REDUÇÃO AO DIA

Peggy Dumas
Peggy Dumas

Indice

I- Introdução

O presente manual tem como objetivo principal, tornar mais fácil o acesso aos dados em relação ao tema "Redução ao Dia", ajudando assim aos interessados a ultrapassarem com maior objetividade os obstáculos da pesquisa sôbre o assunto.

Já há muito tempo se fazia presente a necessidade da sintetização em um só trabalho, de maneira didática, objetiva e prática, dos diversos artigos já publicados sôbre "Redução ao Dia", e então / surgiu a idéia dêste manual. Um dos maiores fatores desta necessidade foi a falta de um livro texto atualizado. Um outro fator, que também motivou a confecção dêste, foram as grandes diferenças na forma/ de apresentação e resolução dos problemas (diferenças de fórmulas, / etc.) por parte dos diversos autores consultados; o manual visa, igualmente, eliminar êste problema, baseado nos dados e nos textos / mais atualizados sôbre o assunto.

O estudo da "Redução ao Dia" tem um carater bastante amplo e o presente manual tanto poderá ser útil para a Astrometria (Uma / vez que êste ramo da Astronomia tem por finalidade a pesquisa de referenciais inerciais, obtidos através de posições de astros em diferentes datas), como poderá servir de guia prático para todos os que/ lidam com o problema, como uma introdução na aplicação em diversos / outros ramos de pesquisas de Astronomia.

Contém ainda o manual alguns exercícios resolvidos que julguei serem da maior valia para exemplificar e praticar o desenvolvimento da teoria, evidenciando os pontos mais importantes do assunto, obrigando então o leitor a uma revisão e ao suprimento das dificuldades encontradas.

Introduzimos as definições e conceitos básicos sôbre Pre-/cessão, Nutação, Aberração e Movimento Próprio, que achei serem indispensáveis para uma melhor compreensão de tôda a teoria explanada/ a seguir.

Como observação final convém lembrar que as diversas constantes referidas no texto que se segue, não podem ser precisamente / definidas, sob pena de introduzirmos uma complexidade desnecessária/ ao tema. Tais constantes exigem para suas definições conhecimentos avançados na teoria e na prática Astronômica, e portanto estão fora / do presente contexto. Para exemplificar, a precessão geodésica é dada por uma expressão cuja dedução pode ser encontrada no livro Chazy, J., La Théorie de la Relativité et la Mécanique Céleste, vol.II, Paris, 1930, conforme citação do Explanatory Supplement to the Ephemeris para 1961 na página 170.

II- Definição do Problema

Passamos agora as definições e desenvolvimentos sôbre:

A- Precessão

B- Nutação

C- Aberração

D- Movimento Próprio,

fundamentais para o entendimento da "Redução ao Dia".

A- Precessão

O achatamento da Terra, combinado com a obliquidade da eclítica, resulta numa volta lenta do equador na eclítica devido ao efeito diferencial gravitacional da Lua e do Sol. Desde que esses efeitos são proporcionais a massa e inversamente proporcional ao cubo da distância do corpo pertubador, o efeito da Lua é em média o dôbro do efeito do Sol (da mesma forma para as marés).

Precessão Luni-Solar, Planetária e Geral; considerações gerais.

A retrogradação secular, isto é, na direção do decréscimo / da longitude, do equinócio vernal ao longo da eclítica é chamado de / precessão luni-solar p, que totaliza de 50",3708 para a época de 1900 A obliquidade da eclítica $\mathcal{E}$ para a mesma época é de $23^{\circ}27'8\overset{''}{,}26$. Tanto p, $\mathcal{E}$, e a maioria das constantes astronômicas, são sujeitas a pequenas variações seculares. A precessão luni-solar origina nos polos celestes descrevendo pequenos círculos com um raio de $23^{\circ}27'$ e um período de aproximadamente 25.725 anos em tôrno dos polos norte e sul da eclítica. Êstes círculos são chamados de círculos precessionais.

A precessão planetária ℓ é o deslocamento lento da eclítica que se apoia no equador, ocasionado pelo efeito gravitacional dos planêtas na órbita da Terra. A consequência é o movimento do equinócio / vernal ao longo do equador na direção crescente da ascensão reta. A / combinação das precessões luni-solar e planetária, isto é, o movimento do equinócio ao longo da eclítica, é a precessão geral $\chi = p - \ell\cos\mathcal{E}$

Newcomb introduziu a constante de precessão (precessional) $P = (p - p_g)\sec\mathcal{E}$ onde p_g é a precessão geodésica similar a precessão geral porém de sentido oposto que é igual a +0",0192 por ano e igual a +1",915 por século. Esta medida é determinado pelas propriedades inerciais da Terra, as massas da Terra, Lua e Sol, e os elementos da órbita da Terra e da Lua.

Para a época de 1900, P = 54",9272, sua variação secular é de -0",00004. A variação secular de p, é de+0",0050 e a de $\mathcal{E}$ é igual a / -46",84.

A razão anual dos têrmos de precessão em diferentes coordenadas são sumarizados abaixo. O valor dessas quantidades aplicadas ao movimento do equinócio (contado positivo na direção do decréscimo das coordenadas: longitude, ascensão reta e declinação) e para os efeitos dessas quantidades nas coordenadas medidas com relação ao equinócio / são dados abaixo:

Precessão luni-solar em longitude: $p = +50'',3708 + 0'',0050\ T$

Precessão planetária em longitude: $-\ell \cos\varepsilon_1 = -0'',1144 + 0'',0172\ T$

Precessão Geral em longitude: $\chi = p - \ell \cos\varepsilon_1 = +50'',2564 + 0'',0222\ T$

Precessão luni-solar em ascensão reta: $p \cos\varepsilon_1 = +46'',2098 + 0'',0046\ T$

Precessão planetária em ascensão reta: $-\ell = -0'',1247 + 0'',0188\ T$

Precessão geral em ascensão reta: $m = p \cos\varepsilon_1 - \ell = +46'',0851 + 0'',0279\ T$
$= +3^s,07234 + 0^s,00186\ T$

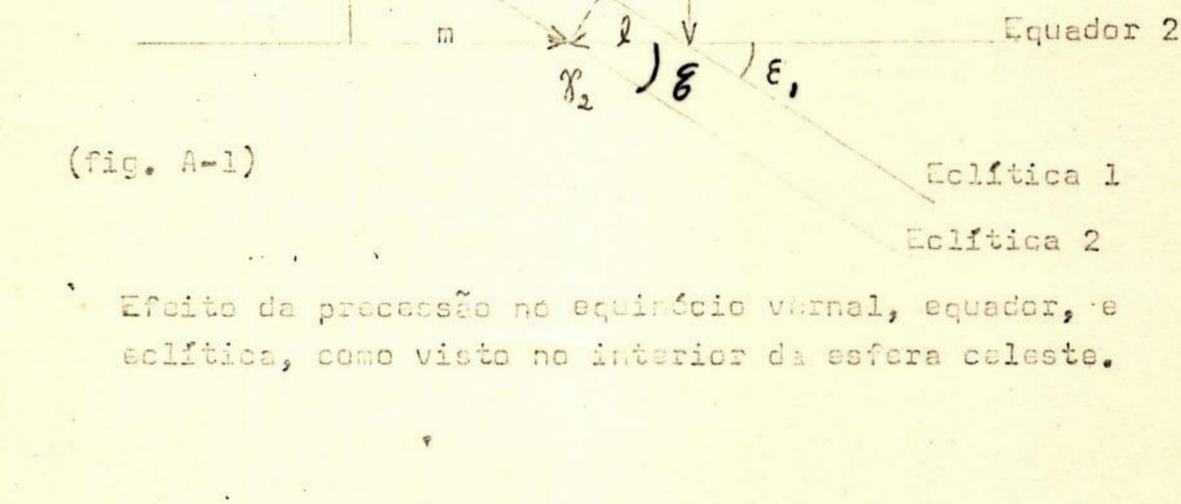
Precessão geral em declinação: $n = p \operatorname{sen}\varepsilon_1 = +20'',0468 - 0'',0085\ T$
$= +1^s,33646 - 0^s,00057\ T$

Longitude dos eixos de rotação da eclítica, isto é, do nodo ascendente da posição instantânea da eclítica na posição precedente; referido ao equinócio médio da data: $\pi_1 = 173^\circ\ 57',06\ 54',77\ T$

Razão anual da rotação da eclítica: $\pi_2 = 0'',4711 - 0'',0007\ T$

Obliquidade da eclítica: $\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 08'',26 - 46'',845\ T - 0'',0059\ T^2 + 0'',00181\ T^3$

T é medido em séculos trópicos a partir de 1900.



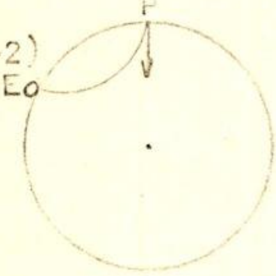
(fig. A-1)

Efeito da precessão no equinócio vernal, equador, e eclítica, como visto no interior da esfera celeste.

Êstes valores continuam sendo os valores oficiais adotados e são devido a Simon Newcomb.

Nota-se que o polo celeste se move continuamente voltado para o equinócio a uma razão anual de $n = p$ sen$\mathcal{E}$, medido ao longo do grande círculo (fig. A-2). A grandeza ℓ pode ser obtida por considerações teóricas (pertubações seculares), p pode ser encontrado somente através discussão de movimento próprio estelar.

(fig. A-2)

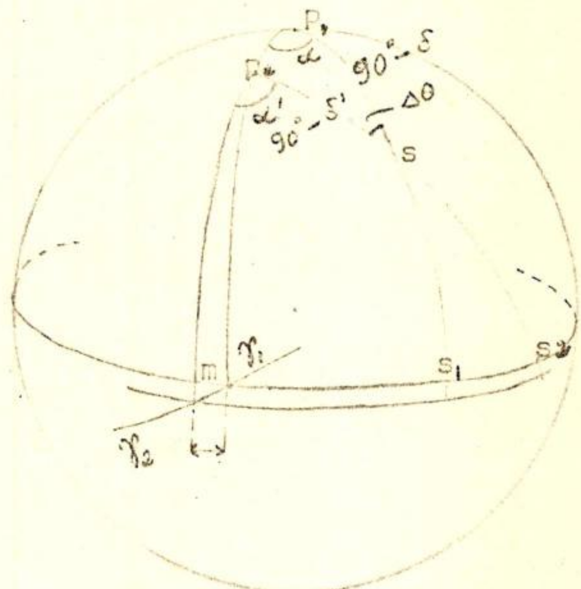


Movimento do polo celeste P no círculo precessional centrado no polo da eclítica.

Efeito da precessão Luni-Solar no círculo horário e ângulo de posição.

Precessão provoca uma variação lenta no círculo horário para uma estrêla s, e nas coordenadas equatoriais α e δ (fig. A-3)

(fig. A-3)



Efeito da precessão no círculo horário, ângulo de posição, e em ascensão reta e declinação.

$\Delta\theta$ razão anual no qual o círculo horário se desloca. P_1 e P_2 são os polos do equador separados de um ano por $n = p$ sen $\mathcal{E}$.

