

VISTO
Em _____ / _____ / 19 71



AJUSTAMENTO DA RELAÇÃO
MASSA - LUMINOSIDADE ATRAVÉS
DE CURVAS INTEGRAIS UTILI-
ZANDO O PROCESSO DAS ISÓCLI-
NAS.

Autor: Tyrone Vieira de Gouvêa Theodoro da Silva

Orientador: José Augusto Buarque de Nazareth

Í N D I C E

Introdução.....	pág. 1
Massa.....	pág. 4
Raio.....	pág. 15
Luminosidade.....	pág. 22
Introdução Matemática.....	pág. 31
Relação Massa-Luminosidade.....	pág. 41
Aspectos Analíticos do Desenvolvimento das Equações de Estrutura Estelar que Relacionam Massa e Lumino- sidade.....	pág. 47
Projeto.....	pág. 52
Bibliografia.....	pág. 54

-x-x-x-x-x-x-x-x-

I N T R O D U Ç Ã O

O objetivo deste trabalho é justamente o de tentar por caminhos ainda inexplorados, creio eu, fazer com que as idéias fundamentais e elementares da Estrutura Estelar sejam postas em acôrdo com certos tipos de desenvolvimento matemático. Realmente o que acontece é que tais desenvolvimentos também são até certo ponto um pouco elementares, dado que para o nível científico e a mentalidade ainda não madura (em têrmos científicos), nos obriga muitas vêzes a lançar mão de certos trabalhos já realizados.

Por exemplo, um dos grandes sacrifícios se faz sentir no que concerne à parte instrumental. Realmente me decidi a uma parte um pouco teórica. Entretanto aqui surge uma pergunta: qual de nós não gostaria de que para melhor firmeza nas especulações teóricas, pudessemos ir obtendo valores na prática que com aproximações e reduções nos desse uma idéia mais ou menos exata das afirmações teóricas?

O fato é que até mesmo os grandes observatórios se ressentem ainda de certas técnicas mais aprimoradas para o perfeito conhecimento de certos parâmetros estelares.

E é justamente neste ponto onde o meu trabalho necessita de uma ajuda em têrmos experimentais. Até que ponto posso eu ir tirando conclusões teóricas sem saber ao certo se as conclusões sôbre as quais se apoiarão as futuras afirmativas, estarão ou não em pleno acôrdo com o que, sem sombra de dúvidas, acontece no Universo?

É neste ponto que começmos a fazer seleções e mais seleções para com isso afastar complicações muito aquem de ainda se fêm resolvidas, dado o estado embrionário de nossa pesquisa experimental.

Por exemplo: neste trabalho nos envolveremos com três parâmetros da Estrutura Estelar; ou seja, para uma dada estrêla consideraremos a sua massa, o seu raio e a sua luminosidade.

Quanto à estrêla é bom que se diga que está em estado estacionário como também em equilíbrio hidrostático com a ime-

em aplicação de...

tria esférica.

A Estrutura Estelar trata com os resultados dos parâmetros acima obtidos experimentalmente.

Farei agora um comentário sobre a estética do trabalho.

Na capítulo referente a massa apresento noções à respeito da obtenção deste parâmetro. Podemos ainda acrescentar que os processos que envolvem o seu cálculo ainda não estão bem claros; ou melhor dizendo, se encontram em estado bem primitivo. Os processos mais conhecidos são para estrelas binárias. Ao final deste há uma tábua contendo as massas recolhidas em toda a bibliografia disponível.

No capítulo que fala sobre raio apresento noções à respeito da obtenção deste parâmetro e também uma pequena tábua contendo raios estelares recolhidos na bibliografia disponível.

Já para a luminosidade lançamos mão da Fotometria quanto a avaliação do brilho absoluto, aparente e etc., e neste capítulo faço um breve comentário sobre a aparelhagem fotométrica mais utilizada atualmente. Não apresento nenhuma tábua, contendo luminosidades uma vez que existe um grande acervo bibliográfico para este parâmetro. A melhor fonte são os catálogos, onde o número de magnitudes já bem determinadas é enorme.

Há também um capítulo referente à parte matemática utilizada na confecção do Projeto. Isto tem por finalidade uma recorência rápida e sintetizada, o que em caso contrário obrigaria o leitor a uma busca bibliográfica enfadonha.

Como preparação às conclusões sobre a relação massa-luminosidade há um capítulo no qual resumo o que há de mais importante sobre tal relação bem como os passos dados na sua elaboração.

Em seguida é apresentada as equações fundamentais da Estrutura Estelar em harmonia com o desenvolvimento matemático proposto. Isto, sobre o ponto de vista teórico, se constitui em parte de grande importância no Projeto, porquanto obtenho uma relação massa-luminosidade escrita diferente das formas tradicionais. Tal rela-

ção foi obtida somente com o desenvolvimento matemático apresentado neste trabalho.

O último assunto a ser tratado é a proposição da pesquisa, ou em outras palavras, o Projeto propriamente dito.

Ao final há uma pequena bibliografia utilizada como fonte de consulta na elaboração do presente trabalho.

Os objetivos finais de todos os estudos feitos em Estrutura Estelar são acima de tudo mostrar o completo desenvolvimento das variáveis físicas, tais como: densidade, temperatura, pressão, volume e etc., paralelamente com a composição química, observada sempre em relação à configuração total e nas últimas análises introduzindo-se a variável tempo.

M A S S A

O único método usado para a determinação direta de massa de um corpo celeste é a medida do efeito que este corpo causa em outro. Contudo, do ponto de vista prático, podemos determinar boas massas para as binárias.

Em termos concretos a massa só está determinada com segurança para o Sol e para algumas estrelas binárias.

O grande problema na determinação da massa de binárias, problema este a ser contornado, é que os elementos da órbita vizinhos, não proporcionam todos os dados necessários para a determinação das massas. É bem verdade que ainda hoje usamos a 3ª lei de Kepler quando tratamos de Mecânica aplicada em órbitas. Esta lei relaciona o período dos dois astros com as suas respectivas distâncias médias em relação ao Sol.

Ora, já sabemos que a força de atração gravitacional entre duas quaisquer massas é dada pela equação:

$$F = G \frac{M M_1}{d^2}, \quad (1)$$

onde: G é a constante de gravitação universal; M e M_1 as massas em questão; d é a distância que as separa.

Se considerarmos M_1 como sendo a massa que orbita em torno da outra, podemos acrescentar que se o sistema se mantém com uma órbita estável é em virtude da força centrífuga dada pela equação:

$$F_{CF} = M_1 \omega^2 d, \quad (2)$$

sendo ω a velocidade angular.

Sabendo-se que:

$$\omega = \frac{2\pi}{P}$$

a equação (2) se transforma vantajosamente em:

$$F_{CF} = M_1 \frac{4\pi^2}{P^2} d, \quad (3)$$

onde P é o período de revolução.

As equações (1) e (3) quando comparadas dão:

$$G M P^2 = 4\pi^2 d^3, \quad (4)$$

e levando-se em conta que G, M e $4\pi^2$ são constantes, a equação (4) sen-

do aplicada para duas massas que giram com órbita estável, dará:

$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{d_1^3}{d_2^3}, \quad (5)$$

e se levarmos em conta que o Sol atrai uma massa assim como esta também o atrai, o termo $\frac{GM}{d^2}$ não dará rigorosamente a atração por unidade de massa. Para isso temos então que incluir a correção, e sendo assim a equação (5) toma um novo aspecto:

$$\frac{(M + M_1) P_1^2}{(M + M_2) P_2^2} = \frac{d_1^3}{d_2^3}; \quad (6)$$

É evidente que se tivermos tratando de dois planetas e do Sol a correção é negligenciada, pois a massa do Sol (M) em relação à dos planetas, faz com que as massas destes sejam desprezíveis. Entretanto esta correção deve estar presente sempre que tratamos de estrelas.

Escolhendo-se previamente as unidades, a soma das duas massas de uma binária pode perfeitamente ser calculada através da equação (6).

O semi-eixo maior das estrelas binárias visuais é conhecido em termos de segundos de arco. Podemos obter uma medida linear se dividimo-lo pela paralaxe. Esta medida será dada em Unidade Astronômica.

A paralaxe de um certo número de binárias visuais é conhecida com um certo grau considerável de precisão. Se tomarmos as massas m_1 e m_2 como múltiplas da massa do Sol, teremos:

$$m_1 + m_2 = \frac{a^3}{\pi^3 \cdot P^2}, \quad (7)$$

onde π é a paralaxe do sistema, P o período e a o semi-eixo maior da órbita. Nesta equação usamos como unidade de massa a massa do Sol, como unidade de comprimento a Unidade Astronômica e como unidade de tempo o ano sideral.

Em se tratando de binárias espectroscópicas, não conhecemos o valor do semi-eixo maior para todas elas, mas sim a função $a \cdot \sin i$ onde i é a inclinação da órbita.

Muitas vezes o conhecimento da massa de uma binária espectroscópica fica na dependência do conhecimento do valor de i . Nes

te caso então determinamos um valor médio da massa de um número grande de sistemas com considerável precisão. É bom acrescentar que os métodos diferem para os dois casos seguintes:

1º) Quando ambos os espectros são observados.

2º) Quando somente um espectro é observado.

A equação (7) se transforma em:

$$(m + m_1) = \frac{4\pi^2}{k^2} \cdot \frac{(a + a_1)^3}{P^2}, \quad (8)$$

onde π se refere á uma circunferência de raio unitário e não é para-laxe; k é a constante gaussiana, cujo valor é dado por $\log 8,23558$; a e a_1 são os semi-eixos maiores das órbitas da primária e da secundária, respectivamente; P é o período de revolução expresso em dias solares médios.

Levando-se em consideração que a não é conhecido, mas sim a função $a \cdot \sin i$, poderemos multiplicar ambos os membros da equação (8) por $\sin^3 i$. Sendo $a \cdot \sin i$ expresso em quilômetros podemos dividir o seu valor pelo da Unidade Astronômica dada em Kilômetros também. O valor numérico de $4\pi^2/k^2 A^3$ é aproximadamente $4/10^{20}$. Portanto a equação (8) será:

$$(m + m_1) \sin^3 i = \frac{4}{10^{20}} \cdot \frac{(a \sin i + a_1 \sin i)^3}{P^2}, \quad (9)$$

o valor de $a \cdot \sin i$ pode ser obtido através da equação:

$$a \sin i = (4,13833) K P \sqrt{1 - e^2}, \quad (10)$$

onde o número entre parêntesis é o logaritmo do quociente:

$$\frac{86.400}{2\pi},$$

P é o período de revolução e e a excentricidade.

K é definido por:

$$K = \frac{\mu a \sin i}{\sqrt{1 - e^2}},$$

lembrando que K é a metade da amplitude da curva de velocidade, nos mé

todos de determinação da órbita de binárias espectroscópicas.

De acôrdo com a equação(10), a equação (9) se transforma em:

$$(m + m_1) \operatorname{sen}^3 i = [3,01642 - 10] (K + K_1)^3 P (1 - e^2)^{3/2}, \quad (11)$$

sendo logarítmos os números entre colchetes.

A grande vantagem da equação (11) é a sua independência em relação à paralaxe e à distância do sistema.

Ora, se tivermos em acôrdo com o 1º caso referido na pág.6, e se ambos os espectros são medidos em correspondência com as curvas de velocidades, obtemos imediatamente as massas relativas das duas componentes através da relação:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{K_1}{K} \quad (12)$$

Para o cálculo das massas das componentes separadamente, usamos a equação:

$$\begin{cases} m \operatorname{sen}^3 i = [3,01642 - 10] (K + K_1)^2 K_1 P (1 - e^2)^{3/2} \\ m_1 \operatorname{sen}^3 i = [3,01642 - 10] (K + K_1)^2 K P (1 - e^2)^{3/2} \end{cases} \quad (13)$$

Agora se tivermos em acôrdo com o 2º caso referido na pág.6, podemos aplicar a equação:

$$\frac{m_1^3}{(m + m_1)^2} \operatorname{sen}^3 i = \frac{4}{10^{20}} \cdot \frac{(a \operatorname{sen} i)^3}{P^2}, \quad (14)$$

onde a.sen i e m se referem à componente a qual o espectro é dado. A equação (14) poderá ser escrita de forma análoga à equação (11). Teremos então:

$$\frac{m_1^3 \operatorname{sen}^3 i}{(m + m_1)^2} = [3,01642 - 10] K^3 P (1 - e^2)^{3/2}. \quad (15)$$

Convém lembrar que K é determinado com boa precisão através de curvas de velocidades. Suas noções fundamentais estão no *Astrophysical Journal*, 71-336, de 1930.

