Redução de placas Astrográ -

ficas.

Jucira L. Penna

Redução de Placas Astrográficas.

Determinação das constantes da placa pelo Método das Dependências.

Orientador: Prof. José Felipe C. Caldeira.

Rio de Janeiro

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Instituto de Geociências

Departamento de Astronomia

- 1976 -

Meus agradecimentos vão : ao Prof. JOSÉ FELIPE CARIA CALDEIRA , orientador deste projeto , por ter me dado a oportunidade de fazer este trabalho de Redução de placas astrográficas ; ao Prof. RONALDO PERSEKE pelos esclarecimentos dados na parte de Fotografia Astronômica ; e aos amigos MARGARET DE QUEIROZ e ALEXANDRE HUMBERTO ANDREI pela ajuda que me deram durante a elaboração deste projeto.

Jucira L. Penna

SUMÁRIO

Para determinação das coordenadas equatoriais de um astro a partir das coordenadas medidas na placa Astrográfica , erros como o de má orientação da placa no instrumento de medida acontecem , juntos com vários outros que veremos a seguir. Por isso neste trabalho desenvolvemos o método das dependências , método este idealizado por SCHLESINGER , e mais tarde aperfeiçoado por SYLVIEN AREND , para ser utilizado para a determinação do que se chama das constantes da placa. Este método consiste em colocar no centro de um trângulo formado pelas três estrelas de referência , o astro do qual desejamos calcular as coordenadas.

Na aplicação deste processo , as posições das estrelas de referência assim como as do astro são projetadas sobre a placa fotográfica , na qual são definidos dois eixos cartesianos de coordenadas x e y ; x_i e y_i são transformadas em coordenadas padrão , ou seja , medidas no plano tangente. É possílvel daí , o cálculo das coordenadas equatoriais.

Uma vez que o método das dependências baseia-se em dados obtidos a partir de fotografias em placas Astrográficas , pareceu conveniente optar por uma introdução sobre fotografia Astrométrica. Inicialmente , mostrou-se do que a emulsão sensível é composta e como o raio luminoso vem impressiona-la. Outras noções importantes apresentadas são , a curva característica , hipersensibilização , entre outras.

Veremos também os possíveis defeitos que uma objetiva esta sujeita e algumas formas de minimiza-los.

Ao concluir este sumário , gostaria de expressar a intensão de que o trabalho que se segue venha de encontro ao interesse e as necessidades de quem a ele recorrer.

I. INTRODUÇÃO

I.I. INTRODUÇÃO A FOTOGRAFIA ASTROMÉTRICA

Com o aperfeiçoamento de técnicas que nos permitem maior sensibilidade, precisão e simplificação dos métodos fotográficos, a astrometria é ainda em uma grande parte realizada através da fotografia. A importância do método fotográfico é que ele fixa numa placa fotográfica a posição relativa das estrelas e outros objetos celestes em alguma região do céu, conservando esta imagem para investigações futuras. Outra vantagem deste método é o grande número de objetos observados em um mesmo tempo. Muitas imagens de estrelas são obtidas num negativo, como também muitos objetos celestes, entre os quais nebulosas extragalática. Por último o método fotográfico alcança objetos mais tênues que não são alcançados visualmente. É necessário salientar que o brilho excessivo dificulta a observação fotográfica. A linha divisória que separa a utilização dos métodos visuais e fotográficos é aproximadamente na nona magnitude estelar.

No estudo de determinações de posições, como no estudo do movimento próprio a "limitação do campo" observado ocasionado pelo uso da placa fotográfica é "sanado" pelo estudo comparativo de diversas placas feitas de "uma" determinada posição em épocas diferentes.

?

o campo não muda

. EMULSÃO FOTOGRÁFICA

A emulsão sensível é formada por uma solução gelatinosa em que são dissolvidos os sais halóides (cloreto, brometo, iodeto).

redação

O halóide de Prata é fotoquimicamente ativo, e exposto à luz de comprimento de onda e intensidade suficiente forma uma imagem latente invisível que submete o halóide de Prata associado mais rapidamente redutível do que o halóide não exposto quando este é sujeito a um agente redutor adequado. Pela fixagem remove-se o halóide de Prata restando apenas na emulsão uma imagem perpetuada sobre a Prata metálica.

?

O halóide de Prata mais utilizado em emulsões sensíveis é o Brometo de Prata, embora cada emulsão contenha uma percentagem mínima de iodeto de Prata. O Brometo de Prata esta presente na emulsão na forma demuitos grãos de cristais, e ele é composto de íons Prata carregado positivamente e íons de Brometo carregado negativamente. A imagem latente construída de Prata metálica é resultado da redução do Brometo de Prata imediatamente associado.

$$Br^- + h\nu \longrightarrow Br + e$$
$$e + Ag^+ \longrightarrow Ag$$

$h\nu$ é um quantum de radiação e e um elétron. Reações similares a esta é que dão a imagem de Prata latente.

Não se tem conhecimento do número de quanta necessário para a formação de um átomo de Prata metálica e nem o número de átomos de Prata metálico necessário para formação de uma imagem latente. Mas, pesquisas feitas por WEBB, na região dos 4.000 A revelou que a absorção mútua de dois quanta de luz, em poucos segundos forma uma imagem sublatente estável. Esta imagem sublatente, segundo MITCHELL e MOTT, é um par neutro de átomos de Prata, e para a formação de uma imagem latente estável requer três fotoelétrons e ela será composta de quatro átomos de Prata de carga positiva (Ag_4^+). WEBB concluiu que na região dos 4.000 A chapas de uma única camada de grãos requerem 10 quanta de luz por grão para a formação de uma imagem latente.

Com isso, um perfil da sensibilidade do processo fotográfico pode ser obtido. Utilizamos a razão do número de grãos desenvolvíveis para o número de fótons incidentes sobre a emulsão, para medir a eficiência de um material fotográfico. Na região de 4.000 A, somente 10% aproximadamente da luz incidente sobre uma emulsão é absolvida pelos grãos de halóide de Prata. Nesta emulsão a melhor eficiencia possível é em torno de 1-3%, provando que a luz é usada mais eficientemente. Isto exige que na formação da imagem latente, um grão absorva um número mínimo de fótons. BOM

A sensibilidade do halóide de Prata esta restringida a região espectral do ultravioleta, violeta e azul.

Para estender a sensibilidade da emulsão utiliza-se corantes orgânicos que misturado com o halóide de Prata aumenta a sensibilidade da emulsão, para comprimentos de onda maiores. Utilizando-se de adequados corantes é possível estender o comprimento de onda limite de sensibilidade para quase 12.500 A.

O gráfico da figura 1, mostra a sensibilidade espectral relativa a emulsões típicas não sensitivas (emulsão de iodobrometo de Prata), ortocromática, pancromática e infravermelho. Apesar de todas as emulsões mostrarem-se mais sensitivas a região do azul e violeta, isto devido ao fato de todas elas conterem halóide de Prata, a presença do corante faz com que a sensibilidade nesta região varie. ?

redação

não está Nº

de repente ?!

$$T = \exp (- \alpha I^{q} t) \qquad \ldots (5)$$

onde α é uma constante associada pela lei de SCHWARZSCHILD , e permite representar a curva característica observada para $0,2 < T \leq 1,0$, já que as intensidades são fracas e o tempo de exposição longo. explicar melhor

Quando duas exposições contínuas não produzem a mesma densidade , se dá o efeito Intermitente. Este efeito se relacionado com a falha de reciprocidade , será uma função do nível de intensidade e frequencia de interrupção da exposição para uma dada emulsão. Somente para altas frequencias consegue-se equivalência na resposta a exposições contínuas conhecidas, e depois para um de intensidade igual a intensidade média da exposição intermitente com uma duração igual ao tempo total transcorrido da exposição intermitente. ?

Um sistema possível para a falha de reciprocidade e o efeito Intermitente parece ficar no fato de que absorção sucessiva de muitos quanta de luz é exigida em ordem para produzir uma imagem latente, e que, para se produzir esta estável imagem sublatente, um dos níveis de energia intermitente é instável e decai de uma certa razão se a luz não mais é absorvida. ?

Já a densidade produzida por uma multipla exposição à luz de intensidade diferente, dependerá da ordem em que foram feitas estas exposições. Segundo WEBB e EVANS "A densidade produzida é gerlmente maior se a exposição inicial é de intensidade alta". Este efeito em fotografia astronômica é chamado de efeito de véu. A magnitude deste efeito depende das características da emulsão, da intencidade e comprimento de onda da luz exposta, da estrutura da imagem e do tempo de exposição.

Foi mostrado experimentalmente por WEBB e BILTZ, que a falha de reciprocidade de uma emulsão é independente do comprimento de onda quando pontos de mesma densidade e tempo de exposição são comparados. Como podemos ver, vários fenômenos podem ocorrer na exposição da placa à luz. Agora, sempre que exatas precauções forem tomadas na manipulação das mesmas, pouca interferência sofrerá os trabalhos astrométricos.