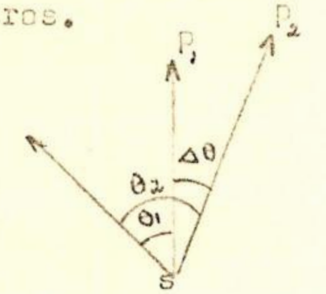
$$\frac{\operatorname{sen}\Delta\theta}{\operatorname{sen} n} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\delta'}$$

Desde que $\Delta\theta$ e n são pequenos, e substituindo δ' por δ,

$$\Delta\theta = n\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\delta} = +\,0^{\circ},00557\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\delta} \quad \text{anualmente.} \qquad (A-1)$$

A quantidade $\Delta\theta$ representa a variação da estrêla em ângulo de posição (fig. A-4). Êste efeito desempenha um papel importante, quando compararmos por exêmplo, os ângulos de posição de estrêlas duplas obtidos/ em diferentes épocas, operação necessária no cálculo da órbita relativa desses astros.

(fig. A-4)



Variação em ângulo de posição devido a precessão.

Efeito de precessão nas posições estelares.

O efeito de precessão na longitude e latitude celeste é / muito simples. Tôdas as longitudes aumentam do valor anual χ, e menores variações ocorrem na latitude por causa da precessão planetária.

De particular interêsse é o efeito de precessão em ascensão reta e declinação das estrêlas.

Seja P_1 e P_2 os polos do equador, separados de um ano, γ_1 e γ_2 os correspondentes equinócios; os polos são separados por $n = p\operatorname{sen}\varepsilon$ medidos ao longo do grande círculo. O aumento em ascensão reta devido a precessão consiste de duas partes:

1— a quantidade m devido a precessão geral do equinócio,

2— a quantidade $s_1 s_2$ onde s_1 e s_2 são as interseções de dois sucessivos círculos horários com o equador. Isto é visto através do triângulo esférico $s s_1 s_2$. Temos:

$$s_1 s_2 = \Delta\theta \operatorname{sen}\delta$$

Ou, desde que

$$\Delta\theta = n\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\delta}$$

Encontramos: $\quad s_1 s_2 = n \operatorname{sen}\alpha \tan\delta$

O efeito da precessão total em ascensão reta é:

$$pr_{\alpha} = m + n \operatorname{sen}\alpha \tan\delta$$

A quantidade pr_{α} refere ao efeito da precessão da coordenada (α) ascensão reta.

Se é desejado expressar essa quantidade na localidade da / estrêla, mede-se ao longo do grande círculo multiplicando por $\cos\delta$. Vem:

$$pr_{\alpha}\cos\delta = m\cos\delta + n\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\delta$$

Para obter o efeito da precessão em declinação aplicamos a regra dos cosenos para o triângulo $P_1 P_2 s$,

$$\operatorname{sen} \delta' = \cos n \operatorname{sen} \delta + \operatorname{sen} n \cos \delta \cos \alpha \qquad (A-1)$$

Também:

$$\operatorname{sen} \delta' = \operatorname{sen} (\delta + pr_\delta), \qquad (A-2)$$

onde pr_δ é a variação anual em declinação devido a precessão.

Ou, desde que pr_δ e n são muito pequenos podemos escrever (A-1) como:

$$\operatorname{sen} \delta' = \operatorname{sen} \delta + n \cos \delta \cos \alpha$$

e (A-2) como:

$$\operatorname{sen} \delta' = \operatorname{sen} \delta + pr_\delta \cos \delta$$

Vimos que:

$pr_\delta = n \cos \alpha$, têrmo de primeira ordem do efeito processional em declinação.

B- Nutação

Nutação é essencialmente a parte do movimento precessional do polo do equador da Terra o qual depende dos movimentos periódicos do Sol e da Lua em suas órbitas ao redor da Terra.

O principal efeito é dado pela retrogradação da linha dos/ nodos da órbita da Lua na eclítica. Pode ser representada por um movimento elítico dos polos celestes com o sêmi eixo maior de 9",2 perpendicular ao movimento precessional, e o semi eixo menor de 6",8 ao longo do círculo precessional, num período de 18,6 anos ou 6798 dias.

Na teoria da ação gravitacional do Sol e da Lua na rotação não esférica da Terra, outros têrmos aparecem os quais dependem de / longitudes e anomalias médias do Sol e da Lua e em suas combinações/ com a longitude do nodo da Lua. A transformação do polo médio para a verdadeira pode ser resolvida com as correções para a longitude ($\Delta\psi$, nutação em longitude) e para a obliquidade média ($\Delta\varepsilon$, nutação em / obliquidade), e expressões em séries constituem especificação formal de nutação. A teoria e as séries numéricas para o qual a nutação é baseada estão desenvolvidas em detalhes por E.W. Woolard em A.P.A.E., 15, part I, 1953.

Nutação é convencionalmente dividido em têrmos de longo e curto período; o último consiste de têrmos com período inferior a 35 dias que são somados separadamente com $d\psi$ e $d\varepsilon$, que são os têrmos de / nutação de curto período em longitude e em obliquidade respectivamente.

Os valores da nutação tem sido calculados através de séries dadas para 0h (tempo de efemérides) para cada dia a partir de 1900, até 2000.

Para 1900 até 1959 estão publicados no Royal Observatory Annals, Number I; os valores para 1952 até 1959 tem sido também incluídos no Improved Lunar Ephemeris 1952-1959. Em cada publicação é dado uma descrição do método usado para o cálculo (através de calculadores ele - trônicas).

A nutação em longitude $\Delta\psi$, adicionado para longitudes medido do equinócio médio da data, é tabelado para 0",001 para 0h T.E. A nutação em obliquidade $\Delta\varepsilon$, não é tabelado diretamente, mas está / contida na obliquidade da eclítica e é obtido no American Ephemeris imediatamente.

Os têrmos de curto período em longitude e obliquidade, $d\psi$ e $d\varepsilon$, são também tabelados todos para 0",001. Os têrmos de longo período $\Delta\psi - d\psi$ e $\Delta\varepsilon - d\varepsilon$ não são tabelados separadamente no Ephemeris, embora valores especiais de intervalo de 10 dias siderais estão reunidos dentro dos números do dia usado para o cálculo das posições aparentes das estrêlas com intervalo de 10 dias, publicado no Apparent/ Places of Fundamental Stars.

A interseção do equador com a eclítica verdadeiros (afetado pela precessão e nutação), é conhecida como o verdadeiro equinócio da data; e, onde uma distinção é conveniente, tôdas as coordenadas referidas a êste sistema de referência do equinócio, equador e eclítica verdadeiros da data, são indicadas pelas palavras "verdadeiro"/ ou "aparente".

A ascensão reta do equinócio médio referido ao equador verdadeiro e equinócio é a nutação em ascensão reta, o qual foi editado anteriormente a 1960 como a equação dos equinócios. Que é igual a / $\Delta\psi \cos\varepsilon$, e representa a diferença entre as ascensões retas média e verdadeira para um corpo no equador; é por isso a diferença entre / tempo sideral médio e aparente. A equação dos equinócios é tabelado/ para 0^s,001 no American Ephemeris.

O método mais simples e direto de conversão de posições de equinócio e equador médios para verdadeiros, é adicionar $\Delta\psi$ na / longitude, desde que a eclítica e por isso a latitude, sejam inalterados pela nutação. Na conversão de coordenadas eclíticas em equatoriais, a obliquidade verdadeira $(\varepsilon = \varepsilon_o + \Delta\varepsilon)$ pode ser utilizada. / Sendo que as coordenadas referidas ao equinócio verdadeiro não podem ser interpoladas a intervalos maiores que um dia. As correções $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ para ascensão reta e declinação, podem ser calculados de:

$$\Delta\alpha = (\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}\alpha \tan\delta)\Delta\psi - \cos\alpha \tan\delta . \Delta\varepsilon$$

$$\Delta\delta = \operatorname{sen}\varepsilon \cos\alpha . \Delta\psi + \operatorname{sen}\alpha \, \Delta\varepsilon$$

Fórmulas que dão a variação em declinação e em ascensão reta da es -

trêla devido a nutação em longitude e em obliquidade. São invariavelmente combinados com a redução para precessão do equinócio médio do início do ano pelos números do dia.

Nutação Diferencial.

Numa pequena área do céu, os efeitos de precessão e nutação variam lentamente; e então as correções de precessão e nutação para / objetos moventes diferirão um pouco daqueles das estrêlas próximas , para o qual as posições dos objetos moventes podem ser referidas. Desde que as posições de estrêlas para o equinócio 1950,0, ou para o início do ano, sejam conhecidas é necessário somente aplicar correções / para precessão e nutação diferencial para fornecer as posições dos objetos moventes referidos ao mesmo equinócio.

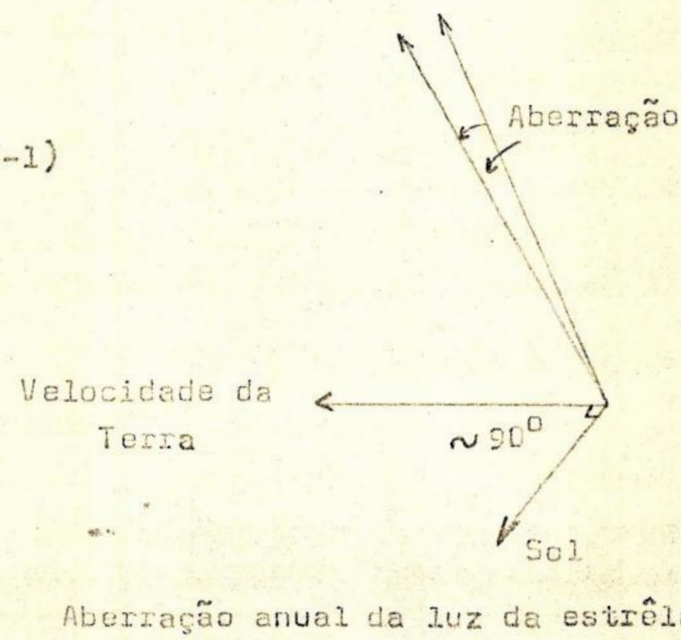
O efeito de nutação diferencial é sempre pequena, e é conveniente combinar precessão e nutação em uma correção.

C- Aberração

Círculo de aberração, hodógrafo.

A velocidade finita da luz conduz ao efeito da aberração estelar, a inclinação da direção aparente da estrêla voltado para a direção do movimento do observador (fig. C-1).

