



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA

OBSERVATÓRIO DO VALONGO

ASTERÓIDES E COMETAS:

DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS PELO MÉTODO DE COWELL A PARTIR DE
ÓRBITAS PRELIMINARES PELO MÉTODO DE LAPLACE

ALUNO: LUIZ ALFREDO RODRIGUES GASPAR

ORIENTADOR: JOSÉ AUGUSTO BUARQUE DE NAZARETH

RIO DE JANEIRO, JULHO, 1978

*Dedico este trabalho a meus pais
com todo meu amor, respeito e ad
miração.*

Quero externar os meus agradecimentos ao Professor José Augusto Buarque de Nazareth, não só pela atenção dispensada para comigo durante todo o desenrolar deste Projeto, bem como todos os ensinamentos que me foram ministrados, os quais serão vitais para a minha vida profissional.

Meus melhores agradecimentos ao Doutor SYLVIO FERRAZ DE MELLO, Presidente da Comissão de Pós-Graduação do I.A.G. da U.S.P., pelo apoio e ajuda inextinguíveis com que me comulou: seja franqueando-me inteiramente o acesso aos instrumentais técnico-científicos e de cálculo do Instituto, sem o auxílio dos quais a tarefa teria sido bem mais árdua; seja propiciando-me convívio profícuo com os capacitados Mestres de Ciências MASSAE SATO e MASAYOSHI TSUCHIDA, integrantes do Grupo de Astronomia Dinâmica da referida Comissão, aos quais externo o meu "muito obrigado" não só pela eficiente colaboração na feitura dos programas computacionais e na abordagem científica do tema, mas principalmente pelo despreendimento e espírito de coleguismo demonstrado durante toda a elaboração deste trabalho.

ERRATA

pag 24, ítem 3.2.3, 3º § da citação. Onde está escrito: ... o so pro do nariz, são comunicados ao corpo. Leia-se: ... o sopro do nariz, são comunicados ao coração.

pag 49, 2º §, 3ª linha. Onde se lê: Não lugar para a lei... .
Leia-se: Não há lugar para a lei... .

PREFÁCIO

Este projeto tem por objetivo a montagem inicial de programas gerais de cálculo de órbitas em mecânica celeste. Con^otém, portanto, uma série de aproximações que se por um lado tor^onam limitados os resultados obtidos, por outro fornecem um roteiro tão seguro quanto conseguimos fazê-lo na direção do objetivo indicado anteriormente.

Dessa forma na primeira parte do projeto, onde são tratadas as órbitas preliminares, não foram levadas em conta as órbitas circulares, parabólicas e hiperbólicas, apesar de que esta ausência só se fará sentir quando da construção do primeiro programa. A natureza deste trabalho associada à grande aplicabilidade das órbitas elípticas nas determinações de órbitas no sistema solar tornaram a escolha realizada um ponto de partida lógico e razoável.

Na segunda parte do projeto, quando as perturbações são consideradas, igualmente foram feitas aproximações. A primeira delas envolve a utilização de apenas uma massa perturbadora, o planeta Júpiter. Ficará evidente, na altura devida, que isto em realidade não envolve uma restrição conceitual, uma vez que considerar os demais planetas implicaria apenas em adicionar termos análogos ao que foi considerado.

A segunda aproximação envolve a não consideração dos erros associados ao método de Cowell para as perturbações especiais, contrariamente ao que ocorreu no método de Laplace, onde as correções diferenciais de Leuschner foram incorporadas ao problema. As razões para isto se devem ao fato de os erros do

processo de Cowell exigem realmente, uma experiência em computação de órbita, que foge do nível do curso de graduação em astronomia, escapando portanto do escopo de um Projeto.

Além das aproximações indicadas, podemos citar que potenciais gravitacionais gerados por massas finitas sem simetrias esféricas, bem como forças não conservativas do tipo atrito com o ar não foram levadas em conta nas equações de movimento. Para cometas, não tratamos dos efeitos da pressão de radiação solar sobre as órbitas. Todas estas questões envolvem considerações a um nível de dificuldade incompatível com os prazos atribuídos para o desenvolvimento dos projetos de fim de curso.

Finalmente cumpre observar que a escolha de cometas e asteróides foi determinada por uma dupla razão:

- 1) A possibilidade de operarmos com o problema restrito dos três corpos;

- 2) A necessidade dos observatórios astronômicos de contarem com tais programas.

A extensão deste trabalho no sentido de serem sanadas estas e outras deficiências é questão a ser resolvida em data futura.

Os meus sinceros agradecimentos às datilógrafas Eliete da Silva Dias e Maria Rodrigues de Oliveira, pela excelente apresentação e rapidez com que executaram o trabalho.

S U M Á R I O

	Pág.
I - CONCEITOS BÁSICOS DE MECÂNICA CELESTE	1
I.1 - O problema dos dois corpos	1
I.2 - Equações do movimento	4
I.3 - Equação de Kepler e definições auxiliares.....	7
II - EFEMÉRIDES DINÂMICAS E OBSERVACIONAIS. PROCESSOS DIFERENCIAIS NA CORREÇÃO OBSERVACIONAL DE ÓRBITAS.....	10
II.1 - Conjuntos de elementos alternativos	10
II.2 - Fórmulas universais e unificadas	13
II.3 - Método de Newton-Raphson	14
II.4 - Expressões de f e g: Expansão em Série e na forma finita	16
II.5 - Sistemas de Coordenadas e Correção para o Tempo de Luz.....	22
II.6 - Correções Diferenciais: A Partir do Procedimento dos Resíduos "Muito Lineares e as de Leuschner"	31
III - MÉTODO DE LAPLACE PARA DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS PRELIMINARES ELÍPTICAS.....	41
III.1 - Observações sobre a notação	41
III.2 - Esquema Computacional.....	42
III.3 - Apêndices	53
III.4 - Resultados	63

	Pág.
IV - MÉTODO DE COWELL PARA AS PERTURBAÇÕES ESPECIAIS ...	65
IV.1 - As equações do movimento e sua formulação na teoria	65
IV.2 - Fundamentos de análise numérica	70
IV.3 - Esquema computacional.....	84
BIBLIOGRAFIA	88

I - CONCEITOS BÁSICOS DE MECÂNICA CELESTE

I.1 - O Problema dos dois corpos

Refere-se aos movimentos, ou aos movimentos relativos, de dois corpos interagindo de acordo com a lei de Newton da gravitação universal, sendo porém admitido que nenhuma outra força se faz presente. O problema dos dois corpos determina órbitas a um alto grau de precisão quando as perturbações são desprezíveis, e a um grau de precisão utilizável quando elas são pequenas. Nós o adotaremos como básico, e, como é sabido, podemos descrevê-lo basicamente por três equações diferenciais de segunda ordem. Desenvolvendo as várias integrais dessas equações, necessariamente introduzimos constantes de integração, das quais o conjunto finalmente adotado deve conter seis constantes mutuamente independentes. São essas constantes que distinguem as diferentes órbitas, e são usualmente referidas como "elementos" da órbita.

Frisamos que a escolha dos elementos da órbita é uma questão de circunstâncias; existem muitos conjuntos possíveis, e nossas necessidades em presença de problemas concretos orientarão a seleção.

Frequentemente os elementos são divididos em dois grupos, dos quais o primeiro (que contém os elementos de orientação) se prende à orientação da cônica orbital, e o segundo (que contém os elementos dimensionais) se prende ao tamanho e à forma da cônica e ao instante em que o objeto está em um dado ponto selecionado.

São frequentemente escolhidos para elementos de orientação os ângulos de orientação (ver figura 1):

Ω , longitude do nodo ascendente, medida no plano de referência a partir do equinócio vernal, γ , na direção do nodo ascendente, de 0° a 360° .

i , inclinação, ângulo entre o plano orbital e o plano de referência, contado de 0° a 180° , sendo o intervalo $0^\circ \leq i \leq 90^\circ$ associado com o movimento para leste, ou "direto", e o complemento deste intervalo associado com o movimento para oeste, ou "retrógrado". Como convenção alternativa, pode-se tomar i entre 0° e 90° , porém neste caso, em adição a i devemos especificar a direção do movimento.

ω , argumento do perihélio (perifoco, em geral, ou periéu, periastro, etc., em particular). É definido como o ângulo no plano orbital, medido na direção do movimento, de 0° a 360° , entre a direção do nodo e a direção do perihélio.

Observação 1:

Os ângulos acima foram adotados por Euler em problemas que exigiam orientações, e são também conhecidos como ângulos eulerianos.

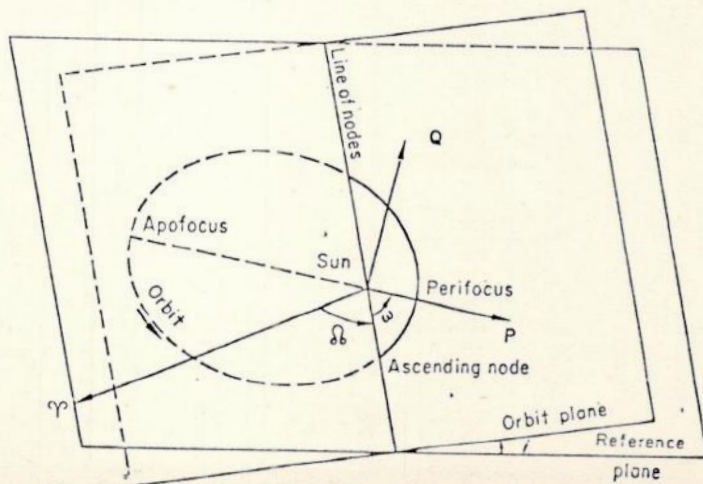


Figura 1

São frequentemente escolhidos como elementos dimensionais (ver figura 2):

a, distância média ou semi-eixo maior (para elipses), ou semi-eixo transverso (para hipérbolas). O semi-eixo maior determina o tamanho da órbita; juntamente com o semi-eixo menor b, ou a distância c do centro ao foco, determina a forma de órbita. Através de a, b, c define-se a excentricidade da cônica:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - (b/a)^2},$$

onde $0 \leq e < 1$ para elipses, $e = 1$ para parábolas e $e > 1$ para hipérbolas.

T, instante da passagem pelo perihélio, é habitualmente o terceiro elemento dimensional. Para as órbitas elíticas, utiliza-se, com igual freqüência, a anomalia média na época, M_0 , onde a época, t_0 , é um arbitrário instante de tempo. M_0 será definida posteriormente.

Observação 2:

O conjunto anterior é frequentemente referido como "conjunto clássico". Outros conjuntos podem ser obtidos diretamente por integração, ou por combinação dos "clássicos". Particularmente importante é o conjunto formado pela posição e velocidade $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ e $\dot{\vec{r}}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ na época t_0 , indicando o ponto derivação em relação ao tempo.

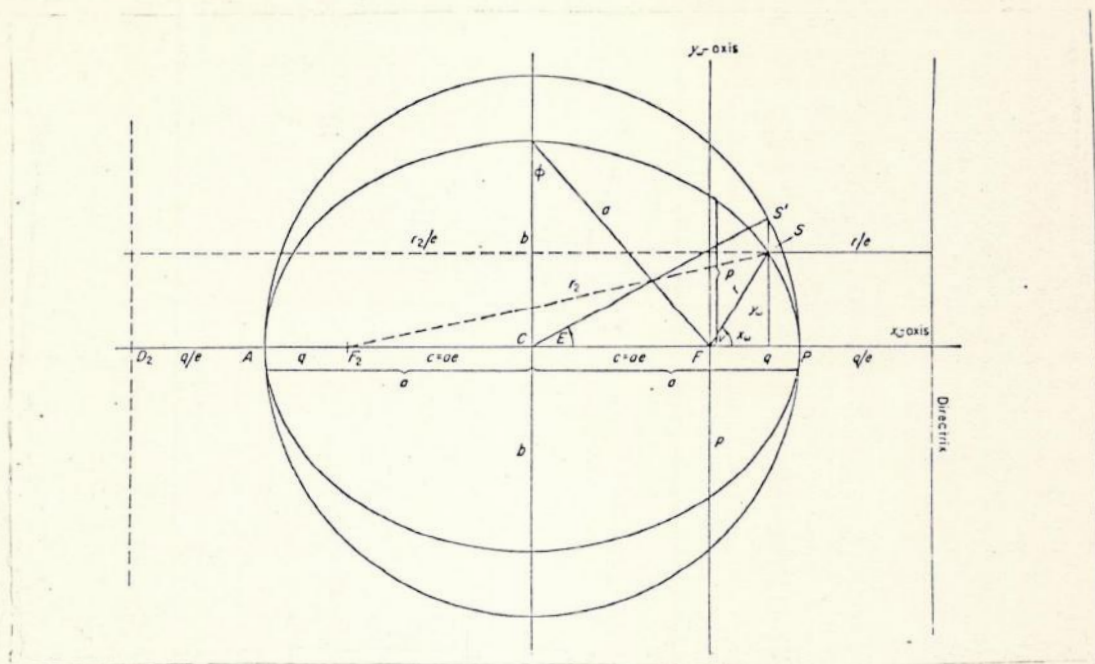


Figura 2

1.2 - Equações do Movimento

Um teorema clássico na matemática, nos informa que, dada a equação de movimento dos dois corpos, existirá uma e só uma solução se forem dadas condições iniciais, isto é, a posição e a velocidade iniciais (em uma origem no tempo arbitrariamente fixada).*

Se $f_{ij} = |\vec{f}_{ij}|$ é a magnitude da força que atua entre as massas m_i e m_j , e $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ é o vetor posição da massa j em relação à massa i , a expressão analítica para a lei da gravitação universal será

$$(1) \quad \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} = k^2 m_i m_j \vec{r}_{ij} / r_{ij}^3,$$

onde k^2 (ou G) é a constante gravitacional, e

$$(2) \quad r_{ij}^2 = \vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} = x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2,$$

em algum referencial arbitrário.

* Conforme teorema 1, Pág. 31, Ordinary Differential Equation, G. Birkoff and G.C. Rota, BLAISDELL, 1966.

Fazendo $i = 1$, $j = 2$, teremos, pela segunda lei de Newton,

$$(3) \quad \vec{f}_{12} = m_1 (d^2 \vec{r}_1 / dt^2) = m_1 \ddot{\vec{r}}_1,$$

$$\vec{f}_{21} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2.$$

Por definição, os vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , e seus componentes, são referidos a um sistema de coordenadas "não acelerado" (ou inercial", ou "newtoniano"), e t é o tempo uniforme (ou "newtoniano").

Pela terceira lei,

$$(4) \quad \vec{f}_{12} = - \vec{f}_{21},$$

escrevemos as equações de movimento na forma inercial (ou "equações do movimento absoluto").

$$(5) \quad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \ominus m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = k^2 m_1 m_2 \vec{r} / r^3,$$

onde

$$(6) \quad \vec{r} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Uma vez que, de (6),

$$(7) \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1,$$

podemos, combinando (5) e (7), reescrever as equações de movimento segundo a forma movimento relativo (ou "equações do movimento relativo").

$$(8) \quad \ddot{\vec{r}} = - k^2 (m_1 + m_2) \vec{r} / r^3.$$

Tomando, para simplificar,

$$(9) \quad \mu = k^2 (m_1 + m_2),$$

a eq. (8) assume a forma a seguir

$$(10) \quad \ddot{\vec{r}} = - \mu \vec{r}/r^3. \text{ Se entretanto, fizermos}$$

$$(11) \quad \mu = k^2 m_1 (1 + m), \quad m = m_2/m_1,$$

ou ainda, se m_1 é adotada como unidade de massa no cálculo da constante gravitacional, k^2 , então:

$$(12) \quad \mu = k^2 (1 + m), \quad m_2[m_1] = m_2,$$

convencionando que $m_2[m_1]$ indica m_2 expressa em termos de m_1 como unidade. No caso em que m_1 é a massa do Sol e m_2 a massa de um cometa (ou asteróide), e apenas esses dois corpos são considerados, $m \approx 0$ e $\mu = k^2$.

Tendo em vista a eq. (10), μ precisa ter unidades e dimensões dadas por

$$(13) \quad \mu = \mu \left[\text{unid. de distância} \right]^3 / \left[\text{unid. de tempo} \right]^2$$

Na determinação de órbitas, e em uma parte da teoria de perturbação, t é habitualmente expresso em unidades convencionais, como o dia ou o segundo, porém velocidades e acelerações são normalizadas pelo tempo canônico UNID. GAUSSIANAS?

$$(14) \quad \tau = k_*(t - t_0),$$

onde k_* tem a magnitude numérica, mas não as unidades ou dimensões, de $\sqrt{\mu}$ ou de alguma função associada satisfazendo

$$(15) \quad \mu = k_*^2 \mu_\tau.$$

Adotando a forma geral (11), com a condição $m_1 = 1$ no sistema heliocêntrico de constantes e frequentemente em outros, podemos especificar que

$$(16) \quad \begin{cases} k_*^2 = k_*^2 \left[(\text{unid. de } \tau)^2 / (\text{unid. de } t)^2 \right] = k^2 m_1 (1 + m), \\ \mu_\tau = \mu_\tau \left[(\text{unid. de distância})^3 / (\text{unid. de } \tau)^2 \right] = 1. \end{cases}$$

Portanto, a equação de movimento (8) pode ser substituída por

$$(17) \quad \ddot{\vec{r}}_{\tau} = \frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = -\mu_{\tau} \left[\frac{(\text{unid. de distância})^3}{(\text{unid. de } \tau)^2} \right] \frac{r [\text{unid. de distância}]}{r^3 [(\text{unid. de distância})^3]},$$

ou, obreviadamente,

$$(18) \quad \ddot{\vec{r}}_{\tau} = -\vec{r}/r^3.$$

A unidade canônica de tempo, ou unidade τ , tem muito em comum com o radiano: ela torna velocidade e acelerações unitárias.

Nos modernos cálculos por máquinas automáticas, as unidades canônicas têm a virtude de localizar o ponto decimal no meio do intervalo de um ponto decimal flutuante, reduzindo, assim, a probabilidade de erro da máquina.

A unidade τ é cerca de 58 dias para órbitas heliocêntricas, quando a unidade astronômica canônica é a unidade de distância; e é cerca de 13,5 minutos para órbitas geocêntricas, quando a geo-unidade canônica (aproximadamente o raio equatorial da Terra) é a unidade de distância.

1.3 - Equação de Kepler e Definições Auxiliares

A fim de compatibilizar os eixos x_{ω} , y_{ω} com as coordenadas polares r, v , adotaremos como relações de transformação

$$(19) \quad x_{\omega} = r \cos v, \quad y_{\omega} = r \operatorname{sen} v,$$

donde

$$\dot{x}_{\omega} = \dot{r} \cos v - r \dot{v} \operatorname{sen} v,$$

$$\dot{y}_{\omega} = \dot{r} \operatorname{sen} v + r \dot{v} \cos v,$$

e ainda conforme a fig., onde todas as propriedades da elipse estão ilustradas geometricamente, podemos verificar que o ângulo E, denominado anomalia excêntrica, é tal que

$$(21) \quad x_{\omega} = a(\cos E - e),$$

$$(22) \quad y_{\omega} = a\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} E = \sqrt{ap} \operatorname{sen} E,$$

donde

$$(23) \quad \dot{x}_{\omega} = -a\dot{E}\operatorname{sen} E, \quad \dot{y}_{\omega} = \sqrt{ap} \dot{E} \cos E,$$

$$(24) \quad r = a(1 - e \cos E), \quad p = a(1 - e^2)$$

$$(25) \quad r^2 \dot{v} = \sqrt{\mu p} = x \dot{y} - y \dot{x} = a\sqrt{ap} \dot{E}(1 - e \cos E),$$

ou

$$(26) \quad \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} dt = (1 - e \cos E) dE,$$

cuja integral é a equação de Kepler*

$$(27) \quad M = E - e \operatorname{sen} E,$$

sendo a anomalia média, M, definida por

$$(28) \quad M = M_0 + n(t - t_0) - 2\pi\lambda \\ = n(t - T) - 2\pi\lambda, \begin{cases} \lambda = 0, 1, 2, \dots, \\ -\pi < M < \pi, \end{cases}$$

onde t_0 é a época, isto é, a data arbitrária para a qual $M = M_0$, a anomalia média na época. T é o instante da passagem pelo pericélio (quando $M = 0$), n é o movimento angular médio

$$(29) \quad n = \dot{M} = \sqrt{\mu}/a^{3/2},$$

e o multiplicador arbitrário λ , em (28), é usado para limitar os intervalos de M e E (ou de $M - M_0$ e $E - E_0$), a fim de simplificar tanto a teoria como a prática associada com a equação de Kepler.