É bem verdade que nas equações (11) e (15) é necessário o conhecimento de valores para sen³i. Mostra-se que para um número muito grande de sistemas binários cujos planos orbitais são dis

tribuídos ao acaso a inclinação média seria $57,3^\circ$, de acordo com a equação :

$$l_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} i \sin i \, di \, d\phi = 1$$

O valor médio de $\sin^3 i$ não seria $\sin^3 57,3^\circ = 0,65$, mas sim aproximadamente 0,59 de acordo com a equação:

$$\sin^3 i_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin^4 i \, di \, d\phi = \frac{3}{16\pi} = 0,59''$$

Apresentamos em seguida uma tábua contendo $m \cdot \sin^3 i$ e $m_1 \cdot \sin^3 i$ para as estrelas binárias espectroscópicas. O sinal asterístico indica que as binárias são eclipsantes.

—MASSES: SPECTROSCOPIC BINARIES

Star	Spec.	m sin ³ i	m ₁ sin ³ i	Σ Spec. B.	
				m	m ₁
+57°28	B5	113.5	44.9		
* β Cen 46	A0	17.57	16.37		
* TV Cas	Bv	1.83	1.6
* Cas	A5	1.35	1.34		
* And	B3	1.50	1.10		
Boss 373	F5	1.16	1.06		
Ari	A0	0.14	0.13		
* Tri. br	G0	1.12	1.12		
* Tri. fr	F4	0.91	0.86		
+59°009	B5	18.88	9.17		
Boss 816	B8	2.87	2.76		
* Per	B1	5.42	3.79		
A Per	F5p	1.01	0.88		
* +33°785	B3	4.86	4.29		
Boss 1001	B9	0.56	0.55		
+7°676	B5	7.0	3.7		
Boss 1213	B9	2.5	2.2		
* TT Aur	B5	6.7	5.3		
* Aur	G0	1.19	0.94		
Σ 674A	F5	1.40	1.33		
Boss 1275	A0	1.71	1.50		
* * Ori	B1	11.2	10.6		
* Ori	B2	5.53	4.19		
Boss 1457	A0	0.63	0.44		
Boss 1464	B2	10.3	3.9		
* β Aur	A0p	2.88	2.34
-3°1413	B5	6.2	4.1		
* WW Aur	A0	2.2	1.9		
+6°1309	B0p	75.5	63.3		
20 CMa	O*	82.2	24.3		
Boss 1906	B8	4.3	2.3		
Boss 1945	F5	1.05	0.85		
* α Gem C	M1*	0.63	0.57		
+34°1657	F0	1.53	1.32		
+20°2153	A0	1.39	1.35		
Boss 2484	A0	1.48	1.27		
* 8 Ant	F0	0.52	0.29		
* Leo	F5	1.30	1.12		
* W UMa	G0	0.67	0.48		
Boss 2830	F2, A3	0.28	0.24		
* UMa	A0	3.50	0.60		
Boss 2987	A2	0.12	0.08		
Boss 3138	B3	8.2	4.4		
* Cru	A5	0.74	0.61		
+74°493	G5	0.80	0.70		
Boss 3323	A5	4.62	2.37		
Boss 3354	A0	2.47	2.08		
* R8 CVn	F5	1.79	1.06		
* UMa	A0p	1.70	1.62		
* Vir	B2	9.5	5.8		
Boss 3555	F5	2.24	1.92		
Boss 3635	F5	1.56	1.29		
39 Boo fr	F5	1.57	1.08		

Star	Spc.	$m \sin^2 i$	$m_1 \sin^2 i$	m	m_1
* UCrb	B8	4.27	68
† CrB br.	B8	13.88	13.06		
β Sco	B1	13.0	5.3		
* CrB br.	G0	0.98	0.67		
+17°3053	A0	2.19	1.35		
Boss 4247	F2	1.21	0.79		
* Her	A0	1.6	1.0		
* U Oph	B8	8.31	4.66
* u Her	B3	7.3	2.9		
* TX Her	A5	2.04	1.77
Boss 4423	F0	0.88	0.82		
+14°3329	A3p	1.82	1.62		
* Z Her	F5p	1.8	1.3		
Boss 4602	F5	0.43	0.41		
Boss 4622	F0	1.04	1.01		
Boss 4643	A2	1.72	1.18		
* RX Her	A0	2.08	1.85		
+55°1276	A3	1.97	1.87		
+49°2871	F5, A	1.48	1.47		
Boss 4788	A0	0.96	0.90		
-10.4026	B5	7.16	4.43		
+16.3758	F5	1.22	1.26		
* RS Vul	B8	5.26	1.64
U Sag	B9	6.7	2.0
+37°3413	A0	1.15	0.84		
* Z Vul	B3	5.25	2.37
Boss 4947	A0	0.91	0.65		
* * Aql	B3	5.5	4.4		
Boss 5026	F5	1.46	1.44		
+35°3970	B0	13.8	12.90		
* Aql	A0	0.52	0.38		
Boss 5173	A2	2.27	2.06		
+45°3139	B1	2.90	2.55		
* Y Cyg	B2	17.4	17.6
Boss 5375	B3	1.79	1.7		
+32°4134	A0	1.87	1.08		
+27°4107	F0	0.97	0.77		
Boss 5575	A3	1.62	1.54		
Boss 5579	A0	0.96	0.95		
Boss 5591	A5	1.19	1.17		
Boss 5629	B3	20.8	13.6		
* RT Lac	G5	1.9	1.0		
Boss 5683	F5	0.65	0.61		
Boss 5764	B5	0.87	0.71		
Boss 5834	B3	6.01	3.87		
Boss 5846	G0	1.47	1.38		
* +64°1717	B3	11.4	9.8		
+88°2546	B3	4.8	2.9		
Boss 6142	B0	18.5	12.7		
Boss 6148	F5	1.70	1.67		
Boss 4745, 46(c) Dra	A0	0.12	0.10	(perhaps the least massive star known)	

Na tabela anterior podemos notar que dois pares, um na classe B0-B2 (+57° 28) e o outro na classe B3-B5 (+6° 1309), possuem massas extremamente grandes e portanto não se pode usá-las para determinar valores médios de massas para estrêlas de outras classes. Os valores médios são dados através da tábua abaixo, onde tomamos os valores médios de massas para binárias espectroscópicas eclipsantes e não eclipsantes.

MEAN MASS VALUES FOR SPECTROSCOPIC BINARY STARS

Class	Noneclipsing				Eclipsing			
	N	$m \sin^2 i$	$m_1 \sin^2 i$	m_1/m	N	$m \sin^2 i$	$m_1 \sin^2 i$	m_1/m
O	1	32.2	24.3	0.75
B0-B2	10	10.79	8.09	0.75	1	17.4	17.6	1.01
B3-B5	16	7.44	5.77	0.64	1	5.25	2.37	0.45
B8-A3	27	2.08	1.61	0.77	8	3.75	2.12	0.57
A5-F4	11	1.33	1.04	0.78	2	1.28	1.03	0.80
F5-G2	18	1.26	1.16	0.92	3	1.24	1.15	0.93
G5	1	0.80	0.70	0.88	1	1.9	1.0	0.53
M ₁	1	0.63	0.57	0.93

Nas equações anteriores, além da possibilidade de encontrar a soma das massas se a paralaxe é conhecida através de um outro processo (veja equação 7), a equação (6) pode nos dar a razão entre as massas. Ora, se ambas as possibilidades pode ser realizada, é claro que a soma e a razão juntas fornecem a massa individual. Isto é possível se a revolução do par pode ser observada em relação às estrelas fixas, mais distantes e óticamente próximas, no mesmo campo de visão. São raras as binárias que, suficientemente perto, podem ser separadas visualmente. Entretanto quando a separação é menor que $1/10$ de segundo de arco o problema torna-se praticamente impossível. Mas existem dados valerosos que são obtidos através da observação do espalhamento das linhas espectrais, já que cada par por sua vez avança e recua. É importantíssimo acrescentar que a grande maioria das estrelas estão compreendidas em termos de massa, entre $1/5$ e 5 vezes a massa do Sol.

Nos tempos atuais o estudo de estrelas binárias visuais tem ocupado a atenção de alguns estudiosos do assunto, tais como S. W. Burnham, R. G. Aitken, G. van Biesbreeck e O. J. Eggen, que são em observatórios do Hemisfério Norte os que mais contribuem no que concerne ao aumento de informações.

Existem atualmente cerca de 23.000 estrelas binárias catalogadas. É claro que os dados das massas não acompanham o referido número, entretanto novos processos vão surgindo no tocante à determinação de massa de binárias. São processos cada vez mais complexos e acurados, entretanto não são impossíveis de serem operados. E sendo assim temos um pouco de tranquilidade, pois não longe estará o dia em que teremos um grande acervo em termos de massa de binárias, principalmente porque ao estudarmos uma binária já levamos na algibeira a lei de Kepler (de fácil aplicação).

O estudo das binárias também se faz importante em virtude da grande quantidade existente. Aitken verificou que até a magnitude de visual 9,0 em cada 19 estrelas uma é binária. No Hemisfério Sul, W. H. van den Bos (o mais importante contribuinte no nosso hemisfério) achou que a taxa era de uma em cada 17; sendo, portanto, o nosso hemisfério mais abundante em binárias.

Justifico então, o fato da grande atenção dada as binárias. Estas justificativas correspondem aos dois últimos parágrafos. Devo acrescentar ainda que no momento oportuno darei a importância de tais resultados no que se refere à parte teórica do meu trabalho. Por ora nos restringiremos a admitir os resultados, que aliás são, sem embargo, de confiança.

Apresento agora uma tábua contendo as massas de estrelas já determinadas. É importante observar que tais massas foram recolhidas em todos os livros e revistas de que dispõe a Universidade, como também de bibliotecas particulares. Infelizmente não tenho ^{em} as mãos publicações atuais em quantidade considerável. O fato é de que ano para ano o número de massas estelares determinadas aumenta. Portanto não pude contar com publicações atuais, e, sendo assim, a tábua a baixo não representa uma imagem verdadeira quanto ao número de estrêlas cujas massas sejam conhecidas.

