc}
 1,3915 \Delta \ell & - & 1,9363 \Delta A & - & 3,7490 \Delta B & - & 14,2907'' = 0 \\
 0,4243 & & 0,1800 & & 0,0324 & & 3,7508 \\
 0,1157 & & 0,0134 & & 0,0002 & & 1,1767 \\
 0,4943 & & 0,2443 & & 0,0597 & & 4,4833 \\
 0,6863 & & 0,4710 & & 0,2219 & & 7,1581 \\
 0,7670 & & 0,5883 & & 0,3461 & & 6,5502 \\
 0,3785 & & 0,1433 & & 0,0205 & & 3,6942 \\
 0,0750 & & 0,0056 & & 0 & & 0,8010
 \end{array}$$

cuja soma dos coeficientes de $\Delta \ell$, ΔA , e ΔB nos fornece a segunda equação normal para as observações ao sul do zenite.

Procedendo analogamente e seguindo os itens acima numerados, teremos as equações normais:

Para observações ao sul do zenite

$$\begin{array}{l}
 1) \quad 8 \quad \Delta \ell - 4,3326 \Delta A - 3,7221 \Delta B - 77,76'' = 0 \\
 2) \quad 4,3326 \Delta \ell - 3,5822 \Delta A - 4,4298 \Delta B - 41,9050'' = 0 \\
 3) \quad 3,7221 \Delta \ell - 4,4298 \Delta A - 7,5901 \Delta B - 37,2153 = 0
 \end{array}$$

Para observações ao norte do zenite

$$\begin{array}{l}
 1) \quad 12 \quad \Delta \ell + 8,1365 \Delta A + 22,3271 \Delta B - 36,36'' = 0 \\
 2) \quad 8,1365 \Delta \ell + 11,3022 \Delta A + 52,1362 \Delta B - 25,5254'' = 0 \\
 3) \quad 22,3271 \Delta \ell + 52,1362 \Delta A + 335,9122 \Delta B - 96,1131 = 0
 \end{array}$$

Para reduzir estas equações, podemos usar a regra de Cramer ou o método de Gauss. O primeiro nos fornece os valores das 3 incógnitas e estas quando substituídas nas equações de condição nos fornecem os resíduos das observações. Com os resíduos podemos obter os erros médio e provável de cada observação e os erros médio e provável da média

aritmética das observações.

Contudo, a regra de Cramer não nos fornece os erros independentemente para $\Delta\ell$, ΔA , e ΔB ; e neste fato está a vantagem do método de Gauss que, apesar de mais trabalhoso, nos fornece os erros de $\Delta\ell$, ΔA , e ΔB , independentemente, bem como os respectivos pesos (Chauvenet, 1863).

Primeiramente, veremos os resultados obtidos pela aplicação da regra de Cramer:

Para observações ao sul do zenite

$$\Delta\ell = 10,559''$$

$$\Delta A = 02,634''$$

$$\Delta B = -01,262''$$

Os resíduos das observações, com os respectivos quadrados, são os seguintes:

	v	vv
1)	0,024"	0,001
2)	0,698	0,487
3)	0,086	0,007
4)	0,339	0,115
5)	-1,271	1,615
6)	0,568	0,323
7)	-0,130	0,017
8)	-0,318	0,101

$$[vv] = 2,666 ,$$

onde por aplicação direta da fórmula (12), obtemos o erro provável da média aritmética das observações, e podemos escrever a latitude para as observações ao sul do zenite:

$$\ell_s = -22^\circ 54' + \Delta\ell = -22^\circ 53' 49,441'' \pm 00,174''$$

Para observações ao norte do zenite

$$\Delta\ell = 03,909''$$

$$\Delta A = -02,383''$$

$$\Delta B = -00,396''$$

Os resíduos e respectivos quadrados, são os seguintes:

	v	vv
9)	1,548"	2,397
10)-	1,755	3,081
11)-	0,081	0,007
12)-	1,180	1,393
13)-	0,184	0,034
14)	0,362	0,131
15)-	2,190	4,795
16)	1,855	3,440
17)	1,881	3,536
18)	0,813	0,661
19)-	1,057	1,117
20)-	0,012	0,000

$$[vv] = 20,592 ,$$

onde teremos:

$$\varphi_n = - 22^\circ 54' + \Delta\varphi = - 22^\circ 53' 56,091'' \pm 00,295''$$