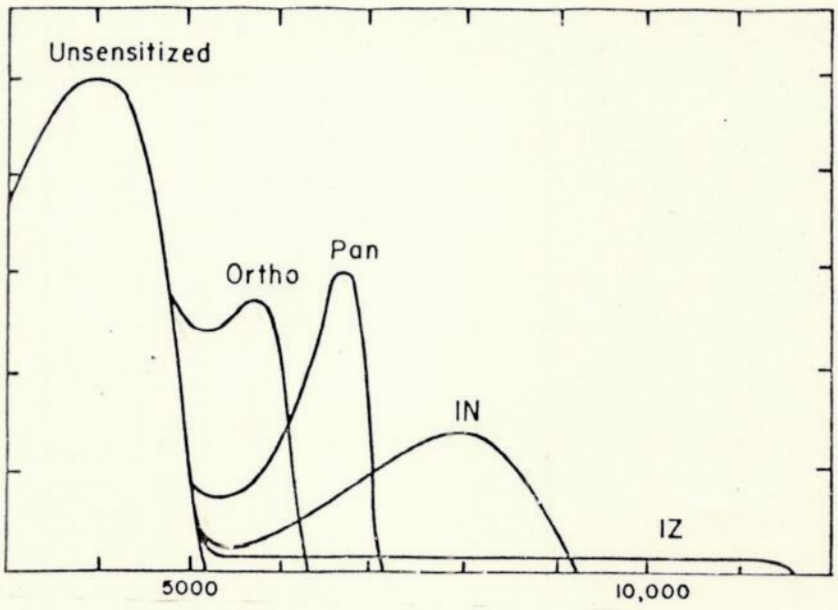
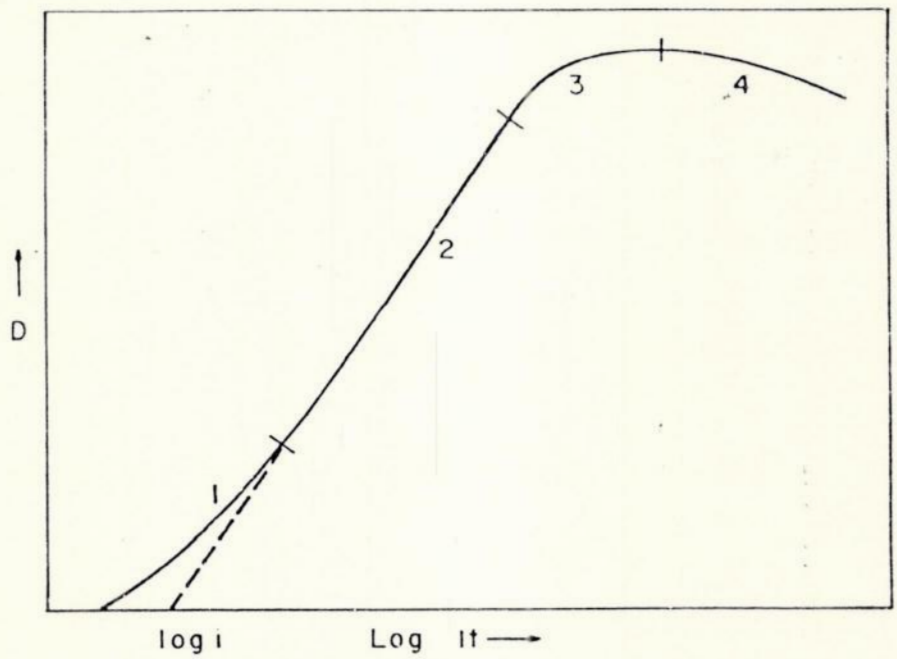


Fig 1

A CURVA CARACTERÍSTICA

A curva característica de uma emulsão é a relação entre a densidade (D) e o logarítmo da exposição (log It, onde I é a intensidade de luz incidente na emulsão e t o tempo de duração da exposição). Esta curva possui 4 regiões, como podemos ver na figura 2.



A 1º região é denominada do pé da curva, a 2º região de uma linha reta, o pé e a linha reta da curva são devido a resposta particular da emulsão à luz. A linha reta é a exposição normal. A 3º região é o ombro da curva e a 4º região é uma região de solarização. A região de ombro é devido a não transparência da emulaão, quando os grãos são revelados. A região de solarização tem relação com a rehalogenação da superfície da imagem latente pelo halogênoo liberado quando da formação da imagem de Prata metálica.

A parte reta da curva característica é conhecida como a região de correta exposição,e existe a relação entre a transparência (T), que é a fração de luz incidente transmitida pela placa, e a energia que produz a imagem, é dada por :

$$D = - \log T = \gamma \ (\log It - \log i) \qquad \ldots (3)$$

γ é o gradiente da fração de linha reta e mede o contraste da placa, log It é o eixo interceptado e log i é a medida da sensibilidade. A ordem de log It para tornar válida esta equação é chamada de escala linear de exposição daplaca. A escala total da placa será a ordem de log It entre o pé e a ombro da curva característica, porque nesta parte o gradiente $\frac{dD}{d\ (\log It)}$ torna-se zero. Aescala total , a escala linear de exposição, a inércia i , e são todas dependentes tanto da emulsão como também das condições de exposição e preparação.

Para um dado material e uma dada exposição, o valor de irá depender da constituição, temperatura, grau de agitação do revelador e o tempo de revelação. Então :

$$\gamma = \gamma_\infty \ (1 - e^{-kT}) \qquad \ldots (4)$$

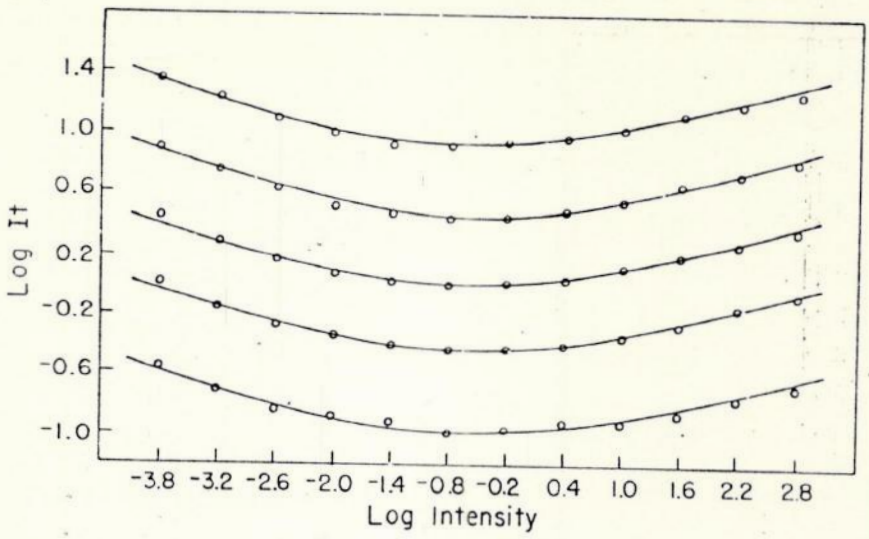
onde γ_∞ é o valor máximo que atinge γ para um dado material, γ é o tempo de revelação e k é a constante velocidade revelação, que é dependente da constituição, temperatura e grau de agitação do revelador. também depende do comprimento de onda da luz exposta.

A forma da equação (3) é tal que a exposição It necessária para produzir uma dada densidade com materiais tendo diferentes valores de é dependente da escolha da densidade na qual a comparação é feita. Uma comparação de vários materiais da placa num nível de densidade igual a 0,6 dá resultados mais significativos. Na placa as velocidades astronômicas são frequentemente tomadas como sendo inversamente proporcional à exposição It exigida para produzir uma densidade de 0,6 pre-

cedendo ao véu quando revela-se a placa para um γ de γ_∞ igual a aproximadamente 80%.

FALHA DA RECIPROCIDADE E O EFEITO INTERMITENTE

A transparência é uma função da exposição total It e também dependente dos valores atuais da intensidade e do tempo de exposição. Quando não há uma correspondencia recíproca desses dois valores dizemos que há "falha da reciprocidade". Sua representação gráfica será o logarítmo da exposição It necessário para gerar uma densidade versus uma função do logarítmo ou da intensidade ou do tempo de exposição.



Passado para portug.

O gráfico acima mostra a curva de reciprocidade para valores de densidades constantes. A falha de reciprocidade varia de emulsão para emulsão. Atualmente, existe um material que possui uma curva de reciprocidade em que exige um tempo de exposição It mínimo para produzir uma dada densidade , que corresponde a uma densidade média, para um tempo de exposição na ordem de 0,1-10 segundos. Aperfeiçoando-se a emulsão pode-se conseguir um bom tempo de exposição de aproximadamente 1-10 minutos.

A relação envolvendo T ou D e I e t mais usada é a lei de SCHWARZSCHILD , em que T é uma função de $It^{1/q}$ onde $q > 1$.

redação

HIPERSENSIBILIZAÇÃO

Como existem vários efeitos para dessensibilizar uma placa fotográfica, para diminuir estes efeitos e aumentar a eficiência da emulsão um tratamento prévio na manufatura da emulsão faz-se necessário. Esse aumento na eficiência da emulsão pode ocasionar efeitos indesejáveis, como o aumento na tendência da emulsão a revelação espontânea ou revelação por véu.

Um tratamento muito empregado em trabalhos astrométricos é o de hipersensibilização. Refere-se ao tratamento entre a manufatura da emulsão e sua exposição, e até mesmo o método de sensibilização por corante deve ser considerado às vezes para ser processada a hipersensibilização. Os procedimentos para hipersensibilização praticados pelo usuário da emulsão são os seguintes : 1) banho da emulsão em água ou uma solução alcalina tal como amônia ; 2) exposição da emulsão a certos vapores de mercúrio ; 3) aquecimento das placas poucos dias antes da exposição ; 4) pré-sensibilizando as placas por exposição à luz.

A hipersensibilização por banho das placas pode ser ou em água destilada ou em uma solução de amônia. O banho na solução de amonia é o mais usado. Este efeito da hipersensibilização da amônia é dependente da rapidez de secagem, e para isto a emulsão é tratada em um banho de álcool seguido do banho de amônia, antes da secagem à presença de ar. Como placas hipersensibilizadas mostram uma certa tendência ao véu, o acréscimo de um anti-véu Benzotriazole é aconselhável. Para uma rápida secagem da solução de amônia é necessário que a temperatura desta solução seja mantida em torno de 55°F , para reduzir o aumento da gelatina. Logo que as placas hipersensibilizadas por amônia estejam preparadas , o seu uso deve ser imediato, pois se estocada por muitos dias podem vir a deteriorar. BOM

°C ?