Estrêla	Clas. Espe.	Mag. Visual	Paralaxe	Massa
Eta Cassiopeia	GOY	3,47	0,032" ± 0,08	0,86
" "	dMO	7,28	" "	0,56
ADS 3475	dF7	7,4	0,024"	1,13
" "	"	7,5	" "	1,11
ADS 8862	dM2	8,9	0,119"	0,45
" "	"	9,7	" "	0,31
ADS 9617	dG2	5,6	0,059"	1,10
" "	"	5,9	" "	1,00
ADS 16326	dKO	8,1	0,034"	1,4
" "	"	8,8	" "	2,0
Tau Persei	G0	0,76	0,020"	2,1
" "	A5	2,76	" "	1,9
TV Cas.	B9	7,4		1,83

"	"	"	9,0		1,01
β Aur.	A0p				2,38
"	"	"			2,34
UCrB	B8		7,9		4,27
"	"	"	9,1		1,63
U Oph	B8		6,0		5,31
"	"	"	6,8		4,66
U Her.	B3		4,6		7,5
"	"	"	5,4		2,9
TX Her.	A5		8,1		2,04
"	"	"	9,0		1,77
RS Vul.	B8		7,4		5,26
"	"	"	8,1		1,64
Z Vul.	B3		7,3		5,25
"	"	"	8,8		2,37
Y Cyg.	B2		7,1		17,4
"	"	"	7,9		17,6
U Sag.	B9				6,7
"	"	"			2,0
Capella	G0		-0,26	0,063"	4,18
"	"	F0	0,24	————	3,32
Sirius	A0		1,28	0,373"	2,45
α Cent.	G5		4,70	0,748"	1,14
"	"	K5	6,07	————	0,97
Krueger60	Ma		11,35	0,260"	0,27
"	"	"	13,85	————	0,16

ε Hydrae	F9	0,27	0,0206"	3,64
" "	...	1,77	—	2,29
Procyon	F5	2,92	0,308"	1,13
♃ Equulei	"	4,43	0,067"	1,01
" "	"	4,53	—	1,00
ξ Her.	G0	3,23	0,109"	1,09
" "	6,73	—	0,51
70 Oph.	K0	5,66	0,189"	1,05
" "	K5	7,36	—	0,77
η Bootis	G6	5,87	0,164"	0,62
" "	K4	7,89	—	0,47
85 Pegasi	G0	5,75	0,095"	0,62
" "	10,95	—	0,31
μ Her.	Mb	10,42	0,110"	0,46
" "	"	10,92	—	0,42
02 Erid.	B9	11,27	0,202"	0,21
" "	Ma	12,67	—	0,20
V Puppis	B1	b(-4,61)		19,2
Y Cygni	B2	b(-3,29)		16,6
β Lyrae	B8	b(-3,80)		13,9
U Her.	B3	b(-2,89)		7,6
U Oph.	B9	b(-0,47)		5,36
Z Vul.	B3	b(-2,70)		5,24
RS Vul.	A0	b(-1,20)		4,34
U Coronae	B3	b(-2,04)		4,27
β Aurigae	A0p	b(0,13)		2,38

TX Her.	A2	b(2,04)		2,04
TV Cassio.	A0	b(0,34)		1,83
Z Her.	F2	b(2,53)		1,56
W Ur.Maj.	F8p	b(5,42)		0,74
Y Ophiuchi	G2	-4,0		26,2
♃ Aquilae	G0	-2,62		13,9
♄ Cephei	F9	-2,19		11,3
SU Cassio.	F5	-1,2		6,82
RR Lyrae	A9	-0,35		4,14

R A I O

Com exceção do Sol, o raio de uma estrela é um parâmetro conseguido sempre através de medidas indiretas. Isto ocorre em virtude das estrelas não passarem de simples pontos luminosos, mesmo quando vistas através dos maiores telescópios.

Os raios estelares podem ser calculados, por exemplo, a partir do conhecimento de suas luminosidades totais e das temperaturas das superfícies. A luz total emitida por uma estrela é simplesmente a soma da luz emitida por cada unidade de área da sua superfície. Suponhamos que conheçamos a temperatura de uma estrela a partir da sua classe espectral, seu índice de cor, ou até mesmo através da distribuição de sua energia com o comprimento de onda. Se a estrela está irradiando de acordo com a lei de Planck, o que aliás em tais determinações de temperaturas temos que admitir, então a brilhância por unidade de área da superfície para qualquer comprimento de onda dado depende simplesmente da temperatura e sendo assim pode ser calculada através da equação de Planck:

$$F_{\lambda} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

onde:

$$c_1 = 3,741 \cdot 10^{-5} \text{ erg.cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$c_2 = 1,439 \text{ cm.K}$$

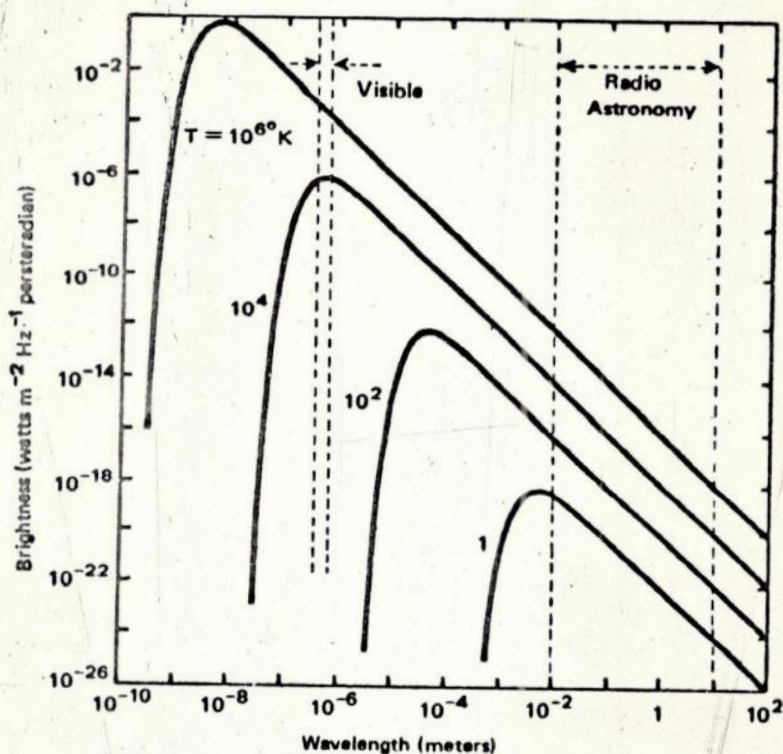
A brilhância total de uma estrela para um dado comprimento de onda é simplesmente o produto do brilho superficial (ou luminância para alguns autores) pela área da superfície da estrela. Se L é a luminosidade da estrela, R o seu raio e l a luminância, temos:

$$L = 4\pi R^2 l$$

Se conheçamos L através da magnitude absoluta e l a partir da temperatura, é claro que R será imediatamente calculado.

Abaixo o gráfico da luminância contra a temperatura de acordo com a lei de Planck:

Planck's curves illustrate the spectral energy distribution of black-body radiation at different temperatures.



Obs: convém lembrar que o termo luminância é empregado no sentido da emissão por unidade de área.

Um tratamento quantitativo mais proveitoso para seguir aqui é a dedução interferométrica do diâmetro de uma estrela a partir do desaparecimento das franjas escuras na ocular de um telescópio.

A operação de um interferômetro está baseada na natureza ondulatória da luz, que com o fenômeno de interferência luminosa, deu origem a uma das técnicas mais usadas na moderna Astronomia.

O termo interferência é aplicado à qualquer fenômeno resultante da composição de dois ou mais movimentos ondulatórios. Em se tratando de uma estrela estamos tomando movimentos ondulatórios de componentes com a mesma direção (são emitidos pela mesma fonte). Leva-se ainda em consideração que as velocidades são iguais (tra

tam-se de radiações eletromagnéticas).

A interferência entre dois movimentos ondulatórios poderá ocorrer de duas maneiras distintas conforme o valor da diferença de fase entre êles. Haverá interferência com reforço quando houver concordância de fases, ou seja, quando:

$$\Delta\psi = 2k\pi ,$$

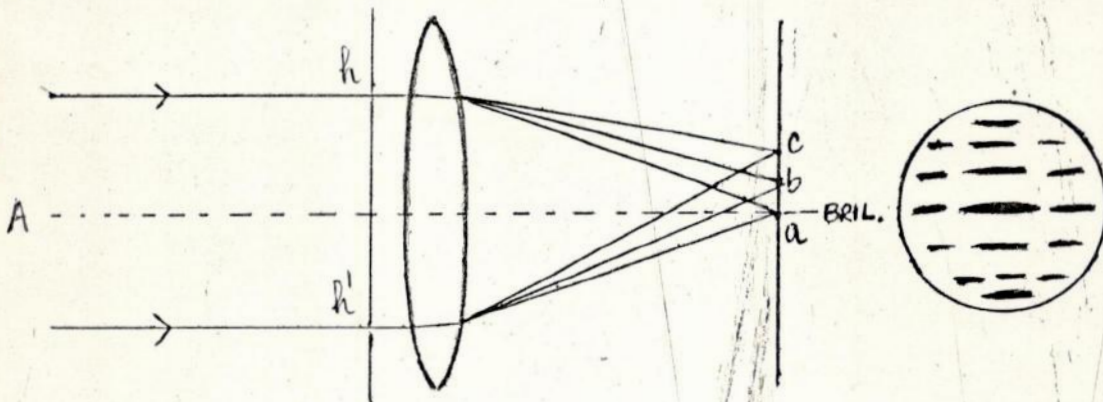
ou mais precisamente, quando a diferença de fase $\Delta\psi$ for um múltiplo par de π rad., sendo k um número inteiro qualquer. No caso de oposição de fases teremos interferência destrutiva com extinção, ou seja, quando:

$$\Delta\psi = (2k+1)\pi ,$$

ou mais precisamente, quando a diferença de fase $\Delta\psi$ for um múltiplo ímpar de π rad..

Resumimos então: quando duas ondas estão em oposição de fases elas se interferem com cancelamento de ambas e quando estão em concordância de fases elas se reforçam uma à outra.

Não entrarei nos detalhes quanto à operação do método interferométrico. Tecerei comentários breves a seu respeito.



A figura acima mostra a objetiva de um telescópio formando uma imagem difratada de uma estrela A no ponto a . A imagem, aumentada por uma ocular, é circular e para o nosso olho ela representa um disco brilhante mais ou menos uniforme. Se cobrirmos então a objetiva do telescópio com um anteparo contendo duas fendas circulares h e h' , a luz alcançará o foco bastante diminuída em intensidade, como também a aparência da imagem será grandemente modificada.

Para o próprio centro a da imagem difratada, agora aumentada em diâmetro porque as fendas são menores do que a objetiva, a distância que a luz da estrela percorre desde a estrela e através das fendas até o ponto a é exatamente igual, pois estamos supondo que as fendas estão colocadas simetricamente em relação ao eixo da objetiva. As ondas de luz dos dois fluxos que chegam em a estarão em concordância de fases, e, sendo assim, dará origem a manchas brilhantes, ou melhor dizendo, a linhas brilhantes perpendiculares a hh' no centro da imagem. Portanto quando consideramos o ponto b, a uma pequena distância de a, vemos então que o caminho percorrido pela luz através de uma fenda Ahb será um tanto menor que o caminho Ahb percorrido através da outra fenda. Poderemos achar uma posição onde as ondas de luz que vem através das fendas produzam interferência destrutiva com extinção (em oposição de fases). Assim as ondas se cancelarão uma à outra dando origem a linhas escuras. Para um ponto c ainda mais distante, as ondas estarão outra vez em concordância de fases e então teremos como resultado uma linha brilhante. Notar que suas fases diferem exatamente por um ciclo completo de vibração. O disco de difração da estrela, que tinha aparência quase uniformemente brilhante antes do anteparo ser colocado sobre o telescópio, estará coberto então por uma série de linhas alternadamente brilhantes e escuras, que são denominadas de franjas de interferência, em virtude de surgirem através da interferência dos dois fluxos de luz.

Suponhamos agora que uma segunda estrela B igualmente brilhante esteja perto de A, colocada de maneira que suas franjas brilhantes caiam exatamente sobre as franjas escuras na imagem da primeira estrela. Os dois modelos se somariam para dar uma imagem uniformemente iluminada; mas a imagem será uniforme somente se o espaçamento hh' está exatamente correto. Se a distância também é pequena as franjas não se cancelarão; se é grande a distância, elas não irão sobrepor-se exatamente e não se cancelarão uma à outra. Portanto se nós fazemos as fendas móveis, e ajustamos suas separações até que as franjas de interferência desapareçam, podemos determinar a distância angular entre as duas estrelas. Convém lembrar que este princí-

pio permite a medida da separação entre estrêlas duplas muito próximas uma da outra.

Bem, mostramos então a importância do interferômetro nas medidas correspondentes às separações angulares. Estas separações angulares podem ser convertidas em distâncias lineares como veremos abaixo.

Para as estrêlas duplas achamos a distância entre as componentes pela razão entre a separação angular e a paralaxe; a separação angular foi previamente medida por método interferométrico descrito anteriormente.

Agora podemos raciocinar de maneira análoga para o diâmetro da estrêla; o diâmetro linear da estrêla será dado pela razão entre o diâmetro angular da estrêla (obtido por meios interferométricos) e sua paralaxe, ou seja:

$$D = \frac{d}{p} ,$$

ou ainda:

$$R = \frac{d}{2p} ,$$

onde D é expresso em Unidades Astronômicas; tanto d como p são dados em segundos de arco. R é o raio da estrêla.