(fig. C-1)



Aberração anual da luz da estrêla

Aberração anual é o resultado do movimento orbital da Terra ao redor do Sol. A velocidade orbital total V, é a resultante das componentes V_θ e V_r , perpendicular e ao longo do raio vetor Terra-Sol./ As seguintes equações:

$$V_\theta = \frac{2\,G}{\rho}(1 + e \cos v), \qquad (C\text{-}1)$$

$$V_r = \frac{2\,G}{\rho}\, e \operatorname{sen} v, \qquad (C\text{-}2)$$

onde ξ e ρ representam a velocidade areolar e o parâmetro da órbita, / e, v a excentridade e anomalia verdadeira. É conveniente introduzir a / velocidade circular Vc, correspondendo a uma idealizada órbita da Terra com um raio igual a distância média β , e um período igual ao ano / sideral,

$$V_c = \frac{2\pi\beta}{Q}$$

Pela definição de parâmetro temos:

$$\rho = \beta(1 - e^2)$$

e a velocidade areolar:

$$\xi = \frac{\pi\beta^2(1 - e^2)^{1/2}}{Q}$$

teremos:

$$\frac{2\xi}{\rho} = \frac{2\pi\beta}{Q}(1 - e^2)^{-1/2}$$

ou:

$$\frac{2\xi}{\rho} = V_c(1 - e^2)^{-1/2}$$

As equações (C-1) e (C-2) podem ser escritas como:

$$V_\theta = V_c(1 - e^2)^{-1/2}(1 + e\cos v),$$

$$V_n = V_c(1 - e^2)^{-1/2}\, e \operatorname{sen} v$$

Estas componentes retangulares podem ainda ser escritos como:

$$V_\theta = K + eK\cos v \quad ,$$

$$V_n = eK \operatorname{sen} v$$

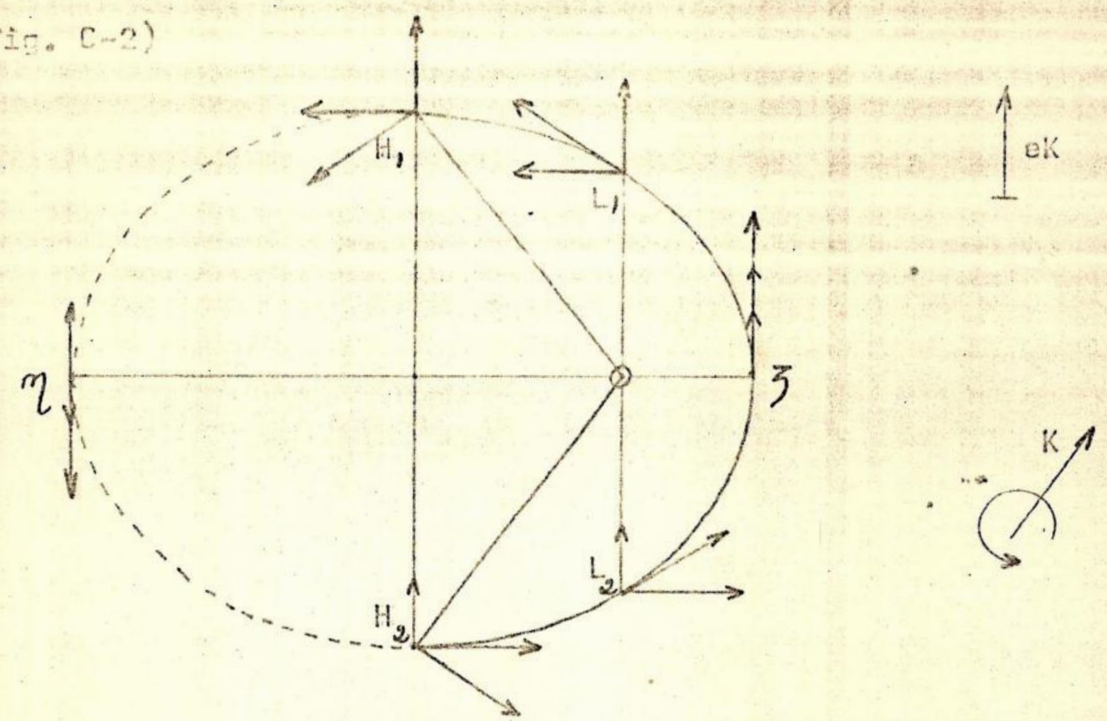
onde

$$K = V_c(1 - e^2)^{-1/2}$$

V_θ consiste de um têrmo constante K , diretamente perpendicular ao raio vetor, mais o têrmo eK cos v , o qual junto com $V_n = eK \operatorname{sen} v$ define o têrmo constante eK na direção $v = 90^o$. V pode ser considerada a resultante da velocidade circular constante K o qual é perpendicular ao raio vêtor, constantemente girando, e a velocidade eK na direção constante $v = 90^o$, perpendicular ao eixo maior (figs. C-2 e C-3)

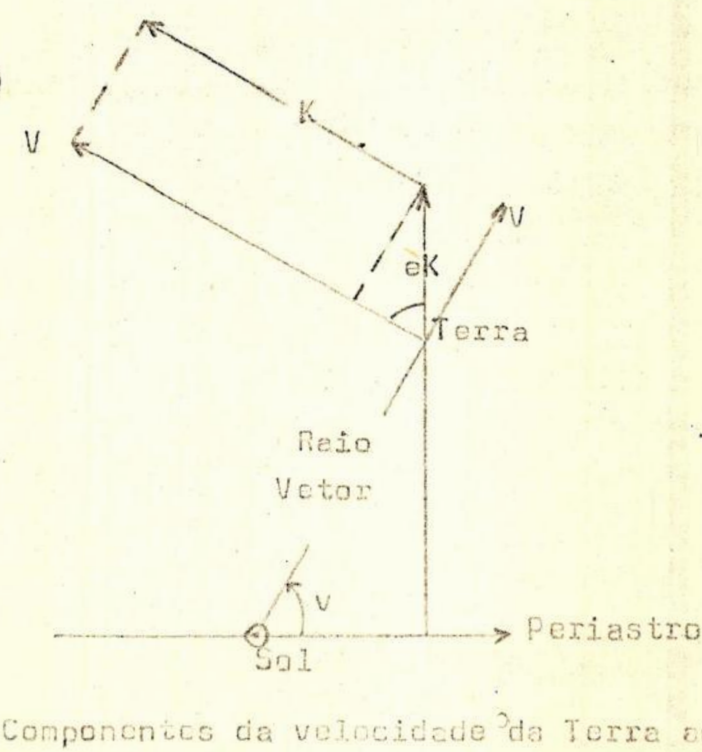
Os vetores velocidade V definem um círculo com raio K ; os / vetores com origem no ponto O , a uma distância eK do centro do círculo oposto a direção $v = 90^o$. A anomalia verdadeira v aparece no centro do círculo, indicando a direção da V_θ . Os vetores velocidade no / periastro ζ , apoastro η , e o final do latus rectum L_1 e L_2 são representados por $O\zeta$, $O\eta$, OL_1, OL_2, representando $v = 0^o, 180^o, 90^o$, e 270^o, / respectivamente.

(fig. C-2)



Vetores velocidade do periastro, apoastro, extremidades do latus rectum, e nas extremidades do eixos menores, para e = 0,6

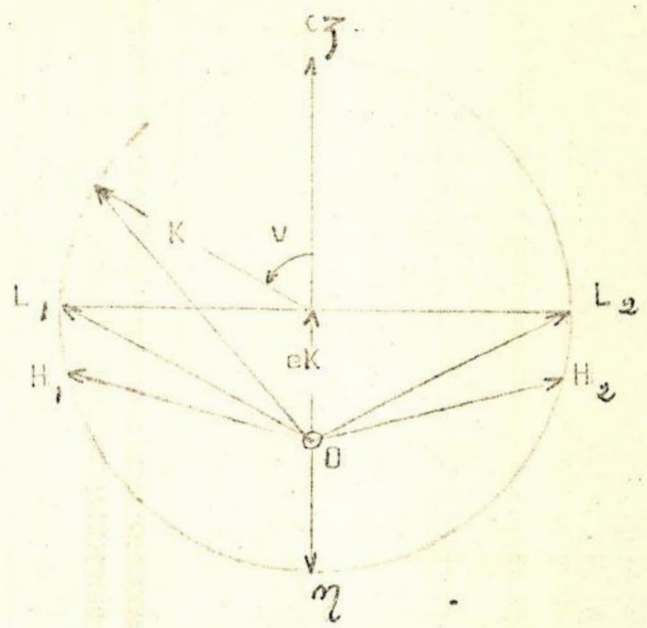
(fig. C-3)



Componentes da velocidade da Terra ao longo e perpendicular ao raio vetor.

Os vetores velocidade no fim dos menores eixos H_1 e H_2 são representados por OH_1 e OH_2. São vetores iguais ao raio $K = Vc(1 - e^2)^{-1/2}$ do círculo (fig. C- 4).

(fig. C-4)

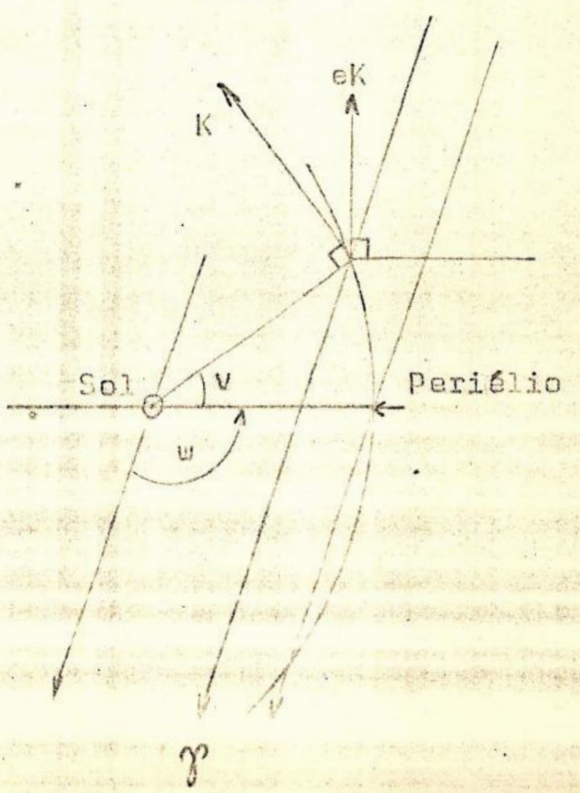


Hodógrafo mostrando as velocidades orbitais como resultante da componente K perpendicular ao raio vetor e a componente eK perpendicular ao eixo maior.

As longitudes dos vetores velocidade K e eK são relacionadas para a longitude do Sol ⊙ e a longitude heliocentrica ϖ do periélio (ϖ é igual a 100^o, e difere de 180^o da longitude geocentrica do perigeu). Vemos da (fig. C-5) que:

Longiyude do vetor velocidade K : ⊙ $- 90^o$
Longitude do vetor velocidade eK : $\varpi + 90^o$

(fig. C-5)



Relação entre anomalia verdadeira, longitude do Sol ⊙ , e longitude heliocentrica ϖ do periélio.

O efeito aberracional momentâneo depende da direção da estrêla e da posição da Terra em sua órbita. O efeito aberracional do/ polo da eclítica é um círculo, e a posição heliocêntrica da estrêla/ difere do centro do círculo de aberração de:

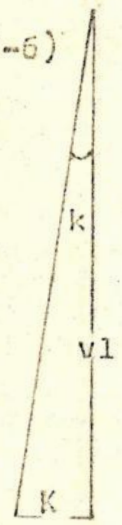
$$eK = e\, Vc\, (1 - e^2)^{-1/2}$$

A escala do efeito da aberração estelar em medida angular/ é dada pela "constante da aberração", vista na (fig. C-6).

$$k = \frac{K}{vl} = \frac{Vc(1 - e^2)^{-1/2}}{vl} = 20'',506$$

onde $Vc = 29,8$ Km/seg é a velocidade circular na órbita da Terra,
$e = 0,01675$ é a excentrcidade da órbita da Terra,
$vl = 299.792,5$ Km/seg é a velocidade da luz.
O correspondente efeito $ek = eK/vl$ totaliza somente $0'',34$.

(fig. C-6)



Relação entre a constante da aberração k, velocidade K, e velocidade da luz vl.

O efeito aberracional de uma estrêla em uma outra direção/ será considerado a resultante de dois efeitos devido as componentes/ da velocidade orbital: a perpendicular ao raio vetor e a perpendicular ao eixo maior da órbita da Terra. Os valores dos efeitos são k e eK, respectivamente. Ambos os efeitos são afetados pelo fator sen θ, onde θ é o ângulo entre a direção da estrêla e a direção do vetor velocidade considerado.