A exposição da emulsão aos vapores de mercúrio , é uma maneira de hipersensibilizar, devido ao reforço a sensibilidade de grãos pouco sensíveis, pela adsorção de átomos de mercúrio. Um cuidado especial deve-se ter , para que o vapor de mercúrio não contamine outros materiais fotográficos , causando uma perda de sensibilidade e véu. O tratamento a base de vapor de mercúrio parece não afetar a escala de sensibilidade espectral da emulsão. Após esse tratamento se a placa não for utilizada, nota-se que o decréscimo em sensibilidade não é acompanhado por um aumento do véu. Isto é devido a evaporação do vapor de mercúrio adsorvido. Com isso , esse processo de hipersensibilização pode ser novamente refeito.

e absorção

O aquecimento das placas dias antes da exposição , a temperatura de 100°F é outro tipo de hipersensibilização. O aquecimento da emulsão produz mais do que um efeito de exposição na placa. Durante a manufatura , vários agentes sensibilizantes aderem a emulsão , e as reações químicas destes sensibilizantes adsorvidos com o halóide de Prata são afetados pela subsequente história térmica da emulsão. Para acelerar estas reações submete-se a emulsão a uma temperatura elevada ou a uma maturação posterior a manufatura. O véu acontece se esta maturação ultrapassa os limites. Com o aquecimento da emulsão antes do uso , acelera-se esta maturação.

A pré-sensibilização das placas por exposição à luz faz melhorar a sensibilidade da emulsão , pois fornece imagens sublatentes estáveis sobre as quais a imagem latente será constituida. A intensidade e duração da pré-exposição para os fins astronômicos , seria produzido por uma pequena incidência de luz. ARGUE sugeriu que esta pré-exposição fosse da ordem de 1/750 segundos.

Poderia ter justif. melhor a hipersens. nos seus usos astronómicos.

CONCLUSÕES

CONCLU. CURVA CARACT. e o seu emprego ?

2 - ASTROMETRIA COM ASTRÓGRAFOS

Os elementos principais de uma câmara astrográfica são a objetiva e a placa fotográfica. Pois uma boa definição da imagem proporcionada por uma objetiva apropriada , facilitará o cálculo da posição fotográfica de um astro na placa.

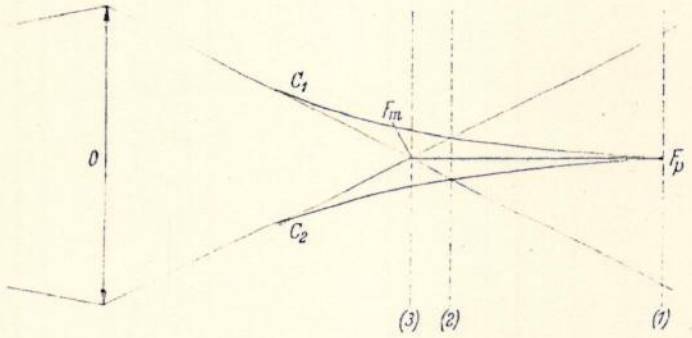
Os defeitos da objetiva e distorções da imagem fotográfica no campo devem ser elinados tanto quanto possível, Os defeitos mais importantes são : aberração esférica e coma , aberração cromática , distorção , astigmatismo e curvatura de campo.

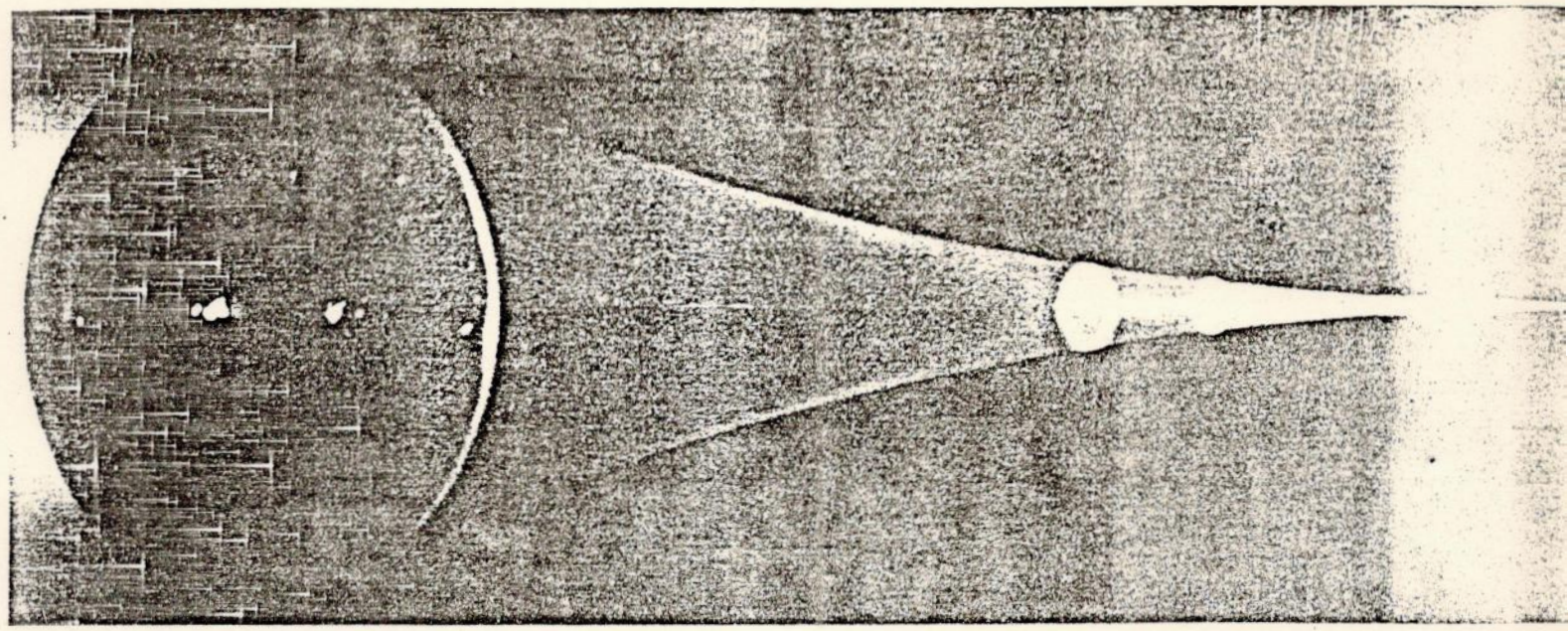
A aberração esférica ocorre quando os raios do feixe de luz , paralelo ao eixo óptico e convergentes para o foco depois de passarem através das zonas anelares das diferentes lentes da objetiva , são trazidas juntos à pontos diferentes ao longo do eixo óptico. Isto causa uma imagem simetricamente embaçada.

A aberração esférica de terceira ordem , os raios que saem dos bordos da lente voltam para o foco marginal F_m. Os raios centrais convergem para o foco paraxial F_p .

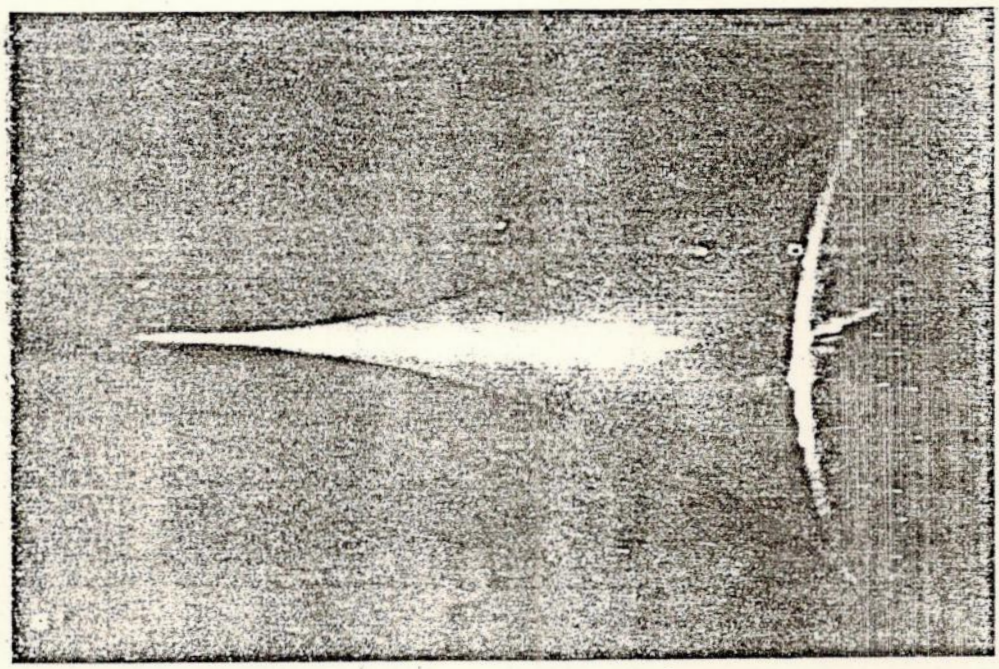
Todos os raios emergentes são tangentes a superfície de revolução tendo $C_1 F_p C_2$ como seção meridiana. A superfície consistindo da curva meridiana $C_1 F_p C_2$ e o segmento $F_p F_m$ é a superfície cáustica da aberração esférica.