Podemos expressar os diâmetros estelares em função do diâmetro do Sol; teremos então:

$$D = \frac{107d}{p} ,$$

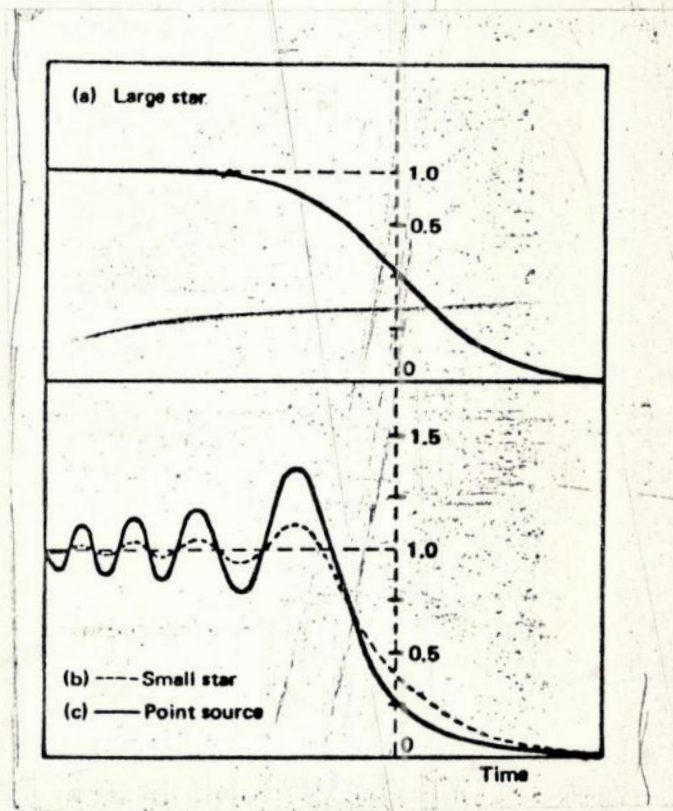
ou ainda:

$$R = \frac{107d}{2p} .$$

A ocultação de estrêlas pela Lua também pode ser utilizada para calcular raios estelares. Não possuindo atmosfera as montanhas da Lua atuam como um bordo pontiagudo, interceptando o fluxo de luz da estrêla que vinha ao telescópio. Se a estrêla tem um diâmetro pequeno, mas apreciável, o seu disco não é instantaneamente ocul

tado pelo bordo da Lua. Durante o desaparecimento da estrêla pelo bordo lunar, ela vai perdendo o seu brilho progressivamente, e de uma maneira muito rápida. Esta perda de brilho pode ser registrada por meio de uma célula fotoelétrica adaptada a um telescópio e recebendo os raios de luz através de uma pequena fenda localizada no plano focal do telescópio. A fotocorrente é registrada sobre um grafico móvel ou então sobre a tela de um osciloscópio.

A figura abaixo dá uma idéia de como se processa a operação .



Apresento abaixo uma tábua contendo raios de estrêlas tendo como unidade o raio do Sol. Por falta de acêrvo bibliográfico a tabela abaixo não reflete a realidade quanto ao número de raios estelares já determinados.

Estrêla	Clas. Esp.	Raio	Magnitude Bolométrica
V Puppis	B1	7,60	-4,61
Y Cygni	B2	4,60	-3,29
Lyrae	B8	12,09	-3,80
U Her.	B3	4,29	-2,89
U Ophiuchi	B9	3,07	-0,47
Z Vulpec.	B3	3,94	-2,70
RS Vulpec.	A0	5,16	-1,20
U Coronae	B3	2,90	-2,04
Aurigae	A0p	2,80	0,13
TX Her.	A2	1,33	2,04
TV Cassio.	A0	2,45	0,34
Z Her.	F2	1,77	2,53
W Urs. M.	F8p	0,70	5,42
Bovero	K0	13,5	
Pegaso	M5	70	

L U M I N O S I D A D E

A luminosidade de estrêlas é achada apartir da magnitude bolométrica absoluta. Isto é conveniente, já que na maior parte dos gráficos e equações a magnitude referida é a bolométrica absoluta. As magnitudes visuais são convertidas em magnitudes bolométricas por meio de correções bolométricas como mostra a tábua abaixo.

tipo espectral	Δm	tipo espectral	Δm		
			sequencia média	gigantes	super gigantes
B0	-2,70	F5	-0,04	-0,08	-0,12
B5	-1,58	F8	-0,05	-0,17	-0,28
A0	-0,72	G0	-0,06	-0,25	-0,42
A5	-0,31	G2	-0,07	-0,31	-0,52
F0	-0,09	G5	-0,10	-0,39	-0,65
F2	-0,04	G8	-0,10	-0,47	-0,80
		K0	-0,11	-0,54	-0,93
		K2	-0,15	-0,72	-1,20
		K3	-0,31	-0,89	-1,35
		K4	-0,55	-1,11	-1,56
		K5	-0,85	-1,35	-1,86
		M0	-1,43	-1,55	-2,2
		M1	-1,70	-1,72	-2,6
		M2	-2,03	-1,95	-3,0
		M3	-2,35	-2,26	-3,6
		M4	-2,7	-2,72	
		M5	-3,1	-3,4	

Já as magnitudes visuais são convertidas em magnitudes absolutas através da equação:

$$M = m + 5 - 5 \log r - A$$

onde M é a magnitude absoluta, r é a distância da estrêla em parsecs e A é a correção para a absorção no espaço interestelar.

As correções bolométricas (Δm) são usadas para converter as magnitudes visuais em magnitudes bolométricas, necessárias para o cálculo de luminosidades.

As correções bolométricas representam uma parte muito importante na comparação dos dados observados com a teoria da constituição interna das estrêlas, uma vez que a precisão da luminosidade depende muito delas.

Para estrêlas quentes as correções bolométricas podem ser achadas teóricamente através da teoria das atmosferas estelares e são unicamente determinadas pela classe espectral. Para estrêlas frias as correções bolométricas são achadas empiricamente através de resultados de medidas bolométricas diretas. Neste caso a correção bolométrica dependerá não sómente da classe espectral mas também da luminosidade.

Na tábua anterior a relação entre magnitude estelar visual e magnitude estelar bolométrica é:

$$m_b - m_v = M_b - M_v = \Delta m .$$

Quanto à parcela A lembramos que neste trabalho ela é necessária, pois a luminosidade é um dos parâmetros a ser plotado e por conseguinte sujeito às investigações que nos oferecerão conclusões.

Quanto à distância poder-se-ia dizer que para estrêlas mais próximas a sua obtenção se faz por medida direta através das paralaxes trigonométricas. Para estrêlas distantes usam-se métodos indiretos envolvendo características cinemáticas.

Acrescenta-se também que as magnitudes absolutas podem também ser determinadas através de relações empíricas entre a luminosidade e outras características das estrêlas. Os métodos mais importantes são:

- 1º) O método de paralaxes espectroscópicas.
- 2º) O método de variáveis eclipsantes.
- 3º) O método que faz uso da relação entre o período e a luminosidade para as variáveis Cepheidas.

Farei aqui um breve comentário sobre os métodos acima citados. Todas as metodologias e técnicas não serão apresentadas pois isso envolveria uma repetição enfadonha e prolixa o que iria contra o objetivo deste trabalho: apresentar as noções básicas para em seguida propor a pesquisa. O método das paralaxes espectroscópicas usa a forte dependência das intensidades de certas linhas espectrais sobre a luminosidade. Fisicamente falando isto é uma dependência sobre o grau de ionização, o qual por sua vez depende da pressão e por-

tanto da aceleração da gravidade sobre a superfície estelar. A força gravitacional é determinada pela massa e pelo raio da estrela, os quais estão relacionados com a luminosidade. Este método é então aplicado somente quando existe uma única relação entre massa e luminosidade sendo usado somente para estrelas

Em termos práticos a determinação de paralaxes espectroscópicas se faz da seguinte maneira: constrói-se um gráfico mostrando a dependência entre a diferença em intensidade de duas linhas escolhidas e a magnitude absoluta de estrelas próximas cujas distâncias podem ser calculadas através da paralaxe trigonométrica. Se admitirmos que esta dependência é universal podemos determinar as magnitudes absolutas para estrelas longínquas a partir do gráfico.

Analogamente podemos usar a relação entre o período de pulsação de uma variável Cepheida e suas magnitudes absolutas médias.

O raio de estrelas próximas são obtidos através de luminosidade e temperatura efetiva, com a ajuda da equação:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$$

onde L é a luminosidade da estrela; R é o raio da estrela; σ é a constante de Stefan e T_e é a temperatura efetiva da superfície da estrela.

Para binárias eclipsantes a mesma equação é usada. Entretanto o procedimento se faz ao contrário, ou seja, usa-se a equação acima para obter a luminosidade, conhecendo-se o raio e a temperatura efetiva.

As magnitudes absolutas então obtidas são usadas para determinar as distâncias de estrelas longínquas. Em particular a relação período-luminosidade para as Cepheidas é usada como uma base para determinações de distâncias extra-galáticas.

Quanto às temperaturas efetivas, podemos dizer que elas são determinadas observando-se a distribuição de energia no espectro e através dos princípios da teoria das atmosferas estelares. É eviá

dente que cada tipo de estrêla assumiria características bem diferentes em termos de temperatura efetiva.

Abaixo mostramos uma tábua de temperaturas efetivas dada por Keenan e Morgan, e cujos valores estão em graus Kelvin.

classe spect.	T_e	classe spect.	T_e					
			seq. média V	sub. gigante IV	gigantes		supergigantes	
					III	II	Ib	Ia
B0	25000	F5	6600	6540	6470	6340	6200	
B1	22500	F6	6390	6210	6020	5910	5800	
B2	20300	F8	6150	5890	5620	5460	5300	
B3	18000	G0	6000	5750	5300	5150	5000	
B5	15600	G2	5730	5350	4990	4770	4600	
B6.5	14000	G5	5520	5080	4650	4470	4290	
B8	12800	G8	5320	4870	4440	4220	4000	
B9	11800	K0	5120	4650	4200	4010	3820	
A0	11000	K1	4920	4450	4000	3850	3700	
A1	10300	K2	4760	4280	3810	3700	3590	
A2	9700	K3	4610	--	3660	3540	3430	
A3	9100	K5	4400	--	3550	3430	3320	
A5	8700	K6	4000				3210	
A7	8100	M0	3600	--	3340	3270	3210	
F0	7600	M1	3400	--	3200	3150	3100	
F2	7000	M2	3200	--	3090	3070	3050	
		M3	--	--	2980			
		M4	--	--	2850			
		M5	--	--	2710			
		M6	--	--	2600			

Outra escala de temperaturas efetivas dada por Kuiper e cujos valores estão em graus Kelvin.

classe spect.	T_e	classe spect.	T_e	classe spect.	T_e	
					anãs	gigantes
B0	25000	A3	9400	G0	6000	5200
B1	23000	A5	8530	G5	5360	4620
B2	20400	A8	7900	K0	4910	4230
B3	18600	F0	7500	K5	3900	3580
B5	15500	F3	6800	M0	3600	3400
B8	12300	F5	6470	M2	3200	3200
A0	10700					

Se quisermos determinar a luminosidade de uma estrela através de sua magnitude absoluta devemos conhecer a magnitude absoluta do Sol.

Para o Sol temos:

Magnitude visual - $M_V = 4,73$

Magnitude fotográfica - $M_F = 5,64$

Magnitude bolométrica - $M_b = 4,62$

Com estes dados obtemos a luminosidade. Seu valor em unidades solares é calculado através da magnitude absoluta bolométrica M , usando-se a equação:

$$L = 10^{0,4(4,62-M)}$$

Visto o aspecto teórico sobre o parâmetro Luminosidade, veremos agora um breve comentário sobre as determinações experimentais de tal parâmetro.

As células fotoelétricas e os pares termoeletrônicos operam com a recepção direta da luz da estrela sobre superfícies sensitivas. Isto se fez necessário, porquanto não se pode dar créditos às estimativas visuais, que além de diferir de pessoa para pessoa, também difere de ocasião para ocasião em que se faz a determinação.