<u>Efeitos em longitude e latitude</u>

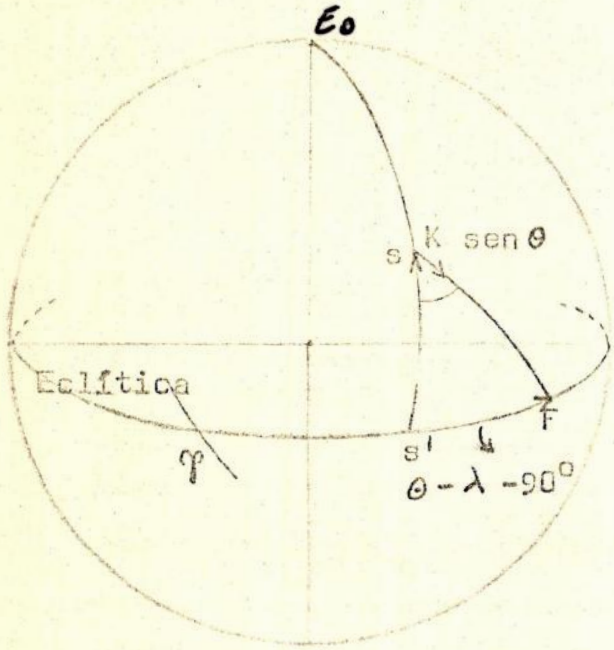
<u>Efeito devido ao vetor velocidade</u> K. — Como um resultado do vetor / velocidade K, a estrêla é deslocado pelo valor k sen θ em relação / ao ponto F na eclítica, em longitude $\odot - 90^{\circ}$ (fig. C-7). O efeito/ aberracional resultante é:

Em longitude (grande círculo): $k \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$,
Em latitude : $k \operatorname{sen}\theta \cos\phi$,

onde ϕ é o ângulo de posição da estrêla do arco sF para o círculo de latitude da estrêla. O arco Fs' é igual a $(\odot - \lambda) - 90^{\circ}$.

O triângulo retângulo esférico ss'F fornece:

(fig. C-7)



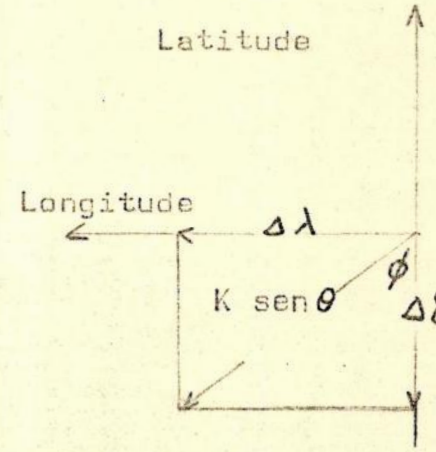


Diagrama visto no interior da esfera celeste.

Aberração em longitude e latitude.

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}(\odot - \lambda - 90^{\circ}) = -\cos(\odot - \lambda),$$

$$\operatorname{sen}\theta \cos\phi = \cos(\odot - \lambda - 90^{\circ}) \operatorname{sen}\gamma = -\operatorname{sen}(\odot - \lambda) \operatorname{sen}\gamma.$$

Encontramos:

Aberração em longitude (grande círculo): $-k \cos(\odot - \lambda)$,
Aberração em latitude : $-k \operatorname{sen}(\odot - \lambda) \operatorname{sen}\gamma$.

<u>Efeito devido ao vetor velocidade</u> eK — Como um resultado da constante vetor velocidade eK, a estrêla é deslocada pelo valor $eK \operatorname{sen}\theta$ com relação a um ponto na eclítica, em longitude $w + 90^{\circ}$. Substituindo $w + 90^{\circ}$ por $\odot - 90^{\circ}$, isto é, $(w - \lambda - 180^{\circ})$ por $(\odot - \lambda)$,/ e seguindo o processo anterior vem:

Aberração em longitude (grande círculo): $+ek \cos(w - \lambda)$,
Aberração em latitude : $+ek \operatorname{sen}(w - \lambda) \operatorname{sen}\gamma$.

<u>Efeitos em ascensão reta e declinação</u>

<u>Efeito devido ao vetor velocidade</u> K — Na (fig. C-8) notamos que / os efeitos aberracionais são:

Em ascensão reta (grande círculo): $k \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} X$
Em declinação : $k \cos \theta \cos X$

onde X é o ângulo de posição da estrêla.

Os efeitos aberracionais são:

Em ascensão reta (grande círculo): $-k(\cos \varepsilon \cos \alpha \cos \odot + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \odot)$,

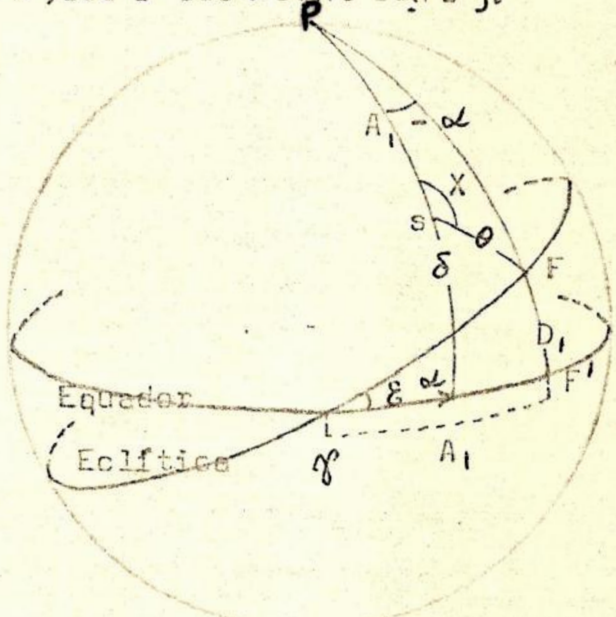
Em declinação : $-k\{(\operatorname{sen} \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta)\cos \odot + \cos \alpha \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \odot\}$.

Efeito devido ao vetor velocidade eK — Substituindo $w + 90^{\circ}$ por / $\odot - 90^{\circ}$, isto é, $w + 180^{\circ}$ por $\odot$, vem:

Aberração em ascensão reta (grande círculo): $+ek(\cos \varepsilon \cos \alpha \cos w + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} w)$

Aberração em declinação : $+ek\{(\operatorname{sen} \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta)\cos w \ \cos \alpha \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} w\}$.

(fig. C-8)



Aberração em ascensão reta e declinação.

Efeito de excentricidade da órbita da Terra.

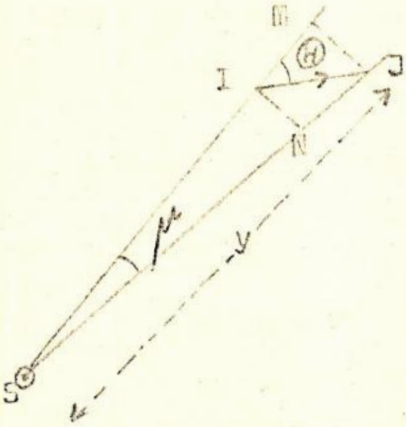
O centro da elipse aberracional difere da posição verdadeira da estrêla pelos fatores constantes em longitude e latitude e em ascensão reta e declinação.

As quantidades contendo e são omitidos por convenção, isto é, a excentricidade da órbita da Terra não é levado em conta. O êrro introduzido é no máximo 0",3 e quase constante para alguma estrêla através dos séculos.

D- Movimento Próprio.

Foi descoberto por Halley que a posição de certas estrêlas são alteradas, desde o tempo de Hiparco, com relação ao fundo este - lar geral. Vamos supor que tôdas as estrêlas com exceção de Arturus, estão a uma distância infinita do Sol, de maneira que êles formam um sistema definido por pontos referenciais fixos. Arturus tem se movido num intervalo de aproximadamente 20 séculos de um ângulo de um / grau, com referência as estrêlas vizinhas na esfera celeste.

(fig. D-1)



Seja S o Sol e supondo que uma estrêla se desloca de I para J no pe - ríodo de um ano. O deslocamento da estrêla no espaço pode ser suposto uma linha reta (fig. D-1).

Seja μ = ISJ - ângulo através o qual a estrêla é vista / quando se move num período de um ano, é chamado de movimento próprio da estrêla; geralmente medido em segundos de arco por ano.

Relação entre Movimento Próprio, Velocidade Tangencial e Paralaxe.

Sejam: y - distância da estrêla SJ do Sol,

θ - ângulo entre a direção do movimento IJ e a direção SI,

W - velocidade linear da estrêla de I até J expresso em/ quilômetros por segundo,

ν - número de segundos em um ano,

JM e NI - perpendiculares a SI

Teremos:

$$IJ = \nu W \quad Km \qquad (D-1)$$

Seja u a componente da velocidade linear perpendicular a direção SI (linha de visada) e é chamada velocidade tangencial ou velocidade transversal; expresso em quilômetros por segundo.

Para uma estrêla de movimento próprio máximo, o valor de μ é aproximadamente 10" por ano, e a cada instante podemos notar que / ISJ é um ângulo muito pequeno de modo que IN e MJ, podem ser toma dos como iguais; tanto IN ou MJ é a distância descrita em um ano, perpendicular a SI, assim:

$$IN = MJ = \nu\, u \ \text{Km} \qquad (D-2)$$

Sendo $MJ = y \operatorname{sen} \mu$, e desde que μ é pequeno, teremos:

$$MJ = y\mu \operatorname{sen} 1'' \qquad (D-3)$$

Sejam:

π -paralaxe anual da estrêla,

x -raio da órbita da Terra em quilômetros.

A distância y e a paralaxe π são dados por:

$$\operatorname{sen} \pi = \frac{x}{y}$$

desde que π é pequeno,

$$y = \frac{x}{\pi \operatorname{sen} 1''} \qquad (D-4)$$

onde π é expresso em segundos de arco.

De (D-2, D-3, D-4), vem:

$$u = \frac{\mu x}{\nu \pi} \qquad (D-5)$$

Colocando os valores de x e ν, em (D-5):

$x = 149{,}5 \times 10^6$ Km,

$\nu = 31{,}56 \times 10^6$ (número de segundos em um ano).

Teremos:

$$u = 4{,}74 \frac{\mu}{\pi} \qquad (D-6),$$

relação que dá a velocidade transversal u em Km/seg quando os valores de μ e π são conhecidos.

<u>Componentes do Movimento Próprio.</u>

A componente da velocidade espacial linear da estrêla, o qual dá origem ao movimento próprio é a velocidadade tangencial na direção IN ou MJ ; a direção na qual a estrêla é vista não é afetada pela velocidade radial. I , N , S , são coplanares.

Seja s a posição da estrêla em 1930,0 e s', a posição / da estrêla um ano mais tarde. O arco de círculo ss' é o movimento / próprio anual μ. (α, δ) e (α_1, δ_1) são as coordenadas de s e s' respectivamente referidas ao mesmo equinócio e equador - equinócio médio e equador de 1930,0. As diferenças $(\alpha_1 - \alpha)$ e $(\delta_1 - \delta)$ são devido ao movimento próprio anual.

Podemos escrever:

$$\alpha_1 - \alpha = \mu_\alpha ; \ \delta_1 - \delta = \mu_\delta \qquad (D-7)$$

Onde μ_α e μ_δ são as componentes do movimento próprio em ascensão / reta e declinação respectivamente. Podemos chamar μ de movimento/

próprio total, que é sempre expresso em segundos de arco por ano. é paralelo ao equador. Então: $Gs' = GPs' \operatorname{sen} Ps'$,

e $Gs' = ss' \operatorname{sen} \varphi$

onde φ é o ângulo de posição Pss', medido do meridiano que une a estrê la ao polo norte P de 0^o a 360^o, na direção indicada pela seta na / (fig. D-2).