As seções (1) , (2) , (3) são mostradas por meio de tela fluorescente. A posição (2) corresponde ao círculo de perturbação mínima.



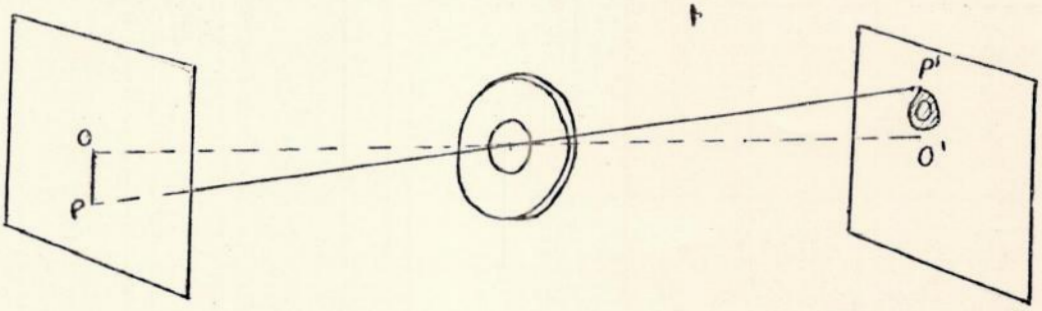


Seção dos raios em 3 planos correspondendo as posições (1) , (2) , (3) do diagrama.



Forma da superfície cáustica na presença de aberração esférica.

A aberração esférica de raios inclinados formando uma imagem próxima aos bordos da placa é chamada de COMA. Na figura abaixo a coma esta presente como única aberração. Em geral, a forma da imagem é modificada quando ocorrem , também , outras aberrações.



OO' é o eixo principal da lente ; P é um objeto pontual situado abaixo do eixo. Um estreito pincel de raios originados em P passando pelo centro da lente , forma em P' uma imagem pontual de P. O cone ôco de raios que passam pela circunferência sombreada na lente , formam a circunferência situada abaixo do ponto P'. Os raios formam como imagem circunferências menores ; e os marginais circunferências maiores . O conjunto dessas várias circunferências resulta em a imagem ter a forma da figura.

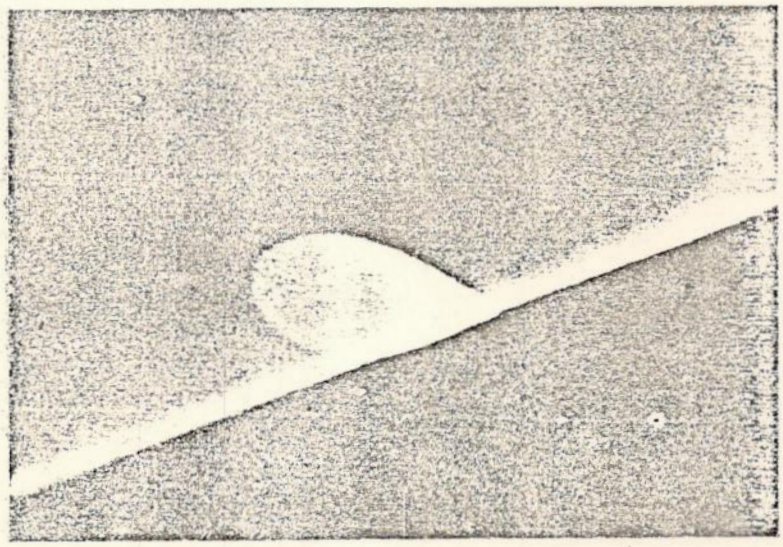
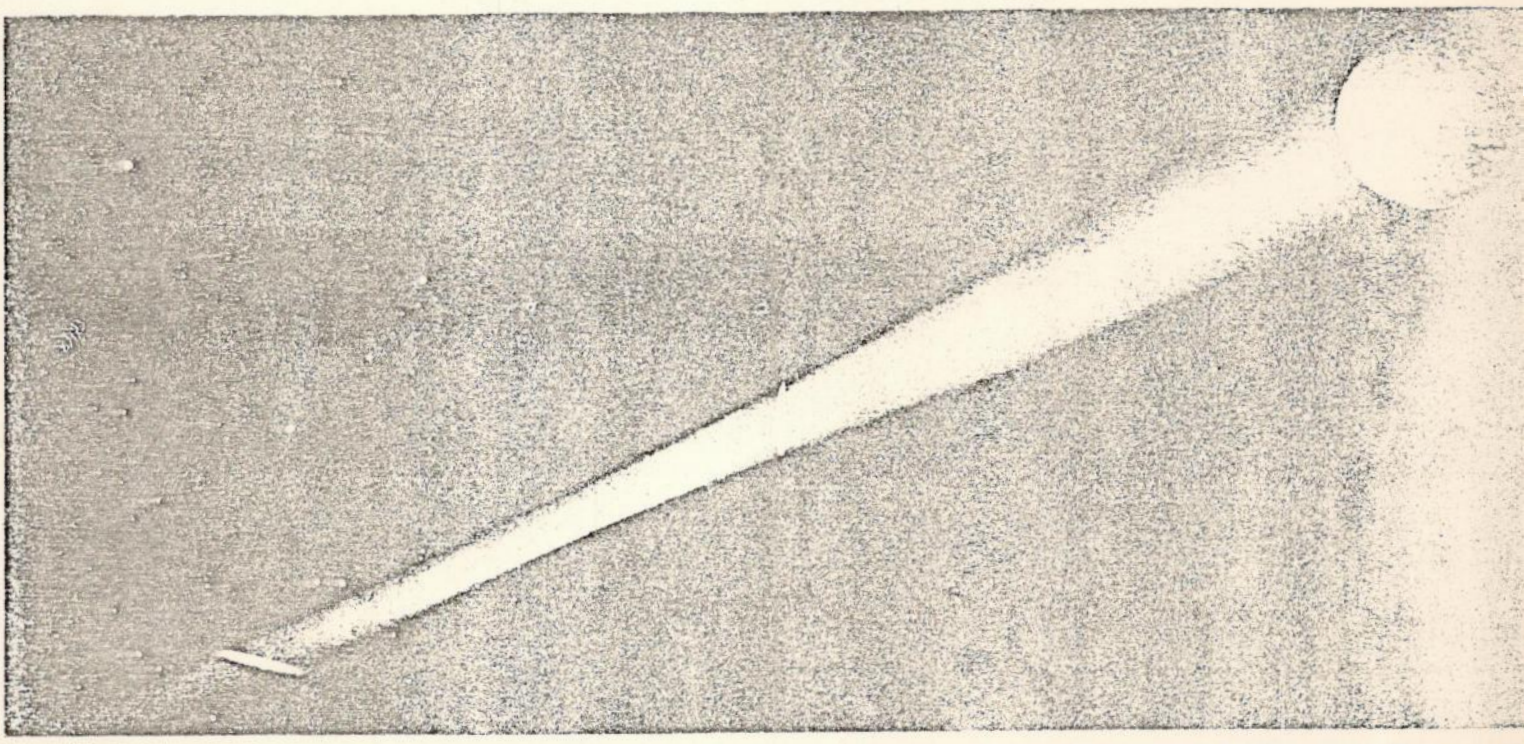


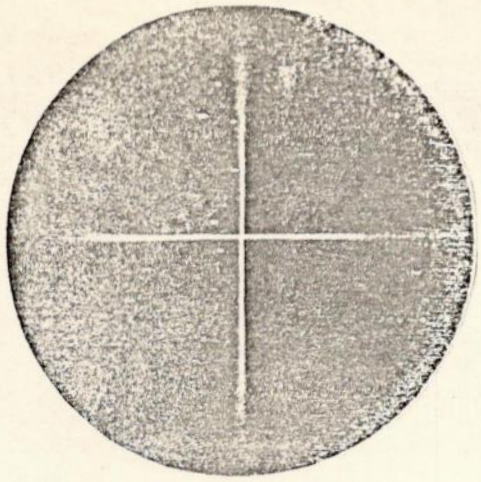
Imagem de um ponto na presença de coma.

Os raios paralelos , agora , entram pela lente fazendo um angulo θ com o eixo. Todos os raios emergentes são , então , tangentes à superfície cáustica (aquecida) , a qual abrange duas superfícies distintas associadas com a superfície focal sagital e a tangencial respectivamente da aberração esférica. ñ definiu? que pupila?

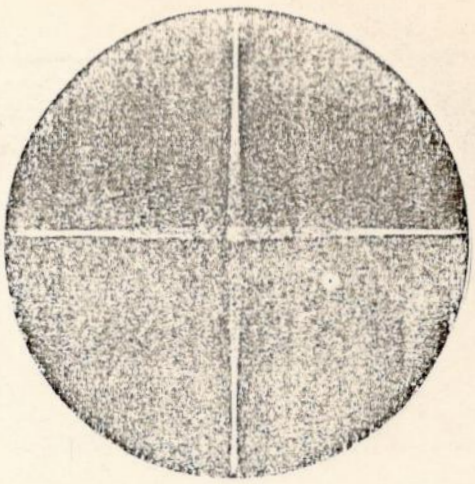
Quando a abertura da pupila é pequena , elementos da superfície cáustica podem ser identificados com seus planos tangentes , e suas seções com um plano são então segmentos de linhas retas (a linha focal tangencial T e a linha focal sagital S) . Quando θ varia , S e T descrevem superfícies curvas. A imagem melhor de um ponto objeto que aparece no caminho médio entre S e T , descreve uma superfície curva. Isto é , existe a curvatura do campo.



Seções do feixe mostrado por duas telas fluorescentes , em posições (1) e (2).