As células fotoelétricas se baseiam no fato de que uma superfície metálica sensível emite elétrons com uma taxa aproximadamente proporcional (o máximo possível) à intensidade de certas radiações que são absorvidas pela célula, sob dadas condições, as quais são de grande importância na precisão da medida. A taxa anteriormente citada pode ser medida ou então continuamente registrada por um galvanômetro suficientemente sensível. Algumas vezes também se usa uma válvula amplificadora que responde a breves pulsos. Costuma-se também planejar circuitos nos quais duas ou mais fotocélulas são equilibradas uma em relação à outra, assim como ter todas as condições em comum, exceto o que se refere à incidência da luz da estrela através de um telescópio sobre uma das células. Podemos assegurar portanto que correntes extremamente pequenas são devidas apenas à luz da estrela e não outras causas quaisquer que poderiam vir a afetar as cé

lulas.

Em um artigo do Astrophysical Journal de janeiro de 1948, é feito um interessante limite praticável à medidas diretas da luz de uma estrêla através de células fotoelétricas, para estrêlas de até 16^a magnitude com um telescópio de apenas 12 polegadas!! Isto é no tável, uma vez que se torna realizável as pesquisas em observatórios de pequeno porte. No caso do observatório a ser instalado pela U.F.R.J estas determinações poderiam ser feitas em larga escala, principalmente por estarmos no hemisfério Sul que não conta com muitas observatórios realizando este tipo de pesquisa. Evidentemente que seria de gran de importância a existência de outros observatórios trabalhando neste mesmo tipo de determinações, pois só assim poder-se-ia realizar comparações dos dados obtidos, visando com isso determinações de grande pre cisão, o que se constitui um grande passo para se estabelecer as rela ções massa-luminosidade segundo os diversos tipos estelares com rigor suficiente.

É curioso observar que para um telescópio de 100 polegadas o limite seria para 20^a magnitude. Portanto, neste tipo de trabalho, um telescópio de 12 polegadas não ficaria muito a dever a um te lescópio de 100 polegadas, principalmente porque à este trabalho realizado no nosso hemisfério se adstringiria a enorme quantidade de dados obtidos pelos maiores instrumentos, os quais estão em sua maioria instalados no hemisfério norte (e/ a muito tempo).

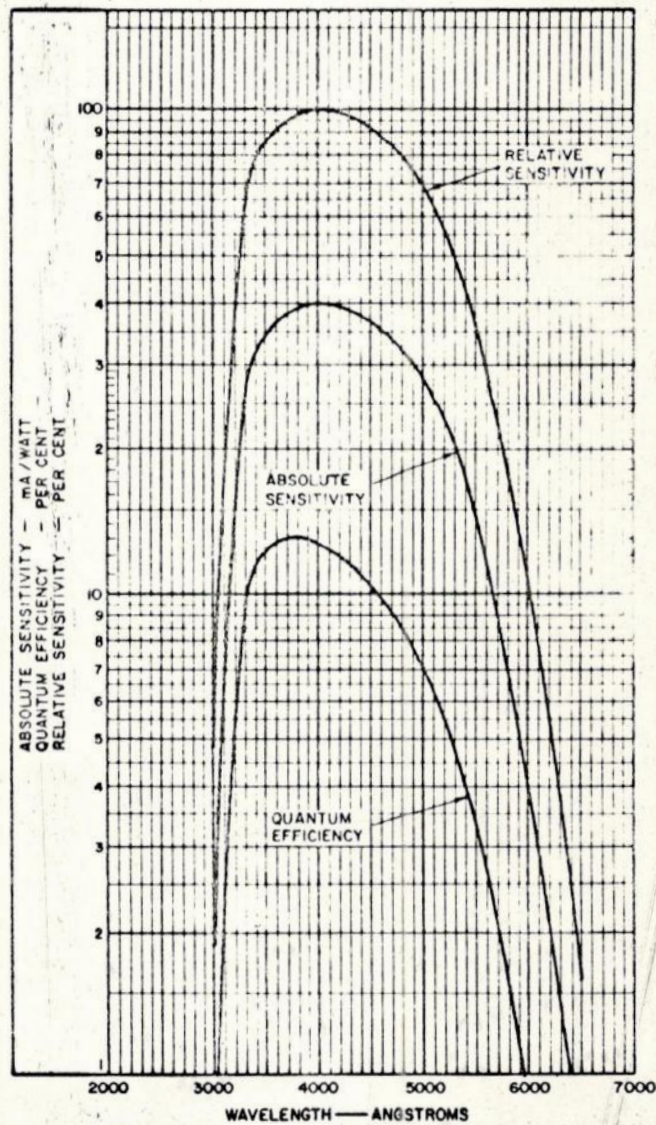
Existem fotocélulas de diferentes metais e com uma variedade muito grande de maneiras de preparação da superfície catódica sensível. Por este motivo elas respondem muito variadamente para diferentes cores. Se faz necessário ² então, como iniciativa preliminar, uma padronização para cada espécie. Esta padronização poderá ser feita através de um diagrama, sôbre o qual pode ser plotado a variação da resposta com o comprimento de onda visível.

Este tipo de trabalho poderá ser feito utilizando-se a célula fotoelétrica RCA-1P21 a ser adquirida pela U.F.R.J. Esta célula é um tipo de tubo fotomultiplicador (lateral) em 9 estágios, desti-

nado ao uso em aplicações críticas envolvendo a detecção e medidas de níveis de fluxos luminosos extremamente baixos. Seu aspecto é uma combinação de alta fotosensitividade e baixa corrente de escuro.

Abaixo um gráfico que bem caracteriza a 1P21.

Typical Spectral Response Characteristics



Os pares termoelétricos se baseiam no fato de que a luz de uma estrela produz um pequeno aquecimento na junção entre dois metais, induzindo com isso uma força eletromotriz correspondente, a qual dirige uma corrente capaz de ser registrada. Levando-se em conta que cada termo-junção ou par térmico é comumente usado para medir temperaturas, a sensitividade necessária para detectar o efeito de aquecimento da luz de uma só estrela deve ser evidentemente muito extrema. Por este motivo a técnica atraiu poucos observatórios.

No observatório de Monte Wilson, Pettitt e Nicholson construíram pares termoelétricos com grande sucesso, e os colocaram no foco do telescópio de 100 polegadas. A técnica usada consiste, entre outras, na junção entre fios de bismuto e uma mistura à base de estanho, cada qual com 1/30 m.m de diâmetro, e desenhados com esta espessura em vidro o qual é subsequentemente dissolvido em ácido hidrofluorídrico montado em um pequeno tubo à vácuo. Este par termoelétrico dá origem a uma deflexão milimétrica de uma corrente galvanométrica refletida. Esta deflexão ocorre para uma variação em termos de temperatura que é estimada como 1/100 milionésimos de um grau absoluto de temperatura. Ora, um galvanômetro sensível a 10 bilhonésimos de 1 ampère de corrente, registra sua deflexão sobre um filme fotográfico móvel, e um par de detectores são oscilados mecânicamente para trás e para frente através da imagem da estrela, já que é mais fácil estar certo da oscilação de uma linha sólida do que do tamanho de uma quantidade isolada. É importante acrescentar que as mais altas temperaturas medidas nos focos de telescópios foram de aproximadamente 1/20 de um grau absoluto, enquanto que as menores cerca de 1 milionésimo de um grau absoluto. Como podemos observar estas determinações experimentais são de grande valor para a relação massa-luminosidade, pois refletem o sentido amplo e acurado dos dados obtidos; ou por outra são de grande confiança.

Outro dispositivo de grande utilidade é a placa fotográfica e consiste no seguinte: tornamos a ocular de um telescópio em câmara e medimos devagar, depois de uma longa exposição de imagens

ou mancha escura, a qual foi registrada em uma placa ou filme, a luz incidente da estrela. A comparação da brilhância estelar pode ser feita por medições do tamanho destas manchas escuras, partindo-se de que para uma radiação mais intensa, maior será o espalhamento na emulsão fotográfica. Surgem aqui aparelhos que funcionam como coanalísadores, isto é, que funcionam na análise dos efeitos provocados na emulsão e cujo objetivo é esta medição. Por exemplo estes aparelhos fazem comparações por superposição de outras placas contendo manchas de brilhâncias padronizadas. Como auxiliar surge também o microfotômetro. Em geral o tratamento mais acurado de fotografias, e particularmente conveniente para espectros, é colocá-las em um microfotômetro. Colocando-se entre uma lâmpada, um conjunto de fendas e dirigindo-se a sua luz através de um fluxo extremamente pequeno, para detectores como fotocélulas, pares térmicos e etc., a intensidade da imagem pode ser achada precisamente por medição da fração do fluxo da lâmpada bloqueado pela mancha escura sobre a fotografia. Atravessando a fotografia por meio de um pequeno fluxo, uma débil imagem obstrui a transmissão menos que uma imagem brilhante que escureceu a placa com uma mancha mais intensa .

Sabe-se, portanto, que a medição de uma placa torna-se um exemplo da mesma técnica como foi utilizada com a luz direta da estrela, ou seja, o uso de fotocélulas e de pares térmicos. A vantagem para as placas fotográficas é de transferir para o laboratório a aparelhagem de fotometria em vez de tê-los fixados ao telescópio. Entretanto, em troca desta vantagem está o problema de determinações de leis que ligam o escurecimento da mancha fotografada com a intensidade da radiação que a causa.

I N T R O D U Ç Ã O M A T E M Á T I C A

No caso de equações diferenciais de 1ª ordem temos que muitas delas apresentam soluções exatas, obtidas através de diferentes métodos. Para equações diferenciais exatas, equações diferenciais com variáveis separáveis ou equações que se reduzem a esta forma, equações diferenciais homogêneas, equações lineares e etc.

Entretanto em termos de aplicação, ou mais precisamente, da análise das equações que mais aparecem na Astrofísica, frequentemente operamos com equações que não possuem métodos de solução elementares. Temos assim que lançar mãos de métodos aproximados na pesquisa das soluções.

Estando o meu trabalho sujeito à manipulação de tais equações, abro aqui um capítulo com a apreciação dos métodos aproximados.

Para melhor compreensão farei um breve comentário sobre as soluções gráficas e o método das séries de potências.

a) Método gráfico:

Seja

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

uma equação diferencial de 1ª ordem, na qual f é uma função real de x e y . Sendo assim não nos é difícil afirmar que as soluções explícitas da equação anterior serão funções reais. Os gráficos de tais funções soluções são curvas no plano x - y . Essas curvas recebem o nome de "curvas integrais" da equação (1).

É fácil observar que para cada ponto (x, y) para o qual $f(x, y)$ é definido a equação (1) define a inclinação $f(x, y)$ para o ponto (x, y) da curva integral de (1), que passa através do referido ponto.

A grande vantagem aqui é que podemos construir a tangente da curva integral de (1) que passa pelo ponto (x, y) , sem conhecermos previamente a função solução, representada no gráfico pela cur-

va integral. É importante observar que a curva integral é a representação gráfica da função solução, ou seja, através da curva integral temos a solução da equação diferencial em forma geométrica.

Passando pelo ponto (x,y) construímos pequenos segmentos, que são na realidade pedacinhos da tangente às curvas que passam por (x,y) e cujas inclinações são representadas por $f(x,y)$. Estes pequenos segmentos recebem o nome de "elementos linha" da equação diferencial (1).

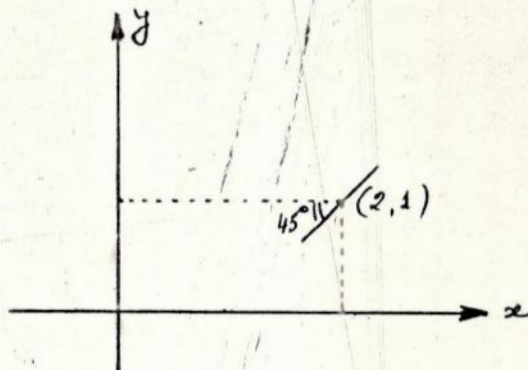
Para melhor fixação consideremos um exemplo numérico. Seja

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 3y, \quad (2)$$

a equação diferencial. Assim

$$f(x,y) = x^2 - 3y,$$

e sem conhecermos a função solução podemos determinar a inclinação da curva integral (não a determinamos) no ponto $(2,1)$ por exemplo. Para este ponto temos $f(2,1)=1$. Então no ponto $(2,1)$ podemos traçar um pequeno segmento cuja inclinação seja 1, isto é, um pequeno segmento que forme com o eixo horizontal do plano $x-y$ um ângulo de 45° . Afirmando então que este pequeno segmento é o elemento linha da equação diferencial (2).