Tradicionalmente, r é dito o raio vetor do corpo, apesar de escalar, e v sua anomalia verdadeira. Algumas vezes é mais conveniente a utilização da longitude verdadeira (ver figura 3).

$$(30) \quad \lambda = v + \omega + \Omega,$$

quando então

$$(31) \quad x = r \cos \lambda, \quad y = r \operatorname{sen} \lambda,$$

ou ainda do argumento verdadeiro da longitude

$$(32) \quad u = v + \omega,$$

quando então

$$(33) \quad x_{\omega} = r \cos u, \quad y_{\omega} = r \operatorname{sen} u,$$

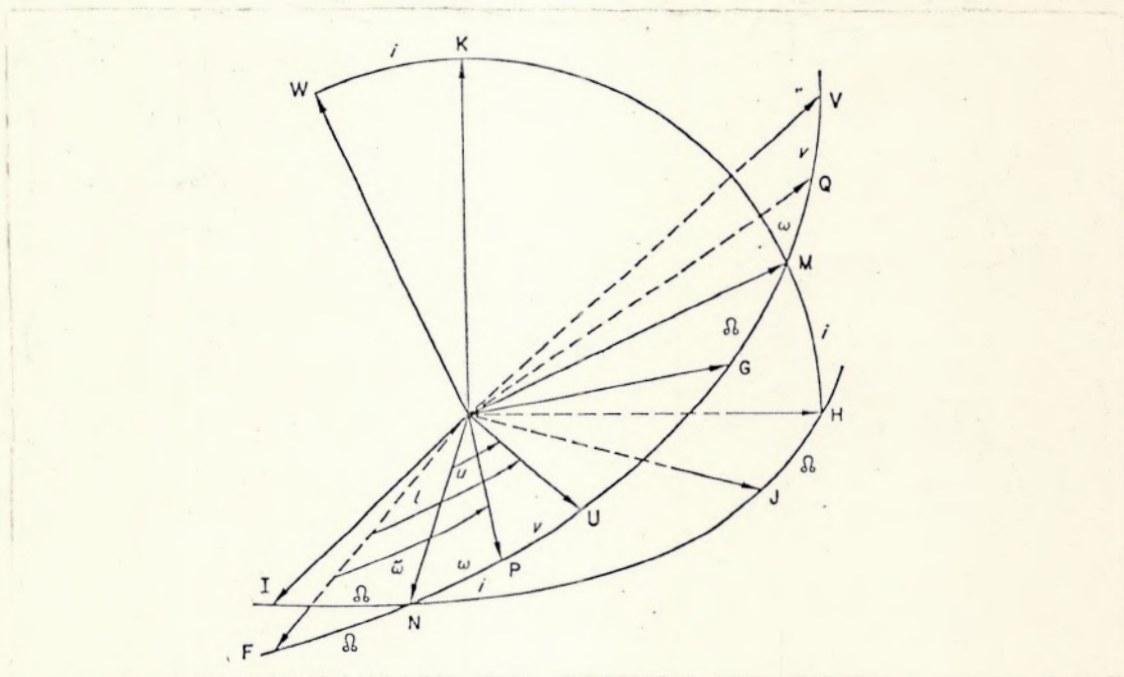


Figura 3

* Uma dedução puramente geométrica é encontrada B - 4. pág. 21, e em B - 6. págs. 45, 46 e 47.

II - EFEMÉRIDES DINÂMICAS E OBSERVACIONAIS. PROCESSOS DIFERENCIAIS NA CORREÇÃO OBSERVACIONAL DE ÓRBITAS

II.1 - Conjuntos de Elementos Alternativos

No problema dos dois corpos existem dois meios de descrever a órbita de um objeto particular:

a) a utilização de dados constantes (elementos); b) a utilização de dados dia a dia variáveis (efemérides). Como sabemos, os elementos constituem conjuntos selecionados de seis constantes independentes obtidas na integração do problema dos dois corpos. São, portanto, suficientes para a completa definição das órbitas relativas de dois corpos, isto é, suficientes para o cálculo de dados variáveis tais como a posição e velocidade, em qualquer instante, de um corpo referido ao outro. Tanto os elementos como os processos de cálculo são fundamentais para a comparação da órbita com uma observação ("representação") e para a construção de uma tabela de dados mutáveis ("efemérides"). O último propósito é usado, por sua vez, em cálculos de perturbação, ou na predição de dados observacionais, ou talvez na representação de observações, quando existem muitas.

Nos termos acima, o que pretendemos, neste estágio, é obter um formulário que nos proporcione a determinação de um conjunto de elementos a partir de dados $\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, t_0$, com o conseqüente cálculo de $\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}$, em qualquer t .

Em todas as considerações, a referência para as posições será o "foco de referência". As formas pelas quais a referência pode ser transportada ao ponto de observação são tratadas

tão logo se faça necessária no texto.

Tomando como elementos o conjunto "clássico" e observando a figura 3, então as constantes deduzidas podem incluir $n = \sqrt{\mu}/a^{3/2}$, $P = 2\pi/n$, $M_0 = n(t_0 - T)$, $q = a(1 - e)$, $p = a(1 - e^2)$, $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$, $\tilde{\omega}_r = \omega - \Omega$, e as componentes de \vec{P} e \vec{Q} . Indicaremos a seguir alguns exemplos de dificuldades que podem levar a alteração deste conjunto.

1) Para a parábola $a \rightarrow \infty$ e $e = 1$, de tal forma que nem a nem e fornecem informações que permita distinguir uma parábola de outra. Portanto, a constante do perifoco, q , é frequentemente usada no lugar de a . *BOM*

2) Se a inclinação é pequena, tanto ω quanto Ω são pobremente determinados; um deles pode ser substituído pelo bem determinado $\tilde{\omega}$.

3) Se a inclinação é próxima de 180° , ω , $\tilde{\omega}$ e Ω são pobremente determinados, mas $\tilde{\omega}_r$ é bem determinado.

4) M_0 é frequentemente mais conveniente do que T , ou pode ser preferido como elemento sem razão específica.

5) Finalmente, as componentes de \vec{P} e \vec{Q} são frequentemente preferidos a i , Ω , ω , mesmo que, como elementos, eles têm que ser considerados simultaneamente com as três relações, ou condições, entre eles. Essa preferência ocorre porque \vec{P} e \vec{Q} são obtidos na determinação de uma órbita antes de i , Ω , ω , e podem ser utilizados nas representações ou efemérides, mesmo que i, Ω, ω não sejam calculados.

Assim, somos levados a um segundo conjunto de elementos (no qual i , Ω , ω são reduzidos ao estado de constantes deduzidas):

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \text{semi-eixo maior,} \\ e = \text{excentricidade,} \\ M_0 = \text{anomalia média na época, } t_0 \text{ (terminologia elíptica)} \\ \left. \begin{array}{l} \vec{P} = (P_x \ P_y \ P_z) \\ \vec{Q} = (Q_x \ Q_y \ Q_z) \end{array} \right\} \text{ com as condições } \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} \cdot \vec{P} = 1, \\ \vec{Q} \cdot \vec{Q} = 1, \\ \vec{P} \cdot \vec{Q} = 0. \end{array} \right.$$

Algumas vezes a e e são combinados, talvez através de $p = a(1 - e^2)$, com as componentes de P e Q , a fim de reduzir o número de quantidades e equações de condições no conjunto acima: por exemplo, $\vec{A} = a\vec{P}$, $\vec{B} = a\sqrt{1 - e^2}\vec{Q}$; ou $\vec{a} = e\sqrt{\mu}\vec{P}$, $\vec{b} = e\sqrt{\mu p}\vec{Q}$. Ainda temos a condição $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ ou $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, e o elemento isolado M_0 . Então, quantidades como n , \vec{A} , \vec{B} , \vec{a} , \vec{b} , podem ser constantes deduzidas para o conjunto acima de elementos, ou podem ser elementos em outro conjunto.

Para $q = 0$ e a finitos, temos as hipérboles e elipses retilineares, para as quais \vec{Q} é indeterminado; mas, neste caso, $e = 1$ e $p = 0$, e então \vec{B} , \vec{b} e $\vec{Q} = \sqrt{p}\vec{Q}$ são nulos. Para as parábolas, inclusive o caso retilinear, contudo, \vec{A} e \vec{B} tendem, em módulo, ao infinito, enquanto \vec{a} , \vec{b} e \vec{Q} não. \vec{P} e \vec{Q} , ou \vec{a} e \vec{b} , poderão assim utilizados como elementos quando transformações em uma órbita, seja provocadas por perturbações seja por correções, fazem-na passar pela retilinearidade.

Quando $e = 0$, os conjuntos apresentados, junto com seus subconjuntos, têm a desvantagem de que \vec{P} , \vec{Q} , ω , T , M_0 e as anomalias v , E , M se tornam indeterminadas ao mesmo tempo que o próprio perifoco. Portanto, para excentricidades próximas a zero, precisamos passar para eixos de referência baseados em outras linhas ou pontos, que não o perifoco ou a linha das âpsides: por exemplo, o nodo ascendente (ou linha dos nodos), os pontos no plano orbital anteriores ou posteriores ao nodo por ângulo = Ω

(as origens para $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\omega}_r$ como definidos acima), ou o vetor posição na época, \vec{r}_0 . Dessas origens, apenas a última é livre de indeterminações tanto para $i = 0^\circ$ quanto para $i = 180^\circ$. Dessa forma, é preferível um conjunto de elementos que substitua \vec{P} e \vec{Q} por $\vec{U}_0 = \vec{r}_0/r_0$ e \vec{V}_0 , sendo \vec{V}_0 perpendicular a \vec{U}_0 e contido no plano da órbita:

$$\left. \begin{array}{l} a = \text{semi-eixo maior,} \\ e \cos E_0 \\ e \sin E_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{combinações da excentricidade e da anomalia média na época, } \\ \text{ca, } t_0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{U}_0 = (U_x \ U_y \ U_z) \\ \vec{V}_0 = (V_x \ V_y \ V_z) \end{array} \right\} \text{ com as condições } \left\{ \begin{array}{l} \vec{U}_0 \cdot \vec{U}_0 = 1, \\ \vec{V}_0 \cdot \vec{V}_0 = 1, \\ \vec{U}_0 \cdot \vec{V}_0 = 0. \end{array} \right.$$

Para o círculo, $e \cos E_0$ e $e \sin E_0$ são nulos, reduzindo os elementos a quatro e eliminando qualquer problema com a intermissão de E_0 , M_0 , T , etc. Para órbitas aproximadamente circulares, o problema de dividir por uma excentricidade pequena, com a resultante incerteza em E_0 e quantidades associadas, é eliminado variando-se a forma da equação de Kepler e equações relacionadas.

Obviamente, generalidade também pode ser atingida se utilizarmos como elementos o conjunto

$$\begin{array}{l} \vec{r}_0 = (x_0 \ y_0 \ z_0) \\ \dot{\vec{r}}_0 = (\dot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ \dot{z}_0) \end{array} \quad \text{posição e velocidade na época, } t_0.$$

11.2 - Fórmulas Universais e Unificadas *

São aquelas que podem ser usadas com elipses, hipérbolas e parábolas, incluindo, os extremos retilineares. As fórmulas universais podem também ser usadas no extremo circular da

* Ver discussão detalhada em C - 9., pág. 309-15.

elipse, porém as unificadas não.

As fórmulas universais de partida usualmente incluem:

$$(34) \quad r_o^2 = \vec{r}_o \cdot \vec{r}_o,$$

$$(35) \quad \sqrt{\mu} D_o = r_o \dot{r}_o = \vec{r}_o \cdot \dot{\vec{r}}_o,$$

$$(36) \quad \dot{s}_o^2 = \dot{\vec{r}}_o \cdot \dot{\vec{r}}_o,$$

$$(37) \quad \alpha = -\frac{1}{a} = \frac{\dot{s}_o^2}{\mu} - \frac{2}{r_o} = \frac{\dot{D}_o}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{r_o},$$

Em alguns casos utilizaremos adicionalmente uma ou mais das seguintes fórmulas, que também podem ser classificadas como unificadas:

$$(38) \quad \vec{U}_o = \vec{r}_o / r_o,$$

$$(39) \quad \vec{\tilde{V}}_o = \sqrt{p} \vec{V}_o = (r_o \dot{\vec{r}}_o - \dot{r}_o \vec{r}_o) / \sqrt{\mu}$$

$$(40) \quad p = \vec{\tilde{V}}_o \cdot \vec{\tilde{V}}_o,$$

$$(41) \quad \begin{aligned} \sqrt{p} \vec{P} &= \vec{V}_o \sqrt{p} \cos V_o - \vec{\tilde{V}}_o \sin V_o \\ \vec{Q} = \sqrt{p} \vec{Q} &= \vec{V}_o \sqrt{p} \sin V_o + \vec{\tilde{V}}_o \cos V_o \end{aligned}$$

II.3 - Método de Newton-Raphson

Este método, sucintamente aqui apresentado, é utilizado para obter, por aproximações sucessivas, a raiz de uma equação algébrica, e pode ser deduzido a partir da bem conhecida série de Taylor

$$(42) \quad f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) f'(x) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x) + \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x) + \dots$$

Admitamos que a equação cuja raiz se deseja obter seja

$$(43) \quad f(x + \Delta x) = 0,$$

de tal forma que $x + \Delta x$ seja a solução procurada. Se x é uma aproximação a esta raiz tal que as potências de ordem superior à primeira de Δx são negligenciáveis, a eq. (44) fornece

$$(44) \quad \Delta x = -f(x)/f'(x).$$

Se as potências superiores de Δx não são negligenciáveis, $x + \Delta x$ usualmente representa um melhoramento em relação ao valor inicial x , que será utilizado em uma segunda aproximação.

Notas: (1) Se $f(x)$ não varia apreciavelmente na segunda aproximação, geralmente é desnecessário revisá-lo mais uma vez.

(2) Se $f''(x)$ tem sinal oposto a $f(x)$, a aproximação dada por (44), para Δx , pode, ocasionalmente, estar errada em sinal, uma vez que, mais precisamente,

$$\Delta x = - \frac{f(x) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 f''(x)}{f'(x)}.$$

(3) Se $f'(x)$ não é facilmente calculável por meio de expressões analíticas, pode ser aproximado por

$$f'(x) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i},$$

onde x_j e x_i são duas aproximações. O método de aproximações se transforma, então, em um problema de interpolação ou extrapolação.

(4) Um gráfico em grande escala de $f(x_1)$, $f(x_2)$..., ou uma sucessão de gráficos em escalas crescentes, pode ser usado algumas vezes de maneira efetiva na substituição dos cálcu

los sucessivos de Δx . A curvatura indicada pelos terceiros, e posteriores, valores de $f(x)$ não só acelerará a aproximação como também resolverá qualquer dificuldade introduzida por $f''(x)$.

II.4 - Expressões de f e g : Expansão em Série e na forma Finita

A seguir, será conveniente introduzir as quantidades

$$(45) \quad \begin{aligned} \hat{E} &= E - E_0 = M - M_0 \\ &= n(t - t_0) - 2\pi\lambda, \end{aligned} \quad \begin{aligned} \lambda &= 0, 1, \dots, \\ 0 < \hat{E} < 2\pi, & -\tilde{\pi} < M < +\tilde{\pi} \end{aligned}$$

$$(46) \quad f = \cos \hat{E}, \quad g = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \operatorname{sen} \hat{E},$$

$$(47) \quad \dot{f} = -\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} \operatorname{sen} \hat{E} = -\frac{\mu g}{a^3}, \quad \dot{g} = f.$$

O problema que ora se põe é o da determinação de séries de Taylor no tempo, e em uma vizinhança de t_0 , época, para essas variáveis.

Com as definições usuais,

$$(48) \quad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad \dot{\vec{r}}_0 = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_0, \quad \ddot{\vec{r}}_0 = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_0, \text{ etc.}$$

podemos escrever

$$(49) \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + (t-t_0)\dot{\vec{r}}_0 + \frac{1}{2!}(t-t_0)^2\ddot{\vec{r}}_0 + \frac{1}{3!}(t-t_0)^3\dddot{\vec{r}}_0 + \frac{1}{4!}(t-t_0)^4\text{iv}\vec{r}_0 + \dots$$

Tomando a equação de movimento dos dois corpos na forma relativa, eq. (10),

obtemos imediatamente

$$(50) \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{3\mu\dot{r}}{r^4} \vec{r} - \frac{\mu}{r^3} \dot{\vec{r}}.$$

Diferenciando mais uma vez e inserindo eq. (10),

$$(51) \quad \vec{r}^{iv} = \left(\frac{\mu}{r^6} - 12 \frac{\mu\dot{r}^2}{r^5} + 3 \frac{\mu\ddot{r}}{r^4} \right) \vec{r} + \frac{6\mu\dot{r}}{r^4} \dot{\vec{r}}.$$

Antes de diferenciarmos mais uma vez, prepararemos a exclusão de derivadas de ordens superiores em r pela introdução de expressões como

$$(52) \quad r\ddot{r} = \frac{\mu}{r} + \mu\alpha - \dot{r}^2, \alpha = -1/a,$$

ou

$$(53) \quad r^3\ddot{r} = \mu(p - r).$$

A última dessas expressões é a mais simples, e tem a vantagem adicional de que $p \rightarrow 0$ a medida que a órbita se aproxima da retilinearidade. Contudo, a primeira é a substituição habitual, provavelmente porque $\alpha = -1/a$ é geralmente mais utilizada do que p , o qual, como vimos, pode não ser determinado; e, além disso, $-1/a \rightarrow 0$ a medida que a órbita se aproxima de uma parábola. Se adotarmos a eq. (52), (51) assume a forma

$$(54) \quad \vec{r}^{iv} = \left(\frac{4\mu^2}{r^6} + \frac{3\mu\alpha^2}{r^5} - 15 \frac{\mu\dot{r}^2}{r^5} \right) \vec{r} + \frac{6\mu\dot{r}}{r^4} \dot{\vec{r}}.$$

Diferenciando mais uma vez, e novamente substituindo as eqs. (10) e (52), obtemos

$$(55) \quad \vec{r}^{v} = -15 \left(4 \frac{\mu^2\dot{r}}{r^7} + 3 \frac{\mu^2\alpha\dot{r}}{r^6} - 7 \frac{\mu\dot{r}^3}{r^6} \right) \vec{r} +$$

$$+ \left(10 \frac{\mu^2}{r^6} + 9 \frac{\mu^2 \alpha}{r^5} - 45 \frac{\mu \dot{r}^2}{r^5} \right) \dot{r}.$$

Quando o intervalo convencional de tempo, $t - t_0$, é substituído pelo intervalo de tempo canônico, $\tau = k_*(t - t_0)$, as derivadas são em relação a τ em todas as equações (10), (49) - (55) e μ é substituído por $\mu_\tau = 1$.

Com o auxílio das eqs. (48) e (10), (50) - (55), podemos reescrever (49) na forma

$$(56) \quad \vec{r} = f \vec{r}_0 + g \dot{\vec{r}}_0,$$

desde que façamos

$$(57) \quad f = 1 + (t - t_0)^2 \bar{f}_2 + (t - t_0)^3 \bar{f}_3 + (t - t_0)^4 \bar{f}_4 + (t - t_0)^5 \bar{f}_5 + \dots,$$

$$g = t - t_0 + (t - t_0)^3 \bar{g}_3 + (t - t_0)^4 \bar{g}_4 + (t - t_0)^5 \bar{g}_5 + \dots,$$

onde, com os valores de r_0 , \dot{r}_0 e $\alpha = -1/a$ obtidos de \vec{r}_0 e $\dot{\vec{r}}_0$ pela formulação universal, temos

$$(58) \quad \bar{f}_2 = -\frac{\mu}{2r_0^3}, \quad \bar{g}_3 = -\frac{\mu}{6r_0^3} = \frac{1}{3} \bar{f}_2,$$

$$(59) \quad \bar{f}_3 = \frac{\mu \dot{r}_0}{2r_0^4}, \quad \bar{g}_4 = \frac{\mu \dot{r}_0}{4r_0^4} = \frac{1}{2} \bar{f}_3,$$

$$(60) \quad \begin{cases} \bar{f}_4 = \frac{\mu^2}{24r_0^6} \left[4 + (3\alpha r_0 - 15 \frac{r_0 \dot{r}_0^2}{24r_0^6}) \right], & \frac{\mu^2}{24r_0^6} = \frac{3}{2} \bar{g}_3, \\ \bar{g}_5 = \frac{\mu^2}{120r_0^6} \left[10 + 3(3\alpha r_0 - 15 \frac{r_0 \dot{r}_0^2}{\mu}) \right] = \frac{3}{5} (\bar{f}_4 - \bar{g}_3), \end{cases}$$

e, notando que \bar{g}_{n+1} se associa naturalmente com \bar{f}_n ,

$$(61) \quad \bar{f}_5 = \frac{-\mu^2 \dot{r}_0}{8r_0^7} \left[4 + (3\alpha r_0 - 7 \frac{r_0 \dot{r}_0^2}{\mu}) \right], \quad \frac{-\mu^2 \dot{r}_0}{8r_0^7} = 3\bar{g}_3 \bar{g}_4,$$

$$g_6 = \frac{-\mu^2 \dot{r}_0}{24r_0^7} \left[7 + 2(3\alpha r_0 - 7 \frac{r_0 \dot{r}_0^2}{\mu}) \right] = \frac{2}{3} \bar{f}_5 - \bar{g}_5 \bar{g}_4.$$

Estes coeficientes foram obtidos por diferenciação a partir das eqs. (9), (47) - (52), mas se tornam constantes quando escritos com índice 0, isto é, quando associados com a data fixa t_0 . Assim, para

$$(62) \quad \dot{\vec{r}} = f \vec{r}_0 + g \dot{\vec{r}}_0,$$

temos simplesmente

$$(63) \quad \begin{cases} \dot{f} = 2(t - t_0) \bar{f}_2 + 3(t - t_0)^2 \bar{f}_3 + 4(t - t_0)^4 \bar{f}_5 + \dots, \\ \dot{g} = 1 + 3(t - t_0)^2 g_3 + 4(t - t_0)^3 g_4 + 5(t - t_0)^4 g_5 + \dots \end{cases}$$

A convergência matemática dessas séries foi investigada por Moulton (1903). Contudo, nas aplicações, a utilidade das séries termina antes de suas convergências matemáticas, quando os termos de mais alta ordem, e mais complicados, se tornam apreciáveis critério grosseiro:

$$\mu(6 - t_0)^2 / r_0^3 > 0,01).$$

$$(69) \quad \begin{cases} \text{Para eixos orbitais, por exemplo,} \\ x_\omega = f x_{\omega 0} + g \dot{x}_{\omega 0}, \\ y_\omega = f y_{\omega 0} + g \dot{y}_{\omega 0}. \end{cases}$$

Assim, dado

$$(65) \quad \sqrt{\mu p} = r_o^2 \dot{v}_o = x_{\omega o} \dot{y}_{\omega o} - y_{\omega o} \dot{x}_{\omega o},$$

podemos escrever para f e g

$$(66) \quad \begin{cases} f = (x_{\omega} \dot{y}_{\omega o} - y_{\omega} \dot{x}_{\omega o}) / \sqrt{\mu p}, \\ g = (y_{\omega} \dot{x}_{\omega o} - x_{\omega} \dot{y}_{\omega o}) / \sqrt{\mu p}. \end{cases}$$

Procedendo analogamente, ou diferenciando,

$$(67) \quad \begin{cases} \dot{f} = (\dot{x}_{\omega} \dot{y}_{\omega o} - \dot{y}_{\omega} \dot{x}_{\omega o}) / \sqrt{\mu p} \\ \dot{g} = (\dot{y}_{\omega} \dot{x}_{\omega o} - \dot{x}_{\omega} \dot{y}_{\omega o}) / \sqrt{\mu p}. \end{cases}$$

As eqs. (66) e (67) fornecem expressões finitas para f , g , \dot{f} , \dot{g} . Por exemplo, basta considerar as relações elípticas básicas (45), (29), (27), (22) e (23).