Curvatura do campo :
centro da imagem no foco.



Curvatura do campo :
Borda da imagem no foco.

TIPOS DE OBJETIVAS UTILIZADAS EM TRABALHOS ASTROMÉTRICOS :

1º) Objetiva Tríplice do tipo Cook-Taylor - o campo astigmático é estendido em 6°x 6° ; a abertura do raio esta em torno de 1:4. A distorção neste caso não é corrigida e eleva-se a quase 5" a 3° do eixo.
2º) Objetiva Quádrupla do tipo Ross - o campo é igual ou maior que a extensão da objetiva tríplice do tipo Cook-Taylor , mas o raio de abertura é menor. A distorção é menor , em torno de 1" a 3° do eixo.
3º) Objetiva Quádrupla da Zeiss - o campo também de extensão igual a do tipo Cook-Taylor , e a distorção em torno de 1" a 3° do eixo , o raio de abertura é da ordem de 1:5.
4º) Refletores Schmidt - Neste tipo de objetiva , o astigmatismo e a coma são amplamente eliminados. Mas , uma dificuldade com a curvatura do campo exige que a placa seja adequadamente curva.

Para se determinar o foco , deve-se levar em conta os seguintes fatores : a temperatura , a distância das estrelas ao centro ou eixo da placa e o brilho das estrelas.

Devido a temperatura ser muito pequena para o tipo de objetiva usada , ela não é de grande importância na determinação do foco. Mas , não é desprezível , devendo-se obedecer a uma ordem de temperatura. !?
O efeito do brilho das estrelas só é importante para estrelas muito explica
brilhantes as quais são de difícil medida. Por que ?

Em astrometria é necessário que se faça uma orientação precisa ,

porque uma má orientação pode acarretar erres sistemáticos , inclusive de magnitudes. Essa orientação precisa não dependerá somente da instabilidade atmosférica , mas também , da flexão diferencial entre a câmara e o telescópio orientado e da falta no telescópio de um preciso ajustamento equatorial.

O erro de ajustamento polar em declinações menores que 60° é facilmente corrigido. Mas , em altas declinações torna-se necessário um ajuste polar.

Verifica-se que as placas estão planas , para que se possa fazer a redução.Em um campo muito extenso o erro maior introduzido é por instabilidade da placa. A placa normal poda introduzir um desvio de mais de 0,2 mm , e como estrelas que estejam a 3° do eixo óptico sofrem também um desvio de 0,1 mm , e um aumento na imagem de mais de 5° , é aconselhável que se utilize na medição das placas estrelas que se encontrem próximas ao eixo óptico para que todas elas sofram um único desvio , que é o da placa.

MEDIÇÃO DAS PLACAS

???

explicar?

Para a medição de uma placa , utiliza-se de um plano de medida (escala ou parafuso) que converte a faixa de campo da placa. A medida pode ser feita de uma coordenada somente ou de ambas coordenadas simultâneamente. Para maior precisão e eliminação de erros sistemáticos de uma natureza psicológica , mede-se cada coordenada em duas posições da placa diferindo de 180° . A diferença entre as duas orientações , dá a precisão da medida. Nota-se que , em circunstâncias favoráveis , um pequeno erro médio abaixo 1 pode ser obtido por meio de duas orientações.

?

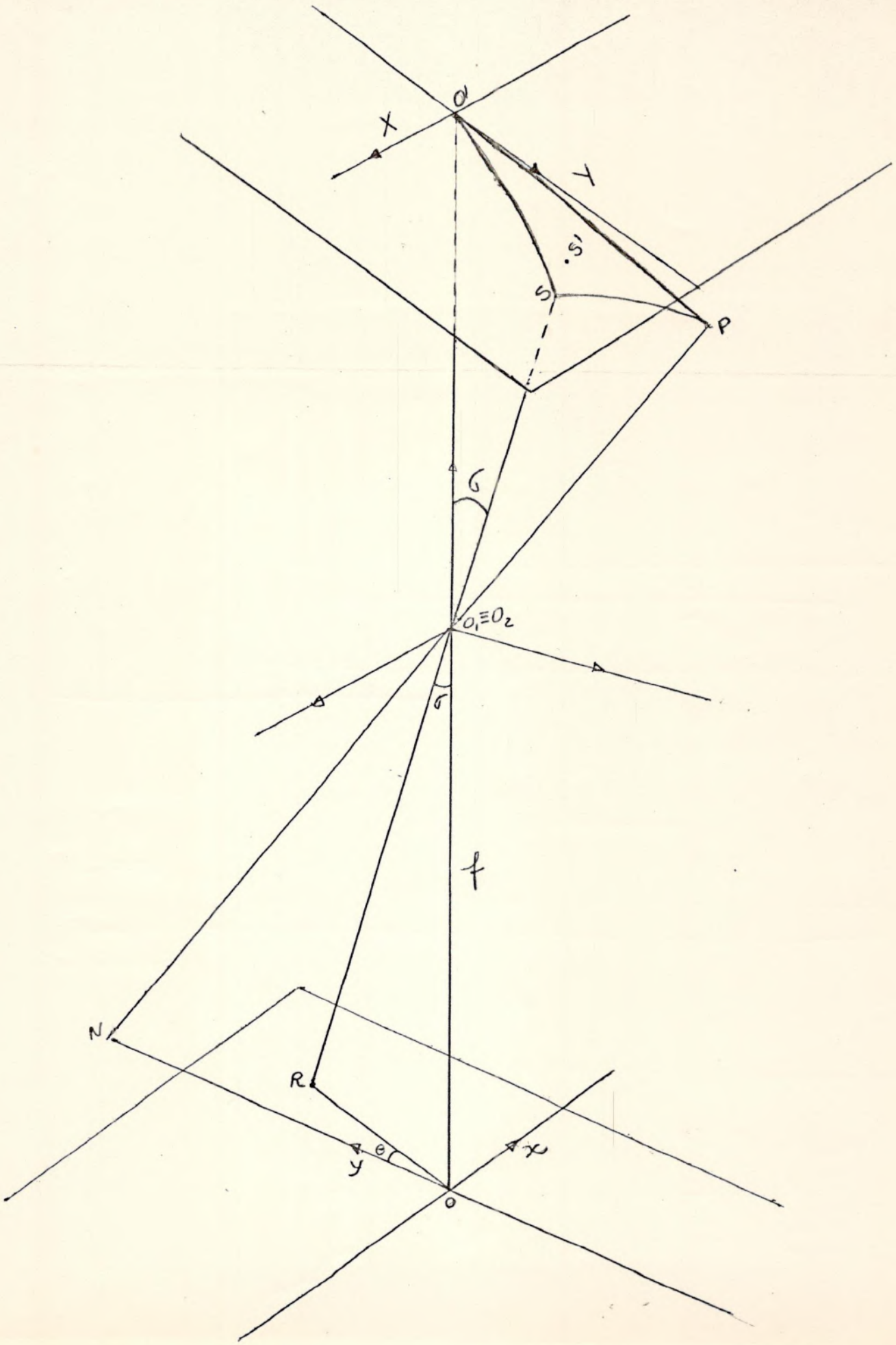
??

explicar

Outro instrumento de medida introduzido por Kapteyn ,consta de um equatorial pequeno com os eixos da hora , declinação e do telescópio encontrando-se em um ponto. Este ponto é perpendicular a placa no ponto tangente , numa distancia igual ao comprimento focal do telescópio. Se houve correta orientação diferenças em ascensão reta e declinação são lidas diretamente no círculo equatorial do instrumento de medida. Este procedimento é de limitada aplicação , sendo algumas vezes uados para a determinação de posições de planetas menores e cometas.

ponto ⊥ à placa ??