Outra vez saliento: ainda não determinamos as curvas integrais.

Tendo em vista a equação (1) podemos determinar um elemento linha para cada ponto (x,y) , para o qual $f(x,y)$ é definido. Então podemos seleccionar um conjunto de elementos linha que, com suas respectivas inclinações bem determinadas, nos darão uma noção aproxi-

mada das curvas integrais, as quais representam gráficamente a função solução da equação diferencial dada. A este conjunto de elementos linha damos o nome de "configuração elemento linha".

Vimos portanto que em cada ponto (x,y) , para o qual $f(x,y)$ é definido, a equação diferencial (1) define então um elemento linha com inclinação $f(x,y)$. Isto é de uma importância transcendental, pois em cada elemento linha temos definida uma direção, ou em outras palavras, em cada ponto do plano $x-y$ temos uma tangente à curva integral que passa pelo ponto considerado. Cada um de tais pontos tomados juntos com as suas respectivas direções constituem o "campo direção" da equação diferencial (1). Este campo direção é representado graficamente pela configuração elemento linha. Quanto mais cuidadosa e precisa for a construção da configuração elemento linha mais correta será a representação do campo direção, que aliás nos dará uma noção, com boa aproximação, das curvas integrais (solução gráfica da equação diferencial proposta).

Não devemos esquecer que o método apresentado é um método aproximado de solução e, sendo assim, obtemos uma função solução cujo grau de precisão depende dos artifícios usados na elaboração dos gráficos. Atualmente podemos obter boas aproximações com máquinas calculadoras, como a HP 9100B.

Dentro dos métodos gráficos utilizados, o mais comum é o método das isóclinas. É rápido e de boa precisão.

Vamos continuar trabalhando com a equação diferencial (1) face a sua generalização. Consideremos portanto a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) , \quad (1)$$

e uma curva ao longo da qual a inclinação $f(x,y)$ tem um valor constante c é denominada de "isóclina" da equação diferencial (1). Queremos dizer com isso que as isóclinas da equação (1) são curvas $f(x,y)=c$, para diferentes valores do parâmetro c .

Para melhor fixação vejamos um exemplo numérico. Seja a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x - y \quad (2)$$

As isóclinas da equação diferencial (2) são linhas retas tal que:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x - y \quad ,$$

onde

$$f(x, y) = c \quad ,$$

ou

$$c = \frac{1}{2}x - y \quad ,$$

sendo

$$y = \frac{1}{2}x - c \quad ,$$

o valor $1/2$ representará a inclinação da isóclina. Ou seja, são retas cujas direções são dadas por: $\alpha = \text{arc tg } 1/2$. Entretanto infinitas retas possuem a inclinação anterior; porém, cada uma delas será fixada pelo parâmetro c , já que a ordenada será dada de acordo com os diferentes valores de parâmetro c .

Agora se faz mister dizer que as isóclinas não são curvas integrais da equação (1). A isóclina é uma curva usada para melhor traçar os elementos linha, pois estes, em relação à isóclina, possuem uma direção fixa. Por este motivo as usamos, ou seja, se um elemento linha possui uma direção fixa, podemos traçar uma infinidade de elementos linha paralelos entre si, constituindo assim o campo direção da equação diferencial dada.

É importante observar que os diferentes valores do parâmetro c dão a inclinação dos elementos linha para a correspondente isóclina, pois

$$f(x, y) = c$$

e de acôrdo com a equação (1)

$$\frac{dy}{dx} = c .$$

Então c não é a inclinação da isóclina e sim do elemento linha.

Se considerarmos uma isóclina particular $f(x,y)=c_0$, podemos afirmar que para todos os pontos (x,y) , para os quais $f(x,y)$ é definido, e tomados sôbre esta isóclina os elementos linha, terão a mesma inclinação c_0 , ou em outras palavras, sôbre a isóclina considera da os elementos linha possuem a mesma direção dada por α_0 , tal que,

$$\alpha_0 = \text{arc tg } c_0 ,$$

sendo: $0^\circ \leq \alpha_0 < 180^\circ$.

Se procedemos dessa maneira para muitas isóclinas, de finiremos o campo direção da equação diferencial dada e com isso tere mos a noção das curvas integrais, que são as soluções gráficas de tal equação.

Para melhor fixação vejamos um exemplo numérico. Se- ja

$$\frac{dy}{dx} = x + y , \quad (2)$$

a equação diferencial, da qual queremos achar as curvas integrais (so- lução gráfica da equação dada).

Sendo assim as isóclinas da equação (2) são linhas retas da forma

$$f(x, y) = x + y$$

$$f(x, y) = c$$

$$c = x + y$$

$$y = -x + c$$

Tracemos 7 isóclinas de acôrdo com os seguintes va-

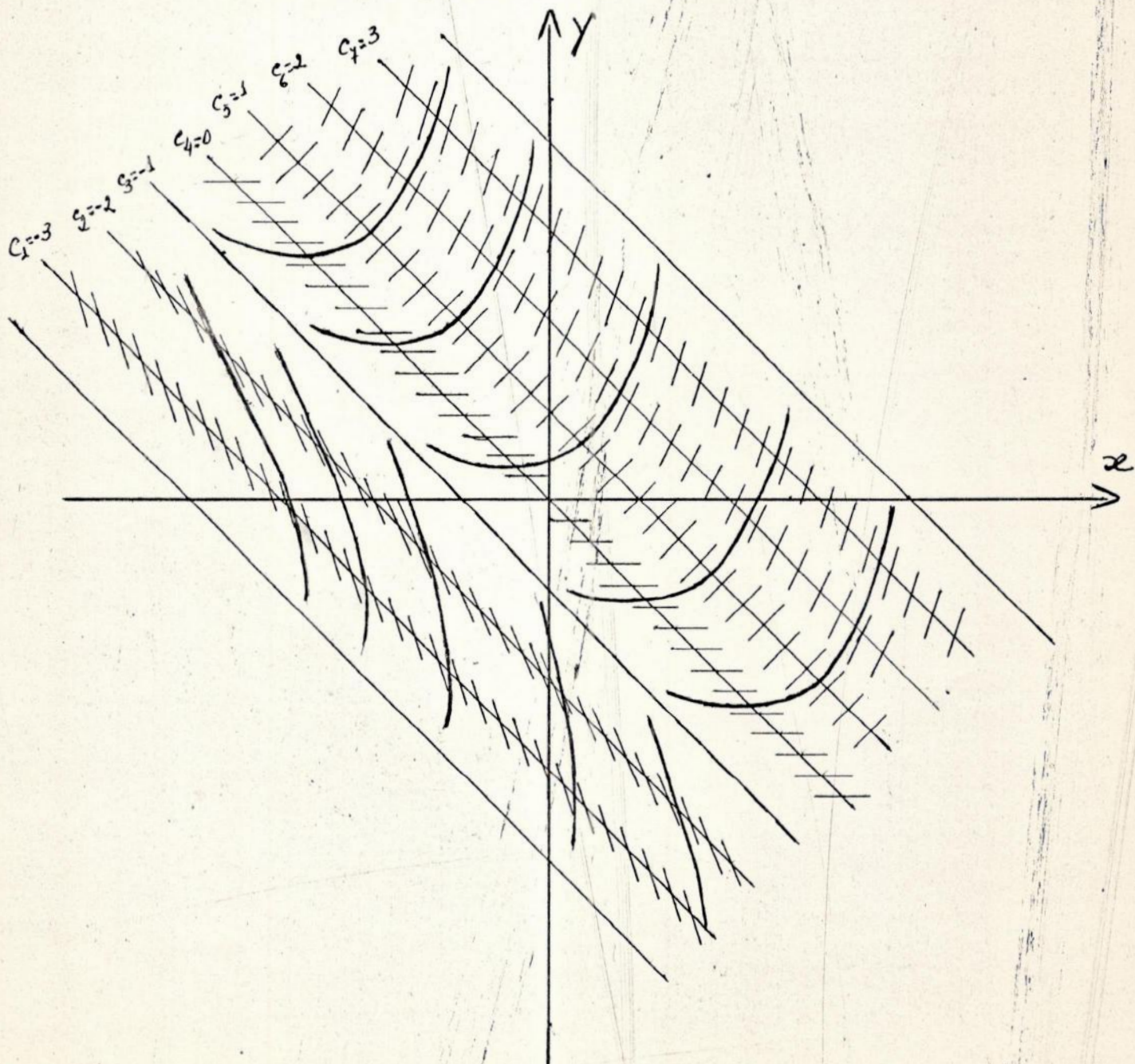
lores do parâmetro c :

$c_1=-3$; $c_2=-2$; $c_3=-1$; $c_4=0$; $c_5=1$; $c_6=2$; $c_7=3$.

Podemos construir a seguinte tabela:

c	α
-3	108°
-2	116°
-1	135°
0	0°
1	45°
2	64°
3	72°

E assim o gráfico solução pode ser construído:



As curvas obtidas no gráfico anterior são as curvas integrais da equação (2), ou em outras palavras, trata-se da solução gráfica da função solução de tal equação. Para diversos valores do parâmetro c construímos as isóclinas correspondentes.

b) Método de série de potências:

A introdução desta sistemática é conveniente, pois através do método descrito anteriormente obtemos uma solução gráfica aproximada, mas não expressões analíticas desta solução. Ora a junção destes dois métodos, muito embora sejam aproximados, nos dará uma noção concisa à respeito da solução da equação diferencial considerada.

Levaremos em conta especificamente o problema de valor inicial associado à equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

e seja

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

a condição inicial.

Vamos supor que a equação diferencial (1) possui uma solução que pode ser representada como uma série de potência de $(x - x_0)$. Estamos com isso admitindo que a equação diferencial (1) tem uma solução da forma

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \dots, \tag{3}$$

ou ainda:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \tag{4}$$

Sendo a equação acima válida em algum intervalo nas vizinhanças do ponto x_0 .

O problema agora consiste na determinação dos coeficientes c_0, c_1, c_2, \dots , de tal maneira que a série (3) ven-

ha a satisfazer a equação diferencial (1) como solução, bem como a condição imposta.

Em acôrdo com as afirmações anteriores dadas por (1), (2) e (3), podemos usar o Teorema da Taylor para cada x no intervalo nas vizinhanças do ponto x_0 , de tal maneira que o valor $y(x)$ desta solução é dado por

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots, \quad (5)$$

ou ainda:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (7)$$

admitida a existência de todas as derivadas de $y(x)$.

De acôrdo com a condição inicial (2) e usando a equação diferencial (1), teremos:

$$y' = f(x, y)$$

ou ainda

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Para melhor noção façamos:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = f(x_0, y_0) \end{cases}$$

É fácil perceber que quando substituimos o grupo acima na série (5), obtemos tranquilamente os dois primeiros coeficientes da solução em série dada por (3).

Vejam agora como obter os demais coeficientes. Diferenciemos então a equação (1):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} [f(x, y)]$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y)] \frac{dy}{dx},$$

como $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$,

teremos:

$$y'' = \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y)] f(x, y) \quad (7)$$

A equação anterior se transforma então em:

$$y''(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} [f(x_0, y_0)] + \frac{\partial}{\partial y} [f(x_0, y_0)] f(x_0, y_0)$$

Da mesma maneira podemos substituir $y''(x_0)$ em (5), e assim obter o terceiro coeficiente na solução em série dada por (3).

Analogamente podemos obter $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$,

$\frac{d^ny}{dx^n}$,, desde que diferenciemos a equação (7) sucessivamente. E

assim, respectivamente, obteremos os valores $y'''(x_0)$, $y^{IV}(x_0)$,, $y^{(n)}(x_0)$, ...
..., que quando substituídos na equação (5), fornecem o terceiro, quarto,, enésimo, coeficiente na solução em série dada por (3).

Para melhor fixação vejamos um exemplo. Seja

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy^2,$$

e $y(0) = 2$ a condição inicial.