Como: $GPs' = \mu\alpha$

$Ps' = 90^o - \delta_1$

$ss' = \mu$

Teremos:

$$\mu_\alpha \cos \delta_1 = \mu \operatorname{sen} \varphi$$

Substituindo δ por δ_1 desde que μ é pequeno, vem:

$$\mu_\alpha = \mu \operatorname{sen} \varphi \sec \delta \qquad \text{(D-8)}$$

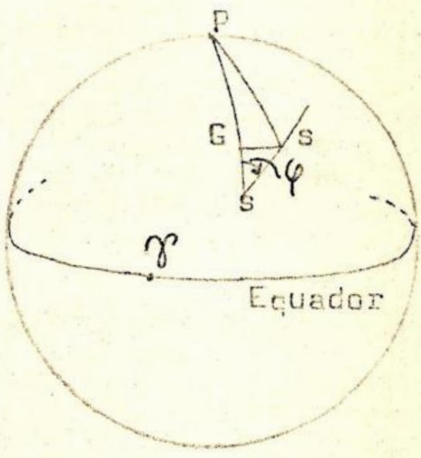
Como μ é expresso em segundos de arco por ano, μ_α é também dado por/ (D-8) em têrmos de mesma unidade. Da mesma maneira, $sG = \delta_1 - \delta = \mu_\delta$,

$$\mu_\delta = \mu \cos \varphi \qquad \text{(D-9)}$$

μ_δ sendo expresso em segundos de arco por ano.

Os valores de μ_α e μ_δ para as estrêlas mais brilhantes (a - baixo da nona magnitude) são obtidos das observações do meridiano se- parados por um longo intervalo de tempo.

(fig. D-2)



<u>As componentes do Movimento Próprio em diferentes épocas referidas ao mesmo sistema equatorial.</u>

Seja s a posição média da estrêla em 1850, referida ao/ equador médio e equinócio de 1850,0. Exprèssaremos μ em medidas / circulares.

Devido ao movimento próprio, a estrêla se moverá ao lon- go do círculo sZY na razão de μ radianos por ano. Suporemos que / μ é constante (algumas variações em μ são em instantes mais pro váveis, tão pequenos que podem ser desprezadas totalmente durante muitos anos). Após um intervalo de t anos, a posição da estrêla na esfera celeste é Z .

μ_α e μ_δ são as componentes do movimento próprio quando a estrêla está em s , isto é, em 1850. Por (D-8) e (D-9), e μ_α e μ_δ expressos em radianos por ano, vem:

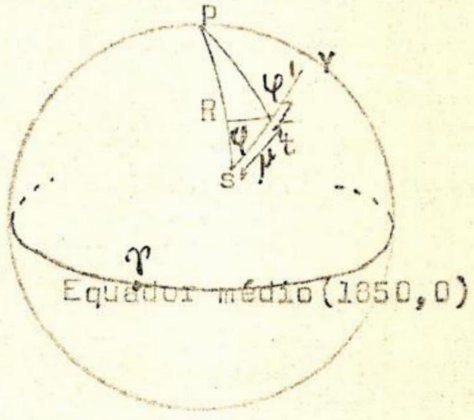
$$\mu_\alpha = \mu \operatorname{sen} \varphi \sec \delta \quad ; \quad \mu_\delta = \mu \cos \varphi \qquad \text{(D-10)}$$

sendo (α, δ) as coordenadas de s e φ o ângulo PsZ.

μ'_α e μ'_δ são as componentes do movimento próprio quando a estrêla está em Z , isto é, em 1850+t. (α', δ') são as coordenadas de Z (referido ao equador médio de 1850,0) e φ' é o ângulo PZY . Teremos:

$$\left.\begin{aligned} \mu'_\alpha &= \mu \operatorname{sen} \varphi' \sec \delta' \\ \mu'_\delta &= \mu \cos \varphi' \end{aligned}\right. \qquad \text{(D-11)}$$

(fig. D-3)



Em vista de (D-10) e (D-11), as componentes do movimento próprio alteram com observações para a época na qual são definidos, mesmo que o plano de referência fundamental (equinócio médio de 1850,0) é o mesmo e o movimento próprio total μ é constante.

Tracemos do ponto Z um pequeno arco de círculo ZR paralelo ao equador. No triângulo PsZ ,

$$sPZ = \alpha' - \alpha \qquad Ps = 90^\circ - \delta \qquad PZs = 180^\circ - \varphi'$$
$$PZ = 90^\circ - \delta' \qquad sZ = \mu t$$

Pela fórmula dos senos, temos:

$$\operatorname{sen} \varphi' \cos \delta' = \operatorname{sen} \varphi \cos \delta$$

Substituindo $\varphi + \Delta\varphi$ por φ' e $\delta + \Delta\delta$ por δ' ($\Delta\varphi$, $\Delta\delta$ são ângulos pequenos, para $sZ \equiv \mu t$ mesmo para consideráveis intervalos de tempo), vem:

$$(\operatorname{sen}\varphi+\Delta\varphi\ \cos\varphi)\ (\cos\delta-\Delta\delta\operatorname{sen}\delta)=\operatorname{sen}\varphi\cos\delta\ ,$$

desprezando infinitessimais de 2ª ordem,

$$\Delta\varphi\cos\varphi\cos\delta=\Delta\delta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta \qquad \text{(D-12)}$$

Esta equação dá a variação de φ com δ.

No triângulo sZR,

$$sR=\delta'-\delta=\Delta\delta$$

Então:

$$\Delta\delta=\mu t\cos\varphi \qquad \text{(D-13)}$$

De (D-12 e D-13),

$$\Delta\varphi=\mu t\operatorname{sen}\varphi\tan\delta \qquad \text{(D-14)}$$

De (D-11),

$$\mu'_\alpha=\frac{\mu(\operatorname{sen}\varphi+\Delta\varphi\ \cos\varphi)}{\cos\delta-\Delta\delta\operatorname{sen}\delta}\ .$$

$$=\mu\sec\delta\ (\operatorname{sen}\varphi+\Delta\varphi\cos\varphi)\ (1+\Delta\delta\tan\delta)\ ,$$

Ou,

$$\mu'_\alpha=\mu\operatorname{sen}\varphi\sec\delta+\mu\Delta\varphi\cos\varphi\sec\delta+\mu\Delta\delta\operatorname{sen}\varphi\sec\delta\tan\delta$$

novamente desprezando as quantidades de 2ª ordem. Usando (D-10, D-13, D-14), temos:

$$\mu'_\alpha-\mu_\alpha=2\mu^2t\ \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\sec\delta\tan\delta,$$

Por (D-10),

$$\mu'_\alpha-\mu_\alpha=2t\mu_\alpha\mu_\delta\tan\delta \qquad \text{(D-15)}$$

Esta equação deriva da suposição de que $\mu, \mu_\alpha, \mu'_\alpha, \mu_\delta$, são expressos em/ medidas circulares. Colocando μ_α, μ'_α, em segundos de tempo e μ_δ em segundos de arco,

$$\mu'_\alpha-\mu_\alpha=2t\mu_\alpha\mu_\delta\tan\delta\operatorname{sen}1'' \qquad \text{(D-16)}$$

Pelo mesmo caminho a partir de (D-11), temos o movimento / próprio em medidas circulares, $\mu'_\delta=\mu\,(\cos\varphi-\Delta\varphi\operatorname{sen}\varphi)$,

ou, $\mu'_\delta-\mu_\delta=-\mu\,\Delta\varphi\operatorname{sen}\varphi$

$$=-\mu^2t\ \operatorname{sen}^2\varphi\ \tan\delta \qquad \text{por (D-14)}$$

$$=-t\mu_\alpha^2\operatorname{sen}\delta\ \cos\delta \qquad \text{por (D-10)}$$

Colocando μ_α, $(\mu'_\delta-\mu_\delta)$ em segundos de tempo e de arco respectivamente,

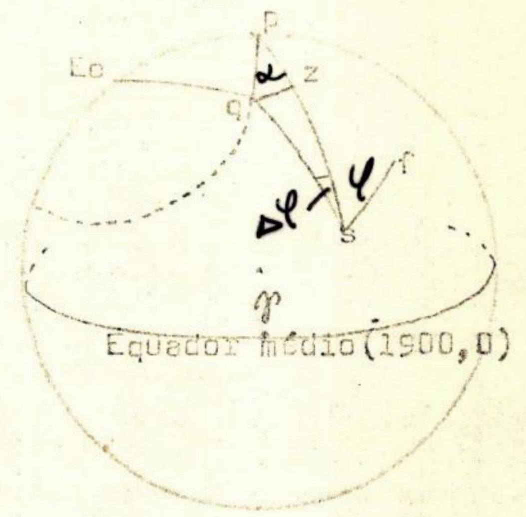
$$\mu'_\delta-\mu_\delta=-t\ (15\mu_\alpha)^2\operatorname{sen}\delta\cos\delta\operatorname{sen}1'' \qquad \text{(D-17)}$$

As equações (D-16, D-17) dão as componentes do movimento próprio para a época (1850+t) quando as componentes para a época 1850,0 são conhecidos e vice versa.

<u>As componentes do movimento prório referida ao equador médio em duas épocas diferentes.</u>

Seja s a posição da estrêla em 1900,0, referido ao equador médio e equinócio neste ano. Devido a precessão luni-solar, o polo P se deslocará para q depois de t anos descrevendo em tôrno do polo da eclítica Eo , um pequeno arco de círculo (fig. D-4).

(fig. D-4)



O ângulo PE_0q é a precessão luni-solar p , em t anos; o valor de p é aproximadamente $50\frac{1}{4}''$.

(α, δ) são as coordenadas de s referido ao equador médio e equinócio de 1900,0.

(α_1, δ_1) as coordenadas de s referido ao equdor médio e equinócio de / (1900+t).

Temos: $Ps = 90^0 - \delta$ $\qquad E_0Ps = 90^0 + \alpha$

$qs = 90^0 - \delta_1$ $\qquad qPs = \alpha$

μ é o movimento próprio da estrêla ao longo do grande círculo sf. Então se μ_α, μ_δ são as componentes do movimento próprio de s em 1900 referido ao equador médio de 1900,0, temos por (D-8 e D-9),

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= \mu \operatorname{sen}\varphi \sec\delta \\ \mu_\delta &= \mu \cos\varphi \end{aligned} \qquad \text{(D-18)}$$

onde φ é o ângulo Psf.

Se $\mu''_\alpha, \mu''_\delta$ são as componentes do movimento próprio da estrêla em 1900 referido ao equador médio e ao polo q para (1900+t),

$$\begin{aligned} \mu''_\alpha &= \mu \operatorname{sen}\varphi_1 \sec\delta_1 \\ \mu''_\delta &= \mu \cos\varphi_1 \end{aligned} \qquad \text{(D-19)}$$

onde φ_1 é o ângulo qsf.

Podemos escrever $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$; $Psq = \Delta\varphi$
Pela fórmula dos senos e pelo triângulo Pqs ,

$$\text{sen}\,\Delta\varphi = \text{sen}\,Pq\ \text{sen}\,\alpha\ \sec\delta_1 \ ,$$

ou, desde que Pq e $\Delta\varphi$ são pequenos e $Pq = p\ \text{sen}\,\varepsilon$,

$$\Delta\varphi = p\ \text{sen}\,\alpha\ \sec\delta\ \text{sen}\,\varepsilon \qquad (D\text{-}20)$$

no qual substituímos δ por δ_1 sem êrro de precisão.