LATITUDE MÉDIA FINAL

$$- 22^\circ 53' 52,766'' \pm 00,171''$$

Como um exemplo rápido de como se aplica o método de Gauss, mostraremos a maneira pela qual se reduz 3 equações a 3 incógnitas obtendo os pesos de cada uma das incógnitas. Seja

$$1) ax + by + cz + d = 0 ;$$

$$2) ex + fy + gz + h = 0 ;$$

$$3) ix + jy + kz + l = 0 .$$

O valor de x é obtido por (1) a partir da substituição de y e z das outras duas equações. O peso de x será o seu coeficiente, sem que seja feita nenhuma simplificação.

Analogamente, os valores de y e z , e seus pesos são obtidos, respectivamente, por (2) e (3).

Os valores de $\Delta\varphi$, ΔA , e ΔB , para os dois grupos de equações normais, são os mesmos já obtidos, e os pesos foram obtidos da seguinte forma:

Para observações ao sul do zenite

- 1) $1,49313\Delta\varrho - 15,76640 = 0$; (peso de $\Delta\varrho$) = 1,49313 ;
 2) $-0,24106\Delta A + 0,63485 = 0$; (peso de ΔA) = 0,24106 ;
 3) $-1,14284\Delta B - 1,44277 = 0$; (peso de ΔB) = 1,14284 .

Para se obter os erros individuais de $\Delta\varrho$, ΔA , e ΔB , basta dividirmos o erro médio de cada observação pelo peso de cada uma das incógnitas:

$$\bar{\epsilon} = 0,730''$$

$\Delta\varrho$	ΔA	ΔB
$\bar{\epsilon} = 0,597''$	$\bar{\epsilon} = 1,487''$	$\bar{\epsilon} = 0,683''$
$r_0 = 0,142$	$r_0 = 0,355$	$r_0 = 0,163$

Obteremos então:

$$\varrho_s = -22^\circ 53' 49,441'' \pm 00,142'' ;$$

$$\Delta A = 02,634'' \pm 00,355''$$

$$\Delta B = -01,262'' \pm 00,163'' .$$

Para observações ao norte do zenite

- 1) $3,71825\Delta\varrho - 14,53445 = 0$; (peso de $\Delta\varrho$) = 3,71825 ;
 2) $1,13537\Delta A + 2,70522 = 0$; (peso de ΔA) = 1,13537 ;
 3) $57,76801\Delta B - 22,88658 = 0$; (peso de ΔB) = 57,76801 .

Analogamente às observações ao sul do zenite, teremos:

$$\bar{\epsilon} = 1,513''$$

$\Delta\varrho$	ΔA	ΔB
$\bar{\epsilon} = 0,784''$	$\bar{\epsilon} = 1,420''$	$\bar{\epsilon} = 0,199''$
$r_0 = 0,153$	$r_0 = 0,276$	$r_0 = 0,039$

Obteremos então:

$$\varrho_n = -22^\circ 53' 56,091'' \pm 00,153'' ;$$

$$\Delta A = -02,383'' \pm 00,276''$$

$$; \quad \Delta B = 00,396'' \pm 00,039'' .$$

Finalmente, obtemos a latitude média final com o erro provável da média aritmética das observações, que foi obtido a partir de

$$r_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(0,142)^2 + (0,153)^2} = 0,104''$$

LATITUDE MÉDIA FINAL

$$- 22^\circ 53' 52,766'' \pm 00,104''$$

Aplicando-se a equação

$$\Delta R = \Delta A \cdot \text{tg } z + \Delta B \cdot \text{tg}^3 z$$

para cada distância zenital observada, obteremos os diversos ΔR , e a partir destes formaremos um gráfico onde estarão plotadas as distâncias zenitais observadas contra os ΔR .