Fixando arbitrariamente $x_0 = 0$, teremos:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots,$$

ou:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

ora, nas mesmas condições o teorema de Taylor será aplicado na forma:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots \quad (8)$$

ou ainda

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Passemos então a determinar os coeficientes;

1º coeficiente:

$$y(0)=2 \text{ (que é a condição inicial).}$$

2º coeficiente:

$$y'(0)=1$$

3º coeficiente:

$$y''(0)=4$$

4º coeficiente:

$$y'''(0)=8$$

5º coeficiente:

$$y^{IV}(0)=54$$

Substituindo $y(0); y'(0); y''(0); y'''(0); y^{IV}(0)$ na equação (8), obteremos então a solução da equação diferencial proposta,

$$y = 2 + 1 \cdot x + \frac{4}{2!} x^2 + \frac{8}{3!} x^3 + \frac{54}{4!} x^4 + \dots$$

$$y = 2 + x + 2x^2 + \frac{4}{3} x^3 + \frac{9}{4} x^4 + \dots$$

R E L A Ç Ã O M A S S A - L U M I N O S I D A D E

A relação massa-luminosidade é uma das mais importantes relações que existe em Estrutura Estelar, quer pelo seu aspecto ainda pouco explorado quer pela carência de dados em relação aos parâmetros massa e luminosidade (e é justamente aqui onde encontramos o atual desafio da Astronomia experimental, no que tange à determinação dessas duas quantidades e mais um terceiro parâmetro que é como já sabemos, o raio).

Todas essas idéias tiveram como precursor Arthur Eddington, que nos seus pioneiros estudos sobre a constituição interna das estrêlas, concluiu em 1924 que uma relação fundamental pode existir entre as massas e as luminosidades das estrêlas, desde que essas possuam estruturas similares. É claro que as estrêlas de maiores massas e de maiores luminosidades são as escolhidas em virtude da acessibilidade experimental.

Eddington juntou todos os dados sobre massas e luminosidades estelares daquele tempo (década de 20), concluindo através destes dados, que eles sustentavam em primeira instância às suas afirmações sobre a relação massa-luminosidade.

Na realidade estrêlas similares, tanto em estrutura como em composição química, geram relações peculiares.

Os dados mais usados para estabelecer a equação, estão limitados para estrêlas cujas massas possam ser determinadas com mais facilidade; para isso usamos as estrêlas duplas, para as quais conhecemos tanto suas dimensões orbitais como suas inclinações. Ora, como já sabemos, estas estrêlas estão situadas sobre a sequência média (com muito poucas exceções). Portanto, rigorosamente falando, os dados obtidos através de estrêlas duplas definem uma relação massa-luminosidade para estrêlas da sequência média, as quais possuem estrutura similar.

E é justamente neste ponto que podemos reafirmar sobre a fertilidade do assunto, pois a relação massa-luminosidade só

mente está bem determinada para estrêlas comuns da sequência média. Sendo assim nos obriga a buscas mais profundas e conseqüentemente a planos de trabalhos mais extensos; surge então a seguinte pergunta: porque não tentar conclusões para outros tipos de estrêlas, procurando uma característica comum, através de uma relação que possua em seu conteúdo certas constantes que são fundamentais para uma perfeita de finição dos tipos de estrêlas? Sob o ponto de vista da Estrutura Estelar é nesta pergunta que se junta toda a filosofia do meu trabalho.

Na realidade a relação massa-luminosidade foi estabelecida inicialmente para poucas estrêlas (já que poucas eram as estrêlas que possuíam massas determinadas). Atualmente há um maior acêrvio, muito embora podemos afirmar que proporcionalmente o panorama praticamente continua inalterado. O termo proporcionalmente é aqui empregado no sentido da quantidade de estrêlas cujas magnitudes (tradutoras da luminosidade aparente, ou luminosidade absoluta-brilho intrínseco) são conhecidas em comparação com as respectivas massas e raios. Quanto a isso não tenho dúvidas em afirmar que tal desnível ocorre principalmente, e fundamentalmente, em virtude do estado embrionário das pesquisas experimentais no que concerne a determinação de massas e raios. Ou por outra as determinações experimentais das luminosidades estelares estão, sem sombras de dúvidas, muito além das determinações experimentais de massas e raios estelares. Em termos mais palpáveis, este desnível iniciou-se com o advento de instrumentos tais como: células fotoelétricas, pares termoelétricos, placas fotográficas, espectógrafos e etc.

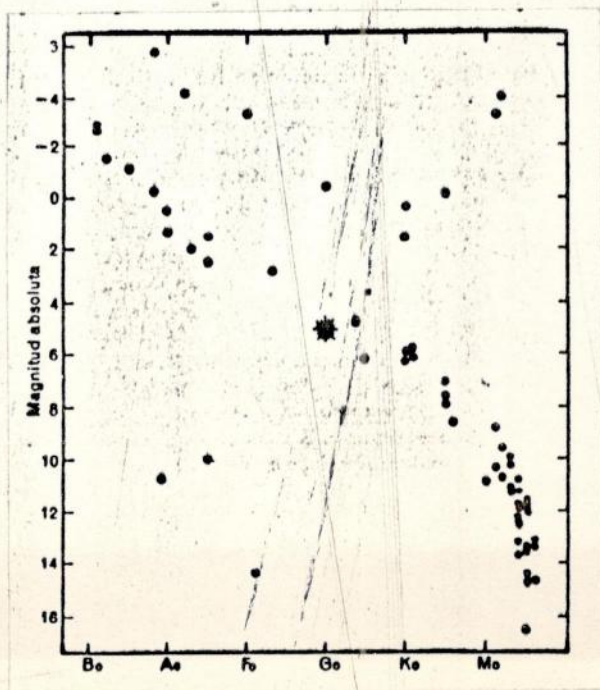
Farei agora uma análise sobre as idéias gerais que constituem a relação massa-luminosidade mostrando a intrínseca correspondência entre os aspectos teóricos e experimentais. O fato é que as relações massa-luminosidade para os vários tipos de estrêlas se apresentam inicialmente com características puramente teóricas. Entretanto estas relações podem (e devem) algumas vezes serem obtidas como ajustantes de pontos determinados em planos cujos eixos são a massa e a luminosidade.

Evidentemente, existem vários tipos de estrêlas que não permitem as verificações puramente experimentais. Não que essas entrassem em de sacôrdio com a teoria, mas sim pelo fato de que neste caso os parâmetros AINDA são desconhecidos. Realmente, espera-se que as quantidades obtidas na prática não se adaptem exatamente aos valores previstos pela teoria. Uma vez que isto acontece, só nos resta, por reiteraões sucessivas, harmonizar as grandezas indicadas pelas teorias e pela observação.

A situação ideal de um plote massa-luminosidade seria aquela em que pudéssemos deduzir massa quando conhecessemos seguramente a luminosidade, ou então deduzir luminosidade quando tivéssemos conhecimento prévio da massa; a proporcionalidade entre estes dois parâmetros seria a grande conquista na Estrutura Estelar.

Antes de seguir com os comentários vejamos os aspectos fundamentais reunidos no diagrama massa-luminosidade, originário no diagrama Hertzsprung-Russell. Neste notávamos que grande quantidade de estrêlas caíam em uma estreita faixa compreendida entre estrêlas da classe B, cuja luminosidade é 100 vêzes superior à do Sol, e de estrêlas M com luminosidade cêrca de 100 vêzes menor do que a do Sol. Dentro desta faixa, a qual chamamos de sequência média, verificava-se o não aparecimento de determinadas estrêlas, como anãs, gigantes e etc.

No diagrama H-R faz-se uma correspondência entre o brilho absoluto de uma estrêla e a sua temperatura, especificada em têrmos do seu espectro, como vemos na figura abaixo

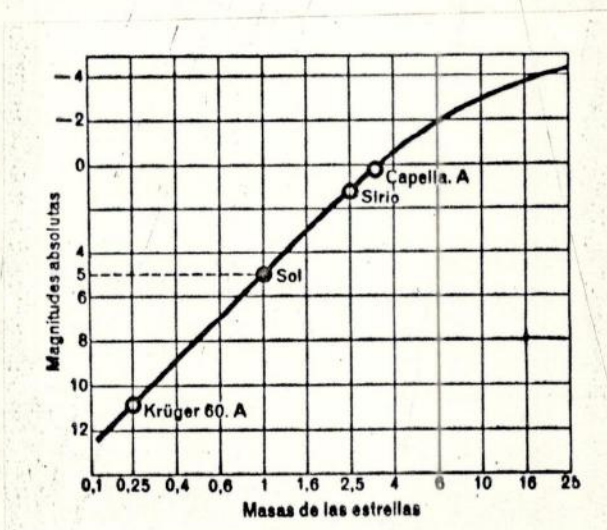


Então a correspondência entre o brilho e a respectiva temperatura de uma estrela estava assim determinada.

Curioso a não inclusão de algumas estrelas na sequência principal. Melhores afirmativas seriam conseguidas com outro gráfico em que plotássemos um dos dois parâmetros do diagrama H-R com um outro parâmetro. Sendo assim, continuamos com a luminosidade e introduzimos a massa como novo parâmetro.

A idéia de tal plote surgiu, como já sabemos, com Eddington e os primeiros testes foram feitos com o plote de somente 4 estrelas: Krüger 60A; Sol; Sirius e Capella A. Não que só existissem estas 4 estrelas cujas massas fossem conhecidas, mas sim que se tratavam de estrelas cujas massas foram obtidas com certo rigor; (quanto à luminosidade já existiam determinações para um grande número de estrelas e com ótima precisão).

Abaixo o plote da época.



O interessante é que, pelo menos quando se consideram somente estrelas da sequência principal, observa-se que quanto mais massa possui uma estrela tanto mais luminosa ela é, mas não devemos generalizar esta afirmativa. O que foi dito anteriormente caracteriza, em termos qualitativos, uma relação massa-luminosidade.

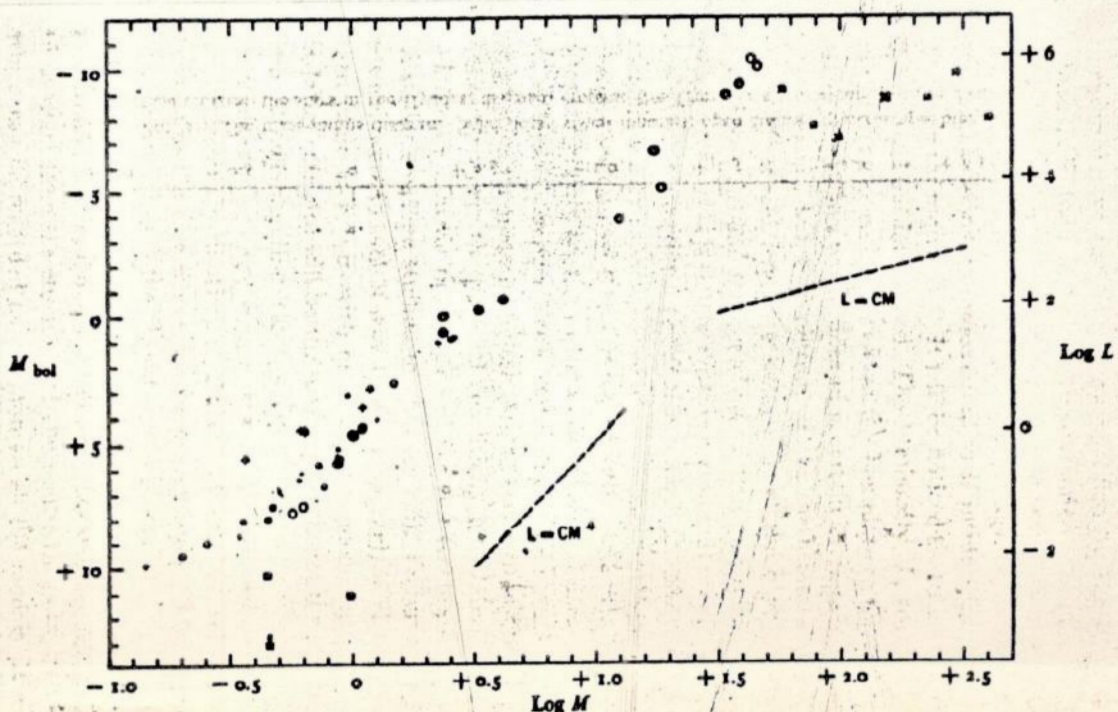
Aliás, e através dos comentários do parágrafo anterior, é que costumamos fixar "um" limite superior para massas estelares. Realmente não se trata de um valor de precisão; este limite tem por finalidade dar uma idéia das grandes massas do nosso Universo vi

sível.