Fazendo qz perpendicular a qs , teremos $Pz = \delta_1 - \delta$.
De $\Delta\delta = \delta_1 - \delta$, obtemos do triângulo infinitessimal Pqz,

$$\delta_1 - \delta \equiv \Delta\delta = p\ \cos\alpha\ \text{sen}\,\varepsilon \qquad (D\text{-}21)$$

Da primeira de (D-19), vem:

$$\mu''_\alpha = \mu\frac{\text{sen}(\varphi+\Delta\varphi)}{\cos(\delta+\Delta\delta)} = \mu\frac{(\text{sen}\,\varphi+\Delta\varphi\cos\varphi)}{\cos\delta\,(1-\Delta\delta\tan\delta)}$$

$$= \mu\sec\delta\,(\text{sen}\,\varphi+\Delta\varphi\cos\varphi)(1+\Delta\delta\tan\delta),$$

ou, desprezando pequenas quantidades de 2ª ordem,

$$\mu''_\alpha = \mu\sec\delta\ \text{sen}\,\varphi + \mu\Delta\delta\sec\delta\ \text{sen}\,\varphi\tan\delta + \mu\Delta\varphi\sec\delta\cos\varphi \ ,$$

ou, utilizando (D-18, D-20, D-21),

$$\mu''_\alpha - \mu_\alpha = \mu\ p\ \text{sen}\,\varepsilon\sec\delta\,(\cos\alpha\tan\delta\ \text{sen}\,\varphi + \text{sen}\,\alpha\sec\delta\cos\varphi). \qquad (D\text{-}22)$$

Mas: $\mu_\alpha = \mu\ \text{sen}\,\varphi\sec\delta$ e $\mu_\delta = \mu\cos\varphi$

Teremos:

$$\mu''_\alpha - \mu_\alpha = p\ \text{sen}\,\varepsilon\,(\mu_\alpha\cos\alpha\tan\delta + \mu_\delta\ \text{sen}\,\alpha\sec^2\delta).$$

Similarmente:

$$\mu''_\delta = \mu\,(\cos\varphi - \Delta\varphi\ \text{sen}\,\varphi)$$

$$= \mu\cos\varphi - \mu\ p\ \text{sen}\,\varepsilon\ \text{sen}\,\alpha\sec\delta\ \text{sen}\,\varphi \ ,$$

de modo que

$$\mu''_\delta - \mu_\delta = -\ p\ \mu_\alpha\ \text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,\varepsilon \qquad (D\text{-}23)$$

μ_α, μ_δ, p , são expressos em medidas circulares. Colocando μ_α, μ''_α em segundos de tempo e μ_δ, μ''_δ, p em segundos de arco, vem:

$$\mu''_\alpha - \mu_\alpha = p\ \text{sen}\,\varepsilon\,(\mu_\alpha\cos\alpha\tan\delta + \frac{1}{15}\mu_\delta\ \text{sen}\,\alpha\sec^2\delta)\,\text{sen}\,1'' \qquad (D\text{-}24),$$

$$\mu''_\delta - \mu_\delta = -15\,p\,\mu_\alpha\ \text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,\varepsilon\ \text{sen}\,1'' \qquad (D\text{-}25).$$

III- Variação de Coordenadas entre Datas Arbitrárias

Segundo A. Danjon (Astronomie Générale, pg. 81): " Denominamos planos verdadeiros aos planos fundamentais tais que as observações permitem determiná-los. São afetados de suas precessões/ e nutações próprias; e chamamos planos médios aos planos fictícios, que diferem dos planos verdadeiros apenas pela nutação;...

Enfim, poderemos referir as coordenadas de uma estrêla / fixa seja aos planos verdadeiros, e obteremos assim as coordenadas verdadeiras, afetadas da precessão e da nutação, seja aos planos / médios, e obteremos as coordenadas médias, afetadas unicamente da precessão."

Pelo Explanatory Supplement to the Ephemeris: " Posições podem ser de várias espécies, incluindo: a posição geométrica deduzida da posição atual para o instante de observação; a posição aparente na qual um observador, situado na origem das coordenadas, teoricamente veria o objeto;.... A posição aparente é deduzida da posição geométrica pela aplicação de correções para aberração e, / quando relevante, para a refração."

A- Redução de Equinócio

Definição:

Por convenção os equinócios são referidos a janeiro zero de um qualquer ano. As coordenadas médias de uma qualquer estrêla/ são referidos as tais datas. Podemos então dizer que a correção de precessão transporta coordenadas médias em coordenadas médias.

1º método:

Temos que calcular as quantidades:

$$r = (23042'',53 + 139'',75\,\tau + 0'',06\,\tau^2)t + (30'',23 - 0'',27\,\tau)t^2 + 18'',00\,t^3$$

$$s = r + (79'',27 + 0'',66\,\tau)t^2 + 0'',32\,t^3$$

$$j = (20046'',85 - 85'',33\,\tau - 0'',37\,\tau^2)t + (-42'',67 - 0'',37\,\tau)t^2 - 41'',80\,t^3$$

$$A = \alpha_\tau + r$$
$$p = 90^0 - \delta_\tau$$

Além disso, devemos obter as quantidades A' e P' das relações:

$\operatorname{sen} P' \cos A' = -\cos P \operatorname{sen} j + \operatorname{sen} P \cos j \cos A$

$\operatorname{sen} P' \operatorname{sen} A' = \operatorname{sen} P \operatorname{sen} A$

$\cos P' = \cos P \cos j + \operatorname{sen} P \operatorname{sen} j \cos A$

Finalmente,

$$A' = \alpha - s$$
$$P' = 90^\circ - \delta ,$$

onde α e δ são os elementos móveis referidos ao novo equinócio.

Por Υ indicaremos a época a que se referem os elementos fixos (os dados do problema) e $\Upsilon + t$ a que se referem os elementos móveis. Por definição, Υ e t são contados em milhares de anos trópicos a partir de 1900,0.

2º método:

Fórmulas utilizadas:

$$q = \operatorname{sen}\theta \left[\tan\delta_0 + \cos(\alpha_0 + \zeta_0) \tan\frac{1}{2}\theta\right]$$

$$\tan(\Delta\alpha - \mu) = \frac{q \operatorname{sen}(\alpha_0 + \zeta_0)}{1 - q\cos(\alpha_0 + \zeta_0)}$$

$$\mu = \zeta_0 + z$$
$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$$

$$\tan\frac{1}{2}(\delta - \delta_0) = \tan\frac{1}{2}\theta \sec\frac{1}{2}(\Delta\alpha - \mu) \cos\left[(\alpha_0 + \zeta_0) + \frac{1}{2}(\Delta\alpha - \mu)\right]$$

Onde: $\Delta\alpha = m + n \operatorname{sen}\alpha \tan\delta$; $\Delta\delta = n\cos\alpha$,

ζ_0, z, θ constantes de redução para reduções trigonométricas rigorosas de posições médias para o início do corrente ano a partir do início de cada cinco anos posteriores a 1755.

α_0, δ_0 referem-se ao equinócio médio de t_0 ,

α , δ referem-se ao equinócio médio do início do corrente ano.

3º método:

Para as estrêlas ditas fundamentais, cujas coordenadas são determinadas com maior grau de precisão possível, resulta convenientemente a utilização de fórmulas mais rigorosas, como por exemplo as indicadas abaixo e extraídas do Fourth Fundamental Catalogue (FK4).

Tôdas as datas são dadas para o equinócio e época de 1950,0 e 1975,0 baseado na precessão de Newcomb. Os valores seculares referem-se ao século trópico (ano trópico é o intervalo de tempo decorrido entre duas passagens consecutivas do centro do Sol pelo Ponto Vernal).

Definindo as quantidades:

$$\frac{d\alpha}{dT} = m + \frac{1}{15}\, n \operatorname{sen}\alpha \tan\delta + \mu ,$$

$$\frac{d\delta}{dT} = n \cos\alpha + \mu' ,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2} = \frac{1}{2}\, m' + \frac{1}{30}\, n' \operatorname{sen}\alpha \tan\delta + \frac{1}{2} \operatorname{arc} 1''\, m\, n \cos\alpha \tan\delta$$
$$+ \frac{1}{60} \operatorname{arc} 1''\, n^2 \operatorname{sen} 2\alpha (\tan^2\delta + \sec^2\delta) + \operatorname{arc} 1''\, n\mu \cos\alpha \tan\delta$$
$$+ \frac{1}{15} \operatorname{arc} 1''\, n\mu' \operatorname{sen}\alpha \sec^2\delta + \operatorname{arc} 1''\, \mu\mu' \tan\delta - 0{,}0001024\, \mu V \pi$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2} = \frac{1}{2}\, n' \cos\alpha - \frac{15}{2} \operatorname{arc} 1''\, m\, n \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{arc} 1''\, n^2 \operatorname{sen}^2\alpha \times$$
$$\times \tan\delta - 15 \operatorname{arc} 1''\, n\mu \operatorname{sen}\alpha - \frac{225}{4} \operatorname{arc} 1''\, \mu^2 \operatorname{sen} 2\delta$$
$$- 0{,}0001024\, \mu' V \pi ,$$

$$\frac{d\mu}{dT} = \operatorname{arc} 1''\, n\mu \cos\alpha \tan\delta + \frac{1}{15} \operatorname{arc} 1''\, n\mu' \operatorname{sen}\alpha \sec^2\delta + 2 \operatorname{arc} 1''\, \mu\mu' \times$$
$$\times \tan\delta - 0{,}0002047\, \mu V \pi ,$$

$$\frac{d\mu'}{dT} = - 15 \operatorname{arc} 1''\, n\mu \operatorname{sen}\alpha - \frac{225}{2} \operatorname{arc} 1''\, \mu^2 \operatorname{sen} 2\delta - 0{,}0002047\, \mu' V \pi ,$$

$$m = 307^s{,}2337 + 0^s{,}18630\, T + 0^s{,}000008\, T^2 ,$$

$$n = 2004''{,}685 - 0''{,}8533\, T - 0''{,}00037\, T^2 ,$$

$$m' = 0^s{,}18630 \quad 0^s{,}000016\, T ,$$

$$n' = - 0''{,}8533 - 0''{,}00074\, T ,$$

onde m, m', μ, em segundos de tempo,

n, n', μ', e a paralaxe π em segundos de arco,

T em séculos trópicos a partir de 1900,0,
V que é a velocidade radial em Km/seg.
μ - movimento próprio em ascensão reta
μ' - movimento próprio em declinação

A redução de posições e movimentos próprios das estrêlas com declinações entre $+81^\circ$ e -81° para um outro equinócio e época t o qual está entre 1925 e 2000 podem ser calculados pelas seguintes equações:

$$\alpha_t = \alpha_0 + \tau\left(\frac{d\alpha}{dT}\right)_0 + \tau^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_0 + \frac{4}{3}\tau^3\left[\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_{75} - \left(\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_{50}\right],$$

$$\delta_t = \delta_0 + \tau\left(\frac{d\delta}{dT}\right)_0 + \tau^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_0 + \frac{4}{3}\tau^3\left[\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_{75} - \left(\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_{50}\right],$$

$$\mu_t = \mu_0 + \tau\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_0 + 2\tau^2\left[\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_{75} - \left(\frac{d\mu}{dT}\right)_{50}\right],$$

$$\mu'_t = \mu'_0 + \tau\left(\frac{d\mu'}{dT}\right)_0 + 2\tau^2\left[\left(\frac{d\mu'}{dT}\right)_{75} - \left(\frac{d\mu'}{dT}\right)_{50}\right],$$

$$\tau = \frac{1}{100}(t - t_0), \qquad t_0 = 1950,0, \text{ ou } 1975,0.$$

O sufixo zero em todos os casos indica os valores em t_0. Aplicando as séries desenvolvidas, os erros não excedem uma unidade na última casa decimal se: a) a redução é feita de 1950,0 ou 1975,0 para outro equinócio e época dentro de 25 anos a partir de 1950,0 ou 1975,0 respectivamente, b) a declinação entre $+81^\circ$ e -81°.