3 - REDUÇÃO

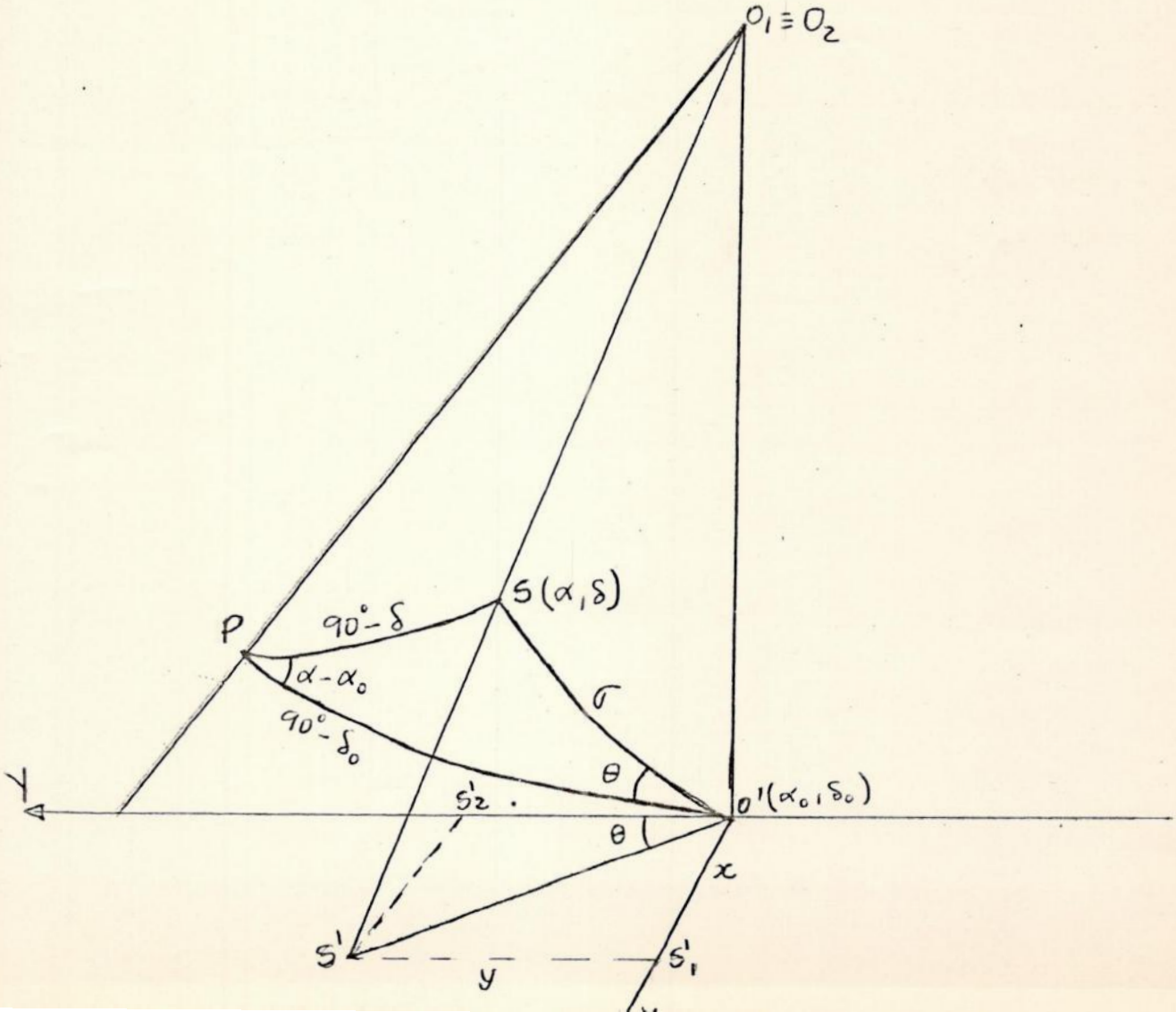


Sejam o_1 e o_2 respectivamente , os pontos nodais principais: primário e secundário de uma objetiva , que para facilidade de assimilação supomos coincidentes. Imaginemos a esfera celeste , de centro O e de raio unitário. A direção do eixo óptico coincide com a reta OO' , onde o plano tangente em O', perpendicular a esse eixo , é paralelo à placa fotográfica e ao plano focal . Uma estrela na esfera celeste será um ponto S , e será visível no plano tangente projetada no ponto S'. A sua imagem formar-se-á num ponto R sobre a placa fotográfica. O ponto base O é a projeção do centro óptico da objetiva , de distância focal f , sobre o plano focal , que faz com o eixo óptico um ângulo de 90°.

Supondo a placa fotográfica coincidente com o plano focal , tem-se para as coordenadas da imagem sobre a placa fotográfica x e y , e para as coordenadas relacionadas ao plano tangente X e Y. Assim podemos escrever a relação :

$$x = Xf \quad ...(1)$$
$$y = Yf \quad ...(2)$$

onde f é a distância focal da objetiva.



Na fig.(2) , P e S representam o polo celeste e o astro , suas projeções no plano tangente serão P' e S'. O eixo dos X intercepta o eixo dos Y no ponto O'. Dos triângulos $\widehat{OS'O}$ e $\widehat{SS'O'}$ tiramos as relações:

$$X = O'S' \operatorname{sen} \theta \quad , \quad Y = O'S' \cos \theta$$

mas, $O'S' = \operatorname{tg} \sigma$, então vem :

$$X = \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta \qquad \ldots(3)$$
$$Y = \operatorname{tg} \sigma \cos \theta \qquad \ldots(4)$$

Assim X e Y serão as coordenadas padrão do astro. Substituindo os valores de X e Y em (1) e (2) , vem:

$$x = f \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta \qquad \ldots(5)$$
$$y = f \operatorname{tg} \sigma \cos \theta \qquad \ldots(6)$$

RELAÇÃO ENTRE COORDENADAS PADRÃO E EQUATORIAIS

Como vimos anteriormente , a partir de x , y e f calcula-se e θ. Precisamos encontrar uma expressão que relacione σ e θ com as coordenadas equatoriais.

Primeiramente , orienta-se Y , positivamente , para leste , de tal modo que os valores crescentes de Y correspondam aos valores crescentes da ascensão reta. As ascensões retas e declinações de S e O' são respectivamente α , δ e α_0 , δ_0.

Das fórmulas fundamentais da trigonometria de Gauss no triângulo esférico $\widehat{PSO'}$, onde $\widehat{PS} = 90^\circ - \delta$, $\widehat{PO'} = 90^\circ - \delta_0$ e $\widehat{SPO'} = \alpha - \alpha_0$, tiramos as seguintes relações :

$$\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} (\alpha - \alpha_0) \cos \delta \qquad \ldots(7)$$
$$\operatorname{sen} \sigma \cos \theta = \operatorname{sen} \delta \cos \delta_0 - \cos \delta \operatorname{sen} \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0) \qquad \ldots(8)$$
$$\cos \sigma = \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0) \qquad \ldots(9)$$

Dividindo (8) por (9) , obtem-se :

$$\operatorname{tg} \sigma \cos \theta = \frac{\operatorname{sen} \delta \cos \delta_0 - \cos \delta \operatorname{sen} \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0)}{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0)} \qquad \ldots(10)$$

e dividindo (7) por (9) , vem :

$$\operatorname{tg}\sigma \operatorname{sen}\theta = \frac{\cos\delta \operatorname{sen}(\alpha-\alpha_0)}{\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\delta_0 + \cos\delta\cos\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0)} \qquad \ldots(11)$$

(10) e (11) constituem as duas primeiras equações fundamentais de astrometria plana.

Invertendo o problema , a partir de α_0 , δ_0 ,que são as coordenadas equatoriais de O' , centro da placa e as coordenadas X e Y, calculemos α e δ .

Da equação (10) , temos que :

$$\operatorname{tg}\sigma\cos\theta\left[\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\delta_0 + \cos\delta\cos\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0)\right] = \operatorname{sen}\delta\cos\delta_0 -$$

$$- \cos\delta\operatorname{sen}\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0)$$

$$\operatorname{tg}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\delta_0 + \operatorname{tg}\sigma\cos\theta\cos\delta\cos\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0) =$$

$$= \operatorname{sen}\delta\cos\delta_0 - \cos\delta\operatorname{sen}\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0)$$

$$\operatorname{sen}\delta\cos\delta_0 - \operatorname{tg}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\delta_0 = \operatorname{tg}\sigma\cos\theta\cos\delta\cos\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0) +$$

$$+ \cos\delta\operatorname{sen}\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0)$$

$$\operatorname{sen}\delta(\cos\delta_0 - \operatorname{tg}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\delta_0) = \cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0)\left[\operatorname{tg}\sigma\cos\theta\cos\delta_0 +\right.$$

$$\left.+ \operatorname{sen}\delta_0\right]$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\delta = \cos(\alpha-\alpha_0)\,\frac{\operatorname{tg}\sigma\cos\theta\cos\delta_0 + \operatorname{sen}\delta_0}{\cos\delta_0 - \operatorname{tg}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\delta_0}} \qquad \ldots(12)$$

Da equação (11) , vem :

$$\operatorname{tg}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\delta_0 + \operatorname{tg}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\delta_0\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0) =$$

$$= \cos\delta\operatorname{sen}(\alpha-\alpha_0)$$

$$\frac{tg\,\sigma\,sen\,\theta\,sen\,\delta\,sen\,\delta_0}{cos\,(\alpha-\alpha_0)} + tg\,\sigma\,sen\,\theta\,cos\,\delta_0\,cos\,\delta = cos\,\delta\,tg\,(\alpha-\alpha_0)$$

$$\frac{tg\,\sigma\,sen\,\theta\,tg\,\delta\,sen\,\delta_0}{cos\,(\alpha-\alpha_0)} + tg\,\sigma\,sen\,\theta\,cos\,\delta_0 = tg\,(\alpha-\alpha_0)$$

Substituindo o valor de tg δ da eq. (12) , vem :

$$tg\,\sigma\,sen\,\theta\,sen\,\delta_0\,\frac{(tg\,\sigma\,cos\,\theta\,cos\,\delta_0 + sen\,\delta_0)}{cos\,\delta_0 - tg\,\sigma\,cos\,\theta\,sen\,\delta_0} + tg\,\sigma\,sen\,\theta\,cos\,\delta_0 =$$

$$= tg\,(\alpha-\alpha_0)$$

$$\frac{tg\,\sigma\,sen\,\theta\,sen\,\delta_0\,(tg\,\sigma\,cos\,\theta\,cos\,\delta_0 + sen\,\delta_0) + tg\,\sigma\,sen\,\theta\,cos\,\delta_0\,(cos\,\delta_0 -}{cos\,\delta_0 - tg\,\sigma\,cos\,\theta\,sen\,\delta_0}$$

$$- tg\,\sigma\,cos\,\theta\,sen\,\delta_0) = tg\,(\alpha-\alpha_0)$$

$$tg\,(\alpha-\alpha_0) = \frac{tg^2\sigma\,sen\,\theta\,sen\,\delta_0\,cos\,\theta\,cos\,\delta_0 + tg\,\sigma\,sen\,\theta\,sen^2\delta_0 +}{cos\,\delta_0 - tg\,\sigma\,cos\,\theta\,sen\,\delta_0}$$

$$\frac{+ tg\,\sigma\,sen\,\theta\,cos^2\delta_0 - tg\,\sigma\,sen\,\theta\,cos\,\theta\,cos\,\delta_0\,sen\,\delta_0}{cos\,\delta_0 - tg\,\sigma\,cos\,\theta\,sen\,\delta_0}$$

$$\boxed{tg\,(\alpha-\alpha_0) = \frac{tg\,\sigma\,sen\,\theta}{cos\,\delta_0 - tg\,\sigma\,cos\,\theta\,sen\,\delta_0}} \qquad \ldots(13)$$

MÉTODO DAS DEPENDÊNCIAS

No cálculo da posição em coordenadas equatoriais de um astro, obtidas através da placa fotográfica, interveem muitos erros de difícil determinação, tais como : o valor da escala da placa, a orientação da placa no instrumento de medida, etc.

