UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

OBSERVATÓRIO DO VALONGO

DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS ESTELARES NO PLANO GALÁTICO

Projeto de Luiz Augusto da Silva Reis

Orientado pelo Professor José Augusto Buarque de Nazareth

Rio de Janeiro

Março, 1978

Gostaria de expressar meus agradecimentos ao Professor JOSÉ AUGUSTO BUARQUE DE NAZARETH, cuja orientação foi fundamental à realização deste trabalho. Ressalto, da mesma forma, as sugestões recebidas do Professor JOSÉ ADOLFO SNAJDAUF CAMPOS, bem como o apoio das colegas ENCARNACIÓN AMELIA M. GONZALEZ e VÉRA LUCIA ROMANO.

Luiz Augusto da Silva Reis

pág.

I - INTRODUÇÃO 4

II - CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS 5

II.1 Características das órbitas galáticas 6

II.1.1 Movimento epicíclico no plano galático 6

II.1.1.1 Componente Radial 6

II.1.1.2 Componente Tangencial 10

II.1.2 Fórmula geral para determinação da órbita 13

III - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL 20

III.1 Determinação das constantes de integração 20

III.2 Métodos de Cálculo 25

III.2.1 Método Adams-Krilov de resolução numérica de equações diferenciais ordinárias 25

III.2.1.1 Teoria do Método 25

III.2.2 Método de Simpson de integração numérica 36

III.2.2.1 Teoria do Método 36

III.3 Cálculo da órbita 39

III.3.1 Aplicação do Método Adams-Krilov 39

III.3.1.1 Desenvolvimento do Método 39

III.3.1.2 Exemplos numéricos 45

III.3.1.2.1 Tabelas de Valores 47

III.4 Cálculo da órbita para algumas estrelas selecionadas 66

III.4.1 Gráficos 68

IV - CONCLUSÕES 79

V - PROGRAMAS 82

V.1 Programa do Método Adams-Krilov 82

V.2 Programa do Método de Simpson 97

VI - APÊNDICE 100

VI.1 Fórmula corretora do Método Adams-Krilov 100

VI.2 Valores próximos a $r_{extremo}$ 102

VII - BIBLIOGRAFIA 103

1 - INTRODUÇÃO

O problema do cálculo de órbitas em Astronomia Estelar possui diferenças profundas e implicações diversas daquele da Mecânica Celeste, não obstante o tratamento matemático similar.

Os parâmetros das órbitas estelares, ao serem correlacionados com propriedades físicas das estrelas, contribuem para a diferenciação dos vários tipos de populações estelares na Galáxia (ver ref. 1 pág 107). Órbitas galáticas, quando calculadas regressivamente no tempo, permitem a conexão entre as velocidades atuais da estrela na vizinhança solar e aquelas quando de sua formação (ver ref. 2 pág. 71).

O estudo das órbitas estelares, tratadas individualmente, demandará que se arbitre constantes (elementos da órbita), bem como as deduções das integrais de energia e de área, que definirão a forma e o tamanho das órbitas. Consideradas em conjunto, sua distribuição no sistema estelar será dada pela distribuição de um sistema de elementos de órbita e pela função distribuição das integrais de energia e de área. Os movimentos das estrelas nas partes exteriores do sistema estelar, obedecendo a um campo de força quase newtoniano, permitem prever uma distribuição de órbitas determinada segundo a distribuição dos elementos keplerianos das órbitas elípticas. Nessas condições, observa-se a possibilidade de, através da análise das órbitas estelares e de sua distribuição, obtermos mais uma via de aproximação ao estudo do sistema estelar (ver ref. 10 pág 281).

Órbitas no plano galático poderão ser um ponto de partida para a determinação de órbitas reais, tridimensionais, mormente de estrelas com pequenas componentes de velocidade ao longo do eixo Z (ref. 1 pág. 109).

Este projeto, entretanto, não discutirá as questões acima, que podem ser encontradas nas referências citadas. Faremos o cálculo de órbitas no plano galático para algumas estrelas de alta e baixa velocidades, restringindo-nos a aspectos puramente mecânicos.

Procurar-se-á quanto ao método de cálculo, seguir a orientação contida na ref. 1. Serao refeitos os cálculos para a órbita da estrela utilizada como exemplo nesta referência, e os resultados submetidos a um cotejo e a um ajuste segundo os valores tabelados.

O trabalho reveste-se de características de resolução de um único problema, sem o exame de suas consequências gerais na Astronomia Galática. Experimentalmente, o projeto enriquece-se com a escolha de estrelas visíveis na nossa latitude, tornando possíveis investigações no problema da distribuição das órbitas estelares no Hemisfério Sul.

II - CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Ao estudarmos os movimentos das estrelas na Galáxia, deparâmo-nos com sérias limitações observacionais. Os movimentos estelares tornam-se acessíveis somente na vizinhança solar. São melhor descritos em termos de um deslocamento médio, considerando-se a vizinhança como um todo, que define referências locais.

Distinguimos três classes de movimentos:

- 1ª - o movimento médio (fisicamente o mais significativo) de todas as estrelas no elemento de volume considerado;

- 2ª - a velocidade do Sol relativa a este movimento médio;

- 3ª - as velocidades das estrelas relativamente ao movimento médio.

Um ponto possuindo este movimento médio define o Padrão Local de Repouso (P.L.R.). Denominamos, também, "movimento solar" ao movimento do Sol relativamente ao PLR. Para, enfim, deduzir-se as velocidades das outras estrelas relativamente ao PLR, dever-se-á corrigir seus movimentos observados para os efeitos do movimento solar.

Dinamicamente, define-se o PLR, por um ponto na vizinhança solar que se move em uma órbita perfeitamente circular em torno do Centro Galático (C.G.) com, exatamente, a velocidade circular orbital que seria acarretada pelas forças gravitacionais que atuam neste ponto.

Embora qualquer sistema de coordenadas se preste para estas definições, o mais adequado é o da Fig. 1.

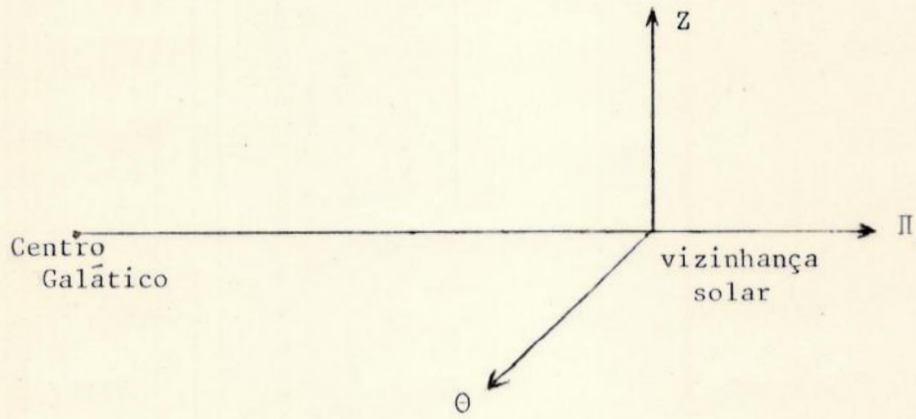


Figura 1

Z é a componente de velocidade perpendicular ao plano galático, Π é a componente de velocidade dirigida radialmente no sentido anti-centro e Θ , a velocidade tangencial, é a componente na direção da rotação galática. Em termos de coordenadas galáticas esféricas, Π é positivo na direção ($\ell^{II} = 180^o$, $b^{II} = 0^o$), Θ posi-

tivo na direção ($\ell^{II} = 90^o$, $b^{II} = 0^o$) e Z positivo na direção $b^{II} = 90^o$.

II.1 - CARACTERÍSTICAS DAS ÓRBITAS GALÁTICAS DAS ESTRELAS

Proporemos um estudo não estatístico do movimento das estrelas sob um potencial galático.

Trataremos, inicialmente, do movimento epicíclico, característico de estrelas de baixa velocidade, cujas órbitas se desviam pouco de uma configuração circular.

II.1.1 - MOVIMENTO EPICÍCLICO NO PLANO GALÁTICO

II.1.1.1 - COMPONENTE RADIAL

Suponhamos uma estrela, próxima ao Sol, com $r = R_o$ (ver Fig. 2), possuindo uma velocidade de rotação $\Theta_o \equiv \Theta_{circ}(R_o)$ na direção tangencial e com pequena velocidade de perturbação Π_o na direção radial. Calculemos a órbita que a estrela descreverá num sistema de coordenadas em rotação, centrado em R_o, e movendo-se com velocidade tangencial Θ_o em torno do Centro Galático. Neste sistema, o Padrão Local de Repouso permanecerá fixo.

Sabendo que

$$\ddot{r} - r\dot{\psi}^2 = F_r \quad , \qquad (1)$$

onde ψ é o ângulo que um observador no C.G. mede para os deslocamentos do raio vetor r, e F_r a componente radial da força por unidade de massa que atua em um ponto r qualquer, e observando, mais ainda, que em um ponto arbitrário temos

$$\Theta = r\dot{\psi}^2 \quad ,$$

e

$$F_r = - \frac{\Theta^2_{circ}}{r} \quad ,$$

vem

$$\ddot{r} = \frac{\Theta^2}{r} - \frac{\Theta^2_{circ}}{r} \quad .$$

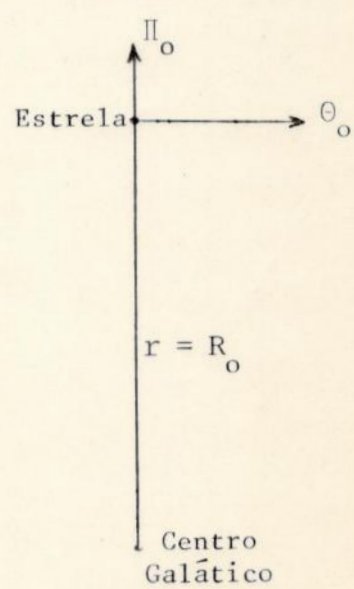


Figura 2

Seja agora

$$r = R_o + \varepsilon \quad ,$$

onde ε é a variação em r devido à velocidade de perturbação Π_o. Assim,

$$\ddot{r} = \ddot{\varepsilon} \ . \qquad (3)$$

Pela conservação do momento angular,

$$\Theta_r = \Theta_o R_o \ , \qquad (4)$$

donde

$$\frac{\Theta^2}{r} = \frac{\Theta_o^2 R_o^2}{r^3} = \frac{\Theta_o^2 R_o^2}{R_o^3 (1 + \varepsilon/R_o)^3} = \frac{\Theta_o^2}{R_o} \left[\frac{1}{(1 + \varepsilon/R_o)^3} \right] ,$$

ou

$$\frac{\Theta^2}{r} \simeq \frac{\Theta_o^2}{R_o} \left(1 - \frac{3\,\varepsilon}{R_o} \right) , \qquad (5)$$

abandonando-se os termos de ordem superior.

Desenvolvendo-se $\Theta_{circ}(r)$ na vizinhança do ponto $r=R_o$, isto é, na vizinhança solar, em série de Taylor, virá

$$\Theta_{circ}(R_o + \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \Theta_{circ}^{(i)}(R_o)(R_o + \varepsilon - R_o)^i$$

$$\simeq \Theta_{circ}(R_o) + \frac{d\Theta_{circ}(R_o)}{dr} \varepsilon$$

$$= \Theta_o - (A + B)\,\varepsilon \ .$$

Desta forma,

$$\frac{\Theta_{circ}^2}{r} \simeq \frac{\Theta_o^2 - 2\Theta_o (A + B)\varepsilon + \ldots}{R_o (1 + \varepsilon/R_o)} \ .$$

Separando-se os termos desta fração, e procedendo de modo idêntico quando da obtenção da equação (5), teremos:

$$\frac{\Theta_o^2 - 2\Theta_o (A + B)\varepsilon + \ldots}{R_o (1 + \varepsilon/R_o)} \simeq \frac{\Theta_o^2}{R_o} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_o} \right) - \frac{2\Theta_o}{R_o} (A + B)\,\varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_o} \right)$$

$$\frac{\Theta_o^2 - 2\Theta_o(A+B)\varepsilon + \ldots}{R_o\,(1+\varepsilon/R_o)} \simeq \frac{\Theta_o^2}{R_o} - \frac{\Theta_o^2\,\varepsilon/R_o}{R_o} - \frac{2\Theta_o}{R_o}(A+B)\,\varepsilon - \cancel{\frac{2\Theta_o}{R_o}(A+B)\,\frac{\varepsilon^2}{R_o}}$$

$$\simeq \frac{\Theta_o^2}{R_o} - \frac{\Theta_o^2}{R_o^2}\,\varepsilon - \frac{2\Theta_o}{R_o}(A+B)\varepsilon$$

Considerando-se as equações (2) e (3), e subtraindo-se $\frac{\Theta^2}{r}$ e $\frac{\Theta^2_{circ}}{r}$ desta última expressão,

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{\Theta_o^2}{R_o} - 3\varepsilon\,\frac{\Theta_o^2}{R_o^2} + \frac{2\Theta_o}{R_o}(A+B)\varepsilon + \frac{\Theta_o^2}{R_o^2}\,\varepsilon - \frac{\Theta_o^2}{R_o}$$

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{2\Theta_o}{R_o}\left[(A+B) - \frac{\Theta_o}{R_o}\right]\varepsilon$$

$$\ddot{\varepsilon} = 2(A+B)\left[(A+B) - (A-B)\right]\varepsilon$$

$$\ddot{\varepsilon} = -\left[-4B\,(A-B)\right]\varepsilon$$

$$\ddot{\varepsilon} = -\chi^2\varepsilon \quad , \qquad (6)$$

sendo

$$\chi = 2\sqrt{-B(A-B)} \quad . \qquad (7)$$

A solução da equação (6) será, portanto,

$$\varepsilon = G\ \text{sen}\,\chi\ (t - t_o).$$

Uma vez que $\varepsilon = 0$, quando $t = 0$, façamos $t_o = 0$ e obteremos:

$$\varepsilon = G\ \text{sen}\,\chi\, t.$$

Deste modo,

$$\Pi = \dot{\varepsilon} = G\,\chi\ \cos\chi\, t.$$

Entretanto, $\dot{\varepsilon} = \Pi_o$ quando $t = 0$, donde $G = \frac{\Pi_o}{\chi}$. Assim,

$$\varepsilon = \frac{\Pi_o}{\chi}\ \text{sen}\,\chi\, t \qquad (8)$$

ou

$$\Pi = \Pi_o\ \cos\chi\, t. \qquad (9)$$

A equação (8) mostra que a estrela oscila harmonicamente em torno de R_o na direção radial. Por exemplo, se $\chi = 31,6$ km/s, e se $\Pi_o = 30$ km/s, a amplitude da oscilação será

$$\frac{\Pi_o}{\chi} \simeq 1 \text{ kpc}.$$

Este valor de Π_o é típico da maioria das estrelas na vizinhança solar. As estrelas próximas ao Sol, durante sua revolução em torno do Centro Galático, se concentram numa região que se estende de $[R_o - 1 \text{ kpc}]$ a $[R_o + 1 \text{ kpc}]$. Podem, então, ser consideradas como a população deste volume do espaço.

O período de oscilação será:

$$P_{osc} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2\pi \times 0,973 \times 10^9}{31,6},$$

sendo $\left[0,973 \times 10^9\right] = \text{kpc/km/s}$.

$$P_{osc} = 1,93 \times 10^8 \text{ anos}.$$

Sabendo-se que o período de revolução em torno do Centro Galático é:

$$P_{rev} = \frac{2\pi R_o}{\Theta_o} = \frac{2\pi \times 0,973 \times 10^9}{A - B}$$

$$P_{rev} = 2,45 \times 10^8 \text{ anos},$$

teremos

$$\frac{P_{osc}}{P_{rev}} = 0,79.$$

Desta forma, uma estrela completa 1 1/4 oscilações radiais num só período de revolução em torno do Centro Galático. As órbitas não são fechadas, tendo em vista não serem iguais os períodos de revolução e de oscilação. Não podemos, portanto, descrevê-las como simples elipses e não cabe a aplicação da lei do inverso do quadrado da distância. Em geral,

$$\frac{P_{osc}}{P_{rev}} = \frac{\Theta_o/R_o}{\chi} = \frac{A - B}{2\sqrt{-B(A - B)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A - B}{-B}}.$$

II.1.1.2 - COMPONENTE TANGENCIAL

Consideremos o movimento da estrela na direção tangencial.

Sendo

$$r^2\dot{\psi} = C = R_o\Theta_o \quad ,$$

de tal maneira que

$$\dot{\psi} = \frac{R_o\Theta_o}{r^2} \quad ,$$

e como

$$r^2 \simeq R_o^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{R_o}\right)^2 ,$$

teremos:

$$\dot{\psi} \simeq \frac{R_o\Theta_o}{R_o^2}\left(1 - \frac{2\varepsilon}{R_o}\right) . \qquad (10)$$

Recordando-se a equação (8) e substituindo-se em (10),

$$\dot{\psi} = \frac{\Theta_o}{R_o}\left(1 - \frac{2\Pi_o}{\chi R_o} \text{ sen } \chi t\right). \qquad (11)$$

Subtraindo-se Θ_o/R_o (termo uniforme de revolução galática) da equação (11), encontraremos que a diferença em velocidade angular entre a estrela e o Padrão Local de Repouso é

$$\Delta\dot{\psi} = -\frac{2\,\Pi_o\,\Theta_o}{\chi R_o^2} \text{ sen } \chi t \quad . \qquad (12)$$

Convertendo $\Delta\dot{\psi}$ em velocidade tangencial linear, encontraremos a seguinte expressão para os termos de primeira ordem:

$$\Delta\Theta = r\Delta\dot{\psi} = (R_o + \varepsilon)\Delta\dot{\psi} \simeq R_o\Delta\dot{\psi} \; .$$

Então,

$$\Delta\Theta = -\frac{2\Pi_o}{\chi_o}\,\frac{\Theta_o}{R_o} \text{ sen } \chi t. \qquad (13)$$

Integrando-se em relação ao tempo, teremos o deslocamento tangencial η relativo ao PLR:

$$\eta = \frac{2\Pi_o}{\chi^2} \frac{\Theta_o}{R_o} \cos \chi t \ . \qquad (14)$$

Com a equação (7) e com a relação

$$\frac{\Theta_o}{R_o} = A - B \ ,$$

obtemos,

$$\frac{2\Theta_o}{\chi^2 R_o} = \frac{2\ (A - B)}{-4B\ (A - B)} = \frac{1}{-2B} \ .$$

Portanto,

$$\eta = \frac{\Pi_o}{-2B} \cos \chi t \ . \qquad (15)$$

As equações (8) e (15) mostram que a órbita de uma estrela num sistema em rotação é uma elipse, com semi-eixo menor igual a Π_o/χ na direção radial, e semi-eixo maior igual a $\Pi_o/(-2B)$ na direção tangencial (ver Fig. 3). Este movimento relativo ao PLR é chamado de "epiciclo".

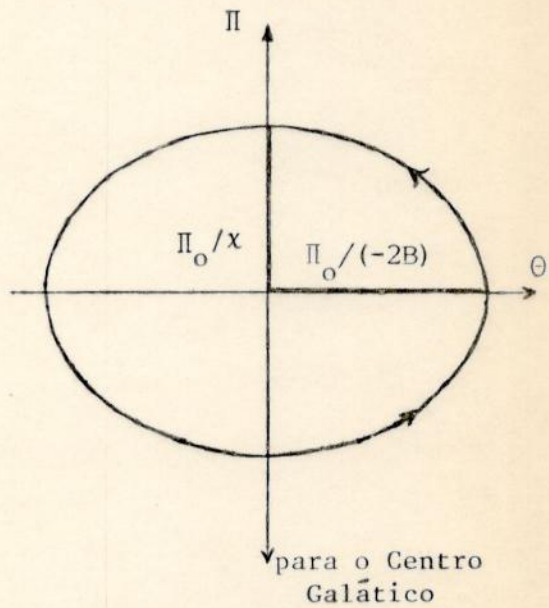


Figura 3

A razão entre as amplitudes tangencial e radial será:

$$\frac{\text{amplitude tangencial}}{\text{amplitude radial}} = \frac{\Pi_o}{-2B} \ \frac{2\sqrt{-B(A - B)}}{\Pi_o} = \sqrt{\frac{A - B}{-B}} \qquad (16)$$

$$\sqrt{\frac{A - B}{-B}} = 1{,}58 \ .$$

Vemos, assim, que o deslocamento na direção tangencial é muito maior do que na radial. O sentido do movimento epicíclico é retrógrado (anti-horário), enquanto que o mesmo em torno do Centro Galático é horário. Uma oscilação em ε e η sendo completada num só período, tem, como decorrência, que as velocida-

des médias correspondentes são proporcionais às amplitudes das oscilações nestas direções:

$$\frac{\langle |\Pi| \rangle}{\langle |\Theta - \Theta_o| \rangle} = \sqrt{\frac{-B}{A-B}} = 0{,}63 \ . \qquad (17)$$

Do ponto de vista de estudos estatísticos, contudo, não medimos

$$\langle |\Theta - \Theta_o| \rangle = \langle |\Theta - \Theta_{circ}(R_o)| \rangle$$

para uma só estrela em seu ciclo. Medimos, então,

$$\langle |\Theta - \Theta_{circ}(r)| \rangle$$

para um grupo de estrelas com diferentes condições iniciais e parâmetros de órbita, ao passarem próximas ao Sol. Assim,

$$\Theta(r) - \Theta_{circ}(r) = \frac{\Theta_o R_o}{r} - \Theta_{circ}(r)$$

$$\simeq \frac{\Theta_o R_o}{R_o}\left(1 - \frac{\varepsilon}{R_o}\right) - \Theta_o - \left(\frac{d\Theta_{circ}}{dr}\right)_{R_o} \varepsilon$$

$$= \left[-\frac{\Theta_o}{R_o} - \left(\frac{d\Theta_{circ}}{dr}\right)_{R_o}\right]\varepsilon$$

$$= (-A + B + A + B)\varepsilon$$

$$= 2\,B\,\varepsilon$$

$$= \frac{2\,B\,\Pi_o}{\chi}\,\mathrm{sen}\,\chi t \qquad (18)$$

Das equações (9) e (18),

$$\frac{\langle |\Pi| \rangle}{\langle |\Theta_o - \Theta_{circ}(r)| \rangle} = \frac{\Pi_o \langle \cos \chi t \rangle}{-2B\,\Pi_o \langle \mathrm{sen}\,\chi t \rangle / \chi} = \sqrt{\frac{A-B}{-B}} \qquad (19)$$

resultado que obteríamos se fizéssemos a razão entre as dispersões:

$$\sqrt{\frac{A-B}{-B}} = \frac{\langle \Pi^2 \rangle^{1/2}}{\langle v^2 \rangle^{1/2}}$$

Na dedução da equação (19) consideramos

$$\langle \cos \chi t \rangle = \langle \operatorname{sen} \chi t \rangle ,$$

levando em conta que as fases das estrelas nos seus movimentos epicíclicos são aleatórias.

O quadro que dispomos das estrelas que seguem órbitas epicíclicas está consistente com a representação estatística geral. A principal limitação da Teoria Epicíclica provém do fato de que trabalhamos somente com termos de primeira ordem na expansão das Leis de Força. Decorre, por isto a existência de algumas discrepâncias entre os movimentos verdadeiros e aqueles previstos pela teoria, à medida que a amplitude do epiciclo se torna maior. Entretanto, podemos novamente nos aproximar dos movimentos reais ao fazermos integração numérica das órbitas.

II.1.2 - FÓRMULA GERAL PARA A DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS NO PLANO GALÁTICO

A Teoria Epicíclica não mais é adequada quando o movimento se afasta apreciavelmente da configuração circular. A partir da Lei de Força no plano, F_r, suposta gravitacional, deduziremos relações mais exatas.

Consideremos desprezíveis as irregularidades na distribuição das estrelas e de toda a matéria na Galáxia, e substituiremos a distribuição real das massas por uma regular e contínua, simétrica em relação ao plano galático e possuindo simetria rotacional em torno do eixo galático, que supomos perpendicular ao plano e passando pelo C.G. Da mesma forma, desprezamos o efeito das colisões entre as estrelas, isto é, supomos que a órbita de qualquer estrela seja determinada com precisão suficiente numa distribuição de massa como definida acima, o que significa que a perturbação causada pela passagem próxima de outras estrelas é considerada desprezível.

Adotaremos as coordenadas cilíndricas descritas na Figura 4:
o eixo galático é o eixo Z, apontando para o Polo Norte Galático; r é a distância de P até o eixo Z, sendo $|Z|$ a distância até o plano galático. Supondo-se o Sol situado no plano, traçamos um eixo que parte do C.G. em direção à posição do Sol, em dado

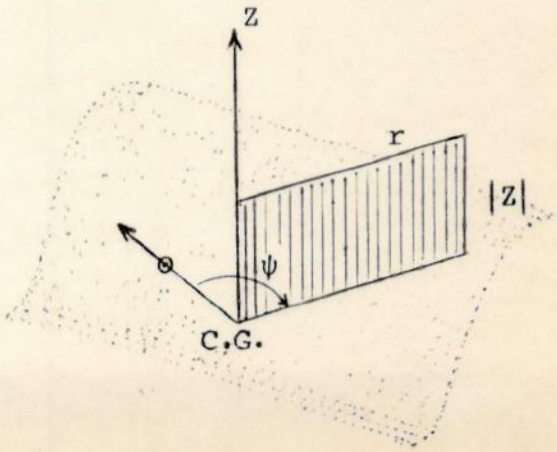


Figura 4

momento. A terceira coordenada cilíndrica será o ângulo azimutal que parte deste eixo e é contado no sentido da rotação galática, ou seja, no sentido horário, visto por um observador situado na face norte do plano galático.

Provaremos que se alguma estrela num momento inicial qualquer estiver no plano galático e, neste momento, não possuir componente de velocidade ao longo do eixo Z, permanecerá no plano, ou seja, descreverá uma órbita plana.

As equações do movimento, em três dimensões, são:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\psi}^2 = F_r \,, \\ &\frac{d}{dt}(r^2\dot{\psi}) = 0 \,, \\ &\ddot{Z} = F_z \,. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

F_r e F_z são as componentes da força por unidade de massa ao longo dos eixos r e Z, respectivamente. Se, de acordo com o que supomos anteriormente, a distribuição das massas for simétrica em relação ao plano galático Z = 0, esta componente F_z desaparecerá. Podemos notar, também, que em nosso sistema estelar esta força estará dirigida para o plano.

Uma estrela que, em algum momento inicial ($t = t_o$), esteja no plano galático, de tal forma que sua coordenada Z seja igual a zero, $Z(t_o) = 0$, terá $\dot{Z} = C$, onde C é uma constante de integração. $\dot{Z}$ é, pois, a componente da velocidade da estrela ao longo do eixo Z, perpendicular ao plano galático. Se, agora, não somente $Z(t_o) = 0$, mas também $\dot{Z}(t_o) = 0$, então, necessariamente, C = 0, e Z permanecerá, portanto, igual a zero. Isto significa que a estrela descreverá uma órbita no plano galático. Para esta estrela, as equações diferenciais (20) reduzir-se-ão a:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\psi}^2 = F_r \\ \text{e} \quad &\frac{d}{dt}(r^2\dot{\psi}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Obviamente, não haverá muitas estrelas com componente de velocidade, ao longo de Z, exatamente igual a zero. Entretanto, é possível admitir-se que, para estrelas com baixas velocidades Z, a consequente órbita no plano, supondo-se nulo o deslocamento em Z, representará uma razoável aproximação da órbita real. Com esta hipótese, poderemos iniciar um processo iterativo, conduzindo à determinação da verdadeira órbita espacial da estrela.

Para as órbitas planas, teremos, primeiramente,

$$r^2\dot{\psi} = h \ , \qquad (22)$$

sendo esta, de fato, a integral de área existente no problema de dois corpos. h é uma constante de integração. Pode ser determinada pelas condições iniciais — posição e velocidade da estrela no momento $t = t_0$.

Existe também uma segunda integral, a integral de energia, cuja expressão deduziremos. Recordando-se, inicialmente, que,

$$\ddot{r} - r\dot{\psi}^2 = F_r \ ,$$

e que

$$\dot{\psi} = \frac{h}{r^2} \ ,$$

vem

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} + F_r \ . \qquad (23)$$

No caso do movimento no plano, $Z \equiv 0$, e o potencial Φ será uma função somente de r,

$$\Phi = \Phi(r),$$

uma vez que estamos admitindo simetria rotacional. Então,

$$F_r = \frac{d\Phi}{dr} \ . \qquad (24)$$

Multiplicando-se a equação (23) por $dr = \dot{r}\,dt$, e utilizando-se (24), teremos

$$\dot{r}\,\ddot{r}\,dt = (h^2/r^3)\,dr + F_r\,dr$$

$$= (h^2/r^3)\,dr + d\Phi \ . \qquad (25)$$

A expressão (25), ao ser integrada, dará:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{r^2}\right) + \Phi + H \ , \qquad (26)$$

sendo

$$\Phi = \Phi(r) = \int F_r\,dr + C.$$

H é uma nova constante de integração e, similarmente à h, pode ser determinada a partir das condições iniciais.

A equação (26) será reescrita na forma:

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) = \Phi(r) + H \qquad (27)$$

e, substituindo-se h por seu valor dado por (22), teremos

$$\left[\frac{1}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2)\right] - \Phi(r) = H. \qquad (28)$$

A expressão entre colchetes é a energia cinética da estrela, enquanto que $-\Phi(r)$ é sua energia potencial. Pela equação (28), a soma das energias cinética e potencial é constante, e esta é a expressão da integral de energia.

Através das equações (22) e (28), chegaremos à equação diferencial da órbita.

De (27), temos:

$$\dot{r}^2 = \frac{2(\Phi + H)\,r^2 - h^2}{r^2}\,, \qquad (29)$$

ou

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left[2(\Phi + H)r^2 - h^2\right]^{1/2}, \qquad (30)$$

e de (22) vemos que

$$\frac{1}{\dot{\psi}} = \frac{dt}{d\psi} = \frac{r^2}{h}\,. \qquad (31)$$

Combinando-se estas duas últimas equações, obteremos:

$$\frac{dr}{d\psi} = r\left[\frac{2}{h^2}\,(\Phi + H)\,r^2 - 1\right]^{1/2}. \qquad (32)$$

Esta é a equação diferencial da órbita. O sinal da raiz quadrada dependerá das condições iniciais.

A resolução desta equação requer a determinação do campo de força que age sobre a estrela, e, em consequência, do potencial $\Phi(r)$. A lei de força F_r, ao invés de ser uma lei geral, decorre de propriedades específicas do sistema estelar.

Consideraremos a expressão para o potencial formulada por Parenago, cujos resultados numéricos não divergem muito daqueles obtidos por Strömgren e Contopoulos (1965) a partir de uma fórmula adequada para a região situada entre 4 e 13 kpc na nossa Galáxia. A curva de rotação $\Theta(r)$, obtida por estes dois últimos autores, através de uma combinação de resultados de medições óticas e rádio, aproxima-se do modelo de potencial de Schmidt, que se baseou nos recentes valores de Θ_o e R_o (Θ_o = 250 km/s e R_o = 10 kpc), na dedução da lei de força e do potencial. As constantes de Oort adotadas serão A = + 15 km/s.kpc, B = - 10 km/s.kpc.

A expressão proposta por Parenago, para o campo de velocidade, do qual a lei de força se deriva, pode ser descrita por:

$$\Theta = \omega r = - k_1 r / (1 + k_2 r^2) \tag{33}$$

válida para um largo espectro de distâncias ao centro galático.

Vemos, assim, que

$$F_r = - k_1^2 \; r / (1 + k_2 r^2)^2 \tag{34}$$

e integrando-se (34) ao longo de r, vem

$$\Phi(r) = \Phi_o / (1 + k_2 r^2) \; , \tag{35}$$

sendo

$$\Phi_o = k_1^2 / (2k_2) \; .$$

De (33) temos

$$\omega = - k_1 / (1 + k_2 r^2) \; , \tag{36}$$

donde

$$k_1 = - (1 + k_2 r^2) \omega \; .$$

No caso em que $r = R_o$, e utilizando-se a relação

$$\omega(R_o) = B - A,$$

teremos

$$k_1 = - (1 + k_2 R_o^2) \; (B - A) \; . \tag{37}$$

Derivando-se a equação (33) em relação a r,

$$\frac{d\Theta}{dr} = -k_1 \frac{1 - k_2 r^2}{(1 + k_2 r^2)^2} = \frac{d}{dr} (\omega r) \; . \tag{38}$$

Seja agora, $r = R_o$, e, da Teoria da Rotação Galática,

$$\left.\begin{aligned} R_o \frac{d\omega}{dR_o} &= 2A \; , \\ \omega_o &= B - A \; . \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Substituindo-se as relações (39) em (38), teremos

$$B + A = - k_1 \frac{1 - k_2 R_o^2}{(1 + k_2 R_o^2)^2} \; , \tag{40}$$

e esta última em (37),

$$B + A = \frac{1 - k_2 R_o^2}{1 + k_2 R_o^2} (B - A) , \qquad (41)$$

então,

$$(B + A) (1 + k_2 R_o^2) = (1 - k_2 R_o^2) (B - A),$$

donde

$$Bk_2 R_o^2 = - A,$$

ou

$$k_2 = - \frac{1}{R_o^2} \frac{A}{B} . \qquad (42)$$

Os valores de A e B — constantes de Oort — e $R_o = 10$kpc, ao serem substituídos, dar-nos-ão

$$k_2 = 0,015 \text{ kpc}^{-2},$$

$$k_1 = 62,5 \text{ km/s.kpc} \quad \text{e}$$

$$\Theta = \frac{62,5\ r}{1 + 0,015r^2} . \qquad (43)$$

Esta fórmula aproximada, porém útil em termos analíticos, prevê valores de Θ que diferem pouco dos obtidos por Strömgren e Contopoulos. A tabela 1 pertence ao trabalho destes autores e apresenta para cada r, de 5 kpc a 14 kpc, os correspondentes valores da velocidade Θ e da força F .

r	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Θ	225	238	247	252	253	250	244	235	228	224
F	10110	9410	8720	7960	7120	6250	5390	4620	3990	3570

TABELA 1

Verificamos, então, pela tabela 2, que os valores da velocidade calculados pela fórmula (43) não diferem mais que 7 km/s daqueles da tabela 1, e que para a força F_r , as diferenças dificilmente excedem o limite ± 300. (As unidades de r e Θ são, respectivamente, kpc e km/s, e a força é dada em $(km/s)^2$ por kpc).

r	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
θ	227	243	252	255	253	250	244	237	229	222
F	10330	9882	9083	8134	7165	6250	5442	4694	4063	3522

TABELA 2

A expressão para o potencial, pela fórmula (35), será:

$$\Phi(r) = \frac{868 \times 10^4}{66,67 + r^2} \quad . \tag{44}$$

Substituindo-se (44) na equação diferencial da órbita, equação (32), teremos:

$$\frac{dr}{d\psi} = r\left[\frac{2}{h^2}\left(\frac{868 \times 10^4}{66,67 + r^2} + H\right) r^2 - 1\right]^{1/2} \quad . \tag{45}$$

A equação (45) é a equação diferencial da órbita de uma estrela, movendo-se no plano galático sob a influência da força gravitacional que decorre de um potencial do tipo (44).