1) 0,27"	2) 1,02"	3) 0,30"	4) 1,15"
5) 1,40	6) 1,45	7) 0,93	8) 0,20
9) 1,67	10) 0,70	11) - 0,93	12) 1,33
13) 0,61	14) 0,05	15) 1,22	16) 0,28
17) 1,39	18) 2,23	19) 1,93	20) 0,07

z

$$\operatorname{tg} z = \sqrt{\frac{\Delta A}{3 \Delta B}}$$

+ (máximo)

$$\Delta R = \Delta A \cdot \operatorname{tg} z + \Delta B \cdot \operatorname{tg}^3 z$$

70°
60°
50°
40°
30°
20°
10°
Norte
Sur
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°

+ (máximo)

III - ANÁLISE DOS RESULTADOS

O resultado preliminar da latitude, obtido na página (23), e cuja redução foi realizada sem que se houvesse utilizado nenhum método, não merece crédito, mesmo sendo bom o resultado do erro provável da média aritmética das observações.

As latitudes posteriormente obtidas com a aplicação de equações de condição, foram as da página (41) e página (43). Entretanto, não são exatamente equivalentes, dado que seus erros diferem: na primeira está contido o erro de ΔR , e na segunda, com a aplicação do método de Gauss, obteve-se os pesos das incógnitas, que determinaram os erros independentemente.

Para tanto, a determinação da latitude de um lugar com aplicação de equações de condição, satisfaz aos propósitos da Astronomia, e outras ciências. Podemos também verificar o comportamento da refração no gráfico apresentado, e com isso alertarmo-nos de quanto a refração pode desviar o valor de uma distância zenital verdadeira da observada. Muito importante também a aplicação da fórmula de Laplace para a obtenção de refrações segundo distâncias zenitais observadas, pressão, e temperatura, como já foi ressaltado na página (25). Com o auxílio da calculadora eletrônica Hewlett-Packard 9100B e da programação apresentada na página (25), o cálculo de refrações torna-se fácil, rápido e preciso.

As tabelas, como já vimos, têm pouca precisão; elas só devem ser usadas em casos de não se possuir uma calculadora, ou de ser suficiente um resultado aproximado; podemos citar o caso das aulas experimentais.

Um fato curioso, e que me alertou durante a redução das observações, foi a diferença das médias entre as latitudes obtidas por observações ao sul e às obtidas por observações ao norte do zenite. Este fato fez com que eu reduzisse as observações independentemente para sul e norte do zenite, como pode ser visto durante o desenvolvimento deste

projeto. Não sei o motivo pelo qual se sucede esta diferença, mas como isto me despertou grande interesse, pretendo pesquisar brevemente esse aspecto da questão.

Os cálculos realizados, incluindo as programações, fizeram-me dispor de uma média de 44 horas de utilização da calculadora eletrônica Hewlett-Packard 9100B. Sem a utilização desta, seria impossível obter resultados tão precisos num prazo razoavelmente pequeno.

Particularmente, o resultado final das reduções satisfaz plenamente o meu propósito, que era o de obter uma latitude tão livre dos efeitos da refração quanto possível.

BIBLIOGRAFIA

Andoyer, H., 1909, Cours D' Astronomie, Vol II, Librairie
Scientifique A. Hermann & Fils, Paris

Anuário do Observatório de S. Paulo, 1971, Instituto Astronô-
mico e Geofísico da Universidade de São Paulo, São Paulo

Apparent Places of Fundamental Stars, 1969, Astronomisches
Rechen - Institut, Heidelberg

Chauvenet, W., 1863, A Manual of Spherical and Pratical
Astronomy, Vol I, J. B. Lippincott & CO., Philadelphia

Danjon, A., 1959, Astronomie Générale, J. & R. Sennac Edi-
teurs, Paris

Dwight, H. B., 1960, Tables of Integrals and other Mathema-
tical Data, The Macmillan Company, New York

Kamp, P., 1967, Principles of Astrometry, W. H. Freeman and
Company, San Francisco

Merriman, M., 1911, Method of Least Squares, John Wiley &
Sons, Inc., New York