O método das dependências dado por SCHLESINGER (1926), é atualmente, o método mais usado em redução. Este método aperfeiçoado por SYLVIEN AREND (1933) permite a obtenção rápida e precisa das coordenadas de um astro.

O método consiste no uso de um ponto teórico imaginário que denominamos de centro das dependências ou baricentro, que deve coincidir com a posição do objeto cujas coordenadas são desconhecidas. Tal coincidência, entretanto, não é exata ; o pequeno resíduo entre a posição do astro e o centro de dependência, será tão pequeno que não modificará os resultados.

Sejam x_c e y_o as coordenadas retilíneas de um astro medidas em uma placa fotográfica, cuja posição queremos determinar, e x_i, y_i ($i = 1,2,3$) as coordenadas retilíneas, medidas na placa, de três estrelas de referência escolhidas como ponto de referência, que formam um triângulo, no interior do qual está situado o objeto, cuja posição desejamos determinar, podemos escrever :

$$N_i = x_i \wedge y_i$$

explicar N_i

onde os x_i e y_i estão relacionados à (x_o, y_o) como origem.

As três componentes de N resultantes, representam o duplo da superfície dos três triângulos formados pelo objeto e cada par de estrelas de referência. O duplo da superfície do triângulo de referência, vale :

$$N = \Sigma |\vec{N}_i|$$

Denominam-se dependências as componentes do vetor D expresso por:

$$\vec{D}_i = \frac{\vec{N}_i}{N}$$

Tais quantidades permitem determinar as coordenadas de referência, pelas fórmulas :

$$\begin{cases} x_o = D_i\, x_i \\ y_o = D_i\, y_i \end{cases}$$

Tendo em vista que o valor de N é o duplo da superfície do triângulo formado pelas três estrelas , na unidade utilizada na medida das coordenadas x e y , da placa ; e , por outro lado , N_1 , N_2, N_3 , respectivamente , o duplo da superfície dos triângulos formados : pelo objeto e as estrelas 2 e 3 ; pelo objeto e as estrêlas 1 e 3 e pelo objeto e as estrelas 1 e 2 , concluiremos que as dependências são relações entre superfícies , portanto , sem dimensões , o que elimina a necessidade de determinar a escala do instrumento e a orientação da placa.

DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DA FÓRMULA FUNDAMENTAL

Considerando que a placa subentende uma pequena zona da esfera celeste , podemos aceitar que $\delta - \delta_o = \Delta\delta$, donde $\delta = \delta_o + \Delta\delta$, de maneira que :

$$\cos\delta = \cos(\delta_o + \Delta\delta) = \cos\delta_o \cos\Delta\delta - \operatorname{sen}\delta_o \operatorname{sen}\Delta\delta$$
$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}(\delta_o + \Delta\delta) = \operatorname{sen}\delta_o \cos\Delta\delta + \cos\delta_o \operatorname{sen}\Delta\delta$$

como $\Delta\delta$ é infinitesimal , teremos :

$$\cos\Delta\delta \sim 1$$
$$\operatorname{sen}\Delta\delta \sim \Delta\delta$$

de modo que

$$\cos\delta = \cos\delta_o - (\delta - \delta_o)\operatorname{sen}\delta_o$$
$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\delta_o + (\delta - \delta_o)\cos\delta_o$$

pelas mesmas considerações anteriores $(\alpha - \alpha_o)$ também será infinitesimal de maneira que :

$$\cos(\alpha - \alpha_o) = 1 - \frac{(\alpha - \alpha_o)^2}{2!} + \ldots$$
$$\operatorname{sen}(\alpha - \alpha_o) = (\alpha - \alpha_o) - \ldots$$

substituindo-as na relação fundamental , ter-se-á :

$$\operatorname{tg}\sigma \operatorname{sen}\theta = \frac{[\cos\delta_0 - (\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta_0](\alpha-\alpha_0)}{[\operatorname{sen}\delta_0 + (\delta-\delta_0)\cos\delta_0]\operatorname{sen}\delta_0 + [\cos\delta_0 - (\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta_0]\cos\delta_0\left[1-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\right]}$$

$$\operatorname{tg}\sigma \cos\theta = \frac{[\operatorname{sen}\delta_0 + (\delta-\delta_0)\cos\delta_0]\cos\delta_0 - [\cos\delta_0 - (\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta_0]\operatorname{sen}\delta_0\left[1-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\right]}{[\operatorname{sen}\delta_0 + (\delta-\delta_0)\cos\delta_0]\operatorname{sen}\delta_0 + [\cos\delta_0 - (\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta_0]\cos\delta_0\left[1-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\right]}$$

considerando até o têrmo de terceira ordem :

$$\operatorname{tg}\sigma \operatorname{sen}\theta = \frac{(\alpha-\alpha_0)\cos\delta_0 - (\alpha-\alpha_0)(\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta_0}{\operatorname{sen}^2\delta_0 + (\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta_0\cos\delta + [\cos^2\delta_0 - (\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta_0\cos\delta_0]\left[1-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\right]}$$

$$\operatorname{tg}\sigma \cos\theta = \frac{\operatorname{sen}\delta_0\cos\delta_0 + (\delta-\delta_0)\cos^2\delta_0 - [\cos\delta_0\operatorname{sen}\delta_0 - (\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta_0]\left[1-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\right]}{\operatorname{sen}^2\delta_0 + (\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta_0 + \cos\delta_0 + \cos^2\delta - (\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta + \cos\delta_0 - \frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\cos^2\delta}$$

simplificando :

$$\operatorname{tg}\sigma \operatorname{sen}\theta = \frac{(\alpha-\alpha_0)\cos\delta_0 - (\alpha-\alpha_0)(\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta_0}{1-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\cos^2\delta_0 + \ldots}$$

$$\operatorname{tg}\sigma \cos\theta = \frac{\operatorname{sen}\delta\cos\delta_0 + (\delta-\delta_0)\cos^2\delta_0 - [\cos\delta_0\operatorname{sen}\delta_0 - (\delta-\delta_0)\operatorname{sen}^2\delta_0 - \frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\cos\delta_0\operatorname{sen}\delta]}{1-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\cos^2\delta_0 + \ldots}$$

ou

$$\operatorname{tg}\sigma \operatorname{sen}\theta = (\alpha-\alpha_0)\cos\delta_0 - (\alpha-\alpha_0)(\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta_0$$

$$\operatorname{tg}\sigma \cos\theta = (\delta-\delta_0) + \frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\cos\delta_0\operatorname{sen}\delta_0$$

multiplicando ambos os membros por f teremos :

$$x' = f\left[(\alpha-\alpha_0)\cos\delta_0 - (\alpha-\alpha_0)(\delta-\delta_0)\operatorname{sen}\delta_0\right]$$

$$y' = f\left[(\delta-\delta_0) + \frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\cos\delta_0\operatorname{sen}\delta_0\right]$$

Designando-se por x_i , y_i as coordenadas medidas da estrela de referência ; x_0 , y_0 as do ponto tangente da placa à esfera celeste e x_A , y_A as do astro , ter-se-á :

$$x_1 - x_0 = f\left[(\alpha_1-\alpha_0)\cos\delta_0 - (\alpha_1-\alpha_0)(\delta_1-\delta_0)\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right]$$
$$x_2 - x_0 = f\left[(\alpha_2-\alpha_0)\cos\delta_0 - (\alpha_2-\alpha_0)(\delta_2-\delta_0)\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right]$$
$$x_3 - x_0 = f\left[(\alpha_3-\alpha_0)\cos\delta_0 - (\alpha_3-\alpha_0)(\delta_3-\delta_0)\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right]$$
$$y_1 - y_0 = f\left[(\delta_1-\delta_0) + \frac{(\alpha_1-\alpha_0)^2}{2}\cos\delta_0\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right]$$
$$y_2 - y_0 = f\left[(\delta_2-\delta_0) + \frac{(\alpha_2-\alpha_0)^2}{2}\cos\delta_0\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right]$$
$$y_3 - y_0 = f\left[(\delta_3-\delta_0) + \frac{(\alpha_3-\alpha_0)^2}{2}\cos\delta_0\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right]$$

Multiplicando cada uma das equações acima pela dependencia D_1 , D_2 , D_3 , temos :

$$D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 =$$
$$= x_0\,(D_1 + D_2 + D_3) + f\left[\sum D_i\,(\alpha_i-\alpha_0)\cos\delta_0 - \sum D_i\,(\alpha_i-\alpha_0)\,(\delta_i+\delta_0)\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right]$$
$$D_1y_1 + D_2y_2 + D_3y_3 =$$
$$= y_0 + f\left[\sum D_i\,(\delta_i-\delta_0) + \sum D_i\,\frac{(\alpha_i-\alpha_0)^2}{2}\cos\delta_0\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right.$$

o primeiro membro das equações acima são respectivamente as coordenadas do objeto que se procura determinar a posição , isto é , x_A , y_A :

$$x_A - x_0 = f\left[(\alpha_A-\alpha_0)\cos\delta_0 - (\alpha_A-\alpha_0)(\delta_A-\delta_0)\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right]$$
$$y_A - y_0 = f\left[(\delta_A-\delta_0) + \frac{(\alpha_A-\alpha_0)^2}{2}\cos\delta_0\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right]$$