Tôdas as datas para estas estrêlas são dadas para equinócio e época de 1950,0 até 1975,0 em intervalos de cinco anos.

Se é desejado redução para outro equinócio e época próximos, utilizam-se as seguintes equações:

$$\alpha_t = \alpha_0 + \tau\left(\frac{d\alpha}{dT}\right)_0 + \tau^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_0 + \frac{20}{3}\tau^3\left[\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_{0+5} - \left(\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_0\right],$$

$$\mu_t = \mu_0 + \tau\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_0 + 10\tau^2\left[\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_{0+5} - \left(\frac{d\mu}{dT}\right)_0\right],$$

e similarmente para a declinação.

Onde $\tau = \frac{1}{100}(t-t_0)$ e o sufixo zero indica uma das épocas dadas no catálogo.

Se $/t-t_0/ \leq 3$ anos, os erros nos resultados destas equações não excedem uma unidade na última casa decimal.

B- Redução ao Dia

Definição:

Redução ao Dia é a passagem da posição média de uma estrêla em uma dada época, à sua posição aparente em outra época / ou vice-versa, dentro de um mesmo ano.

Através do agrupamento dos resultados das demonstrações anteriores, chegamos então à equação da Redução ao Dia, que é:

Para ascensão reta:

$$\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha_{PREC} + \Delta\alpha_{NUT} + \Delta\alpha_{ABER.}$$

$$\alpha_1 = \alpha + \left(\tau + \frac{\Delta\psi}{\theta}\right)(m+n \operatorname{sen}\alpha \tan\delta) - \Delta\varepsilon \cos\alpha \tan\delta - k \cos\varepsilon \cos\odot \times$$

$$\times \cos\alpha \sec\delta - k \operatorname{sen}\odot \operatorname{sen}\alpha \sec\delta + \frac{l\,\Delta\psi}{\theta}$$

Chamando:

$$A = \tau + \frac{\Delta\psi}{\theta}$$

$$B = -\Delta\varepsilon$$

$$C = -k \cos\varepsilon \cos\odot$$

$$D = -k \operatorname{sen}\odot$$

$$E = \frac{l\,\Delta\psi}{\theta}$$

$$a = m+n \operatorname{sen}\alpha \tan\delta = \frac{m}{n} + \operatorname{sen}\alpha \tan\delta$$

$$b = \cos\alpha \tan\delta$$

$$c = \cos\alpha \sec\delta$$

$$d = \operatorname{sen}\alpha \sec\delta$$

Teremos:

$$\alpha_1 - \alpha = Aa + Bb + Cc + Dd + E$$

Para declinação: $\delta_1 = \delta + \Delta\delta_{PREC} + \Delta\delta_{NUT} + \Delta\delta_{ABER}$

$$\delta_1 - \delta = \left(\tau + \frac{\Delta\psi}{\theta}\right) n \cos\alpha + \Delta\varepsilon \operatorname{sen}\alpha - k \cos\varepsilon \cos\odot (\tan\varepsilon \cos\delta -$$

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\delta) - k \operatorname{sen}\odot \cos\alpha \operatorname{sen}\delta$$

Chamando:

$$A = \tau + \frac{\Delta\psi}{\theta}$$

$$B = -\Delta\varepsilon$$

$$C = -k \cos\varepsilon \cos\odot$$

$$D = -k \operatorname{sen}\odot$$

$$a' = n \cos\alpha \quad = \cos\alpha$$

$$b' = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$c' = \tan\varepsilon \cos\delta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\delta$$

$$d' = \cos\alpha \operatorname{sen}\delta$$

Teremos:

$$\delta_1 - \delta = Aa' + Bb' + Cc' + Dd'$$

Onde: (α_1, δ_1) são as coordenadas verdadeiras,
(α, δ) são as coordenadas médias do início do ano,

— A,B,C,D,E: números Besselianos do dia; A,B,E, são determinados através do intervalo τ, das nutações $\Delta\psi$ e $\Delta\varepsilon$ com relação a data coresponderte, e as precessões luni-solar e planetária θ e ℓ. São também independentes da posição / da estrêla. C, D, dependem da longitude do Sol e conse - quentemente do tempo do ano para os quais são referidos,

— a,b,c,d: constantes da estrêla em ascensão reta; a,b, dependem dos valores de m e n e das coordenadas da estrêla; variam lentamente com o tempo, mas acima de intervalos / consideráveis podem ser observados como constantes associados com relação a uma estrêla particular. c,d, dependem / das coordenadas da estrêla,

— a',b',c',d': constantes da estrêla em declinação; a',b', dependem das coordenadas da estrêla. c',d', dependem das/ coordenadas da estrêla e da obliquidade da eclítica,

— m,n: são definidos em têrmos da precessão luni-solar e a precessão planetária

— $\alpha_1 - \alpha$: diferença entre a ascensão reta verdadeira da estrêla, referida ao equinócio verdadeiro da data, e a ascensão reta média referida ao equinócio médio do início do ano,

— $\delta_1 - \delta$: diferença entre as declinações verdadeira e média.

m e n são expressos em segundos de tempo,

l, $\Delta\psi$, p, $\Delta\varepsilon$, em segundos de arco

Para se transformar segundos de tempo em segundos de arco multiplica-se por quinze, porque $1^s = 15''$.

Obs: A partir do ano de 1960 foi introduzida nas equações de Redução ao Dia uma divisão por n. ?

V- Exemplos Numéricos

Para poder praticar o desenvolvimento da teoria, faremos alguns exercícios .

Problemas:

I- Obter α e δ da estrêla ζ Andromedae para 1973 Janeiro / 1,7 dias. São dados:

Janeiro α_1= 0h 45 m 41,117 s
1969 δ_1= 24° 05' 63",92
6,7 dias

1º Passo: Redução ao Dia (coordenadas médias 1969,0)

$\alpha_1 = 11°,42132083$
$\delta_1 = 24°,10108889$

	A = +0",222	
	B = -8",678	
Dados do	C = -5",465	1969
American	D = +19",601	6,7 dias
Ephemeris	E = -0",0015	Tempo Sideral
	m = 46",1043	
	n = 20",0409	
	ε = 23°,44332	

$a = \frac{m}{n} + \operatorname{sen}\alpha_1 \tan\delta_1$

$= 2,38851046 + 0,00058408$

$= 2,38909454$

$b = \cos\alpha_1 \tan\delta_1$

$= 0,43848591$

$c = \cos\alpha_1 \sec\delta_1 = \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\delta_1}$

$= 1,07380498$

$d = \dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha_1}{\cos\delta_1}$

$= 0,21693292$

$a' = \cos\alpha_1$

$= 0,98019755$

$b' = -\,\mathrm{sen}\,\alpha_1$

$= -\,0,19802210$

$c' = \tan\varepsilon\cos\delta_1 - \mathrm{sen}\,\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\delta_1$

$= 0,39583494 - 0,08086189$

$= 0,31497305$

$d' = \cos\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\delta_1$

$= 0,40026152$

$$
\begin{aligned}
Aa &= 0'',53037899\\
Bb &= -3'',80518073\\
Cc &= -5'',86834422\\
Dd &= 4'',25210216\\
\underline{E} &= \underline{-0'',0015}\\
\Delta\alpha &= -4'',89254379\\
&= -0^{\circ},00135904
\end{aligned}
$$

$$\alpha = -\Delta\alpha + \alpha_1 = -(-0^{\circ},00135904) + 11^{\circ},42132083$$

$$\alpha = 11^{\circ},42267987$$

$$\alpha_{1969,0} = 0^{h}\ 45^{m}\ 41^{s},443$$

$Aa' = 0'',21760386$

$Bb' = 1'',71843578$

$Cc' = -1'',72132772$

$Dd' = 7'',84552605$

$\Delta\delta = 8'',06023798$

$= 0^\circ,00223895$

$\delta = -\Delta\delta + \delta_1 = -0^\circ,00223895 + 24^\circ,10108889$

$\delta = 24^\circ,09884994$

$\delta_{1969,0} = 24^\circ\ 05'\ 55'',86$

2º Passo: Redução de Equinócio

1º método: Fórmulas utilizadas:

$$q = \operatorname{sen}\theta\left[\tan\delta_0 + \cos(\alpha_0 + \zeta_0)\tan\tfrac{1}{2}\theta\right]$$

$$\tan(\Delta\alpha - \mu) = \frac{q\ \operatorname{sen}(\alpha_0 + \zeta_0)}{1 - q\cos(\alpha_0 + \zeta_0)}$$

$$\mu = \zeta_0 + z$$

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(\delta - \delta_0) = \tan\tfrac{1}{2}\theta\ \sec\tfrac{1}{2}(\Delta\alpha - \mu)\cos\left[(\alpha_0 + \zeta_0) + \tfrac{1}{2}(\Delta\alpha - \mu)\right]$$

Dados do American Ephemoris

$\zeta_0 = 1'\ 32'',21 = 0^\circ,02561389$

$z = 1'\ 32'',21 = 0^\circ,02561389$

$\theta = 1'\ 20'',16 = 0^\circ,02226667$

Para ascensão reta:

$q = 0,00038863\ (0,44729753 + 0,00019045)$

$= 0,00017391$

$\mu = 0^\circ,05122778$

$\tan(\Delta\alpha - \mu) = 0,00003452$

$\Delta\alpha - \mu = 0^\circ,00197809$

$\Delta\alpha = 0^\circ,05320587$

$\alpha_{1973,0} = 0^h\ 45^m\ 54^s,213$

Fazendo a correção de movimento próprio para o período de 4 anos temos:

$\mu_\alpha = -0^s,726 \times 4 : 100$
$= -0^s,029$

$\alpha_{1973,0} = 0^h\ 45^m\ 54^s,184$

Para declinação:

$\tan \frac{1}{2}(\delta - \delta_0) = 0,00019045$

$\frac{1}{2}(\delta - \delta_0) = 0^\circ,01091179$

$\delta_{1973,0} = 24^\circ,12060191 = 24^\circ\ 07'\ 14'',45$

Fazendo a correção ,

$\mu_\delta = -7'',77 \times 4 : 100 = -0'',31080$

$\delta_{1973,0} = 24^\circ\ 07'\ 14'',14$

2º método: Fórmulas utilizadas:

Para ascensão reta:

$$\alpha_t = \alpha_0 + \tau\left(\frac{d\alpha}{dT}\right)_0 + \tau^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_0 + \frac{4}{3}\tau^3\left[\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_{75} - \left(\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_{50}\right]$$

$$\tau = \frac{1}{100}(t - t_0) = 0,23$$

Tomando $t_0 = 1950,0$
$t = 1973,0$

$\left(\frac{d\alpha}{dT}\right)_0 = +318^s,124 = +4771'',860$

$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_0 = +0^s,911 = +13'',665$ Dados do FK4

$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_{75} = +0^s,920 = +13'',800$

$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_{50} = +0^s,911 = +13'',665$

$$\alpha_t = 11^{\circ},17070000 + 1097'',52760 + 0'',7220765 + 0'',00219006$$
$$= 11^{\circ},17070000 + 1098'',252868$$
$$= 11^{\circ},17070000 + 0^{\circ},30507024 = 11^{\circ},47577024$$

$$\alpha_{1973,0} = 0^h\ 45^m\ 54^s,185$$

<u>Para declinação</u>:

$$\delta_t = \delta_0 + \tau \left(\frac{d\delta}{dT}\right)_0 + \tau^2 \left(\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_0 + \frac{4}{3}\tau^3 \left[\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_{75} - \left(\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_{50}\right]$$

$$\left(\frac{d\delta}{dT}\right)_0 = +1958'',52$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_0 = -4'',90$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_{75} = -5'',04$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_{50} = -4'',90$$

Dados do FK4

$$\delta_t = 23^{\circ},99554167 + 450'',4596 - 0'',25921 - 0'',00227117$$
$$= 23^{\circ},99554167 + 450'',198118$$
$$= 23^{\circ},99554167 + 0^{\circ},12505503 = 24^{\circ},12059670$$

$$\delta_{1973,0} = 24^{\circ}\ 07'\ 14'',15$$

Lembrando que o índice zero em todos os casos refere-se a época t_0.