A forma da órbita, ou seja, o conhecimento exato da função $r = r(\psi)$ dependerá dos valores numéricos das constantes de integração h e H. Estas, por sua vez, serão determinadas pelas condições iniciais, que são as coordenadas do ponto no espaço em que a estrela está situada em um dado instante e sua velocidade neste ponto. Em outras palavras, se conhecemos a posição da estrela no momento atual e, também, sua velocidade, ao integrarmos a equação (45) determinaremos sua órbita.

III - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

III.1 - DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO

As constantes h e H serão determinadas pelas condições iniciais. Recordando-se as equações (22) e (28),

$$r^2\dot{\psi} = h,$$

$$H = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2) - \Phi(r) \quad ,$$

referir-nos-emos ao instante inicial $t = t_o$, que identificaremos com a data atual. Assim,

$$h = R_o^2\dot{\psi}_o \ ,$$

$$H = \frac{1}{2}\left[\dot{R}_o^2 + R_o^2\dot{\psi}_o^2\right] - \Phi_o \quad . \qquad (46)$$

Este instante inicial, apesar de impreciso, não induzirá a erros que possam prejudicar os resultados, em virtude de que trabalhamos com intervalos de tempo muito longos.

Utilizaremos o sistema de eixos U, V, W, tendo como origem a posição (fixa) do Sol na presente data, observando que adotamos as notaçoes Π, Θ e Z para as componentes das velocidades da estrela ao longo destes eixos. Porém, com a finalidade de facilitar a manipulação do catálogo de W. Gliese, denotaremos por U, V,W estas respectivas componentes. Ambos os sistemas de referência, o cilíndrico, assim como este agora introduzido (ver Fig. 5), estão fixos no espaço. Entretanto, as velocidades U, V, W, obtidas no catálogo, referem-se a um sistema de eixos movendo-se com o Sol. Deveremos, assim, corrigir os valores das componentes de velocidade, retirados do catálogo, para os efeitos do movimento solar relativos ao sistema em repouso.

As constantes h e H são dadas por expressões envolvendo as coordenadas R_o e ψ_o. A posição da estrela deverá ser, portanto, identificada com a posição do Sol.

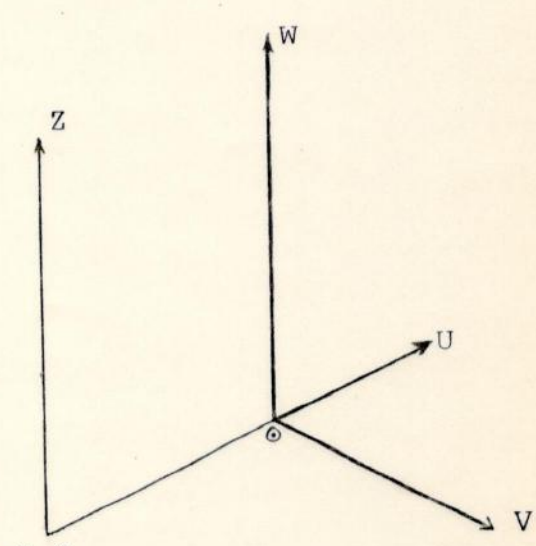


Figura 5

Deste modo, os valores iniciais das coordenadas serão

$$R_o = r(t_o) = 10 \text{ kpc} ;$$

$$\psi_o = \psi(t_o) = 0 \text{ radiano.}$$

A redução dos valores das velocidades para o sistema de referência fixo consiste em considerar, inicialmente, um sistema de eixos análogo ao sistema U, V, W, tendo, porém, como origem uma estrela fictícia que descreve uma órbita circular no plano galático, situada à mesma distância do Sol ao centro galático. A posição desta estrela coincidirá com a posição do Sol no instante $t = t_o$. Este sistema define o Padrão Local de Repouso, da maneira já explicada anteriormente. As componentes da velocidade solar em relação ao P.L.R. são

$$U_{\odot PLR} = - 9 \text{ km/s},$$

$$V_{\odot PLR} = + 12 \text{ km/s} \quad \text{e}$$

$$W_{\odot PLR} = + 7 \text{ km/s (ver ref. 5).}$$

Suponhamos uma estrela com componentes de velocidade U, V, W. Suas componentes de velocidade relativas ao Padrão Local de Repouso serão

$$U_{*PLR} = U + U_{\odot PLR} = U - 9 \text{ km/s},$$

$$V_{*PLR} = V + V_{\odot PLR} = V + 12 \text{ km/s} ,$$

$$W_{*PLR} = W + W_{\odot PLR} = W + 7 \text{ km/s} .$$

A próxima etapa refere-se ao movimento do P.L.R. relativamente ao referencial fixo. O valor absoluto da velocidade da estrela fictícia, de acordo com a teoria da rotação galática é

$$R_o W_o = R_o (B - A) = 250 \text{ km/s},$$

o sinal negativo sendo omitido, em vista da orientação do sistema de coordenadas utilizado. No momento $t = t_o$ a posição da estrela fictícia coincide com a posição do Sol. As componentes da velocidade da estrela, finalmente corrigidas, relativas ao sistema fixo de eixos U, V, W tornar-se-ão.

$$U_* = U_{*PLR} ,$$

$$V_* = V_{*PLR} + 250 \text{ km/s} \quad \text{e}$$

$$W_* = W_{*PLR} .$$

A componente W_* não será levada em conta em virtude das considerações no equacionamento do problema, quando supomos $\dot{Z}(t_o) = 0$.

As equações (46), poderão, agora, ser reescritas. Verificando-se que

$$R_o\dot{\psi}_o = V_* \quad ,$$

que

$$h = R_o^2\dot{\psi}_o = R_oV_* \quad , \tag{47}$$

e ainda que

$$\dot{R}_o = U_* \quad ,$$

teremos

$$H = \frac{1}{2}\,(U_*^2 + V_*^2) - \Phi(R_o) \quad . \tag{48}$$

Recordando-se a fórmula para o potencial, teremos com $r = R_o$,

$$\Phi(R_o) = \frac{868 \times 10^4}{(66{,}67 + R_o^2)} \quad .$$

H, então, será dada por

$$H = \frac{1}{2}\,(U_*^2 + V_*^2) - \frac{868 \times 10^4}{(66{,}67 + R_o^2)} \quad . \tag{49}$$

Substituindo-se este novo valor de H, bem como a expressão (47) na equação diferencial (45), $\frac{dr}{d\psi}$ assumirá a forma geral:

$$\frac{dr}{d\psi} = r\left[\frac{2r^2}{R_o^2V_*^2}\left\{\frac{868 \times 10^4}{66{,}67 + r^2} + \frac{U_*^2 + V_*^2}{2} - \frac{868 \times 10^4}{66{,}67 + R_o^2}\right\} - 1\right]^{1/2} . \tag{50}$$

Obteremos os valores extremos, $r_{máx}$ e $r_{mín}$, ao igualarmos $\frac{dr}{d\psi}$ a zero.

$$\frac{dr}{d\psi} = r\left[\frac{2r^2}{R_o^2\,V_*^2}\left\{\frac{868 \times 10^4}{66{,}67+r^2} + \frac{U_*^2+V_*^2}{2} - \frac{868 \times 10^4}{66{,}67+R_o^2}\right\} - 1\right]^{1/2} = 0 \quad .$$

Sejam

$$\rho \equiv \frac{868 \times 10^4}{66{,}67 + R_o^2} \quad ,$$

$$\lambda \equiv \frac{1}{2}\,(U_*^2 + V_*^2) \quad ,$$

$$\phi \equiv \frac{2}{R_o^2V_*^2} \quad \text{e}$$

$$\mu \equiv 868 \times 10^4 \quad .$$

Então,

$$\phi r^2 \left\{ \frac{\mu}{66,67 + r^2} + \lambda - \rho \right\} - 1 = 0 ,$$

$$\frac{\phi \mu r^2}{66,67 + r^2} + \lambda \phi r^2 - \rho \phi r^2 - 1 = 0 ,$$

$$\phi\mu r^2 + 66,67\lambda\phi r^2 + \lambda\phi r^4 - 66,67 \rho\phi r^2 - \rho\phi r^4 - 66,67 - r^2 = 0 ,$$

$$r^4(\lambda\phi - \rho\phi) + r^2(66,67\lambda\phi - 66,67\rho\phi + \phi\mu - 1) - 66,67 = 0.$$

E, agora,

$$b \equiv (66,67\lambda\phi - 66,67\rho\phi + \phi\mu - 1) ,$$

$$a \equiv \lambda\phi - \rho\phi ,$$

$$b^2 - 4ac = b^2 + 4(\lambda\phi - \rho\phi).66,67$$

$$r = \left[\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]^{1/2} .$$

As distâncias galatocêntricas $\underline{r}$ da estrela oscilam entre os valores extremos $r_{máx}$ e $r_{mín}$, deduzidos acima. O ponto de maior aproximação do centro galático ($r = r_{mín}$) é o pericentro ou o ponto perigalático da órbita da estrela; quando $\underline{r}$ atinge seu valor máximo, de maior afastamento, temos o apocentro ou o ponto apogalático. O pericentro e o apocentro são pontos críticos, nos quais $\frac{dr}{d\psi} = 0$. A partir deles, o sinal do radicando da equação diferencial se altera, já que a equação diferencial (50) é definida no intervalo $\left[r_{mín} , r_{máx} \right]$, sendo, incompatíveis, valores maiores que $r_{máx}$ e menores que $r_{mín}$. Assim, o prosseguimento do cálculo de $\underline{r}$ sem que se defina uma nova equação diferencial é desprovido de sentido. O arco entre o apocentro e o pericentro seguinte será definido por uma equação diferencial similar à equaçao (50), porém, com o sinal contrário para a raiz quadrada. Por esta razão, o arco da órbita entre dois pericentros consecutivos será simétrico em relação ao raio $r = r_{máx}$. Desta maneira, alternadamente, poderemos construir toda a órbita, em sentido progressivo ou regressivo, conforme o interesse do problema (no final do item III.3.1.1 detalharemos este aspecto).

Obteremos o intervalo de tempo ΔT correspondente ao arco da órbita, do pericentro ao apocentro, ao calcularmos a inte-

gral

$$h\ \Delta T = \int_{\psi_{mín}}^{\psi_{máx}} r^2 d\psi \ ,$$

decorrente da equação (22),

$$r^2\psi = h.$$

Sendo as unidades de distância e de velocidade, respectivamente, 1 kpc e 1 km/s; a unidade de tempo será dada por:

$$1\ \text{kpc}/(1\ \text{km/s}) = 0{,}973 \times 10^9 \text{ anos.}$$

III.2 - MÉTODOS DE CÁLCULO

III.2.1 - MÉTODO ADAMS-KRILOV DE RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

III.2.1.1 - TEORIA DO MÉTODO

Integrar numericamente uma equação diferencial significa construir uma tabela contendo os valores da função desconhecida e os correspondentes valores da variável independente. O intervalo entre dois valores consecutivos do argumento é o "passo" da integração. Obviamente, a solução deverá satisfazer as condições iniciais.

Em geral, uma solução numérica não dá qualquer informação quanto ao comportamento da função além dos limites da tabela de integração. Esta desvantagem é, entretanto, algumas vezes compensada pelo fato de que podemos encontrar uma solução numérica sob condições mais amplas do que quando buscamos uma solução analítica. Além disso, no caso em pauta, e devido à simetria aludida, podemos, de fato, ter uma idéia bastante precisa de toda a órbita, mesmo quando integramos somente entre os limites pericentro-apocentro.

Dentre os vários métodos existentes para se resolver equações diferenciais, utilizaremos o método descoberto por J. C. Adams, mais tarde aperfeiçoado por A. N. Krilov, e muito adequado para computadores de menor porte.

Consideremos a equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{d\chi}{dt} = F(\chi, t) , \qquad (51)$$

onde χ e t são a solução de (51) e seu argumento, respectivamente, e $F(\chi, t)$ é uma função de ambos.

Sejam as condições iniciais $t = t_o$, $\chi = \chi_o$;

$$\left(\frac{d\chi}{dt}\right)_o = F(\chi_o, t_o) .$$

Queremos calcular uma série de valores $\chi = \chi_k$ que correspondam a valores equidistantes t_k da variável independente. Denotaremos por w o passo de integração e façamos

$$w \frac{d\chi}{dt} = w \; F\left[\chi(t), t\right] = f(t) \qquad (52)$$

Teremos então,

$$w\left(\frac{dx}{dt}\right)_k = w\,F\,(x_k,\ t_k) = f(t_k) = f_k\ , \qquad (53)$$

$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$

A Tabela 3 é um esboço de como se ordenarão os valores obtidos. A primeira e a segunda coluna contêm, respectivamente, os valores consecutivos do argumento e da função x. Na coluna Δ estão os incrementos a serem algebricamente somados a cada um dos valores de x imediatamente precedentes, a fim de serem obtidos os correspondentes subsequentes valores de x. Em outras palavras,

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta_{k+1/2}\ , \\ \text{ou} \qquad & \\ \Delta_{k+1/2} &= x_{k+1} - x_k\ , \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

relações que definem o incremento $\Delta_{k+1/2}$.

A quarta coluna contem os valores de $f_k = w\,F(x_k,\ t_k)$; à direita desta coluna estão as diferenças de primeira, segunda, terceira, etc, ordens para f_k. São definidas da mesma maneira que os incrementos. Por exemplo,

$$f^1_{k-1/2} = f_k - f_{k-1}\ ;$$

$$f^2_{k-1} = f^1_{k-1/2} - f^1_{k-3/2}\ ;$$

$$f^3_{k-3/2} = f^2_{k-1} - f^2_{k-2}\ ; \quad \ldots$$

Os índices k, k-1/2, k-1, ou k-1, k-3/2, k-2, etc, referem-se às posições intercaladas quando da ordenação dos valores na tabela 3.

Teoricamente, x_{k+1} é o valor de x para $t = t_{k+1} = t_k + w$. Desenvolvendo-se $x(t)$ nas vizinhanças do ponto $t = t_k$, temos que:

$$x_{k+1} = x\,(t_k + w)$$

$$x_{k+1} = x\,(t_k) + \frac{w}{1!}\left(\frac{dx}{dt}\right)_k + \left(\frac{w^2}{2!}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_k + \frac{w^3}{3!}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_k + \ldots \qquad (55)$$

Em virtude de (53) e (54),

$$\Delta_{k+1/2} = f_k + \frac{w}{2}\left(\frac{df}{dt}\right)_k + \frac{w^2}{6}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_k + \ldots \qquad (56)$$

O método de extrapolação de Adams, ou fórmula previsora, que utilizaremos, deriva-se da fórmula de Newton para interpolação regressiva. Faremos uma breve demonstração da fórmula de Newton, iniciando, porém, pela fórmula de interpolação progressiva. Chegaremos, ao final da demonstração, a relações que, conjugadas às equações (55) e (56), dar-nos-ão a fórmula previsora.

Consideremos, como já vimos, $f = f(t)$ uma função do argumento t, e seja:

$$t_{k+1} - t_k = w ,$$

$$f_k = f(t_k) ,$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots$

Após calcularmos as diferenças de f, conforme já explicado, coloquêmo-las na tabela 4, que é descendente, contrariamente à tabela 3, ascendente.

t	x	Δ	f	f^1	f^2	f^3	
...	...	...	...	...	...	...	
t_{k-3}	x_{k-3}		f_{k-3}		f^2_{k-3}		
		$\Delta_{k-5/2}$		$f^1_{k-5/2}$		$f^3_{k-5/2}$	
t_{k-2}	x_{k-2}		f_{k-2}		f^2_{k-2}		...
		$\Delta_{k-3/2}$		$f^1_{k-3/2}$		$f^3_{k-3/2}$	
t_{k-1}	x_{k-1}		f_{k-1}		f^2_{k-1}		
		$\Delta_{k-1/2}$		$f^1_{k-1/2}$		...	
t_k	x_k		f_k				

TABELA 3

Temos, então,

$$f_o = f_o ,$$

$$f_1 = f_o + f^1_{1/2} ,$$

$$f_2 = f_1 + f^1_{3/2} = (f_o + f^1_{1/2}) + (f^1_{1/2} + f^2_1) ,$$

$$= f_o + 2 f^1_{1/2} + f^2_1 .$$

Da mesma maneira, encontramos:

$$f_3 = f_o + 3 f^1_{1/2} + 3 f^2_1 + f^3_{3/2}$$

e assim, sucessivamente.

Os coeficientes nas expressões para valores sucessivos da função são os coeficientes binomiais. De uma forma geral,

$$f_n = f\ (t_o + nw) = f_o + \binom{n}{1} f^1_{1/2} + \binom{n}{2} f^2_1 + \binom{n}{3} f^3_{3/2} + \ldots \quad (57)$$

Sabendo-se que $t = t_o + zw$,

onde

$$z = \frac{(t - t_o)}{w} ,$$

temos

$$f(t_o + zw) = f_o + \frac{z}{1!} f^1_{1/2} + \frac{z(z-1)}{2!} f^2_1 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!} f^3_{3/2} + \ldots (58)$$

Se, ao invés de t_o, iniciarmos por algum valor arbitrário do argumento, t_k, teremos:

$$f_{k+n} = f(t_k + nw) = f_k + \binom{n}{1} f^1_{k+1/2} + \binom{n}{2} f^2_{k+1} + \binom{n}{3} f^3_{k+3/2} + \ldots \quad (59)$$

e,

$$f\ (t_k + zw) = f_k + \frac{z}{1!} f^1_{k+1/2} + \frac{z(z-1)}{2!} f^2_{k+1} + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!} f^3_{k+3/2} + \ldots \quad (60)$$

onde

$$\binom{n}{p} \equiv \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

A equação (60) é a fórmula de Newton para interpolação progressiva. A demonstração das equações (59) e (60) foi, no entanto, feita a partir de uma tabela descendente — diferenças dispostas numa diagonal descendente.

A fórmula de Newton, da qual deriva a fórmula previsora de Adams, é a da interpolação regressiva, que pressupõe uma tabela ascendente.

Na tabela 5 foram traçadas ambas as diagonais, descendente e ascendente.

t	f	f^1	f^2	f^3	...
t_o	f_o				
		$f^1_{1/2}$			
t_1	f_1		f^2_1		
		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$	
t_2	f_2		f^2_2		...
		$f^1_{5/2}$		$f^3_{5/2}$	
t_3	f_3		...		

TABELA 4

t	f	f^1	f^2	f^3	...
					...
				$f^3_{k-3/2}$	
...	...		f^2_{k-1}		
		$f^1_{k-1/2}$		$f^3_{k-1/2}$	
t_k	f_k		f^2_k		
		$f^1_{k+1/2}$		$f^3_{k+1/2}$	
			f^2_{k+1}		
				$f^3_{k+3/2}$	

TABELA 5

Precisamos, pois, transformar as equações (59) e (60) em uma outra que expresse as diferenças dispostas em diagonal ascendente. Suponhamos, então, que as diferenças de primeira ordem sejam constantes. Isto significa que as diferenças de segunda e de todas as outras ordens maiores são iguais a zero. A fórmula fica, então,

$$f_{k+n} = f_k + \binom{n}{1} f^1_{k+1/2} = f_k + \frac{n}{1!} f^1_{k-1/2} \quad , \qquad (61)$$

sendo $f^1_{k+1/2} = f^1_{k-1/2} =$ constante.

Consideremos, agora, o caso em que as diferenças de segunda ordem são constantes. Pela equação (59),

$$f_{k+n} = f_k + \binom{n}{1} f^1_{k+1/2} + \binom{n}{2} f^2_{k+1} \, , \qquad (62)$$

e

$$f^2_{k+1} = f^2_k = f^2_{k-1} \, .$$

Além disso, vemos que

$$f^1_{k+1/2} = f^1_{k-1/2} + f^2_k = f^1_{k-1/2} + f^2_{k-1} \, . \qquad (63)$$

A equação (63) poderia ser obtida a partir da equação (61). As diferenças f^2 são as diferenças de primeira ordem de f^1, e, de acordo com nossa suposição, são constantes. Para o valor de n, obviamente, teremos:

$$n = (k + 1/2) - (k - 1/2) = 1.$$

Substituindo-se (63) em (62),

$$f_{k+n} = \binom{n}{1} f^1_{k-1/2} + \binom{n}{1} f^2_{k-1} + \binom{n}{2} f^2_{k-1} \, ,$$

donde

$$f_{k+n} = f_k + \binom{n}{1} f^1_{k-1/2} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] f^2_{k-1}$$

$$= f_k + \frac{n}{1!} f^1_{k-1/2} + \frac{n(n+1)}{2!} f^2_{k-1} \qquad (64)$$

Consideremos, finalmente, o caso em que as diferenças de terceira ordem são constantes. A equação (59) se reduz a:

$$f_{k+n} = f_k + \binom{n}{1} f^1_{k+1/2} + \binom{n}{2} f^2_{k+1} + \binom{n}{3} f^3_{k+3/2} \quad . \qquad (65)$$

Agora,

$$f^3_{k+3/2} = f^3_{k-3/2} \ ,$$

e neste caso, n será igual a (k + 1) - (k - 1) = 2.

Sabendo-se que

$$f^2_{k+1} - f^2_k = f^3_{k+1/2} \ ,$$

$$f^2_{k+1} = f^3_{k+1/2} + f^2_k \ ,$$

$$f^2_k = f^2_{k-1} + f^3_{k-1/2} \ ,$$

ou

$$f^2_{k+1} = f^3_{k+1/2} + f^3_{k-1/2} + f^2_{k-1} \ ,$$

e que

$$f^3_{k+1/2} = f^3_{k-1/2} = f^3_{k-3/2} \ ,$$

temos

$$f^2_{k+1} = f^2_{k-1} + 2\, f^3_{k-3/2} \ . \qquad (66)$$

Sendo, também,

$$f^1_{k+1/2} = f^1_{k-1/2} + f^2_{k-1} + f^3_{k-3/2} \ , \qquad (67)$$

e substituindo os valores de $f^1_{k+1/2}$, f^2_{k+1} e $f^3_{k+3/2}$ na equação (65), teremos:

$$f_{k+n} = f_k + \binom{n}{1}\left[f^1_{k-1/2} + f^2_{k-1} + f^3_{k-3/2}\right] + \binom{n}{2}\left[f^2_{k-1} + 2f^3_{k-3/2}\right] + \binom{n}{3} f^3_{k-3/2}$$

donde

$$f_{k+n} = f_k + \binom{n}{1} f^1_{k-1/2} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] f^2_{k-1} + \left[\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right] f^3_{k-3/2}$$

ou

$$f_{k+n} = f_k + \frac{n}{1!} f^1_{k-1/2} + \frac{n(n+1)}{2!} f^2_{k-1} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} f^3_{k-3/2} \qquad (68)$$

Comparando-se (68), (64) e (61), recolocadas a seguir:

$$f_{k+n} = f_k + \frac{n}{1!} f^1_{k-1/2}$$

$$f_{k+n} = f_k + \frac{n}{1!} f^1_{k-1/2} + \frac{n(n+1)}{2!} f^2_{k-1}$$

$$f_{k+n} = f_k + \frac{n}{1!} f^1_{k-1/2} + \frac{n(n+1)}{2!} f^2_{k-1} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} f^3_{k-3/2}$$

deduziremos, que, no caso geral, f_{k+n} será dado por:

$$f_{k+n} = f_k + \frac{n}{1!} f^1_{k-1/2} + \frac{n(n+1)}{2!} f^2_{k-1} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} f^3_{k-3/2} + \ldots \qquad (69)$$

Para quaisquer valores do argumento, sendo

$$z = \frac{t - t_k}{w},$$

obteremos

$$f(t_k+zw) = f_k + \frac{z}{1!} f^1_{k-1/2} + \frac{z(z+1)}{2!} f^2_{k-1} + \frac{z(z+1)(z+2)}{3!} f^3_{k-3/2} + \ldots \qquad (70)$$

A equação (70) é, finalmente, a <u>fórmula de Newton para interpolação regressiva</u>, que poderá ser escrita na seguinte forma, estendendo-se até a diferença de quinta ordem,

$$f(t_k + zw) = f_k + \frac{z}{1!} f^1_{k-1/2} + \frac{z^2 + z}{2!} f^2_{k-1} + \frac{z^3 + 3z^2 + 2z}{3!} f^3_{k-3/2} +$$

$$+ \frac{z^4 + 6z^3 + 11z^2 + 6z}{4!} f^4_{k-2} + \frac{z^5 + 10z^4 + 35z^3 + 50z^2 + 24z}{5!} f^5_{k-5/2} + .$$

ou, ainda, evidenciando-se os fatoriais,

$$f(t_k + zw) = f_k + \frac{z}{1!}\left(f^1_{k-1/2} + \frac{1}{2} f^2_{k-1} + \frac{1}{3} f^3_{k-3/2} + \frac{1}{4} f^4_{k-2} + \frac{1}{5} f^5_{k-5/2} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{z^2}{2!}\left(f^2_{k-1} + f^3_{k-3/2} + \frac{11}{12} f^4_{k-2} + \frac{5}{6} f^5_{k-5/2} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{z^3}{3!}\left(f^3_{k-3/2} + \frac{3}{2} f^4_{k-2} + \frac{7}{4} f^5_{k-5/2} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{z^4}{4!}\left(f^4_{k-2} + 2 f^5_{k-5/2} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{z^5}{5!}\left(f^5_{k-5/2} + \ldots\right). \qquad (71)$$

Desenvolvendo-se, agora, a função $f(t_k + zw)$ em uma série de Taylor nas vizinhanças do ponto $t = t_k$, teremos

$$f(t_k + zw) = f_k + \frac{zw}{1!}\left(\frac{df}{dt}\right)_k + \frac{z^2w^2}{2!}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_k + \frac{z^3w^3}{3!}\left(\frac{d^3f}{dt^3}\right)_k + \cdots \qquad (72)$$

Comparando-se as equações (71) e (72), verificaremos que

$$\begin{aligned}
w\left(\frac{df}{dt}\right)_k &= f^1_{k-1/2} + \frac{1}{2} f^2_{k-1} + \frac{1}{3} f^3_{k-3/2} + \frac{1}{4} f^4_{k-2} + \frac{1}{5} f^5_{k-5/2} + \cdots \\
w^2\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_k &= f^2_{k-1} + f^3_{k-3/2} + \frac{11}{12} f^4_{k-2} + \frac{5}{6} f^5_{k-5/2} + \cdots \\
w^3\left(\frac{d^3f}{dt^3}\right)_k &= f^3_{k-3/2} + \frac{3}{2} f^4_{k-2} + \frac{7}{4} f^5_{k-5/2} + \cdots \qquad (73) \\
w^4\left(\frac{d^4f}{dt^4}\right)_k &= f^4_{k-2} + 2 f^5_{k-5/2} + \cdots \\
w^5\left(\frac{d^5f}{dt^5}\right)_k &= f^5_{k-5/2} + \cdots
\end{aligned}$$

Recordando-se a equação (56),

$$\Delta_{k+1/2} = f_K + \frac{w}{2}\left(\frac{df}{dt}\right)_k + \frac{w^2}{6}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_k + \cdots$$

e comparando-a com (73), obteremos, para diferenças de quinta ordem

$$\Delta_{k+1/2} = f_k + \frac{1}{2} f^1_{k-1/2} + \frac{5}{12} f^2_{k-1} - \frac{3}{8} f^3_{k-3/2} + \frac{251}{720} f^4_{k-2} + \frac{95}{288} f^5_{k-5/2} \qquad (74)$$

que é a <u>fórmula previsora</u>, na qual se baseia o <u>método de extrapolação de Adams</u>.

Conhecendo-se as diferenças no membro esquerdo da equação, poder-se-á calcular $\Delta_{k+1/2}$ e, então, encontrar-se o próximo valor da função, x_{k+1}. Assim,

$$x_{k+1} = x_k + \Delta_{k+1/2} \ .$$

O procedimento poderá ser repetido. Tendo-se

$$t_{k+1} = t_k + w \quad \text{e} \quad f_{k+1} = w\,F(t_{k+1}, x_{k+1}) \ ,$$

a próxima série de diferenças,

$$f^1_{k+1/2}\ ,\ f^2_k\ ,\ f^3_{k-1/2}\ ,\ \ldots,$$

será calculada adicionando-se, assim, uma nova diagonal ascendente à tabela. Deste modo, e gradativamente, estender-se-á a integração

quase até os limites do intervalo no qual a equação diferencial é definida.

No método de Adams, porém, devemos utilizar um procedimento diferente para iniciarmos a solução, ou seja, calcularmos, partindo de t_o , x_o , f_o, uma série de valores do argumento, da função e de f_k bem como de suas diferenças de mais altas ordens, e só então aplicamos a fórmula (74). Dentre os vários métodos com esta finalidade, destaca-se aquele proposto por A. N. Krilov, que demonstraremos.

Observemos a tabela 6, e suponhamos que as diferenças de terceira ordem são constantes.

t	x	Δ	f	f^1	f^2	f^3	
...	...	...	...	...	...	...	
			f_{k-2}				fórmula usual
						$f^3_{k-3/2}$	
...	...		f_{k-1}		f^2_{k-1}		
		...		$f^1_{k-1/2}$		$f^3_{k-1/2}$	
t_k	x_k		f_k		f^2_k		(75)
		$\Delta_{k+1/2}$		$f^1_{k+1/2}$		$f^3_{k+1/2}$	
...	...		...		f^2_{k+1}		(77)
						$f^3_{k+3/2}$	
							(78)

TABELA 6

Neste caso, a fórmula usual para o incremento,

$$\Delta_{k+1/2} = f_k + \frac{1}{2} f^1_{k-1/2} + \frac{5}{12} f^2_{k-1} + \frac{3}{8} f^3_{k-3/2}$$

poderá ser escrita na forma

$$\Delta_{k+1/2} = f_k + \frac{1}{2} f^1_{k-1/2} + \frac{5}{12} f^2_{k-1} + \frac{3}{8} f^3_{k-1/2} \qquad (75)$$

sendo

$$f^3_{k-3/2} = f^3_{k-1/2} \quad ,$$

por hipótese.

Fazendo-se k = 2, teremos:

$$\Delta_{5/2} = f_2 + \frac{1}{2} f^1_{3/2} + \frac{5}{12} f^2_1 + \frac{3}{8} f^3_{1/2} . \quad (76)$$

Esta é a terceira fórmula de Krilov.

Se

$$f^2_{k-1} = f^2_k - f^3_{k-1/2} = f^2_k - f^3_{k+1/2}$$

substituindo este valor de f^2_{k-1} em (75) e, ainda, verificando que

$$f^3_{k-1/2} = f^3_{k+1/2} ,$$

teremos

$$\Delta_{k+1/2} = f_k + \frac{1}{2} f^1_{k-1/2} + \frac{5}{12} f^2_k - \frac{1}{24} f^3_{k+1/2} . \quad (77)$$

Fazendo k= 1, em (77) obteremos a segunda fórmula de Krilov.

Finalmente, se

$$\begin{aligned} f^1_{k-1/2} &= f^1_{k+1/2} - f^2_k \\ &= f^1_{k+1/2} - \left(f^2_{k+1} - f^3_{k+1/2} \right) \\ &= f^1_{k+1/2} - f^2_{k+1} + f^3_{k+3/2} , \end{aligned}$$

considerando, como afirmamos, as diferenças de terceira ordem constantes, e, considerando ainda que

$$f^2_k = f^2_{k+1} - f^3_{k+3/2} \qquad \text{e} \qquad f^3_{k+1/2} = f^3_{k+3/2}$$

deduziremos, após substituirmos os valores de $f^3_{k+1/2}$, f^2_k e $f^1_{k-1/2}$ na equação (77), que

$$\Delta_{k+1/2} = f_k + \frac{1}{2} f^1_{k+1/2} - \frac{1}{12} f^2_{k+1} + \frac{1}{24} f^3_{k+3/2} . \quad (78)$$

Fazendo k = 0, em (78), teremos a primeira fórmula de Krilov.

Ordenadamente, teremos então:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_{1/2} &= f_o + \frac{1}{2} f^1_{1/2} - \frac{1}{12} f^2_1 + \frac{1}{24} f^3_{3/2} \\
\Delta_{3/2} &= f_1 + \frac{1}{2} f^1_{1/2} + \frac{5}{12} f^2_1 - \frac{1}{24} f^3_{3/2} \\
\Delta_{5/2} &= f_2 + \frac{1}{2} f^1_{3/2} + \frac{5}{12} f^2_1 + \frac{3}{8} f^3_{3/2}
\end{aligned}\right\} \quad (79)$$

Devemos frisar que os incrementos, calculados de acordo com as fórmulas acima, serão exatos se as diferenças de terceira ordem forem constantes. Será feita a adoção de um menor valor para o "passo" de integração, sempre que se fizer necessário que esta condição se cumpra.

III.2.2 - MÉTODO DE SIMPSON DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

III.2.2.1 - TEORIA DO MÉTODO

O método de Simpson decorre diretamente do polinômio para interpolação progressiva de Newton, P(n). Assim,

$$f(x) \simeq P(n) = f_o + \binom{n}{1} f^1_{1/2} + \binom{n}{2} f^2_1 + \binom{n}{3} f^3_{3/2} + \binom{n}{4} f^4_2 .$$

Integremos ambos os membros ao longo do intervalo $\left[x_o , x_2 \right]$ de largura 2h. Então,

$$\int_{x_o}^{x_2} f(x)\, dx = h \int_o^2 P(n)\, dn =$$

$$= h \int_o^2 \left[f_o + \binom{n}{1} f^1_{1/2} + \binom{n}{2} f^2_1 + \binom{n}{3} f^3_{3/2} + \binom{n}{4} f^4_2 + \ldots \right] dn. \quad (80)$$

Por integração direta encontramos que

$$\int_o^2 1\, dn = 2, \quad \int_o^2 n\, dn = 2, \quad \int_o^2 \binom{n}{2} dn = \frac{1}{3}, \quad \int_o^2 \binom{n}{3} dn = 0$$

e $\displaystyle\int_o^2 \binom{n}{4} dn = \frac{1}{90}$.

Fixando as diferenças na terceira ordem em (80), obtemos

$$S = h\left(2f_o + 2f^1_{1/2} + \frac{1}{3} f^2_1 + 0f^3_{3/2}\right) =$$

$$= h\left(2f_o + 2f^1_{1/2} + \frac{1}{3} f^2_1\right)$$

$$= h\left[2\left(f_o + f^1_{1/2}\right) + \frac{1}{3}\left(f_2 - 2f_1 + f_o\right)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left(f_2 + 4f_1 + f_o\right) \qquad (81)$$

A fórmula (81) é a regra de Simpson. O erro desta fórmula é dado por (ref. 4 pág. 134)

$$E^s = -\frac{h^5}{90} f^{iv}(\eta), \text{ onde } x_o < \eta < x_2 . \qquad (82)$$

Ao utilizarmos a regra de Simpson para integrar ao longo de um intervalo $[a, b]$, devemos dividir $[a, b]$ num número par $2N$ de subintervalos de largura $\underline{h}$ de tal maneira que

$$x_o = a, \quad x_{2N} = b, \quad (b - a) = 2Nh \text{ e}$$

$$x_i - x_{i-1} = h, \text{ onde } i = 1, 2, \ldots, 2N.$$

Considerando o intervalo $\left[x_j, x_{j+2}\right]$, onde $\left(j = 0, 2, 4, \ldots, 2N-2\right)$, temos

$$\int_{x_j}^{x_{j+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_{j+2} + 4f_{j+1} + f_j\right) - \frac{h^5}{90} f^{iv}(\eta_j),$$

onde $x_j < \eta_j < x_{j+2}$. Se, agora, somamos os N subgrupos, obtemos

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_o + 4f_1 + 2f_2 + \ldots + 4f_{2N-1} + f_{2N}\right) - \frac{N}{90} h^5 f^{iv}(\eta), \qquad (83)$$

supondo a continuidade de $f^{iv}(x)$ em $[a, b]$, a fim de simplificar o termo do erro. A regra de Simpson para uma integração ao longo do intervalo $[a, b]$, que foi subdividido em $2N$ subintervalos de largura $\underline{h}$, é, finalmente, dada pela expressão:

$$S_{2N} = \frac{h}{3}\left(f_o + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 4f_{2N-1} + f_{2N}\right). \qquad (84)$$

Sendo $N = (b - a)/2h$, a forma final do termo do erro será

$$E^{s}_{2N} = - \frac{(b - a)}{180} h^{4} f^{iv} (\eta), \tag{85}$$

onde $a < \eta < b$.

III.3 - CÁLCULO DA ÓRBITA

III.3.1 - APLICAÇÃO DO MÉTODO ADAMS-KRILOV

III.3.1.1 - DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

As fórmulas de Krilov iniciarão o cálculo.

Fixando-se os valores de ψ_o e R_o, decorre que

$$f_o = w\left(\frac{dr}{d\psi}\right)_o ,$$

ao substituirmos R_o na equação (50). Para obtermos

$$r_1 = R_o + \Delta_{1/2} ,$$

façamos $\Delta_{1/2} = f_o$. Substituindo-se r_1 na equação (50), obteremos o valor de f_1.

$$f_o = w\left(\frac{dr}{d\psi}\right)_1 .$$

A primeira diferença, $f^1_{1/2}$ será igual a $(f_1 - f_o)$. Os valores obtidos são provisórios, pois utilizamos somente a primeira parcela da fórmula de Krilov para a determinação de $\Delta_{1/2}$. O incremento, utilizando-se agora duas parcelas da primeira fórmula de Krilov, será

$$\Delta^*_{1/2} = f_o + \frac{1}{2} f^1_{1/2}$$

(O sinal (*) indica o número de vezes que recalculamos o valor).

Desta forma,

$$r^*_1 = R_o + \Delta^*_{1/2} ,$$

$$f^*_1 = w\left(\frac{dr}{d\psi}\right)_1$$

$$f^*_{1/2} = f^*_1 - f_o .$$

O novo valor da primeira diferença, $f^{1*}_{1/2}$, deverá coincidir com o anterior, dentro dos limites da precisão arbitrada, que neste caso será 10^{-6}. Caso contrário, recalcularemos $f^{1*}_{1/2}$, colocando este valor no lugar de $f^1_{1/2}$ na fórmula para o incremento $\Delta^*_{1/2}$.

Ressaltamos que na notação adotada, o sinal (*) estará relacionado a um novo cálculo do valor, somente à medida que novas parcelas da fórmula forem sendo adicionadas. Assim, se

$$\left| f^{1*}_{1/2} - f^1_{1/2} \right|$$

for menor que 10^{-6} prosseguiremos o cálculo passando para a segunda fórmula de Krilov.

Esquematicamente, e com duas parcelas,

$$\Delta_{3/2} = f_1^* + \frac{1}{2} f_{1/2}^{1*} ,$$

$$r_2 = r_1^* + \Delta_{3/2} \quad e \quad f_2 = w \left(-\frac{dr}{d\psi} \right)_2$$

$$f_{3/2}^1 = f_2 - f_1^* ,$$

$$f_1^2 = f_{3/2}^1 - f_{1/2}^{1*} .$$

f_1^2 é o valor que precisamos para a redeterminação de $\Delta_{1/2}$, adicionando mais uma parcela à primeira fórmula de Krilov. Assim, e agora com três parcelas, teremos

$$\Delta_{1/2}^{**} = f_o + \frac{1}{2} f_{1/2}^{1*} - \frac{1}{12} f_1^2 ,$$

$$r_1^{**} = R_o + \Delta_{1/2}^{**} ,$$

$$f_1^{**} = w \left(\frac{dr}{d\psi} \right)_1$$

$$f_{1/2}^{1**} = f_1^{**} - f_o .$$

O novo teste para a primeira diferença implicará em verificarmos se

$$\left| f_{1/2}^{1**} - f_{1/2}^{1*} \right| < 10^{-6} .$$

Caso isto não ocorra, dever-se-á proceder como explicamos quando do teste anterior.

A segunda fórmula de Krilov, com três parcelas,

$$\Delta_{3/2}^* = f_1^{**} + \frac{1}{2} f_{1/2}^{1**} + \frac{5}{12} f_1^2 ,$$

levará aos seguintes cálculos:

$$r_2^* = r_1^* + \Delta_{3/2}^* ,$$

$$f_2^* = w \left(\frac{dr}{d\psi} \right)_2$$

$$f_{3/2}^{1*} = f_2^* - f_1^{**} ,$$

$$f_1^{2*} = f_{3/2}^{1*} - f_{1/2}^{1**} .$$

O teste desta vez será $\left| f_1^{2*} - f_1^2 \right| < 10^{-6}$?

Se a resposta a esta pergunta for NÃO, recalcular-se-á f_1^{2*}.

Cabe frisar que o novo cálculo de f_1^{2*} deverá partir, analogamente aos casos anteriores, do cálculo de um novo incremento $\Delta^*_{3/2}$, substituindo-se f_1^2 pelo valor de f_1^{2*}.

Os cálculos seguintes obedecem à linha de raciocínio até aqui apresentada.

$$\Delta_{5/2} = f_2^* + \frac{1}{2} f_{3/2}^{1*} + \frac{5}{12} f_1^{2*}$$

$$r_3 = r_2^* + \Delta_{5/2} \quad \text{e} \quad f_3 = w\left(\frac{dr}{d\psi}\right)_3$$

$$f_{5/2}^1 = f_3 - f_2^*$$

$$f_2^2 = f_{5/2}^1 - f_{3/2}^{1*}$$

$$f_{3/2}^3 = f_2^2 - f_1^{2*}$$

Utilizando-se 4 parcelas, uma vez que já dispomos da terceira diferença, teremos:

$$\Delta_{1/2}^{***} = f_o + \frac{1}{2} f_{1/2}^{1**} - \frac{1}{12} f_1^{2*} + \frac{1}{24} f_{3/2}^3$$

$$r_1^{***} = r_o + \Delta_{1/2}^{***}$$

$$f_1^{***} = w\left(\frac{dr}{d\psi}\right)_1$$

$$f_{1/2}^{1***} = f_1^{***} - f_o$$

$$\left| f_{1/2}^{1***} - f_{1/2}^{1**} \right| < 10^{-6} \ ?$$

NÃO

SIM

$$\Delta_{3/2}^{**} = f_1^{***} + \frac{1}{2} f_{1/2}^{1***} + \frac{5}{12} f_1^{2*} - \frac{1}{24} f_{3/2}^3$$

$$r_2^{**} = r_1^{***} + \Delta_{3/2}^{**}$$

$$f_2^{**} = w\left(\frac{dr}{d\psi}\right)_2$$

$$f_{3/2}^{1**} = f_2^{**} - f_1^{***}$$

$$f_1^{2**} = f_{3/2}^{1**} - f_{1/2}^{1***}$$

$$\left| f_1^{2**} - f_1^{2*} \right| < 10^{-6} \ ?$$

NÃO

SIM

S I M

$$\Delta^{*}_{5/2} = f^{**}_{2} + \frac{1}{2} f^{1**}_{3/2} + \frac{5}{12} f^{2*}_{1} + \frac{3}{8} f^{3}_{3/2}$$

$$r^{*}_{3} = r^{**}_{2} + \Delta^{*}_{5/2}$$

$$f_{3} = w \left(\frac{dr}{d\psi} \right)_{3}$$

$$f^{1*}_{5/2} = f^{*}_{3} - f^{**}_{2}$$

$$f^{2*}_{2} = f^{1*}_{5/2} - f^{1*}_{3/2}$$

$$f^{3*}_{3/2} = f^{2*}_{2} - f^{2**}_{1}$$

$$\left| f^{3*}_{3/2} - f^{3}_{3/2} \right| < 10^{-6} \quad ?$$

N Ã O

S I M

Fórmula Previsora de Adams

A fórmula previsora de Adams terá como ponto de partida o valor de k = 3, uma vez que pelas fórmulas de Krilov foram calculados os valores da função e das diferenças correspondentes, fazendo-se k = 0, 1 e 2.

Assim, para k = 3, a fórmula de Adams,

$$\Delta_{k+1/2} = f_k + \frac{1}{2} f^1_{k-1/2} + \frac{5}{12} f^2_{k-1} + \frac{3}{8} f^3_{k-3/2} ,$$

assumirá a forma:

$$\Delta_{7/2} = f_3 + \frac{1}{2} f^1_{5/2} + \frac{5}{12} f^2_2 + \frac{3}{8} f^3_{3/2} .$$

As diferenças agora utilizadas serão aquelas da última iteração do método de Krilov.

Do incremento $\Delta_{7/2}$, decorrerá que

$$r_4 = r_3 + \Delta_{7/2},$$

$$f_4 = w \left(\frac{dr}{d\psi} \right)_4$$

$$f^1_{7/2} = f_4 - f_3$$

$$f^2_3 = f^1_{7/2} - f^1_{5/2}$$

$$f^3_{5/2} = f^2_3 - f^2_2$$

Generalizando-se,

$$\Delta_{k+1/2} = f_k + \frac{1}{2} f^1_{k-1/2} + \frac{5}{12} f^2_{k-1} + \frac{3}{8} f^3_{k-3/2}$$

$$r_{k+1} = r_k + \Delta_{k+1/2}$$

$$f_{k+1} = w \left(\frac{dr}{d\psi} \right)_{k+1}$$

$$f^1_{k+1/2} = f_{k+1} - f_k$$

$$f^2_k = f^1_{k+1/2} - f^1_{k-1/2}$$

$$f^3_{k-1/2} = f^2_k - f^2_{k-1} .$$

A fixação da fórmula de Adams na terceira diferença, f^3, deu-se em virtude de havermos considerado estas diferenças como constantes, e este fato atuará como critério para a escolha do passo de integração, w . Não obstante, cabe ressaltar uma propriedade específica da equação, para a qual devemos atentar ao fazermos a integração. A equação diferencial (50) é definida somente no intervalo $r_{mín} \leqslant r \leqslant r_{máx}$. Além destes limites a equação não é válida, tendo em vista a inversão do sinal do radicando na fórmula (50).

Isto significa que valores de r maiores que $r_{máx}$ e menores que $r_{mín}$ não têm sentido. Ao nos aproximarmos, no decorrer da integração, destes valores extremos, veremos que

$$f = w\left(\frac{dr}{d\psi}\right)$$

decresce em valor absoluto, e que as colunas das diferenças f^1, f^2 e f^3 apresentam-se com valores praticamente constantes. Quando, porém, atingimos as fronteiras de $r_{extremo}$ poderá haver uma súbita variação nas diferenças e estas divergirem consideravelmente logo após o valor de $\underline{r}$ imediatamente próximo a $r_{extremo}$ (ver Apêndice VI.2). Este fato será evitado ao diminuirmos o passo w, de tal maneira que a interrupçao da programação se dará antes desta possível divergência. Neste ponto saberemos que o valor de $\underline{r}$ mais próximo de $r_{mín}$ ou $r_{máx}$ terá sido calculado. Haverá também a possibilidade de conhecermos, com alguma precisão, o valor do ângulo ψ correspondente aos $r_{extremos}$.

A órbita será calculada progressivamente da posição inicial até $r = r_{máx}$ e regressivamente, também da posição inicial até $r = r_{mín}$. Determinaremos, portanto, somente um arco, do pericentro ao apocentro, situando-se a posição inicial entre estes pontos extremos. A extrapolação de outros arcos requer novos valores iniciais e a troca do sinal da raiz quadrada. Portanto, para cálculos progressivos ou regressivos, teremos:

VALORES INICIAIS PARA TRÊS ARCOS

CÁLCULO REGRESSIVO	CÁLCULO PROGRESSIVO
$\psi < 0$	$\psi > 0$
1) R_o, ψ_o	1) R_o , ψ_o
2) R_o, $2\psi\ (r_{mín})$	2) R_o, $2\psi\ (r_{máx})$
3) $R_o, \left[2\psi(r_{mín}) + 2\left\{\psi(r_{máx})-\psi(R_o)\right\}\right]$	3) $R_o, \left[2\psi(r_{máx}) + 2\left\{\psi(r_{mín})-\psi(R_o)\right\}\right]$

O sinal do passo de integração correspondente a cada par de valores iniciais (R_o, ψ) será discutido posteriormente.

No desenvolvimento do Método Adams-Krilov utilizamos, apenas, a fórmula previsora ou de extrapolação. Teoricamente, necessitaríamos de uma outra fórmula que pudesse corrigir cada valor calculado pela primeira. A fórmula corretora ou de interpolação do método de Adams teria este propósito. Não obstante, veremos, no exemplo numérico, que a fórmula previsora fornece resultados suficientemente precisos, tendo em vista que a divergência entre os incrementos das fórmulas previsora e corretora se dá fora dos limites da precisão adotada.

III.3.1.2 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

Utilizaremos como exemplos numéricos as estrelas 61 Cygni (nº 820 da ref. 6) e α Hyi (nº 83 em op. cit.), cujas órbitas no plano galático sao características de estrelas de alta e baixa velocidades, respectivamente.

A precisão adotada, 10^{-6}, considerada suficiente no nosso problema (ver ref. 1), torna dispensável a aplicação da fórmula corretora do método Adams-Krilov. A tabela 8 , apresentada posteriormente na pág. 56 , mostrará, com dados da estrela 61 Cygni, que as divergências entre os incrementos das fórmulas previsora e corretora do método Adams-Krilov se dá bastante fora dos limites da precisão, o que implica no fato de que as órbitas não se alterariam caso fosse aplicada a fórmula corretora.

DADOS DA ESTRELA 61 CYGNI (ref. 1, pág. 113)

$U = 92,3$ km/s
$V = -53,2$ km/s
$W = -8,5$ km/s
$h = 2088$ kpc.km/s
$\Phi(R_o) = 52078$ $(km/s)^2$
$H = -26815$ $(km/s)^2$

$U_* = 83,3$ km/s
$V_* = 208,8$ km/s
$\alpha(1950) = 20h\ 04m\ 39,8s$
$\delta(1950) = 30^o\ 29'\ 59''$

Dados Calculados:
$r_{mín} = 6,31604$ kpc
$r_{máx} = 11,65685$ kpc
Período de Revolução, calculado pelo Método de Simpson = $2,17 \times 10^8$ anos
(do pericentro até o apocentro)

DADOS DA ESTRELA α HYI (ref. 6)

$U = 14$ km/s
$V = -14$ km/s
$W = -2$ km/s
$h = 2480$ kpc.km/s
$\Phi(R_o) = 52078$ $(km/s)^2$
$H = -21314$ $(km/s)^2$

$U_* = 5$ km/s
$V_* = 248$ km/s
$\alpha(1950) = 1h\ 57m\ 12s$
$\delta(1950) = -61^o\ 48,8'$

Dados Calculados:
$r_{mín} = 9,72152$ kpc
$r_{máx} = 10,08859$ kpc
Período de Revolução, calculado pelo Método de Simpson = $1,54 \times 10^8$ anos
(do pericentro ao apocentro)

VALORES OBTIDOS PELAS FÓRMULAS DE KRILOV

Ao iniciarmos a integração pelas fórmulas de Krilov, obtivemos uma série de valores iniciais que, a título de exemplo, apresentaremos os da estrela 61 Cygni para $\psi > 0$. O ajuste, pelo método de Krilov, se deu de maneira análoga para $\psi < 0$ em 61 Cygni, para os valores da estrela α Hyi e para as órbitas das estrelas da quais mostraremos somente os gráficos.

$R_o = 10,00000$

$\Delta_{1/2} = 0,03989$	$\Delta_{3/2} = 0,03971$	$\Delta_{5/2} = 0,03956$
$\overset{*}{\Delta}_{1/2} = 0,03983$	$\overset{*}{\Delta}_{3/2} = 0,03971$	$\overset{*}{\Delta}_{5/2} = 0,03956$
$\overset{**}{\Delta}_{1/2} = 0,03983$	$\overset{**}{\Delta}_{3/2} = 0,03971$	
$\overset{***}{\Delta}_{1/2} = 0,03983$		

$r_1 = 10,03989$	$r_2 = 10,07954$	$r_3 = 10,11910$
$\overset{*}{r}_1 = 10,03983$	$\overset{*}{r}_2 = 10,07954$	$\overset{*}{r}_3 = 10,11910$
$\overset{**}{r}_1 = 10,03983$	$\overset{**}{r}_2 = 10,07954$	
$\overset{***}{r}_1 = 10,03983$		

$f_o = 0,03989$	$f_2 = 0,03964$	$f_3 = 0,03949$
$f_1 = 0,03977$	$\overset{*}{f}_2 = 0,03964$	$\overset{*}{f}_3 = 0,03949$
$\overset{*}{f}_1 = 0,03977$	$\overset{**}{f}_2 = 0,03964$	
$\overset{**}{f}_1 = 0,03977$		
$\overset{***}{f}_1 = 0,03977$		

$\overset{1}{f}_{1/2} = -0,00012$	$\overset{1}{f}_{3/2} = -0,00014$	$\overset{1}{f}_{5/2} = -0,00015$
$\overset{1*}{f}_{1/2} = -0,00012$	$\overset{1*}{f}_{3/2} = -0,00014$	$\overset{1*}{f}_{5/2} = -0,00015$
$\overset{1**}{f}_{1/2} = -0,00012$	$\overset{1**}{f}_{3/2} = -0,00014$	
$\overset{1***}{f}_{1/2} = -0,00012$		

$\overset{2}{f}_1 = -0,00001$	$\overset{2}{f}_2 = -0,00001$	$\overset{2}{f}_{3/2} = -0,00000$
$\overset{2*}{f}_1 = -0,00001$	$\overset{2*}{f}_2 = -0,00001$	$\overset{2*}{f}_{3/2} = -0,00000$
$\overset{2**}{f}_1 = -0,00001$		

III.3.1.2.1 - TABELAS DE VALORES

As tabelas dos valores de ψ, r, f, f^1, f^2 e f^3 são apresentadas a seguir, esclarecendo que, para simplificar, foram, em f^1, f^2 e f^3, somente colocados os algarismos significativos, omitindo-se os zeros e a vírgula à esquerda. Assim, por exemplo, o número (- 12) na coluna de f^1 será, na realidade (- 0,00012); ou o número (- 1) em f^2 será (- 0,00001). Da mesma forma, colocamos simplesmente (zero) em lugar de (-0,00000).

TABELA 7 I

61 Cygni

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
0,00	10,00000		0,03989			
		0,03983		-12		
0,01	10,03983		0,03977		-1	
		0,03971		-14		0
0,02	10,07954		0,03964		-1	
		0,03956		-15		0
0,03	10,11910		0,03949		-1	
		0,03940		-17		0
0,04	10,15851		0,03932		-1	
		0,03923		-18		0
0,05	10,19774		0,03914		-1	
		0,03904		-20		0
0,06	10,23678		0,03895		-2	
		0,03884		-21		0
0,07	10,27562		0,03873		-2	
		0,03862		-23		0
0,08	10,31425		0,03851		-2	
		0,03839		-24		0
0,09	10,35264		0,03827		-2	
		0,03814		-26		0
0,10	10,39078		0,03801		-2	
		0,03788		-27		0
0,11	10,42866		0,03774		-2	
		0,03760		-29		0
0,12	10,46625		0,03745		-2	
		0,03730		-30		0
0,13	10,50356		0,03715		-2	
		0,03699		-32		0
0,14	10,54055		0,03683		-2	
		0,03666		-34		0
0,15	10,57721		0,03649		-2	
		0,03632		-35		0
0,16	10,61352		0,03614		-2	
		0,03596		-37		0
0,17	10,64948		0,03577		-2	
		0,03558		-38		0
0,18	10,68506		0,03539		-2	
		0,03519		-40		0
0,19	10,72025		0,03499		-2	
		0,03478		-42		0
0,20	10,75503		0,03457		-2	
		0,03435		-43		0
0,21	10,78938		0,03413		-2	
		0,03391		-45		0
0,22	10,82329		0,03368		-2	
		0,03345		-47		0
0,23	10,85675		0,03322		-2	

II

61 Cygni

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
		0,03298		-48		0
0,24	10,88972		0,03274		-2	
		0,03249		-50		0
0,25	10,92221		0,03224		-2	
		0,03198		-52		0
0,26	10,95419		0,03172		-2	
		0,03146		-53		0
0,27	10,98565		0,03119		-2	
		0,03092		-55		0
0,28	11,01656		0,03064		-2	
		0,03036		-56		0
0,29	11,04693		0,3008		-2	
		0,02979		-58		0
0,30	11,07672		0,02950		-2	
		0,02920		-59		0
0,31	11,10592		0,02891		-2	
		0,02860		-61		0
0,32	11,13452		0,02830		-2	
		0,02798		-63		0
0,33	11,16250		0,02767		-2	
		0,02735		-64		0
0,34	11,18986		0,02703		-1	
		0,02670		-66		0
0,35	11,21656		0,02637		-1	
		0,02604		-67		0
0,36	11,24260		0,02570		-1	
		0,02536		-68		0
0,37	11,26796		0,02502		-1	
		0,02467		-70		0
0,38	11,29264		0,02432		-1	
		0,02397		-71		0
0,39	11,31660		0,02361		-1	
		0,02325		-73		0
0,40	11,33985		0,02289		-1	
		0,02252		-74		0
0,41	11,36237		0,02215		-1	
		0,02177		-75		0
0,42	11,38414		0,02140		-1	
		0,02101		-76		0
0,43	11,40516		0,02063		-1	
		0,02024		-78		0
0,44	11,42540		0,01986		-1	
		0,01946		-79		0
0,45	11,44487		0,01907		-1	
		0,01867		-80		0
0,46	11,46353		0,01827		-1	
		0,01787		-81		0
0,47	11,48140		0,01746		-1	
		0,01705		-82		0
0,48	11,49845		0,01664		-1	
		0,01622		-83		0
0,49	11,51468		0,01581		-1	
		0,01539		-84		0
0,50	11,53006		0,01497		-1	
		0,01455		-85		0
0,51	11,54461		0,01412		-1	
		0,01369		-86		0
0,52	11,55830		0,01326		-1	

III

61 Cygni

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
		0,01283		-87		0
0,53	11,57113		0,01240		-1	
		0,01196		-87		0
0,54	11,58309		0,01152		-1	
		0,01108		-88		0
0,55	11,59417		0,01064		-1	
		0,01020		-89		0
0,56	11,60437		0,00976		-1	
		0,00931		-89		0
0,57	11,61368		0,00886		-1	
		0,00841		-90		0
0,58	11,62210		0,00796		0	
		0,00751		-90		0
0,59	11,62961		0,00706		0	
		0,00661		-91		0
0,60	11,63621		0,00615		0	
		0,00570		-91		0
0,61	11,64191		0,00524		0	
		0,00478		-92		0
0,62	11,64669		0,00432		0	
		0,00386		-92		0
0,63	11,65055		0,00341		0	
		0,00295		-92		0
0,64	11,65350		0,00249		0	
		0,00202		-92		0
0,65	11,65552		0,00156		0	
		0,00110		-92		(57)
0,66	11,65663		0,00064		(56)	
		0,00018		(-36)		
(*) 0,67	11,65680		(0,00028)			
0,00	10,00000		-0,03989			
		-0,03995		-11		
-0,01	9,96005		-0,04000		1	
		-0,04005		-9		0
-0,02	9,92000		-0,04010		1	
		-0,04014		-8		0
-0,03	9,87986		-0,04018		1	
		-0,04021		-7		0
-0,04	9,83965		-0,04025		1	
		-0,04027		-5		0
-0,05	9,79937		-0,04030		1	
		-0,04032		-4		0
-0,06	9,75905		-0,04034		1	
		-0,04036		-3		0
-0,07	9,71870		-0,04037		1	
		-0,04038		-2		0
-0,08	9,67832		-0,04039		1	
		-0,04039		0		0
-0,09	9,63793		-0,04039		1	
		-0,04039		1		0
-0,10	9,59754		-0,04038		1	
		-0,04037		2		0
-0,11	9,55716		-0,04036		1	
		-0,04035		3		0
-0,12	9,51681		-0,04033		1	

(*) *Os valores entre parêntesis não devem ser levados em consideração.*

IV

61 Cygni

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
		-0,04031		4		0
-0,13	9,47650		-0,04029		1	
		-0,04027		5		0
-0,14	9,43623		-0,04024		1	
		-0,04021		6		0
-0,15	9,39603		-0,04018		1	
		-0,04014		7		0
-0,16	9,35589		-0,04010		1	
		-0,04006		8		0
-0,17	9,31583		-0,04002		1	
		-0,03997		9		0
-0,18	9,27585		-0,03992		1	
		-0,03987		10		0
-0,19	9,23598		-0,03982		1	
		-0,03976		11		0
-0,20	9,19622		-0,03971		1	
		-0,03965		12		0
-0,21	9,15657		-0,03959		1	
		-0,03952		13		0
-0,22	9,11705		-0,03945		1	
		-0,03939		14		0
-0,23	9,07766		-0,03931		1	
		-0,03924		15		0
-0,24	9,03842		-0,03917		1	
		-0,03909		16		0
-0,25	8,99933		-0,03901		1	
		-0,03893		16		0
-0,26	8,96040		-0,03885		1	
		-0,03876		17		0
-0,27	8,92164		-0,03867		1	
		-0,03859		18		0
-0,28	8,88306		-0,03850		1	
		-0,03840		19		0
-0,29	8,84465		-0,03831		1	
		-0,03821		19		0
-0,30	8,80644		-0,03812		1	
		-0,03802		20		0
-0,31	8,76842		-0,03792		1	
		-0,03781		21		0
-0,32	8,73061		-0,03771		1	
		-0,03760		21		0
-0,33	8,69301		-0,03750		1	
		-0,03739		22		0
-0,34	8,65562		-0,03728		1	
		-0,03717		22		0
-0,35	8,61845		-0,03705		1	
		-0,03694		23		0
-0,36	8,58151		-0,03682		1	
		-0,03671		24		0
-0,37	8,54481		-0,03659		1	
		-0,03647		24		0
-0,38	8,50834		-0,03635		0	
		-0,03622		25		0
-0,39	8,47211		-0,03610		0	
		-0,03598		25		0
-0,40	8,43614		-0,03585		0	

V

61 Cygni

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
		-0,03572		26		0
-0,41	8,40041		-0,03560		0	
		-0,03547		26		0
-0,42	8,36495		-0,03534		0	
		-0,03521		26		0
-0,43	8,32974		-0,03507		0	
		-0,03494		27		0
-0,44	8,29480		-0,03481		0	
		-0,03467		27		0
-0,45	8,26013		-0,03453		0	
		-0,03440		28		0
-0,46	8,22574		-0,03426		0	
		-0,03412		28		0
-0,47	8,19162		-0,03398		0	
		-0,03384		28		0
-0,48	8,15778		-0,03370		0	
		-0,03356		29		0
-0,49	8,12422		-0,03341		0	
		-0,03327		29		0
-0,50	8,09095		-0,03312		0	
		-0,03298		29		0
-0,51	8,05797		-0,03283		0	
		-0,03269		29		0
-0,52	8,02529		-0,03254		0	
		-0,03239		30		0
-0,53	7,99289		-0,03224		0	
		-0,03209		30		0
-0,54	7,96080		-0,03195		0	
		-0,03180		30		0
-0,55	7,92900		-0,03164		0	
		-0,03149		30		0
-0,56	7,89751		-0,03134		0	
		-0,03119		30		0
-0,57	7,86632		-0,03104		0	
		-0,03088		31		0
-0,58	7,83544		-0,03073		0	
		-0,03058		31		0
-0,59	7,80486		-0,03042		0	
		-0,03027		31		0
-0,60	7,77459		-0,03011		0	
		-0,02996		31		0
-0,61	7,74464		-0,02980		0	
		-0,02964		31		0
-0,62	7,71499		-0,02949		0	
		-0,02933		31		0
-0,63	7,68566		-0,02917		0	
		-0,02902		32		0
-0,64	7,65665		-0,02886		0	
		-0,02870		32		0
-0,65	7,62794		-0,02854		0	
		-0,02838		32		0
-0,66	7,59956		-0,02823		0	
		-0,02807		32		0
-0,67	7,57149		-0,02791		0	
		-0,02775		32		0
-0,68	7,54375		-0,02759		0	

VI

61 Cygni

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
		-0,02743		32		0
-0,69	7,51632		-0,02727		0	
		-0,02711		32		0
-0,70	7,48921		-0,02695		0	
		-0,02679		32		0
-0,71	7,46242		-0,02663		0	
		-0,02647		32		0
-0,72	7,43595		-0,02631		0	
		-0,02615		32		0
-0,73	7,40981		-0,02599		0	
		-0,02583		32		0
-0,74	7,38398		-0,02566		0	
		-0,02550		32		0
-0,75	7,35848		-0,02534		0	
		-0,02518		32		0
-0,76	7,33330		-0,02502		0	
		-0,02486		32		0
-0,77	7,30844		-0,02470		0	
		-0,02454		32		0
-0,78	7,28390		-0,02438		0	
		-0,02422		32		0
-0,79	7,25968		-0,02405		0	
		-0,02389		32		0
-0,80	7,23579		-0,02373		0	
		-0,02357		32		0
-0,81	7,21222		-0,02341		0	
		-0,02325		32		0
-0,82	7,18897		-0,02309		0	
		-0,02293		32		0
-0,83	7,16604		-0,02277		0	
		-0,02261		32		0
-0,84	7,14343		-0,02245		0	
		-0,02229		32		0
-0,85	7,12115		-0,02213		0	
		-0,02197		32		0
-0,86	7,09918		-0,02181		0	
		-0,02165		32		0
-0,87	7,07753		-0,02149		0	
		-0,02133		32		0
-0,88	7,05620		-0,02117		0	
		-0,02101		32		0
-0,89	7,03520		-0,02085		0	
		-0,02069		32		0
-0,90	7,01451		-0,02053		0	
		-0,02037		32		0
-0,91	6,99414		-0,02021		0	
		-0,02005		32		0
-0,92	6,97408		-0,01990		0	
		-0,01974		32		0
-0,93	6,95434		-0,01958		0	
		-0,01942		32		0
-0,94	6,93492		-0,01926		0	
		-0,01911		32		0
-0,95	6,91582		-0,01895		0	
		-0,01879		31		0
-0,96	6,89703		-0,01863		0	

VII

61 Cygni

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
		-0,01848		31		0
-0,97	6,87855		-0,01832		0	
		-0,01816		31		0
-0,98	6,86039		-0,01801		0	
		-0,01785		31		0
-0,99	6,84254		-0,01769		0	
		-0,01754		31		0
-1,00	6,82500		-0,01738		0	
		-0,01723		31		0
-1,01	6,80777		-0,01707		0	
		-0,01692		31		0
-1,02	6,79086		-0,01676		0	
		-0,01661		31		0
-1,03	6,77425		-0,01645		0	
		-0,01630		31		0
-1,04	6,75795		-0,01614		0	
		-0,01599		31		0
-1,05	6,74196		-0,01584		0	
		-0,01568		31		0
-1,06	6,72628		-0,01553		0	
		-0,01538		31		0
-1,07	6,71091		-0,01522		0	
		-0,01507		31		0
-1,08	6,69584		-0,01492		0	
		-0,01476		30		0
-1,09	6,68107		-0,01461		0	
		-0,01446		30		0
-1,10	6,66661		-0,01431		0	
		-0,01416		30		0
-1,11	6,65245		-0,01401		0	
		-0,01385		30		0
-1,12	6,63860		-0,01370		0	
		-0,01355		30		0
-1,13	6,62505		-0,01340		0	
		-0,01325		30		0
-1,14	6,61180		-0,01310		0	
		-0,01295		30		0
-1,15	6,59884		-0,01280		0	
		-0,01265		30		0
-1,16	6,58619		-0,01250		0	
		-0,01235		30		0
-1,17	6,57384		-0,01220		0	
		-0,01206		30		0
-1,18	6,56178		-0,01191		0	
		-0,01176		30		0
-1,19	6,55002		-0,01161		0	
		-0,01146		30		0
-1,20	6,53856		-0,01131		0	
		-0,01117		30		0
-1,21	6,52740		-0,01102		0	
		-0,01087		29		0
-1,22	6,51652		-0,01072		0	
		-0,01058		29		0
-1,23	6,50595		-0,01043		0	
		-0,01028		29		0
-1,24	6,49566		-0,01014		0	

VIII

61 Cygni

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
		-0,00999		29		0
-1,25	6,48567		-0,00985		0	
		-0,00970		29		0
-1,26	6,47597		-0,00955		0	
		-0,00941		29		0
-1,27	6,46656		-0,00926		0	
		-0,00912		29		0
-1,28	6,45744		-0,00897		0	
		-0,00883		29		0
-1,29	6,44862		-0,00868		0	
		-0,00854		29		0
-1,30	6,44008		-0,00839		0	
		-0,00825		29		0
-1,31	6,43183		-0,00811		0	
		-0,00796		29		0
-1,32	6,42387		-0,00782		0	
		-0,00767		29		0
-1,33	6,41619		-0,00753		0	
		-0,00739		29		0
-1,34	6,40880		-0,00724		0	
		-0,00710		29		0
-1,35	6,40170		-0,00696		0	
		-0,00681		29		0
-1,36	6,39489		-0,00667		0	
		-0,00653		29		0
-1,37	6,38836		-0,00639		0	
		-0,00624		28		0
-1,38	6,38211		-0,00610		0	
		-0,00596		28		0
-1,39	6.37615		-0,00582		0	
		-0,00568		28		0
-1,40	6,37048		-0,00553		0	
		-0,00539		28		0
-1,41	6,36509		-0,00525		0	
		-0,00511		28		0
-1,42	6,35998		-0,00497		0	
		-0,00483		28		0
-1,43	6,35515		-0,00469		0	
		-0,00454		28		0
-1,44	6,35060		-0,00440		0	
		-0,00426		28		0
-1,45	6,34634		-0,00412		0	
		-0,00398		28		0
-1,46	6,34236		-0,00384		0	
		-0,00370		28		0
-1,47	6,33866		-0,00356		0	
		-0,00342		28		0
-1,48	6,33524		-0,00328		0	
		-0,00314		28		0
-1,49	6,33210		-0,00300		0	
		-0,00286		28		0
-1,50	6,32924		-0,00272		0	
		-0,00258		28		0
-1,51	6,32667		-0,00244		0	
		-0,00230		28		0
-1,52	6,32437		-0,00216		0	

IX

61 Cygni

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
		-0,00202		28		0
-1,53	6,32235		-0,00188		0	
		-0,00174		28		0
-1,54	6,32061		-0,00160		0	
		-0,00146		28		0
-1,55	6,31915		-0,00132		0	
		-0,00118		28		0
-1,56	6,31797		-0,00104		0	
		-0,00090		28		0
-1,57	6,31707		-0,00076		0	
		-0,00062		28		0
-1,58	6,31645		-0,00048		0	
		-0,00034		28		
-1,59	6,31611		-0,00020			

TABELA DOS INCREMENTOS DAS FÓRMULAS PREVISORA E CORRETORA

61 Cygni

-0,04	Δ p =-0,040212817	+ 0,04	Δ p = 0,039404036
	Δ c =-0,040212819		Δ c = 0,039404039
-0,05	Δ p =-0,040273731	+ 0,05	Δ p = 0,039231368
	Δ c =-0,040273732		Δ c = 0,039231371
-0,06	Δ p =-0,040321654	+ 0,06	Δ p = 0,039043841
	Δ c =-0,040321655		Δ c = 0,039043844
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
-0,69	Δ p =-0,027428533	+ 0,31	Δ p = 0,029203718
	Δ c =-0,027428532		Δ c = 0,029203724
-0,70	Δ p =-0,027108758	+ 0,32	Δ p = 0,028601405
	Δ c =-0,027108757		Δ c = 0,028601411
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
-1,57	Δ p =-0,000900038	+ 0,64	Δ p = 0,002945520
	Δ c =-0,000900037		Δ c = 0,002945522
-1,58	Δ p =-0,000620804	+ 0,65	Δ p = 0,002024454
	Δ c =-0,000620804		Δ c = 0,002024455
-1,59	Δ p =-0,000341620	+ 0,66	Δ p = 0,001102109
	Δ c =-0,000341620		Δ c = 0,001102110

TABELA 8

TABELA 9

I

α Hyi

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
0,00	10,00000		0,00202			
		0,00201		-2		
0,01	10,00201		0,00200		0	
		0,00199		-2		0
0,02	10,00400		0,00198		0	
		0,00198		-2		0
0,03	10,00598		0,00197		0	
		0,00196		-2		0
0,04	10,00794		0,00195		0	
		0,00194		-2		0
0,05	10,00988		0,00194		0	
		0,00193		-2		0
0,06	10,01181		0,00192		0	
		0,00191		-2		0
0,07	10,01372		0,00190		0	
		0,00189		-2		0
0,08	10,01561		0,00188		0	
		0,00187		-2		0
0,09	10,01749		0,00187		0	
		0,00186		-2		0
0,10	10,01934		0,00185		0	
		0,00184		-2		0
0,11	10,02118		0,00183		0	
		0,00182		-2		0
0,12	10,02300		0,00181		0	
		0,00180		-2		0
0,13	10,02480		0,00179		0	
		0,00178		-2		0
0,14	10,02658		0,00177		0	
		0,00176		-2		0
0,15	10,02834		0,00175		0	
		0,00174		-2		0
0,16	10,03007		0,00173		0	
		0,00172		-2		0
0,17	10,03179		0,00171		0	
		0,00170		-2		0
0,18	10,03349		0,00169		0	
		0,00168		-2		0
0,19	10,03517		0,00167		0	
		0,00166		-2		0
0,20	10,03683		0,00165		0	
		0,00163		-2		0
0,21	10,03846		0,00162		0	
		0,00161		-2		0
0,22	10,04007		0,00160		0	
		0,00159		-2		0
0,23	10,04166		0,00158		0	
		0,00157		-2		0
0,24	10,04323		0,00156		0	
		0,00155		-2		0
0,25	10,04478		0,00153		0	
		0,00152		-2		0
0,26	10,04630		0,00151		0	
		0,00150		-2		0
0,27	10,04780		0,00149		0	
		0,00148		-2		0

II

α Hyi

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
0,28	10,04927		0,00146		0	
		0,00145		-2		0
0,29	10,05073		0,00144		0	
		0,00143		-2		0
0,30	10,05215		0,00142		0	
		0,00140		-2		0
0,31	10,05356		0,00139		0	
		0,00138		-2		0
0,32	10,05494		0,00137		0	
		0,00135		-2		0
0,33	10,05629		0,00134		0	
		0,00133		-3		0
0,34	10,05762		0,00132		0	
		0,00130		-3		0
0,35	10,05892		0,00129		0	
		0,00128		-3		0
0,36	10,06020		0,00127		0	
		0,00125		-3		0
0,37	10,06145		0,00124		0	
		0,00123		-3		0
0,38	10,06268		0,00121		0	
		0,00120		-3		0
0,39	10,06388		0,00119		0	
		0,00117		-3		0
0,40	10,06505		0,00116		0	
		0,00115		-3		0
0,41	10,06620		0,00113		0	
		0,00112		-3		0
0,42	10,06732		0,00111		0	
		0,00109		-3		0
0,43	10,06842		0,00108		0	
		0,00107		-3		0
0,44	10,06948		0,00105		0	
		0,00104		-3		0
0,45	10,07052		0,00103		0	
		0,00101		-3		0
0,46	10,07154		0,00100		0	
		0,00098		-3		0
0,47	10,07252		0,00097		0	
		0,00096		-3		0
0,48	10,07348		0,00094		0	
		0,00093		-3		0
0,49	10,07441		0,00091		0	
		0,00090		-3		0
0,50	10,07531		0,00089		0	
		0,00087		-3		0
0,51	10,07618		0,00086		0	
		0,00084		-3		0
0,52	10,07702		0,00083		0	
		0,00081		-3		0
0,53	10,07784		0,00080		0	
		0,00079		-3		0
0,54	10,07862		0,00077		0	
		0,00076		-3		0
0,55	10,07938		0,00074		0	
		0,00073		-3		0

III

α Hyi

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
0,56	10,08011		0,00071		0	
		0,00070		-3		0
0,57	10,08080		0,00068		0	
		0,00067		-3		0
0,58	10,08147		0,00065		0	
		0,00064		-3		0
0,59	10,08211		0,00063		0	
		0,00061		-3		0
0,60	10,08272		0,00060		0	
		0,00058		-3		0
0,61	10,08330		0,00057		0	
		0,00055		-3		0
0,62	10,08386		0,00054		0	
		0,00052		-3		0
0,63	10,08438		0,00051		0	
		0,00049		-3		0
0,64	10,08487		0,00048		0	
		0,00046		-3		0
0,65	10,08533		0,00045		0	
		0,00043		-3		0
0,66	10,08576		0,00042		0	
		0,00040		-3		0
0,67	10,08616		0,00039		0	
		0,00037		-3		0
0,68	10,08653		0,00036		0	
		0,00034		-3		0
0,69	10,08687		0,00032		0	
		0,00031		-3		0
0,70	10,08718		0,00029		0	
		0,00028		-3		0
0,71	10,08746		0,00026		0	
		0,00025		-3		0
0,72	10,08771		0,00023		0	
		0,00022		-3		0
0,73	10,08792		0,00020		0	
		0,00019		-3		0
0,74	10,08811		0,00017		0	
		0,00016		-3		0
0,75	10,08827		0,00014		0	
		0,00013		-3		0
0,76	10,08839		0,00011		0	
		0,00010		-3		0
0,77	10,08849		0,00008		0	
		0,00006		-3		
0,78	10,08855		0,00005			
0,00	10,00000		-0,00202			
		-0,00202		-2		
-0,01	9,99798		-0,00203		0	
		-0,00204		-1		0
-0,02	9,99594		-0,00205		0	
		-0,00205		-1		0
-0,03	9,99388		-0,00206		0	
		-0,00207		-1		0
-0,04	9,99182		-0,00207		0	
		-0,00208		-1		0

IV

α Hyi

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
-0,05	9,98974		-0,00209		0	
		-0,00209		-1		0
-0,06	9,98764		-0,00210		0	
		-0,00211		-1		0
-0,07	9,98553		-0,00211		0	
		-0,00212		-1		0
-0,08	9,98341		-0,00213		0	
		-0,00213		-1		0
-0,09	9,98128		-0,00214		0	
		-0,00215		-1		0
-0,10	9,97913		-0,00215		0	
		-0,00216		-1		0
-0,11	9,97698		-0,00216		0	
		-0,00217		-1		0
-0,12	9,97481		-0,00217		0	
		-0,00218		-1		0
-0,13	9,97263		-0,00218		0	
		-0,00219		-1		0
-0,14	9,97044		-0,00220		0	
		-0,00220		-1		0
-0,15	9,96824		-0,00221		0	
		-0,00221		-1		0
-0,16	9,96603		-0,00222		0	
		-0,00222		-1		0
-0,17	9,96381		-0,00222		0	
		-0,00223		-1		0
-0,18	9,96158		-0,00223		0	
		-0,00224		-1		0
-0,19	9,95934		-0,00224		0	
		-0,00225		-1		0
-0,20	9,95709		-0,00225		0	
		-0,00225		-1		0
-0,21	9,95484		-0,00226		0	
		-0,00226		-1		0
-0,22	9,95258		-0,00227		0	
		-0,00227		-1		0
-0,23	9,95031		-0,00227		0	
		-0,00228		-1		0
-0,24	9,94803		-0,00228		0	
		-0,00228		-1		0
-0,25	9,94575		-0,00229		0	
		-0,00229		-1		0
-0,26	9,94346		-0,00229		0	
		-0,00229		-1		0
-0,27	9,94117		-0,00230		0	
		-0,00230		-1		0
-0,28	9,93886		-0,00230		0	
		-0,00231		-1		0
-0,29	9,93656		-0,00231		0	
		-0,00231		0		0
-0,30	9,93425		-0,00231		0	
		-0,00231		0		0
-0,31	9,93194		-0,00232		0	
		-0,00232		0		0
-0,32	9,92962		-0,00232		0	
		-0,00232		0		0

V

α Hyi

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
-0,33	9,92730		-0,00232		0	
		-0,00232		0		0
-0,34	9,92497		-0,00233		0	
		-0,00233		0		0
-0,35	9,92264		-0,00233		0	
		-0,00233		0		0
-0,36	9,92031		-0,00233		0	
		-0,00233		0		0
-0,37	9,91798		-0,00233		0	
		-0,00233		0		0
-0,38	9,91565		-0,00233		0	
		-0,00233		0		0
-0,39	9,91332		-0,00233		0	
		-0,00234		0		0
-0,40	9,91098		-0,00234		0	
		-0,00234		0		0
-0,41	9,90864		-0,00234		0	
		-0,00234		0		0
-0,42	9,90631		-0,00234		0	
		-0,00234		0		0
-0,43	9,90397		-0,00234		0	
		-0,00233		0		0
-0,44	9,90164		-0,00233		0	
		-0,00233		0		0
-0,45	9,89930		-0,00233		0	
		-0,00233		0		0
-0,46	9,89697		-0,00233		0	
		-0,00233		0		0
-0,47	9,89464		-0,00233		0	
		-0,00233		0		0
-0,48	9,89231		-0,00233		0	
		-0,00233		0		0
-0,49	9,88999		-0,00232		0	
		-0,00232		0		0
-0,50	9,88766		-0,00232		0	
		-0,00232		0		0
-0,51	9,88534		-0,00232		0	
		-0,00232		0		0
-0,52	9,88303		-0,00231		0	
		-0,00231		0		0
-0,53	9,88072		-0,00231		0	
		-0,00231		0		0
-0,54	9,87841		-0,00231		0	
		-0,00230		0		0
-0,55	9,87611		-0,00230		0	
		-0,00230		1		0
-0,56	9,87381		-0,00229		0	
		-0,00229		1		0
-0,57	9,87152		-0,00229		0	
		-0,00229		1		0
-0,58	9,86923		-0,00228		0	
		-0,00228		1		0
-0,59	9,86695		-0,00228		0	
		-0,00227		1		0
-0,60	9,86468		-0,00227		0	
		-0,00227		1		0

VI

α Hyi

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
-0,61	9,86241		-0,00226		0	
		-0,00226		1		0
-0,62	9,86015		-0,00226		0	
		-0,00225		1		0
-0,63	9,85790		-0,00225		0	
		-0,00224		1		0
-0,64	9,85566		-0,00224		0	
		-0,00224		1		0
-0,65	9,85342		-0,00223		0	
		-0,00223		1		0
-0,66	9,85119		-0,00222		0	
		-0,00222		1		0
-0,67	9,84898		-0,00221		0	
		-0,00221		1		0
-0,68	9,84677		-0,00220		0	
		-0,00220		1		0
-0,69	9,84457		-0,00219		0	
		-0,00219		1		0
-0,70	9,84238		-0,00218		0	
		-0,00218		1		0
-0,71	9,84021		-0,00217		0	
		-0,00217		1		0
-0,72	9,83804		-0,00216		0	
		-0,00216		1		0
-0,73	9,83588		-0,00215		0	
		-0,00214		1		0
-0,74	9,83374		-0,00214		0	
		-0,00213		1		0
-0,75	9,83161		-0,00213		0	
		-0,00212		1		0
-0,76	9,82949		-0,00211		0	
		-0,00211		1		0
-0,77	9,82738		-0,00210		0	
		-0,00209		1		0
-0,78	9,82529		-0,00209		0	
		-0,00208		1		0
-0,79	9,82320		-0,00207		0	
		-0,00207		1		0
-0,80	9,82114		-0,00206		0	
		-0,00205		1		0
-0,81	9,81908		-0,00205		0	
		-0,00204		1		0
-0,82	9,81704		-0,00203		0	
		-0,00203		1		0
-0,83	9,81502		-0,00202		0	
		-0,00201		1		0
-0,84	9,81301		-0,00200		0	
		-0,00200		2		0
-0,85	9,81101		-0,00199		0	
		-0,00198		2		0
-0,86	9,80903		-0,00197		0	
		-0,00197		2		0
-0,87	9,80706		-0,00196		0	
		-0,00195		2		0
-0,88	9,80511		-0,00194		0	
		-0,00193		2		0

VII

α Hyi

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
-0,89	9,80318		-0,00192		0	
		-0,00192		2		0
-0,90	9,80127		-0,00191		0	
		-0,00190		2		0
-0,91	9,79937		-0,00189		0	
		-0,00188		2		0
-0,92	9,79748		-0,00187		0	
		-0,00187		2		0
-0,93	9,79562		-0,00186		0	
		-0,00185		2		0
-0,94	9,79377		-0,00184		0	
		-0,00183		2		0
-0,95	9,79194		-0,00182		0	
		-0,00181		2		0
-0,96	9,79013		-0,00180		0	
		-0,00179		2		0
-0,97	9,78834		-0,00178		0	
		-0,00177		2		0
-0,98	9,78656		-0,00176		0	
		-0,00175		2		0
-0,99	9,78481		-0,00175		0	
		-0,00174		2		0
-1,00	9,78307		-0,00173		0	
		-0,00172		2		0
-1,01	9,78136		-0,00171		0	
		-0,00170		2		0
-1,02	9,77966		-0,00169		0	
		-0,00168		2		0
-1,03	9,77799		-0,00167		0	
		-0,00166		2		0
-1,04	9,77633		-0,00165		0	
		-0,00163		2		0
-1,05	9,77470		-0,00162		0	
		-0,00161		2		0
-1,06	9,77308		-0,00160		0	
		-0,00159		2		0
-1,07	9,77149		-0,00158		0	
		-0,00157		2		0
-1,08	9,76992		-0,00156		0	
		-0,00155		2		0
-1,09	9,76837		-0,00154		0	
		-0,00153		2		0
-1,10	9,76684		-0,00152		0	
		-0,00151		2		0
-1,11	9,76533		-0,00150		0	
		-0,00148		2		0
-1,12	9,76385		-0,00147		0	
		-0,00146		2		0
-1,13	9,76239		-0,00145		0	
		-0,00144		2		0
-1,14	9,76095		-0,00143		0	
		-0,00142		2		0
-1,15	9,75953		-0,00140		0	
		-0,00139		2		0
-1,16	9,75814		-0,00138		0	
		0,00137		2		0

VIII

α Hyi

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
-1,17	9,75677		-0,00136		0	
		-0,00135		2		0
-1,18	9,75543		-0,00133		0	
		-0,00132		2		0
-1,19	9,75410		-0,00131		0	
		-0,00130		2		0
-1,20	9,75280		-0,00129		0	
		-0,00127		2		0
-1,21	9,75153		-0,00126		0	
		-0,00125		2		0
-1,22	9,75028		-0,00124		0	
		-0,00123		2		0
-1,23	9,74906		-0,00121		0	
		-0,00120		2		0
-1,24	9,74786		-0,00119		0	
		-0,00118		2		0
-1,25	9,74668		-0,00116		0	
		-0,00115		3		0
-1,26	9,74553		-0,00114		0	
		-0,00113		3		0
-1,27	9,74440		-0,00111		0	
		-0,00110		3		0
-1,28	9,74330		-0,00109		0	
		-0,00107		3		0
-1,29	9,74223		-0,00106		0	
		-0,00105		3		0
-1,30	9,74118		-0,00104		0	
		-0,00102		3		0
-1,31	9,74016		-0,00101		0	
		-0,00100		3		0
-1,32	9,73916		-0,00098		0	
		-0,00097		3		0
-1,33	9,73819		-0,00096		0	
		-0,00094		3		0
-1,34	9,73724		-0,00093		0	
		-0,00092		3		0
-1,35	9,73633		-0,00090		0	
		-0,00089		3		0
-1,36	9,73543		-0,00088		0	
		-0,00086		3		0
-1,37	9,73457		-0,00085		0	
		-0,00084		3		0
-1,38	9,73373		-0,00082		0	
		-0,00081		3		0
-1,39	9,73292		-0,00080		0	
		-0,00078		3		0
-1,40	9,73214		-0,00077		0	
		-0,00076		3		0
-1,41	9,73138		-0,00074		0	
		-0,00073		3		0
-1,42	9,73065		-0,00072		0	
		-0,00070		3		0
-1,43	9,72995		-0,00069		0	
		-0,00067		3		0
-1,44	9,72927		-0,00066		0	
		-0,00065		3		0

IX

α Hyi

ψ	r	Δ	f	f^1	f^2	f^3
-1,45	9,72863		-0,00063		0	
		-0,00062		3		0
-1,46	9,72801		-0,00061		0	
		-0,00059		3		0
-1,47	9,72742		-0,00058		0	
		-0,00056		3		0
-1,48	9,72685		-0,00055		0	
		-0,00054		3		0
-1,49	9,72632		-0,00052		0	
		-0,00051		3		0
-1,50	9,72581		-0,00049		0	
		-0,00048		3		0
-1,51	9,72533		-0,00047		0	
		-0,00045		3		0
-1,52	9,72488		-0,00044		0	
		-0,00042		3		0
-1,53	9,72445		-0,00041		0	
		-0,00039		3		0
-1,54	9,72406		-0,00038		0	
		-0,00037		3		0
-1,55	9,72369		-0,00035		0	
		-0,00034		3		0
-1,56	9,72335		-0,00032		0	
		-0,00031		3		0
-1,57	9,72304		-0,00030		0	
		-0,00028		3		0
-1,58	9,72276		-0,00027		0	
		-0,00025		3		0
-1,59	9,72251		-0,00024		0	
		-0,00022		3		0
-1,60	9,72229		-0,00021		0	
		-0,00020		3		0
-1,61	9,72209		-0,00018		0	
		-0,00017		3		0
-1,62	9,72192		-0,00015		0	
		-0,00014		3		0
-1,63	9,72179		-0,00012		0	
		-0,00011		3		0
-1,64	9,72168		-0,00010		0	
		-0,00008		3		
-1,65	9,72159		-0,00007			

III.4 - CÁLCULO DA ÓRBITA PARA ALGUMAS ESTRELAS SELECIONADAS

Selecionamos estrelas com velocidades dentro do intervalo $-100 \leq U_{*PLR}(km/s) \leq +100$ e $-60 \leq V_{*PLR}(km/s) \leq +20$ (ver ref. 8, pág. 223), e, dentre estas, aquelas cujas velocidades ao longo do eixo Z não diferissem demasiadamente da velocidade do Sol, que supomos no plano. Entretanto, com o propósito de apresentar gráficos diversificados, escolhemos estrelas, na sua maioria do Hemisfério Sul, que possuíssem órbitas características, conforme fossem de alta ou baixa velocidades.

Nº	α(1950,0)	δ(1950,0)	m	U(km/s)	V(km/s)	W(km/s)
292.2	7h 52m 03s	- 1°16,8'	7,44	80	-60	- 5
Sol			-26,72	0	0	0
31 (β Cet)	30 41 05	- 18 15,6	2,02	19	- 6	-13
721 (α Lyr)	18 35 15	+ 38 44,2	0,03	17	- 6	- 8
278A (α Gem)	7 31 25	+ 32 00,0	1,95	7	- 4	-11
244A (Sirius)	5 42 57	- 16 38,8	- 1,46	-15	0	-11
111 (τ(1) Eri)	2 42 46	- 18 47,0	4,46	27	-17	-13
559A (α Cent)	14 36 11	- 60 37,8	- 0,01	29	+ 1	+14
587	14 25 44	- 49 46,8	7,66	52	- 1	+ 3
416	10 09 01	- 14 42,7	9,03	-79	- 4	-14
574 *	14 59 42	- 46 5,9	9,87	71	+14	+ 4
893.2A* (PSI AQR)	23 13 16	- 9 21,6	4,25	50	-31	+ 3
900.1*	23 32 52	- 47 13,1	8,55	16	-54	+ 9
341.1	8 21 06	+ 80 48,2	9,30	6	-46	+ 8
17.2	00 19 52	- 27 18,3	8,32	- 4	-61	- 3
52.1*	1 04 35	- 51 15,5	8,83	52	-49	- 1
575A (ι Boo)	14 02 08	+ 47 50,9	5,25	17	-28	-10
B	14 02 08	+ 47 50,9	5,25	15	-15	+11
282A	7 37 29	- 3 28,7	7,20	-27	- 1	- 8
B	7 37 33	- 3 29,0	8,94	-20	- 7	- 7

TABELA 10 (ref. 6)

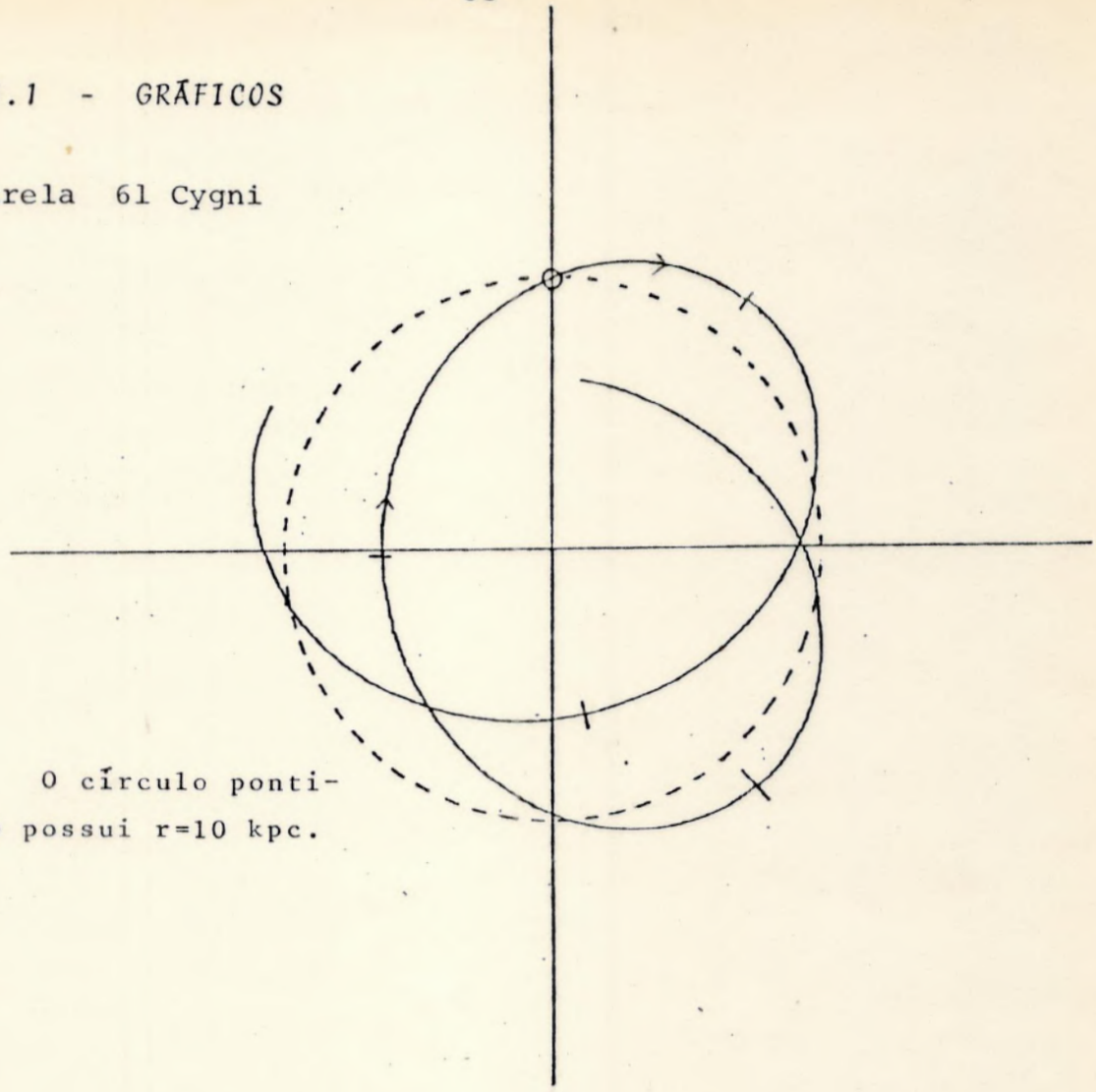
TABELA DE DADOS OBTIDOS

Nº (ref. 6)	U_* (km/s)	V_* (km/s)	h(kpc.km/s)	$H(km/s)^2$	r_{min} (kpc)	r_{max} (kpc)	Órbita
292.2	71	202	2020	-29156	6,15384	11,09911	1
Sol	- 9	262	2620	-17716	9,93791	11,43584	2
31 (β Cet)	10	256	2560	-19260	9,86787	10,79265	3
721 (α Lyra)	8	256	2560	-19278	9,90972	10,74204	4
278A (α Gem)	- 2	258	2580	-18794	9,99512	10,87079	5
244A (Sirius)	-24	262	2620	-17468	9,65497	11,85406	6
111 (τ(ι)Eri)	18	245	2450	-21904	9,19699	10,39212	7
559A (α Cent)	20	263	2630	-17294	9,75648	11,83476	8
587	43	261	2610	-17093	9,18317	12,55096	9
416	-88	258	2580	-14924	8,10751	15,03925	10
574*	62	276	2760	-12068	9,09850	15,94244	11
893.2A*(Psi Aqr)	41	231	2310	-24557	7,92475	10,73941	12
900.1*	7	208	2080	-30422	6,87645	10,01272	13
341.1	- 3	216	2160	-28746	7,35340	10,00284	14
17.2	-13	201	2010	-31793	6,48367	10,03814	15
52.1*	43	213	2130	-28469	6,93577	10,50853	16
575A	8	234	2340	-24668	8,56709	10,04055	17
575B	6	247	2470	-21556	9,62302	10,09363	
282A	-36	261	2610	-17370	9,35097	12,22724	18
282B	-29	255	2550	-19145	9,35560	11,37314	

Tabela 11

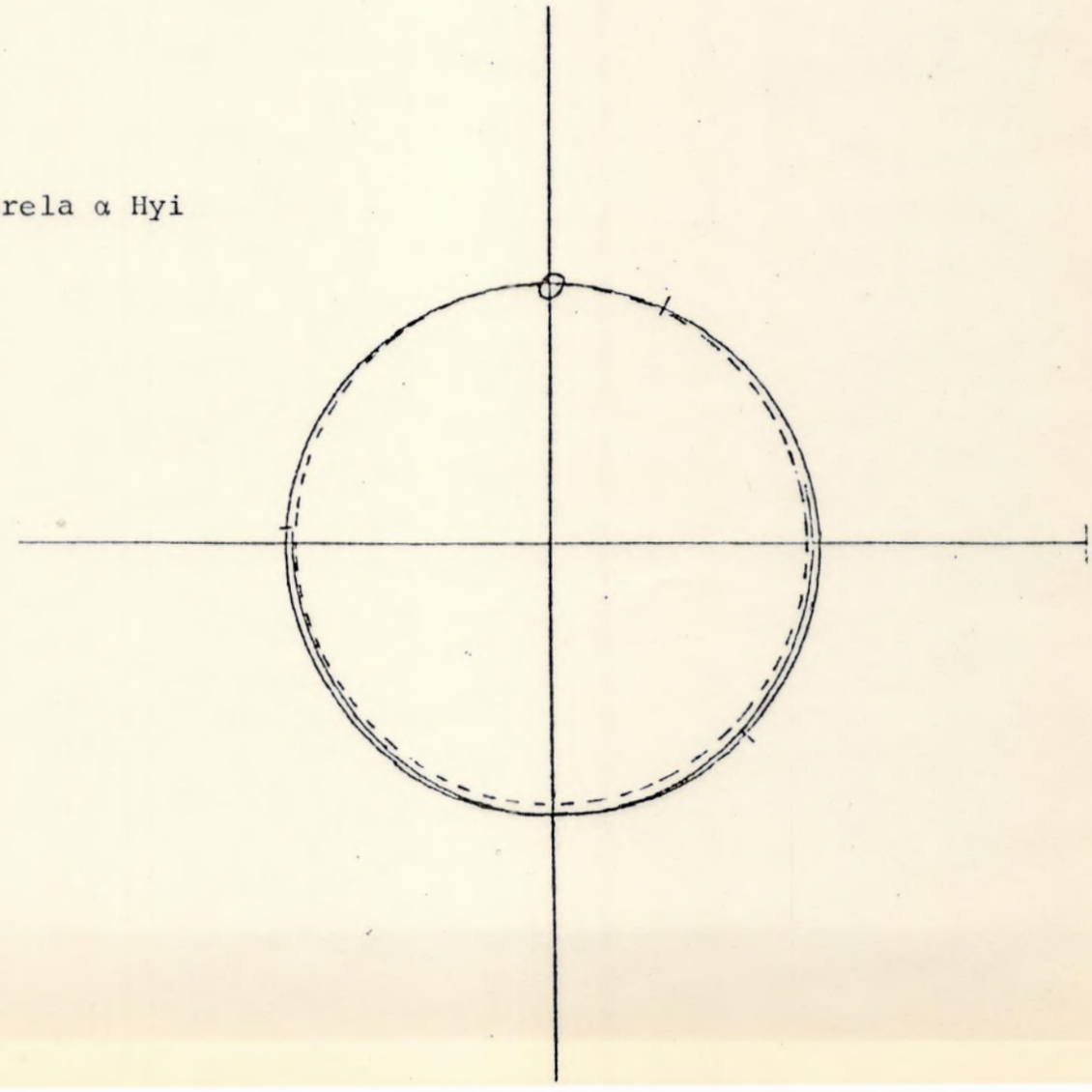
III.4.1 - GRÁFICOS

Estrela 61 Cygni



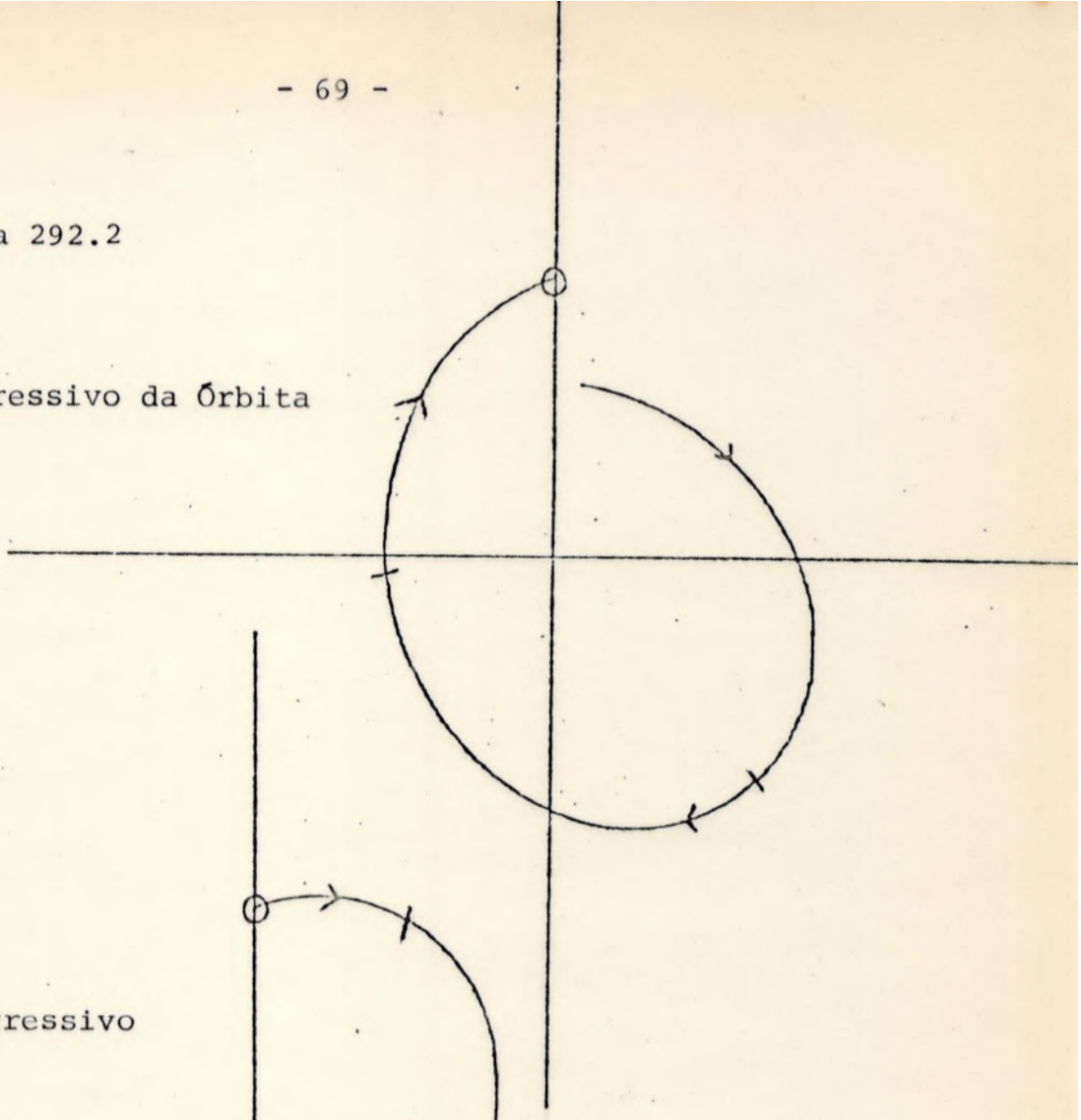
O círculo pontilhado possui r=10 kpc.

Estrela α Hyi

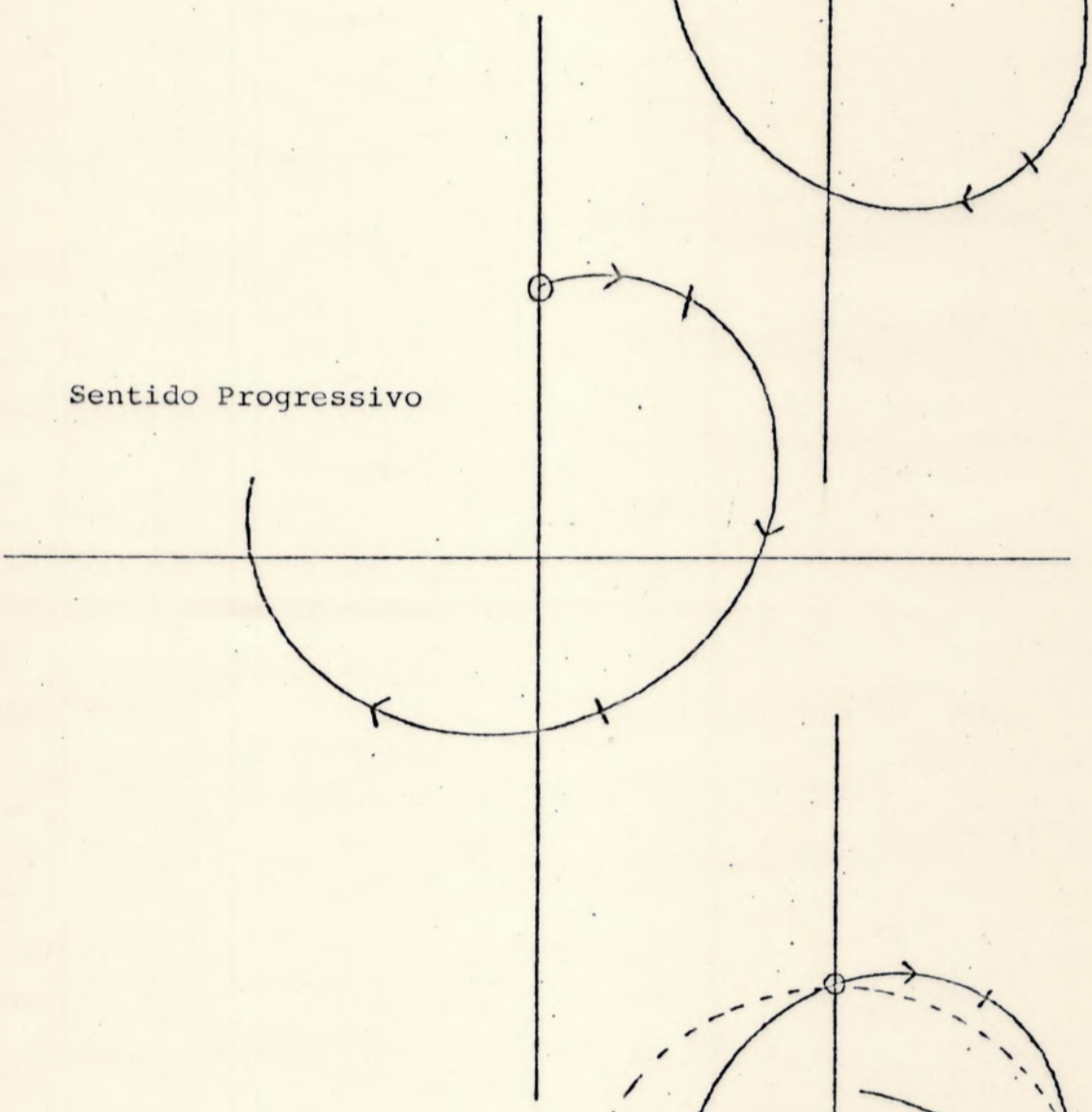


1) Estrela 292.2

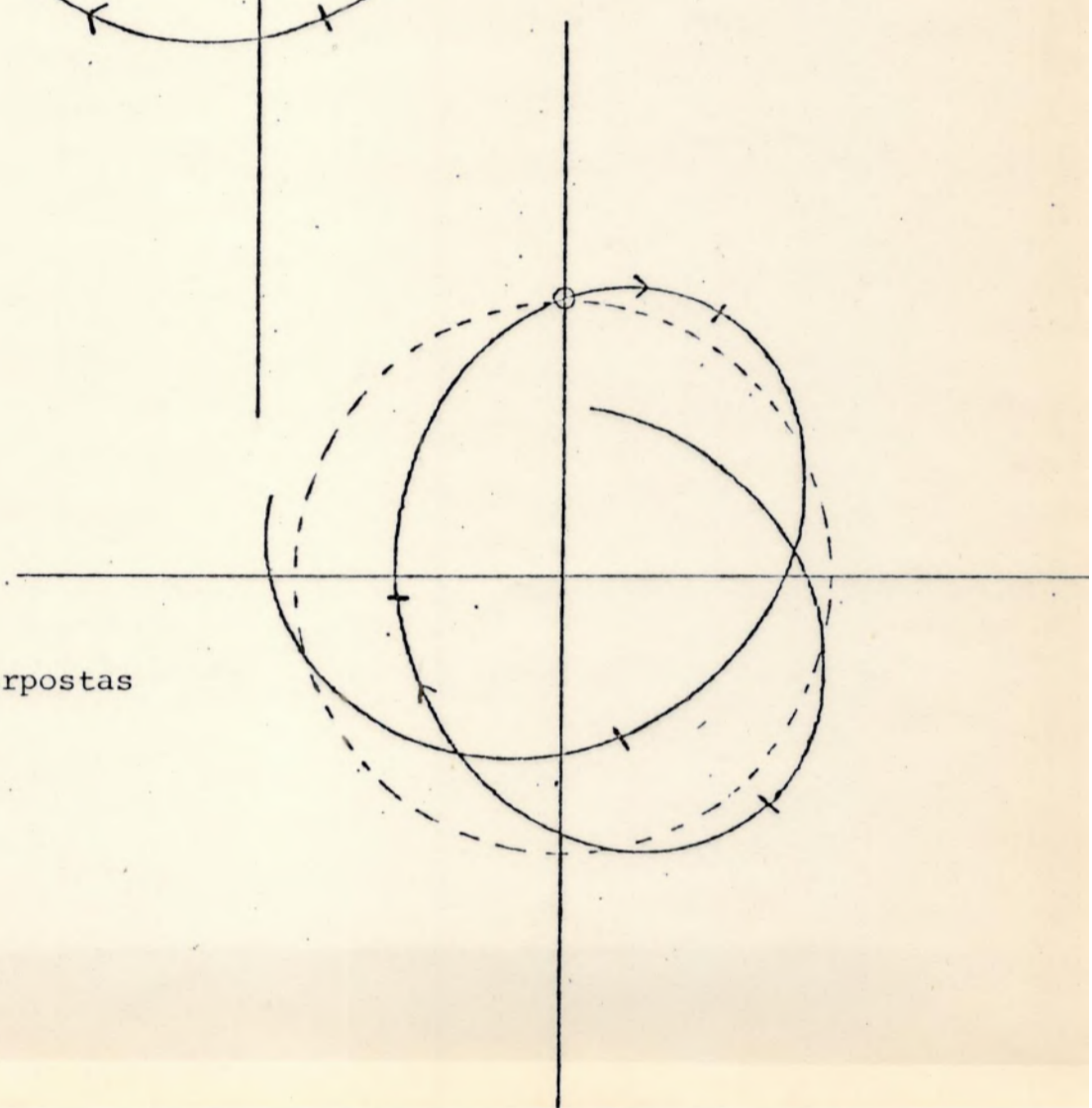
Sentido Regressivo da Órbita



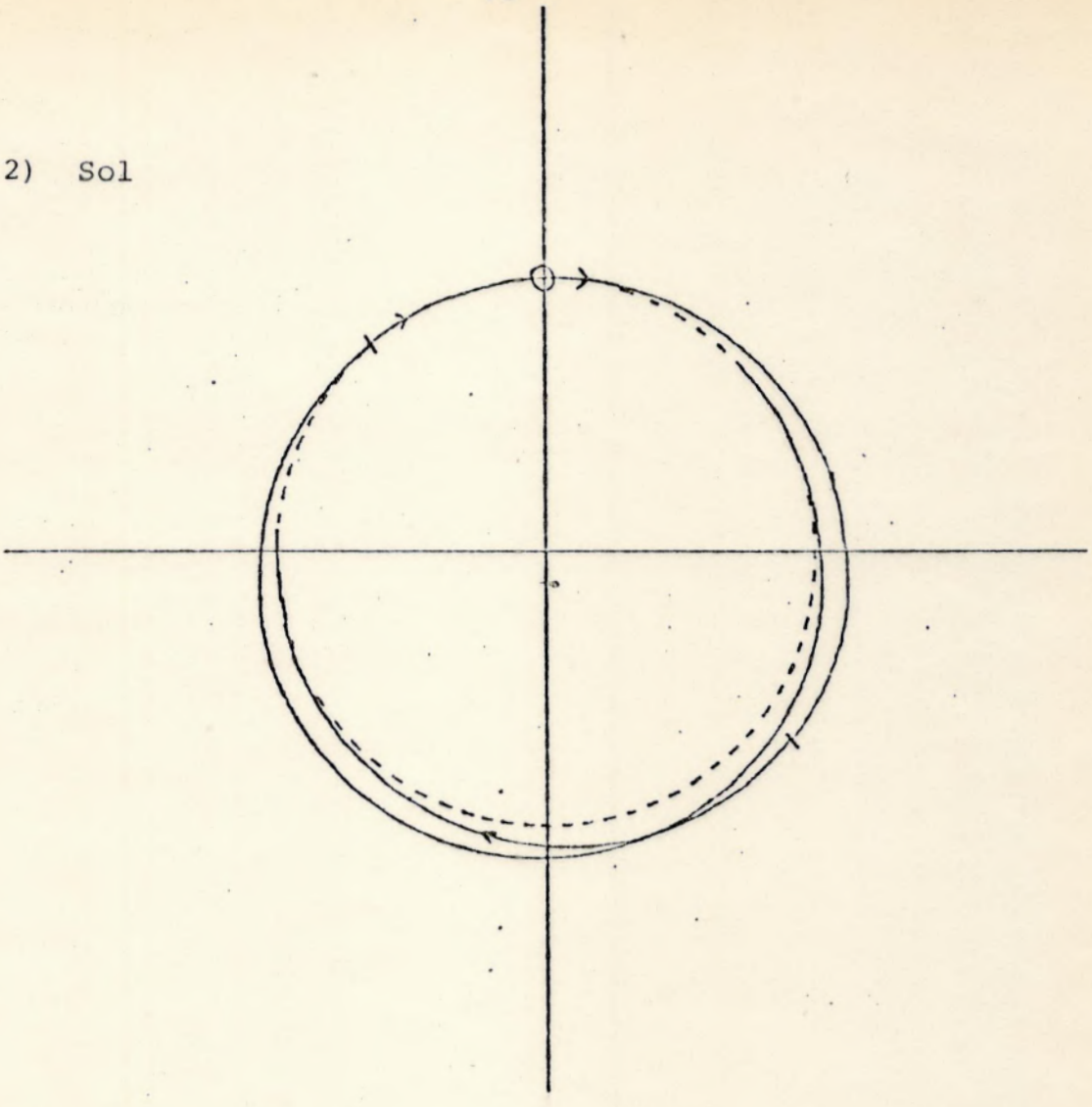
Sentido Progressivo



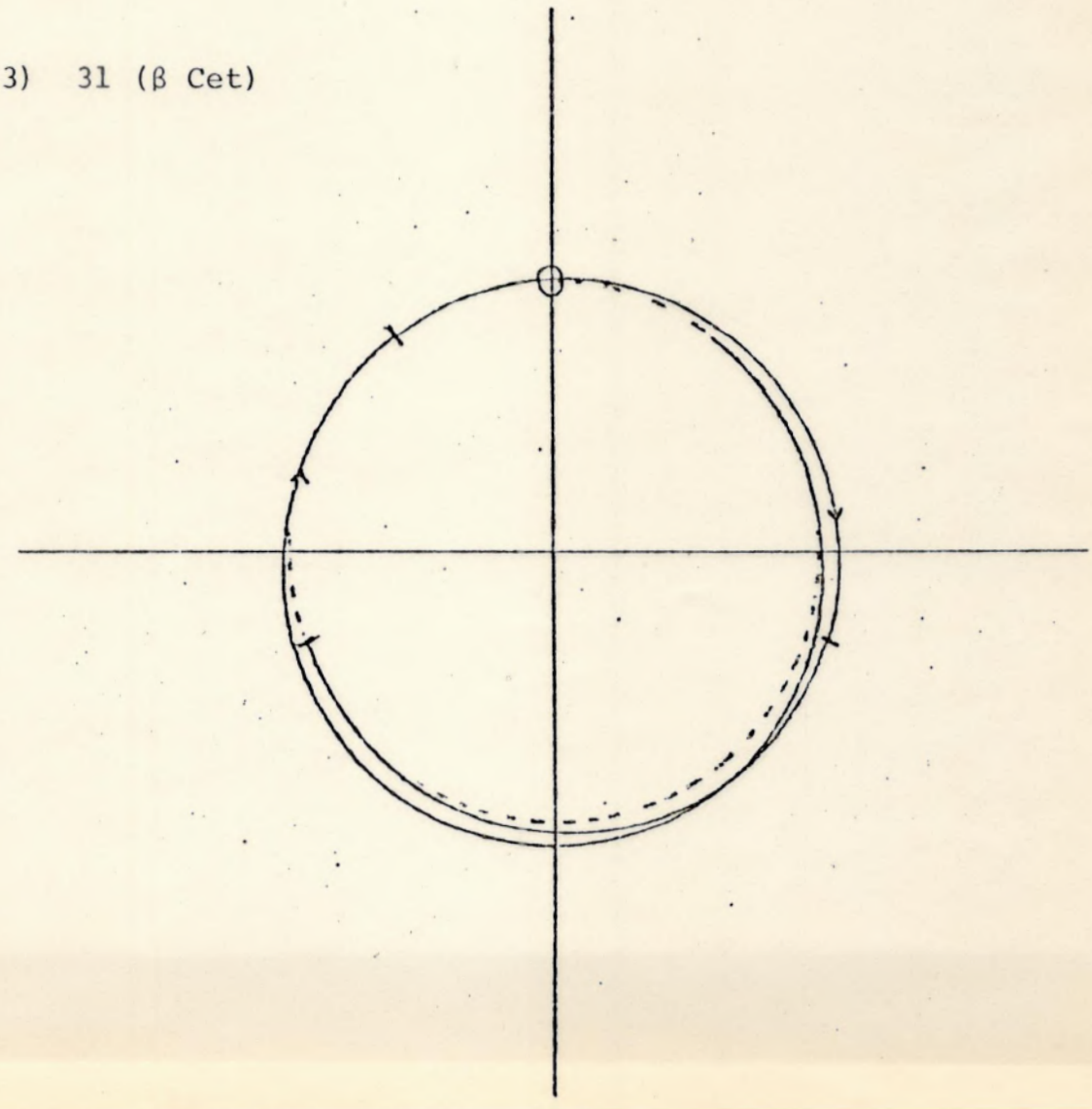
Órbitas Superpostas



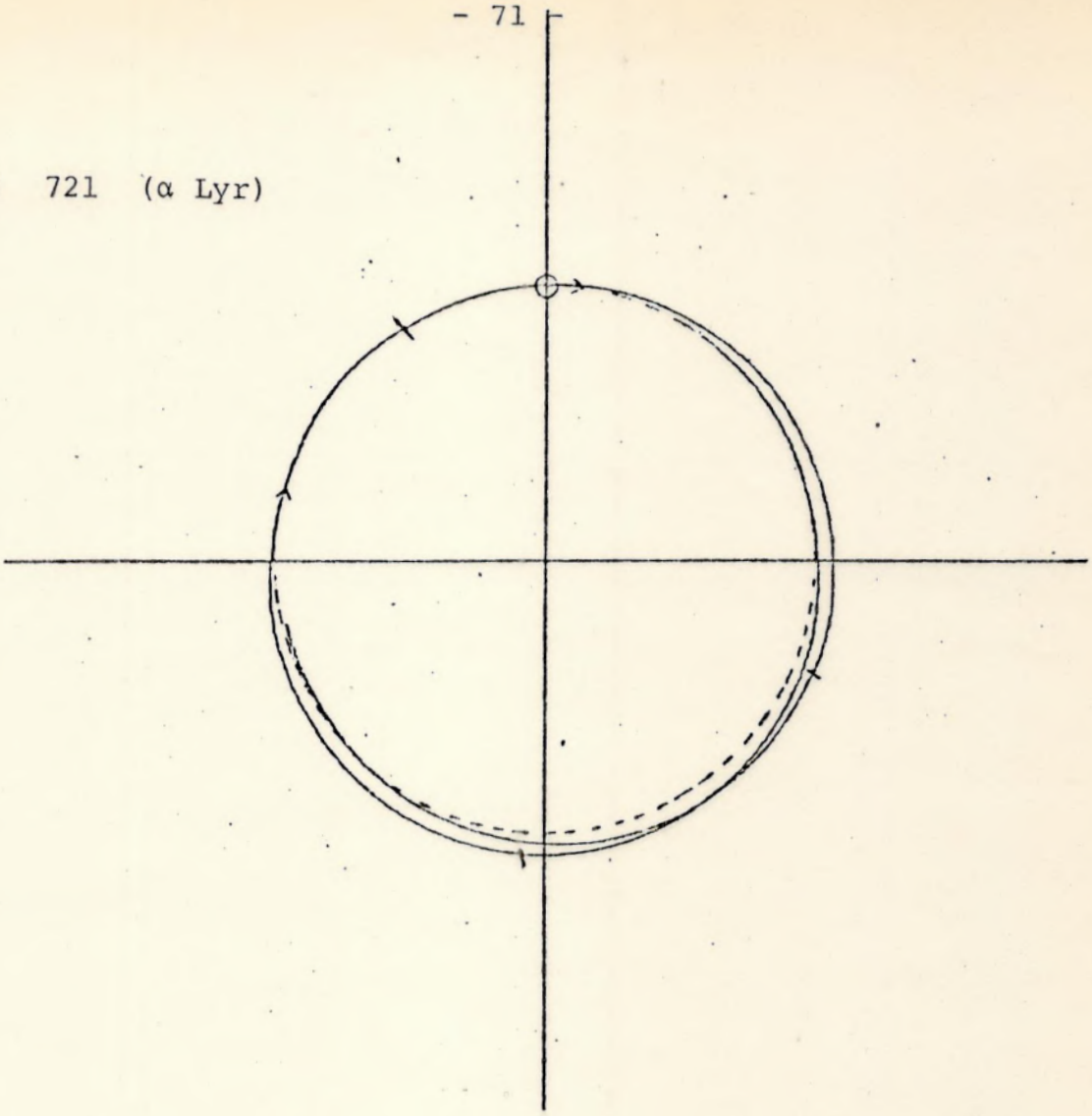
2) Sol



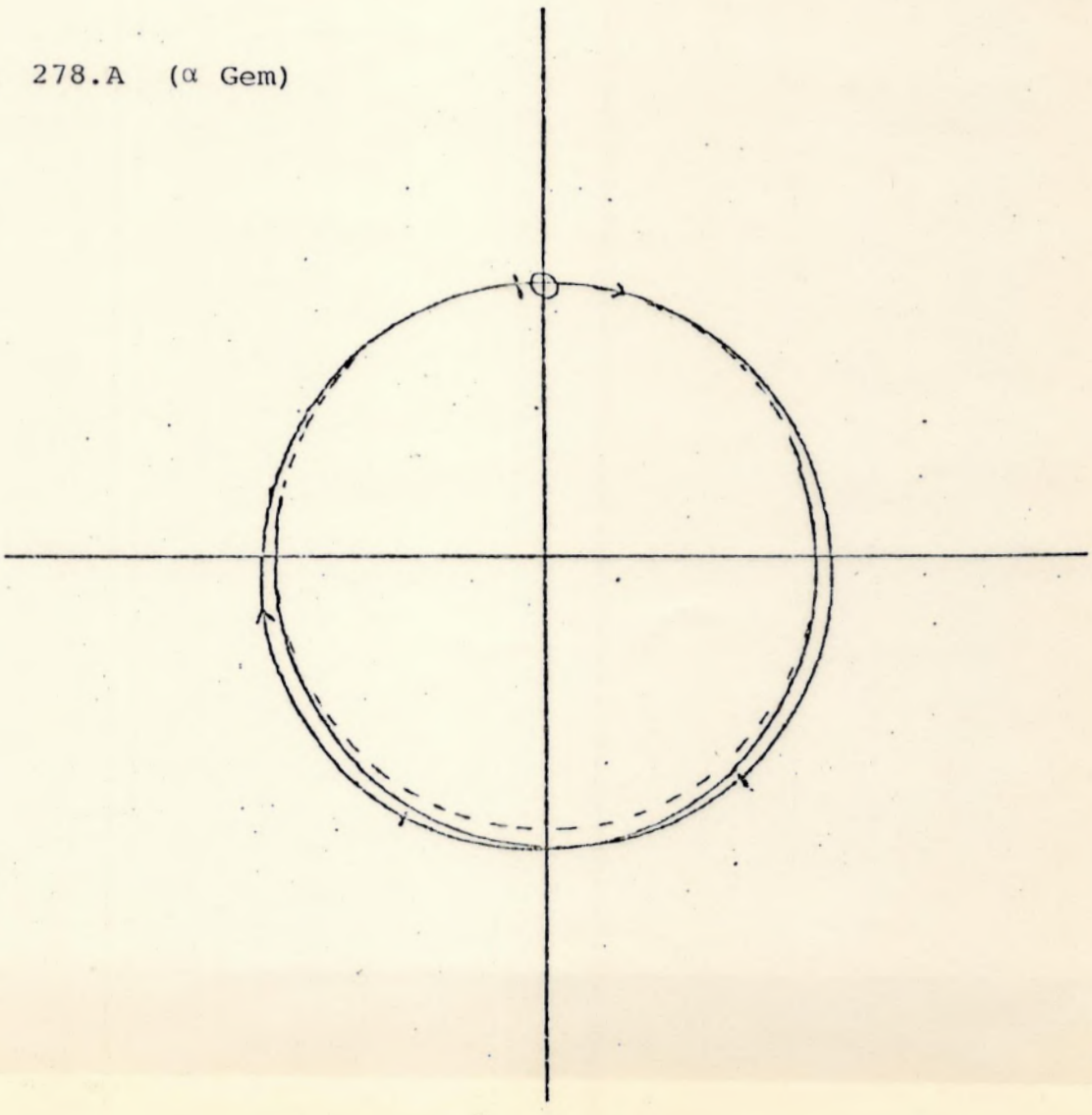
3) 31 (β Cet)



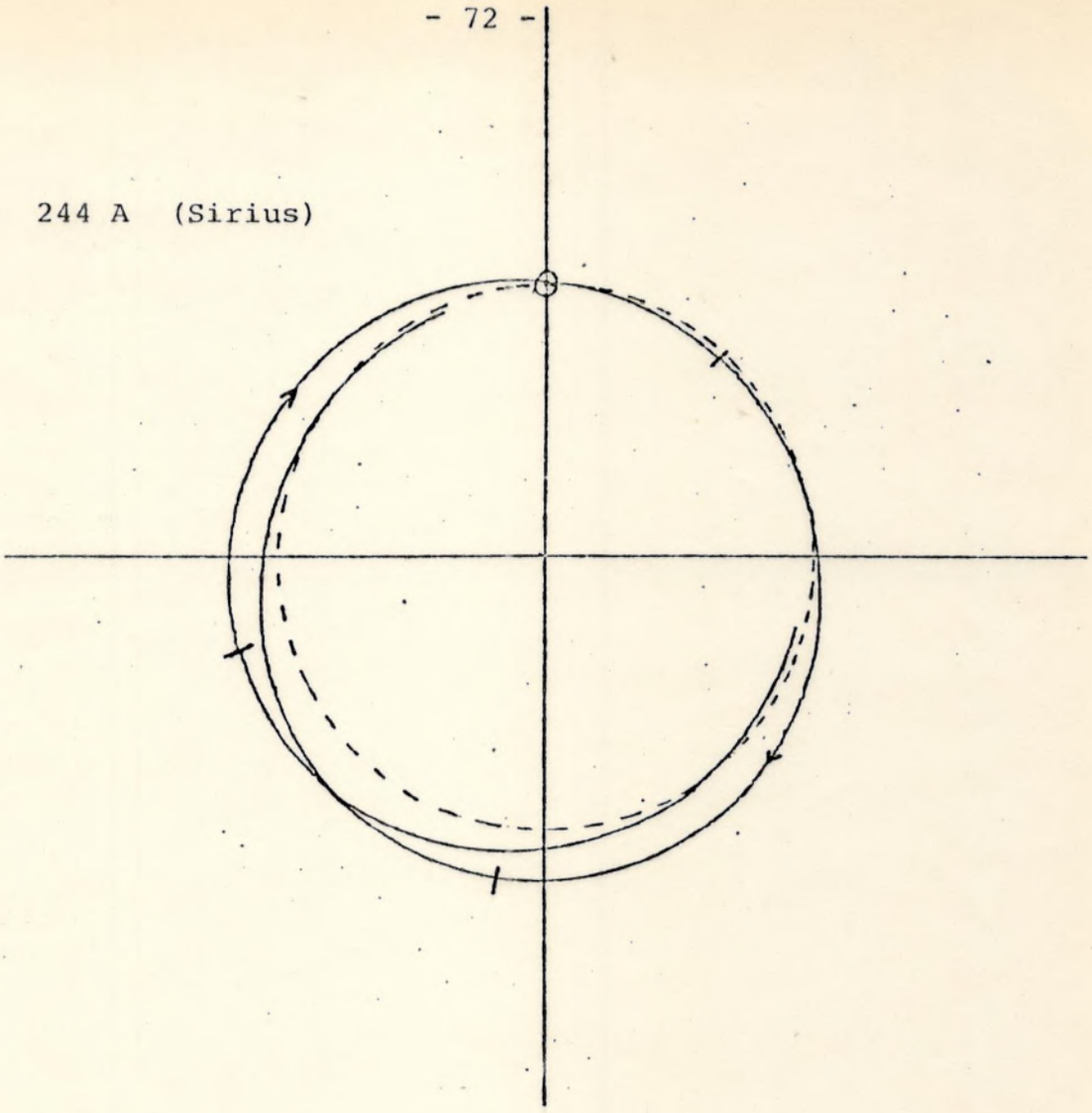
4) 721 (α Lyr)



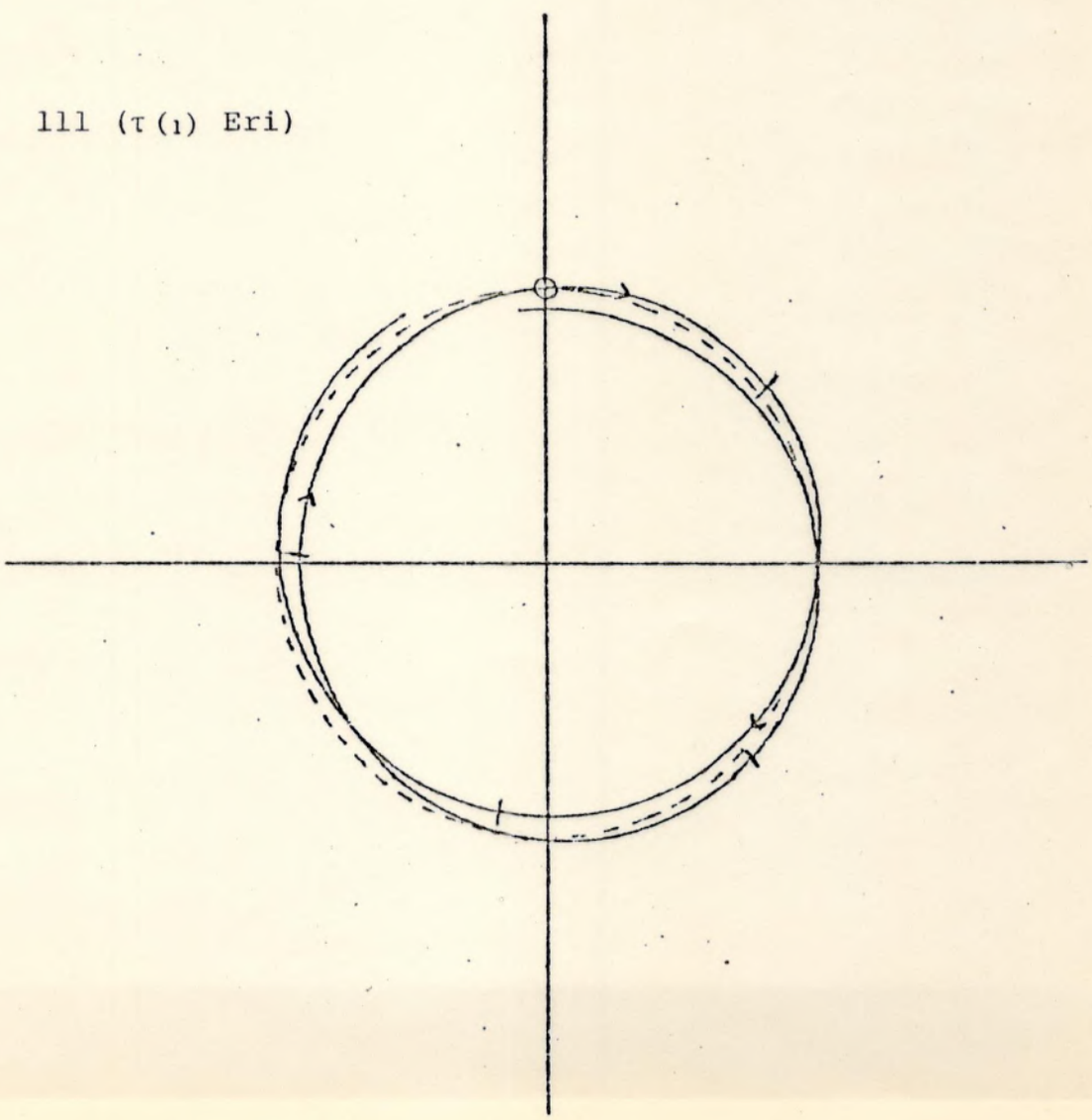
5) 278.A (α Gem)



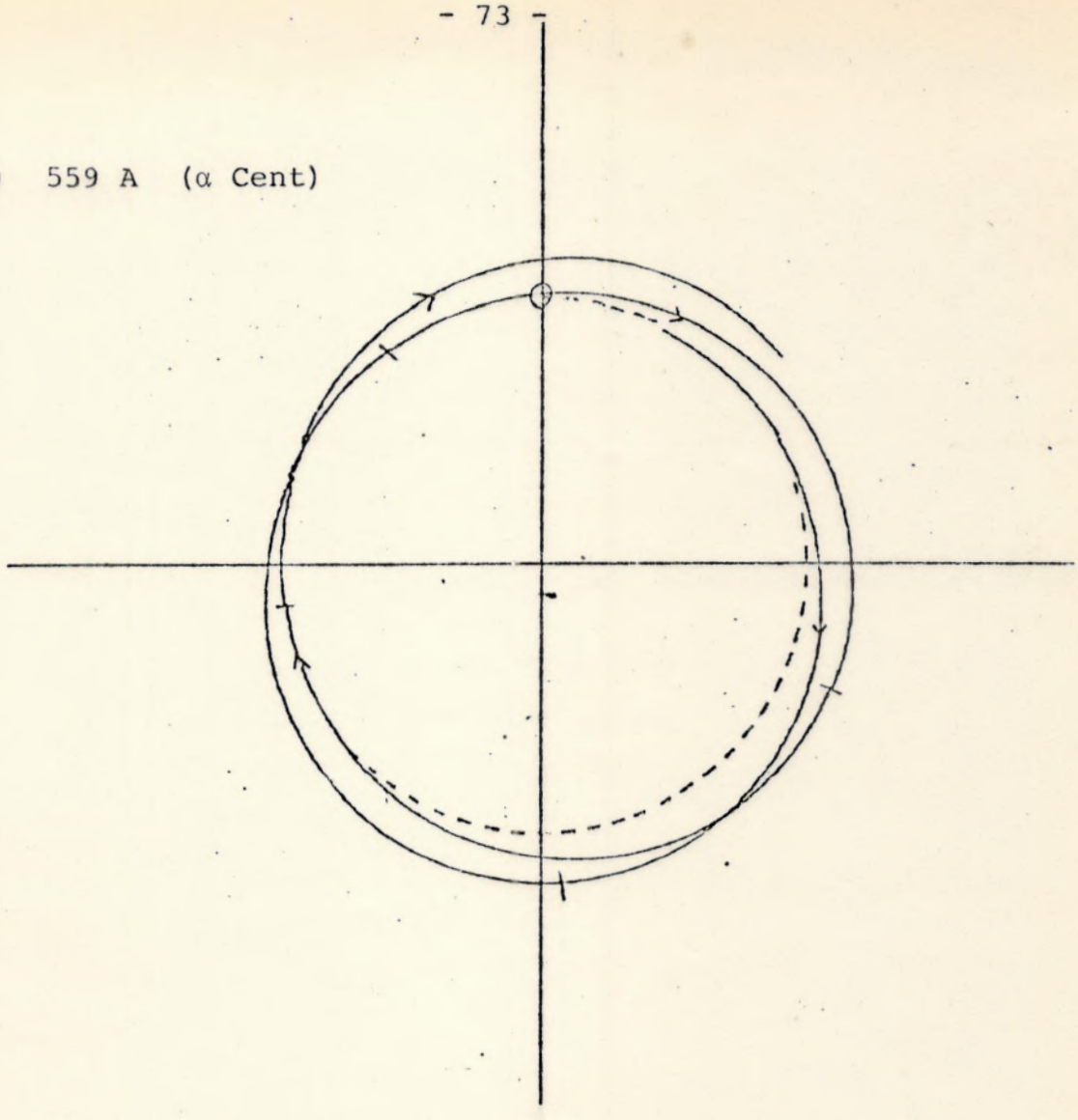
6) 244 A (Sirius)



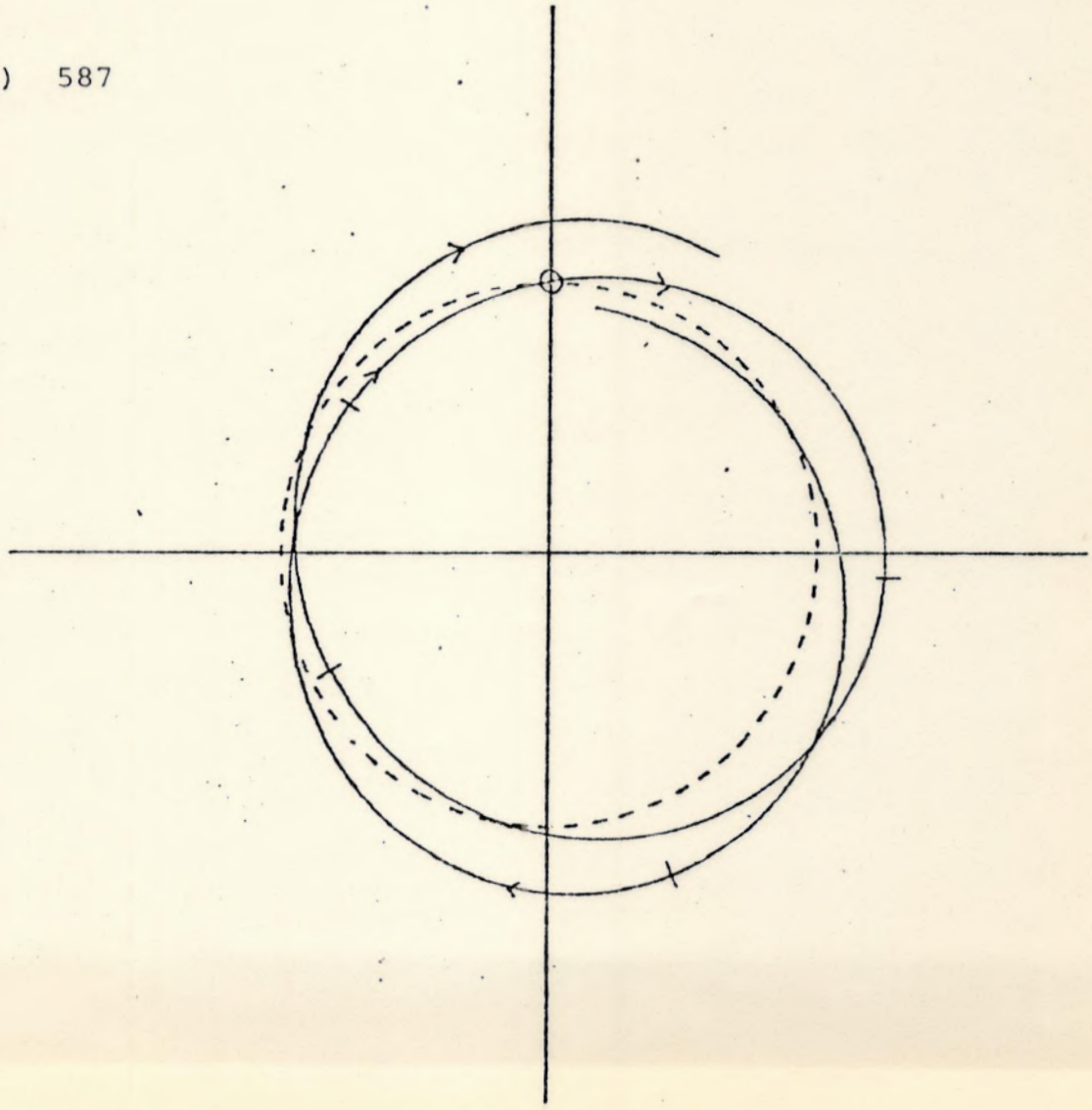
7) 111 (τ (1) Eri)



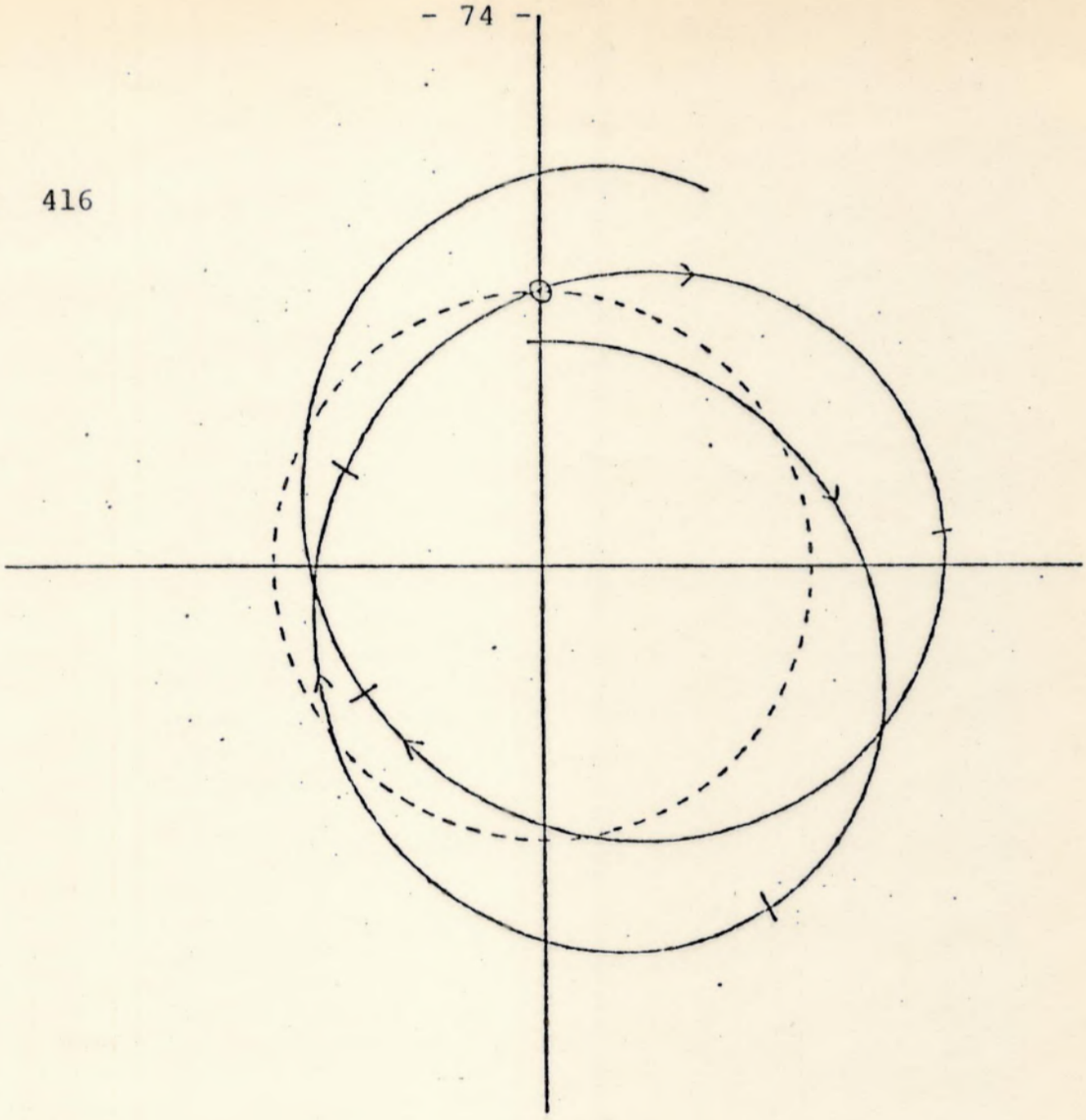
8) 559 A (α Cent)



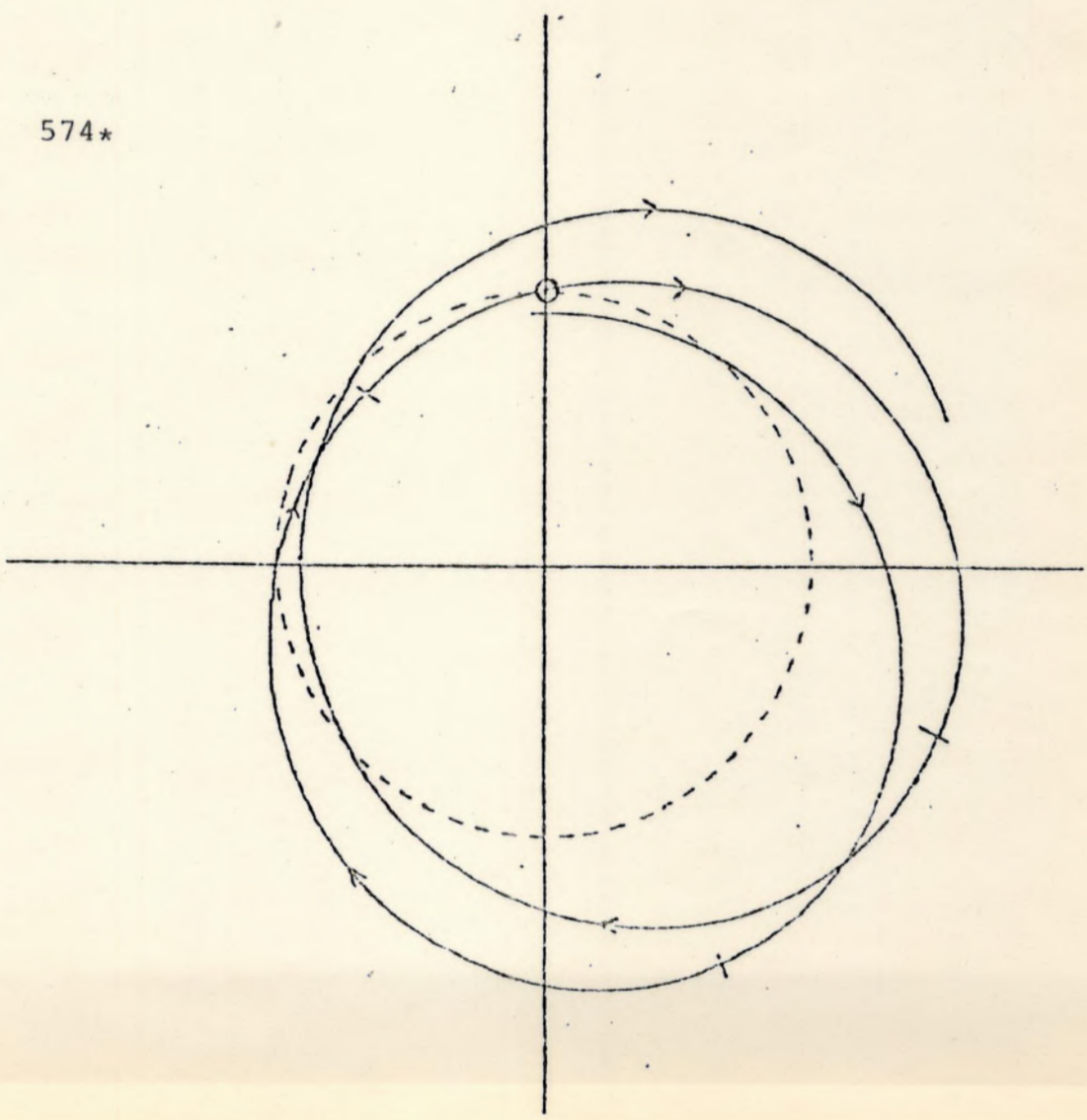
9) 587



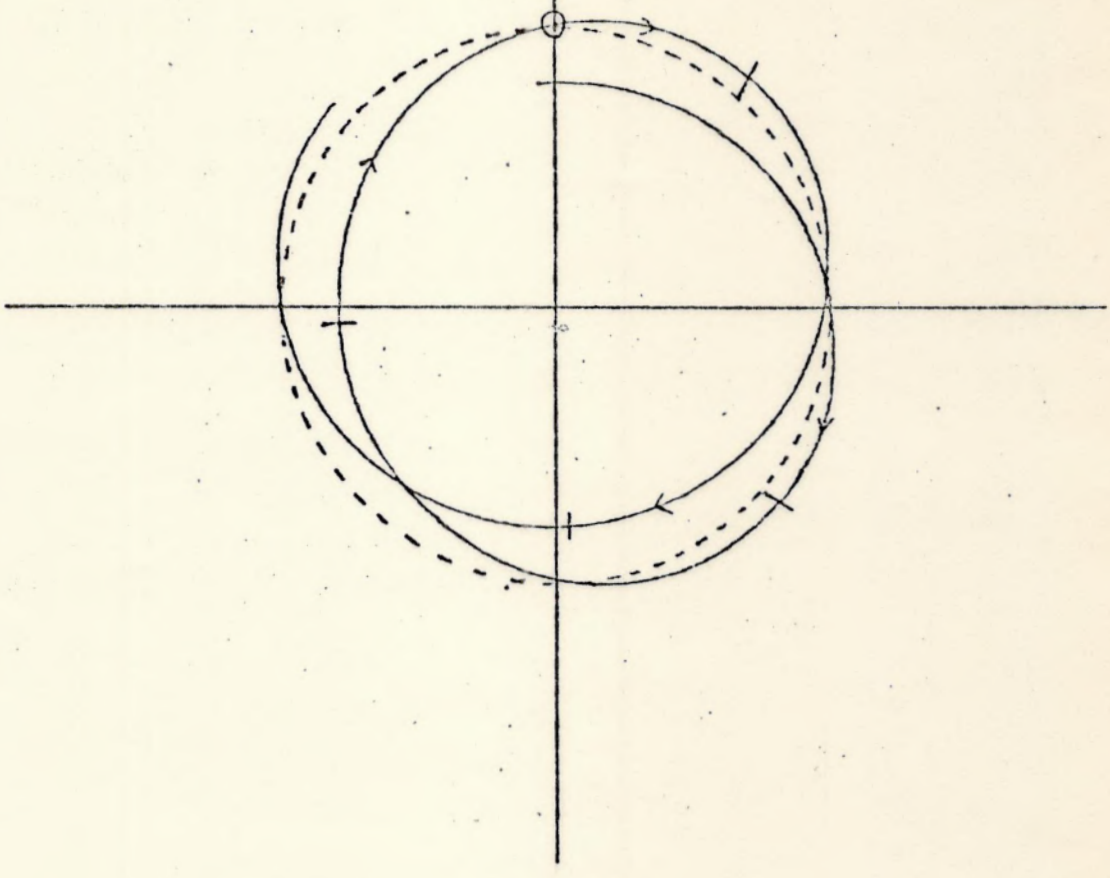
10) 416



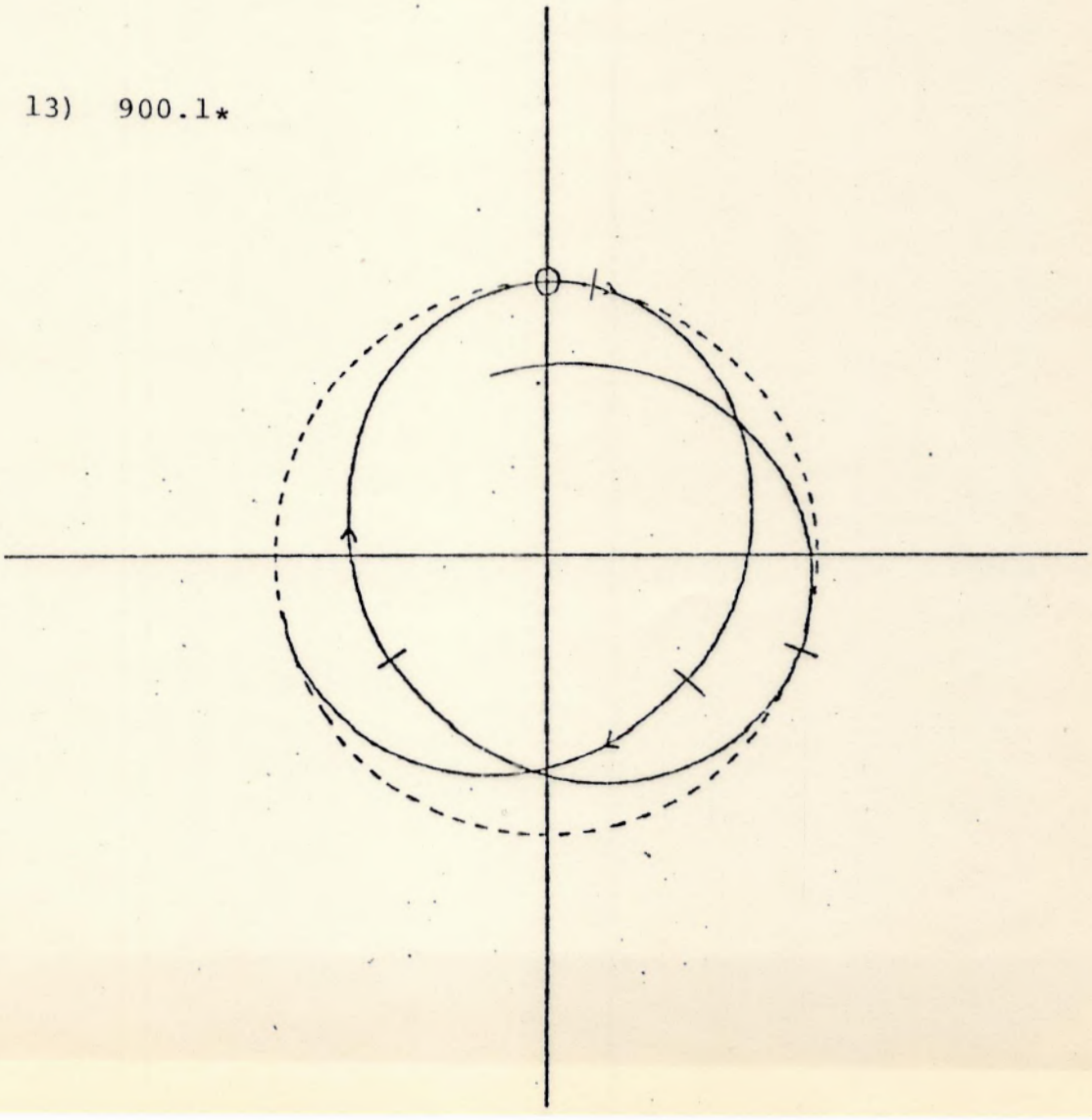
11) 574*



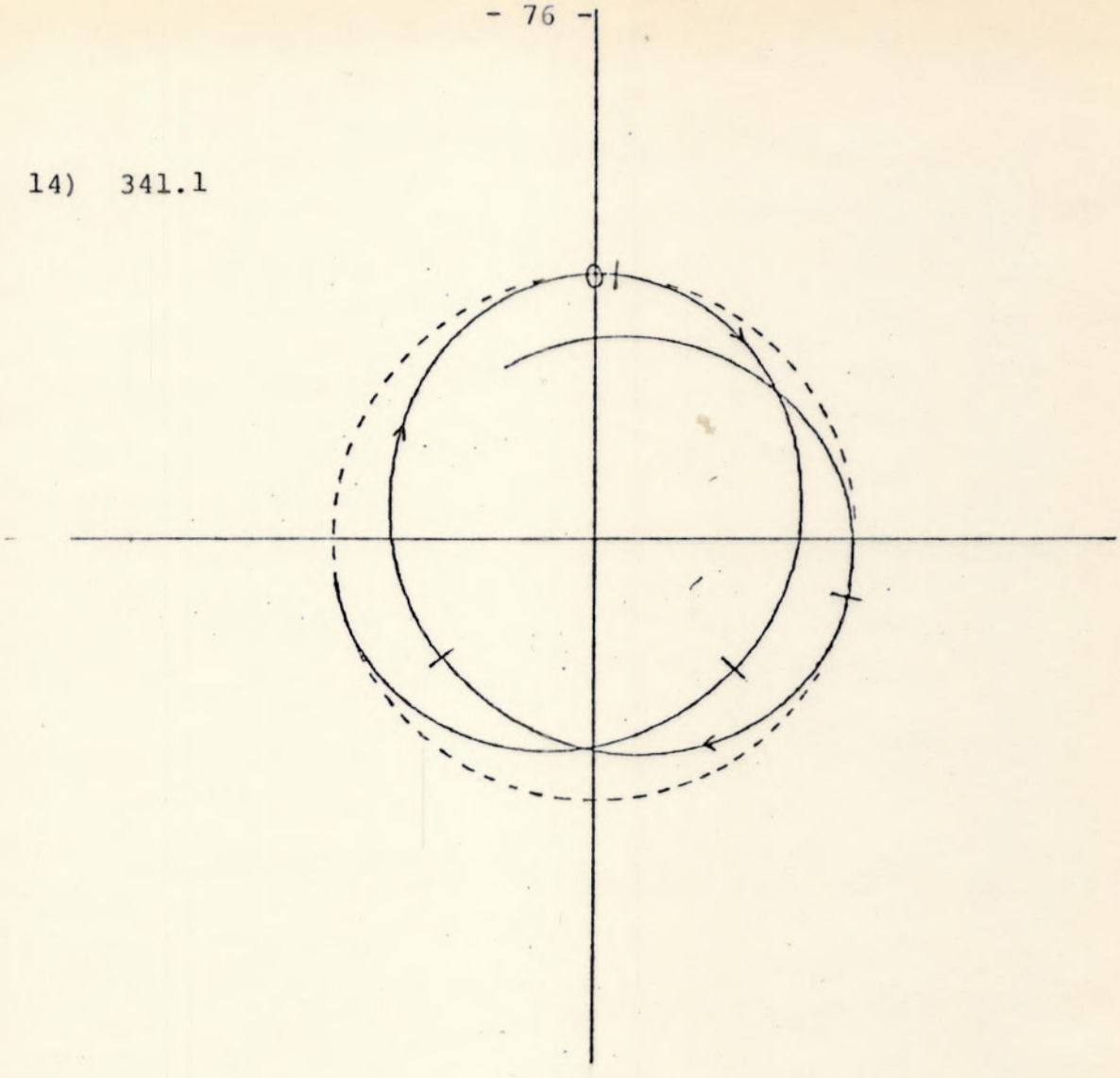
12) 893.2A* (Psi Aqr)



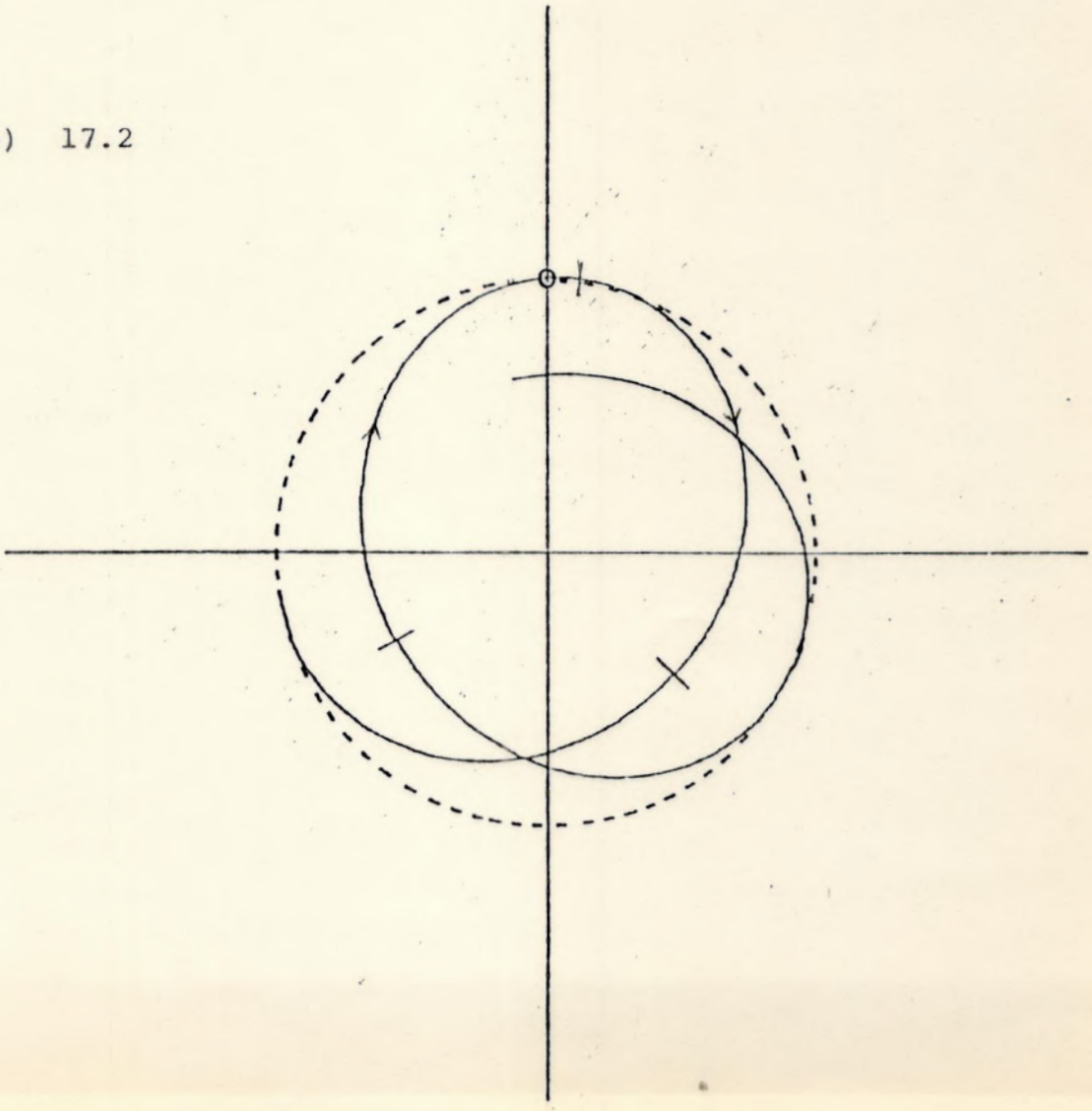
13) 900.1*



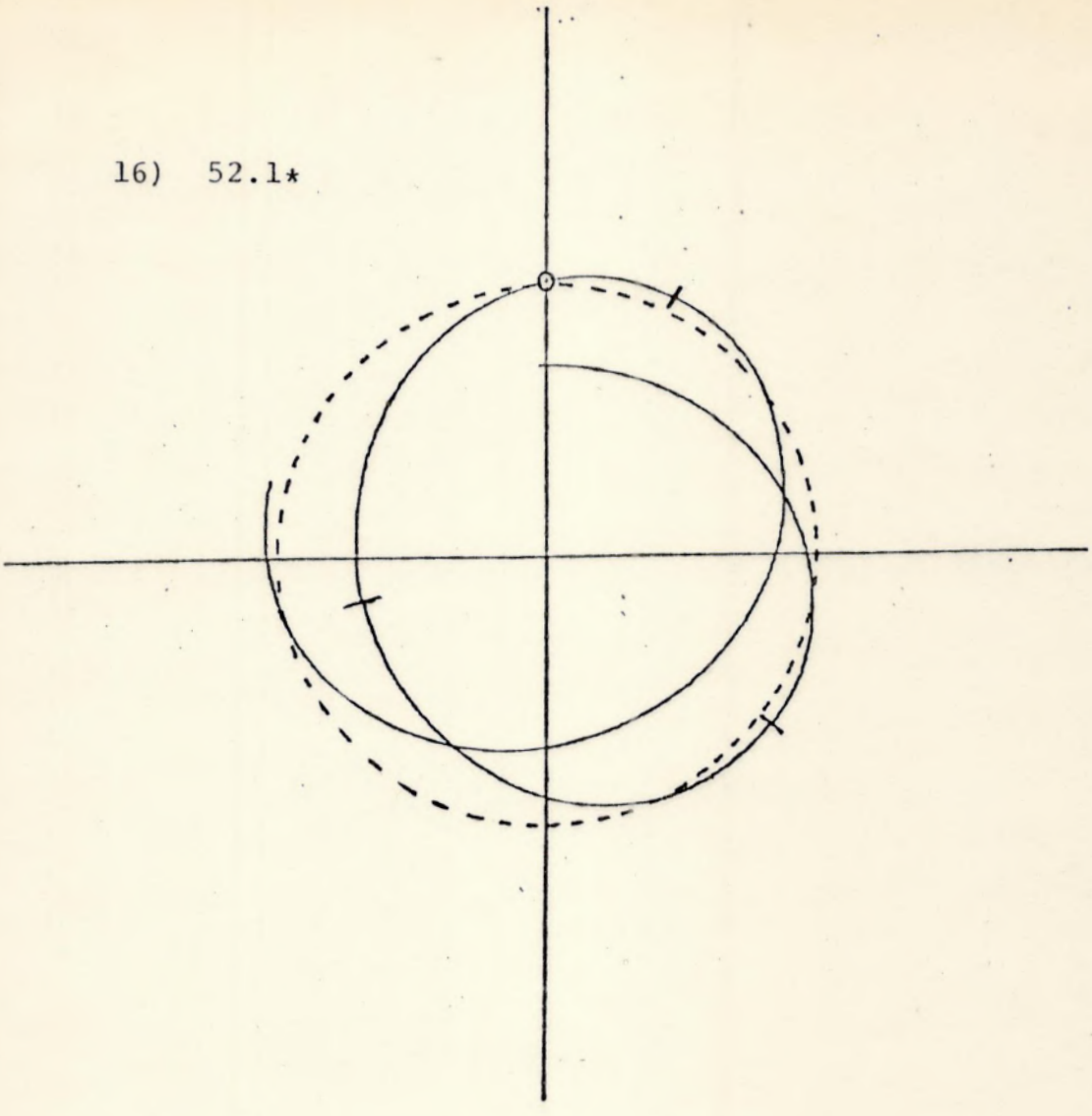
14) 341.1



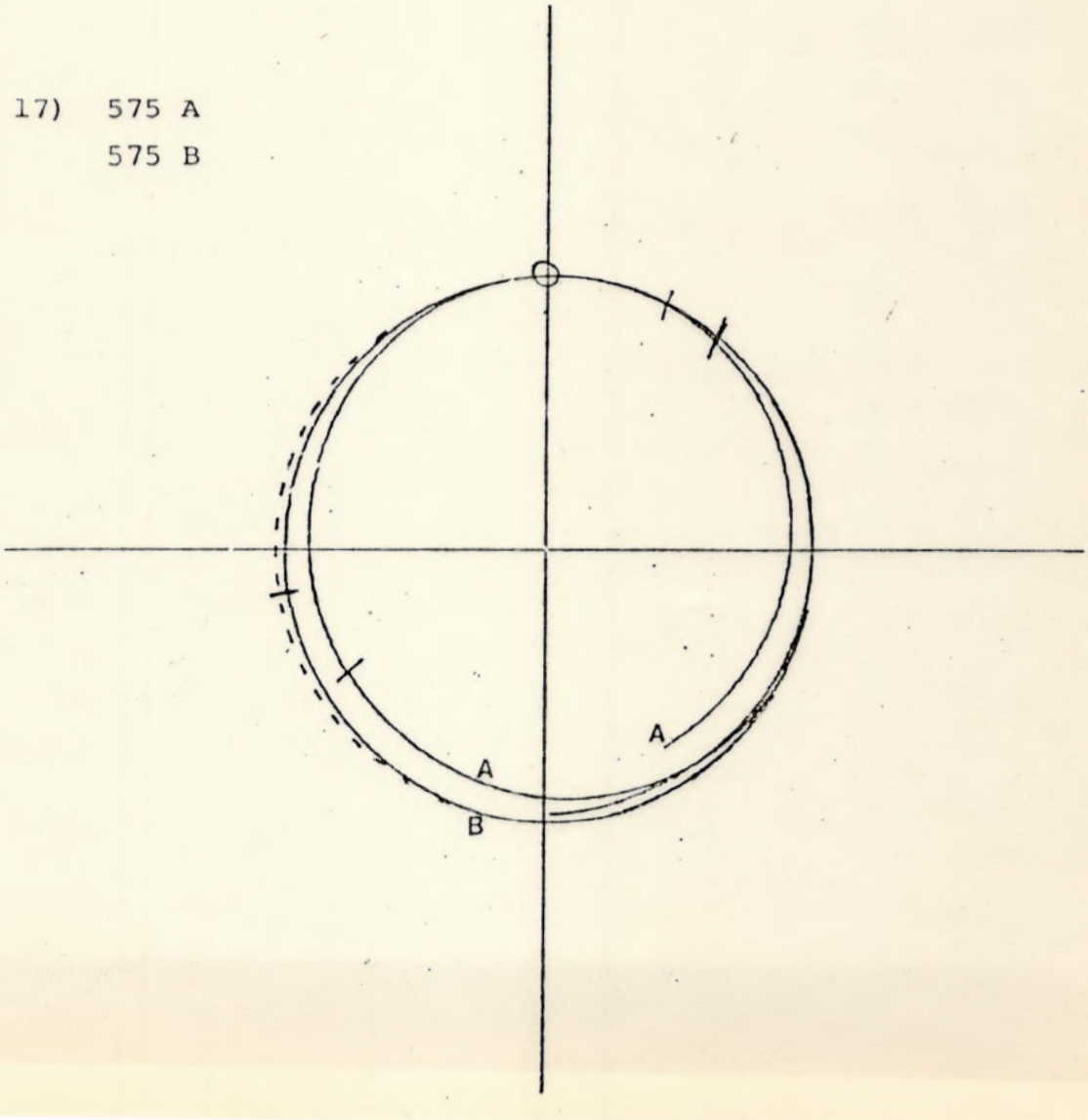
15) 17.2



16) 52.1*

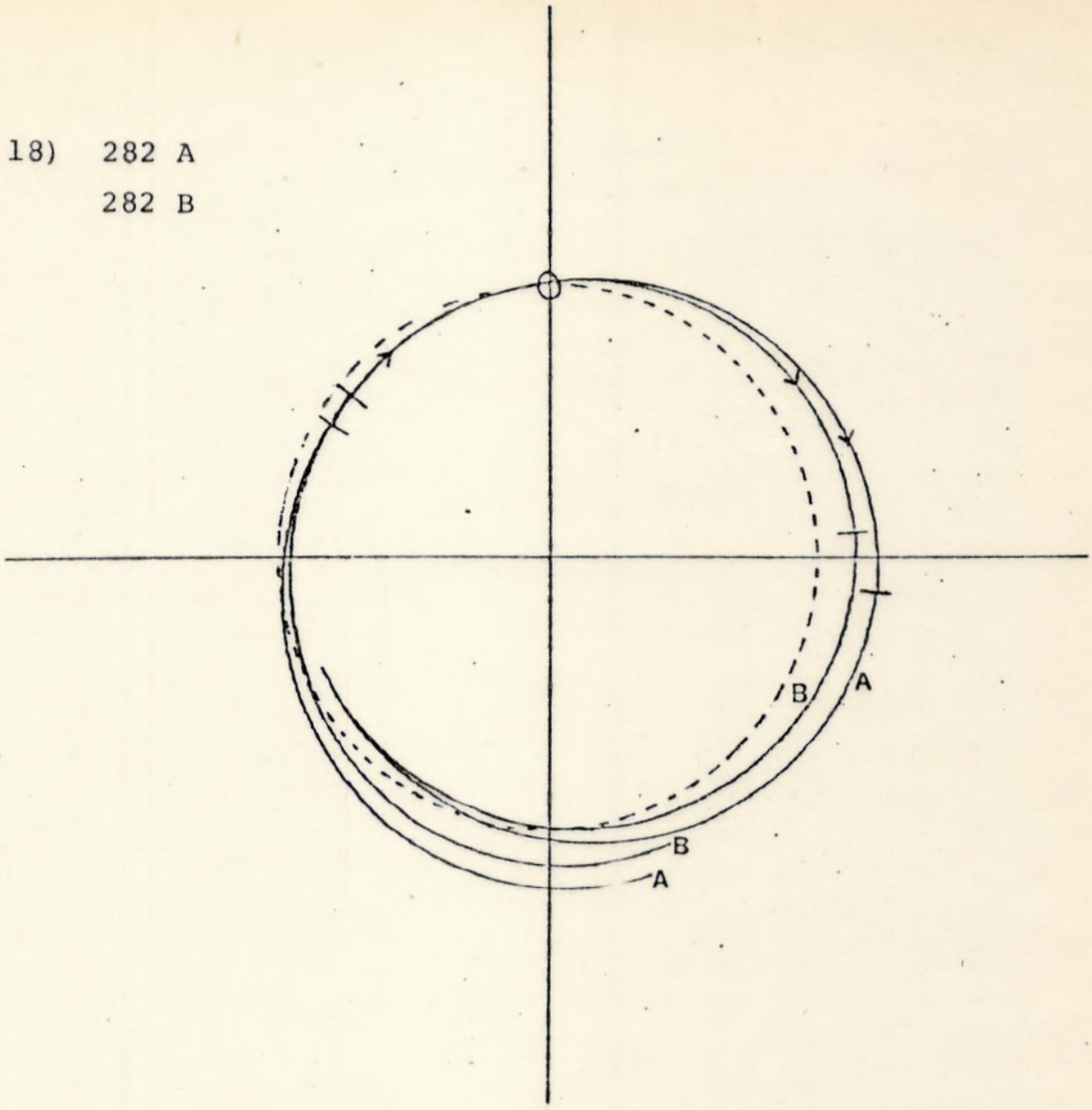


17) 575 A
575 B



18) 282 A

282 B



(*) As imprecisões no traçado das órbitas são próprias do modelo "Hewlett-Packard 9862 A Calculator Plotter", existente no Observatório do Valongo.

(**) Os gráficos, para fins de composição do trabalho, acham-se reduzidos em, aproximadamente, 21% do traçado original obtido pelo Programa.

IV - CONCLUSÕES

A Tabela 12, retirada da ref. 8, apresenta, ordenadamente, e de uma forma mais completa, valores de r máximos e mínimos para órbitas de estrelas com diferentes componentes de velocidade no plano galático.

V_{*PLR}	U_{*PLR} 100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
-60 km/s											
$r_{máx}$ (kpc)	11,88	11,52	11,19	10,91	10,67	10,47	10,30	10,17	10,08	10,02	10,00
$r_{mín}$ (kpc)	5,52	5,60	5,68	5,76	5,83	5,90	5,95	6,00	6,03	6,06	6,06
-50 km/s											
$r_{máx}$ (kpc)	12,13	11,72	11,36	11,04	10,77	10,54	10,35	10,20	10,09	10,02	10,00
$r_{mín}$ (kpc)	5,89	5,98	6,08	6,17	6,26	6,34	6,41	6,47	6,52	6,55	6,56
-40 km/s											
$r_{máx}$ (kpc)	12,45	11,99	11,58	11,22	10,91	10,64	10,42	10,24	10,11	10,03	10,00
$r_{mín}$ (kpc)	6,26	6,37	6,49	6,60	6,71	6,81	6,90	6,98	7,04	7,08	7,09
-30 km/s											
$r_{máx}$ (kpc)	12,88	12,35	11,88	11,47	11,10	10,79	10,52	10,30	10,14	10,04	10,00
$r_{mín}$ (kpc)	6,63	6,76	6,90	7,03	7,16	7,29	7,41	7,52	7,61	7,66	7,63
-20 km/s											
$r_{máx}$ (kpc)	13,44	12,84	12,30	11,82	11,39	11,02	10,69	10,41	10,20	10,05	10,00
$r_{mín}$ (kpc)	6,99	7,14	7,30	7,46	7,62	7,78	7,94	8,09	8,22	8,31	8,34
-10 km/s											
$r_{máx}$ (kpc)	14,17	13,51	12,90	12,34	11,83	11,38	10,98	10,63	10,32	10,09	10,00
$r_{mín}$ (kpc)	7,34	7,51	7,68	7,86	8,05	8,25	8,45	8,66	8,86	9,02	9,10
0 km/s											
$r_{máx}$ (kpc)	15,01	14,37	13,72	13,10	12,52	11,99	11,51	11,08	10,69	10,33	10,00
$r_{mín}$ (kpc)	7,66	7,85	8,03	8,23	8,44	8,66	8,90	9,15	9,41	9,70	10,00
10 km/s											
$r_{máx}$ (kpc)			14,74	14,13	13,53	12,95	12,42	11,95	11,55	11,26	11,14
$r_{mín}$ (kpc)			8,35	8,55	8,77	9,00	9,23	9,47	9,71	9,91	10,00
20 km/s											
$r_{máx}$ (kpc)			15,74	15,26	14,76	14,26	13,77	13,33	12,98	12,74	12,66
$r_{mín}$ (kpc)			8,61	8,81	9,02	9,24	9,45	9,65	9,83	9,95	10,00

De "TABLES OF PLANE GALACTIC ORBITS", Contopoulos e Strömgren, NASA, Institute for Space Studies, 1965, in "Galactic Astronomy", MIHALAS, D. (ref. 8)

TABELA 12

Neste projeto, embora tenhamos ficado restritos a um número diminuto de órbitas, podemos verificar que as órbitas de estrelas, que possuem velocidades maiores ao longo de ambos os eixos U e V, assemelham-se a elipses não fechadas, assumindo a forma de uma "roseta". A excentricidade dessas elipses é proporcional às velocidades, atendo-se ao detalhe de que a velocidade em V acentua a forma "rosetada". Por outro lado, percebe-se em estrelas com altas velocidades em U e pequenas velocidades em V um movimento helicoidal. A órbita permanece quase circular quando ambas as velocidades em U e V são baixas.

Faz-se necessário ressaltar alguns pontos que, porventura, possam limitar os resultados obtidos ou que mereçam atenção para um possível aprimoramento dos mesmos. Primeiramente, a expressão que utilizamos para o potencial — desenvolvida por Parenago — proporcionou resultados que diferiam algo daqueles obtidos por Strömgren e Contopoulos quando da publicação de "TABLES OF PLANE GALACTIC ORBITS" (NASA, Institute for Space Studies, NY, 1965), por nós considerado como modelo de cotejo. Estas tabelas, por sua vez, ao serem aplicadas a problemas reais na Galáxia, revelam demandarem correções. Os coeficientes do potencial utilizado pelos dois autores podem se alterar de maneira não coerente com a correspondente curva de rotação. E, por outro lado, a matéria no plano galático não se distribui, na realidade, com simetria axial. Contudo, quando o sistema espiral não é rotativo, não há apreciáveis alterações nas órbitas de Strömgren — Contopoulos, o que não acontece ao serem estudados casos de ressonância e campos espirais típicos (ver ref. 2 pág. 71 e 79).

Órbitas estelares no plano galático são, apenas, aproximações das órbitas reais, as quais, por serem tridimensionais, exigirão um equacionamento que leve em consideração a velocidade espacial da estrela. Neste caso, tanto o potencial utilizado neste trabalho quanto o método numérico consistiriam uma primeira aproximação. Entretanto, se nos restringirmos ao capítulo das órbitas planas, este projeto é ainda, quanto ao potencial, uma primeira aproximação, tendo em vista a existência de modelos mais elaborados. Observamos, porém, que o método de solução numérica da equação diferencial manter-se-á, não importando o grau de complexidade assumido pelo potencial.

Por fim, sabemos que a teoria da rotação galática se aplica ao movimento de centróides, definidos como pontos movendo-se com a velocidade média de um grupo de estrelas em um determinado

volume. Queremos notar que, ao longo de todo o trabalho, tratamos de massas puntuais. A relação destas com centróides, localizados à mesma distância no plano galático, merece consideração, a fim de que a teoria da determinação das órbitas esteja conceitualmente precisa (ver ref. 10 e ref. 5).

V - PROGRAMAS

VI - PROGRAMA DO MÉTODO ADAMS-KRILOV

PROGRAM NAME Método Adams-Krilov PAGE ____ OF ____

ROM'S 1 ____ 2 ____ 3 ____

EQUIPMENT NEEDED

[X] PRINTER [ ] MARKED CARD READER [ ] ____

[X] PLOTTER [ ] TYPEWRITER [ ] ____

TOTAL PROGRAM STEPS [ ] 500 [ ] 1012 [X] 2036

TOTAL REGISTERS [ ] 51 [ ] 111

HEWLETT · PACKARD

STEP	KEY	CODE	x	y	z
00	CLEAR		0	0	
1	K				
2	FMT				
3	↑				
4	FMT				
5	↓				
6	FMT				
7	↑				
8	CONT				
9	2				
10	0		20		
1	↑			20	
2	CLEAR X		0	20	
3	K				
4	FMT				
5	↓				
6	2				
7	0				
8	CHG SIGN		-20		
9	↑				
20	CLEAR X		0	-20	
1	K				
2	FMT				
3	↓				
4	CLEAR X		0		
5	↑		0	0	
6	K				
7	FMT				
8	↓				
9	CLEAR X				
30	↑		0	0	
1	2				
2	0		20	0	
3	K				
4	FMT				
5	↓				
6	CLEAR X				
7	↑				
8	2				
9	0				
40	CHG SIGN		-20	0	
1	K				
2	FMT				
3	↓				
4	FMT				
5	↑				
6	STOP		U	V	
7	↑			U	V
8	9		9		
9	CHG SIGN		-9	U	V

STEP	KEY	CODE	x	y	z
50	+			U_{*PLR}	V
1	1				
2	2		12		
3	ROLL ↑		V	12	U_{*PLR}
4	+			V_{*PLR}	U_{*PLR}
5	2				
6	5				
7	0		250		
8	+			V_*	U_*
9	↓		V_*	U_*	
60	x→( )				
1	3				
2	3				
3	y→( )				
4	3				
5	2				
6	PRINT		V_*		
7	↓				
8	PRINT		U_*		
9	PRINT				
70	STOP		R_0	W	φ_0
1	K				
2	2				
3	x→( )				
4	5				
5	3				
6	y→( )				
7	5				
8	ROLL ↑		φ_0	R_0	W
9	x→( )				
80	f				
1	x⇄y				
2	PRINT		R_0	φ_0	
3	x^2		R_0^2		
4	↑				
5	6				
6	6				
7	.				
8	6				
9	7		66,67	R_0^2	
90	+				
1	8				
2	6				
3	8				
4	ENT EXP				
5	4		868×10^4	$R_0^2 + 66,67$	
6	x→( )				
7	3				
8	4				
9	x⇄y		$R_0^2 + 66,67$	868×10^4	

STORAGE	
b	ψ
a	
00	$\Delta^{1**}_{1/2}$
1	
2	
3	
4	
5	W
6	Φ^*_1
7	φ_0
8	Ω_1
9	
0	
11	$\Phi^1_{1/2}$
12	$\Phi^1_1, \Phi^{2*}_1, \Phi^{3**}_1$
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	
1	
2	
13	$1/2\ \Phi^1_{1,2}$
14	R_1
15	$\Delta 1/2$
16	$\Delta^1_{1/2}$
17	M^*_1
18	$1/2\ \Phi^{1*}_{1/2}$
19	$\Delta^{**}_{1/2} = \Delta^{***}_{1/2}$
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
20	r^{**}_1, Π^{***}_1
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

ALPHA

PROGRAM NAME Método Adams-Krilov PAGE ___ OF ___

ROM'S 1 ___ 2 ___ 3 ___

EQUIPMENT NEEDED

☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ___

☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐ ___

TOTAL PROGRAM STEPS ☐ 500 ☐ 1012 ☐ 2036

TOTAL REGISTERS ☐ 51 ☐ 111

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
100	÷			ρ	
1	y→( )				
2	5				
3	6				
4	x←( )				
5	3				
6	3		V_*		
7	x^2		V_*^2		
8	↑			V_*^2	
9	↑				V_*^2
110	x←( )				
1	3				
2	2		U_*	V_*^2	
3	x^2		U_*^2		
4	↑				
5	↓				
6	+		U_*^2	$U_*^2+V_*^2$	V_*^2
7	2		2		
8	÷			λ	
9	y→( )				
120	5				
1	7				
2	ROLL↑		V_*^2	2	
3	↑			V_*^2	2
4	x←( )				
5	5				
6	3		R_0		
7	x^2		R_0^2		
8	×			$R_0^2 V_*^2$	
9	↓		$R_0^2 V_*^2$		
130	$\sqrt{x}$				
1	PRINT		$R_0 V_*$		
2	PRINT		(h)		
3	x^2		$R_0^2 V_*^2$	2	
4	÷			ϕ	
5	y→( )				
6	5				
7	8				
8	CONT				
9	6				
140	6				
1	•				
2	6				
3	7		66,67	ϕ	
4	x←( )				
5	×				
6	5				
7	7		66,67 λ		
8	×			66,67 $\lambda\phi$	
9	6				

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
150	6				
1	•				
2	6				
3	7		66,67		
4	x←( )				
5	×				
6	5				
7	8		66,67 ϕ		
8	x←( )				
9	×				
160	5				
1	6		66,67 $\rho\lambda$	66,67 $\lambda\phi$	
2	÷				
3	x←( )				
4	5				
5	8				
6	x←( )				
7	×				
8	3				
9	4		$\lambda\mu$		
170	÷				
1	1				
2	−			b	
3	y→( )				
4	5				
5	9				
6	↓		b		
7	x^2		b^2		
8	↑			b^2	
9	x←( )				
180	5				
1	7		λ		
2	↑			λ	b^2
3	x←( )				
4	5				
5	6		ρ	λ ·	b^2
6	PRINT				
7	PRINT		($\mathcal{F}(R_0)$)		
8	−			$\lambda-\rho$	
9	↓				
190	PRINT		$\lambda-\rho$		
1	PRINT		(H)		
2	x←( )				
3	×				
4	5				
5	8		a		
6	x→( )				
7	6				
8	0				
9	↑			a	

STORAGE	
b	
a	
0	
21	1/2 $f_{1/2}^{1**}$
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	
21	1/2 $f_{1/2}^{1**}$
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	
1	
22	$f_{3/2}^{1*}$, $f_{3/2}^{1**}$
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	
1	
2	
23	f_2^*, f_2^{**}
24	r_2^*, r_2^{**}
5	
6	
7	
8	
9	
0	
1	
2	
3	
4	
25	r_3, r_3^*, r_K
6	
7	

ALPHA

HEWLETT·PACKARD HEWLETT·PACKARD HEWLETT·PACKARD HEWLETT·PACKARD HEWLETT·PACKARD

PROGRAM NAME: Método Adams-Krilov PAGE ___ OF ___

ROM'S 1 ___ 2 ___ 3 ___

EQUIPMENT NEEDED: ☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ___ ☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐ ___

TOTAL PROGRAM STEPS: ☐ 500 ☐ 1012 ☐ 2036 TOTAL REGISTERS: ☐ 51 ☐ 111

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STORAGE
200	4					250	↓					b
1	×			4a		1	PRINT		r_{max}			a
2	6					2	PRINT					0
3	6					3	x←( )					1
4	·					4	5					2
5	6					5	3		R_0			3
6	+			4ac		6	GO TO					4
7	×					7	S/R					5
8	↓					8	LABEL					26 f_3, f_3^*, f_k
9	+			b^2+4ac		9	F		f_0			7
210	↓		b^2+4ac			260	x→( )		$f_0 = \Delta 1/2$			8
1	$\sqrt{x}$		$\sqrt{\ }$			1	7					9
2	↑			$\sqrt{\ }$		2	↑			$\Delta 1/2$		0
3	x←( )					3	y→( )					1
4	5					4	1					2
5	9		b	$\sqrt{\ }$		5	5					3
6	CHG SIGN		−b			6	x←( )					4
7	↑		−b	−b	$\sqrt{\ }$	7	5					5
8	↓		−b	$\sqrt{\ }$	$\sqrt{\ }$	8	3		R_0	$\Delta 1/2$		6
9	+			$-b+\sqrt{\ }$		9	+			r_1		27 $f^1_{5/2}, f^{1*}_{5/2}, f^1_{k-1/2}$
220	ROLL ↑		$\sqrt{\ }$	−b	$-b+\sqrt{\ }$	270	↓					8
1	CHG SIGN		$-\sqrt{\ }$	−b		1	PRINT		r_1			9
2	+			$-b-\sqrt{\ }$		2	x→( )					0
3	2		2			3	1					1
4	x←( )					4	4					2
5	×					5	GO TO					3
6	6					6	S/R					4
7	0		2a			7	LABEL					5
8	÷			$-b-\sqrt{\ }/2a$		8	F		f_1			6
9	x⇄y		$-b-\sqrt{\ }/2a$	2a	$-b+\sqrt{\ }$	9	x→( )					7
230	$\sqrt{x}$		r_A	2a		280	8					28 $f^3_{3/2}, f^{3*}_{3/2}, f^3_{k-3/2}$
1	x⇄y					1	↑			f_1		9
2	ROLL ↑		$-b+\sqrt{\ }$	2a	r_A	2	x←( )					0
3	x⇄y		2a	$-b+\sqrt{\ }$		3	7		f_0	f_1		1
4	÷					4	−			$f'_{1/2}$		2
5	x⇄y					5	y→( )					3
6	$\sqrt{x}$		r_B	2a	r_A	6	5					4
7	ROLL ↑		r_A	r_B		7	4		f_0	$f'_{1/2}$		5
8	IF x>y					8	↑					6
9	x⇄y					9	2					7
240	CONT					290	ROLL ↑		$f'_{1/2}$	2	f_0	8
1	CONT					1	PRINT					29 $f^{1***}_{1/2}$
2	CONT					2	x⇄y		2	$f'_{1/2}$	f_0	0
3	y→( )			r_{max}		3	÷					1
4	6					4	↓		$1/2\ f'_{1/2}$			32 U_*
5	2					5	x→( )					33 V_*
6	x→( )		r_{min}			6	1					34 μ
7	6					7	3					5
8	3					8	+			$\Delta^*_{1/2}$		6
9	PRINT		r_{min}			9	↓					7

ALPHA ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

HEWLETT PACKARD

PROGRAM NAME Método Adams-Krilov PAGE ___ OF ___

ROM'S 1 ___ 2 ___ 3 ___

EQUIPMENT NEEDED: ☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ___ ☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐ ___

TOTAL PROGRAM STEPS: ☐ 500 ☐ 1012 ☐ 2036

TOTAL REGISTERS: ☐ 51 ☐ 111

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STORAGE
300	PRINT		$\Delta^*1/2$			350	ROLL↑		f_0	$f^{1*}_{1/2}$	10^{-6}	0
1	PRINT					1	ROLL↑		10^{-6}	f_0	$f^{1*}_{1/2}$	1
2	x→( )					2	GO TO					0
3	1					3	2					1
4	6					4	8					2
5	↑		$\Delta^*1/2$	$\Delta^*1/2$		5	9					3
6	x←( )					6	x←( )					4
7	+					7	6		f_1^*			35 $f^2_2, f^{2*}_2, f^2_{k-1}$
8	5					8	↑			f_1^*		6
9	3					9	x←( )					7
310	PRINT		π_1^*			360	5					8
1	x→( )					1	4		$f^{1*}_{1/2}$	f_1^*		9
2	1					2	↑					0
3	7					3	2		2	$f^{1*}_{1/2}$	f_1^*	1
4	GO TO					4	÷					42 $L_{5/2}, L^*_{7/2}, L_{k-1/2}$
5	S/R					5	↓		1/2	$f^{1*}_{1/2}$		3
6	LABEL					6	x→( )					4
7	F		f_1^*			7	1					5
8	↑			f_1^*		8	8					6
9	x←( )					9	+			$\Delta 3/2$		7
320	7		f_0	f_1^*		370	x←( )					8
1	y→( )					1	1					9
2	6					2	7		π_1^*	$\Delta 3/2$	f_1^*	0
3	−			$f^{1*}_{1/2}$		3	+					51 f_1^{**}, f_1^{***}
4	x←( )					4	↓					2
5	5					5	PRINT		π_2			3
6	4		$f^1_{1/2}$	$f^{1*}_{1/2}$		6	GO TO					4
7	y→( )					7	S/R					5
8	5					8	LABEL					6
9	4					9	F		f_2			7
330	x⇄y					380	↑					8
1	PRINT		$f^{1*}_{1/2}$			1	↑					9
2	−					2	x←( )					0
3	ROLL↑			$f^{1*}_{1/2}$	$f^1_{1/2} - f^{1*}_{1/2}$	3	6		f_1^*	f_2		1
4	x←( )					4	−			$f^1_{3/2}$		52 $\pi \to$ LBL F
5	7		f_0			5	x⇄y		$f^1_{3/2}$			53 π_0
6	ROLL↑					6	PRINT					4
7	↑					7	x→( )					5
8	GO TO					8	1					6
9	S/R					9	1					7
340	LABEL					390	↑					8
1	3					1	x←( )					9
2	IE x>y					2	5					0
3	GO TO					3	4		$f^{1*}_{1/2}$	$f^1_{3/2}$		1
4	3					4	−			f^2_1		2
5	5					5	y→( )					3
6	6					6	1					54 $f^1_{1/2}, f^{1*}_{1/2}$
7	x←( )					7	2					5
8	5					8	x⇄y					56 ρ
9	4		$f^{1*}_{1/2}$	10^{-6}	f_0	9	PRINT		f_1^2	$f^{1*}_{1/2}$	f_1^*	57 λ

ALPHA

HEWLETT · PACKARD

PROGRAM NAME: Método Adams-Krilov PAGE ___ OF ___

ROM'S 1 ___ 2 ___ 3 ___

EQUIPMENT NEEDED: ☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ___ ☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐ ___

TOTAL PROGRAM STEPS: ☐ 500 ☐ 1012 ☐ 2036

TOTAL REGISTERS: ☐ 51 ☐ 111

HEWLETT · PACKARD

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
400	PRINT				
1	GO TO				
2	S/R				
3	LABEL				
4	1			$\Delta^{*}1/2$	
5	GO TO				
6	S/R				
7	LABEL				
8	2		f_0	$f^{1**}_{1/2}$	f^{**}_1
9	y→( )				
410	0				
1	x←( )				
2	5				
3	4		$f^{1*}_{1/2}$	$f^{1**}_{1/2}$	
4	−				
5	GO TO				
6	S/R				
7	LABEL				
8	3				
9	IF x<y		1 1	10^{-6}	
420	GO TO				
1	4				
2	3				
3	8				
4	x←( )				
5	0		$f^{1**}_{1/2}$	10^{-6}	f^{**}_1
6	x⇄y				
7	x←( )				
8	1				
9	1				
430	x⇄y				
1	x→( )				
2	5				
3	4				
4	GO TO				
5	3				
6	9				
7	4				
8	x←( )				
9	0		$f^{1**}_{1/2}$	10^{-6}	f^{**}_1
440	x⇄y				
1	↓				
2	↑		$f^{1**}_{1/2}$	$f^{1**}_{1/2}$	f^{**}_1
3	GO TO				
4	S/R				
5	LABEL				
6	4			$\Delta^{*}3/2$	
7	GO TO				
8	S/R				
9	LABEL				

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
450	5			$f^{1*}_{3/2}$	
1	x←( )				
2	0		$f^{1**}_{1/2}$		
3	−			f^{2*}_1	
4	x⇄y				
5	PRINT		f^{2*}_1		
6	PRINT				
7	↑			f^{2*}_1	$f^{1**}_{1/2}$
8	x←( )				
9	1				
460	2		f^{2}_1	f^{2*}_1	
1	y→( )				
2	1				
3	2				
4	−				
5	GO TO				
6	S/R				
7	LABEL				
8	3				
9	IF x<y				
470	GO TO				
1	4				
2	8				
3	3				
4	x←( )				
5	5				
6	1		f^{**}_1		
7	ROLL ↑			f^{**}_1	
8	↑				f^{**}_1
9	GO TO				
480	4				
1	4				
2	3				
3	GO TO				
4	S/R				
5	LABEL				
6	6			$\Delta 5/2$	
7	GO TO				
8	S/R				
9	LABEL				
490	7			f^{2}_2	
1	x←( )				
2	1				
3	2		f^{2*}_1	f^{2}_2	
4	−				
5	↓		$f^{3}_{3/2}$		
6	PRINT				
7	x→( )				
8	2				
9	8				

STEPS	
50	
51	
52	
53	
54	
55	
56	
57	
58	ϕ
59	γ
60	a
61	b^2-4ac
62	r_{max}
63	r_{min}
64	
65	
66	
67	
68	
69	
70	
71	
72	
73	
74	
75	
76	
77	
78	
79	
80	
81	
82	
83	
84	
85	$r \to$ LBL ↓
86	
87	
88	
89	
90	
91	
92	
93	
94	
95	
96	
97	
98	
99	

ALPHA

PROGRAM NAME: Método Adams-Krilov PAGE ___ OF ___

ROM'S 1 ___ 2 ___ 3 ___

EQUIPMENT NEEDED: ☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ___ ☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐ ___

TOTAL PROGRAM STEPS: ☐ 500 ☐ 1012 ☐ 2036 TOTAL REGISTERS: ☐ 51 ☐ 111

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STORAGE
500	x←( )					550	2		f^{2*}_{1}	$f^{1***}_{1/2}$	$f^{1*}_{3/2}$	b
1	1					1	GO TO					9
2	2		f^{2*}_{1}			2	5					0
3	↑			f^{2*}_{1}		3	0					1
4	x←( )					4	7					2
5	0		$f^{1**}_{1/2}$	f^{2*}_{1}		5	x←( )					3
6	x⇄y					6	2					4
7	GO TO					7	9		$f^{1***}_{1/2}$			5
8	S/R					8	x⇄y					6
9	LABEL					9	GO TO					7
510	1			$(\Delta^{**}_{1/2})'$		560	S/R					8
1	x←( )					1	LABEL					9
2	2					2	4			$(\Delta^{*}_{3/2})'$		0
3	8		$f^{3}_{3/2}$			3	x←( )					1
4	↑					4	2					2
5	2					5	8		$f^{3}_{3/2}$	$(\Delta^{*}_{3/2})'$		3
6	4					6	↑					4
7	÷			$1/24\, f^{3}_{3/2}$		7	2					5
8	↓					8	4					6
9	+			$\Delta^{***}_{1/2}$		9	÷			$1/24\, f^{3}_{3/2}$		7
520	GO TO					570	↓					8
1	S/R					1	−			$\Delta^{**}_{3/2}$		9
2	LABEL					2	GO TO					0
3	2		f_0	$f^{1***}_{1/2}$	f^{**}_{1}	3	S/R					1
4	y→( )					4	LABEL					2
5	2					5	5			$f^{1**}_{3/2}$		3
6	9					6	x←( )					4
7	x←( )					7	2					5
8	0		$f^{1**}_{1/2}$	$f^{1***}_{1/2}$		8	9		$f^{1***}_{1/2}$	$f^{1**}_{3/2}$		6
9	−					9	−					7
530	GO TO					580	x⇄y		f^{2**}_{1}			8
1	S/R					1	PRINT					9
2	LABEL					2	PRINT					0
3	3					3	↑			f^{2**}_{1}		1
4	IF x<y					4	x←( )					2
5	GO TO					5	1					3
6	5					6	2		f^{2*}_{1}	f^{2**}_{1}	$f^{1***}_{1/2}$	4
7	5					7	y→( )					5
8	5					8	1					6
9	x←( )					9	2					7
540	2					590	−					8
1	9		$f^{1***}_{1/2}$	10^{-6}		1	GO TO					9
2	x⇄y					2	S/R					0
3	x←( )					3	LABEL					1
4	2					4	3					2
5	2		$f^{1*}_{3/2}$	$f^{1***}_{1/2}$		5	IF x<y					3
6	x⇄y					6	GO TO					4
7	↑					7	6					5
8	x←( )					8	0					6
9	1					9	9					7

ALPHA ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

HEWLETT·PACKARD

PROGRAM NAME: Método Adams-Krilov — PAGE ___ OF ___

ROM'S 1 ___ 2 ___ 3 ___

EQUIPMENT NEEDED: ☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ___ ☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐ ___

TOTAL PROGRAM STEPS: ☐ 500 ☐ 1012 ☐ 2036 — TOTAL REGISTERS: ☐ 51 ☐ 111

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
600	x←( )				
1	5				
2	1		f_1^{1**}	10^{-6}	$f_{1/2}^{1***}$
3	ROLL↑				
4	↑				
5	GOTO				
6	5				
7	5				
8	9				
9	GOTO				
610	S/R				
1	LABEL				
2	6			Δ5/2	
3	x←( )				
4	2				
5	8		$f_{3/2}^{3}$		
6	↑				
7	8				
8	÷				
9	3				
620	×			3/8 $f_{0/2}^{3}$	
1	↓				
2	+			Δ*5/2	
3	GOTO				
4	S/R				
5	LABEL				
6	7		f_2^{2*}	f_2^{2*}	f_3^{*}
7	x←( )				
8	1				
9	2		f_1^{2**}	f_2^{2*}	
630	−				
1	↓				
2	PRINT		$f_{3/0}^{3*}$		
3	↑				
4	x←( )				
5	2				
6	8		$f_{3/2}^{3}$	$f_{3/2}^{3*}$	
7	y→( )				
8	2				
9	8				
640	−				
1	GOTO				
2	S/R				
3	LABEL				
4	3				
5	IFX<Y				
6	GOTO				
7	6				
8	5				
9	4				

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STORAGE
650	GOTO					b
1	6					a
2	0					0
3	9					1
4	b		φ_0			2
5	PRINT					3
6	↑					4
7	x←( )					5
8	5					6
9	3		R_0	φ_0		7
660	PRINT					8
1	PRINT					9
2	x⇄y		φ_0	R_0		0
3	↑		φ_0	φ_0	R_0	1
4	sen x		sen φ_0	φ_0	R_0	2
5	ROLL↑		R_0	sen φ_0	φ_0	3
6	X			R_0 sen φ_0		4
7	ROLL↑		φ_0	R_0	R_0 sen φ_0	5
8	cos x		cos φ_0			6
9	X			R_0 cos φ_0		7
670	↓					8
1	CH. SIGN		$-R_0$ cos φ_0	R_0 sen φ_0		9
2	K					0
3	FMT					1
4	↑					2
5	FMT					3
6	↓					4
7	b					5
8	x←( )					6
9	+					7
680	5		φ_1			8
1	x→( )					9
2	b					0
3	PRINT		φ_1			1
4	↑			φ_1		2
5	x←( )					3
6	2					4
7	0		R_1	φ_1		5
8	PRINT					6
9	PRINT					7
690	GOTO					8
1	S/R					9
2	LABEL					0
3	↓					1
4	b					2
5	x←( )					3
6	+					4
7	5		φ_2			5
8	x→( )					6
9	b					7

ALPHA ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

HEWLETT · PACKARD

PROGRAM NAME Método Adams-Krilov PAGE ___ OF ___

ROM'S 1 ___ 2 ___ 3 ___

EQUIPMENT NEEDED

☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ___

☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐ ___

TOTAL PROGRAM STEPS ☐ 500 ☐ 1012 ☐ 2036

TOTAL REGISTERS ☐ 51 ☐ 111

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
700	PRINT				
1	↑				
2	x←( )				
3	2				
4	4		R2	φ2	
5	PRINT				
6	PRINT				
7	GO TO				
8	S/R				
9	LABEL				
710	↓				
1	b				
2	x←( )				
3	+				
4	5		φ3		
5	x→( )				
6	b				
7	PRINT				
8	↑				
9	x←( )				
720	2				
1	5		x3		
2	PRINT				
3	PRINT				
4	GO TO				
5	S/R				
6	LABEL				
7	↓				
8	b				
9	x←( )				
730	+				
1	5				
2	x→( )				
3	b				
4	GO TO				
5	S/R				
6	LABEL				
7	π				
8	x←( )				
9	5		W		
740	↑			W	
1	CLEAR X		0,0	W	
2	IF x<Y				
3	GO TO				
4	7				
5	8				
6	0				
7	x←( )				
8	6				
9	3		r_{min}		

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
750	↑				
1	x←( )				
2	2				
3	5		r	r_{min}	
4	−				
5	|y|				
6	ENT EXP				
7	CH·SIG				
8	4			10^{-4}	
9	x⇄y				
760	IF x<Y				
1	GO TO				
2	7				
3	6				
4	9				
5	GO TO				
6	7				
7	3				
8	4				
9	x←( )				
770	2				
1	5				
2	↑				
3	b				
4	x←( )				
5	−				
6	5				
7	GO TO				
8	7				
9	0				
780	x←( )				
1	6				
2	2		r_{max}		
3	↑				
4	x←( )				
5	2				
6	5		r	r_{max}	
7	−				
8	|y|				
9	ENT EXP				
790	CH·SIG				
1	4				
2	x⇄y				
3	IF x<Y				
4	GO TO				
5	8				
6	0				
7	2				
8	GO TO				
9	7				

STORAGE	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

ALPHA

HEWLETT·PACKARD HEWLETT·PACKARD HEWLETT·PACKARD HEWLETT·PACKARD

PROGRAM NAME: Método Adams-Krilov PAGE ___ OF ___

ROM'S 1 ___ 2 ___ 3 ___

EQUIPMENT NEEDED: ☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ___ ☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐ ___

TOTAL PROGRAM STEPS: ☐ 500 ☐ 1012 ☐ 2036 TOTAL REGISTERS: ☐ 51 ☐ 111

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
800	3				
1	4				
2	x←( )				
3	2				
4	5				
5	↑				
6	b				
7	x←( )				
8	−				
9	5				
810	GOTO				
1	7				
2	0				
3	LABEL				
4	F		r		
5	x→( )				
6	5				
7	2				
8	x^2		r^2		
9	↑			r^2	
820	6				
1	6				
2	•				
3	6				
4	7		66,67		
5	+			$66,67+r^2$	
6	ROLL↑				
7	x←( )				
8	5				
9	3		R_0		
830	x^2		R_0^2		
1	+			$66,67+R_0^2$	
2	x←( )				
3	3				
4	4		868×10^4	β	α
5	x⇄y		β		
6	CHG SIG				
7	÷			$-\gamma$	α
8	x←( )				
9	3				
840	4		868×10^4	$-\gamma$	α
1	ROLL↑				
2	÷			δ	$-\gamma$
3	↓				
4	+			$(\delta-\gamma)$	
5	x←( )				
6	5				
7	÷		λ	$(\delta-\gamma)$	
8	+			{ }	
9	x←( )				

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
850	5				
1	8				
2	×				
3	x←( )				
4	5				
5	2		r		
6	x^2				
7	×				
8	1				
9	−			[ ]	
860	↓				
1	√x				
2	CONT				
3	x←( )				
4	×				
5	5				
6	2				
7	x←( )				
8	×				
9	5				
870	PRINT				
1	PRINT				
2	S/R				
3	LABEL		f_1^2	$f_{1/2}^{1*}$	f_1^*
4	1				
5	ROLL↑				
6	x←( )				
7	7		f_0		
8	ROLL↑				
9	ROLL↑		f_1^2	$f_{1/2}^{1*}$	f_0
880	2				
1	÷				
2	↓				
3	+		$1/2\, f_{1/2}^{1*}$	$1/2\, f_{1/2}^{1*}+f_0$	
4	x←( )				
5	1				
6	2		f_1^2		
7	↑			f_1^2	
8	1				
9	2		12		
890	÷				
1	↓		$1/12\, f_1^2$		
2	−			$\Delta^{**}_{1/2}$	
3	S/R				
4	LABEL				
5	2				
6	y→( )				
7	1				
8	9				
9	↓				

STORAGE	
b	
3	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

ALPHA ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

HEWLETT · PACKARD

PROGRAM NAME Método Adams-Krilov PAGE ___ OF ___

ROM'S 1 ___ 2 ___ 3 ___ 4 ___

EQUIPMENT NEEDED

☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ___

☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐ ___

TOTAL PROGRAM STEPS ☐ 500 ☐ 1017 ☐ 2036

TOTAL REGISTERS ☐ 54 ☐ 111

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STORAGE
900	PRINT		$\Delta^{**}_{1/2}$			950	2					b
1	PRINT					1	↑					a
2	↑					2	1					0
3	x←( )					3	2					1
4	5					4	÷			$1/12\, f^{2}_{1}$		2
5	3		R_0			5	5					3
6	+			$R_0+\Delta^{**}_{1/2}$		6	×			$5/12\, f^{2}_{1}$		4
7	↓					7	↓					5
8	PRINT					8	+			$\Delta^{*}\, 3/2$		6
9	x→( )		r^{**}_{1}			9	S/R					7
910	2					960	LABEL					8
1	0					1	5					9
2	GO TO					2	↓		$\Delta^{*}\, 3/2$			0
3	S/R					3	PRINT					1
4	LABEL					4	PRINT					2
5	F		f^{**}_{1}			5	↑					3
6	x→( )					6	x←( )					4
7	5					7	2					5
8	1					8	0		r^{**}_{1}	$\Delta^{*}\, 3/2$		6
9	↑					9	+					7
920	↑		f^{**}_{1}	f^{**}_{1}	f^{**}_{1}	970	↓					8
1	x←( )					1	PRINT		r^{*}_{2}			9
2	f		f_0			2	x→( )					0
3	−			$f^{1**}_{1/2}$		3	2					1
4	x⇄y					4	4					2
5	PRINT		$f^{1**}_{1/2}$	f_0		5	GO TO					3
6	x⇄y					6	S/R					4
7	S/R					7	LABEL					5
8	LABEL					8	F		f^{*}_{2}			6
9	3					9	x→( )					7
930	|y|					980	2					8
1	ENT EXP					1	3					9
2	CH SIG					2	↑					0
3	6					3	x←( )					1
4	x⇄y		1 1	10^{-6}		4	5					2
5	PRINT					5	1		f^{**}_{1}	f^{*}_{2}		3
6	PRINT					6	−					4
7	S/R					7	↓					5
8	LABEL		$f^{1**}_{1/2}$	$f^{1**}_{1/2}$	f^{**}_{1}	8	x→( )					6
9	4					9	2					7
940	CONT					990	2					8
1	2					1	PRINT		$f^{1**}_{3/2}$			9
2	÷					2	↑			$f^{1*}_{3/2}$		0
3	y→( )					3	S/R					1
4	2					4	LABEL					2
5	1					5	6					3
6	↓		$1/2\, f^{1**}_{1/2}$	f^{**}_{1}	f^{**}_{1}	6	x←( )					4
7	+					7	2					5
8	x←( )					8	3		f^{*}_{2}			6
9	1					9	↑			f^{*}_{2}		7

ALPHA ☐☐☐

PROGRAM NAME Método Adams-Krilov PAGE ___ OF ___

ROM'S 1 ___ 2 ___ 3 ___

EQUIPMENT NEEDED

☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ___

☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐ ___

TOTAL PROGRAM STEPS ☐ 500 ☐ 1012 ☐ 2035

TOTAL REGISTERS ☐ 51 ☐ 111

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
1000	x←( )				
1	2				
2	2		$f^{1*}_{3/2}$		
3	↑				
4	2				
5	÷			$1/2\, f^{1*}_{3/2}$	
6	↓				
7	+			$f^{*}_{2} + \frac{1}{2} f^{1*}_{3/2}$	
8	x←( )				
9	1				
1010	2		f^{2*}_{1}		
1	↑				
2	1				
3	2				
4	÷				
5	5				
6	×			$5/2\, f^{2*}_{1}$	
7	↓				
8	+				
9	S/R				
1020	LABEL				
1	7			$\Delta 5/2$	
2	y→( )				
3	4				
4	2				
5	↓				
6	PRINT		$\Delta 5/2$		
7	PRINT				
8	↑			$\Delta 5/2$	
9	x←( )				
1030	2				
1	4		R^{*}_{2}	$\Delta 5/2$	
2	+				
3	↓				
4	PRINT		R_3		
5	x→( )				
6	2				
7	5				
8	GO TO				
9	S/R				
1040	LABEL				
1	F		f_3		
2	x→( )				
3	2				
4	6				
5	↑				
6	↑		f_3	f_3	f_3
7	x←( )				
8	2				
9	3		f^{*}_{2}		

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
1050	−			$f^{1}_{5/2}$	
1	↓				
2	PRINT		$f^{1}_{5/2}$		
3	x→( )				
4	2				
5	7				
6	↑			$f^{1}_{5/2}$	
7	x←( )				
8	2				
9	2		$f^{1*}_{3/2}$	$f^{1}_{5/2}$	
1060	−			f^{2}_{2}	
1	y→( )				
2	3				
3	5				
4	↓				
5	PRINT				
6	PRINT				
7	↑				
8	S/R				
9	LABEL				
1070	π				
1	x←( )				
2	2				
3	6		f_3		
4	↑				
5	x←( )				
6	2				
7	7		$f^{1}_{5/2}$		
8	↑				
9	2				
1080	÷				
1	↓				
2	+				
3	x←( )				
4	3				
5	5		f^{2}_{2}		
6	↑				
7	5				
8	×				
9	1				
1090	2				
1	÷				
2	↓		$5/2\, f^{2}_{2}$		
3	+				
4	x←( )				
5	2				
6	8		$f^{3}_{3/2}$		
7	↑				
8	8				
9	÷				

STORAGE
b
a
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
1
2
3
4
5
6
7

ALPHA

HEWLETT · PACKARD

PROGRAM NAME: Método Adams-Krilov

PAGE 5 OF

ROM'S 1 2 3

EQUIPMENT NEEDED: ☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐

TOTAL PROGRAM STEPS: ☐ 500 ☐ 1012 ☐ 2036

TOTAL REGISTERS: ☐ 51 ☐ 111

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
1100	3				
1	X				
2	↓				
3	+			Δ7/2	
4	↓				
5	PRINT		Δ7/2		
6	PRINT				
7	↑			Δ7/2	
8	y→( )				
9	4				
1110	2				
1	y⇄( )				
2	+				
3	2				
4	5			r4	
5	y→( )				
6	2				
7	5				
8	÷		φ4	r4	
9	PRINT				
1120	PRINT				
1	x⇄y		r4	φ4	
2	GO TO				
3	S/R				
4	LABEL				
5	↓				
6	PRINT				
7	GO TO				
8	S/R				
9	LABEL				
1130	F		f4		
1	↑				
2	x←( )				
3	−				
4	2				
5	6		f'7/2	f4	
6	PRINT				
7	y→( )				
8	2				
9	6				
1140	↑				
1	y⇄( )				
2	−				
3	2				
4	7		f'7/2	f²3	f4
5	x→( )				
6	2				
7	7				
8	x←( )				
9	3				

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z
1150	5		f²2	f²3	
1	y→( )				
2	3				
3	5				
4	x⇄y		f²3	f²2	
5	PRINT				
6	x⇄y				
7	−			f³5/2	
8	↓				
9	PRINT				
1160	PRINT				
1	x→( )				
2	2				
3	8				
4	x←( )				
5	5		w		
6	↑			w	
7	CLEAR X				
8	Acc+				
9	S/R				
1170	LABEL		r	φ	
1	↓				
2	x⇄y		φ	r	
3	↑				
4	sen x		senφ	φ	r
5	ROLL↑				
6	x→( )		r	senφ	r
7	8				
8	5				
9	X			rsenφ	
1180	ROLL↑				
1	cos x		cosφ	r	rsenφ
2	X			rcosφ	rsenφ
3	↓				
4	CH SIG		−rcosφ	rsenφ	
5	K				
6	FMT				
7	↓				
8	x←( )				
9	8				
1190	5				
1	S/R				
1192	END				
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					

STORAGE
b
a
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
1
2
3
4
5
6
7

ALPHA

HEWLETT · PACKARD

PROGRAM NAME Método Adams-Krilov PAGE ___ OF ___

ROM'S 1 ___ 2 ___ 3 ___ 4 ___

EQUIPMENT NEEDED

☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ___

☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐ ___

TOTAL PROGRAM STEPS ☐ 500 ☐ 1012 ☐ 2036

TOTAL REGISTERS ☐ 54 ☐ 111

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STORAGE
0	:					1210	8					0
1	:					1	5					1
2	:					2	×					2
3	:					3	ROLL↑					3
1164	x←( )					4	cos x					4
5	2					5	×					5
6	C		f4			6	↓					6
7	↑					7	CH SIGN					7
8	x←( )					8	K					8
9	2					9	FMT					9
1170	7		$f^1_{7/2}$			1220	↓					0
1	↑					1	x←( )					1
2	2					2	8					2
3	÷			$1/2\ f^1_{7/2}$	f4	3	5					3
4	↓					4	S/R					4
5	−			....		1225	END					5
6	x←( )					6						6
7	3					7						7
8	5		f^2_3			8						8
9	↑					9						9
1180	1					0						0
1	2					1						1
2	÷			$1/2\ f^2_3$	...	2						2
3	↓					3						3
4	−			.....		4						4
5	x←( )					5						5
6	2					6						6
7	8		$f^3_{5/2}$			7						7
8	↑					8						8
9	2					9						9
1190	4					0						0
1	÷			$1/24\ f^3_{5/2}$	....	1						1
2	↓					2						2
3	−			Δ		3						3
4	↓					4						4
5	PRINT					5						5
6	PRINT					6						6
7	x←( )					7						7
8	5					8						8
9	↑					9						9
1200	CLEAR X					0						0
1	ACC+					1						1
2	S/R					2						2
3	LABEL					3						3
4	↓					4						4
5	x⇄y					5						5
6	↑					6						6
7	sen x					7						7
8	ROLL↑					8						8
9	x→( )					9						9

ALPHA

HEWLETT · PACKARD

ORIENTAÇÃO PARA A UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA DO MÉTODO ADAMS-KRILOV

1 - LIMITES DA PLOTADORA

No programa foram colocados limites de -20 a +20 unidades.

INSTRUÇÕES:

- Aperte 20
- " CHG SIGN
- " GO TO 001
- " ↑
- " GO TO 003
- " 20
- " GO TO 002
- " ↑
- " GO TO 004

2 - ENTRA O PROGRAMA

3 - APERTAR CLEAR

END

CONT - Plotadora traça os eixos e interrompe em STOP (instrução 46)

4 - ENTRA V

5 - APERTE ↑

6 - ENTRA U

7 - APERTE CONT - Calculadora imprime V_* e U_* e interrompe em STOP (instrução 70)

8 - ENTRA ψ_o

9 - APERTE ↑

10 - ENTRA w

11 - APERTE ↑

12 - ENTRA R_o

13 - APERTE CONT - Calculadora imprime constantes de integração, potencial, r máximo e mínimo e os resultados da integração. A plotadora traça um arco de órbita (de R_o a $r_{mín}$ ou $r_{máx}$)

A programação retorna e interrompe-se na instrução 70 para que seja traçado o novo arco de órbita (em sentido inverso) a partir de r inicial (R_o). O "display" mostrará em X, o último valor de r impresso e, em Y, o valor de ψ correspondente. Agora, porém, w entrará com o sinal contrário.

Para que sejam traçados novos arcos, no sentido progressivo ou regressivo,

- Aperte GO TO 862
- " CHG SIGN (ou CONT, para um terceiro arco)
- " GO TO 742
- " IF X > Y (ou IF X < Y, para um terceiro arco, e, assim, alternadamente)
- " GO TO 71 (o programa se interrompe em STOP (instrução 70)

O valor de r inicial será sempre R_o e ψ inicial estará de acordo com a explicação em III.3.1.1. O sinal de $w(\Delta\psi)$ estará relacionado à orientação imposta a ψ.

As instruções para o cálculo do incremento Δ_c (fórmula corretora) estão colocadas na pág. 94, iniciando-se na instrução 1164.

V.2 - PROGRAMA DO MÉTODO DE SIMPSON (*)

PROGRAM NAME Método de Simpson PAGE ___ OF ___

ROMS 1 ___ 2 ___ 3 ___

EQUIPMENT NEEDED

[X] PRINTER [ ] MARKED CARD READER [ ] ___

[ ] PLOTTER [ ] TYPEWRITER [ ] ___

TOTAL PROGRAM STEPS [X] 500 [ ] 1012 [ ] 2036

TOTAL REGISTERS [ ] 51 [ ] 111

HEWLETT · PACKARD

STEP	KEY	CODE	x	y	z
0	STOP		h		
1	x→( )				
2	4				
3	GOTO				
4	2				
5	7				
6	LABEL				
7	A				
8	CLEAR X				
9	↑				
10	2				
1	↑				
2	CLEAR X				
3	STOP				
4	PRINT				
5	PRINT				
6	x→( )				
7	b				
8	x⇄y				
9	3				
20	÷				
1	y→( )				
2	0				
3	CLEAR X				
4	x⇄y				
5	CLEAR X				
6	S/R				
7	CLEAR				
8	1				
9	x⇄y				
30	STOP				
1	PRINT				
2	x⇄y				
3	PRINT				
4	PRINT				
5	x→( )				
6	1				
7	y→( )				
8	a				
9	GO TO				
40	S/R				
1	LABEL				
2	A				
3	x←( )				
4	1				
5	x→( )				
6	2				
7	CLEAR X				
8	x→( )				
9	3				

STEP	KEY	CODE	x	y	z
50	↑				
1	b				
2	x→( )				
3	+				
4	a				
5	a				
6	PRINT				
7	↑				
8	1				
9	STOP				
60	PRINT				
1	PRINT				
2	x⇄y				
3	4				
4	X				
5	y→( )				
6	+				
7	2				
8	CLEAR X				
9	↑				
70	b				
1	x→( )				
2	+				
3	a				
4	a				
5	PRINT				
6	↑				
7	2				
8	STOP				
9	PRINT				
80	PRINT				
1	x→( )				
2	+				
3	2				
4	x⇄y				
5	x←( )				
6	0				
7	x→( )				
8	X				
9	2				
90	x←( )				
1	2				
2	x→( )				
3	+				
4	3				
5	y→( )				
6	2				
7	IF FLAG				
8	GO TO				
9	S/R				

STORAGE	
b	
a	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

ALPHA

(*) Baseado no programa existente em "Hewllett-Packard Calculator 9810 A Math-Pac".

PROGRAM NAME Método de Simpson PAGE ____ OF ____

ROM'S 1 ____ 2 ____ 3 ____

EQUIPMENT NEEDED

☐ PRINTER ☐ MARKED CARD READER ☐ ____

☐ PLOTTER ☐ TYPEWRITER ☐ ____

TOTAL PROGRAM STEPS ☐ 500 ☐ 1012 ☐ 2036

TOTAL REGISTERS ☐ 51 ☐ 111

STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STEP	KEY	CODE	X	Y	Z	STORAGE
100	LABEL					0						b
1	A					1						a
2	x←(1)					2						0
3	3					3						1
4	x←(1)					4						2
5	÷					5						3
6	4					6						4
7	PRINT					7						5
8	PRINT					8						6
9	GO TO					9						7
110	5					0						8
1	0					1						9
2	END					2						0
3						3						1
4						4						2
5						5						3
6						6						4
7						7						5
8						8						6
9						9						7
0						0						8
1						1						9
2						2						0
3						3						1
4						4						2
5						5						3
6						6						4
7						7						5
8						8						6
9						9						7
0						0						8
1						1						9
2						2						0
3						3						1
4						4						2
5						5						3
6						6						4
7						7						5
8						8						6
9						9						7
0						0						8
1						1						9
2						2						0
3						3						1
4						4						2
5						5						3
6						6						4
7						7						5
8						8						6
9						9						7

☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐ ALPHA ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

HEWLETT·PACKARD

ORIENTAÇÃO PARA A UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA DO MÉTODO DE SIMPSON

1 - ENTRA O PROGRAMA

2 - APERTE END
CONT

3 - ENTRA h (constante de integração)

4 - APERTE CONT

5 - ENTRA R_o

6 - APERTE ↑

7 - ENTRA ψ_o

8 - APERTE CONT

9 - ENTRA w ($\Delta\psi$)

10 - APERTE CONT - A calculadora imprime r_i e o resultado da integração

VI - APÊNDICE

VI.1 - FÓRMULA CORRETORA DO MÉTODO ADAMS-KRILOV

Desenvolvendo-se $x(t)$ nas vizinhanças do ponto $t = t_{k+1}$, teremos

$$x(t_k) = x(t_{k+1}) - \frac{w}{1!}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{k+1} + \frac{w^2}{2!}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{k+1} - + \dots \qquad \text{(A-1)}$$

Recordando-se as equações (53),

$$w\left(\frac{dx}{dt}\right)_k = f(t_k) = f_k \ ,$$

e (54),

$$\Delta_{k+1/2} = x_{k+1} - x_k \ ,$$

o valor de $\Delta_{k+1/2}$ poderá ser reescrito na forma:

$$\Delta_{k+1/2} = f_{k+1} - \frac{w}{2}\left(\frac{df}{dt}\right)_{k+1} + \frac{w^2}{3}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_{k+1} . \qquad \text{(A-2)}$$

Comparando-se (A-2) com as fórmulas (70), (71) e (72) da Teoria do Método Adams-Krilov, verificaremos que

$$\begin{aligned}
\Delta_{k+1/2} = f_{k+1} &- \frac{1}{2}\left(f^1_{k+1/2} + \frac{1}{2}f^2_k + \frac{1}{3}f^3_{k-1/2} + \frac{1}{4}f^4_{k-1} + \frac{1}{5}f^5_{k-3/2} + \dots\right) \\
&+ \frac{1}{6}\left(f^2_k + f^3_{k-1/2} + \frac{11}{12}f^4_{k-1} + \frac{5}{6}f^5_{k-3/2} + \dots\right) \\
&- \frac{1}{24}\left(f^3_{k-1/2} + \frac{3}{2}f^4_{k-1} + \frac{7}{4}f^5_{k-3/2} + \dots\right) \qquad \text{(A-3)} \\
&+ \frac{1}{120}\left(f^4_{k-1} + 2f^5_{k-3/2} + \dots\right) \\
&- \frac{1}{720}\left(f^5_{k-5/2} + \dots\right) + - \dots
\end{aligned}$$

Após serem efetuadas as somas, obteremos

$$\Delta_{k+1/2} = f_{k+1} - \frac{1}{2}f^1_{k+1/2} - \frac{1}{12}f^2_k - \frac{1}{24}f^3_{k-1/2} - \frac{19}{720}f^4_{k-1} - \frac{3}{160}f^5_{k-3/2} - \dots \qquad \text{(A-4)}$$

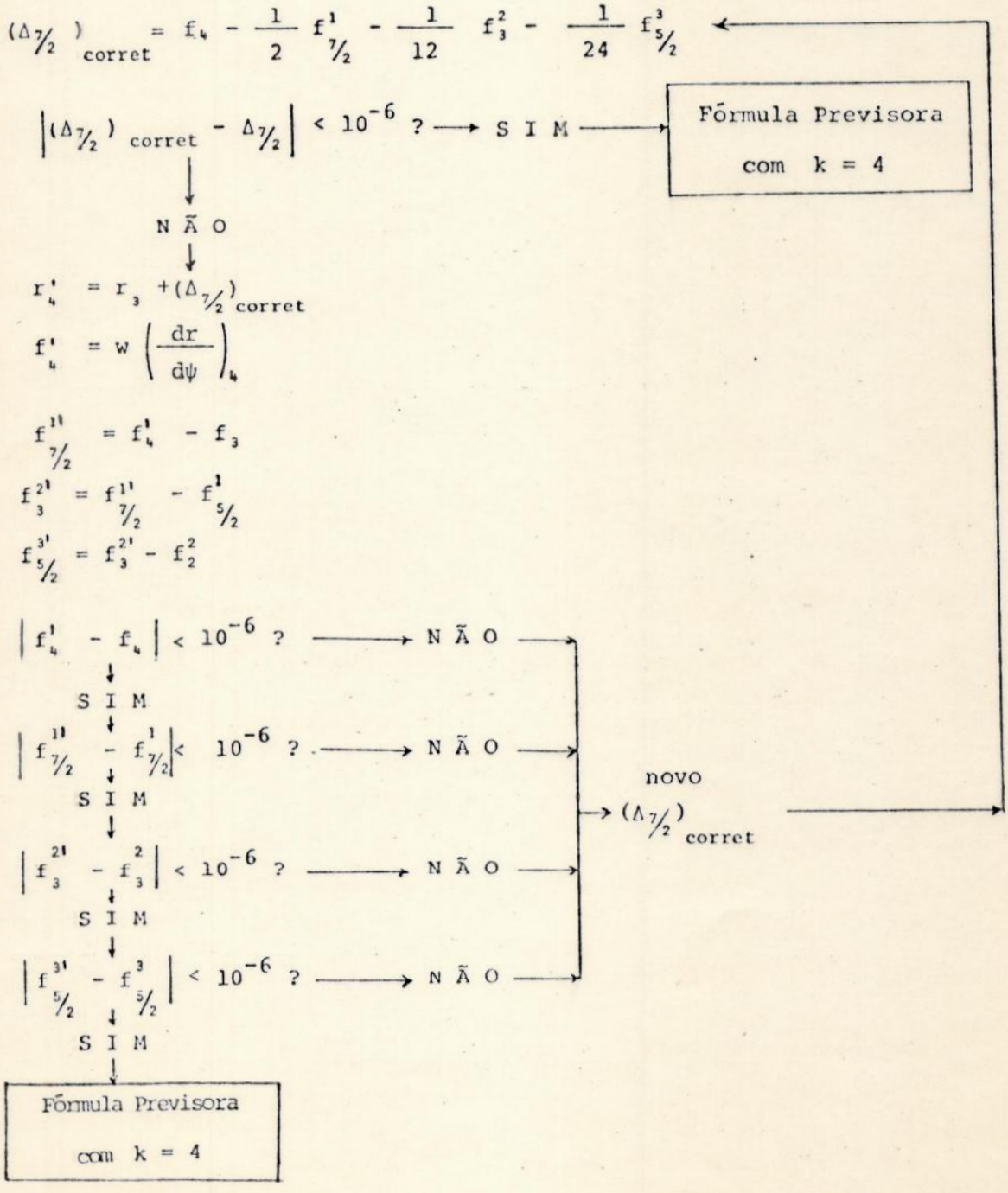
A fórmula (A-4) é a <u>fórmula corretora de Adams ou de interpolação</u>. Sua aplicação requer que os valores de x_{k+1} e f_{k+1}, bem como os das diferenças $f^1_{k+1/2}$, f^2_k, $f^3_{k-1/2}$, ... já tenham sido anteriormente calculados pela fórmula previsora. A fórmula corretora fornecerá, então, um novo valor para o incremento, $(\Delta_{k+1/2})_{corret}$. Se este valor coincidir, dentro de determinados limites de precisão,

com aquele obtido pela previsora, não há necessidade de correção. Caso contrário, um novo valor de x_{k+1} deverá ser calculado por

$$x'_{k+1} = x_k + \left(\Delta_{k+1/2}\right)_{corret} \quad . \qquad \text{(A-5)}$$

Com x'_{k+1} redeterminaremos f_{k+1}, $f^1_{k+1/2}$, f^2_k, ... Caso coincidam com os anteriores, a iteração cessa. Não existindo a coincidência, $(\Delta_{k+1/2})_{corret}$ será recalculado com estas diferenças decorrentes de x'_{k+1}. Repetir-se-á o processo iterativo até que duas iterações sucessivas levem ao mesmo valor do incremento (dentro de uma precisão arbitrada).

Esquematicamente, com $k = 3$ e $x \equiv r$, teremos



VI.2 - VALORES PRÓXIMOS A $r_{extremo}$

A súbita variação nas diferenças f^1, f^2, f^3, mencionada no item III.3.1.1, possui fundamentação teórica.

Definimos

$$f = w \frac{dr}{d\psi} ,$$

portanto, para pequenas variações δf em f, temos:

$$\delta f = w \frac{d}{d\psi}\left(\frac{dr}{d\psi}\right)\delta\psi = w \frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\psi}\right)\frac{dr}{d\psi}\,\delta\psi =$$

$$= w \frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\psi}\right)\delta r$$

Sabendo-se que $\frac{dr}{d\psi} = r\left[\tau(r)\right]^{1/2}$, veremos que

$$w \frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\psi}\right)\delta r = w\left[\frac{r}{\left[\tau(r)\right]^{1/2}}\frac{d(\tau(r))}{dr} + \left[\tau(r)\right]^{1/2}\right]\delta r$$

Deste modo, δf contem um termo em que $\left[\tau(r)\right]^{1/2}$ aparece no denominador. E, assim, devido ao fato de que os valores de f ficam muito reduzidos nos limites do intervalo de integração, pequenas variações em r poderão afetar, sensivelmente, f e as diferenças de ordens superiores f^1, f^2, f^3, tornando os cálculos nestas fronteiras bastante incertos.

VII - BIBLIOGRAFIA

1 - ATANASIJEVIČ, I. - Selected Exercises in Galactic Astronomy - Springer - Verlag - New York Inc., New York, 1971

2 - BARBANIS, B. - "Plane Galactic Orbits in a Spiral Field" in Astrophysical Journal, Vol. 153, pág. 71, 1968.

3 - BARBANIS, B. e WOLTJER, L. - "Orbits in Spiral Galaxies and the Velocity Dispersion of Population I Stars" in Astrophysical Journal , vol. 150, pág. 461, 1967.

4 - CONTE, S. D. - Elementary Numerical Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

5 - DELHAYE, J. - "Solar Motion and Velocity Distribution of Common Stars" in A.Blaauw and M.Schmidt (Ed.) - Galactic Structure, University of Chicago Press, Chicago, pág. 61, 1965.

6 - GLIESE, W. - Catalogue of Nearby Stars, Verlag G. Braun. Karlsruhe, 1969.

7 - HERRICH, S. - Astrodynamics, Vol. 2, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1972.

8 - MIHALAS, D. - Galactic Astronomy, W.H.Freeman and Company, San Francisco, 1968

9 - NORKIN, S. B. - The Elements of Computational Mathematics, Pergamon Press, Oxford, 1965.

10 - OGORODNIKOV, K. F. - Dynamics of Stellar Systems, Pergamon Press, Oxford, 1965.

11 - OORT, J. H. - "Stellar Dynamics" in A.Blaauw and M.Schmidt (Ed) in Galactic Struture, University of Chicago Press, Chicago, pág. 455, 1965.

12 - TORGARD, I. _ "Studies on Particle Orbits in Plane Models of Stellar Systems" in Meddelanden Från Lunds Astronomiska Observatorium - Sér. II, Nr. 133, 1956.

E R R A T A

1) pág. 7

Onde se lê " $\Theta_r = \Theta_o R_o$ "

Leia-se " $\Theta r = \Theta_o R_o$ "

2) pág 7

As constantes A e B, surgidas no desenvolvimento de $\Theta_{circ}(r)$ na vizinhança do ponto $r = R_o$, são as constantes de Oort.

3) pág 9

Onde se lê " x = 31,6 km/s "

Leia-se " x = 31,6 km/s por kpc "

4) pág 12

A igualdade $\frac{A - B}{-B} = \frac{< \Pi^2 >^{1/2}}{< v^2 >^{1/2}}$ relaciona-se à "análise do elipsóide de velocidade" (ref. 8 - Cap. 12)

5) pág 20

Quando fizemos referência à manipulação do catálogo de W.Gliese, deveríamos ter observado que, neste catálogo, o eixo U está orientado no sentido do C.G., enquanto que, no presente texto, adotamos o sentido anti-centro para o mesmo eixo. Isto obrigou-nos a trocar o sinal das velocidades, ao longo de U, das estrelas selecionadas, como pode ser verificado na Tabela 10 (pag. 66)

6) pág. 39

Onde se lê " $f_o = w \left(\frac{dr}{d\psi}\right)_1$ "

Leia-se " $f_1 = w \left(\frac{dr}{d\psi}\right)_1$ "

7) pág 40

Onde se lê " $r_2^* = r_1^* + \Delta_{3/2}^*$ "

Leia-se " $r_2^* = r_1^{**} + \Delta_{3/2}^*$ "

8) pág 41

Onde se lê " $r_1^{***} = r_0 + \Delta_{1/2}^{***}$ "

Leia-se " $r_1^{***} = R_0 + \Delta_{1/2}^{***}$ "

9) pág 42

Onde se lê " $\Delta_{5/2}^* = f_2^{**} + \frac{1}{2} f_{3/2}^{1**} + \frac{5}{12} f_1^{2*} + \frac{3}{8} f_{3/2}^3$ "

Leia-se " $\Delta_{5/2}^* = f_2^{**} + \frac{1}{2} f_{3/2}^{1**} + \frac{5}{12} f_1^{2**} + \frac{3}{8} f_{3/2}^3$ "

10) pág 45

Onde se lê "Período de revolução, calculado pelo método de Simpson"

Leia-se "Intervalo de tempo, calculado pelo método de Simpson"

11) pág 46

Onde se lê " $f_{3/2}^2 = -0,00000$

$f_{3/2}^{2*} = -0,00000$ "

Leia-se " $f_{3/2}^3 = -0,00000$

$f_{3/2}^{3*} = -0,00000$ "

12) pág 69

Onde se lê " Órbitas superpostas "

Leia-se " Arcos superpostos "

13) Em todos os gráficos, a orientação dos eixos está de acordo com a figura 5 (pág. 20).