Igualando os dois sistemas acima temos :

$$f\left[(\alpha_A-\alpha_0)\cos\delta_0 - (\alpha_A-\alpha_0)(\delta_A-\delta_0)\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right] =$$
$$= f\left[\sum D_i\,(\alpha_i-\alpha_0)\cos\delta_0 - \sum D_i\,(\alpha_i-\alpha_0)\,(\delta_i-\delta_0)\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right]$$
$$f\left[(\delta_A-\delta_0) + \frac{(\alpha_A-\alpha_0)^2}{2}\cos\delta_0\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right] =$$
$$= f\left[\sum D_i\,(\delta_i-\delta_0) + \sum D_i\,\frac{(\alpha_i-\alpha_0)^2}{2}\cos\delta_0\,\mathrm{sen}\,\delta_0\right]$$

eliminando f , x_0 e y_0 , isto é , os três elementos desconhecidos :

$$(\alpha_A-\alpha_o)\cos\delta_o=\left[\sum D_i\ (\alpha_i-\alpha_o)\right]\cos\delta_o-\left[\sum D_i\ (\alpha_i-\alpha_o)\ (\delta_i-\delta_o)\ -\right.$$

$$\left.-\ (\alpha_A-\alpha_o)\ (\delta_A-\delta_o)\right]\operatorname{sen}\delta_o$$

$$(\delta_A-\delta_o)=\sum D_i\ (\delta_i-\delta_o)+\frac{1}{2}\left[\sum D_i\ (\alpha_i-\alpha_o)^2-(\alpha_A-\alpha_o)^2\right]\cos\delta+\operatorname{sen}\delta_o$$

ou

$$\alpha_A-\alpha_o=\sum D_i\ (\alpha_i-\alpha_o)-\left[\sum D_i\ (\alpha_i-\alpha_o)(\delta_i-\delta_o)-(\alpha_A-\alpha_o)(\delta_A-\delta_o)\ \operatorname{tg}\delta_o\right.$$

$$\delta_A-\delta_o=\sum D_i\ (\delta_i-\delta_o)+\frac{1}{4}\left[\sum D_i\ (\alpha_i-\alpha_o)^2-(\alpha_A-\alpha_o)^2\right]\operatorname{sen}2\delta_o$$

Estas fómulas devem ser dimensionadas , para uso prático , pois os segundos termos dos segundos membros incluem fatores em segundo de tempo $(\alpha_i-\alpha_o)$ e segundo de arco em $(\delta_i-\delta_o)$. Como a fórmula com o primeiro membro $(\alpha_A-\alpha_o)$ em ascensão reta , deve ser expressa em segundo de tempo , devemos multiplica-la por sen 1". Mas , como a fórmula com o primeiro membro $(\delta_A-\delta_o)$ em declinação deve ser expressa em segundo de arco , devemos multiplica-la por (15) e por sen 1".

$$\alpha_A-\alpha_o=\sum D_i(\alpha_i-\alpha_o)-F\left[\sum D_i(\alpha_i-\alpha_o)(\delta_i-\delta_o)-(\alpha_A-\alpha_o)(\delta_A-\delta_o)\right.$$

$$\delta_A-\delta_o=\sum D_i\ (\delta_i-\delta_o)-G\left[\sum D_i\ (\alpha_i-\alpha_o)^2-(\alpha_A-\alpha_o)^2\right]$$

onde

$$F=\operatorname{sen}1''\ \operatorname{tg}\delta_o=0{,}000.004.848.1\ \operatorname{tg}\delta_o$$

$$G=\frac{225}{4}\operatorname{sen}1''\ \operatorname{sen}2\delta_o=0{,}000.272.705.6\ \operatorname{sen}2\delta_o$$

Os valores $\frac{F}{1.000}$ e $\frac{G}{100}$ são fornecidos por tabelas especiais , utilizadas nos cálculos numéricos , e eliminados nos cálculos com computadores.

Na prática , é impossível determinar o ponto de tangência da placa com a esfera celeste de modo que somos obrigados a efetuar as medidas das três estrelas de referência e do astro em relação aquela da estrela de referência nº 1 considerada como origem das coordenadas. Processo análogo se faz com as coordenadas das estrelas de referência tiradas do catálogo.

	MEDIDAS	COORD.(catálogos)
ESTRELA nº 1	x_1 , y_1	α_1 , δ_1
ESTRELA nº 2	x_2 , y_2	α_2 , δ_2
ESTRELA nº 3	x_3 , y_3	α_3 , δ_3
ESTRELA A	x_A , y_A	α_A , δ_A

Para substituir as quantidades afetadas pelo índice zero , temos:

$m_1 = x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$ $\qquad$ $\alpha_1 - \alpha_0$, $\delta_1 - \delta_0$

$m_2 = x_2 - x_0$, $y_2 - y_0$ $\qquad$ $\alpha_2 - \alpha_0$, $\delta_2 - \delta_0$

$m_3 = x_3 - x_0$, $y_3 - y_0$ $\qquad$ $\alpha_3 - \alpha_0$, $\delta_3 - \delta_0$

$m_A = x_A - x_0$, $y_A - y_0$ $\qquad$ $\alpha_A - \alpha_0$, $\delta_A - \delta_0$

Subtraindo de $(x_1 - x_0)$ tem-se :

$m_1 - m_1 = (x_1 - x_0) - (x_1 - x_0) = 0$ $\qquad$ $(\alpha_1 - \alpha_0) - (\alpha_1 - \alpha_0) = 0$

$m_2 - m_1 = (x_2 - x_0) - (x_1 - x_0) = x_2 - x_1$ $\qquad$ $(\alpha_2 - \alpha_0) - (\alpha_1 - \alpha_0) = \alpha_2 - \alpha_1$

$m_3 - m_1 = (x_3 - x_0) - (x_1 - x_0) = x_3 - x_1$ $\qquad$ $(\alpha_3 - \alpha_0) - (\alpha_1 - \alpha_0) = \alpha_3 - \alpha_1$

$m_A - m_1 = (x_A - x_0) - (x_1 - x_0) = x_A - x_1$ $\qquad$ $(\alpha_A - \alpha_0) - (\alpha_1 - \alpha_0) = \alpha_A - \alpha_1$

Analogamente para as coordenadas y .
Logo :

$$\alpha_A - \alpha_0 = D_1 \cancelto{0}{(\alpha_1 - \alpha_0)} - F\Big[D_1(\alpha_1 - \alpha_0)(\delta_1 - \delta_0) - (\alpha_A - \alpha_0)_1(\delta_A - \delta_0)_1$$
$$+ D_2(\alpha_2 - \alpha_0) + D_2(\alpha_2 - \alpha_0)(\delta_2 - \delta_0)$$
$$+ D_3(\alpha_3 - \alpha_0) + D_3(\alpha_3 - \alpha_0)(\delta_3 - \delta_0)\Big]$$

$$\alpha_A - \alpha_1 = D_2(\alpha_2 - \alpha_1) + F\left[D_2(\alpha_2 - \alpha_1)(\delta_2 - \delta_1) - (\alpha_A - \alpha_1)_1(\delta_A - \delta_1)_1\right.$$

$$\left. + D_3(\alpha_3 - \alpha_1) + D_3(\alpha_3 - \alpha_1)(\delta_3 - \delta_1)\right]$$

Assim as expressões anteriores tomam a forma :

$$\alpha_A - \alpha_1 = \Sigma D_i(\alpha_i - \alpha_1) - F\left[\Sigma D_i(\alpha_i - \alpha_1)(\delta_i - \delta_1) - (\alpha_A - \alpha_1)(\delta_A - \delta_1)\right]$$

$$\delta_A - \delta_1 = \Sigma D_i(\delta_i - \delta_1) - G\left[\Sigma D_i(\alpha_i - \alpha_1)^2 - (\alpha_A - \alpha_1)^2\right]$$

As quantidades $(\alpha_A - \alpha_1)$ e $(\delta_A - \delta_1)$ que são desconhecidas podem ser obtidas numa primeira aproximação , na qual os termos quadráticos são despresíveis :

$$(\alpha_A - \alpha_1)_1 = \Sigma D_i(\alpha_i - \alpha_1)$$

$$(\delta_A - \delta_1)_1 = \Sigma D_i(\delta_i - \delta_1)$$

Os valores de α_A e δ_A serão fornecidos numa segunda aproximação:

$$\alpha_A = \alpha_1 + \Sigma D_i(\alpha_i - \alpha_1) - F\left[\Sigma D_i(\alpha_i - \alpha_1)(\delta_i - \delta_1) - (\alpha_A - \alpha_1)_1(\delta_A - \delta_1)_1\right]$$

$$\delta_A = \delta_1 + \Sigma D_i(\delta_i - \delta_1) + G\left[\Sigma D_i(\alpha_i - \alpha_1)^2 - (\alpha_A - \alpha_1)_1^2\right]$$

Normas Técnicas
Bibliog.

BIBLIOGRAFIA :

1) Smart , W. M. - Spherical Astronomy - Cambridge at the University Press - 1965 .

2) Podobed , V. V. - Fundamental Astrometry - The University of Chicago Press , Chicago e London .

3) Hiltner , W. A. ed. - Astonomical Techniques .

4) M. Cagnet - M. Françon - J.C. Thrierr - Atlas Optischer Erscheinungen - Springer - Verlag Berlin - Heidelberg 1962 .

5) Mourão , Ronaldo R. F. - Asteróides - não publicado .