<u>3º Passo</u>: Redução ao Dia

Temos que transformar as coordenadas de 1973,0 para 1973 1,7 dias.

$$\alpha = 11^{\circ},47577024$$
$$\delta = 24^{\circ},12059670$$

$A = +6'',796$
$B = -2'',193$
$C = -3'',073$
$D = +20'',071$

Dados do American Ephemeris

$E = 0'',0375$
$m = 46'',1055$
$n = 20'',0466$
$\mathcal{E} = 23^\circ,442795$

1973
1,7 dias
Tempo Sideral

$a = \frac{m}{n} + \operatorname{sen}\alpha \tan\delta$
$= 2,30060477 + 0,00908205$
$= 2,30968682$

$b = \cos\alpha \tan\delta$
$= 0,43080203$

$c = \frac{\cos\alpha}{\cos\delta}$
$= 1,07376195$

$d = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\delta}$
$= 0,21798650$

$a' = \cos\alpha$
$= 0,98000893$

$b' = -\operatorname{sen}\alpha$
$= -0,19895352$

$c' = \tan\mathcal{E}\cos\delta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\delta$
$= 0,39576469 - 0,08130406$
$= 0,31446063$

$d' = \cos\alpha\operatorname{sen}\delta$
$= 0,40048906$

$Aa = +16'',24031163$
$Bb = -0'',96229285$
$Cc = -4'',15868003$
$Dd = +4'',37520704$
$E = +0'',0375$

$\Delta\alpha = 15'',53204579$
$= 0^\circ,00431446$

$\alpha_1 = \Delta\alpha + \alpha = 0^\circ,00431446 + 11^\circ,47577024$
$= 11^\circ,48008470$

$\alpha_{1,7d} = 0^h\ 45^m\ 55^s,220$

$Aa' = +6'',66014069$
$Bb' = +0'',43530507$
$Cc' = -1'',21796602$
$Dd' = +0'',03021592$

$\Delta\delta = 13'',91675566$
$= 0^{\circ},00386577$

$\delta_1 = \Delta\delta + \delta = 0^{\circ},00386577 + 24^{\circ},12059670$
$= 24^{\circ},12446247$

$\delta_{1,7d} = 24^{\circ}\ 07'\ 28'',06$

Obs: O valor de E é tabelado em tempo de efeméride mas poderá ser usado também para tempo sideral.

II- Obter α e δ da estrêla δ Piscium para 1973 Janeiro 11,7 dias. São dados:

Janeiro 1969 16,7 dias $\quad \alpha_1 = 0^h\ 47^m\ 04^s,039$
$\delta_1 = 7^{\circ}\ 24'\ 61'',59$

1º Passo: Redução ao Dia

Temos que transformar as coordenadas de 1969 — 16,7 dias para 1969,0, obtendo coordenadas médias.

$\alpha_1 = 11^{\circ},76682920$
$\delta_1 = 7^{\circ},41710833$

$A = +0'',973$
$B = -8'',670$
$C = -8'',559$
$D = +18'',253$
$E = +0'',000$
$m = 46'',1043$
$n = 20'',0409$
$\varepsilon = 23^{\circ},44332$

1969
16,7 dias
Tempo Sideral

$$a = \frac{m}{n} + \operatorname{sen}\alpha_1 \tan\delta_1$$
$$= 2,30051046 + 0,02654772$$
$$= 2,32705818$$

$b = \cos\alpha_1 \tan\delta_1$
$= 0{,}12744530$

$c = \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\delta_1}$
$= 0{,}98724624$

$d = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\cos\delta_1}$
$= 0{,}20222297$

$a' = \cos\alpha_1$
$= 0{,}97898562$

$b' = -\operatorname{sen}\alpha_1$
$= -\ 0{,}20392931$

$c' = \tan\varepsilon\cos\delta_1 - \operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\delta_1$
$= 0{,}43000821 - 0{,}02632558$
$= 0{,}40368263$

$d' = \cos\alpha_1\operatorname{sen}\delta_1$
$= 0{,}12637892$

$Aa = 2'',26422761$
$Bb = -1'',10597031$
$Cc = -8'',44984057$
$Dd = 3'',69117587$
$E = 0'',0000$

$\Delta\alpha = -\ 3'',60040740$
$= -\ 0^{\circ},00100011$

$\alpha = -\Delta\alpha + \alpha_1 = -(-0^{\circ},00100011) + 11^{\circ},76682920$
$\alpha = 11^{\circ},76782931$

$\alpha_{1969,0} = 0^{h}\ 47^{m}\ 4^{s},279$

$Aa' = 0'',95255301$
$Bb' = 1'',76969855$
$Cc' = -3'',45511963$
$Dd' = 2'',30679443$

$\Delta\delta = 1'',57392636$
$= 0^{\circ},00043720$

$$\delta = -\Delta\delta + \delta_1 = -0^\circ,00043720 + 7^\circ,41710833$$

$$\delta = 7^\circ,41667113$$

$$\delta_{1969,0} = 7^\circ\ 25'\ 0'',02$$

<u>2º Passo</u>: Redução de Equinócio

Fórmulas utilizadas:

<u>Para ascensão reta</u>:

$$\alpha_t = \alpha_0 + \tau\left(\frac{d\alpha}{dT}\right)_0 + \tau^2\left(\frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_0 + \frac{4}{3}\,\tau^3\left[\left(\frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_{75} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_{50}\right]$$

$$\tau = \frac{1}{100}\,(t - t_0) = 0,23$$

Tomando $t_0 = 1950,0$
$t = 1973,0$

$$\left(\frac{d\alpha}{dT}\right)_0 = +311^s,313 = 4669'',695$$

$$\left(\frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_0 = +0^s,412 = 6'',180$$

Dados do FK4

$$\left(\frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_{75} = +0^s,418 = 6'',270$$

$$\left(\frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right)_{50} = +0^s,412 = 6'',180$$

$$\alpha_t = 11^\circ,52130417 + 1074'',02985 + 0'',326922 + 0'',00146004$$

$$= 11^\circ,52130417 + 1074'',358232$$

$$= 11^\circ,52130417 + 0^\circ,29843284$$

$$= 11^\circ,81973454$$

$$\alpha_{1973,0} = 0^h\ 47^m\ 16^s,736$$

<u>Para declinação</u>:

$$\delta_t = \delta_0 + \tau\left(\frac{d\delta}{dT}\right)_0 + \tau^2\left(\frac{1}{2}\,\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_0 + \frac{4}{3}\,\tau^3\left[\left(\frac{1}{2}\,\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_{75} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_{50}\right]$$

$\left(\frac{d\delta}{dT}\right)_0 = +1959'',26$

$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_0 = -4'',96$ Dados do FK4

$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_{75} = -5'',09$

$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dT^2}\right)_{50} = -4'',96$

$$\delta_t = 7^\circ,31331389 + 450'',6298 - 0'',262384 - 0'',00210895$$
$$= 7^\circ,31331389 + 450'',3653070$$
$$= 7^\circ,31331389 + 0^\circ,12510147$$
$$= 7^\circ,43841536$$

$\delta_{1973,0} = 7^\circ\ 26'\ 18'',30$

3º Passo: Redução ao Dia

$$\alpha = 11^\circ,81973454$$
$$\delta = 7^\circ,43841536$$

$A = +7'',448$
$B = -2'',358$
$C = -7'',068$ 1973
$D = +18'',999$
$E = +0'',0375$ 11,7 dias
$m = 46'',1055$ Tempo Sideral
$n = 20'',0406$
$\varepsilon = 23^\circ,442795$

$$a = \frac{m}{n} + \operatorname{sen}\alpha \tan\delta$$
$$= 2,30060477 + 0,02674285$$
$$= 2,32734762$$

$$b = \cos\alpha \tan\delta$$
$$= 0,12779091$$

$$c = \frac{\cos\alpha}{\cos\delta}$$
$$= 0,98710378$$

$d = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\delta}$

$= 0{,}20657158$

$a' = \cos\alpha$

$= 0{,}97879690$

$b' = -\,\text{sen}\,\alpha$

$= -\,0{,}20483319$

$c' = \tan\varepsilon\cos\delta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\delta$

$= 0{,}42997657 - 0{,}02651780$

$= 0{,}40345877$

$d' = \cos\alpha\,\text{sen}\,\delta$

$= 0{,}12671549$

$$
\begin{aligned}
Aa &= 17'',33408507\\
Bb &= -0'',30133097\\
Cc &= -6'',97684952\\
Dd &= 3'',92465345\\
E &= 0'',0375\\
\hline
\Delta\delta &= 13'',98055803\\
&= 0^{\circ},00388348
\end{aligned}
$$

$\delta_1 = \Delta\delta + \delta = 0^{\circ},00388348 + 11^{\circ},81973454$

$= 11^{\circ},82361802$

$\delta_{11,7d} = 0^h\ 47^m\ 17^s,668$

$$
\begin{aligned}
Aa' &= 7'',29007931\\
Bb' &= 0'',48299666\\
Cc' &= -2'',05164659\\
Dd' &= 2'',40746759\\
\hline
\Delta\delta &= 7'',32889697\\
&= 0^{\circ},00203580
\end{aligned}
$$

$\delta_1 = \Delta\delta + \delta = +\,0^{\circ},00203580 + 7^{\circ},43841536$

$= 7^{\circ},44045116$

$\delta_{11,7d} = 7^{\circ}\ 26'\ 25'',62$

Obs: Lembrando que a redução é feita de 1950,0 ou 1975,0 para outro equinócio e época dentro de 25 anos a partir de 1950,0 ou 1975,0 respectivamente, porém, caso isto não se verifique usa-se as fórmulas gerais de precessão.

V- Bibliografia

- Van de Kamp, P., Principles of Astrometry, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1967.

- Smart, W. M., Spherical Astronomy, Cambridge University/ Press, London, 1971.

- Danjon, A., Astronomie Générale, J. et R. Sennac, Paris, 1959.

- Explanatory Supplement to the Ephemeris, Her Majesty's / Stationery Office, London, 1961.

- Haymes, R. C., Introduction to Space Science, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1971.

- Chebotarev , G. A., Analytical and Numerical Methods of/ Celestial Mechanics, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1967.

- The American Ephemeris and Nautical Almanac, U.S. Government Printing Office, Washington, 1970.

- Fourth Fundamental Catalogue (FK4)