Por outro lado, e é uma característica das expressões para f , g , \dot{f} , \dot{g} fornecerem continuidade e determinação quando e é zero ou muito pequena, bem como para qualquer outro valor da excentricidade. Portanto, é adequado modificar a equação de Kepler, (27), e as equações associadas (24) e (66) para r , D e c ; construindo relações que sejam igualmente contínuas e determinadas.

Para abreviar todas essas expressões, substituiremos as funções de e e E_o por certas constantes determinadas diretamente de \vec{r}_o e $\dot{\vec{r}}_o$. Explicitamente, utilizaremos

$$(68) \quad \begin{cases} r_o = a(1 - e \cos E), \quad c_o = e \cos E_o = 1 + \alpha r_o = 1 - r_o/a, \\ D_o = \sqrt{a} e \sin E_o, \end{cases}$$

e, além disso, introduziremos as abreviações

$$(69) \quad \begin{cases} \hat{M} = a^{3/2} (M - M_0) = \sqrt{\mu} (t - t_0) - 2\pi\lambda a^{3/2}, \\ \lambda = 0, 1, \dots, \\ 0 < \hat{M} < 2\pi a^{3/2}. \end{cases}$$

Apesar de M e M_0 serem individualmente indeterminadas para órbitas circulares, é evidente de (69) que $M - M_0$ é sempre determinada. Então, \hat{M} , \hat{E} e $v - v_0$ são determinados, e a equação de Kepler pode ser colocada em uma forma sempre determinada como se segue:

$$(70) \quad M - M_0 = \hat{E} - e \operatorname{sen} E + e \operatorname{sen} E_0,$$

$$(71) \quad M - M_0 = \hat{E} + \frac{D_0}{\sqrt{a}} (1 - \cos \hat{E}) - c_0 \operatorname{sen} \hat{E},$$

$$(72) \quad \hat{M} = r_0 \sqrt{a} \hat{E} + D_0 a (1 - \cos \hat{E}) + c_0 a^{3/2} (\hat{E} - \operatorname{sen} \hat{E}),$$

$$(73) \quad \hat{M} = r_0 \sqrt{a} \operatorname{sen} \hat{E} + D_0 a (1 - \cos \hat{E}) + a^{3/2} (\hat{E} - \operatorname{sen} \hat{E}).$$

Similarmente, equações para r , D , c podem ser escritas como

$$(74) \quad r = a + D_0 \sqrt{a} \operatorname{sen} \hat{E} - c_0 a \cos \hat{E},$$

$$(75) \quad r = r_0 + D_0 \sqrt{a} \operatorname{sen} \hat{E} + c_0 a (1 - \cos \hat{E}),$$

$$(76) \quad D = D_0 \cos \hat{E} + c_0 \sqrt{a} \operatorname{sen} \hat{E},$$

$$(77) \quad c = - \frac{D_0}{\sqrt{a}} \operatorname{sen} \hat{E} + c_0 \cos \hat{E}.$$

Dessa forma, podemos reescrever as eqs. (66) nas formas

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{a}{r_0} (\cos \hat{E} - e \cos E_0) = 1 - \frac{a}{r_0} (1 - \cos \hat{E}), \\
 \sqrt{\mu} g &= a^{3/2} (\sin \hat{E} - e \sin E + e \sin E_0) \\
 (78) \quad &= \hat{M} - a^{3/2} (\hat{E} - \sin \hat{E}) \\
 &= r_0 \sqrt{a} \sin \hat{E} + D_0 a (1 - \cos \hat{E}).
 \end{aligned}$$

Analogamente, desenvolvemos (67) em

$$\begin{aligned}
 \dot{f} &= - \frac{\sqrt{\mu a}}{r r_0} \sin \hat{E}, \\
 (79) \quad \dot{g} &= \frac{a}{r} (\cos \hat{E} - e \cos E) = 1 - \frac{a}{r} (1 - \cos \hat{E}).
 \end{aligned}$$

11.5 - Sistemas de Coordenadas e Correção para o Tempo de Luz

Num cálculo de órbita geralmente supomos que os ângulos de orientação são determinados de \vec{V} e \vec{V}_0 , isto é, dos vetores unitários radial e transversal para t_0 , a época. Assim pela figura 3 vem:

$$(80) \quad \begin{cases} \sin i \cos u_0 = V_{z0} \\ \sin i \sin u_0 = U_{z0} \end{cases}$$

$$(81) \quad \begin{cases} (1 + \cos i) \cos \ell_0 = U_{x0} + V_{y0} \\ (1 + \cos i) \sin \ell_0 = U_{z0} - V_{z0} \end{cases}$$

Notando que $\sin i$ e $1 + \cos i$ são sempre ≥ 0 , nós podemos resolver essas equações unicamente para funções de i , u_0 , ℓ_0 . Se os ângulos ω e Ω são também necessários, podemos calculá-los adicionalmente por:

$$(82) \quad \omega = u_0 - v_0$$

$$(83) \quad \Omega = \ell_0 - u_0, \quad \tilde{\omega} = \ell_0 - v_0$$

Para órbitas heliocêntricas é costume referir os ângulos de orientação à eclíptica ($\Omega = \Omega_e$, $i = i_e$, $\omega = \omega_e$), porém é habitual referir os componentes do vetor orientação ao equador. Nestas circunstâncias é preferível primeiro fazer uma rotação das componentes de \vec{V}_o e \vec{V}_o do ângulo ϵ , a obliquidade da eclíptica, produzindo

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{x_{\epsilon 0}} = V_{x_0} \\ V_{y_{\epsilon 0}} = -V_{y_0} \cos \epsilon + V_{z_0} \sin \epsilon \\ V_{z_{\epsilon 0}} = -V_{y_0} \sin \epsilon + V_{z_0} \cos \epsilon. \end{array} \right.$$

Geralmente o equador médio e o equinócio de 1950, o de finem a referência primária das coordenadas. Tanto dinâmicas ou observacionais, retangulares ou esféricas, heliocêntricas, geocêntricas, ou topocêntricas. O sistema de referência é equatorial por causa das partes dominantes representadas pela longitude e latitude do ponto de observação e pela ascensão e declinação, usualmente as coordenadas determinadas com maior precisão. O sistema eclítico aparece apenas para Ω , i , ω , e então para órbitas heliocêntricas; o sistema horizontal astronômico aparece como referência quando as coordenadas são a altura e o azimute. (cf. figura 4, a seguir).

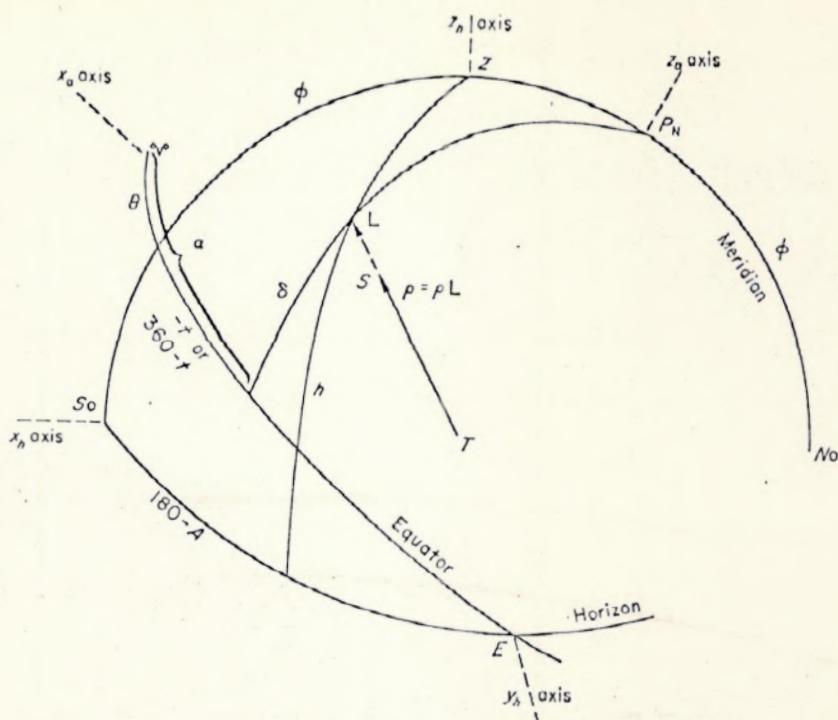


Figura 4

Em qualquer caso, portanto, a origem de todos os sistemas de coordenadas descritos acima é o ponto de observação (respectivamente: centro da terra, centro do sol, e superfície da terra, isto é, topocêntrico). Fica, assim, condicionado ao problema de que se estiver tratando a translação do ponto de observação do foco primário de atração (ou dinâmico), ou vice-versa, mediante a relação:

$$(85) \quad \vec{\rho} = \rho L = \vec{r} + R, \quad \text{onde } \dot{\rho} = \dot{\rho}(\xi, \eta, \zeta, \rho, \alpha, \phi),$$

mostrada geometricamente pela figura 5

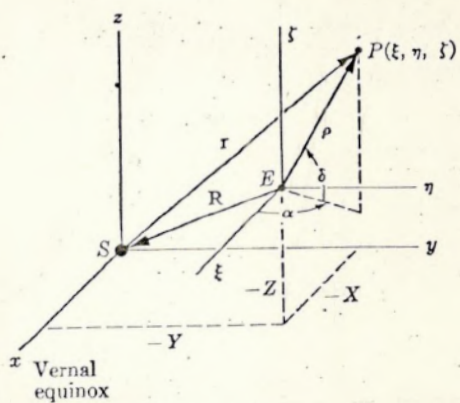


Figura 5

A figura 5 foi retirada da figura abaixo, onde F representa um centro dinâmico genérico

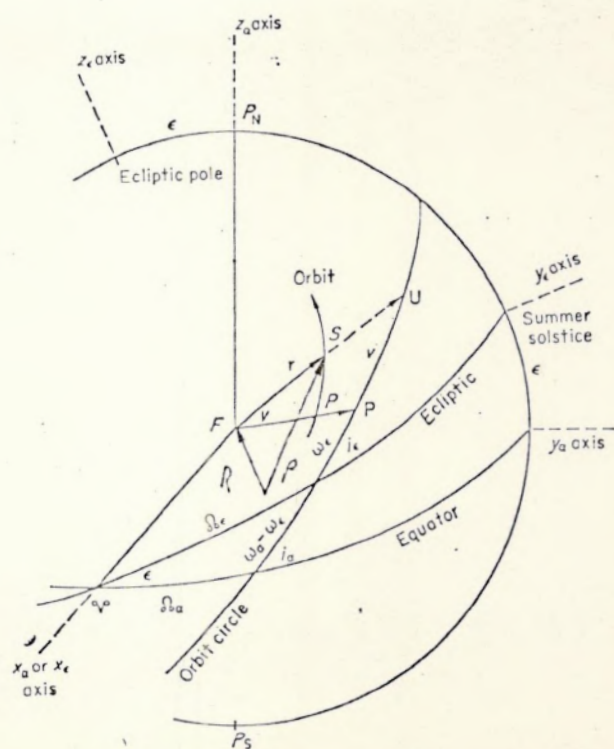


Figura 6

A seguir são dados alguns exemplos da definição de \vec{R} para o cálculo de efemérides ou para a representação das quantidades observadas:

a) órbita heliocêntrica, posição (do observador) geocêntrica(efemérides):

$$(86) \quad \vec{R} = \vec{R}_\theta = \vec{r}_\theta, \quad \vec{R}_\theta = (X_\theta, Y_\theta, Z_\theta)$$

onde $\vec{R}_\theta(X_\theta, Z_\theta)$ é o vetor posição do Sol em relação ao centro da Terra, e X_θ, Y_θ e Z_θ são as coordenadas solares, dadas como X, Y, Z nas "American Ephemeris", e \vec{r}_θ é o opostamente dirigido vetor posição heliocêntrico da Terra;

b) órbita heliocêntrica, posição topocêntrica (representação):

$$(87) \quad \vec{R} = \vec{R}_\theta + \Delta\vec{R} = -(\vec{r}_\theta + \vec{r}_T),$$

onde, adicionalmente, $\vec{r}_T(x_T, y_T, z_T) = -\Delta\vec{R}(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$ é o vetor posição geocêntrico do local de observação, inicialmente referido ao equador e equinócio verdadeiros da data de observação, com seu módulo expresso em *gu* ou *km*, e então ajustado ao equador médio e equinócio de alguma data básica (1950,0, por exemplo) e reexpresso em unidades astronômicas;

c) órbita geocêntrica, posição geocêntrica (efemérides):

$$(88) \quad \vec{R} = \vec{0};$$

d) órbita geocêntrica, posição topocêntrica (representação):

$$(89) \quad \vec{R} = \vec{r}_T,$$

e aqui a *gu* ou o *km* podem ser unidades mais convenientes do que a *ua*. Frisamos que, em qualquer caso, certamente teremos que referir \vec{R} ao mesmo equador e equinócio utilizados para o cálculo

de \vec{L} , \vec{A} e \vec{D} .

Utilizaremos o sistema equatorial esférico, descrito pela ascensão reta α , declinação δ e "range" (isto é, distância) ρ , onde associaremos estas quantidades, bem como as correspondentes velocidades, aos vetores $\vec{\rho}(\xi, \eta, \tau)$ e $\dot{\vec{\rho}}(\xi, \eta, \tau)$, considerando tanto a origem geocêntrica como a topocêntrica do referencial. Os valores geocêntricos são usualmente empregados em uma efeméride de α , δ , ρ ; valores topocêntricos calculados, $\vec{\rho}_c$ e $\dot{\vec{\rho}}_c$, podem ser usados para uma representação, a fim de obtermos valores calculados α_c , δ_c , ρ_c e $\dot{\rho}_c$, os quais serão comparados com os valores observados α , δ , ρ e $\dot{\rho}$, bem como no cálculo dos resíduos, úteis nas avaliações ou correções:

$$(90) \quad \begin{cases} \Delta\alpha = \alpha - \alpha_c, & \Delta\delta = \delta - \delta_c, \\ \Delta\rho = \rho - \rho_c, & \Delta\dot{\rho} = \dot{\rho} - \dot{\rho}_c, \end{cases}$$

Omitindo todos os índices, podemos ver na fig. 2 que

$$(91) \quad \begin{cases} \xi = \rho \cos\delta \cos\alpha, \\ \eta = \rho \cos\delta \sin\alpha, \\ \tau = \rho \sin\delta. \end{cases}$$

Mas ainda, como

$$(92) \quad \vec{\rho} = \rho \vec{L}, \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \tau \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix},$$

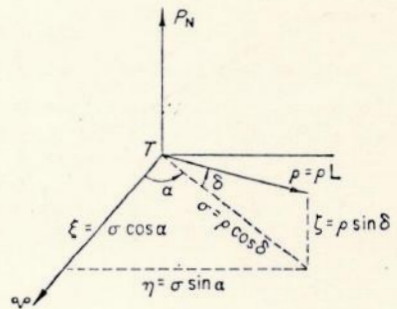


Figura 7

ficam explicitadas as componentes de \vec{L} em função de α e δ . Os vetores unitários \vec{A} e \vec{D} (fig. 8), ortogonais a \vec{L} , são importantes no desenvolvimento das derivadas e diferenciais de \vec{L} . A fig. 8 nos mostra que

$$(93) \quad \vec{L} = \begin{bmatrix} \cos\delta \cos\alpha \\ \cos\delta \sin\alpha \\ \sin\delta \end{bmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{D} = \begin{bmatrix} -\sin\delta \cos\alpha \\ -\sin\delta \sin\alpha \\ +\cos\delta \end{bmatrix}$$

e portanto,

$$(94) \quad d\vec{L} = \overbrace{\vec{A} \cos\delta}^{d\alpha} d\delta + \vec{D} d\delta.$$

Na determinação das velocidades esféricas $\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$ e $\dot{\rho}$ será utilizada, também, a expressão

$$(95) \quad d\vec{\rho} = \vec{L} d\rho + \rho d\vec{L}.$$

O cálculo de α , δ , ρ , a partir de $\vec{\rho}$, será feito por

$$(96) \quad \rho^2 = \rho \cdot \rho = \xi^2 + \eta^2 + \tau^2,$$

$$(97) \quad \operatorname{tg}\alpha = L_y/L_x = \eta/\xi,$$

$$(98) \quad \sin\delta = L_z = \xi/\rho.$$

As fórmulas (99) abaixo, fornecem alternativas de cálculo ou relações para testes

$$(99) \quad \begin{aligned} \cos\delta &= \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} / \rho, \\ \cos\alpha &= L_x / \cos\delta = \xi / \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ \sin\alpha &= L_y / \cos\delta = \eta / \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ \operatorname{tg}\delta &= L_z / \cos\delta = \tau \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \end{aligned}$$

As velocidades esféricas serão, agora, determinadas a partir de (94) e (95)

$$(100) \quad \dot{\vec{L}} = \vec{A} \dot{\alpha} \cos\delta + \vec{D} \dot{\delta},$$

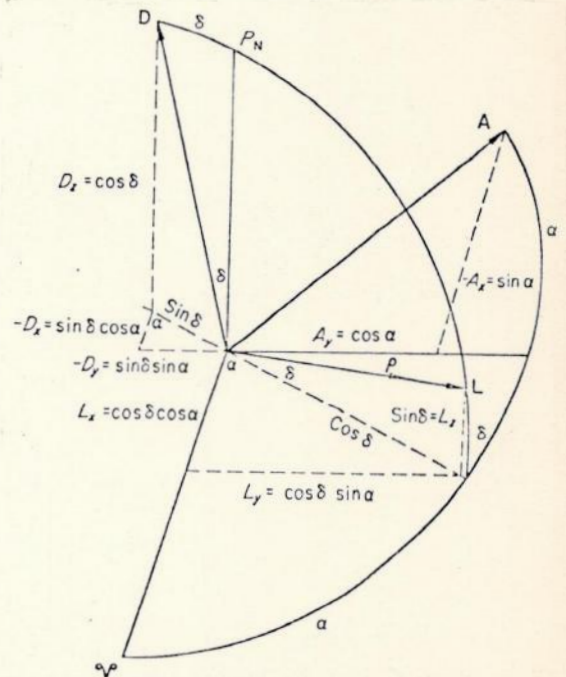


Figura 8.

$$(101) \quad \dot{\vec{\rho}} = \vec{L}\dot{\rho} + \rho\dot{\vec{L}} = \vec{L}\dot{\rho} + \vec{A}\dot{\alpha}\cos\delta + \vec{D}\dot{\rho}\dot{\delta},$$

donde

$$(102) \quad \dot{\rho} = \vec{L} \cdot \dot{\vec{\rho}} = (\vec{\rho} \cdot \dot{\vec{\rho}}) / \rho,$$

$$(103) \quad \dot{\alpha}\cos\delta = \vec{A} \cdot \dot{\vec{L}} = (\vec{A} \cdot \dot{\vec{\rho}}) / \rho,$$

$$(104) \quad \dot{\delta} = \vec{D} \cdot \dot{\vec{L}} = (\vec{D} \cdot \dot{\vec{\rho}}) / \rho.$$

As eqs. (101) - (104) fornecem valores de $\dot{\rho}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$ nas unidades canônicas da órbita.

Introduziremos a noção de tempo da luz, definido como sendo intervalo durante o qual a luz viaja entre o objeto e o ponto de observação, isto é, o tempo observado menos o tempo verdadeiro.

Uma efeméride topocêntrica calculada para tempos verdadeiros em ambos os pontos precisa ser corrigida para a aberração planetária antes de ser comparada com alguma observação, e o mesmo pode ser dito de uma efeméride goecêntrica para uma paralaxe geocêntrica.

Na representação de um número relativamente pequeno de observações, contudo, e especialmente nos primeiros estágios de uma determinação orbital, é muitas vezes conveniente corrigir o tempo observado, t_{obs} , para o tempo verdadeiro, t , com o qual os cálculos dinâmicos da órbita são feitos, por meio da expressão

$$(105) \quad t = t_{\text{obs}} - \alpha\rho,$$

onde ρ é a "range" (distância topocêntrica) e α é a constante do tempo da luz, isto é, a fração da unidade de tempo adotada que a luz necessita para viajar a unidade adotada de distância. Nas ór

bits heliocêntricas.

$$(106) \quad \alpha = \alpha_s = \tau_A = 0,005\ 7755 \text{ dias/ua},$$

e nas órbitas geocêntricas

$$(107) \quad \alpha = \alpha_e = 0,021\ 275 \text{ segundos/gu}.$$

Nas determinações preliminares de órbitas, é algumas vezes desejável aplicar a correção do tempo da luz não ao instante da observação, t , mas ao intervalo de tempo

$$(108) \quad \tau_{ij} = k_* (t_j - t_i),$$

onde podemos ter $k_* = 0,017\ 202.09895$ ou $k_* = k_e = 0,001\ 239.444$. Então,

$$(109) \quad \tau_{ij} = (\tau_{ij})_{\text{obs}} + k_* \alpha (\rho_i - \rho_j),$$

sendo

$$(110) \quad k_* \alpha = k_s \alpha_s = 0,000\ 099.351,$$

ou

$$(111) \quad k_* \alpha = k_e \alpha_e = 0,000\ 026.369.$$

Algumas vezes, como por exemplo, na determinação de uma órbita preliminar pelos métodos laplacianos, usamos a aproximação

$$(112) \quad \rho_j = \rho_i + \tau_{ij} \dot{\rho}_{\tau_i},$$

de tal maneira que, com cerca do mesmo grau de aproximação,

$$(113) \quad \tau_{ij} = (1 - k_* \alpha \dot{\rho}_{\tau_i}) (\tau_{ij})_{\text{obs}}.$$

11.6 - Correções Diferenciais: A Partir do Procedimento dos Resíduos "Muito Lineares" e as de Leuschner *

Seja um conjunto de parâmetros $p = \{p_1, \dots, p_n\}$ denominados alternativamente de componentes de vetor de estado, variáveis de estado, ou algumas vezes, órbita; e as funções:

$$(114) \quad \Psi_j = \Psi_j(p, t_j).$$

definidas para cada t_j , cujo conjunto total por elas formado é denominado usualmente por vetor observação, vetor interceptação ou matriz, podem ser observadas, medidas ou determinadas de uma maneira qualquer, inclusive através de valores representados ou computados com o auxílio de um conjunto de fórmulas para uma posterior comparação com valores observados.

Suponhamos, então, que as funções Ψ_j sem o uso de um índice adicional, designem valores observados, medidos ou conhecidos por um determinado processo e p , em correspondência direta e também sem o uso de índice, denote um valor desconhecido do parâmetro, chamado de objetivo ou ainda de novo, melhorado, ou mais bem estimado, num processo de correção. Conseqüentemente os Ψ_{jc} , valores calculados, computados, estimados correntemente, ou ainda, nominais, estão relacionados com o parâmetro p_c , conjecturado, assumido ou nominal.

Definimos, pois, os resíduos como

$$(115) \quad \Delta\Psi_j = \Psi_j - \Psi_{jc},$$

perfeitamente de acordo com a clássica tradição em astronomia: valor observado menos computado, "O - C".

* Para maiores detalhes, ver C - 11 e C -12.

Suporemos, finalmente, a correção definida por

$$(116) \quad \Delta p = p - p_c$$

correspondentemente, no sentido de valor objetivo menos conjecturado. Ainda portanto: "0 - C".

Então, já que:

$$(117) \quad \psi_{jc} = \psi_j(p_c, t), \quad p_c = \{p_{1c}, \dots, p_{nc}\}$$

e utilizando (115) temos:

$$(118) \quad \begin{aligned} \psi_j &= \psi_j(p, t_j) = \psi_j(p_c + \Delta p) \\ &= \psi_{jc} + \sum_p \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right)_c \Delta p + \frac{1}{2} \sum_p \sum_q \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} \right) \Delta p \Delta q + \dots \end{aligned}$$

$$p, q = \{p_1, \dots, p_n\}.$$

Negligenciando os termos de segunda ordem e os termos de ordem superior na série de Taylor acima e a combinando com (115) vem:

$$(119) \quad \Delta \psi_j = \sum_p \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} \right)_c \cdot \Delta p$$

$$(120) \quad \Delta p = \Delta \psi / \sum_p \left(\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial p^2} \right)_c.$$

Portanto para corrigir o parâmetro conjecturado p_c com a ajuda de uma ψ_j , observada, de acordo com o que foi delineado, computados primeiro ψ_{jc} e após $\Delta \psi_j$ através de (117) e (115). Tomando então a derivada de (120) e fazendo

$$(121) \quad \left(\frac{d\psi}{dp} \right)_c = \frac{d\psi}{dp} (p_c),$$

Obtemos a correção Δp de (120). Finalmente

$$(122) \quad p = p_c + \Delta p,$$

que é o valor objetivo da primeira aproximação, tratado como conjecturado na segunda aproximação, a qual deve ser levada ao cálculo de novos valores de Ψ_{jC} e $\Delta\Psi_j$. Pelas eq. (117) e (115), se $\Delta\Psi_j$ é desprezada o processo é interrompido, senão o ciclo continua, até onde for necessário.

Denominamos *representação* o processo de obtenção de valores dos parâmetros p a partir dos valores conjecturais através dos quais se constroem os resíduos $\Delta\Psi_j$. A *representação* pode envolver as fórmulas analíticas dos dois corpos ou integrações numéricas, integrações por séries, ou ainda alguma outra combinação.

No nosso problema admitiremos que a posição do centro dinâmico referida ao "ponto de observação", \vec{R} , é conhecida precisamente, de tal forma que, para a equação (85) teremos, exatamente,

$$(123) \quad \Delta\vec{\rho} = \Delta\vec{r}.$$

Assim, mas em primeira ordem,

$$(124) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\vec{L} = \vec{A}\cos\delta\Delta\alpha - \vec{D}\Delta\delta \\ \Delta\vec{L} = \vec{D}\sin\delta\Delta\alpha - \vec{L}\cos\delta\Delta\alpha \\ \Delta\vec{L} = \vec{A}\sin\delta\Delta\alpha - \vec{L}\Delta\delta \end{array} \right.$$

$$(125) \quad \Delta\vec{\rho} = \vec{L}\Delta\rho + \rho\Delta\vec{L},$$

$$(126) \quad \Delta\rho = L\Delta\rho + A\rho\cos\delta\Delta\alpha + \vec{D}\rho\Delta\delta..$$

Observando que \vec{L} , \vec{A} e \vec{D} constituem um conjunto ortonormal de vetores, vem

$$(127) \quad \begin{cases} \vec{L} \cdot \Delta \vec{L} = 0, \\ \vec{A} \cdot \Delta \vec{L} = \cos \alpha \Delta \alpha \\ \vec{D} \cdot \Delta \vec{L} = \Delta \delta \end{cases}$$

e

$$(128) \quad \begin{cases} \vec{L} \cdot \Delta \vec{\rho} = \Delta \rho \\ \vec{A} \cdot \Delta \vec{\rho} = \rho \cos \alpha \Delta \alpha \\ \vec{D} \cdot \Delta \vec{\rho} = \rho \Delta \delta . \end{cases}$$

Nesta fase do desenvolvimento empregaremos os métodos "muito lineares", que na utilização dos resíduos entre dados calculados e os correspondentes dados observados, são aqueles cujas linearizações foram verificadas como sendo tanto suficiente para as correções quanto desejáveis, em contraposição aos métodos "quase lineares" que não foram verificados como suficientes ou não foram comparados com os métodos não lineares existentes.

Nós nos preocuparemos apenas em desenvolver os processos e fórmulas que são subsequentes ao cálculo de

$$(129) \quad \vec{\rho}_C = \vec{r} + \vec{R},$$

onde $\vec{r}(x,y,z)$ foi determinado por fórmulas dois corpos, por integração de perturbações ou qualquer processo que o faz uma função dos valores conjecturais de certos parâmetros selecionados, p_{jC} , e sendo $\vec{R}(X,Y,Z)$ submetido ou não a correções, apesar de estarmos admitindo na maior parte do texto que seu valor é exato. Portanto, não se trata de uma apresentação dos métodos muito lineares em toda sua generalidade.

A representação de uma órbita envolve habitualmente a determinação de ρ_C, α_C e δ , a partir da resolução, de alguma ma

neira, das equações

$$(130) \quad \begin{cases} \xi_c = \rho_c \cos \delta_c \cos \alpha, \\ \eta_c = \rho_c \cos \delta_c \sin \alpha, \\ \tau_c = \rho_c \sin \delta_c. \end{cases}$$

Assim, se observamos ρ , α e δ , podemos calcular os resíduos

$$(131) \quad \begin{cases} \Delta \rho = \rho - \rho_c, \\ \Delta \alpha = \alpha - \alpha_c, \\ \Delta \delta = \delta - \delta_c. \end{cases}$$

Tais resíduos usados para obter as correções diferenciais, Δp_j , aos valores conjecturais dos parâmetros selecionados, p_{jc} , isto é, na obtenção dos valores $p_j = p_{jc} + \Delta p_j$, que são o objetivo do processo de correção. As equações nos resíduos, a partir das quais as correções diferenciais serão obtidas, são, formalmente,

$$(132) \quad \begin{cases} \Delta \rho = \vec{L} \cdot \vec{\Delta \rho}, \\ \rho \cos \delta \Delta \alpha = \vec{A} \cdot \vec{\Delta \rho}, \\ \rho \Delta \delta = \vec{D} \cdot \vec{\Delta \rho}, \end{cases}$$

onde \vec{L} , \vec{A} e \vec{D} são calculados com auxílio das eqs. (93) nas quais ρ, α e δ são valores tanto observados como computados. Em (93), $\vec{\Delta \rho}$ representa funções apropriadas dos p_{ic} e dos Δp_i que podem incluir correções às componentes de \vec{R} , se for o caso.

Observamos que em (132) focalizamos a atenção sobre $\cos \delta \Delta \alpha$, em lugar de $\Delta \alpha$, pois, dado que

$$(132) \quad (\Delta L)^2 = \vec{\Delta L} \cdot \vec{\Delta L} = (\cos \delta \Delta \alpha)^2 + (\Delta \delta)^2,$$

$\cos \delta \Delta \alpha$ é mais significativo como uma componente real do arco residual $\Delta L = |\vec{\Delta L}|$. Neste fato está contida a principal vantagem da representação muito linear, que estabelece a preferência de $\cos \delta \Delta \alpha$ sobre $\Delta \alpha$ na equação

$$(134) \quad \vec{\rho} - \vec{\rho}_c = \Delta\vec{\rho} = \vec{L}\Delta\rho + \vec{A}\rho\cos\delta\Delta\alpha + \vec{D}\rho\Delta\delta,$$

a partir da qual pode ser deduzida não apenas as equações

$$(135) \quad \begin{cases} \rho - \vec{L} \cdot \vec{\rho}_c = \Delta\rho, & \vec{L} \cdot \vec{\rho}_c = \rho_c, \\ -\vec{A} \cdot \vec{\rho}_c = \rho\cos\delta\Delta\alpha, \\ -\vec{D} \cdot \vec{\rho}_c = \rho\Delta\delta, \end{cases}$$

como também, e diretamente, as equações da correção diferencial

$$(136) \quad \begin{cases} \rho - \vec{L} \cdot \vec{\rho}_c = \vec{L} \cdot \Delta\vec{\rho}, \\ -\vec{A} \cdot \vec{\rho}_c = \vec{A} \cdot \Delta\vec{\rho}, \\ -\vec{D} \cdot \vec{\rho}_c = \vec{D} \cdot \Delta\vec{\rho}. \end{cases}$$

Os fatores $\rho\cos\delta$ e ρ , na realidade, ponderam $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ como se essas quantidades devessem ser ponderadas quando usadas com $\Delta\rho$. Isto, obviamente, exige que as precisões (erros relativos) de ρ , α e δ sejam iguais; no caso de diferentes precisões, devemos superpor pesos às eqs. (136).

As eqs. (135) são verdadeiras em primeira ordem nos resíduos $\Delta\rho$, $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$, porém as eqs. (136) são exatas. Na utilização destas equações, as correções diferenciais se tornarão lineares apenas quando introduzirmos expressões lineares para as componentes de $\Delta\vec{\rho}$ em termos dos Δp_i .

Situando-nos em função do nosso problema, ou melhor, em relação às nossas condições iniciais obtidas, a formulação de Leuschner é útil no aprimoramento de órbitas para as quais estão disponíveis observações em α e δ , mas não em ρ . Se a órbita é preliminar, a correção é feita no estágio em que $\vec{r}_0 = \vec{r}_2$ e $\dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}_2$ (para $t_0 = t_2$) estão ainda sendo utilizados como elementos. Tais correções são, usualmente, baseadas em expressões em séries para f e g . Quando a órbita está definida por um arco mais extenso,

a correção é mais frequentemente baseada nas expressões finitas para f e g . Através de (56) temos que, para a primeira e a terceira datas:

$$(137) \quad \vec{\rho}_j = f_j \vec{r}_o + g_j \dot{\vec{r}}_o + \vec{R}_j = \vec{L}_j \rho_j, \quad j = 1, 3.$$

Por diferenciação obtemos

$$(138) \quad \begin{aligned} \Delta \vec{\rho}_j &= f_j \Delta \vec{r}_o + g_j \Delta \dot{\vec{r}}_o + \vec{r}_o \Delta f_j + \dot{\vec{r}}_o \Delta g_j = \\ &= \vec{L}_j \Delta \rho_j + \rho_j \Delta \vec{L}_j, \quad j = 1, 3, \end{aligned}$$

onde

$$(139) \quad \Delta \vec{L}_j = \vec{A}_j \cos \delta_j \Delta \alpha_j + \vec{D}_j \Delta \delta_j, \quad j = 1, 3.$$

Nas seis eqs. (138), as quantidades \vec{r}_o , $\dot{\vec{r}}_o$, f_j , g_j , ρ_j , \vec{L}_j e $\Delta \vec{L}_j$ ou \vec{A}_j , \vec{D}_j , $\cos \delta_j \Delta \alpha_j$, $\Delta \delta_j$, são obtidas nas observações ou nas representações; as outras doze quantidades são incógnitas. O número das incógnitas pode ser diminuído se exprimirmos Δx_o , Δy_o , Δz_o , Δf_j e Δg_j em termos de $\Delta \rho_o$. Para isto, consideremos

$$(140) \quad \vec{r}_o = \vec{L}_o \rho_o - \vec{R}_o.$$

Observando agora que \vec{L}_o foi utilizado precisamente com esta equação na determinação de \vec{r}_o , de tal forma que não teremos nenhum resíduo \vec{L}_o se o processo for invertido, virá

$$(141) \quad \Delta \vec{r}_o = \vec{L}_o \Delta \rho_o,$$

que fornece relações entre as componentes de $\Delta \vec{r}_o$ e $\Delta \rho_o$.

Resta associar Δf_j e Δg_j a $\Delta \rho_o$. Para tanto, tomemos as séries já deduzidas, eqs. (57), onde os \bar{f} e os \bar{g} são dados em função de r_o e μ , e a reescrevamos nas formas

$$(142) \quad \begin{cases} f_j = 1 + f_j^*/r_o^3, \\ g_j = t_j - t_o + g_j^*/r_o^3, \end{cases}$$

representando, por hipótese, f_j^* e g_j^* séries cujas variações podem ser negligenciadas nas deduções.

$$(143) \quad \Delta f_j = -3f_j^*\Delta r_o/r_o^4 = 3(1 - f_j)\Delta r_o/r_o,$$

$$(144) \quad \Delta g_j = -3g_j^*\Delta r_o/r_o^4 = 3(t_j - t_o - g_j)\Delta r_o/r_o.$$

A seguir, tiramos da equação triangular

$$(145) \quad r_o^2 = \rho_o^2 - 2\rho_o R_o \cos \psi_o + R_o^2$$

a relação

$$(146) \quad r_o \Delta r_o = (\rho_o - R_o \cos \psi_o) \Delta \rho_o,$$

donde poderemos escrever

$$(147) \quad \Delta f_j = a_j \Delta \rho_o, \quad \Delta g_j = b_j \Delta \rho_o$$

sendo

$$(148) \quad a_j = 3(1 - f_j) (\rho_o - R_o \cos \psi_o) / r_o^2,$$

e

$$(149) \quad b_j = 3(t_j - t_o - g_j) (\rho_o - R_o \cos \psi_o) / r_o^2.$$

Finalmente, se definirmos

$$(150) \quad \vec{f}_j = f_j \vec{L}_o + a_j \vec{r}_o + b_j \dot{\vec{r}}_o,$$

ou

$$(151) \quad f_{xj} = f_j L_{x0} + a_j x_0 + b_j \dot{x}_0, \quad x \rightarrow y, z,$$

podemos reescrever (138) na forma

$$(152) \quad \vec{f}_j \Delta \rho_0 + g_j \Delta \dot{\vec{r}}_0 = \vec{L}_j \Delta \rho_j + \rho_j \Delta \vec{L}_j,$$

ou

$$(153) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{xj} \Delta \rho_0 + g_j \dot{x}_0 = L_{xj} \Delta \rho_j + \rho_j \Delta L_{xj}, \\ f_{yj} \Delta \rho_0 + g_j \dot{y}_0 = L_{yj} \Delta \rho_j + \rho_j \Delta L_{yj}, \\ f_{zj} \Delta \rho_0 + g_j \dot{z}_0 = L_{zj} \Delta \rho_j + \rho_j \Delta L_{zj}, \end{array} \right. \quad j = 1, 3,$$

As seis eqs. (153) são as equações fundamentais da correção diferencial de Leuschner. Podem ser resolvidas facilmente para as seis incógnitas eliminando numericamente primeiro $\Delta \rho_1$ e $\Delta \rho_2$, e a seguir $\Delta \dot{x}_0$, $\Delta \dot{y}_0$ e $\Delta \dot{z}_0$. A primeira eliminação, todavia, pode ser processada com o auxílio das afirmativas

$$(154) \quad \vec{\Lambda}_j \cdot \vec{L}_j = 0, \quad \vec{D}_j \cdot \vec{L}_j = 0,$$

$$(155) \quad \vec{\Lambda}_j \cdot \Delta \vec{L}_j = \cos \delta_j \Delta \alpha_j, \quad \vec{D}_j \cdot \Delta \vec{L}_j = \Delta \delta_j,$$

de tal maneira que

$$(156) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\vec{\Lambda}_j \cdot \vec{f}_j) \Delta \rho_0 + g_j (\vec{\Lambda}_j \cdot \Delta \dot{\vec{r}}_0) = \rho_j \cos \delta_j \Delta \alpha_j, \\ (\vec{D}_j \cdot \vec{f}_j) \Delta \rho_0 + g_j (\vec{D}_j \cdot \Delta \dot{\vec{r}}_0) = \rho_j \Delta \delta_j \end{array} \right. \quad j = 1, 3,$$

Com este procedimento, não apenas eliminamos $\Delta\rho_1$ e $\Delta\rho_3$ e reduzimos o problema à solução de quatro equações a quatro incógnitas, mas também introduzimos a possibilidade de obter os termos constantes, $\rho_j \cos\delta_j \Delta\alpha_j$ e $\rho_j \Delta\delta_j$, pelo processo muito linear.

O propósito do procedimento acima é, obviamente, a correção dos valores conjecturais \vec{r}_{oc} e $\dot{\vec{r}}_{oc}$ e obtenção dos valores objetivos \vec{r}_o e $\dot{\vec{r}}_o$, os quais serão tomados como valores conjecturais na próxima representação e, se necessário, na próxima correção diferencial. Então, podemos usar

$$(158) \quad \dot{\vec{r}}_o = \dot{\vec{r}}_{oc} + \Delta\dot{\vec{r}}_o$$

seja em conjunção com

$$(159) \quad \rho_o = \rho_{oc} + \Delta\rho_o, \quad \vec{r}_o = \vec{L}_o \rho_o - \vec{R}_o$$

seja com

$$(160) \quad \vec{r}_o = \vec{L}_o \Delta\rho_o, \quad \dot{\vec{r}}_o = \dot{\vec{r}}_{oc} + \Delta\dot{\vec{r}}_o.$$

As correções $\Delta\rho_1$ e $\Delta\rho_3$, que só necessitam ser calculadas para um teste final ou, talvez, para um aprimoramento do tempo da luz, podem ser obtidas a partir de

$$(161) \quad (\vec{L}_1 \cdot \vec{f}_j) \Delta\rho_o + g_j (\vec{L}_j \cdot \Delta\dot{\vec{r}}_o) = \Delta\rho_j, j = 1, 3.$$

III - MÉTODO DE LAPLACE PARA DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS PRELIMINARES ELÍPTICAS.

III.1 - Observações sobre a notação.

Em conformidade com o uso clássico na determinação de órbitas,* utilizaremos $\dot{\mathbf{r}}$ e $\ddot{\mathbf{r}}$, e etc., para derivadas em relação à unidade canônica de tempo. Uma vez que, no nosso caso, isto é, adotando a massa do Sol como unitária e a do cometa ou asteróide como efetivamente nula, o tempo canônico $\tau = k_*(t - t_0)$ pode ser simplificado, pois

$$(162) \quad k_* = k \sqrt{m_1 + m_2} \rightarrow k,$$

sendo que, usualmente, temos k_* e a unidade de tempo canônico expressos por (órbitas heliocêntricas)

$$(163) \quad \begin{cases} k_* = k_s = 0,017\ 202\ 098\ 95, \\ \text{Kaday} = k_s^{-1} \text{ dias} = 58,132\ 440\ 87, \end{cases}$$

ou, para órbitas geocêntricas,

$$(164) \quad \begin{cases} k_* = k_e = 0,001\ 239\ 444, \\ \text{kesec} = k_e^{-1} \text{ segundos} = 806,813\ 377\ 6 \text{ segundos} = \\ = 13,446\ 889\ 6 \text{ minutos.} \end{cases}$$

A fim de tornar fácil a passagem para as derivadas em relação à unidade convencional de tempo, comparamos as definições (similares):

$$(165) \quad \mu = \mu_\tau = 1, \quad \mu_t = k^2(m_1 + m_2) = k_*^2,$$

$$(166) \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_\tau = \dot{\mathbf{r}}_t/k_*, \quad \ddot{\mathbf{r}} = d\dot{\mathbf{r}}/dt,$$

* Os seguintes artigos são fundamentais. C - 1. C - 2. C - 3. C - 4. C - 7., e obviamente B - 5.

$$(167) \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_{\tau} - \mu_{\tau} \vec{r}/r^3, \quad \ddot{\vec{r}}_t = -\mu \vec{r}/r^3,$$

$$(168) \quad \dot{\vec{r}} = f \dot{\vec{r}}_0 + g \dot{\vec{r}}_0 = f \dot{\vec{r}}_0 + g_t \dot{\vec{r}}_{t0},$$

$$(169) \quad f = f_{\tau} = f_t, \quad g = g_{\tau} = k_* g_t,$$

$$(170) \quad \dot{\vec{r}} = \dot{f} \dot{\vec{r}}_0 + \dot{g} \dot{\vec{r}}_0, \quad \dot{\vec{r}}_t = k_* \dot{\vec{r}} = \dot{f}_t \dot{\vec{r}}_0 + \dot{g}_t \dot{\vec{r}}_{t0},$$

$$(171) \quad \dot{f} = \dot{f}_{\tau} = \dot{f}_t/k_*, \quad \dot{g} = \dot{g}_{\tau} = \dot{g}_t.$$

Portanto, a passagem para o tempo convencional t é feita pela mera reexpressão das definições primitivas de μ , $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$, \dot{g} , \dot{f} , etc., dos símbolos índice τ para t .

III.2 - Esquema computacional

Nós adotaremos o seguinte padrão geral, de uma órbita preliminar laplaciana, que se segue:

- 1) preparação dos dados iniciais tanto observacionais como os de referência.

Partimos com três conjuntos de dados de natureza direcional e expressos em função dos vetores unitários \vec{L} , \vec{A} , \vec{D} , já definidos anteriormente (caso sejam conhecidos três conjuntos de azimute e altura podemos convertê-los ao sistema equatorial através das fórmulas clássicas da Astronomia Esférica); com os três instantes das observações, admitidos como já corrigidos para o tempo das efemérides, suas reexpressões como intervalos de tempo canônico τ_j (na convenção laplaciana) ou τ_{ij} (na convenção não ambígua), dados por

$$(172) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\tau_1 = -\tau_{21} = \tau_{12} = k_* (t_2 - t_1), \\ \tau_3 = \tau_{23} = k_* (t_3 - t_2), \end{array} \right.$$

$$(173) \quad \tau_{13} = \tau_3 - \tau_1.$$

(As correções que levam dos instantes observados aos instantes verdadeiros serão considerados futuramente); e com duas funções dos dados direcionais anteriores que participam dos cálculos neste estágio

$$(174) \quad R \cos \psi = \vec{R} \cdot \vec{L} = XL_x + YL_y + ZL_z,$$

$$(175) \quad R^2 = \vec{R} \cdot \vec{R} = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

2) Obtenção das velocidades e acelerações tanto nas coordenadas de referência (isto é, do centro dinâmico referidas ao ponto de observação, por exemplo, coordenadas solares) como nos dados direcionais.

Serão obtidas, aproximadamente, a partir dos três conjuntos de valores e com auxílio das séries de Taylor por

$$(176) \quad \vec{R}_j = \vec{R}_2 + \tau_j \dot{\vec{R}}_2 + \frac{1}{2} \tau_j^2 \ddot{\vec{R}}_2 + \dots, \quad \left\{ \begin{array}{l} j = 1, 3, \\ \vec{R} \rightarrow \vec{L}. \end{array} \right.$$

Se negligenciarmos os termos de ordens superiores à segunda, podemos resolver para $\dot{\vec{R}}_2$ e $\ddot{\vec{R}}_2$ obtendo:

$$(177) \quad \left. \begin{array}{l} \vec{R}_2 = -G_1 \vec{R}_1 + G_2 \vec{R}_2 + G_3 \vec{R}_3, \\ \ddot{\vec{R}}_2 = J_1 \vec{R}_1 - J_2 \vec{R}_2 + J_3 \vec{R}_3, \end{array} \right\} \vec{R} \rightarrow \vec{L},$$

onde, e observando que $\tau_1 \tau_3 (\tau_1 - \tau_3) = -\tau_1 \tau_3 \tau_{13} = \tau_{12} \tau_{23} \tau_{13} > 0$,

$$(178) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_1 = \frac{\tau_3^2}{-\tau_1 \tau_3 \tau_{13}} = \frac{\tau_{23}^2}{\tau_{12} \tau_{23} \tau_{13}}, \\ G_3 = \frac{\tau_1^2}{\tau_1 \tau_3 \tau_{13}} = \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{12} \tau_{23} \tau_{13}}, \\ G_2 = G_1 - G_3, \end{array} \right.$$

$$(179) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_1 = \frac{2\tau_3}{-\tau_1 \tau_3 \tau_{13}} = \frac{2\tau_{23}}{\tau_{12} \tau_{23} \tau_{13}}, \\ J_3 = \frac{-2\tau_1}{-\tau_1 \tau_3 \tau_{13}} = \frac{2\tau_{12}}{\tau_{12} \tau_{23} \tau_{13}}, \\ J_2 = J_1 + J_3. \end{array} \right.$$

Teoricamente, é possível basear a determinação laplaciana de órbitas sobre observações de α , δ , $\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$, $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\delta}$ em uma data especificada, porém atualmente não se observa $\dot{\alpha}$ e $\dot{\delta}$ com alta precisão e $\ddot{\alpha}$ e $\ddot{\delta}$ com nenhuma precisão. Uma alternativa é a determinação dessas velocidades e acelerações angulares aproximadamente, a partir de três conjuntos de α e δ , e então utilizá-las no cálculo das componentes de $\dot{\vec{L}}$ e $\ddot{\vec{L}}$ (ver apêndices 2 e 3). Contudo, é mais conveniente obter as componentes destes vetores diretamente dos três conjuntos de \vec{L} , uma vez que, assim, podemos minimizar os erros envolvidos.

Devido à paralaxe, as componentes de $\dot{\vec{R}}$ e $\ddot{\vec{R}}$ são melhores determinadas a partir dos três conjuntos de valores de \vec{R} referidos ao ponto de observação. Para outros tratamentos de $\ddot{\vec{R}}$,

ver os apêndices 2 e 4. Os três conjuntos de componentes de \dot{L} e \dot{R} serão subsequentemente usados, também, nas representações e correções diferenciais. Observamos que \dot{L} e \ddot{L} , se obtidos pelas eqs. (177), não necessariamente satisfazem exatamente as relações

$$(180) \quad \dot{L} \cdot \dot{L} = 0, \quad \dot{L} \cdot \ddot{L} + \dot{L} \cdot \dot{L} = 0,$$

porém, a utilização que daremos a \dot{L} e \ddot{L} não exigem esta compatibilização estrita, nem que satisfaçam exatamente a interessante alternativa do apêndice 3. Obviamente, o cálculo numérico de \dot{L} , \ddot{L} , \dot{R} e \ddot{R} envolve os instantes das observações e, especialmente, os intervalos de tempo.

3) Formulação das equações laplacianas fundamentais

Tais equações, bem como as primeiras aproximações necessárias aos métodos laplacianos, são desenvolvidas a partir dos dados associados a uma única data, a época adotada, usualmente a data média de um conjunto de três observações igualmente espaçadas no tempo ($t_0 = t_2$)*. É conveniente, para fins de simplificações, omitir o índice 2 nestas quantidades ao longo do desenvolvimento das equações fundamentais, e a partir do instante em que esta omissão não possa mais gerar quaisquer dúvidas; subsequentemente, e por razões que se tornarão claras, a estas quantidades associaremos um índice zero.

A partir de (85) temos

* Mais precisamente, a escolha de t_0 como sendo a média aritmética dos instantes observados, sendo eles igualmente espaçados ou não é a melhor escolha. Esta dedução feita por Poincaré se encontra detalhada em A - 6. (1.5, 6, 7) e no B - 7 (VI), 116.

$$(181) \quad \vec{r} = \vec{L}\rho - \vec{R},$$

obtendo não apenas a equação geométrica ou triangular entre ρ e \vec{r} ,

$$(182) \quad r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = (\vec{L} \cdot \vec{L}) \rho^2 - 2(\vec{L} \cdot \vec{R})\rho + \vec{R} \cdot \vec{R} \\ = \rho^2 - (2R\cos\psi)\rho + R^2,$$

mas também as relações cinemáticas

$$(183) \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{L}}\rho + \vec{L}\dot{\rho} - \dot{\vec{R}},$$

$$(184) \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{L}}\rho + 2\dot{\vec{L}}\dot{\rho} + \vec{L}\ddot{\rho} - \ddot{\vec{R}}.$$

Observamos que, nas eqs. (181) - (184), as quantidades conhecidas são \vec{L} , $\dot{\vec{L}}$, $\ddot{\vec{L}}$, \vec{R} e $2R\cos\psi$, apesar de nem todas com o mesmo grau de precisão.

Introduzindo as equações de movimento para o problema dos dois corpos,

$$(185) \quad \ddot{\vec{r}} = - \frac{\mu\vec{r}}{r^3} = - \vec{L} \frac{\mu\rho}{r^3} + \frac{\mu\vec{R}}{r^3},$$

podemos reescrever (184) como se segue:

$$(186) \quad \vec{L}(\ddot{\rho} + \mu\rho/r^3) + 2\dot{\vec{L}}\dot{\rho} + \vec{L}\ddot{\rho} = \ddot{\vec{R}} + \mu\vec{R}/r^3$$

$$(187) \quad \begin{cases} L_x(\ddot{\rho} + \mu\rho/r^3) + 2\dot{L}_x\dot{\rho} + \ddot{L}_x\rho = \ddot{X} + \mu X/r^3, \\ L_y(\ddot{\rho} + \mu\rho/r^3) + 2\dot{L}_y\dot{\rho} + \ddot{L}_y\rho = \ddot{Y} + \mu Y/r^3, \\ L_z(\ddot{\rho} + \mu\rho/r^3) + 2\dot{L}_z\dot{\rho} + \ddot{L}_z\rho = \ddot{Z} + \mu Z/r^3. \end{cases}$$

As eqs. (186) e (187) são as equações fundamentais do método de Laplace na forma de Poincaré.

4) Procedimento para resolução das equações fundamentais

Dentre os processos pelos quais estas podem ser resolvidas, isto é, por determinantes, inversão de matrizes ou eliminação numérica, adotaremos o da eliminação numérica, procedimento este justificado no apêndice 1.

Para a eliminação numérica, a experiência mostrou que o procedimento abaixo é o mais indicado.

Multiplique a equação na qual é maior o coeficiente da primeira incôgnita, $\ddot{\rho} + \mu\rho/r^3$, termo a termo, por fatores que eliminam esta incôgnita quando a equação resultante é adicionada, termo a termo, às outras equações fundamentais. Como resultado, obteremos duas equações intermediárias:

$$(188) \quad \begin{cases} \textcircled{1}\ddot{\rho} + \textcircled{3}\dot{\rho} = \textcircled{5} + \textcircled{7}/r^3, \\ \textcircled{2}\ddot{\rho} + \textcircled{4}\dot{\rho} = \textcircled{6} + \textcircled{8}/r^3, \end{cases}$$

onde $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, ..., $\textcircled{8}$ são quantidades numéricas conhecidas. Repetindo o processo, escolhemos uma das eqs. (188), especificamente, aquela com o maior coeficiente de $\ddot{\rho}$, e a multiplicaremos pelo fator que elimina $\ddot{\rho}$ quando a equação resultante for adicionada à outra equação intermediária. O resultado final será

$$(189) \quad E\rho = A' - B'/r^3$$

ou, se $E \neq 0$,

$$(190) \quad \rho = A - \frac{B}{r^3}, \quad A = \frac{A'}{B}, \quad B = \frac{B'}{E},$$

e sendo E, A', B', A e B quantidades numéricas conhecidas.

A eq. (189), algumas vezes referida como equação dinâ-
mica entre ρ e r , é resolvida simultaneamente com a eq. (182) ob-
tendo a primeira solução para ρ, r e $1/r^3$ por aproximações su-
cessivas através das duas equações entre ρ e r , escritas relati-
vamente à data média, porém com o índice 2 omitido,

$$(191) \quad r^2 = \rho^2 - (2R \cos \psi) \rho + R^2,$$

$$(192) \quad E\rho = A' - B'/r^3, \text{ ou } \rho = A - B/r^3,$$

onde $R \cos \psi, R^2, E, A', B', A$ e B são coeficientes numéricos ob-
tidos por meio das efemérides e das definições de $E, A',$
 B', A e B .

Uma aproximação Newton-Raphson pode ser programada na
solução de (191) e (192) por meio de vários conjuntos de fórmu-
las, muitas das quais são definidas se $E = 0$ ou $\rho - R \cos \psi = 0$
(ver apêndice 8). O programa que adotaremos aqui parte de uma
estimativa de ρ , a ser construída logo após o programa que se
segue:

Programa. Dados $A'/B', E/B', R^2, R \cos \psi$ e uma estima-
tiva de ρ , calcule r^2 por (191) bem como $1/r^6, 6/r^8$ e $\rho - R \cos \psi$;
então,

$$(193) \quad u = \frac{A'}{B'} - \frac{E}{B'} \rho$$

$$(194) \quad f(\rho) = u^2 - 1/r^6,$$

$$(195) \quad -f'(\rho) = 2u \frac{E}{B'} - \frac{6}{r^8} (\rho - R \cos \psi),$$

$$(196) \quad \Delta\rho = f(\rho) / -f'(\rho) .$$

A seguir corrija a estimativa de ρ e repita o ciclo até que $f(\rho)$ seja julgado negligenciável.

A estimativa inicial de ρ depende da natureza da órbita: se heliocêntrica (ou geocêntrica com as observações feitas entre dois satélites) ou se geocêntrica com o ponto de observação sobre a superfície da Terra. A estimativa de ρ é simplificada para órbitas heliocêntricas pela introdução de três definições:

$$(197) \quad z = \rho/R, \quad w = r/R,$$

$$(198) \quad c = \cos\psi = (R \cos\psi) / R$$

e duas aproximações:

$$(199) \quad \frac{1}{m} = \frac{ER}{A'} = \frac{R}{A}, \quad \frac{1}{m} = \frac{ER}{B'} = \frac{R^4}{B}$$

assim as equações (191) e (192) tomam a forma:

$$(200) \quad w^2 = z^2 - 2cz + 1$$

$$(201) \quad z = m(1 - 1/w^2)$$

Observamos que as duas últimas equações nos permitem a construção de um gráfico de $\frac{1}{m}$ com argumentos c e z , tal como o da figura 9. Obtemos z , então, a partir das equações (198) e (199) quando c e $\frac{1}{m}$ são conhecidos. O procedimento para encontrar uma estimativa prática envolve o cálculo de c por (198), e de $\frac{1}{m}$ por uma ou ambas eqs. (198) e (199). Estas equações po

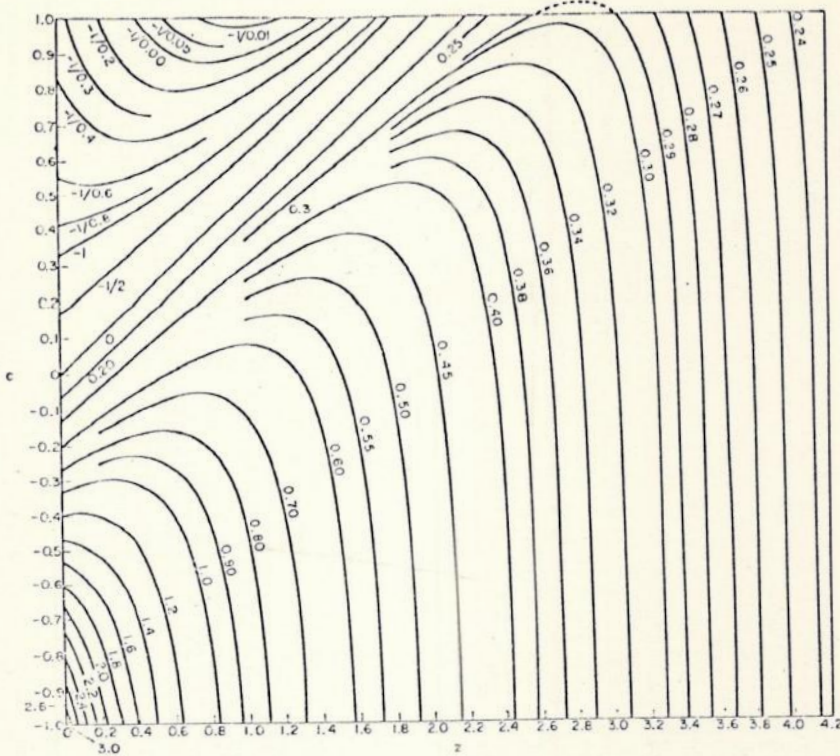


Figura 9

dem ser um tanto mais simplificadas para órbitas heliocêntricas pela aproximação $R = 1$. Assim sendo, a partir da Fig. 9, obtemos um ou mais valores de z , um para cada valor de $\frac{1}{m}$, para qualquer que seja a estimativa de c . Dois valores para cada c determina uma órbita com dupla solução. Portanto,

$$(202) \quad \rho = z R = z,$$

são os valores de ρ com os quais podemos dar início ao processo de Newton-Rapson.

A estimativa para órbitas geocêntricas é apresentada no apêndice 6.

Após terem sido obtidos ρ e $1/r^3$, $\dot{\rho}$ é calculada a partir da equação intermediária (188) na qual ρ tenha o maior coeficiente. A seguir, ρ , $\dot{\rho}$ e $1/r^3$ são introduzidos na outra equação intermediária como teste.

A quantidade $\ddot{\rho}$ usualmente não é calculada, pois não é necessária na determinação da órbita (exceto na chamada segunda forma de Poincaré), sendo rejeitada em favor do método mais consistente das correções de Leuschner.

5) Cálculo da "primeira aproximação" para \vec{r} e $\dot{\vec{r}}$.

O cálculo dessas quantidades será feito a partir de ρ , $1/r^3$ e $\dot{\rho}$, quando então obtêm-se a primeira aproximação \vec{r}_0 , $\dot{\vec{r}}_0$, na época t_0 , pelas fórmulas (181) e (183) utilizando os dados da segunda observação. Esta aproximação necessita ser testada pela determinação dos resíduos em dados puramente observacionais para a primeira e terceira datas, em um procedimento denominado *representação*. Usualmente neste passo os τ_j , $j = 1, 3$, foram corrigidos para o tempo de luz.

6) Representação

1º passo - Iniciamos com o cálculo de \vec{r} para $j = 1, 3$ por meio das séries para f e g .

2º passo - a partir do primeiro valor computado de $\vec{\rho}(=\vec{\rho}_c)$, através de (129), obtemos os resíduos mediante (132) e (135)

7) Aprimoramento(ou segunda aproximação) de \vec{r}_0 e $\dot{\vec{r}}_0$.

Através das correções de Leuschner obtemos um novo conjunto de valores para as componentes de \vec{r}_0 e $\dot{\vec{r}}_0$, isto é, uma segunda aproximação, bem como novas correções do tempo de luz $a\tau_1$ e $a\tau_3$. Tais valores podem ser representados, nestas circunstâncias, por uma repetição dos procedimentos indicados no ítem (6). O segundo conjunto de resíduos é, conforme obtido no programa, praticamente negligenciável, porque $\leq 0,7''$. Se os resíduos não são desprezíveis, repetimos a correção diferencial e a representação até que o sejam.

8) Segunda representação.

Efetuamos os mesmos cálculos do que em (6), porém utilizando agora as expressões finitas para f e g , com o intuito apenas de exemplificação, não implicando, entretanto, a ordem adotada nenhuma consideração sobre as precisões envolvidas.

9) Cálculo das efemérides.

O último conjunto de \vec{r}_0 e $\dot{\vec{r}}_0$ é então utilizado na determinação das outras constantes e efemérides (tabelas de posições previstas ou de dados observacionais que podem ser calculadas por qualquer um dos conjuntos de elementos alternativos mencionados anteriormente). Em uma determinação de órbita preliminar, o propósito primário das efemérides é tornar possível posteriores observações, as quais possam conduzir ao aperfeiçoamento estatístico da órbita.

III.3 - Apêndices

Apêndice 1

O processo de eliminação numérica empregado tem vantagens práticas sobre a solução por determinante ou matriz, porém a expressão formal dos determinantes para E , A' , B' , A e B tem interesse teórico. Podem ser escritos, ou abreviados, nas seguintes formas:

$$(203) \quad E = \begin{vmatrix} \vec{L} & \dot{\vec{L}} & \ddot{\vec{L}} \\ \vec{L} & \dot{\vec{L}} & \ddot{\vec{L}} \\ \vec{L} & \dot{\vec{L}} & \ddot{\vec{L}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_x & \dot{L}_x & \ddot{L}_x \\ L_y & \dot{L}_y & \ddot{L}_y \\ L_z & \dot{L}_z & \ddot{L}_z \end{vmatrix} = [\vec{L} \times \dot{\vec{L}}] \cdot \ddot{\vec{L}},$$

$$(204) \quad A' = \begin{vmatrix} \vec{L} & \dot{\vec{L}} & \ddot{\vec{R}} \\ \vec{L} & \dot{\vec{L}} & \ddot{\vec{R}} \\ \vec{L} & \dot{\vec{L}} & \ddot{\vec{R}} \end{vmatrix}, \quad B' = -\begin{vmatrix} \vec{L} & \dot{\vec{L}} & \vec{\mu R} \\ \vec{L} & \dot{\vec{L}} & \vec{\mu R} \\ \vec{L} & \dot{\vec{L}} & \vec{\mu R} \end{vmatrix},$$

$$A = A'/E, \quad B = B'/E.$$

Se acrescentarmos as quantidades

$$(205) \quad C' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{L} & \ddot{\vec{R}} & \ddot{\vec{L}} \\ \vec{L} & \ddot{\vec{R}} & \ddot{\vec{L}} \\ \vec{L} & \ddot{\vec{R}} & \ddot{\vec{L}} \end{vmatrix}, \quad D' = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{L} & \vec{\mu R} & \vec{L} \\ \vec{L} & \vec{\mu R} & \vec{L} \\ \vec{L} & \vec{\mu R} & \vec{L} \end{vmatrix},$$

podemos escrever a equação em determinantes para $\dot{\rho}$ como

$$(206) \quad E\dot{\rho} = C' - D'/r^3.$$

Quando as três posições astronômicas observadas do objeto estão sobre um grande círculo, o vetor $\ddot{\vec{L}}$ estará contido no plano determinado por \vec{L} e $\dot{\vec{L}}$, e E será zero, seja quando calculado por (203), seja pelo processo de eliminação. Se, por outro lado, \vec{R} e $\ddot{\vec{R}}$ estão contidos no plano determinado por \vec{L} e $\dot{\vec{L}}$, A' , B' , C' e D' serão nulos, e nenhuma solução será possível. Todavia, para o caso em que E é zero mas não são nulos A' e B' , a eq. (192) dá uma solução direta para r , sem aproximações, e é possível prosseguir

com a determinação da órbita. Para pequenos intervalos de tempo e pequenos arcos (de movimento angular), a maioria dos objetos tem movimentos aproximados pelos movimentos sobre grandes círculos. As circunstâncias de não solução ocorrem, nas órbitas heliocêntricas, quando o objeto está se movendo próximo ao plano da eclíptica; para órbitas geocêntricas, quando o objeto e o ponto de observação estão se movendo próximo ao plano do equador.

Nós citaremos duas vantagens simples e práticas do processo de eliminação numérica adotada sobre a solução por determinante:

- (1) o uso dos fatores de eliminação, dos quais o maior é unitário (ou próximo da unidade), força a permanência do último dígito significativo na última casa decimal, de tal maneira que o valor numérico de E nos informa imediatamente do número de dígitos significativos que ele contém, sem qualquer cálculo ou análise matemática;
- (2) nas circunstâncias críticas, δ precisa ser consistente com ρ a um número de dígitos significativos maior do que suas próprias precisões. Esta consistência é dada automaticamente por (188), mas pode ser perdida por (206).

Um estudo recente realizado por M.S.W. Keesey a respeito de uma eliminação por matrizes 3×3 , mostrou a seguinte comparação entre os métodos:

- | | |
|-----------------------------------|------------------|
| (a) método gaussiano | - 28 operações, |
| (b) método matricial de Choleski | - 58 operações |
| (c) método matricial de Jordan | - 84 operações |
| (d) expansão matricial de Laplace | - 143 operações. |

Finalizando, ressaltamos que a precisão de cada um dos métodos acima não está relacionada com o seu número de operações.

Apêndice 2

As expressões que são apresentadas abaixo, e que podem ou não ser utilizadas na prática, estende a análise do apêndice 1:

$$(207) \quad \dot{\vec{L}} = \dot{A}\alpha\cos\delta + \dot{D}\delta, \quad \dot{\vec{L}} \cdot \dot{\vec{L}} = \dot{L}^2 = \dot{\alpha}^2\cos^2\delta + \dot{\delta}^2,$$

$$(208) \quad \dot{\vec{B}} = \dot{L} \times \dot{\vec{L}} = -\dot{A}\delta + \dot{D}\alpha\cos\delta, \quad \dot{\vec{B}} \cdot \dot{\vec{B}} = \dot{L}^2,$$

$$(209) \quad \vec{L} \cdot \dot{\vec{L}} = 0, \quad \vec{L} \cdot \dot{\vec{B}} = 0, \quad \dot{\vec{L}} \cdot \dot{\vec{B}} = 0,$$

$$(210) \quad \ddot{\vec{L}} = \ddot{L}\dot{L}^2 + A(\ddot{\alpha}\cos - 2\dot{\alpha}\dot{\delta}\sin\delta) + D(\ddot{\delta} + \dot{\alpha}^2\sin\delta\cos\delta).$$

Assim, se tomarmos o produto interno da eq. (186), termo a termo, primeiro com $\dot{\vec{L}}$ e depois com $\dot{\vec{B}}$, obteremos

$$(211) \quad 2\dot{L}^2\dot{\rho} + (\dot{\vec{L}} \cdot \ddot{\vec{L}})\rho = (\dot{\vec{L}} \cdot \ddot{\vec{R}}) + (\dot{\vec{L}} \cdot \mu\dot{\vec{R}})/r^3$$

$$(212) \quad (\dot{\vec{B}} \cdot \ddot{\vec{L}})\rho = (\dot{\vec{B}} \cdot \ddot{\vec{R}}) + (\dot{\vec{B}} \cdot \mu\dot{\vec{R}})/r^3,$$

onde

$$(213) \quad \begin{aligned} \dot{\vec{L}} \cdot \ddot{\vec{L}} &= (\dot{\vec{A}} \cdot \dot{\vec{L}}) \dot{\alpha}\cos\delta + (\dot{\vec{D}} \cdot \dot{\vec{L}}) \dot{\delta} \\ &= \dot{\alpha}\dot{\alpha}\cos^2\delta + \dot{\delta}\dot{\delta} - \dot{\alpha}^2\dot{\delta}\sin\delta\cos\delta, \end{aligned}$$

$$(214) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{\vec{L}} \cdot \ddot{\vec{R}} &= (\dot{\vec{A}} \cdot \dot{\vec{R}}) \dot{\alpha}\cos\delta + (\dot{\vec{D}} \cdot \dot{\vec{R}}) \dot{\delta}, \\ \dot{\vec{L}} \cdot \mu\dot{\vec{R}} &= (\dot{\vec{A}} \cdot \mu\dot{\vec{R}}) \dot{\alpha}\cos\delta + (\dot{\vec{D}} \cdot \mu\dot{\vec{R}}) \dot{\delta}, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 (215) \quad \vec{B} \cdot \vec{L} &= (\vec{A} \cdot \vec{L}) \dot{\delta} + (\vec{D} \cdot \vec{L}) \dot{\alpha} \cos \delta \\
 &= (\ddot{\alpha} \delta - \dot{\delta} \ddot{\alpha}) \cos \delta + (2\dot{\delta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta) \dot{\alpha} \sin \delta \\
 &= [\vec{L} \times \dot{\vec{L}}] \cdot \ddot{\vec{L}} \\
 &= |\vec{L} \ \dot{\vec{L}} \ \ddot{\vec{L}}| \\
 &= E,
 \end{aligned}$$

$$(216) \quad \begin{cases} \vec{B} \cdot \vec{R} = -(\vec{A} \cdot \vec{R}) \dot{\delta} + (\vec{D} \cdot \vec{R}) \dot{\alpha} \cos \delta = A', \\ \vec{B} \cdot \vec{\mu R} = -(\vec{A} \cdot \vec{\mu R}) \dot{\delta} + (\vec{D} \cdot \vec{\mu R}) \dot{\alpha} \cos \delta = -B'. \end{cases}$$

Apêndice 3

O apêndice 1 sugere que façamos o produto interno da eq.(206), termo a termo, primeiro com \vec{A} e então com \vec{D} . O resultado será.

$$(217) \quad 2(\vec{A} \cdot \vec{L}) \dot{\rho} + (\vec{A} \cdot \vec{L}) \rho = (\vec{A} \cdot \vec{R}) + (\vec{A} \cdot \vec{\mu R})/r^3,$$

$$(218) \quad 2(\vec{D} \cdot \vec{L}) \dot{\rho} + (\vec{D} \cdot \vec{L}) \rho = (\vec{D} \cdot \vec{R}) + (\vec{D} \cdot \vec{\mu R})/r^3,$$

onde

$$(219) \quad \vec{A} \cdot \dot{\vec{L}} = \dot{\alpha} \cos \delta, \quad \vec{D} \cdot \dot{\vec{L}} = \dot{\delta},$$

$$(220) \quad \begin{cases} \vec{A} \cdot \ddot{\vec{L}} = \ddot{\alpha} \cos \delta - 2\dot{\alpha} \dot{\delta} \sin \delta, \\ \vec{D} \cdot \ddot{\vec{L}} = \ddot{\delta} + \dot{\alpha}^2 \sin \delta \cos \delta. \end{cases}$$

Com base nestas relações, se multiplicarmos a primeira equação por $-\dot{\delta}$ e a segunda por $+\dot{\alpha} \cos \delta$ e adicionarmos, obteremos (212). Notamos que a primeira eliminação, que conduziu às eqs. (217) e (218), satisfaz ao critério do procedimento adotado: que o maior dos fatores de eliminação seja da ordem da unidade; porém, a segunda eliminação, indicada no início deste parágrafo,

não satisfaz. A fim de forçar a segunda eliminação a fazê-lo, multiplicamos a primeira das eqs. (220) por $-\dot{\delta}/(\dot{\alpha}\cos\delta)$ e adicionamos à segunda, ou então, multiplicamos a segunda por $-(\dot{\alpha}\cos\delta)/\dot{\delta}$ e adicionamos à primeira, dependendo de $\dot{\alpha}\cos\delta$ ser ou não maior que $\dot{\delta}$; mas, ainda, podemos multiplicar a primeira por $-\dot{\delta}/\dot{L}$ e adicionarmos à segunda, após tê-la multiplicado por $(\dot{\alpha}\cos\delta)/\dot{L}$.

Uma comparação entre o processo de eliminação que conduziu às eqs. (217) e (218) com o processo adotado resulta em que este envolve 20 multiplicações ou divisões, em lugar de 10 daquele, e 12 adições ou subtrações em lugar de 8, sendo que este acréscimo é compensado com a vantagem de em contrapartida não temos que nos preocupar com a procura da maior componente de \vec{L} , e a conseqüente seleção de um sub-programa apropriado para o cálculo.

Apêndice 4

Em órbitas heliocêntricas e em algumas outras aproximações, é freqüente a introdução da estimativa

$$(221) \quad \ddot{\vec{R}} = -\mu\vec{R}/R^3,$$

de tal maneira que

$$(222) \quad A' = B'/R^3, \quad A = B/R^3, \quad C' = D/R^3,$$

$$(223) \quad \rho = B\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right), \quad B = B'/E,$$

$$(224) \quad \dot{\rho} = \chi'\rho, \quad \chi' = D/B'.$$

As eqs. (223) mostram que, quando $E = 0$, mas $B' \neq 0$, podemos, imediatamente, tomar $r = R$, desde que a aproximação (221)

seja suficiente. As eqs.(224) são especialmente indicadas na de terminação de órbitas parabólicas, para as quais não é necessário considerar (223) e o determinante crítico E.

Apêndice 5

A forma de Leuschner das equações laplacianas fundamen tais será deduzida com auxílio das definições:

$$(225) \quad \sigma = \rho \cos \delta, \quad \tau_{\delta} = \operatorname{tg} \delta,$$

$$(226) \quad \mu X_{\alpha} = \mu X \cos \alpha + \mu Y \operatorname{sen} \alpha, \quad \mu Y_{\alpha} = -\mu X \operatorname{sen} \alpha + \mu Y \cos \alpha.$$

Então,

$$(226) \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha \\ \tau_{\delta} \end{bmatrix} \sigma - \vec{R},$$

$$(227) \quad \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \cos \\ \operatorname{sen} \\ \tau_{\delta} \end{bmatrix} \dot{\sigma} + \begin{bmatrix} -\dot{\alpha} \operatorname{sen} \alpha \\ +\dot{\alpha} \cos \alpha \\ \dot{\tau}_{\delta} \end{bmatrix} \sigma - \dot{\vec{R}}.$$

Nas equações envolvendo derivadas segunda substituire mos

$$(228) \quad \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu \vec{r}}{r^3} = -\begin{bmatrix} \cos \\ \operatorname{sen} \\ \tau_{\delta} \end{bmatrix} \frac{\mu \sigma}{r^3} + \frac{\mu \vec{R}}{r^3},$$

e também, mas apenas por conveniência e não por necessidade,

$$(229) \quad \ddot{\vec{R}} = -\frac{\mu \vec{R}}{R^3}.$$

Assim,

$$(230) \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ \tau_\delta \end{bmatrix} \left(\ddot{\sigma} + \frac{\mu\sigma}{r^3} \right) + 2 \begin{bmatrix} -\alpha \sin\alpha \\ +\alpha \cos\alpha \\ \tau_\delta \end{bmatrix} \dot{\sigma} + \\ + \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}^2 \cos\alpha - \ddot{\alpha} \sin\alpha \\ -\dot{\alpha}^2 \sin\alpha - \ddot{\alpha} \cos\alpha \\ \dot{\tau}_\delta \end{bmatrix} \sigma = \mu R \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right).$$

As duas primeiras das eqs. (230) são combinadas de maneira óbvia a fim de produzir as equações fundamentais na forma de Leuschner:

$$(231) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tau_\delta \end{bmatrix} \left(\ddot{\sigma} + \frac{\mu\sigma}{r^3} \right) + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\tau}_\delta \end{bmatrix} \dot{\sigma} + \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}^2 \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\tau}_\delta \end{bmatrix} \sigma = \begin{bmatrix} \mu X_\alpha \\ \mu Y_\alpha \\ \mu Z \end{bmatrix} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right).$$

Dessa forma, definindo

$$(232) \quad N = \dot{\alpha}^3 \tau_\delta - \ddot{\alpha} \dot{\tau}_\delta + \ddot{\alpha} \ddot{\tau}_\delta,$$

$$(233) \quad N\sigma = \kappa' \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right), \quad \sigma = \kappa \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right),$$

$$(234) \quad \kappa' = (\mu X_\alpha \tau_\delta - \mu Z) \dot{\alpha} - \mu Y_\alpha \dot{\tau}_\delta, \quad \kappa = \kappa' / N,$$

vem

$$(235) \quad N\dot{\sigma} = \lambda' \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right), \quad \dot{\sigma} = \lambda \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right),$$

sendo

$$(236) \quad \lambda' = \frac{1}{2} (\mu X_\alpha \tau_\delta - \mu Z) \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} \mu Y_\alpha (\tau_\delta + \dot{\alpha}^2 \tau_\delta), \quad \lambda = \lambda' / n.$$

As análogas as eqs. (224) são, obviamente,

$$(237) \quad \dot{\sigma} = \chi \sigma, \quad \chi = \lambda' / \kappa' .$$

É possível mostrar que, quando E é o valor determinante, e não apenas proporcional a ele, temos

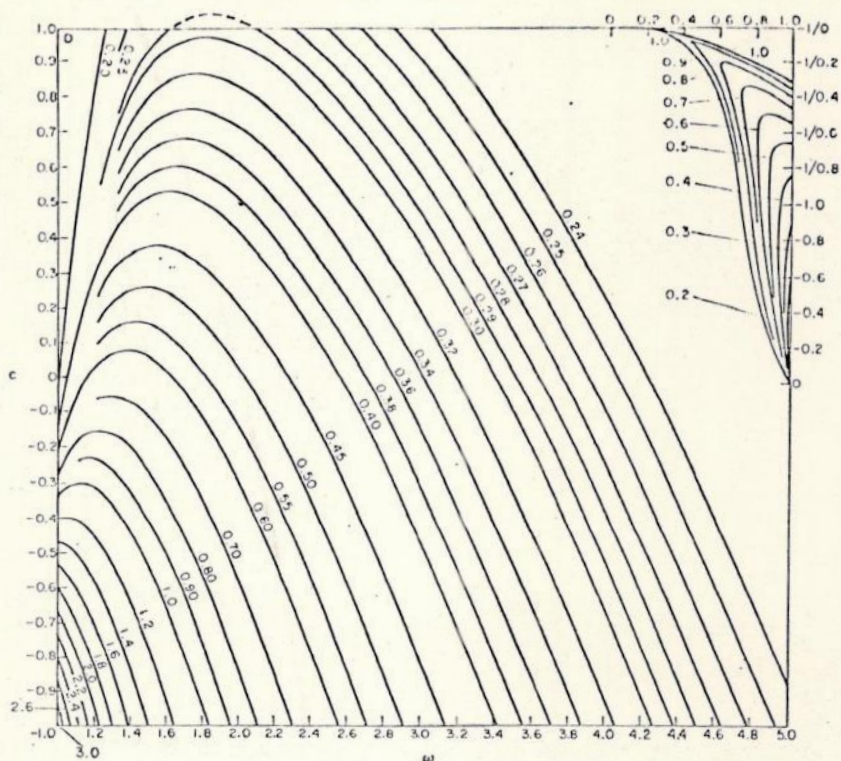
$$(238) \quad E = [\vec{L} \times \dot{\vec{L}}] \cdot \ddot{\vec{L}} = N \cos^3 \delta,$$

de tal forma que $N = 0$, para $E = 0$, quando as três observações es são contidas em um grande círculo.

Apêndice 6

No caso de uma órbita geocêntrica, com o observador na superfície da Terra, o processo anteriormente realizado não pode ser operado, isto é, as aproximações (199) não podem ser feitas, pois os gráficos não estão definidos. Nestes casos, frequentemente é mais fácil estimar r do que ρ , apesar de que, para satélites em órbitas geocêntricas, ambas as estimativas são igualmente acessíveis, por decorrerem de projetos de órbitas ou excelentes "ranges". Se a estimativa inicial para r for feita, então podemos entrar com o programa das iterações Newton-Raphson, eqs. (42)-(44), calculando, grosseiramente, por

$$(239) \quad \rho = R \cos \psi \pm \sqrt{r^2 - R^2 + (R \cos \psi)^2} .$$



Figura

Somente o sinal $+$ é admissível se $R \cos \psi$ for negativo, ou menor do que a raiz quadrada; se o sinal negativo for aceitável, temos uma determinação com dupla solução.

Uma boa estimativa inicial para r numa órbita geocêntrica, pode ser 1,1 geo-unidades. Tomando r como na órbita heliocêntrica utilizada (por exemplo: para um planetóide "representativo" a estimativa é usualmente 2,5 ua ; para um asteróide de movimento rápido como Icaro, Betulia e Toro, poderia ser 1,0 ua).

Apêndice 7

Em órbitas geocêntricas, quando as três observações estão separadas de uns poucos minutos, e são feitas de um só observatório, podemos calcular R e \dot{R} pelas relações

$$(240) \quad \dot{\vec{R}} = \begin{cases} \dot{X} = -\omega Y, \\ \dot{Y} = +\omega X, \\ \dot{Z} = 0, \end{cases} \quad \ddot{\vec{R}} = \begin{cases} \ddot{X} = -\omega^2 X, \\ \ddot{Y} = -\omega^2 Y, \\ \ddot{Z} = 0, \end{cases}$$

sendo ω , expressa em radianos por unidade de tempo canônico, a razão angular de rotação da Terra.

Apêndice 8

Os programas abaixo podem ser comparados com o adotado anteriormente, especialmente devido à possibilidade de denominadores nulos:

a) dada uma estimativa de r :

$$(241) \quad \begin{cases} \rho = A - B/r^3, & A = A'/E, & B = B'/E, \\ f(r) = \rho^2 - (2R\cos\psi)\rho + R^2 - r^2, \\ -f(r) = 2r \left[1 - \frac{3B}{r^5}(\rho - R\cos\psi) \right]; \end{cases}$$

b) estimativa de r :

$$(242) \quad \begin{cases} \rho = R\cos\psi \pm \sqrt{r^2 - R^2 + (R\cos\psi)^2}, \\ f(r) = \frac{A^*}{B^*} - \frac{E}{B^*}\rho - \frac{1}{r^3}, \\ -f(r) = \frac{Er}{B^*(\rho - R\cos\psi)} - \frac{3}{r^4} \\ = \frac{Er}{B^*(\rho - R\cos\psi)} \left[1 - \frac{3B}{r^5}(\rho - R\cos\psi) \right]; \end{cases}$$

c) estimativa de ρ :

$$(243) \quad \begin{cases} r^2 = \rho^2 - (2R\cos\psi)\rho + R^2, \\ f(\rho) = A - \frac{B}{r^3}(\rho - R\cos\psi), \\ -f'(\rho) = 1 - \frac{3B}{r^5}(\rho - R\cos\psi). \end{cases}$$

Observe que as várias expressões para $f'(\rho)$ e $f'(r)$, incluindo a eq. (195), têm um fator comum que permite a possibilidade destas derivadas se anularem. Quando isto ocorrer, devemos considerar a derivada segunda ou apelar para processos gráficos ou numéricos tal como: se $f'(\rho)$ é próxima de zero, podemos estimar mais do que um valor de ρ , calcular, então os resultantes de $f(\rho)$ e, talvez, plotá-los sobre um gráfico. Um par selecionado pode assim ser usado para calcular

$$(244) \quad f'(\rho) = \frac{f(\rho_j) - f(\rho_i)}{\rho_j - \rho_i} .$$

III.4 - Resultados

Com base no esquema geral delineado nos itens anteriores, foi preparado um programa em linguagem "BASIC", a fim de que pudesse ser processado na calculadora de mesa HP 9830 do I.A.G. O correspondente programa é apresentado no final do texto.

A título de ilustração, a tabela a seguir lista nossos resultados e de dois outros autores.

	K.P. WILLIAMS (1934)	S.HERRICK (1971)	AUTOR (1978)
a	3,120500	3,12122	3,12117
e	0,0488747	0,0488837	0,0488902
i	18 ^o , 49494	18 ^o , 49806	18 ^o , 49788
w	267 ^o , 27683	267 ^o , 05142	267 ^o , 05145
Ω	260, 66994	260 ^o , 65696	260 ^o , 65765
T	26, 7332	26, 7332	26, 7332,

Novembro, 1910, G.M.T.

IV - MÉTODO DE COWELL PARA AS PERTURBAÇÕES ESPECIAIS

IV. 1 - As equações do movimento e sua formulação na teoria

Sejam as equações de movimento dos n corpos, em sua forma inercial, sendo as equações (5) um caso especial para $i = 2$,

$$(245) \quad m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = k^2 \sum_{j=i}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} + m_i \vec{p}_i \quad \begin{array}{l} *j \neq i, \\ i = 1, \dots, n. \end{array}$$

Observamos, então, que em (245) os vetores $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ especificam posições em relação a eixos não em rotação e a uma origem inercial. Além disso, Σ^* em conjunção com $*j \neq i$ significa que o termo para $j = i$ é omitido da soma e $\vec{p}_i = (p_{xi}, p_{yi}, p_{zi})$ representa as acelerações causadas, possivelmente, por empuxe, atrito com o ar, forças gravitacionais externas ao sistema de n corpos, ou originárias de desvios da homogeneidade em camadas esféricas concêntricas, ou decorrentes de efeitos relativísticos, etc. Dando prosseguimento, obtemos a denominada forma movimento relativo a partir do deslocamento das coordenadas do centro inercial para algum dos n corpos, usualmente m_1 . Utilizando a notação mais habitual

$$(246) \quad x_{ij} = x_j - x_i, \quad x \rightarrow y, z, \vec{r}; \quad p_x, p_y, p_z, \vec{p}$$

temos

$$(247) \quad \frac{d^2 x_{12}}{dt^2} = \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \quad x \rightarrow y, z, \vec{r},$$

donde, de (245),

$$(248) \quad \frac{d^2 x_{12}}{dt^2} = -k^2 (m_1 + m_2) \frac{x_{12}}{r_{12}^3} + k^2 \sum_{j=3}^n m_j \left(\frac{x_{2j}}{r_{ij}^3} - \frac{x_{1j}}{r_{1j}^3} \right) +$$

$$+ p_{x2} - p_{x1}, \quad x \rightarrow y, z, \vec{r}; \quad p_x, p_y, p_z, \vec{p}.$$

Como x_{1j} é mais frequentemente dado nas tabelas que x_j , podemos substituir (246), para $i=2$, por

$$(249) \quad x_{2j} = x_{1j} - x_{12}, \quad x \rightarrow y, z, \vec{r}; \quad p_x, p_y, p_z, \vec{p}.$$

Os termos que participam da soma em (242) e envolvem x_{1j}/r_{1j}^3 e p_{x1} , são usualmente referidos como termos indiretos ou como perturbações indiretas do movimento de m_2 .

Introduzindo e extendendo as notações especiais dadas anteriormente,

$$(250) \quad \mu_j = k^2 m_j,$$

$$(251) \quad x = x_{12}, \quad x \rightarrow y, z,$$

$$(252) \quad r = r_{12} = + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

podemos escrever (248) na forma genérica

$$(253) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\mu x}{r^3} + \dot{x}^{\wedge}, \quad x \rightarrow y, z,$$

onde

$$(254) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^{\wedge} = \sum_{j=3}^n \mu_j \left(\frac{x_{2j}}{r_{2j}^3} - \frac{x_{1j}}{r_{1j}^3} \right) + p_x \\ x_{2j} = x_{1j} - x \end{array} \right\} x \rightarrow y, z; \quad p_x, p_y, p_z.$$

É possível, em circunstâncias especiais, modificar as eqs. (9), (250) e (254), e incluir uma parte das perturbações em $-\mu x/r^3$ sem alterar a forma da eq. (253). Evidentemente, no caso com o qual nos defrontamos p_x , $x \rightarrow y, z, \vec{p}_1$, e m_2 são desprezados ($m_2 \approx 0$). Tomaremos a massa do Sol como unidade de massa.

Assim, para o nosso caso, isto é, fazendo $j = 3$ em (254), (253) passa a ser:

$$(255) \quad \ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3} + \mu_3 \left(\frac{x_{23}}{r_{23}^3} - \frac{x_{13}}{r_{13}^3} \right)$$

$$(256) \quad = -\mu \frac{x}{r^3} + \mu_3 \left(\frac{X}{R^3} - \frac{\rho}{\rho^3} \right), \quad \ddot{x} \rightarrow \ddot{y}, \ddot{z},$$

jã que

$$(257) \quad \begin{cases} \vec{r}(x, y, z) = \vec{r}_{12} \\ \vec{R}(X, Y, Z) = \vec{r}_{31} = \vec{r}_{\theta 4} \\ \vec{\rho}(\xi, \eta, \xi) = \vec{r}_{32}, \end{cases}$$

satisfazendo, portanto, a relação (85). Finalmente obtemos a equação do movimento na forma vetorial como se segue

$$(258) \quad \ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_3 \left(\frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right)$$

É conveniente salientar que a forma com que a equação do movimento (253) foi apresentada, nos permite a inclusão de perturbações adicionais, como por exemplo as de Saturno, com a ajuda de

$$(259) \quad \vec{\rho}_4 = \vec{r}_{42} = \vec{r} + \vec{R}_4$$

$$(260) \quad \vec{R}_4 = \vec{r}_{41} = \vec{r}_{31} - \vec{r}_{34} = \vec{R} - \vec{r}_{\theta}$$

Observamos então que, na equação do movimento (258) o primeiro termo representa a ação do Sol sobre m_2 , o primeiro termo no interior do parênteses representa a ação de m_3 sobre o Sol e o segundo designa a ação de m_3 sobre m_2 .

Estas equações podem ser igualmente utilizadas para movimentos de satélites tomando a origem no primário e uma das m_j como sendo o Sol.

Tomando como base (253), o método de Cowell consiste em integrar as componentes da aceleração total, formalmente por

$$(261) \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}_0 + \int_{t_0}^t \ddot{x} du,$$

$$(262) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + \int_{t_0}^t \dot{x} du = \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t (\dot{x}_0 + \int_{v_0}^v \ddot{x} du) dv = \\ &= x_0 + (t - t_0) \dot{x}_0 + \int_{t_0}^t \left[\int_{v_0}^v \ddot{x} du \right] dv, \end{aligned}$$

onde $u, v = t$.

O processo de interação acompanha a trajetória real sem nenhuma recorrência a órbitas de referência. As componentes da aceleração são integradas passo a passo para produzir componentes de velocidade e posição, e estas são usadas por sua vez nas equações de movimento para o cálculo das componentes da aceleração, ciclicamente.

Em problemas puramente gravitacionais, e em outros problemas envolvendo apenas forças conservativas, \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} não são funções das componentes \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} da velocidade, de tal forma

que a integração simples não é calculada em cada passo, isto é, podemos omitir as componentes da velocidade e, com os melhores e mais simples processos de integração numérica, integrar diretamente da aceleração à posição. O método de Cowell é portanto, limitado às perturbações especiais* devido à ausência de uma órbita de referência que forneça expressões em série em primeira ordem para as acelerações, as quais possam ser integradas, termo a termo, em perturbações gerais em primeira ordem.

Nas perturbações especiais pelo método de Cowell, da do \vec{r} , e possivelmente $\dot{\vec{r}}$, em cada passo da integração, calculamos $\dot{\vec{r}}$ por fórmulas apropriadas, a serem analisadas no próximo item; a seguir calculamos as componentes de $\ddot{\vec{r}}$ por meio de (253) e então integramos $\dot{\vec{r}}$, e possivelmente \vec{r} , no próximo passo por um dos processos indicados formalmente por (262).

Voltando ao nosso problema particular, podemos a partir de (258), (já que m_3 é pequena em comparação a m_1 e R conhecido das efemérides) obter a solução por aproximações sucessivas. A cada passo da integração, coordenadas aproximadas de m_2 são obtidas por extrapolação e estas coordenadas são usadas para calcular acelerações por um qualquer método de integração numérica, fazendo com que a parcela representativa da ação planetária perturbadora deva ser calculada separadamente e adicionada ao termo gerado pela ação do Sol.

* Um método de integrações de órbitas pode envolver integrações numéricas ou perturbações especiais, baseadas em séries cujos coeficientes variam passo a passo, ou perturbações gerais, baseadas na integração analítica de séries com coeficientes aproximados, porém usados por longos intervalos de tempo.

Quando a integração se estende ao longo de muito poucas revoluções, o corpo não se afasta demasiado da órbita dada por uma elipse na época de osculação, e a menos que o corpo se aproxime muito perto de um planeta, as atrações planetárias devem ser calculadas em avanço usando a posição do corpo na órbita real. Desta maneira muito trabalho pode ser economizado. Quando a integração se estende a muitas revoluções, entretanto, esta aproximação não é permitida; em tais casos, é possível algumas vezes usar os resultados de uma integração prévia no cálculo das atrações planetárias.

IV.2 - Fundamentos de análise numérica

Nós utilizaremos o seguinte roteiro, usualmente empregado em qualquer processo de integração numérica, como básico no desenvolvimento teórico realizado. Entretanto, admitimos que o processo com o qual iremos lidar é o da soma segunda, " Σ^2 ", ou de "Gauss-Jackson".

a) Determinação de condições iniciais (isto é, constantes de integração, valores de contorno ou iniciais, em uma órbita calculada). Será conveniente, talvez, de uma integração prévia de igual ou menor precisão, com a qual a nova integração é considerada rigorosamente consistente.

b) Determinação do número de casas decimais necessárias a uma esperada acumulação de erro. Para um dado número de algarismos significativos no integrando (\dot{x}), qualquer que seja o critério adotado, devemos ter o menor acúmulo de erro nas integrais \dot{x} e x , ou mais precisamente, nas somas básicas (isto é $\Sigma \ddot{x}$ e $\Sigma^2 \dot{x}$ na vez de \dot{x} e x).

Portanto, o critério induz a busca do número máximo de algarismos significativos nas somas primeira e segunda, para que com isto possamos reduzir os erros de truncamento.

c) Determinação de dados auxiliares aproximados, para serem usados num processo de iniciação ("starting"). Será realizada a partir de qualquer um dos seguintes procedimentos (os quais se encontram em ordem crescente de precisão):

- 1) Série de Taylor, incluindo o termo \ddot{x}_0 ;
- 2) Órbita do tipo 'dois corpos' osculadora ou uma equivalente, já com perturbações típicas adicionadas;
- 3) Uma qualquer das órbitas citadas no item (2) ajustadas para as diferenças entre \ddot{x}_0 e a aceleração inicial implícita no item anterior;
- 4) Um apropriado iniciador Runge-Kutta;
- 5) Uma integração Σ^2 precisa.

Frisamos que, mesmo quando os dados são determinados a partir de uma integração prévia precisa, eles serão encarados como aproximados e ajustáveis, tal que a tabela de integração possa ser auto consistente no fim das aproximações iniciais. Nestas circunstâncias, entretanto, estes dados podem ser usados num processo um tanto mais elaborado para obtenção de condições iniciais "as mais bem ajustadas" possíveis.

d) Seleção, testes e ajustamentos do intervalo de integração da tabela serão baseados nas seguintes fontes de informação que se encontram à nossa disposição(a), ou àquelas que pudermos criar(b);

- a) integrações anteriores no mesmo problema ou em outros que lhe sejam similares, podendo abranger uma integração a curto termo capaz de fornecer um indicador da necessidade de dividir por dois o intervalo de integração (ou dobrá-lo, ou em retificações), até uma integração a longo termo através de vários períodos ou ciclos;
- b) determinação de uma órbita osculadora do tipo 'dois corpos', ou uma solução analítica similar de uma aproximação da equação diferencial envolvida, proveniente de x_0, \dot{x}_0 , etc., incluindo especialmente características tais como distâncias apo e perifocais, distância da passagem mais próxima possível a um objeto perturbador, etc.
- e) Partida da tabela de integração por aproximações sucessivas. Esta visa dar a todas as quantidades uma consistência rigorosa (dentro dos erros de arredondamento e sem erros de truncamento) com a equação diferencial envolvida, com a fórmula de integração, com as condições iniciais e com os dados da tabela entre si.

A inicialização do processo " Σ^2 ", isto é, a seqüência de aproximações para o aprimoramento da tabela do integrando, suas somas e diferenças, suplementadas por critérios que indiquem quando o melhoramento seja suficiente, obedece a seguinte ordenação:

- 1) Monta-se uma tabela, com valores iniciais estimados por um processo de substituição qualquer, da função \dot{x} contra o argumento t .

- 2) Calculamos um valor da $\Sigma^2 \ddot{x}_0$ e outro da $\Sigma \ddot{x}_0$, onde x_0 e \dot{x}_0 são valores iniciais conhecidos naturalmente.
 - 3) A partir de \dot{x}_0 obtemos uma outra soma primeira, mediante a relação fundamental que existe entre esta, $\Sigma \dot{x}_0$ e \dot{x}_0 .
 - 4) A partir da fórmula fundamental da Σ^2 , em notação segundo diferenças centrais, obtemos os x_i , para os respectivos $\tau_{i\pm 1}$, $\tau_{i\pm 2}$, etc. Estes valores são inseridos na equação geral do movimento, gerando novos valores de \dot{x} . O processo (2) é então efetuado até o em questão.
 - 5) Constitui-se critério para interrupção do processo de inicialização Σ^2 , baseado na experiência de computação de órbitas, mas variável de problema a problema, o fato de que os erros permissíveis em $\Sigma^2 \dot{x}$, \dot{x} e $\delta^2 \dot{x}$ sejam consideravelmente menores do que uma quantidade escolhida.
- f) Adotaremos a tabela (263), com notação segundo diferenças centrais, como modelo de referência, a partir da qual será baseado todo o desenvolvimento técnico que se seguirá:

Argumento	Soma $2^{\underline{a}}$	Soma $1^{\underline{a}}$	Função	Diferenças		
(t)	(Σ^2)	(Σ)	(x)	(δ)	(δ^2)	(δ^3)
t_{i-2}	$\Sigma^2 x_{i-2}$		x_{i-2}		$\delta^2 x_{i-2}$	
		$\Sigma x_{i-1} \frac{1}{2}$		$\delta x_{i-1} \frac{1}{2}$		$\delta^3 x_{i-1} \frac{1}{2}$
t_{i-1}	$\Sigma^2 x_{i-1}$		x_{i-1}		$\delta^2 x_{i-1}$	
		$\Sigma x_i - \frac{1}{2}$		$\delta x_i - \frac{1}{2}$		$\delta^2 x_i - \frac{1}{2}$
(263) t_i	$\Sigma^2 x_i$		x_i		$\delta^2 x_i$	
		$\Sigma x_{i+1} - \frac{1}{2}$		$\delta x_{i+1} \frac{1}{2}$		$\delta^3 x_{i+1} \frac{1}{2}$
t_{i+1}	$\Sigma^2 x_{i+1}$		x_{i+1}		δx_{i+1}	
		$\Sigma x_{i+1} \frac{1}{2}$		$\delta x_{i+1} \frac{1}{2}$		
t_{i+2}	$\Sigma^2 x_{i+2}$		x_{i+2}			
		$\Sigma x_{i+2} \frac{1}{2}$				
t_{i+3}	$\Sigma^2 x_{i+3}$					

Denotaremos, a priori, o constante intervalo tabular (ou intervalo de integração, ou do argumento, ou largura do passo tabular) por:

$$(264) \quad w = t_{i+1} - t_i.$$

Definimos as diferenças e somas pelas seguintes fórmulas:

$$(265) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1} = x_i + \delta x_{i+1} \frac{1}{2} \\ \delta x_{i+1} \frac{1}{2} = \delta x_{i+1} \frac{1}{2} + \delta^2 x_{i+1} \\ \delta x_{i+2} = \delta^2 x_{i+1} \frac{1}{2}, \text{ etc.} \end{array} \right.$$

$$(266) \quad \left\{ \begin{aligned} x_{i+1} &= x_{i+1} + \delta x_{i+1} \frac{1}{2} = x_i + 2\delta x_{i+1} \frac{1}{2} + \delta^2 x_{i+1} \\ &= \delta x_{i+2} \frac{1}{2} = \delta x_{i+1} \frac{1}{2} + 2\delta^2 x_{i+1} + \delta^3 x_{i+1} \frac{1}{2}, \text{ etc.} \\ x_{i+3} &= x_i + 3\delta x_i \frac{1}{2} + 3\delta^2 x_{i+1} + \delta^3 x_{i+1} \frac{1}{2}, \text{ etc.} \end{aligned} \right.$$

$$(267) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma x_{i+\frac{1}{2}} &= \Sigma x_{i-\frac{1}{2}} + x_i \\ \Sigma x_{i+1} \frac{1}{2} &= \Sigma x_{i-\frac{1}{2}} + x_i + x_{i+1} \\ \Sigma^2 x_{i+1} &= \Sigma^2 x_{i+1} = \Sigma^2 x_i + \Sigma x_{i+\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma^2 x_{i+1} = \Sigma^2 x_{i-1} + 2\Sigma x_{i-\frac{1}{2}} + x_i \\ &= 2\Sigma^2 x_i - \Sigma^2 x_{i-1} + x_i, \text{ etc.} \end{aligned} \right.$$

Em cada coluna de somas, um valor inicial é assumido, ou arbitrariamente ou satisfazendo condições iniciais nas integrais de x .

Como fórmula fundamental consideraremos a de Newton*

$$(268) \quad x_{i+n} = x_i + n\delta x_{i+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + N_2 \delta^2 x_{i+1} + N_3 \delta^3 x_{i+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + N_4 \delta^4 x_{i+2} + \dots$$

onde

$$(269) \quad \left\{ \begin{aligned} N_2 &= \frac{n(n+1)}{2!} & N_4 &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}, \\ N_3 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \end{aligned} \right.$$

* Encontramos a dedução desta fórmula em, por exemplo, Numerical Mathematical Analysis, J.B. Scarborough, the Johns Hopkins Press, 1966 pág. 56-59.

mas suas diferenças posteriores ou anteriores são substituídas, em suas várias transformações, por diferenças mais aproximadamente centrais, de tal maneira que a interpolação no intervalo $-1 \leq n \leq +1$ dependerá de fato do valor da função tanto antes quanto após o instante t . Temos, também que

$$(270) \quad n = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} = \frac{t-t_i}{w},$$

definido como o fator de interpolação**, Utilizaremos também como básicas as conhecidas fórmulas de Stirling

$$(271) \quad x_{i+n} = x_i + n\delta x_i + \frac{n^2}{2!} \delta^2 x_i + \frac{n^3-n}{3!} \delta^3 x_i + \frac{n^4-n^2}{4!} \delta^4 x_i + \\ + \frac{n^5-5n^3+4n}{5!} \delta^5 x_i + \frac{n^6-5n^4+4n^2}{6!} \delta^6 x_i + \dots$$

e a de Bessel

$$(272) \quad x_{i+n} = x_{i+\frac{1}{2}+n\delta x_{i+\frac{1}{2}}} + 2B_2 \delta^2 x_{i+\frac{1}{2}} + B_3 \delta^3 x_{i+\frac{1}{2}} + 2B_4 \delta^4 x_{i+\frac{1}{2}} + \dots$$

onde

$$(273) \quad 2\delta^2 x_{i+\frac{1}{2}} = \delta^2 x_i + \delta^2 x_{i+1} \quad 2\delta^4 x_{i+\frac{1}{2}} = \delta^4 x_i + \delta^4 x_{i+1}$$

$$(274) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2B_2 = G_2 = \frac{n(-1)}{2!} \quad B_3 = G_3 - \frac{1}{2} G_2 = \frac{n(n-1)(n-\frac{1}{2})}{3!} \\ 2B_4 = G_4 \\ = \frac{n}{4!} (n^2-1)(n-2) \end{array} \right.$$

Já que de (270) obtemos

$$(275) \quad t-t_i = wn, \quad dt = wdn, \quad d\tau = k_* dt = wk_* dn$$

podemos escrever

$$(276) \quad \dot{x} = \frac{1}{h} \frac{dx}{dn} \quad \ddot{x} = \frac{1}{h} \frac{d\dot{x}}{dn} = \frac{1}{h^2} \frac{d^2x}{dn^2},$$

onde, para $h = 1$, temos

$$(277) \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_n = \frac{dx}{dn} = w \frac{dx}{dt} = wk_* \frac{dx}{d\tau} \\ \ddot{x} = \ddot{x}_n = \frac{d^2x}{dn^2} = w^2 \frac{d^2x}{dt^2} = w^2 k_*^2 (m_1 + m_2) \frac{d^2x}{d\tau^2} \end{cases}$$

Assim, o fator h passa a ser o intervalo tabular (de integração) expresso em termos da unidade adotada para a variável independente nas derivadas, isto é, em função de n .

Portanto, a partir da fórmula de Stirling obtemos, derivando sucessivamente,

$$(278) \quad h\dot{x}_{i+n} = \delta x_i + n\delta^2 x_i + \frac{3n^2-1}{3!} \delta^3 x_i + \frac{4n^3-2n}{4!} \delta^4 x_i + \\ + \frac{5n^4-15n^2+4}{5!} \delta^5 x_i + \frac{6n^5-20n^3+8n}{6!} \delta^6 x_i + \dots$$

$$(279) \quad h^2\ddot{x}_{i+n} = \delta^2 x_i + n\delta^3 x_i + \frac{3 \cdot 4n^2-2}{4!} \delta^4 x_i + \frac{4 \cdot 5n^3-30n}{5!} \delta^5 x_i + \\ + \frac{5 \cdot 6n^4-60n^2+8}{6!} \delta^6 x_i + \dots$$

Agora, efetuando integrações sucessivas das eqs., (276) (notando que desta vez as integrais, por simplicidade, não foram colocadas na forma análoga às eqs.(261) e (262)), vem

$$(280) \quad \dot{x}_{i+n} = \dot{x}_i + h \int_0^n \ddot{x} dn$$

$$(281) \quad x_{i+n} = x_i + nh\dot{x}_i + h^2 \int_0^n \ddot{x} dn^2$$

A seguir, consideremos a fórmula de Stirling (271) aplicada à função \ddot{x}_{i+n} , a qual denotaremos de maneira geral por \ddot{x} . Integrando-a sucessivamente duas vezes, resulta em sua forma mais simples, quando $n = 1$ e portanto $t = t_{i+1}$.

$$(282) \quad \int_0^{\pm 1} \ddot{x} dn^2 = \frac{1}{2} \ddot{x}_i \pm \frac{1}{2} \delta \ddot{x}_i + \frac{1}{24} \delta^2 \ddot{x}_i \mp \frac{7}{360} \delta^3 \ddot{x}_i - \frac{1}{480} \delta^4 \ddot{x}_i \pm \frac{37}{10080} \delta^2 \ddot{x}_i + \dots$$

Utilizando então a relação

$$(283) \quad \delta^2 x_i = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = h^2 \left[\int_0^1 \ddot{x} dn^2 + \int_0^{-1} \ddot{x} dn^2 \right],$$

e a equação anterior, obtemos a chamada fórmula de integração da diferença segunda central:

$$(284) \quad \delta x_i = h^2 \left[\ddot{x}_i + \frac{1}{12} \delta^2 \ddot{x}_i - \frac{1}{240} \delta^4 \ddot{x}_i + \frac{31}{60480} \delta^6 \ddot{x}_i - \frac{389}{3628800} \delta^8 \ddot{x}_i + \dots \right]$$

Na integração passo a passo as diferenças centrais necessárias para integração dupla por meio da eq. acima, não são diretamente calculadas por nós, pelo menos no ciclo previsor. Elas devem ser obtidas da última diagonal precisa das diferenças, a qual ascende do valor \ddot{x}_i conhecido, e devem ser estimadas, mais simplesmente, por

$$(285) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^6 \ddot{x}_{i-2} = \delta^6 \ddot{x}_{i-3} + \dots \quad \delta^5 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} + \delta^5 \ddot{x}_{i-2} \frac{1}{2} + \delta^6 \ddot{x}_{i-2} \\ \delta^4 \ddot{x}_{i-1} = \delta^4 \ddot{x}_{i-2} + \delta^5 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} \quad \delta^3 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} = \delta^3 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} + \delta^4 \ddot{x}_{i-1} \\ \delta^2 \ddot{x}_i = \delta^2 \ddot{x}_{i-1} + \delta^3 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$(286) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^6 \ddot{x}_{i-1} = \delta^6 \ddot{x}_{i-2} + \dots \quad \delta^5 \ddot{x}_i \frac{1}{2} = \delta^5 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} + \delta^6 \ddot{x}_{i-1} \\ \delta^4 \ddot{x}_i = \delta^4 \ddot{x}_{i-1} + \delta^5 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

Normalmente $\delta^6 \ddot{x}_i$ e as diferenças de ordem superior são desprezadas.

Agora, aplicando o operador " Σ^2 " à equação (284), obtemos a denominada fórmula da soma segunda ou de "Gauss-Jackson",

$$(287) \quad x_{i+1} = h^2 \left[\Sigma^2 \ddot{x}_{i+1} + \frac{1}{12} \ddot{x}_{i+1} - \frac{1}{240} \delta^2 \ddot{x}_{i+1} + \frac{31}{60480} \delta^2 \ddot{x}_{i+1} - \frac{289}{3628800} \delta^6 \ddot{x}_{i+1} + \dots \right]$$

onde convenientemente usamos o subíndice $i+1$ em lugar de i , de tal maneira que na integração passo a passo a última diagonal precisa, vinculada a \ddot{x}_i , será a mesma que aquela de (281). Isto é feito com o propósito de comparação, e as estimativas das diferenças necessárias concordarão com as de (285) e (286):

$$(288) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^5 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} = \delta^5 \ddot{x}_{i-2} \frac{1}{2} + \dots \quad \delta^4 \ddot{x}_{i-1} = \delta^4 \ddot{x}_{i-2} + \delta^5 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} \\ \delta^3 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} = \delta^3 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} + \delta^4 \ddot{x}_{i-1} \quad \delta^2 \ddot{x}_i = \delta^2 \ddot{x}_{i-1} + \delta^3 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} \\ \delta \ddot{x}_{i+1} \frac{1}{2} = \delta \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} + \delta^2 \ddot{x}_i \quad \ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + \delta \ddot{x}_{i+1} \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$(289) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^5 \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} = \delta^2 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} + \dots, \quad \delta^4 \ddot{x}_i = \delta^4 \ddot{x}_{i-1} + \delta^5 \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} \\ \delta^3 \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}} = \delta^3 \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} + \delta^4 \ddot{x}_i \quad \delta^2 \ddot{x}_{i+1} = \delta^2 \ddot{x}_{i+1} = \delta^3 \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Um ciclo corretor é desnecessário quando o intervalo do argumento é selecionado corretamente em função do problema a ser analisado e (288) é usada de maneira inversa, para produzir uma nova diagonal precisa.

As fórmulas (288) e (289), quando introduzidas na (287), nos fornece a fórmula da soma segunda "para trás".

$$(290) \quad x_{i+1} = h^2 \left[\Sigma^2 \ddot{x}_{i+1} + \frac{1}{12} \ddot{x}_{i+1} + \frac{1}{12} \delta \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} + \frac{19}{240} \delta^2 \ddot{x}_{i-1} + \frac{18}{240} \delta^3 \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1726}{24192} \delta^4 \ddot{x}_{i-2} + \frac{1650}{24192} \delta^5 \ddot{x}_{i-2} \frac{1}{2} + \dots \right]$$

Entretanto, uma notação alternativa, conforme a da tabela (291), é a que será adotada no programa realizado, devido a esta já se encontrar na chamada fase "half-wit"*, sendo portanto imediata a transformação para uma qualquer "nitwit" (no nosso caso foi utilizada a linguagem Fortran).

* "Quick-wit" é uma formulação matemática bem sofisticada, utilizada por especialistas experientes, para posterior uso em calculadoras.

"Nit-wit" é uma qualquer linguagem empregada em computador ou calculadoras de mesa (por exemplo: Algol, Cobol, etc.).

"Half-wit" é uma formulação em linguagem matemática, mostrando todos os passos e ramificações, como esta o seria em "hit-wit", e com uma notação ajustada a uma "quick-wit", se necessário, de maneira a se aproximar o mais possível de uma "hit-wit".

(t)	(Σ^2)	(Σ)	(x)	(δ)	(δ^2)	(δ^3)	
(291)	t_{i-2}	$\nabla^{-2}x_{i-3}$		x_{i-2}		∇^2x_{i-1}	
			$\nabla^{-1}x_{i-2}$		∇x_{i-1}		∇^3x_i
	t_{i-1}	$\nabla^{-2}x_{i-2}$		x_{i-1}		∇^2x_i	
			$\nabla^{-1}x_{i-1}$		∇x_i		∇^2x_{i+1}
	t_i	$\nabla^{-2}x_{i-1}$		x_i		∇^2x_{i+1}	
			$\nabla^{-1}x_i$		∇x_{i+1}		∇^3x_{i+2}
	t_{i+1}	$\nabla^{-2}x_i$		x_{i+1}		∇^2x_{i+2}	
			$\nabla^{-1}x_{i+1}$		∇x_{i+2}		
	t_{i+2}	$\nabla^{-2}x_{i+1}$		x_{i+2}			
			$\nabla^{-1}x_{i+2}$				
	t_{i+3}	$\nabla^{-2}x_{i+2}$					

Comparando as tabelas apresentadas, observamos que o subíndice i é comum a todos os elementos de uma mesma diagonal ascendente, e assim

$$(292) \quad \delta^k x_j = \nabla^k x_j + \frac{1}{2}k.$$

As equações (285) podem ser substituídas, no ciclo previsor, por

$$(293) \quad \begin{cases} \delta^2 \ddot{x}_i = \delta^2 \ddot{x}_{i-1} + \delta^3 \ddot{x}_{i-1} \frac{1}{2} + \delta^4 \ddot{x}_{i-2} + \delta^5 \ddot{x}_{i-2} \frac{1}{2} + \delta^6 \ddot{x}_{i-3} + \dots \\ \delta^4 \ddot{x}_i = \delta^4 \ddot{x}_{i-2} + 2\delta^5 \ddot{x}_{i-2} \frac{1}{2} + 3\delta^6 \ddot{x}_{i-3} + \dots \end{cases}$$

Estas equações, por seu turno, devem ser substituídas na fórmula (284) para obtermos a fórmula da diferença segunda "para trás"

$$(294) \quad \delta^2 x_i = h^2 \left[x_i + \frac{1}{12} \delta^2 x_{i-1} + \frac{1}{12} \delta^3 x_{i-1} \frac{1}{2} + \frac{19}{240} \delta^4 x_{i-2} + \right. \\ \left. + \frac{18}{240} \delta^5 x_{i-2} \frac{1}{2} + \frac{1726}{24192} \delta^6 x_{i-3} + \dots \right]$$

Obtemos assim, compatibilizando as notações da soma segunda com a tabela (291),

$$(295) \quad x_{i+1} = h^2 (\nabla^{-2} \ddot{x}_i + \frac{1}{12} \ddot{x}_{i+1} + \frac{1}{240} \nabla^2 \ddot{x}_{i+2} + \dots),$$

onde

$$(296) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla^3 \ddot{x}_{i+1} = \nabla^3 \ddot{x}_i + \nabla^3 \ddot{x}_i + \dots & \nabla^3 \ddot{x}_{i+2} = \nabla^3 \ddot{x}_{i+1} + \dots \\ \nabla^2 \ddot{x}_{i+1} = \nabla^2 \ddot{x}_i + \nabla^2 \ddot{x}_{i+1} & \nabla^2 \ddot{x}_{i+2} = \nabla^3 \ddot{x}_{i+1} + \nabla^3 \ddot{x}_{i+2} \\ \ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + \nabla \ddot{x}_i + \nabla^2 \ddot{x}_{i+1} & \end{array} \right.$$

Finalmente, em uma notação "nit wit", temos

$$(297) \quad x_{i+1} = h^2 \left\{ \nabla^{-2} \ddot{x}_i + \frac{1}{12} \ddot{x}_i + \frac{1}{12} \nabla \ddot{x}_i + \frac{19}{240} \nabla^2 \ddot{x}_i + \frac{18}{240} \nabla^3 \ddot{x}_i + \right. \\ \left. + \frac{1726}{24192} \nabla^4 \ddot{x}_i + \dots \right\}$$

IV.3 - Esquema computacional

O método de Cowell para perturbações especiais, de acordo com a ampla interpretação que mostramos anteriormente, envolve integração passo a passo de um conjunto de componentes da aceleração total, sem o uso de uma órbita de referência, e por qualquer uma das apropriadas fórmulas de integração numérica. Usualmente, entretanto, ele é associado com a integração passo a passo das componentes retangulares da posição, x , y e z , provenientes das acelerações \ddot{x} , \ddot{y} e \ddot{z} pela fórmula da soma segunda.

Nestes termos adotaremos o seguinte roteiro de cálculo:

1) Como dados auxiliares para o programa de cálculo serão utilizadas as seguintes constantes e definições:

$$\begin{aligned}
 (298) \quad m_1 &= 1/1047,35 = 0,00095479 = m = \text{massa de Júpiter,} \\
 m_2 &= 0 \text{ (efetivamente)} = \text{massa de cometa ou asteroide,} \\
 m_3 &= 1,00045596 = \text{massa (do Sol + Mercúrio +} \\
 &\quad \text{+ Vênus + Terra + Marte).}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (299) \quad \dot{x} &= \dot{x}_n = \frac{dx}{dn} = w \frac{dx}{dt} = wk \ m_1 + m_2 \frac{dx}{d\tau} \\
 \ddot{x} &= \ddot{x}_n = \frac{d^2x}{dn^2} = w^2 \frac{d^2x}{dt^2} = w^2 k^2 (m_1 + m_2) \frac{d^2x}{d\tau^2}
 \end{aligned}$$

onde , como será especificado a seguir,

$$(300) \quad w = 10 \text{ (dias)}$$

$$\begin{aligned}
 (301) \quad \mu &= w^2 k^2 m_1 = 0,0000282534 \\
 \mu_3 &= w^2 k^2 m_3 = 0,029591397
 \end{aligned}$$

O passo tabular w teve o seu valor de 10 dias adotado a partir de um exame dos textos clássicos sobre cálculo de órbitas, das efemérides russas para os pequenos planetas e dos telegramas da I.A.U. Circunstâncias específicas, como aproximações planetárias e passagens por perifoco, podem sugerir variações neste número, mas apenas a comparação de dados computados com os observados é que nos conduzirão a tais decisões.

2) Tomaremos como ponto de partida a equação de movimento (258) e a tabela (302) abaixo:

(t)	(Σ^2)	(Σ)	(\ddot{x})	(δ)	(δ^2)	(δ^3)	(δ^4)
t_{i-2}	$\nabla^{-2}\ddot{x}_{i-3}$		\ddot{x}_{i-2}		$\nabla^2\ddot{x}_{i-1}$		$\nabla^4\ddot{x}_i$
		$\nabla^{-1}\ddot{x}_{i-2}$		$\nabla\ddot{x}_{i-1}$		$\nabla^3\ddot{x}_i$	
t_{i-1}	$\nabla^{-2}\ddot{x}_{i-2}$		\ddot{x}_{i-1}		$\nabla^2\ddot{x}_i$		
		$\nabla^{-1}\ddot{x}_{i-1}$		$\nabla\ddot{x}_i$			
t_i	$\nabla^{-2}\ddot{x}_{i-1}$		\ddot{x}_i		$\nabla^2\ddot{x}_{i+1}$		
		$\nabla^{-1}\ddot{x}_i$		$\nabla\ddot{x}_{i+1}$			
t_{i+1}	$\nabla^{-2}\ddot{x}_i$		\ddot{x}_{i+1}		$\nabla^2\ddot{x}_{i+2}$		

de tal maneira que a eq. (287), adotando $h = 1$, passa a ser

$$(303) \quad x_{i+1} = \nabla^{-2}\ddot{x}_i + \frac{1}{12}\ddot{x}_{i+2} - \frac{1}{240}\nabla^2\ddot{x}_{i+2} + \dots,$$

para serem utilizadas, supomos, conhecidas as somas e diferenças até aqui na diagonal i .

3) Para determinar quantas diferenças devemos avaliar, consideraremos duas condições:

- a) a última diferença efetuada deve ser suficientemente pequena em seu valor máximo, a fim de surja um padrão de erro;
- b) a última diferença a ser levada em conta na estimativa de \ddot{x}_{i+1} deve ser com um erro pequeno em comparação com uma certa fração de seu coeficiente em (303). Por exemplo, se \ddot{x} exige dois dígitos significativos a menos do que x , então a fração referida anteriormente é $1/100$.

4) Considerando a última das equações (296) e levando em conta (303), obtemos finalmente, já em forma vetorial,

$$(304) \quad \vec{r}_{i+1} = \nabla^{-2\ddot{x}} \vec{r}_i + \frac{1}{12} (\ddot{\vec{r}}_i + \nabla \ddot{\vec{r}}_i + \nabla^2 \ddot{\vec{r}}_i) - \frac{1}{240} \nabla^2 \ddot{\vec{r}}_{i+2} + \dots$$

Frequentemente, o último termo na relação acima e os que se lhe seguem, são desprezíveis, quando então a eq. (304) assume a forma utilizada na geração de novos valores da tabela (302) com a ordem que se segue

$$\begin{aligned} & \nabla^{-2} \ddot{x}_i \\ & + \frac{1}{12} \ddot{x}_i \\ & + \frac{1}{12} \nabla \ddot{x}_i \\ & + \frac{1}{12} \nabla^2 \ddot{x}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_{i+1} \\ & X \\ & x_{i+1} + X = \xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla^{-2} \ddot{y}_i \\ & + \frac{1}{12} \ddot{y}_i \\ & + \frac{1}{12} \nabla \ddot{y}_i \\ & + \frac{1}{12} \nabla^2 \ddot{y}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y_{i+1} \\ & Y \\ & y_{i+1} + Y = \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla^{-2} \ddot{z}_i \\ & + \frac{1}{12} \ddot{z}_i \\ & + \frac{1}{12} \nabla \ddot{z}_i \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{12} \nabla^2 \ddot{z}_{i-2}$$

$$\begin{aligned} & z_{i+1} \\ & Z \\ & z_{i+1} + Z = \zeta \end{aligned}$$

$$r_{i+1}^2$$

$$r_{i+1}$$

$$1/r_{i+1}^3$$

$$1/R^3$$

$$\rho^2$$

$$\rho$$

$$1/\rho^3$$

$$\mu/r_{i+1}^3$$

$$\mu_3/R^3$$

$$\mu_3/\rho^3$$

$$\ddot{x}$$

$$\ddot{y}$$

$$\ddot{z}$$

BIBLIOGRAFIA

A - Astrodinâmica, Determinação de Órbitas: Trabalhos gerais

1. BAKER (R.M.L.Jr.) *Astrodynamics Applications and Advanced Topics*, Academic Press, 1967.
1.1.2; 1.3; 1.3.3; 1.4.1; 1.4.2; 3,1; 3.4.1; 3.4.2; 3.4.3;
Apêndice B, Glossário.
2. DUBYAGO (A.D.) *Determination of Orbits*. New York, The Macmillan Company, 1961.
1, 25, 70, 71, 72, 73.
3. HERGET (P.) *The Computation of orbits*. Privately Printed Cincinnati, 1948.
1, 3, 4, 6, 7.
4. HERRICK (S.) *Orbit Determination, Space Navigation, Celestial Mechanics Volume 1*, Van Nostrand Reinhold Company, 1971.
1F, 2C, 3A; 4b, C, G; 7A, B, M, N, P, U; 9A, B, C, F, G;
10A, B, C, F, 11A, B, C, D; 12A, B, C, D, E.
5. ————. *Orbit Correction, Perturbation Theory, Integration*.
Volumes, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
14B, D, F, G, Appendix 4B, C, D, E, F, G, J, L, V.
6. WILLIAMS (K.P.) *The Calculation of the orbits of Asteroids and Comets*. The Principia Press, Inc., 1934.
1.5, 6, 7; VI.1, 2; VII.

B - Mecânica Celeste: Trabalhos gerais

1. BROUWER (D.) Clemence (G.M.) *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, 1966.
IV.4, 6, 10, 12; V.1, 2, 3.
2. CHEBOTAREV (G.A.) *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, American Elsevier, 1967.
6.2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6.
3. KOVALESKY (J.) *Introduction à la Mécanique Céleste*, Libraire Armand Colin, 1963.
90, 91, 92, 93, 94, 95.
4. KURTH (R.) *Introduction to the Mechanics of the Solar System*. Pergamon Press, 1959.
1.6.1., 6.2; 2.4.1, 5.
5. LAPLACE (P.S.) *Mémoire Sur la Determination des Orbites des Comètes*. Mém. Acad. Roy. Sci, Paris, 1780, 1784; *Oeuvres*, 10, 93-146, Paris, Gauthier-Villars, 1844.

6. McCUSKEY (S.W.) Introduction to Celestial Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, 1963, 4.2.
7. MOULTON (F.R.) An Introduction to Celestial Mechanics, The Macmillan Company, 1958. VI.108, 109, 110, 111, 113, 116, 118, 119, 120, 126, 130.
8. OPPOLZER(T.R.Von.) 1870, 1880, 1882. Lebrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. Leipzig, Engelmann. French Transl., 1 (1882 ed) by E. Pasquier. Paris, Gauthier - Villars, 1886.

C - Artigos

1. BOWER (E.C.) 1922. On Aberration and Parallax in orbit Computation. Astron. J., 34, 29-30.
2. ————. 1932, Some formulas and tables relating to orbit computation and numeric integration. Lick Obs. Bull. 445, 16, 34-35.
3. BROWN (E.W.) Shook (C.A.) 1933. Planetary theory. Cambridge U. Press. Callis (J.) 1848; A method of calculating the orbit of a planet or comet from three observed places. Mem. Roy. Astron. Soc. 17, 59-77.
4. CHARLIER (C.V.L.) 1919-11, On multiple solutions in the determination of orbits from three observations. Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 71-120, 454.
5. COMRIE (L.J.) 1922. Note on Dr. Adams's paper and the computation of ephemerides. J. British Astron. Assn. 32, 234-41.
6. COWELL (P.H.) Crommelin (A.C.D.) 1910 b. Investigation of the Motion of Halley's comet from 1759 to 1910. Appendix to Greenwich observations for 1909.
7. HERGET (P.) 1935. The determination of orbits. Astron. J., 44, 153-61.
8. HERRICK (S.) Step-by-step integration of $\dot{x} = f(x,y,z,t)$ without a "Corrector". Math. Tables, Aids. Comp. 5, 61-67; Ucla Astron. Papers, 2, n° 1, 1-4.
9. ————. 1965, Universal Variables. Astron. J., 70, n° 4, 309-15; 70, n° 6, 447.
10. JACKSON (J.) 1924. Note on the numerical integration of $d^2x/dt^2 = f(x,t)$. Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 84, 602-606.
11. LEUSCHNER (A.O.) 1902. A short method of determining orbits from three observations, Lick Obs. Publ., 7, 1-20.
12. ————. 1913. Short methods of determining orbits.

12. (cont.) second and third papers, Lick Obs, Publ. 7, 217-376, 455-83,
13. POINCARÉ (H.) 1906, Sur la détermination des orbites par la Méthode de Laplace, Bull Astron., 23, 161-87.