O que se pode concluir, pelo menos para a sequência principal, é que a um aumento de massa corresponde um acréscimo de luminosidade. Dado que ^{Visto} luminosidades excessivamente grandes em relação ao Sol, como S Doradus que atinge $10^6 L_{\odot}$, são extremamente raras, podemos aceitar que valores de massas são bastantes restritos no que concerne a limites superiores. Entretanto, não poderíamos nos valer da mesma lógica para massas estelares muito inferiores à do Sol em virtude do decréscimo correspondente da sua luminosidade, o que as colocam, muitas vezes, fora do alcance dos detetores. Sendo assim, mesmo levando em conta a grande variedade de massas estelares, poderíamos afirmar, sem praticamente cometermos êrro, que as estrêlas possuem massas compreendidas entre 50 vezes maior do que a do Sol e 50 vezes menor do que a do Sol.
50 M_o e M_o/50

Na realidade podemos conduzir o nosso raciocínio da mesma forma, para afirmar que a quase total maioria das estrêlas possuem massas compreendidas no pequeno intervalo de 1/5 a 5 vezes a massa solar.

Abaixo damos o diagrama massa-luminosidade mais recente (não tanto assim!), e no qual vemos 3 estrêlas que se situam afastadas da relação massa-luminosidade enquanto as demais obedecem tal relação. Estas estrêlas, muito pouco luminosas para suas massas são Sirius B, Prócion B e 40 Eridano B. Tratam-se de anãs brancas, que provavelmente manifestam uma grande diferença na sua constituição interna em relação às outras estrêlas.



A existência da relação massa-luminosidade e a sua validade, em termos generalizados, se estende desde as gigantes azuis ou vermelhas às anãs vermelhas; não incluímos as anãs brancas pelo motivo anteriormente explicado.

A S P E C T O S A N A L I T I C O S D O D E S E N V O L -
V I M E N T O D A S E Q U A Ç Õ E S D E E S T R U T U R A
E S T E L A R Q U E R E L A C I O N A M M A S S A E L U -
M I N O S I D A D E .

As equações básicas da Estrutura Estelar são (Schwarzschild, 1957):

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} \quad (1)$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (2)$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (4)$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (5)$$

onde: $P, M_r, \rho, L_r, \epsilon, T, \kappa, a, c, \gamma$, representam respectivamente:

P - pressão total

M_r - massa contida na esfera de raio r .

ρ - densidade

L_r - luminosidade

ϵ - produção de energia por grama por segundo

T - temperatura

κ - coeficiente de absorção por grama

a - constante de Stefan-Boltzmann

c - velocidade da luz

γ - razão entre os calores específicos

A equação (1) descreve o equilíbrio hidrostático,

(2) define M_r , (3) é a lei da conservação de energia, (4) é a equa-

ção do transporte radioativo e (5) do transporte convectivo. As duas últimas representam formas alternativas e a aplicabilidade de uma delas depende das condições de estabilidade reinantes na massa da es-
trêla em consideração.

Além dêste conjunto de equações ainda necessita se-
rem levadas em conta uma equação de estado, uma equação para o coefi-
ciente de absorção e uma equação para ϵ .

Evidentemente, as equações acima tem que serem satis-
feitas em todos os níveis do interior estelar, e em particular nas
fronteiras do corpo, donde as condições de contôrno:

a) para a centro:

$$r=0: M_r=0, L_r=0$$

b) para a superfície:

$$r=R: T=0, P=0, \text{ ou } T=0, P \propto T^{5/2}.$$

(As condições b são obtidas pela Teoria das Atmosferas Estelares).

A unicidade das soluções do sistema acima fica ga-
rantida pelo teorema de Russell-Vogt.

Não se conhece nenhuma solução analítica geral pa-
ra o sistema de equações de (1) a (5). Os únicos métodos ainda aces-
síveis são os numéricos.

Apenas para fixar idéias suporemos que a estrêla
em questão possua um mecanismo de transporte do tipo convectivo. Pa-
ra elas deveríamos resolver o sistema de equações

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

Na Introdução Matemática analisamos equações do ti-

po $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, e chegamos a algumas conclusões sob o traçado da família de curvas integrais.

Imaginemos agora o seguinte problema: seja a equação

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

ou ainda:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \frac{M_r}{\frac{4}{3}\pi r^3} \epsilon$$

$$\frac{dL_r}{dr} = \frac{3}{r} \epsilon M_r$$

A razão de liberação de energia, como vimos anteriormente, é uma função que precisa ser conhecida antes que se possa resolver o sistema fundamental. Em outras palavras, apenas com as equações de (1) a (5), ϵ não pode ser determinado. Para evitar considerações sobre reações termonucleares, indispensáveis para o conhecimento de ϵ , uma vez que se trata de assunto que não conheço, entenderemos o produto ϵM_r como uma só função.

Por analogia com o processo gráfico descrito na Introdução Matemática, faremos

$$\frac{dL_r}{dr} = f(\epsilon M_r, r),$$

e analisamos a equação

$$f(\epsilon M_r, r) = \frac{3}{r} \epsilon M_r = c$$

Portanto, podemos verificar facilmente que a equação

$$\epsilon M_r = \frac{c}{3} r$$

representa uma família de isóclinas convergentes na origem de um referencial bidimensional de eixos ϵM_r e r . Para esta família, a inclinação dos elementos linha serão dados por

$$\alpha = \arctg c$$

Assim sendo, formaríamos uma sucessão de curvas que dariam o produto da liberação de energia por massa contida em uma esfera de raio r em função do raio vetor, para cada valor arbitrado do gradiente da lumi-

nosidade.

O resultado final, ainda de acôrdo com a teoria matemática citada em Introdução Matemática, seria uma curva solução da forma:

$$\epsilon M_\lambda = g(r) , \quad (6)$$

e então podemos escrever :

$$f[g(r), r] = G(r).$$

Logo:

$$\frac{dL_r}{dr} = G(r) ,$$

donde:

$$L_r = \int G(r) dr , \quad (7)$$

Admitindo-se que ϵ seja uma função conhecida as equações (6) e (7) nos permitiria formar uma relação massa-luminosidade.

Devemos considerar brevemente a constante c . Em primeiro lugar ela tem que ser positiva, pela própria estrutura da equação de conservação de energia. Em seguida, é fato experimental que a luminosidade ejetada pelas estrêlas depende dos respectivos tipos, e assim, em certa medida, a arbitrariedade de c tem que ser limitada pelos tipos estelares.

Apenas como referência podemos apresentar um exemplo de como se trataria uma das equações diferenciais de (1) a (5), por exemplo, a equação (2). Para tanto, admitimos que $M(r)$ possa ser desenvolvida em uma série de Taylor, nas vizinhanças do ponto $r=0$:

$$M_\lambda = M_0 + M'_0 \lambda + \frac{M''_0 \lambda^2}{2!} + \dots$$

$$M_\lambda = \sum \frac{M_0^{(u)} \lambda^u}{u!}$$

Por aplicações sucessivas da equação (2) é possível fixar os $M_0^{(n)}$ em função das derivadas de ρ em relação a r . Estas últimas formam um sistema de constantes desconhecidas, que necessitam ser ajustadas a cada problema específico.

Naturalmente, e devido ao teorema de Russell-Vogt, ambos os métodos devem, teóricamente, conduzir ao mesmo sistema de soluções.

P R O J E T O

Completada a apresentação dos tópicos que nos pareceram necessários, resta definir a proposição para um futuro desenvolvimento de pesquisas.

Atravéz de diversos dados obtidos experimentalmente para massas estelares, poderíamos achar a função $g(r)$ admitindo, é claro, o conhecimento da produção de energia. Esta função sendo calculada poderíamos recorrer à

$$\epsilon M_{\chi} = \frac{c}{3} \kappa,$$

determinando assim a constante c que é, como já vimos, característica dos diversos tipos estelares. Ora, atingimos assim à essência do trabalho, pois com c calculado fixaremos não só a família de isóclinas, como também a configuração elemento linha. Em seguida determinamos as curvas integrais, que são, na realidade, solução da equação diferencial proposta.

Como verificação experimental, esta pesquisa poder-se-ia iniciar imediatamente para estrelas binárias eclipsantes, espectroscópicas e visuais. Com isso caracterizaríamos a constante c para os tipos acima citados; aliás tais tipos foram citados em virtude da quantidade de valores já calculados para os parâmetros massa, luminosidade e raio.

Evidente que esta pesquisa poderia ser estendida a qualquer estrela, já que o desenvolvimento teórico matemático foi geral. Entretanto as verificações teóricas terão que aguardar ainda alguns anos, quando então os parâmetros fundamentais da Estrutura Estelar estarão bem determinados, para tais estrelas.

É bom acrescentar que o traçado das isóclinas, bem como das curvas integrais, é manualmente difícil e tedioso. Mas isto não constitui nenhum problema, porquanto poderíamos construir programas para computadores, ou até mesmo para a calculadora HP 9100B.

Este trabalho, sob o ponto de vista teórico, apresen

ta as equações

$$\begin{cases} EM_r = g(r) \\ L_r = \int G(r) dr, \end{cases}$$

como uma maneira de formar uma relação massa-luminosidade, que difere das tradicionais $L \propto M^2$, $L \propto M^3$, $L \propto M^4$ e etc., por não possuírem em seu conteúdo uma constante explícita (que é calculada anteriormente, pelos processos citados). As tradicionais contêm explicitamente tais constantes.

-X-X-X-X-X-X-X-X-X-

B I B L I O G R A F I A

- 1) Joy, A.H., 1930, A Spectrographic Study of U Sagittae, Astrophysical Journal, 71/336.
- 2) Silva, A.S., et Rebelo, I.M.N., 1971, Orbite de l'Étoiles Double Visuelle λ 143 e les Paramètres Physiques Correspondants, Comunicação do Observatório Astronomico da Universidade de Coimbra, nº7.
- 3) Strand, K.Aa., 1969, The Orbit of Eta Cassiopeiae, The Astronomical Journal, 74/761.
- 4) Heintz, W.D., 1969, Parallaxes and Masses of the Visual Binary Stars ADS 3475, 8862, 9617 and 16326, The Astronomical Journal, 74/768.
- 5) Van de Kamp, P., Andersen, S.E., 1969, Parallaxe and Orbital Motion of the Spectroscopic Binary Tau Persei, The Astronomical Journal, 74/235.
- 6) Schwarzschild, M., 1958, Structure and Evolution of the Stars, Princeton University Press, New Jersey.
- 7) Ross, S., 1964, Diferential Equations, Blaisdell Publishing Company, London.
- 8) Eddington, A., 1959, The Internal Constitution of the Stars, Dover Publications Inc., New York.
- 9) Chandrasekhar, S., 1960, Radiative Transfer, Dover Publications Inc., New York.
- 10) Aitken, R., 1963, The Binary Stars, Dover Publications Inc., New York.
- 11) Chandrasekhar, S., 1967, An Introduction to the Study of Stellar Structure, Dover Publications Inc., New York.
- 12) Johnson, M., 1959, Astronomy of Stellar Energy and Decay, Dover Publications Inc., New York.
- 13) Evans, D., 1968, Observations in Modern Astronomy, Dover Publications Inc., New York.
- 14) Menzel, D.H., Whipple, F.L., de Vaucouleurs, G., 1970, Survey of the Universe, Prentice-Hall Inc., New Jersey.

- 5) Pecker, J.C., Schatzman, E., 1959, *Astrophysique Générale*, Masson et Cie. Editeurs, Paris.
- 6) Kaplan, W., 1963, *Advanced Calculus*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Massachusetts.
- 7) Milne, W.E., 1970, *Numerical Solutions of Differential Equations*, Dover Publications Inc., New York.
- 8) Levy, H., Baggott, E.A., 1950, *Numerical Solutions of Differential Equations*, Dover Publications Inc., New York.
- 9) Rudaux, L., de Vaucouleurs, G., 1966, *Astronomia*, Editorial Labor S.A, Madrid.
- 10) Swihart, T.L., 1968, *Astrophysics and Stellar Astronomy*, John Wiley e Sons Inc., New York.
- 11) Chiu, H.Y., 1968, *Stellar Physics (vol. I)*, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts.