

OBSERVAÇÃO E ANÁLISE DAS BINÁRIAS ECLIPSANTES

DO TIPO "ALGOL"

Cláudio Souza Martins

1979

Orientador: José Adolfo S. de Campos

Agradeço a orientação do Prof. José Adolfo S. de Campos
e a colaboração dos professores José Augusto B. de
Nazaré e Encarnación A. M. Gonzalez.

Í N D I C E

Resumo	1
Key words	1
Introdução	2
Características dos Sistemas Binários	4
Elementos orbitais	5
Probabilidade de ocorrência de eclipse	7
A observação fotométrica	8
O Fotômetro	9
Determinação do ponto de operação da Fotomultiplicadora .	12
Ajuste do zero do Amplificador	13
Ajuste do zero do Voltímetro Eletrônico	14
A observação de estrelas variáveis	17
Preparação do Fotômetro	18
Preparação do Registrador Gráfico	19
Preparação do sistema DVM Impressora	19
Sequência da observação	19
A Curva de Luz	21
Determinação dos Elementos	26
Solução para o eclipse total	30
Solução para o eclipse parcial	35
Construção das tabelas	39
Conclusão	45
APÊNDICES:	
I- O Programa PERÍODO	47
II- Eclipsantes do tipo "ALGOL" observáveis do Rio de Janeiro	55
Referências	63

RESUMO

Os sistemas binários eclipsantes são formados por duas estrelas cujo plano orbital é quase coincidente com a linha de visada do observador, fazendo com que, periodicamente, uma estrela intercepte a luz da outra, provocando eclipses.

O caráter variável da luz proveniente destes sistemas, nos leva a pesquisá-los, no sentido de obter um maior número de informações, através da observação fotométrica.

Obtidos os dados observacionais, obedecendo as normas estabelecidas para a utilização do fotômetro fotoelétrico e dos registradores, uma curva de luz que ajuste os pontos colhidos nas observações pode ser calculada pelo método dos mínimos quadrados, aplicado à teoria das séries de Fourier, já que o fenômeno tem um caráter periódico.

Para a análise desta curva de luz, o método desenvolvido por H. N. Russel, em 1912, para a determinação dos elementos destes sistemas como, os raios e as luminosidades relativas das componentes e a inclinação do plano orbital, baseia-se na interpretação das quedas de luz durante os eclipses e na área de uma estrela que é coberta pela outra durante estes momentos. O cálculo é facilitado pela inclusão de restrições como, órbitas circulares, estrelas esféricas e uniformemente iluminadas e sem nenhum efeito de reflexão ou deformações por atrações gravitacionais.

KEY WORDS: As leis de Kepler; A probabilidade de eclipses nos sistemas estelares binários; A utilização dos fotômetros; O método dos mínimos quadrados e séries de Fourier; Determinação dos elementos dos sistemas binários eclipsantes "Algol"; As binárias "algol" observáveis da cidade do Rio de Janeiro.

INTRODUÇÃO

O termo "binária" foi primeiramente utilizado por Sir William Herschel, em 1802, em seu trabalho "On the Construction of the Universe", para se referir a um sistema duplo de estrelas em que as componentes estão fisicamente associadas pelas leis da gravitação.

Segundo Aitken, a primeira binária foi descoberta pelo astrônomo italiano Jean Baptiste Riccioli, em 1650, e era ξ Ursae Majoris (Mizar).

Em 1670, Montanari, observou o fato de que Algol (β Persei) apresentava uma variação periódica no seu brilho. Entretanto, só em 1782, Goodericke explicou o fenômeno como sendo resultante do eclipse parcial da estrela mais brilhante por uma companheira menos luminosa. Por este fato, o sistema Algol foi denominado "binária eclipsante".

Desde a descoberta de Algol como um sistema eclipsante, outras binárias semelhantes tem sido encontradas e estudadas. Nem todos os sistemas eclipsantes porém, tem comportamentos parecidos com o de β Persei. As estrelas do tipo β Lirae e W Ursae Majoris, por exemplo, formam sistemas eclipsantes bem diversos daquele.

Sendo o período, a principal característica das estrelas binárias, a sua duração é que vai definir o tipo da eclipsante. Binárias de curto período, como as W Ursae Majoris, são denominadas "cerradas", devido à proximidade das componentes. Esta proximidade vai, obviamente, facilitar a ação gravitacional de uma estrela sobre a outra, afastando-as da forma esférica e provocando a interação de suas atmosferas e dificultando o estudo e a determinação de seus elementos orbitais.

As binárias do tipo Algol, tem períodos em torno de 2 dias (em média) e suas órbitas podem, sem grandes erros, ser consideradas circulares. Da mesma maneira, as estrelas destes sistemas não tem uma forma muito longe da esférica.

Em 1912, Henry Norris Russel, desenvolveu um método para a determinação dos elementos orbitais das binárias eclipsantes que apesar das suas limitações pode, razoavelmente, ser utilizado para o caso Algol.

Neste trabalho, apresentaremos tão somente este desenvolvimento, apenas citando, em rápidas palavras, que, em certos casos, algumas correções devem ser feitas para a obtenção de resultados mais corretos.

As informações acerca do funcionamento das partes componentes do fotômetro fotoelétrico, bem como os processos de observação fotométrica foram fornecidas pelo Prof. José Adolfo S. de Campos, que me orientou na elaboração deste projeto.

O capítulo referente à obtenção da curva de luz pelo método dos mínimos quadrados e séries de Fourier foram extraídos da tese para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Universidade Federal Fluminense de Encarnación A. M. Gonzalez.

Um sistema binário de estrelas é formado por duas componentes que descrevem órbitas elípticas em torno do seu centro de massa co mum. Este ponto coincide com o foco que é comum às duas elipses .

Sendo um sistema de dois corpos, a ele se aplicam as três leis de Kepler:

- 1) A órbita de dois corpos é uma secção cônica com um dos objetos' no foco. No caso presente, esta cônica é uma elipse.
- 2) A reta que liga os dois corpos descreve áreas iguais em iguais' intervalos de tempo.
- 3) O produto do quadrado do período pela massa total do sistema é proporcional ao cubo da distância média entre os corpos.

Seja uma elipse de semi-eixo maior a, excentricidade e e fo cos F e F'.

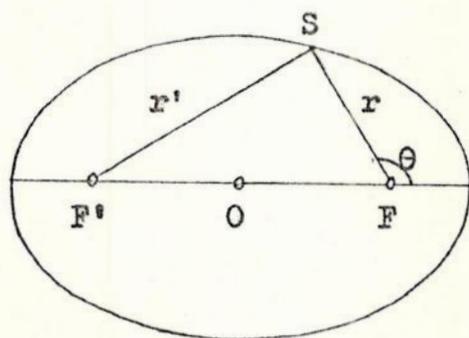


fig. 1

Pela definição de elipse, temos:

$$r + r' = 2a \quad (1)$$

Da figura 1, tiramos:

$$r'^2 = r^2 \text{sen}^2 \theta + (F'F + r \text{cos} \theta)^2 \quad (2)$$

Mas $F'F = 2ae$, então

$$r'^2 = r^2 + 4 a^2 e^2 + 4ra \text{cos} \theta \quad (3)$$

De (1) e (3), tiramos:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad (4)$$

que é a equação polar da elipse.

Para expressar a 2ª lei, consideremos as coordenadas polares de um dos corpos nos instantes t e $t+dt$.

Na figura 2, o arco descrito pelo corpo em questão no intervalo de tempo dt é $r d\theta$, que é também a altura do triângulo de base $r+dr$. A área deste triângulo é $\frac{1}{2} r^2 d\theta$. Como a velocidade areal é constante, temos:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = k$$

A área da elipse é $\pi ab = a^2(1-e^2)$ e esta área é descrita pelo raio vetor no período P . Então

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi a^2(1-e^2)^{1/2}}{P} \quad (5)$$

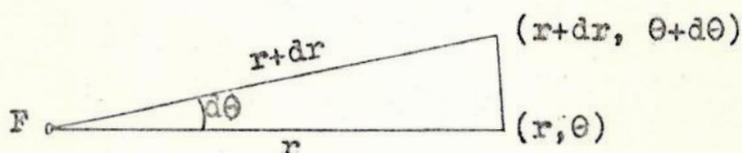


fig. 2

Se as massas M_1 e M_2 das componentes do sistema binário são expressas em massas solares, o período P em anos siderais e o semi-eixo maior a em UA, a 3ª lei assume a forma:

$$\frac{G}{4\pi^2} P^2 (M_1 + M_2) = a^3 \quad (6)$$

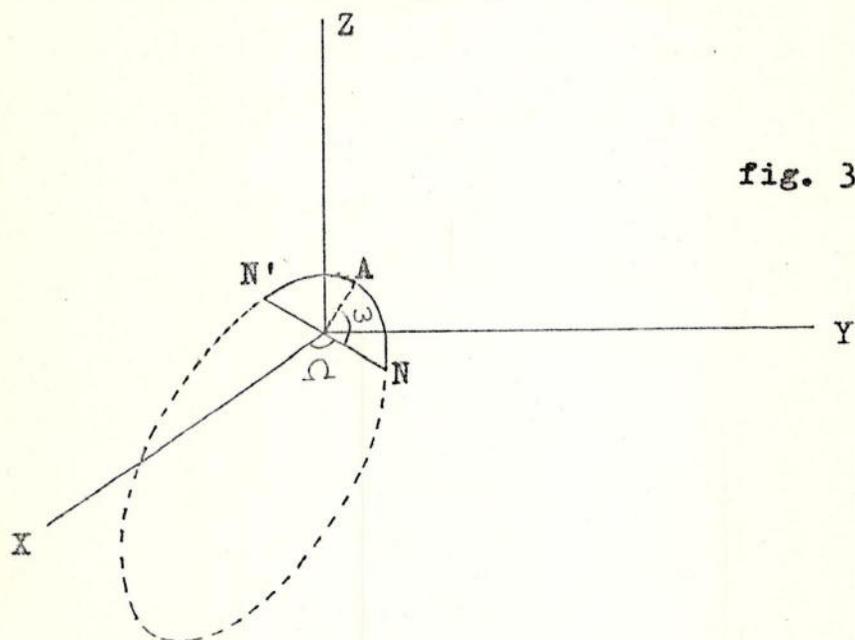
onde G é a constante de gravitação.

ELEMENTOS ORBITAIS

Os elementos necessários para caracterizar a órbita de um sistema binário são os seguintes:

a - semi-eixo maior

- e - excentricidade
 P - período
 i - inclinação do plano da órbita em relação ao plano do céu
 Ω - ângulo de posição da linha dos nodos
 ω - longitude do periastro
 T - instante da passagem pelo periastro



Na figura 3, o plano xy é o plano do céu, e o eixo OZ aponta para o observador, OX tem a direção NORTE-SUL e o ponto A é o periastro.

Em termos de semi-eixo maior a e da inclinação i , as estrelas binárias podem ser classificadas da seguinte maneira:

- a) Binárias Visuais - aquelas que podem ser ópticamente separadas, pelo menos com o interferômetro.
- b) Binárias Espectroscópicas - aquelas cujo movimento orbital só pode ser detectado pela observação de velocidades radiais variáveis.
- c) Binárias Eclipsantes - aquelas cuja inclinação i é suficientemente próxima de 90° para fazer com que, periodicamente, uma estrela intercepte a luz da outra, provocando a ocorrência de eclipses.

Neste trabalho vamos tratar exclusivamente do caso (c).

PROBABILIDADE DE OCORRENCIA DE ECLIPSE

4

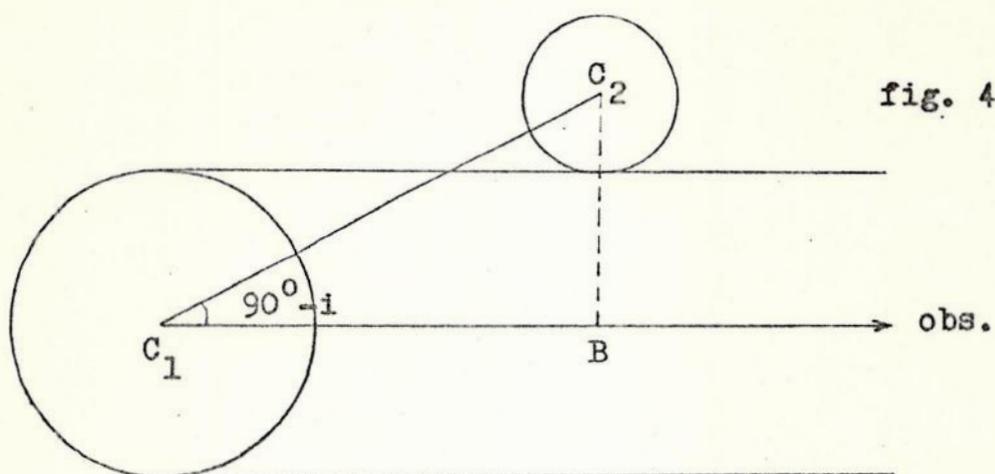


fig. 4

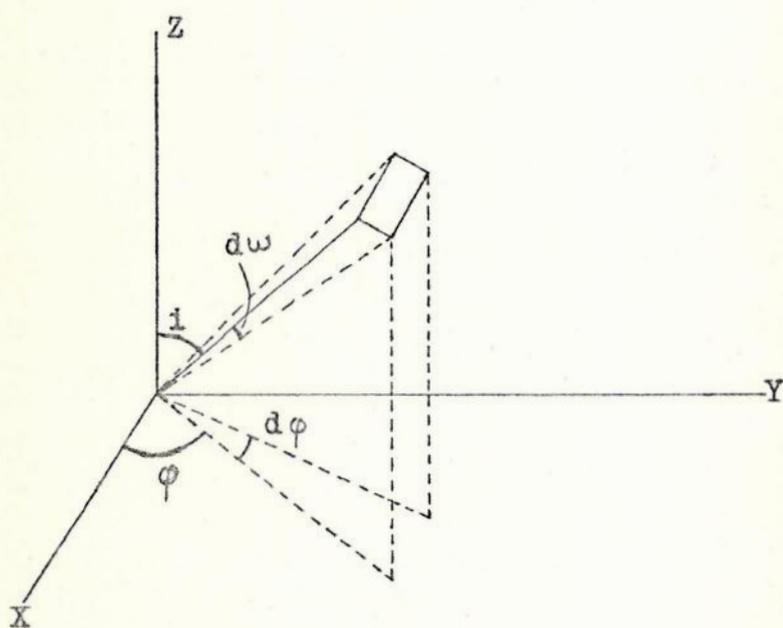


fig. 5

A figura 4 representa um sistema de estrelas esféricas com órbita circular. O plano da figura contém a linha de visada do observador e a normal ao plano da órbita. Se construirmos um cilindro circunscrito a uma das estrelas, tendo como eixo a linha de visada do observador, sempre que a outra estrela penetrar este cilindro, haverá eclipse. Para o caso limite da figura, C_2B é igual à soma dos raios das estrelas, ou seja, $R_1 + R_2$ e C_2C_1B é o ângulo entre o plano orbital e a linha de visada, igual a $(90^\circ - i)$. Para que haja eclipse, este ângulo deve ser menor do que o caso limite, isto é:

$$|\sin(90^\circ - i)| = \cos i < \frac{C_2B}{C_1C_2}, \text{ ou ainda,} \quad \cos i < \frac{R_1 + R_2}{a} \quad (7)$$

A inclinação i pode ser definida como sendo o ângulo entre a linha de visada e a normal ao plano da órbita. Na figura 5, o eixo Z representa esta linha de visada e r , aquela normal.

A probabilidade de qualquer faixa de variação de i é proporcional ao ângulo sólido a ela correspondente.

Da figura 5, tiramos:

$$d\omega = \text{sen } i \, di \, d\varphi$$

Se I e S são, respectivamente, os limites inferiores e superiores de i , que satisfazem à equação (7), temos:

$$\text{probabilidade de eclipse} = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_I^S \text{sen } i \, di}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \text{sen } i \, di} = \frac{1}{2} (\cos I - \cos S)$$

Como os limites I e S devem satisfazer à equação (7), por esta equação e a figura 4, podemos escrever:

$$\cos I = -\cos S = \frac{R_1 + R_2}{a}. \text{ Ou seja,}$$

$$\text{PROBABILIDADE DE ECLIPSE} = \frac{R_1 + R_2}{a} \quad (8)$$

Esta equação nos diz que as binárias eclipsantes tendem a ser formadas por estrelas gigantes com pequenos raios orbitais.

Devido às pequenas dimensões dos raios de suas órbitas, as componentes destes sistemas não podem ser resolvidas visualmente. Entretanto, as observações fotométricas associadas às espectroscópicas, permitem uma avaliação dos afastamentos angulares das componentes.

A OBSERVAÇÃO FOTOMÉTRICA

A própria designação de Binárias Eclipsantes nos leva a perceber o caráter variável da luz que nos chega dessas estrelas. É a medida, através do tempo, dessa variação de brilho que nos permite avaliar diversos parâmetros destes sistemas, como o período orbi -

tal, as magnitudes, os raios relativos das componentes e a inclinação do plano orbital em relação à linha de visada do observador.

O aparelho que faz essas medidas é o FOTÔMETRO FOTOELÉTRICO e as observações feitas através dele são ditas FOTOMÉTRICAS.

Descreveremos aqui o fotômetro, seu funcionamento e os métodos utilizados nas observações fotométricas.

O FOTÔMETRO

A finalidade do fotômetro fotoelétrico é medir, dentro de certas faixas espectrais, o iluminamento (fluxo recebido por unidade de área) produzido por fontes, astronômicas ou não.

A parte essencial do fotômetro é a fotomultiplicadora, uma associação de detetores fotoelétricos, capaz de transformar em corrente elétrica a radiação luminosa nela incidente, e ampliar esta corrente cerca de 10^6 vezes.

A fotomultiplicadora é encerrada num envoltório rígido, que a protege contra campos magnéticos e elétricos, e opaca a qualquer radiação luminosa que não incida na sua janela. Este envoltório é chamado CASA DA FOTOMULTIPLICADORA.

No caso da fotometria astronômica, a CASA precisa de um acoplador que a conecte ao telescópio. Esse acoplador é constituído de uma ocular, uma roda de diafragmas para isolar o objeto a ser observado, uma roda de filtros para selecionar a faixa espectral desejada, uma lente de campo chamada Lente de Fabry que faz incidir paralelamente os raios luminosos sobre o cátodo da fotomultiplicadora e um espelho acoplador que permite a colocação do objeto observado no centro da ocular.

A amplificação conseguida pela fotomultiplicadora não é suficiente para que a corrente possa ser medida com sensibilidade. Por isso, a corrente que sai da CASA deve ser conduzida a um amplificador e daí para os aparelhos registradores. Pode ser usado um registrador gráfico ou uma impressora digital. Esta última tem a vantagem de reduzir o tempo de leitura dos resultados e a margem de erros acidentais nesta leitura.

A região do céu "vista" pelo fotômetro depende do diâmetro do diafragma e da escala do telescópio utilizado.

Se d é o diâmetro do diafragma em mm e E'' a escala do telescópio, o diâmetro do diafragma d'' , em segundos de arco, pode ser cal

culado pela fórmula:

$$d'' = d \cdot E'' \quad (9)$$

Se f é a distancia focal do telescópio em mm, temos:

$$E'' = \frac{206265''}{f} \quad (10)$$

Dizemos que quando observamos, através de um diafragma de diâmetro d , o catodo da fotomultiplicadora "vê", no céu, uma região circular de diâmetro d'' .

A roda de filtros, geralmente, enquadra-se num dos sistemas fotométricos (U,B,V) ou (u,v,b,y).

Para facilitar a compreensão dos métodos observacionais que aqui serão descritos, tomaremos como base o fotômetro e os registradores utilizados no Observatório de Valongo. Abaixo relacionamos as dadas técnicas destes aparelhos.

1) ACOPLADOR - Pacific Photometric Instruments (PPI)

modelo 401

- a) Ocular - distancia focal 16,3mm
- b) Retículo da Ocular - iluminado; 4 círculos concêntricos
- c) Disco de Diafragmas - 8 aberturas

I - d=3,9878mm	V - d=1,0160mm
II - d=2,7940mm	VI - d=0,7112mm
III - d=1,8542mm	VII - d=0,5080mm
IV - d=1,3208mm	VIII - d=0,3429mm
- d) Disco de Filtros - 4 posições: CLARO, U, B e V
- e) Lente de Fabry - diâmetro 8mm; distância focal 72mm

2) CASA DA FOMULTIPLICADORA - PPI modelo 50

3) FOMULTIPLICADORA - RCA1P21 ou RCA1P28

- a) Resposta Espectral - S-4(1P21) e S-5(1P28)
- b) Número de Dinodos - 9
- c) Sensibilidade de Catodo - 4×10^{-5} A/lm
- d) Eficiência Quântica de Catodo - 13% em 3800 Å
- e) Ganho - 3×10^6

- f) Sensibilidade de Anodo - 120 A/lm
- g) Corrente de Escuro - 1×10^{-9} A
- h) EADCI - 5×10^{-11} lm
- i) ENI - $6,7 \times 10^{-13}$ lm
- j) Tempo de Surgimento de Pulse no Anodo - $1,6 \times 10^{-9}$ s
- k) Tempo de Trânsito - $1,6 \times 10^{-8}$ s

4) AMPLIFICADOR - PPI modelo 110

- a) Corrente de Entrada - 10 μ A até 100pA em 11 faixas
- b) Resolução - 1 pA
- c) Previsão de Medida - no medidor: 1% (2% nas 2 últimas faixas mais sensíveis);
saída de 1V: 0,2% (1% nas 2 últimas faixas mais sensíveis)
- d) Cancelamento da Corrente de Escuro - 6 posições:
1 μ A, 100nA, 10nA, 1nA, 100pA e OPEN
- e) Sensibilidade - expansão de 3 vezes em todas as escalas, menos as 2 últimas
- f) Polaridade - bipolar
- g) Tempo de Surgimento -

Faixa	Tempo de Surgimento
10^{-5} A	15 μ s
10^{-6}	150 μ s
10^{-7}	1,5ms
10^{-8}	15 ms
10^{-9}	150 ms
10^{-10}	700 ms
- h) Desvio da Voltagem com a Temperatura - 5mV/ $^{\circ}$ C
- i) Desvio da Voltagem com o Tempo - 2,5 mV/dia
- j) Ruído - 3mV na saída de 1V
- k) Saídas - 1V a 1mA; 10mV
- l) Escalas do Medidor - 3 escalas:
 - 0 - 100 em 100 divisões
 - 0 - 30 em 60 divisões
 - 0 - 2 em densidade ótica

5) FONTE DE ALTA TENSÃO - acoplada ao Amplificador PPI modelo 110

- a) Faixa - variável de -50 a -2000V em 4 faixas
- b) Corrente - 6 mA (máxima)

- c) Ripple - 5mV
- d) Regulação - 0,004% sem carga; com carga, entre 105 e 125 V
- e) Alimentação - 115/230 VAC; 50/60 Hz; 60 w

6) REGISTRADOR GRÁFICO - Equipamentos Científicos Brasileiros, modelo RB 101

- a) Número de canais - 1 canal
- b) Escalas de Entrada - 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100; 200; 500; mV; 1V; 2V
- c) Ajuste de Ponto Zero - 100% em todas as escalas
- d) Tempo de resposta - < 1seg para deflexão total
- e) Precisão - melhor que 0,25% da faixa
- f) Sensibilidade - \pm 0,1% da faixa
- g) Velocidade de Papel - 24 unidades:
1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 15; 20; 30; 60 cm/min e cm/h

7) VOLTÍMETRO ELETRÔNICO - Hewlett Packard (HP) modelo 5245M

- a) Faixas de Medição - 10V; 100V; 1000V
- b) Número de Leituras - até 7/s
- c) Tempo de cada Leitura - < 21,1 ms
- d) Polaridade - bipolar

8) IMPRESSORA DIGITAL - HP modelo 5058 B

- a) nº de caracteres per linha - 18 (máximo)
- b) Velocidade de Impressão - 20 linhas/s

DETERMINAÇÃO DO PONTO DE OPERAÇÃO DA FOTOMULTIPLICADORA

O ganho e a Corrente de Escuro dependem da voltagem aplicada à fotomultiplicadora. Porém, a razão ganho/corrente de escuro apresenta um ponto máximo, em que a relação sinal-ruído é a melhor. É preciso, então determinar este ponto. Para tanto, procede-se da seguinte maneira:

- 1) Per meio do botão 10331 da figura 6 abaixe o espelho acoplador, impedindo que qualquer feixe de luz atinja o fotocátodo;
- 2) Ligue a força de todos os componentes do fotômetro fotoelétrico;
- 3) Per meio do seletor B figura 7, ponha a voltagem operacional 'próxima da voltagem recomendada pelo fabricante, utilizando-se'

- * também do potenciômetro HIGH VOLTAGE (2 figura 7);
- 4) Espere uma hora até que os equipamentos se estabilizem;
 - 5) Para fazer as medidas, vamos nos utilizar de uma fonte luminosa alimentada por baterias. Escolhemos a intensidade da fonte de tal maneira que seja próxima e possa ser lida na mesma escala da corrente de escuro. Esta intensidade, uma vez ajustada, não mais será reajustada durante a série de medidas. As condições acima devem ser observadas tanto para o ponto mais baixo quanto para o mais alto da voltagem operacional;
 - 6) Inicialmente, ponha a voltagem operacional no seu ponto mais baixo, por meio do seletor B figura 7 ;
 - 7) Meça o valor da corrente de escuro e depois, levantando o espelho, anote o valor da intensidade da fonte luminosa e da voltagem;
 - 8) Repita essa operação para cada nova voltagem até a voltagem máxima da faixa escolhida para medição. O limite superior dessa faixa não pode ultrapassar a máxima voltagem permissível dada pelo fabricante da fotomultiplicadora;
 - 9) Depois de feitas as medidas, vamos arrumar os dados de acordo com a tabela e construir um gráfico Relação Sinal-Ruído (S/I_e) contra Voltagem Operacional

V	I_e	I_f	$S=I_f-I_e$	S/I_e

A voltagem operacional escolhida será aquela para a qual a razão S/I_e é máxima.

Esta série de medidas deve ser repetida pelo menos mais 2 vezes, de modo a confirmar o valor encontrado.

AJUSTE DO ZERO DO AMPLIFICADOR

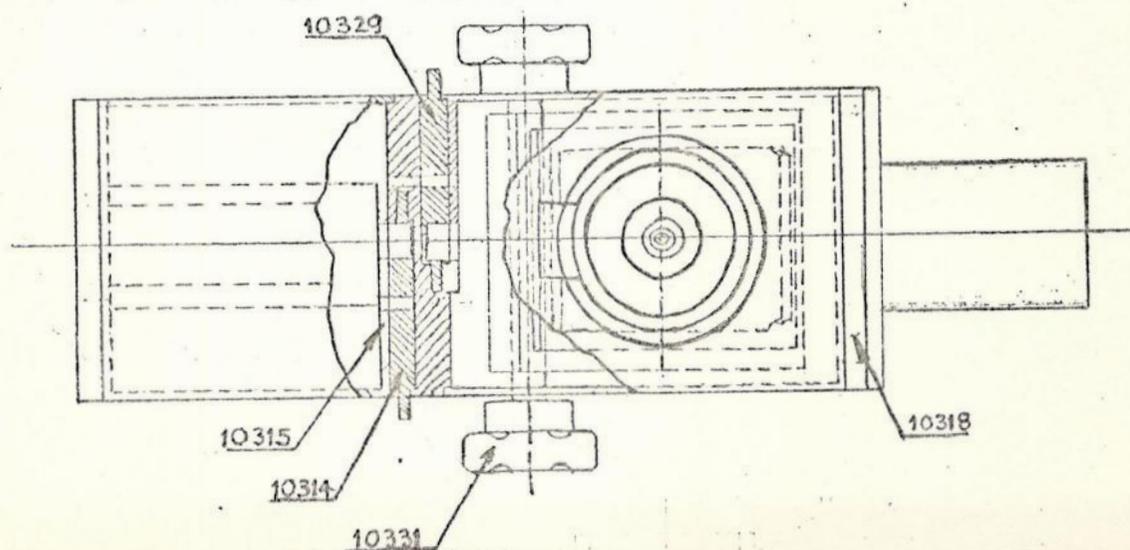
- 1) Desconecte todos os cabos (entrada e saída) do amplificador;
- 2) Verifique e ajuste, se necessário, o zero mecânico do aparelho, por meio de um parafuso existente na frente do mostrador;

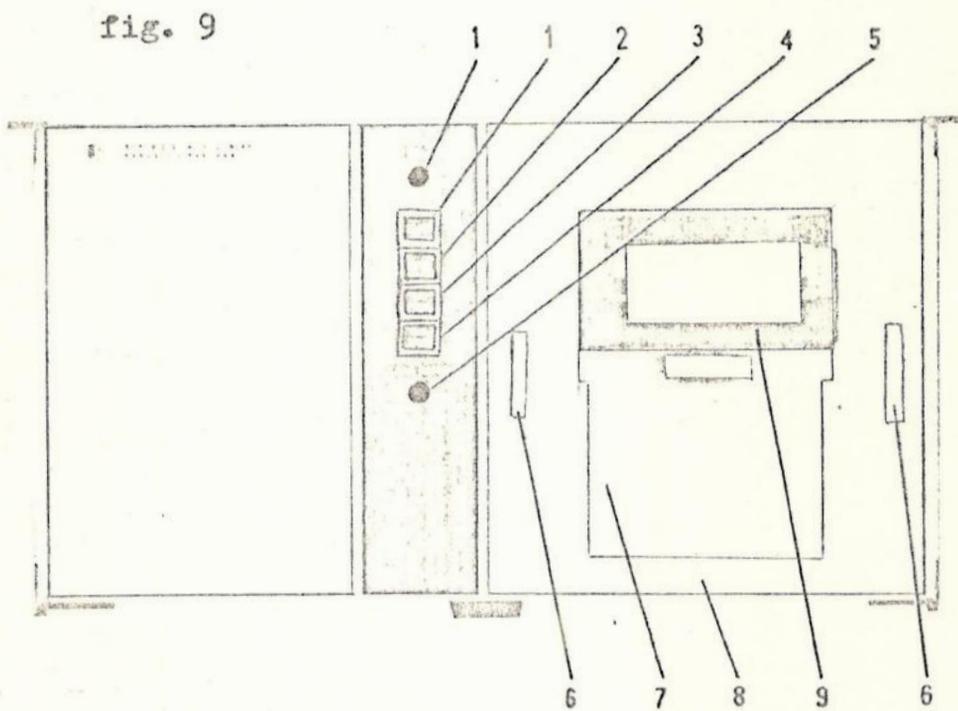
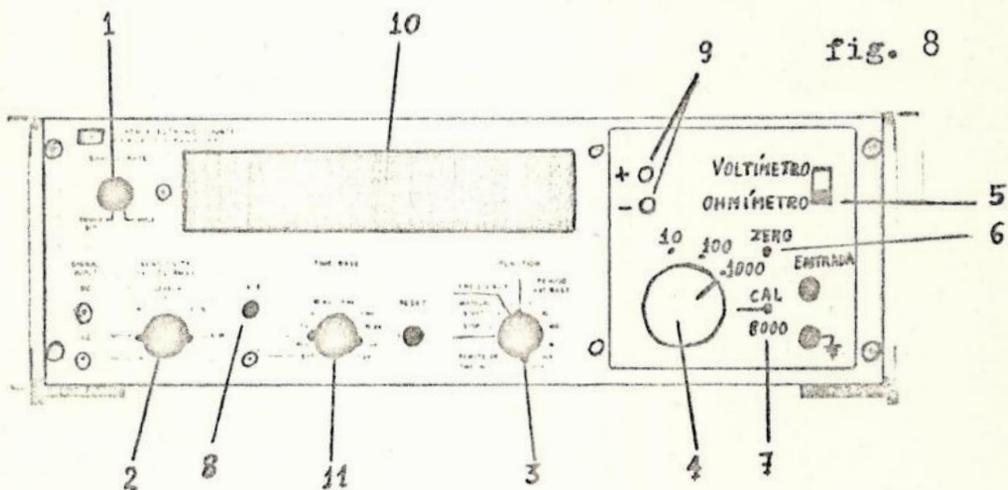
- 3) Ligue o amplificador por meio da chave 5 figura 7 e espere uma hora antes de passar ao passo seguinte;
- 4) Penha o seletor CANCELLATION CURRENT (D figura 7) em OPEN;
- 5) Gire o controle SENSITIVITY (Y figura 7) inteiramente no sentido anti-horário;
- 6) Conecte a saída SCOPE com conector BNC, situada no painel traseiro de amplificador, à entrada DC do osciloscópio com uma sensibilidade de 10mV/cm;
- 7) Gire o seletor INPUT CURRENT (C figura 7) para 10^{-8} e verifique se a saída é de zero volt;
- 8) Restaure o zero por meio de rotação do potenciômetro ZERO ADJUST (X figura 7).

AJUSTE DO ZERO DO VOLTÍMETRO ELETRÔNICO (DVM)

- 1) Ligue o DVM através do botão 1, figura 8;
- 2) Penha em curto os bornes de entrada;
- 3) Espere uma hora antes de realizar qualquer ajuste;
- 4) Penha o botão 4, figura 8 na escala de 10 volts. Ajuste o potenciômetro ZERO, (6, figura 8) de modo que a leitura seja 0,0003 e as lâmpadas indicadoras da polaridade do sinal (9, figura 8) estejam acesas simultaneamente;
- 5) Penha o botão 4, figura 8 na posição CAL. O mostrador deve apresentar 8000volts. Caso isto não ocorra faça aparecer 8 volts ajustando o potenciômetro CAL (7, figura 8);
- 6) Retire o curto dos bornes de entrada. O DVM encontra-se agora pronto para operar.

fig. 6





A OBSERVAÇÃO DE ESTRELAS VARIÁVEIS

Se E_1 e E_2 são os iluminamentos produzidos por duas estrelas de magnitudes m_1 e m_2 , respectivamente, sabemos que

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{E_1}{E_2}$$

Considerando a utilização de uma rede de filtros no sistema (U,B,V), as magnitudes instrumentais de uma estrela, para cada faixa espectral, serão:

$$m(U) = -2,5 \log E(U)$$

$$m(B) = -2,5 \log E(B)$$

$$m(V) = -2,5 \log E(V)$$

$$\text{Mas } E(U,B,V) = d(U,B,V) \times S(U,B,V)$$

onde $d(U,B,V)$ é a deflexão do ponteiro lida na escala de 0 a 100 de voltímetro visual, na escala de 0 a 100 do registrador gráfico, ou na escala de 10V do DVM, para cada um dos filtros e $S(U,B,V)$ é a escala lida no seletor de corrente de entrada (INPUT CURRENT), para cada um dos filtros. Então,

$$m(U) = -2,5 \log d(U) - 2,5 \log S(U)$$

$$m(B) = -2,5 \log d(B) - 2,5 \log S(B)$$

$$m(V) = -2,5 \log d(V) - 2,5 \log S(V)$$

Para evitar o excesso de números negativos, fazemos o seguinte artifício:

Uma estrela de magnitude zero vai ocasionar uma deflexão de 100 na escala de 10 A. Então,

$$m(L) = -2,5 \log d(L) - 2,5 \log S(L) + G$$

$$m(L) = 0, \quad d(L) = 100 \quad \text{e} \quad S(L) = 10 \quad \text{A}$$

$$\text{Logo, } G = 7,5$$

Começo 100 da escala visual, ou do registrador gráfico corresponde a 1V na escala de saída do Voltímetro Eletrônico (DVM), para o uso de DVM, o valor de G será 2,5.

A observação de estrelas variáveis, intrínsecas ou eclipsantes, deve obedecer a uma certa sequência de operações.

O primeiro passo seria escolher, num catálogo especializado a

estrela a ser observada e anotar as suas principais características: coordenadas (ascensão reta e declinação); período; tipo da variável; magnitudes (máxima e mínima); época de observação de mínimo; duração de mínimo e tipo espectral.

Não é aconselhável a escolha de estrelas que passem o meridiano de lugar a uma distância zenital superior a 50° , principalmente se o telescópio se acha instalado em zonas urbanas de grande população.

Feita a escolha da estrela no catálogo, calcula-se o diâmetro angular da região do céu, visível através do diafragma de maior abertura, pelas fórmulas (9) e (10). Identifica-se, num atlas celeste, o campo estelar em torno da estrela em questão. Em seguida, escolhe-se uma estrela de comparação, que se saiba não variável, de magnitude e tipo espectral tão próximos quanto possível da magnitude e tipo espectral da variável escolhida e, que não esteja, angularmente, muito afastada dela.

Antes de iniciar a observação fotométrica, é aconselhável identificar, visual ou fotograficamente, no telescópio, a variável e a estrela de comparação.

Cumprida esta primeira fase do programa, passa-se ao processo observacional.

Os aparelhos devem ser ligados uma hora antes de iniciar a observação.

PREPARAÇÃO DO FOTÔMETRO (figura 7)

- 1) Feche o telescópio
- 2) Ponha o seletor da corrente de entrada INPUT CURRENT (C) em 10^{-5}
- 3) Ponha o seletor da corrente de cancelamento CANCELLATION CURRENT (D) em OPEN
- 4) Ligue a chave POWER
- 5) Ponha a chave de tensão (E) no múltiplo de 500 mais próximo da voltagem indicada
- 6) Ponha a chave METER (A) em H.V.
- 7) Verifique no medidor, se o valor da voltagem é o desejado, se não, através do seletor HIGH VOLTAGE (2), ajuste até o valor desejado e bloqueie o seletor
- 8) Espere uma hora até estabilizar
- 9) Ponha a chave METER (A) em OUT

10) Ponha a chave POLARITY (7) em OUT

PREPARAÇÃO DO REGISTRADOR GRÁFICO (figura 7.a)

- 1) Ligue a chave de tensão (7)
- 2) Espere 30 minutos
- 3) Através do seletor (2) escolha a escala de entrada. Esta escala deve ser coerente com a corrente de saída do amplificador
- 4) Baixe a pena registradora por meio da alavanca (8)
- 5) Com a entrada em curto, ajuste o ponto zero por meio do botão (1). Depois desta operação desfaça o curto da entrada
- 6) Ponha a alavanca (5) em LIVRE
- 7) Escolha a velocidade por meio do botão (6) e da chave (3). A escolha da velocidade vai depender das condições do céu e deve ser tanto maior quanto maior for a turbulência do fundo de céu. Geralmente utiliza-se as velocidades de 30 cm/min e 60 cm/min
- 8) Engate a engrenagem para mudança de velocidade pela alavanca (5)

PREPARAÇÃO DO SISTEMA DVM IMPRESSORA (figuras 8 e 9)

- 1) Ligue o DVM pelo botão (1, figura 8) e a impressora por meio da tecla (1, figura 9)
- 2) Espere 30 minutos
- 3) Ponha o seletor SENSITIVITY (2, figura 8) em PLUG-IN
- 4) Ponha o seletor FUNCTION (3, figura 8) em REMOTE
- 5) Escolha a escala de entrada do DVM pelo seletor (4, figura 8)
- 6) Ponha a entrada em curto e verifique o ponto zero. Desfaça em seguida o curto se o ponto estiver bem ajustado. Caso contrário ajuste-o
- 7) Regule a velocidade de leitura pelo botão (1, figura 9), observando o piscar da lâmpada (8, figura 8)
- 8) Ponha a chave situada atrás do Rack da sala da Hora na posição que faça aparecer o ponto branco

SEQUENCIA DA OBSERVAÇÃO

No caso de uso do registrador gráfico, procede-se da seguinte maneira:

- a) Ligue a chave (4, figura 7.a) que aciona o arraste do papel
- b) Ponha o seletor INPUT CURRENT (C, figura 7) sucessivamente em 10^{-6} , 10^{-7} , ..., etc, até registrar uma corrente cujo valor fique entre 20 e 80 na escala de 0 a 100
- c) Anote o valor registrado e o indicado pelo seletor INPUT CURRENT; Esta será a corrente de escuro da fotomultiplicadora
- d) Ponha o seletor INPUT CURRENT em 10^{-5}
- e) Baixe o espelho acoplador e destampe o telescópio
- f) Cale a estrela desejada
- g) escolha o diafragma mais apropriado para esta estrela e anote o seu valor
- h) Levante o espelho e faça as seguintes medidas:

Objeto	Filtro
Estrela variável	U
Fundo de céu	U
Estrela de comparação	U
Estrela de comparação	B
Fundo de céu	B
Estrela variável	B
Estrela variável	V
Fundo de céu	V
Estrela de comparação	V

Para calar a estrela de comparação é necessário baixar o espelho acoplador e, às vezes, escolher um outro diafragma, cujo valor deve ser anotado. Neste intervalo, a pena registrará a corrente de escuro.

Para o uso do sistema DVM impressora, liga-se a tecla OPER (2, figura 9) da impressora e procede-se como no caso do registrador gráfico, a partir do passo b.

Repete-se o passo h 5 ou mais vezes, cada exposição variando de 10 a 20 segundos, de acordo com a velocidade escolhida.

Em cada registro (gráfico ou digital) deve-se anotar o objeto observado e o instante da observação.

Esta sequência de operações deve ser repetida em intervalos de 10 a 15 minutos durante o tempo em que a estrela for observável e durante um número de noites que se considere suficiente para uma determinação precisa do período da variável.

A CURVA DE LUZ

Terminadas as observações, escolhe-se os pontos médios de cada exposição da estrela variável e da estrela de comparação. Anota-se os valores das magnitudes e os instantes de cada um destes pontos. Os instantes devem ser determinados em dias de Período Juliano.

Calcula-se as magnitudes diferenciais Δm para cada filtro, em cada sequência de exposições, pela expressão:

$$\Delta m = m_{ev} - m_{ec} \quad (11)$$

onde os índices ev e ec dizem respeito à estrela variável e à de comparação, respectivamente.

Resta-nos agora, num sistema Δm_{xtempo} , encontrar uma curva que melhor ajuste estes pontos. Isto pode ser feito através da Análise de Fourier.

Essencialmente, a Análise de Fourier visa a representação de um conjunto de dados em termos de funções senoidais. O caráter periódico das estrelas variáveis, intrínsecas ou eclipsantes, faz com que as curvas de luz destas estrelas possam ser obtidas através deste método.

Uma senóide de frequência ω (radianos por unidade de tempo) ou período $2\pi/\omega$ pode ser representada por

$$M(t) = R \cos(\omega t + \phi) \quad (12)$$

sendo R a amplitude e ϕ a fase.

Para ajustar uma função senoidal a um conjunto de pontos, como é o caso, esta função assumirá a forma:

$$m_t = \mu + R \cos(\omega t + \phi) + \varepsilon_t \quad (13)$$

onde m_t corresponde ao t -ésimo valor observado, ε_t é resíduo e μ uma constante.

O resíduo ε_t é a diferença entre o valor observado e o ajustado. Parece-nos óbvio que a curva será uma boa ajustante quando os resíduos forem pequenos.

O método dos mínimos quadrados nos diz que a melhor curva ajustada será aquela para a qual a soma dos quadrados dos resíduos seja mínima.

Inicialmente vamos considerar a frequência ω conhecida e tentaremos encontrar μ , R e φ que façam a curva (13) passar tão próxima quanto possível dos pontos (t, m_t) .

Para cada um dos n pares de valores observados, teremos, substituindo em (13), as equações dos resíduos:

$$S_0(\mu, R, \varphi) = m_0 - \mu - R \cos(\omega x_0 + \varphi)$$

$$S_1(\mu, R, \varphi) = m_1 - \mu - R \cos(\omega x_1 + \varphi)$$

$$S_{n-1}(\mu, R, \varphi) = m_{n-1} - \mu - R \cos(\omega x_{(n-1)} + \varphi)$$

Pelo princípio dos mínimos quadrados, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sum [S(\mu, R, \varphi)]^2 &= S_0^2 + S_1^2 + \dots + S_{n-1}^2 = \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} [m_t - \mu - R \cos(\omega t + \varphi)]^2 \quad (14) \end{aligned}$$

Fazendo $m_t = \mu + R \cos \omega t \cos \varphi - R \sin \omega t \sin \varphi + \varepsilon_t$,

$$R \cos \varphi = A \quad \text{e} \quad -R \sin \varphi = B, \text{ temos}$$

$$m_t = \mu + A \cos \omega t + B \sin \omega t + \varepsilon_t \quad (15)$$

Agora vamos minimizar a função

$$T(\mu, A, B) = \sum_{t=0}^{n-1} (m_t - \mu - A \cos \omega t - B \sin \omega t)^2$$

Para que esta função seja máxima ou mínima, é necessário que suas derivadas parciais em relação a μ , A e B sejam nulas. Assim,

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = -2 \sum (m_t - \mu - A \cos \omega t - B \sin \omega t) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial A} = -2 \sum \cos \omega t (m_t - \mu - A \cos \omega t - B \sin \omega t) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial B} = -2 \sum \text{sen} \omega t (m_t - \mu - A \cos \omega t - B \text{sen} \omega t) = 0 \quad (18)$$

(17) e (18) ainda podem ser escritas:

$$(19) \sum m_t \cos \omega t - \mu \sum \cos \omega t - A \sum \cos^2 \omega t - B \sum \cos \omega t \text{sen} \omega t = 0$$

$$(20) \sum m_t \text{sen} \omega t - \mu \sum \text{sen} \omega t - A \sum \text{sen} \omega t \cos \omega t - B \sum \text{sen}^2 \omega t = 0$$

Explicitando A em (19), vem:

$$A = \frac{\sum m_t \cos \omega t - \mu \sum \cos \omega t - B \sum \cos \omega t \text{sen} \omega t}{\sum \cos^2 \omega t} \quad (21)$$

Substituindo A em (20) e explicitando B, vem:

$$B = \frac{1}{\Delta} \left[-\sum m_t \cos \omega t \sum \text{sen} \omega t \cos \omega t - \mu \sum \text{sen} \omega t \cos^2 \omega t + \right. \\ \left. + \sum m_t \text{sen} \omega t \sum \cos^2 \omega t + \mu \sum \cos \omega t \sum \text{sen} \omega t \cos \omega t \right]$$

$$\text{onde } \Delta = \sum \text{sen}^2 \omega t \sum \cos^2 \omega t - (\sum \cos \omega t \text{sen} \omega t)^2$$

Fazendo $D_n(\omega) = \frac{\text{sen } n\omega/2}{n \text{sen } \omega/2}$, pode-se demonstrar que:

$$\sum (\cos \omega t)^2 = \frac{n}{2} \left[1 + D_n(2\omega) \cos(n-1)\omega \right]$$

$$\sum \cos \omega t \text{sen} \omega t = \frac{n}{2} D_n(2\omega) \text{sen}(n-1)\omega$$

$$\sum (\text{sen} \omega t)^2 = \frac{n}{2} \left[1 - D_n(2\omega) \cos(n-1)\omega \right]$$

Substituindo estas relações na expressão de B, temos:

$$B = \frac{1}{\Delta} \left\{ -\sum m_t \cos \omega t \left(\frac{n}{2} D_n(2\omega) \text{sen}(n-1)\omega \right) - \mu \frac{n}{2} \sum \text{sen} \omega t \times \right. \\ \left. \times \left[1 + D_n(2\omega) \cos(n-1)\omega \right] + \sum m_t \text{sen} \omega t \frac{n}{2} \left[1 + D_n(2\omega) \cos(n-1)\omega \right] \right. \\ \left. + \mu \sum \cos \omega t \left[\frac{n}{2} D_n(2\omega) \text{sen}(n-1)\omega \right] \right\}$$

$$\Delta = - \left[\frac{n}{2} D_n(2\omega) \operatorname{sen}(n-1)\omega \right]^2 + \frac{n}{2} \left[1 - D_n(2\omega) \cos(n-1)\omega \right] \times \\ \times \frac{n}{2} \left[1 + D_n(2\omega) \cos(n-1)\omega \right]$$

Mas $D_n(2k\pi/n) = 0$ para todo k inteiro e $|nD_n(\omega)| \leq 1/|\operatorname{sen}\omega/2|$

Então, os termos em D_n , nas equações acima, para grandes n e ω não muito pequenos, são pequenos comparando com $n/2$. Desprezando estes termos, vem:

$$B = \frac{1}{\Delta} \left[-\mu \frac{n}{2} \sum \operatorname{sen}\omega t + \frac{n}{2} \sum m_t \operatorname{sen}\omega t \right] \quad \Delta = \frac{n}{2}$$

$$\text{Assim, } B = \frac{2}{n} \sum \left[m_t \operatorname{sen}\omega t - \mu \operatorname{sen}\omega t \right]$$

Da expressão (21), tiramos:

$$A = \frac{2}{n} \sum \left[m_t \cos\omega t - \mu \cos\omega t \right]$$

Aplicando o método de Cramer ao conjunto de equações (16), (17) e (18), determinamos μ :

$$\mu = \frac{1}{n} \sum m_t$$

Assim, encontramos μ , A e B que minimizam $T(\mu, A, B)$, para o caso de ω fixo.

O programa PERÍODO, no apêndice, realiza iterações a partir de um ω_0 inicial, até que seja encontrada a melhor frequência, isto é, a que dê a melhor soma dos quadrados dos resíduos.

Caso a variável em estudo não tenha um período previamente determinado, a frequência inicial ω_0 deve ser estimada a partir do número de picos encontrados nos dados observacionais, da seguinte maneira:

$$\omega_0 = (2\pi/n^{\circ} \text{ de dados}) / (n^{\circ} \text{ de picos}) \quad (22)$$

Se ainda, a estrela observada contiver mais de uma componente periódica, deve ser pesquisada uma nova frequência além da primeira calculada pelo programa. Esta segunda frequência é determinada a partir do plote num gráfico (resíduos x tempo). Os resíduos (0-C)

são obtidos do primeiro cálculo. Por meio deste gráfico dos resíduos e da expressão (22), calculamos a nova frequência que será tomada como estimativa inicial para o segundo cálculo.

Incluindo a segunda componente, teremos:

$$m_t = \mu + A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \text{sen } \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \text{sen } \omega_2 t + \varepsilon_t$$

que nos leva a minimizar a expressão:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{n-1} (m_t - \mu - A_1 \cos \omega_1 t - B_1 \text{sen } \omega_1 t - A_2 \cos \omega_2 t - B_2 \text{sen } \omega_2 t) &= \\ = T(\mu, A_1, B_1, \omega_1, A_2, B_2, \omega_2) \end{aligned}$$

Este processo deve ser repetido tantas vezes quantas forem necessárias para a obtenção de uma soma adequada dos quadrados dos resíduos

DETERMINAÇÃO DOS ELEMENTOS

O método de determinação dos elementos de uma binária eclipsante que aqui descreveremos, foi desenvolvido por H.N. Russel em 1912.

As órbitas das eclipsantes de tipo Algol, podem, sem grandes erros, ser consideradas circulares. Temos então os seguintes elementos:

- r_1 - raio da maior estrela
 - r_2 - raio da menor estrela
 - L_1 - luminosidade da maior estrela
 - L_2 - luminosidade da menor estrela
 - α - área eclipsada, expressa em termos da área da menor estrela, tomada como unidade
 - ω - longitude do periastro
 - Ω - longitude do nó
 - i - inclinação do plano orbital
 - P - período
 - t_0 - instante da conjunção principal
- e pelo menos mais 3 constantes que caracterizem a elongação, o obscurecimento de limbo e o aumento de brilho de uma componente, provocado pela reflexão da luz da outra.

Como não é possível a separação telescópica das duas componentes, a longitude do nó Ω não pode ser determinada, o mesmo acontecendo com ω . Os valores absolutos de L_1 e L_2 só podem ser estabelecidos se for conhecida a paralaxe do sistema. Assumimos então, $L_1 + L_2 = 1$. O período P é considerado conhecido e a época do mínimo principal t_0 , é determinada diretamente da curva de luz.

Se definirmos, $r_2/r_1 = k$, e sabendo que $L_2 = 1 - L_1$, resta-nos determinar r_1 , L_1 , k , i

A curva de luz, previamente determinada é expressa em termos de magnitudes versus tempo. É conveniente porém, expressá-la em termos do fluxo luminoso recebido do sistema. Se este fluxo é l , teremos:

$$\log l = 0,4(m_0 - m)$$

onde m_0 é a magnitude durante os intervalos de luz constante entre os eclipses.

Considerando inicialmente o caso mais simples, ou seja, órbitas circulares, discos das estrelas uniformemente iluminados, estrelas esféricas e nenhum efeito de reflexão, existem quatro tipos de eclipses:

I - COMPLETO

a) Total (ocultação)

b) Anular (trânsito)

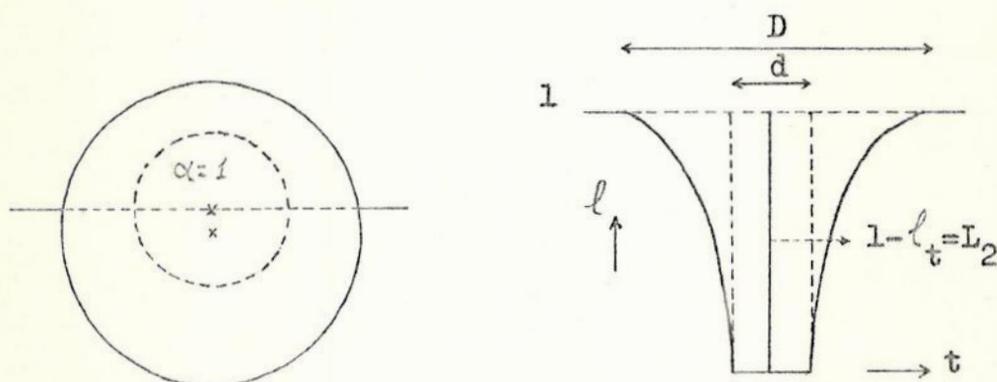
II- INCOMPLETO

a) Parcial (ocultação)

b) Parcial (trânsito)

Lembramos que o termo "ocultação" se refere ao caso em que a menor estrela é eclipsada pela maior, e o trânsito diz respeito ao caso contrário.

I.a) - No caso de eclipse total, o mínimo (ou mínimos) da curva de luz apresenta uma fase constante.



Se l_{\max} se refere ao máximo da curva entre os eclipses e l_t ao mínimo de eclipse total, temos:

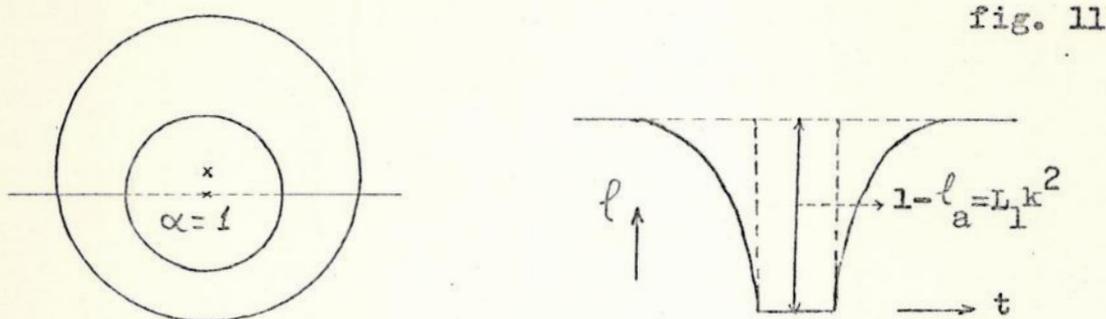
$$l_{\max} = L_1 + L_2 = 1$$

$$1 - l_t = L_2 \qquad l_t = 1 - L_2 = L_1$$

isto é, a queda de luz para o meio do eclipse total nos dá o brilho da menor estrela e a intensidade de luz neste mínimo é igual ao brilho da maior estrela.

I.b) - Para o caso de eclipse anular, o mínimo também apresenta uma fase constante, mas será menor a sua profundidade, desde que

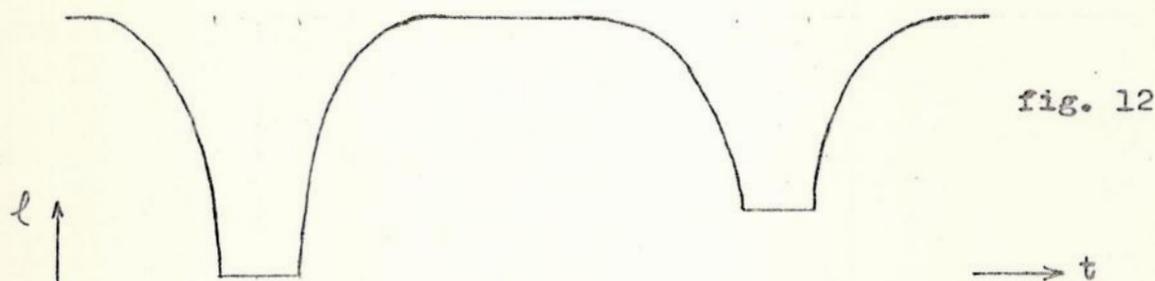
a menor estrela seja a mais brilhante (assim tem sido na maioria dos casos).



Aqui, a queda de luz é devida a uma fração de luz da maior estrela interceptada pelo trânsito da menor. Esta fração de luz é igual à razão entre as áreas das duas estrelas durante o meio do eclipse. Assim, se l_a é a intensidade durante o mínimo de eclipse anular,

$$1 - l_a = k^2 L_1$$

Se a observação fotométrica for capaz de registrar esses dois eclipses completos, a curva de luz terá a forma



Para um ponto qualquer dos mínimos, teremos:

$$\text{Total: } 1 - l_1 = \alpha L_2$$

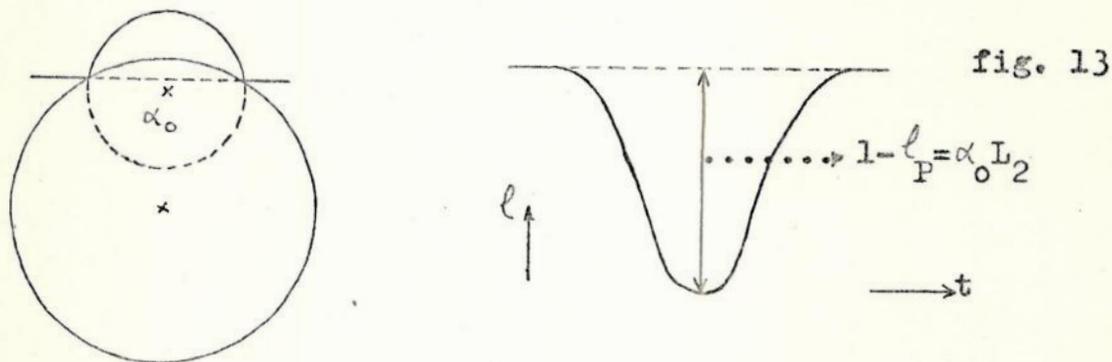
$$\text{Anular: } 1 - l_2 = k^2 \alpha L_1$$

$$(1 - l_1) + \frac{1 - l_2}{k^2} = \alpha (L_1 + L_2) = \alpha$$

Nos meios dos eclipses, $l_1 = l_t$, $l_2 = l_a$ e $\alpha = 1$

$$(1 - l_t) + \frac{1 - l_a}{k^2} = 1 \quad \text{e} \quad k^2 = \frac{1 - l_a}{l_t}$$

II.a) - Ocultação parcial: neste caso, o meio do eclipse não apresenta fase constante. O mínimo é curvo.

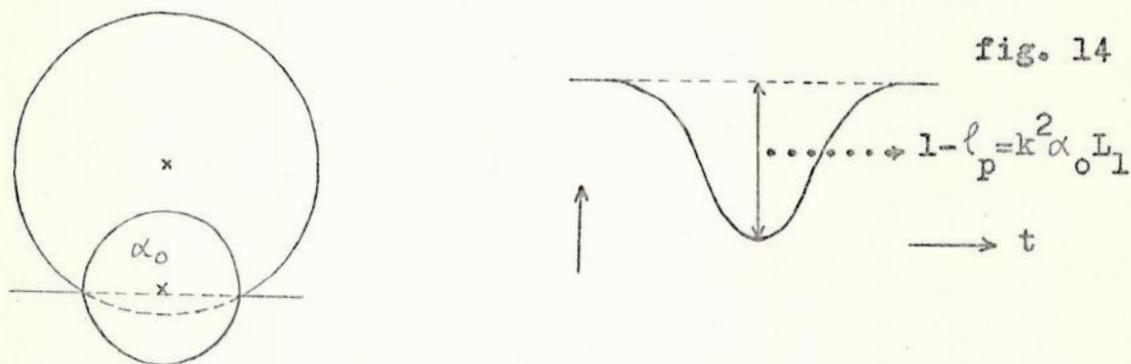


Se α_0 é o valor de α correspondente ao meio do eclipse e l_P , a intensidade neste ponto, teremos:

$$1 - l_P = \alpha_0 L_2 \quad \alpha_0 = \frac{1 - l_P}{L_2}$$

II.b) - Trânsito parcial: aqui também o mínimo é curvo. Se l_p é a intensidade no meio do eclipse,

$$1 - l_p = k^2 \alpha_0 L_1 \quad \alpha_0 = \frac{1 - l_p}{k^2 L_1}$$



Nestes dois casos de eclipses parciais, para qualquer ponto dos mínimos, fazemos

$$n = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{1 - l}{1 - l_0}$$

l_0 representando l_P ou l_p , conforme o caso.

SOLUÇÃO PARA O ECLIPSE TOTAL

No caso dos eclipses completos, Russel desenvolveu um método de determinação dos elementos orbitais considerando o mínimo principal como resultante de um eclipse total. Decidir se este mínimo é total ou anular, só é possível com a análise do mínimo secundário.

Chamando de l_0 a intensidade no mínimo principal, se ele for total, temos:

$$L_2 = 1 - l_0$$

e se for anular:

$$k^2 L_1 = 1 - l_0$$

Para qualquer outro valor l da intensidade, teremos, para cada caso:

$$\alpha = \frac{1-l}{1-l_0} \quad (\alpha_0=1) \quad (23)$$

Tomando como origem o centro da maior estrela, calculamos a longitude θ da menor estrela em sua órbita a partir da conjunção inferior:

$$\theta = \frac{2\pi}{P} (t - t_0) \quad (24)$$

$(1 - l_0)$ e $(1 - l)$ podem ser lidos diretamente na curva de luz, bem como t_0 e t . Assim, de (23) e (24), determinamos α e θ para cada ponto de mínimo da curva.

A fração α da área da menor estrela que é eclipsada, a qualquer instante, é função dos raios das duas estrelas e da distância aparente dos seus centros. Se δ é a distância entre os centros das duas estrelas projetada sobre a esfera celeste, teremos:

$$\alpha = f\left(\frac{r_2}{r_1}, \frac{\delta}{r_1}\right) = f\left(k, \frac{\delta}{r_1}\right)$$

ou, inversamente,

$$\delta = \varphi(k, \alpha)$$

Seja p a menor distância do centro da menor estrela à borda da maior.

$$p = \frac{\delta - r_1}{r_2}$$

$$\text{ou, } \delta = r_1 + pr_2 = r_1(1 + kp)$$

$$\text{ou ainda, } \varphi(k, \alpha) = 1 + kp(k, \alpha)$$

A função $p(k, \alpha)$ é apresentada na tabela I.

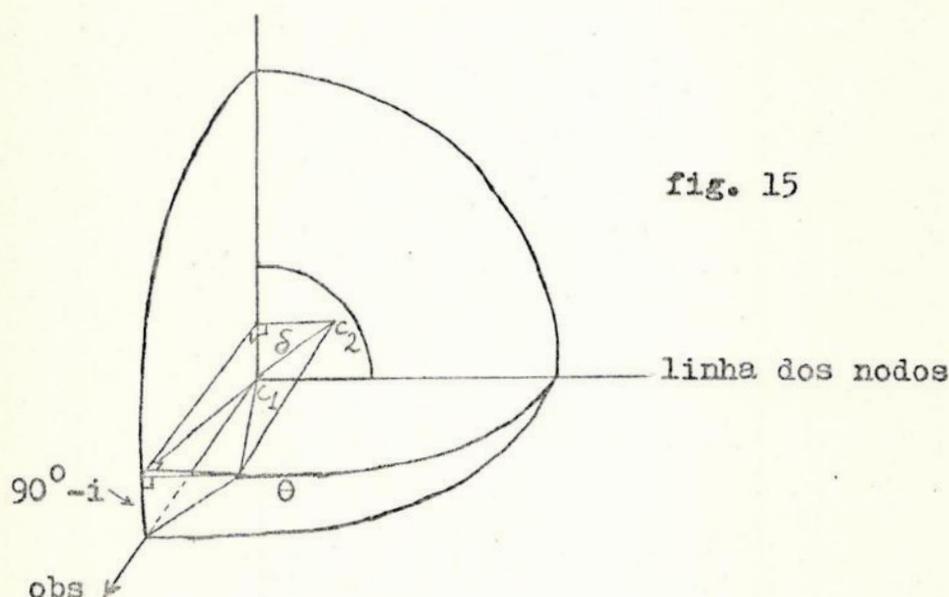


fig. 15

Da geometria do sistema, representada na figura 15 tiramos:

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \cos^2 i \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \cos^2 \theta (1 - \sin^2 i) + \sin^2 \theta = \\ &= \cos^2 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 i + \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 i (1 - \sin^2 \theta) = \\ &= 1 - \sin^2 i - \sin^2 i \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\delta^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta \quad (25)$$

$$\delta^2 = r_1^2 [\varphi(k, \alpha)]^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta \quad (26)$$

Sejam agora, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ quaisquer valores definidos de α e $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, os correspondentes valores de θ . Substituindo estes valores em (26), vem:

$$\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta_1 = r_1^2 [\varphi(k, \alpha_1)]^2 \quad (a)$$

$$\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta_2 = r_1^2 [\varphi(k, \alpha_2)]^2 \quad (b)$$

$$\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta_3 = r_1^2 [\varphi(k, \alpha_3)]^2 \quad (c)$$

(a) - (b) nos dará:

$$\text{sen}^2 \text{isen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \text{isen}^2 \theta_2 = r_1^2 [\varphi(k, \alpha_1)]^2 - r_1^2 [\varphi(k, \alpha_2)]^2$$

e (b) - (c):

$$\text{sen}^2 \text{isen}^2 \theta_2 - \text{sen}^2 \text{isen}^2 \theta_3 = r_1^2 [\varphi(k, \alpha_2)]^2 - r_1^2 [\varphi(k, \alpha_3)]^2$$

Dividindo a primeira expressão pela segunda, teremos:

$$\frac{\text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2}{\text{sen}^2 \theta_2 - \text{sen}^2 \theta_3} = \frac{[\varphi(k, \alpha_1)]^2 - [\varphi(k, \alpha_2)]^2}{[\varphi(k, \alpha_2)]^2 - [\varphi(k, \alpha_3)]^2} = \Psi(k, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (27)$$

O primeiro termo desta equação só possui grandezas conhecidas. O segundo termo, se fixarmos α_2 e α_3 , será apenas função de k e α_1 . Russel estabeleceu os valores de 0,6 para α_2 e 0,9 para α_3 . Chamando, de maneira mais genérica, $\theta_1 = \theta$ e $\alpha_1 = \alpha$, temos:

$$\frac{\text{sen}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta_2}{\text{sen}^2 \theta_2 - \text{sen}^2 \theta_3} = \Psi(k, \alpha) \quad (28)$$

Assim, $\Psi(k, \alpha_2) = 0$ e $\Psi(k, \alpha_3) = -1$

A função $\Psi(k, \alpha)$ é apresentada na tabela II.

Se $A = \text{sen}^2 \theta_2$ e $B = \text{sen}^2 \theta_2 - \text{sen}^2 \theta_3$, a equação (28) pode ser escrita:

$$\text{sen}^2 \theta = A + B \Psi(k, \alpha)$$

Os pontos a e b, na curva de luz, correspondentes a α_2 e α_3 juntos com os pontos correspondentes aos valores tabelados de α determinam k . Tomando uma média ponderada conveniente destes valores de k , pode-se traçar uma curva de luz teórica que passe pelos pontos a e b e tão próxima quanto possível dos outros. Com pequenas alterações nos valores iniciais de a e b, ou seja, nos correspondentes valores de θ ou $(t-t_0)$, é possível construir uma curva de luz teórica que se aproxime da curva observada com erros relativamente pequenos.

As partes da curva observada abaixo do ponto b, entre a e b

e acima de a , devem dar o mesmo valor médio de k . Entretanto, para α entre 0,6 e 0,9, a função Ψ varia muito lentamente com k e no princípio e fim do eclipse, as magnitudes variam lentamente com o tempo e, conseqüentemente com Ψ . Então estes pontos da curva não devem ser usados na determinação de k . Vemos então que os valores individuais de k têm pesos diferentes. Em primeira aproximação, é conveniente adotar peso 2 para os valores de α entre 0,2 e 0,4 e entre 0,95 e 0,99. Em se julgando necessário, pode-se construir diferentes curvas para diversos valores encontrados de k e comparar com a observação.

Encontrado o mais conveniente valor de k , temos agora que determinar i e r_1 . Para o contato externo das duas estrelas, temos:

$$\delta = r_1 + r_2 \quad \text{e} \quad p = +1;$$

para o contato interno, $\delta = r_1 - r_2$ e $p = -1$.

Considerando estes dois pontos, temos, respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 i + \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 \theta_e &= r_1^2 (1 + k)^2 \\ \cos^2 i + \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 \theta_i &= r_1^2 (1 - k)^2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Subtraindo a segunda da primeira:

$$\operatorname{sen}^2 i (\operatorname{sen}^2 \theta_e - \operatorname{sen}^2 \theta_i) = 4kr_1^2 \quad (30)$$

$$r_1^2 = \frac{1}{4k} \operatorname{sen}^2 i (\operatorname{sen}^2 \theta_e - \operatorname{sen}^2 \theta_i) \quad (31)$$

Substituindo r_1^2 na primeira das relações (29), vem:

$$\cos^2 i + \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 \theta_e = \frac{1}{4k} \operatorname{sen}^2 i (\operatorname{sen}^2 \theta_e - \operatorname{sen}^2 \theta_i) (1 + k)^2$$

$$\cotg^2 i + \operatorname{sen}^2 \theta_e = \frac{1}{4k} (\operatorname{sen}^2 \theta_e - \operatorname{sen}^2 \theta_i) (1 + k)^2$$

$$\cotg^2 i = \frac{1}{4k} (\operatorname{sen}^2 \theta_e - \operatorname{sen}^2 \theta_i) (1 + k)^2 - \operatorname{sen}^2 \theta_e$$

$$\cotg^2 i = \left[\frac{(1 + k)^2}{4k} \right] \operatorname{sen}^2 \theta_e - (1 + k)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i$$

$$\cotg^2 i = \frac{1}{4k} \left[(1 + k)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_e - (1 + k)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i \right] \quad (32)$$

No contato externo, $\alpha = 0$ e no interno, $\alpha = 1$. Então,

$$\text{sen}^2 \theta_e = A + B \Psi(k, 0)$$

$$\text{sen}^2 \theta_i = A + B \Psi(k, 1)$$

Substituindo em (32) e (30), temos:

$$\text{cotg}^2 i = \frac{1}{4k} \left\{ [(1-k)^2 (A+B \Psi(k, 0))] - [(1+k)^2 (A+B \Psi(k, 1))] \right\}$$

$$\text{cotg}^2 i = \frac{B}{4k} \left[(1-k)^2 \Psi(k, 0) - (1+k)^2 \Psi(k, 1) \right] - A$$

$$\frac{r_1^2}{\text{sen}^2 i} = \frac{1}{4k} \left[A + B \Psi(k, 0) - A - B \Psi(k, 1) \right]$$

$$r_1^2 \text{cossec}^2 i = \frac{B}{4k} \left| \Psi(k, 0) - \Psi(k, 1) \right|$$

$$\text{ou, } \text{cotg}^2 i = \frac{B}{\varphi_2(k)} - A \quad \text{e} \quad \text{cossec}^2 i = \frac{B}{\varphi_1(k)}$$

$$\text{com } \varphi_1(k) = \frac{\Psi(k, 0) - \Psi(k, 1)}{4k}$$

$$\text{e } \varphi_2(k) = \frac{(1-k)^2 \Psi(k, 0) - (1+k)^2 \Psi(k, 1)}{4k}$$

φ_1 e φ_2 encontram-se na tabela .

Conhecidos A e B, r_1 e i podem ser calculados.

Se $(B/A) < \varphi_2(k)$, o valor calculado de $\text{cotg} i$ será imaginário e a solução é fisicamente impossível. É aconselhável aplicar este teste aos valores de A, B e k e, se necessário, reajustá-los até que a solução possa ser real. O caso limite, $\text{cotg} i = 0$, corresponde ao eclipse central.

Determinados os elementos do sistema, deve-se decidir se o eclipse principal é total ou anular. Como já foi dito, isto só é possível se o mínimo secundário puder ser analisado. As intensidades durante as fases constantes nos dois mínimos são ligadas pela

relação: $k^2 l_1 + l_2 = 1$. Se o eclipse principal é total, a intensidade l_2 do secundário será $1 - k^2 l_1$, se for anular, l_2 terá o valor $(1 - l_1)/k^2$. Como $1 - k^2 l_1$ é sempre positivo, a hipótese de eclipse total para o mínimo principal sempre conduz a uma solução fisicamente possível. A solução para a hipótese de eclipse anular só é possível se $1 - l_1$ não for maior do que k^2 . Do contrário, o brilho da menor estrela seria negativo.

Se $l_1(1+k)^2$ é aproximadamente igual à unidade, os dois mínimos terão profundidades praticamente iguais. É possível, neste caso, que o período seja o dobro daquele determinado (se na análise da curva, considerou-se que apenas um mínimo era observável). Este caso pode acontecer se $l_1 < 1/2$, ou seja, se a profundidade dos mínimos for menor que 0,75 mag.

SOLUÇÃO PARA O ECLIPSE PARCIAL

Neste caso, como os valores de α correspondentes ao máximo eclipse, ou a qualquer outra fase, são desconhecidos, é necessário determinar a fração $n = \frac{\alpha}{\alpha_0}$, onde α_0 , como anteriormente, corresponde ao máximo obscurecimento. Assim temos:

$$\alpha = n\alpha_0 \quad \text{e} \quad 1 - l = n(1 - l_0)$$

Se $\theta(n)$ é o correspondente valor de θ , temos, por analogia com o caso total:

$$\text{sen}^2 \theta(n) = A + B \Psi(k, n\alpha_0)$$

Para o meio do eclipse, $n = 1$ e $\theta = 0$. Logo,

$$A + B \Psi(k, \alpha_0) = 0$$

Subtraindo a segunda relação da primeira:

$$\text{sen}^2 \theta(n) = B [\Psi(k, n\alpha_0) - \Psi(k, \alpha_0)]$$

Dividindo esta expressão por uma semelhante em que $n=1/2$, vem

$$\frac{\text{sen}^2\theta(n)}{\text{sen}^2\theta(1/2)} = \frac{\Psi(k, n\alpha_0) - \Psi(k, \alpha_0)}{\Psi(k, 1/2\alpha_0) - \Psi(k, \alpha_0)} = \chi(k, \alpha_0, n) \quad (33)$$

Esta equação deve ser tomada como a própria definição da função χ .

O primeiro membro de (33) sendo constituído de grandezas conhecidas, a função χ pode ser tabelada para convenientes valores de k , α_0 e n . Esta função, para um mesmo valor de n , assume valores tão próximos entre si que a solução se torna praticamente impossível.

Russel, porém, estabeleceu as seguintes fórmulas empíricas para a função χ considerando $n=0$, $n=1/4$ e $n=3/4$:

$$\chi(k, \alpha_0, 0) = 4,10 \chi(k, \alpha_0, 1/4) - 3,94$$

$$\chi(k, \alpha_0, 3/4) = 0,973 - 0,300 \chi(k, \alpha_0, 1/4)$$

De maneira geral, podemos escrever:

$$\chi(k, \alpha_0, n) = \omega_1(n) + \omega_2(n) \chi(k, \alpha_0, 1/4)$$

A função χ é encontrada na tabela III; $\omega_1(n)$ e $\omega_2(n)$, na tabela IIIa.

De (33) tiramos:

$$\text{sen}^2\theta(n) = \text{sen}^2\theta(1/2) \chi(k, \alpha_0, n).$$

Então,

$$\text{sen}^2\theta(n) = \omega_1(n) \text{sen}^2\theta(1/2) + \omega_2(n) \text{sen}^2\theta(1/4)$$

Se fizermos $\text{sen}^2\theta(1/4) = C$ e $\text{sen}^2\theta(1/2) = D$, teremos:

$$\text{sen}^2\theta(n) = C\omega_2(n) + D\omega_1(n) \quad (34)$$

Para cada valor de n ($n=1/2$, $n=1/4$), podemos, na curva de luz, determinar os correspondentes valores de α ($\alpha=n\alpha_0$) e $\theta(n)$ e, conseqüentemente, $\text{sen}^2\theta(n)$, assim, obtendo C e D .

A menos que seja conhecido o mínimo secundário, só consegui-

remos obter uma relação entre os elementos orbitais, da forma:

$$\chi(k, \alpha_0, 1/4) = \frac{C}{D} \quad (35)$$

Conhecendo-se porém o mínimo secundário, temos uma outra relação entre k e α_0 :

$$\alpha_0 = 1 - \ell_1 + \frac{1 - \ell_2}{k^2} \quad (36)$$

onde ℓ_1 representa a intensidade de luz do sistema no meio do eclipse da menor estrela pela maior.

Calcula-se então, de (36), α_0 para valores equidistantes de k e toma-se, da tabela, os correspondentes valores de $\chi(k, \alpha_0, 1/4)$. Por interpolação, determinamos qual o valor de k que satisfaz a equação (35). Com α_0 e k como coordenadas, pode-se construir as curvas $\chi(k, \alpha_0, 1/4) = \text{const}$ (a) e $\alpha_0 = (\text{const}/k^2)$ (b). Se estes gráficos são superpostos de tal maneira que o ponto $\alpha_0=0, k=1$ de (a) coincida com o $\alpha_0=1-\ell_1, k=1$, de (b), a intersecção das curvas $\chi = \frac{C}{D}$ e $\alpha_0 = (1 - \ell_2)/k^2$, dará a solução desejada.

Este processo gráfico tem a vantagem de dar uma idéia da incerteza dos resultados. Quando ℓ_1 e ℓ_2 são muito próximos um do outro, as curvas em (a) e (b) são aproximadamente paralelas em sua maior parte (correspondente aos maiores valores de k) e a solução é praticamente indeterminada. Se estes dois mínimos (ℓ_1 e ℓ_2) são visivelmente desiguais, as duas curvas se cortarão num ângulo agudo, sendo a solução possível e, em muitos casos única. Se $\ell_2 > 0,60$ e $\ell_1 > 0,70$, haverão duas soluções que, se próximas entre si, sua determinação será incerta.

Quando $k=1$, a equação (36) nos dá $\alpha_0 = 2 - \ell_1 - \ell_2$. Seja β o valor de α_0 dado pela tabela. Então, se $2 - \ell_1 - \ell_2 > \beta$ a menor estrela está atrás da maior no eclipse principal e vice-versa. Se $2 - \ell_1 - \ell_2 = \beta, k=1$, ou seja, as duas estrelas tem o mesmo raio.

Determinados k e α_0 , passamos à obtenção dos elementos restantes. No meio do eclipse, $\theta=0$ e a distancia aparente entre os centros das estrelas é $(1 + kp)$ vezes o raio da maior estrela, onde p é função de k e α_0 , como já anteriormente definido. O valor de θ para o início e fim do eclipse pode ser calculado a partir

de (34), fazendo-se $n=0$. Seja θ' este valor. Então,

$$r_1^2(1+k)^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta'$$

$$\text{ou, } r_1^2(1+k)^2 = \cos^2 i \cos^2 \theta' + \sin^2 \theta' \quad (37)$$

Para o meio do eclipse, temos:

$$r_1^2(1+k)^2 = \cos^2 i \quad (38)$$

As equações (37) e (38) determinam r_1 e $\cos i$. As relações $r_2 = kr_1$ e $\alpha_0 L_2 = 1 - \ell_1$, nos darão os outros elementos.

Pelas expressões $\sin^2 \theta = A + B \Psi(k, \alpha)$

$$1 - \ell = \frac{\alpha}{\alpha_0} (1 - \ell_0)$$

plotamos a curva de luz calculada. Se ela não representar de maneira satisfatória os dados observados, as constantes devem ser alteradas. Pode-se tomar como fundamentais ℓ_1 , ℓ_2 , k e A , determinando α_0 pela equação (36) e B pela equação

$$A + B \Psi(k, \alpha_0) = 0$$

o o o

CONSTRUÇÃO DAS TABELAS

A tabela I dá a função $p(k, \alpha)$ e todas as outras tabelas são derivadas dela.

Seja um círculo de raio unitário que intercepte um outro menor de raio k , de tal maneira que a área do segmento interior des-
te último seja α vezes a área de todo o círculo. Então, a distân-
cia entre os centros dos dois círculos é $1 + p(k, \alpha)$, isto é, p
é a menor distância do centro do círculo menor à borda do maior.

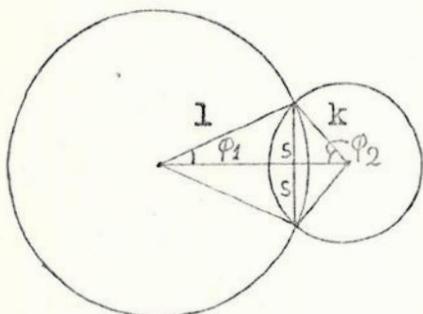


fig. a

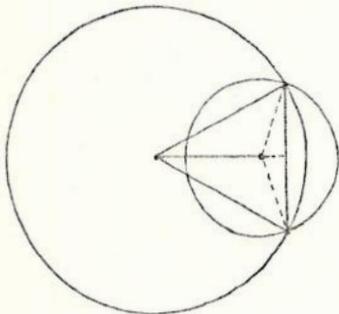


fig. b

Se o comprimento da corda comum aos dois círculos é $2s$, te-
mos, para a distância entre os centros:

$$l + kp = \sqrt{1-s^2} \pm \sqrt{k^2-s^2}$$

O sinal positivo é tomado quando a corda se acha entre os do-
is centros como na figura (a); o negativo, no caso oposto, repre-
sentado na figura (b).

Sejam A_1 e A_2 as áreas dos menores segmentos dos dois círcu-
los, determinados por sua corda comum. Para o caso da figura (a),
temos:

$$\alpha = \frac{A_1 + A_2}{\pi k^2}$$

Para o caso da figura (b),

$$\alpha = 1 - \frac{A_2 - A_1}{k^2}$$

Mas, $s = \text{sen } \varphi_1 = k \text{sen } \varphi_2$. Então,

$$A_1 = \varphi_1 - \text{sen } \varphi_1 \cos \varphi_1 \quad \text{e} \quad A_2 = k^2 (\varphi_2 - \text{sen } \varphi_2 \cos \varphi_2)$$

Se as alturas destes segmentos são h_1 e h_2 , temos:

$$h_1 = 1 - \sqrt{1-s^2} = 1 - \cos \varphi_1 \quad \text{e} \quad h_2 = k - \sqrt{k^2 - s^2} = k(1 - \cos \varphi_2)$$

Temos assim, para A_1 e A_2 :

$$A_1 = sh_1 \frac{\varphi_1 - \text{sen } \varphi_1 \cos \varphi_1}{\text{sen } \varphi_1 - \text{sen } \varphi_1 \cos \varphi_1}$$

$$A_2 = sh_2 \frac{\varphi_2 - \text{sen } \varphi_2 \cos \varphi_2}{\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_2 \cos \varphi_2}$$

e, para h_1 e h_2 :

$$\frac{h_1}{s} = \frac{1 - \cos \varphi_1}{\text{sen } \varphi_1} = \text{tg } 1/2 \varphi_1$$

$$\frac{h_2}{s} = \frac{1 - \cos \varphi_2}{\text{sen } \varphi_2} = \text{tg } 1/2 \varphi_2$$

$$\text{Se fizermos, } \frac{\varphi - \text{sen } \varphi \cos \varphi}{\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi \cos \varphi} = F(\text{tg } 1/2 \varphi)$$

as expressões de α e p serão:

$$\alpha = \frac{s}{k^2} \left[h_1 F(h_1/s) + h_2 F(h_2/s) \right], \quad p = 1 - \frac{h_1 + h_2}{k}$$

$$= 1 - \frac{s}{k^2} \left| h_2 F(h_2/s) - h_1 F(h_1/s) \right|, \quad p = \frac{h_2 - h_1}{k} - 1$$

A cada valor de s correspondem dois pontos na curva de luz (dois pares de valores de α e p). Plotando estes pontos numa escala conveniente, obtém-se p para cada valor de α .

Na tabela I, os erros não excedem de uma ou duas unidades na última casa decimal e os intervalos foram escolhidos suficientemente pequenos para permitir uma interpolação linear nas duas componentes, exceto para valores de α muito pequenos ou muito grandes.

A tabela II representa a função

$$\Psi(k, \alpha) = \frac{[1+kp(k, \alpha_1)]^2 - [1+kp(k, \alpha_2)]^2}{[1+kp(k, \alpha_2)]^2 - [1+kp(k, \alpha_3)]^2}$$

onde $\alpha_2=0,6$ e $\alpha_3=0,9$, usada para determinar k no caso de eclipse total.

A tabela IIa representa as funções $\varphi_1(k)$ e $\varphi_2(k)$, também usada para o caso de eclipse total.

A tabela III contém a função

$$\chi(k, \alpha_0, 1/4) = \frac{\Psi(k, 1/4\alpha_0) - \Psi(k, \alpha_0)}{\Psi(k, 1/2\alpha_0) - \Psi(k, \alpha_0)}$$

usada no caso de eclipse parcial.

A tabela IIIa, contém os coeficientes $\omega_1(n)$ e $\omega_2(n)$ da função

$$\chi(k, \alpha_0, n) = \omega_1(n) + \omega_2(n) \chi(k, \alpha_0, 1/4)$$

Para $n=0$ e $n=3/4$, $\chi(k, \alpha_0, n)$ foi calculada para todos os valores de k e α_0 ; para os outros valores de n , apenas para $\alpha_0=0,80$ (o que dá resultados muito próximos da média dos valores de α_0).

A tabela A dá a queda de luz $(1 - \ell)$ para uma variação Δm nas magnitudes estelares. Para Δm maior que 2,5, a queda de luz é de 0,9 mais 1/10 do valor tabelado para $(\Delta m - 2,5)$.

Finalmente, a tabela B dá os valores de $\theta - \text{sen}\theta$ para cada 0,01

χ de θ (que é expresso em radianos).

TABELA I

$p(k, \alpha)$

α	$k=1.0$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0
0.00	+1.000	+1.000	+1.000	+1.000	+1.000	+1.000	+1.000	+1.000	+1.000	+1.000	+1.000
.01	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.927	0.929	0.930	0.932	0.934	0.935
.02	.868	.871	.873	.876	.879	.881	.884	.887	.890	.892	.895
.05	.755	.759	.764	.769	.774	.779	.785	.790	.795	.800	.805
.10	.610	.618	.624	.631	.638	.645	.653	.661	.670	.678	.687
0.15	+0.488	+0.496	+0.504	+0.513	+0.523	+0.533	+0.544	+0.554	+0.565	+0.576	+0.585
.20	.374	.388	.398	.408	.419	.430	.443	.456	.469	.481	.492
.25	.267	.284	.297	.310	.322	.335	.348	.363	.378	.391	.405
.30	.168	.186	.200	.216	.230	.244	.258	.272	.288	.303	.321
.35	+ .075	.094	.110	.127	.143	.160	.175	.190	.207	.222	.239
0.40	-0.015	+0.005	+0.024	+0.041	+0.059	+0.077	+0.094	+0.109	+0.126	+0.143	+0.159
.45	- .106	- .081	- .061	- .042	- .023	- .004	+ .013	+ .028	+ .045	+ .062	+ .079
.50	- .194	- .166	- .145	- .124	- .103	- .084	- .067	- .051	- .034	- .017	- .000
.55	- .280	- .250	- .226	- .204	- .184	- .165	- .148	- .131	- .113	- .096	- .079
.60	- .364	- .332	- .306	- .284	- .263	- .244	- .226	- .209	- .192	- .175	- .159
0.65	-0.447	-0.413	-0.386	-0.363	-0.343	-0.323	-0.305	-0.288	-0.271	-0.255	-0.239
.70	- .528	- .492	- .465	- .441	- .420	- .401	- .383	- .367	- .350	- .336	- .321
.75	- .607	- .571	- .544	- .520	- .498	- .481	- .463	- .448	- .432	- .419	- .405
.80	- .686	- .649	- .622	- .600	- .580	- .563	- .546	- .532	- .517	- .504	- .492
.85	- .765	- .728	- .701	- .680	- .663	- .648	- .633	- .620	- .607	- .596	- .585
0.90	-0.843	-0.807	-0.783	-0.764	-0.749	-0.736	-0.725	-0.715	-0.705	-0.696	-0.687
.95	- .922	- .890	- .872	- .858	- .847	- .838	- .830	- .823	- .817	- .811	- .805
.98	- .967	- .945	- .935	- .928	- .922	- .915	- .910	- .905	- .900	- .896	- .892
.99	- .983	- .967	- .960	- .955	- .951	- .948	- .945	- .942	- .939	- .937	- .934
1.00	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000

TABELA II

$\Psi(k, \alpha)$

α	$k=1.00$	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
0.00	+9.464	+7.478	+6.200	+5.279	+4.556	+3.984	+3.593	+3.104	+2.755	+2.454	+2.199
.02	8.095	6.457	5.373	4.606	4.000	3.504	3.106	2.768	2.478	2.216	2.000
.05	7.042	5.616	4.704	4.047	3.534	3.118	2.777	2.488	2.241	2.017	1.829
0.10	+5.759	+4.625	+3.895	+3.364	+2.960	+2.627	+2.358	+2.131	+1.934	+1.754	+1.603
.15	4.755	3.839	3.248	2.826	2.504	2.240	2.024	1.841	1.682	1.537	1.412
.20	3.906	3.184	2.712	2.374	2.110	1.898	1.726	1.581	1.453	1.336	1.235
0.25	+3.158	+2.600	+2.232	+1.969	+1.760	+1.591	+1.453	+1.344	+1.242	+1.146	+1.070
.30	2.522	2.088	1.803	1.603	1.443	1.314	1.205	1.115	1.039	0.968	0.911
.35	1.979	1.641	1.425	1.276	1.157	1.061	0.982	0.911	0.854	0.797	0.756
0.40	+1.490	+1.245	+1.087	+0.978	+0.894	+0.825	+0.770	+0.721	+0.675	+0.633	+0.604
.45	1.040	0.881	0.777	.705	.649	.603	.566	.530	.501	.473	.453
.50	0.648	.555	.491	.451	.418	.392	.370	.348	.331	.314	.302
0.55	+0.300	+0.258	+0.233	+0.217	+0.202	+0.191	+0.181	+0.171	+0.164	+0.156	+0.151
.60	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
.65	- .258	-0.231	-0.214	-0.202	- .191	-0.181	-0.174	-0.167	-0.160	-0.156	-0.152
0.70	-0.480	-0.435	-0.408	-0.387	-0.369	-0.354	-0.344	-0.331	-0.320	-0.314	-0.306
.75	- .609	- .613	- .584	- .558	- .539	- .522	- .508	- .494	- .483	- .475	- .465
.80	- .805	- .765	- .738	- .717	- .700	- .684	- .670	- .659	- .647	- .639	- .632
0.85	-0.922	-0.893	-0.877	-0.863	-0.854	-0.843	-0.833	-0.825	-0.818	-0.812	-0.808
.90	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
.95	-1.045	-1.085	-1.112	-1.134	-1.152	-1.166	-1.179	-1.190	-1.203	-1.214	-1.226
0.98	-1.0625	-1.126	-1.176	-1.220	-1.256	-1.284	-1.308	-1.329	-1.350	-1.369	-1.391
.99	-1.0643	-1.139	-1.199	-1.250	-1.293	-1.328	-1.362	-1.390	-1.419	-1.444	-1.471
1.00	-1.0650	-1.155	-1.231	-1.297	-1.354	-1.402	-1.445	-1.484	-1.525	-1.556	-1.596

k	$\phi_1(k)$	$\phi_2(k)$
1.00	0.380	0.939
0.95	.401	.894
.90	.417	.848
0.85	0.427	0.802
.80	.431	.755
.75	.431	.709
0.70	0.427	0.663
.65	.419	.617
.60	.406	.572
0.55	0.390	0.527
.50	.371	.482
.45	.349	.436
0.40	0.323	0.390
.35	.294	.345
.30	.262	.298
0.25	0.226	0.250
.20	.187	.202
.15	.145	.153
0.10	0.100	0.103
.05	.052	.052
.00	.000	.000

TABELA III $\chi(k, \alpha_0, 1/4)$

α_0	$k=1.00$	0.95	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
1.00...	2.462	2.316	2.194	2.010	1.870	1.756	1.667	1.596	1.541	1.491	1.441	1.407
0.98...	2.402	2.270	2.168	2.005	1.872	1.770	1.690	1.628	1.572	1.522	1.479	1.437
.95...	2.328	2.208	2.121	1.985	1.872	1.779	1.703	1.638	1.586	1.540	1.499	1.460
.90...	2.218	2.135	2.062	1.950	1.860	1.778	1.708	1.650	1.605	1.560	1.522	1.485
.85...	2.127	2.067	2.010	1.919	1.840	1.771	1.710	1.660	1.618	1.577	1.540	1.501
0.80...	2.054	2.010	1.968	1.890	1.823	1.763	1.711	1.665	1.626	1.589	1.552	1.510
.70...	1.956	1.926	1.896	1.842	1.792	1.749	1.711	1.675	1.640	1.606	1.570	1.532
.60...	1.887	1.860	1.838	1.799	1.764	1.734	1.707	1.677	1.648	1.620	1.586	1.551
.50...	1.828	1.805	1.789	1.762	1.740	1.719	1.699	1.675	1.650	1.626	1.597	1.568
.40...	1.772	1.761	1.751	1.732	1.717	1.700	1.685	1.669	1.650	1.629	1.607	1.584
0.30...	1.727	1.722	1.717	1.700	1.700	1.688	1.674	1.661	1.646	1.635	1.615	1.598
.20...	1.693	1.692	1.690	1.687	1.682	1.675	1.665	1.655	1.642	1.635	1.623	1.608
.10...	1.673	1.672	1.670	1.666	1.660	1.655	1.650	1.646	1.639	1.633	1.626	1.616
.00...	1.630	1.630	1.630	1.630	1.630	1.630	1.630	1.630	1.630	1.630	1.630	1.630

TABELA IIIa

n	$\omega_1(n)$	$\omega_2(n)$
0.00	-3.94	+4.10
.10	-1.45	+2.21
.20	-0.399	+1.330
.25	.000	+1.000
0.30	+0.316	+0.720
.35	+ .567	+ .488
.40	+ .758	+ .295
.45	+ .899	+ .133
0.50	+1.000	0.000
.55	+1.065	-0.107
.60	+1.095	- .190
.65	+1.090	- .249
0.70	+1.046	-0.285
.75	+0.967	- .297
.80	+ .846	- .285
.85	+ .693	- .250
0.90	+0.503 ⁽¹⁾	-0.191
.95	+ .273	- .108
.98	+ .114	- .047
.99	+ .058	- .024
1.00	0.000	0.000

TABELA A

Δm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0.....	0.0000	0.0002	0.0183	0.0273	0.0362	0.0450	0.0538	0.0624	0.0710	0.0795
.1.....	.0880	.0964	.1046	.1128	.1210	.1290	.1370	.1449	.1528	.1605
.2.....	.1682	.1759	.1834	.1909	.1983	.2057	.2130	.2202	.2273	.2344
.3.....	.2414	.2484	.2553	.2621	.2680	.2756	.2822	.2888	.2953	.3018
.4.....	.3082	.3145	.3208	.3270	.3332	.3393	.3454	.3514	.3573	.3632
0.5.....	0.3690	0.3748	0.3806	0.3862	0.3919	0.3974	0.4030	0.4084	0.4139	0.4192
.6.....	.4246	.4298	.4351	.4402	.4454	.4505	.4555	.4605	.4654	.4703
.7.....	.4752	.4848	.4848	.4805	.4942	.4988	.5034	.5080	.5125	.5169
.8.....	.5214	.5258	.5301	.5344	.5387	.5429	.5471	.5513	.5554	.5594
.9.....	.5635	.5675	.5715	.5754	.5793	.5831	.5870	.5907	.5945	.5982
1.0.....	0.6019	0.6055	0.6092	0.6127	0.6163	0.6198	0.6233	0.6267	0.6302	0.6336
1.1.....	.6369	.6403	.6435	.6468	.6501	.6533	.6564	.6596	.6627	.6658
1.2.....	.6689	.6719	.6749	.6779	.6808	.6838	.6867	.6895	.6924	.6952
1.3.....	.6980	.7008	.7035	.7062	.7089	.7116	.7142	.7168	.7195	.7220
1.4.....	.7246	.7271	.7296	.7321	.7345	.7370	.7394	.7418	.7441	.7465
1.5.....	0.7488	0.7511	0.7534	0.7557	0.7579	0.7601	0.7623	0.7645	0.7667	0.7688
1.6.....	.7709	.7730	.7751	.7772	.7792	.7812	.7832	.7852	.7872	.7891
1.7.....	.7911	.7930	.7949	.7968	.7986	.8005	.8023	.8041	.8059	.8077
1.8.....	.8095	.8112	.8129	.8146	.8163	.8180	.8197	.8214	.8230	.8246
1.9.....	.8262	.8278	.8294	.8310	.8325	.8340	.8356	.8371	.8386	.8400
2.0.....	0.8415	0.8430	0.8444	0.8458	0.8472	0.8486	0.8500	0.8514	0.8528	0.8541
2.1.....	.8555	.8568	.8581	.8594	.8607	.8620	.8632	.8645	.8657	.8670
2.2.....	.8682	.8694	.8706	.8718	.8729	.8741	.8753	.8764	.8775	.8787
2.3.....	.8798	.8809	.8820	.8831	.8841	.8852	.8862	.8873	.8883	.8893
2.4.....	.8904	.8914	.8924	.8933	.8943	.8953	.8962	.8972	.8981	.8991
2.5.....	0.9000	0.9009	0.9018	0.9027	0.9036	0.9045	0.9054	0.9062	0.9071	0.9080

TABELA B

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.00.....	0.0000	0.0002	0.0013	0.0045	0.0105	0.0206	0.0354	0.0558	0.0826	0.1167
.01.....	.0000	.0002	.0015	.0049	.0114	.0218	.0372	.0582	.0857	.1205
.02.....	.0000	.0003	.0018	.0055	.0122	.0231	.0399	.0607	.0888	.1243
.03.....	.0000	.0004	.0020	.0060	.0131	.0244	.0409	.0632	.0920	.1283
.04.....	.0000	.0005	.0023	.0066	.0141	.0258	.0428	.0658	.0953	.1324
0.05.....	0.0000	0.0006	0.0026	0.0071	0.0151	0.0273	0.0448	0.0684	0.0987	0.1365
.06.....	.0000	.0007	.0029	.0078	.0160	.0288	.0469	.0711	.1022	.1407
.07.....	.0001	.0008	.0033	.0084	.0171	.0304	.0490	.0739	.1057	.1450
.08.....	.0001	.0010	.0037	.0091	.0183	.0320	.0512	.0767	.1093	.1494
.09.....	.0001	.0011	.0041	.0098	.0194	.0337	.0535	.0796	.1130	.1539

CONCLUSÃO

Os métodos aqui descritos são válidos para a determinação dos elementos dos sistemas binários compostos de estrelas esféricas, uniformemente iluminadas, com órbitas circulares e sem nenhum efeito de reflexão.

Para as binárias do tipo Algol, as considerações de estrelas esféricas com órbitas circulares não resultam em grandes erros na determinação dos elementos. Entretanto, a validade destas aproximações depende do grau de precisão das observações.

É de se supor que as órbitas não sejam exatamente circulares. Uma observação razoavelmente precisa pode mesmo acusar a existência de pequenas excentricidades. Este fato é revelado na curva de luz pelo deslocamento do mínimo secundário do ponto médio entre dos mínimos principais. Neste caso, os elementos calculados sob a consideração de órbitas circulares, diferirão dos valores reais.

As correções para a excentricidade da órbita são desenvolvidas por H. N. Russel (Ref. 3, 54).

A observação do Sol no-lo mostra mais brilhante no centro do que no limbo do disco fotosférico. Isto porque a radiação proveniente da região central do disco solar, atravessa uma camada atmosférica menos espessa do que aquela originária do limbo, sofrendo assim, uma menor absorção por parte da matéria componente da atmosfera solar. Podemos, com certeza, afirmar que este fenômeno, denominado "Obscurecimento do Limbo", tem lugar em todas as estrelas.

No caso das binárias eclipsantes, o fato das estrelas serem mais escuras no limbo, provoca deformações na curva de luz. No eclipse anular, o mínimo não apresenta uma fase constante durante o trânsito da menor estrela, pois a quantidade de luz por ela cortada, não será sempre a mesma, porém maior no meio do eclipse. Além disso, o obscurecimento do limbo faz com que os mínimos sejam menos profundos do que no caso de estrelas uniformemente iluminadas.

Russel e Shapley (Ref. 4, 239 - 385) desenvolveram, detalhadamente, os cálculos dos elementos para estrelas obscurecidas no limbo.

Um outro efeito que também causa deformações na curva de luz, é a "Reflexão". A luz emitida por uma das componentes é, em parte, refletida e re-radiada pela atmosfera da outra, fazendo com que,

na curva de luz, a fase entre os eclipses não seja constante, mas crescente do mínimo principal para o secundário.

L. Binnendijk (Ref. 2 , 313) apresenta as correções para a reflexão e re-radiação.

A menos que estes efeitos ocasionem grandes deformações na curva de luz, os sistemas binários Algol podem, sem grandes erros, ser analisados pelos métodos simplificados que apresentamos neste trabalho.

APÊNDICES

O PROGRAMA PERÍODO: Instruções para utilização

Após o último comando do programa, entrar com os seguintes cartões, nesta ordem:

- 1) Título do programa. Pode ocupar 72 colunas, começando na primeira.
- 2) Valor de n , número de dados, no formato I5
- 3) Formato dos dados. Pode ocupar 72 colunas.
- 4) Valor de partida e acréscimo, no formato 2F10.5. É aconselhável utilizar para valor de partida 0.0 e para acréscimo, 1.0' já que estamos trabalhando com somatório que varia de 0 a $n-1$.
- 5) Dados da série temporal. Devem ter o formato definido no item (3). Caso sejam utilizadas as 80 colunas, poderemos continuar perfurando os dados em outro cartão até completar o número indicado em (2).
- 6) Valores das variáveis CONV, LIM e APPFLG, nos formatos F10.5, I5 e I1, respectivamente, que controlam a operação de ajustamento. Se estivermos interessados em utilizar o método dos mínimos quadrados exato, usaremos:

CONV = 0,00001

LIM = 5

APPFLG = F

- 7) Número de componentes, no formato I5
- 8) Este cartão depende do anterior. O número indicado em (7) dirá o número de cartões que compõem (8). Há um cartão para cada frequência a ser ajustada. Ele contém os valores de partida da frequência e dos coeficientes do seno e cosseno no formato 3F10.5.

De posse do primeiro valor da frequência, para primeira estimativa de A e B tomamos o valor zero em ambos os casos. Faremos uso do programa como indicado acima, tendo em (7) o valor 1 e em (8), apenas um cartão com os valores de ω , A e B . O programa terá como resultados ω , A e B ajustados e calculados, a constante aditiva μ e a soma dos quadrados dos resíduos.

Se a soma dos quadrados dos resíduos não nos satisfizer, en

traremos com mais uma componente. Os valores ajustados de ω , A e B, serão agora os da primeira componente. Para a segunda, calculamos um novo ω a partir do plote dos resíduos e daremos o valor zero para A e B.

Faremos assim, sucessivamente, até obter uma soma dos quadrados dos resíduos satisfatória, ou melhor ainda, um erro médio satisfatório.

A raiz quadrada da soma dos quadrados dos resíduos, dividida pelo número de resíduos, pode ser considerada o erro médio das nossas medidas, embora seja algumas vezes prudente examinar a distribuição dos resíduos e verificar se eles são ou não notáveis pela sua magnitude. Se encontrarmos resíduos que são três vezes maiores que o erro médio é preferível desprezar essas medidas.

Outras informações necessárias:

- a) O valor de n, número de dados, não deve exceder 600.
- b) O valor de m, número de componentes, não deve exceder 10.
- c) Caso haja necessidade do uso de valores maiores do que os citados acima, devem ser mudadas as declarações DIMENSION em que tais valores aparecem.
- d) O uso do método dos mínimos quadrados exato (APPFLG=F) causará um menor tempo de execução do programa. Citamos, como exemplo, que o tempo de processamento, para o caso de uma componente, utilizando o método dos mínimos quadrados exato, é de 5,55 segundos.

Para a utilização da subrotina PLOTTER OFF-LINE, devem ser observados os seguintes itens:

- 1) O vetor T está associado ao eixo x e o vetor SP ao eixo y.
- 2) Os vetores da declaração DIMENSION devem ser declarados com duas posições a mais do que realmente contém.
- 3) Na declaração DO 17 k=1,R, o número R é tal que, a critério do usuário, a curva ajustada seja traçada de forma adequada ao problema.
- 4) A subrotina SCALE terá a seguinte sintaxe:

CALL SCALE(a,b,c,l)

a = vetor que contém os pontos a serem plotados.

b = tamanho do eixo ao qual os pontos estão relacionados.

c = número de pontos contidos no vetor.

Há duas subrotinas SCALE; uma para o vetor T, outra para o SP.

5) A subrotina AXIS terá a seguinte sintaxe:

CALL AXIS(0,0,d,e,f,g,h,i,j)

d = título do eixo que será centrado e colocado em paralelo ao eixo x ou y, conforme for indicado.

e = número de caracteres contidos em d, precedido do sinal + ou menos. De acordo com o sinal, podemos ter:

sinal positivo - eixo y

sinal negativo - eixo x

f = tamanho do eixo

g = ângulo, em graus, com o qual o eixo será traçado. Usamos 0 para o eixo x e 90 para o eixo y.

h,i = estes comandos estão relacionados com o item (2). Indicamos os dois vetores suplementares em h e i, respectivamente.

j = denota o intervalo pelo qual serão escritos os valores abaixo das marcas, isto é, se j=1, todas as marcas terão plotados ' sob si, os valores indicados por suas posições; se j=2, haverá uma marca sem valor entre cada duas com valores, isto é, uma sim outra não e assim sucessivamente.

Aqui, como no caso anterior, há duas subrotinas AXIS, uma para o vetor T, outra para o SP.

6) A subrotina LINE terá a seguinte sintaxe:

CALL LINE(T,SP,m,l,46,10)

m = número de pontos contidos em cada um dos vetores.

Caso não haja necessidade da utilização do ploter, deve-se apenas retirar os cartões referentes à subrotina PLOTTER OFF - LINE.

```

FILE BCKIND=TAPE,BLOCKSIZE=83)
C INIC 10 DO BLOCK OF DATA
CALCOMP 905 FCB'S P.V. 329911 FOR B=6700 MARCH,1974
COPYRIGHT 1974 CALIFORNIA COMPUTER PRODUCTS, INC.
C FIN DO BLOCK OF DATA
SUBROUTINE OPTIM (X,N,START,STEP,M)
DIMENSION X(600),HEAD(10),FMT(18)
HEAD(M,1) HEAD,M,FMT,START,STEP
1  FORMAT(16A4/1F/18A4/2F10.5)
2  WRITE(6,2) HEAD,M,FMT,START,STEP
   FORMAT('0THE DATA HEADER RECORDS ='/1X,18A4/
+        ' THE SERIES LENGTH IS',16/
+        ' THE DATA FORMAT IS '/1X,18A4/
+        ' TIME ORIGIN IS',F11.5,
+        ' TIME INCREMENT IS',F11.5)
READ(K,FMT) (X(I),I=1,N)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE OPTIM (X,N,RMU,FRE,A,B,M,CONV,LIM,APPLG)
REAL LOCALM
DIMENSION X(N),Y(600),FRE(10),A(10),B(10)
LOGICAL APPLG
DATA EPS /1E-9/
T=CONV
DELTA = 3.142/FLCAT(N)
DO 10 KOUNT=1,LIM
SUM=0
DO 20 I=1,N
Y(I)=X(I)
DO 30 J=1,M
ARG=FLCAT(I=1)*FRE(J)
30 Y(I)=Y(I)-A(J)*COS(ARG)-B(J)*SIN(ARG)
20 SUM=SUM+Y(I)
RMU=SUM/FLCAT(N)
TEST=0
DO 40 J=1,M
DO 50 I=1,N
Y(I)=X(I)-RMU
DO 50 K=1,M
IF(K.EQ.J) GO TO 50
ARG=FLCAT(I=1)*FRE(K)
50 Y(I)=Y(I)-A(K)*COS(ARG)-B(K)*SIN(ARG)
CONTINUE
DUMMY=LOCALM (FRE(J)-DELTA,FRE(J)+DELTA,
+ EPS,T,TEMP,Y,N,APPLG)
TEST=MAX1(TEST,ABS(FRE(J)-TEMP))
FRE(J)=TEMP
40 CALL PARS (Y,N,FRE(J),APPLG,A(J),B(J))
IF (TEST.LT.(CONV)RETURN
DELTA=TEST+2.0*T
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

REAL FUNCTION LOCALM (A,B,EPS,I ,X,Y,N,APPFLG)
DIMENSION Y(N)
LOGICAL APPFLG
REAL M
SA=A
SB=B
X=SA+0.381966*(SB-SA)
W=X
V=W
E=0.0
FX=SSPEG(Y,N,X,APPFLG)
FW=FX
FV=FW
10  M=0.5*(SA+SB)
    TOL=EPS+ABS(X)+T
    T2=2.0*TOL
    IF (ABS(X-M) .LT. T2=0.5*(SB-SA)) GO TO 190
    R=0.0
    G=R
    P=G
    IF (ABS(G) .LT. TOL) GO TO 40
    H=(X-M)*(FX-FV)
    Q=(X-V)*(FX-FW)
    P=(X-V)*Q*(X-W)*R
    G=2.0*(G-R)
    IF (W .LE. 0.0) GO TO 20
    P=-P
    GO TO 30
20  G=G
30  R=H
    END
40  IF (ABS(P) .GE. ABS(0.5*(G-R))) GO TO 60
    IF ((P .LE. 0*(SA-X)) .OR. (P .GE. 0*(SB-X))) GO TO 60
    U=X+G
    IF ((U-SA .GE. T2) .AND. (SB-U .GE. T2)) GO TO 90
    IF (X .GE. M) GO TO 50
    GO TO 90
50  D=TOL
60  IF (X .GE. M) GO TO 70
    E=SB-X
    GO TO 80
70  E=SA-X
80  D=0.381966*E
90  IF (ABS(D) .LT. TOL) GO TO 100
    U=X+D
    GO TO 120
100 IF (D .LE. 0.0) GO TO 110
    U=X+D
    GO TO 120
110 U=X-TOL
120 FU=SSPEG(Y,N,U,APPFLG)
    IF (FU .GT. FX) GO TO 150
    IF (U .GE. X) GO TO 130
    SB=X
    GO TO 140
130 SA=X
140 V=W
    FV=FW
    W=X
    FW=FX
    X=U
    FX=FU
    GO TO 10
150 IF (U .GE. X) GO TO 160
    SA=U
    GO TO 170
160 SB=U
170 IF ((FU .GT. FW) .AND. (W .NE. X)) GO TO 180
    V=W
    FV=FW
    W=U
    FW=FU
    GO TO 10
180 IF ((FU .GT. FV) .AND. (V .NE. X) .AND. (V .NE. W))
    GO TO 10
    V=U
    FV=FU
    GO TO 10
190 LOCALM=FX
    RETURN
END

```

```

FUNCTION SSREG (Y,N,OMEGA,APPFLG)
DIMENSION Y(N)
LOGICAL APPFLG
CALL STATS (Y,N,OMEGA,CY,SY)
IF (APPFLG) GO TO 10
RN=N
CON=SIN(RN*OMEGA)/SIN(OMEGA)
ARG=(RN-1.0)*OMEGA
CC=0.5*(RN+COS(ARG)*CON)
CS=0.5*SIN(ARG)*CON
SS=RN**2
SSREG=(SS*CY**2+2.0*CS*CY*SY+CC*SY**2)/(CC*SS-CS**2)
RETURN
10 CONTINUE
SSREG=(CY**2+SY**2)*2.0/FLOAT(N)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE STATS (Y,N,OMEGA,CY,SY)
DIMENSION Y(N)
CY=0.0
SY=0.0
DO 10 I=1,N
ARG=FLOAT(I-1)*OMEGA
CY=CY+COS(ARG)*Y(I)
SY=SY+SIN(ARG)*Y(I)
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE PARMS (Y,N,OMEGA,APPFLG,A,B)
LOGICAL APPFLG
DIMENSION Y(N)
CALL STATS (Y,N,OMEGA,CY,SY)
RN=FLOAT(N)
IF (SIN(OMEGA) .EQ. 0.0) GO TO 20
IF (APPFLG) GO TO 10
CON=SIN(RN*OMEGA)/SIN(OMEGA)
ARG=(RN-1.0)*OMEGA
CC=0.5*(RN+COS(ARG)*CON)
CS=0.5*SIN(ARG)*CON
SS=RN**2
DEL=CC*SS-CS**2
A=(CY*SS-SY*CS)/DEL
B=(SY*CC-CY*CS)/DEL
10 RETURN
CONTINUE
A=2.0*CY/RN
B=2.0*SY/RN
RETURN
20 A=CY/RN
B=0.0
RETURN
END

```

```

DIMENSION X(600),FRE(10),A(10),B(10)
LOGICAL APPFLG
CALL OPTIM (X,N,START,STEP,5)
1 READ (F,1) CONV,LIM,APPFLG
FORMAT (F10.5,15,L1)
4 WRITE (6,4) CONV,LIM,APPFLG
FORMAT (' OFOR THIS RUN, CONV =',E12.4/
+ ' LIM =',E15.7/
+ ' APPFLG =',L5)
8 READ (5,8) M
FORMAT (I5)
DO 10 J=1,M
10 READ (F,2) FRE(J),A(J),B(J)
FORMAT (3F10.5)
WRITE (F,5)
5 FORMAT (' INITIAL VALUES ARE -')
WRITE (F,3) (J,FRE(J),A(J),B(J),J=1,M)
3 FORMAT (' COMPONENT FREQUENCY          COSINE          SINE' /
+ ' COEFFICIENTS' /
+ ' (15,F15.7,2E15.6))
CALL OPTIM (X,N,RMU,FRE,M,B,M,CONV,LIM,APPFLG)
6 WRITE (6,6)
FORMAT (' FINAL VALUES ARE -')
WRITE (F,3) (IM,FRE(IM),A(IM),B(IM),IM=1,M)
SS=0.0
DO 30 I=1,M
TEMP=X(I)-RHU
DO 40 J=1,M
ARG=PI*(I-1)*FRE(J)
TEMP=TEMP-A(J)*COS(ARG)+B(J)*SIN(ARG)
40 CONTINUE
SS=SS+TEMP**2
30 CONTINUE
WRITE (6,7) RHU,SS
7 FORMAT (' FITTED CONSTANT IS',E15.6/
+ ' RESIDUAL SU- OF SQUARES IS',E15.6)
DIMENSION T(48),SP(48)
BRAS=1.
DO 17 K=1,46
SIMBRM
T(K)=BRAS-1.
DO 13 I=1,M
13 S=A(I)*COS(FRE(I)*T(K))+B(I)*SIN(FRE(I)*T(K))+SI
CONTINUE
SP(K)=SI
BRAS=BRAS+0.2
17 CONTINUE
CALL PLOTSCB)
CALL NAME(28)
CALL FACTOR(1)
CALL PLET(3,10,-3)
CALL SCALE(T,26,46,1)
CALL SCALE(SP,27,46,1)
CALL AXIS(0,0,'DIAS',-4,26,0,T(47),T(48),5)
CALL AXIS(0,0,'KM/SEG',6,27,50,SP(47),SP(48),4)
CALL LIME(T,SP,46,1,46,10)
CALL PLET(0,0,999)
STOP
END

```

```

BIND FROM PLOTTER/
BEGIN BINDING AXIS OF .OUT FROM PLOTTER/AXIS
  AXIS (02,0002) CHANGED TO (02,0020)
  PLOT (02,0005) CHANGED TO (02,0012)
  SYMBOL (02,0004) CHANGED TO (02,0023)
  NUMBER (02,0003) CHANGED TO (02,0024)
  <SEG DTCT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,0010) # 03 000009900003
  <SEG DTCT ITEM> (01,0003) CHANGED TO (01,0020) # 05 070000000011
  <SEG DTCT ITEM> (01,0006) CHANGED TO (01,0021) # 05 08000014000E
END OF BINDING AXIS
BEGIN BINDING LINE OF .OUT FROM PLOTTER/LINE
  LINE (02,0002) CHANGED TO (02,0021)
  PLOT (02,0005) CHANGED TO (02,0012)
  SYMBOL (02,0004) CHANGED TO (02,0023)
  WHERE (02,0003) CHANGED TO (02,0025)
  <SEG DTCT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,001E) # 03 000006300019
END OF BINDING LINE
BEGIN BINDING PLOTS OF .OUT FROM PLOTTER/PLOTS
  PLOTS (02,0002) CHANGED TO (02,001a)
  PLOT (02,0005) CHANGED TO (02,001E)
  BUFF (02,0007) CHANGED TO (02,002b)
  /LIMIT/ (02,0005) CHANGED TO (02,0027)
  /FILAR0/ (02,0003) CHANGED TO (02,0029)
  <SEG DTCT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,0018) # 03 000000000030
END OF BINDING PLOTS
BEGIN BINDING NAME OF .OUT FROM PLOTTER/NAME
  NAME (02,0002) CHANGED TO (02,001c)
  PLOT (02,0007) CHANGED TO (02,001E)
  SYMBOL (02,0006) CHANGED TO (02,0023)
  /EXTS/ (02,0003) CHANGED TO (02,0006)
  TITULD (02,0005) CHANGED TO (02,0028)
  <SEG DTCT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,0019) # 03 000002100040
END OF BINDING NAME
BEGIN BINDING FACTOR OF .OUT FROM PLOTTER/FACTOR
  FACTOR (02,0002) CHANGED TO (02,001d)
  PLOT (02,0003) CHANGED TO (02,001E)
  <SEG DTCT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,001a) # 03 000000900046
END OF BINDING FACTOR
BEGIN BINDING PLOT OF .OUT FROM PLOTTER/PLOT
  PLOT (02,0002) CHANGED TO (02,001e)
  FILESS (02,0002) CHANGED TO (02,0003)
  BUFF (02,0000) CHANGED TO (02,002b)
  /DOOO00/ (02,0009) CHANGED TO (02,0000)
  /ERR0/ (02,0007) CHANGED TO (02,0004)
  /FILAR0/ (02,0005) CHANGED TO (02,002y)
  /EXTS/ (02,0003) CHANGED TO (02,000b)
  <SEG DTCT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,001a) # 03 00001100004E
  <SEG DTCT ITEM> (01,0006) CHANGED TO (01,0022) # 05 030000F40058
END OF BINDING PLOT
BEGIN BINDING SCALE OF .OUT FROM PLOTTER/SCALE
  SCALE (02,0002) CHANGED TO (02,001f)
  <SEG DTCT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,001c) # 03 000006400068
  <SEG DTCT ITEM> (01,0003) CHANGED TO (01,0023) # 05 070000000016
END OF BINDING SCALE
BEGIN BINDING SYMBOL OF .OUT FROM PLOTTER/SYMBOL
  SYMBOL (02,0002) CHANGED TO (02,0023)
  PLOT (02,0005) CHANGED TO (02,001E)
  /DOOO00/ (02,0003) CHANGED TO (02,000E)
  <SEG DTCT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,0024) # 03 000008200077
END OF BINDING SYMBOL
BEGIN BINDING NUMBER OF .OUT FROM PLOTTER/NUMBER
  NUMBER (02,0002) CHANGED TO (02,0024)
  SYMBOL (02,0003) CHANGED TO (02,0023)
  <SEG DTCT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,0025) # 03 000005000085
END OF BINDING NUMBER
BEGIN BINDING WHERE OF .OUT FROM PLOTTER/WHERE
  WHERE (02,0002) CHANGED TO (02,0025)
  PLOT (02,0003) CHANGED TO (02,001E)
  <SEG DTCT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,0026) # 03 00000110008E
END OF BINDING WHERE
BEGIN BINDING BUFF OF .OUT FROM PLOTTER/BUFF
  BUFF (02,0002) CHANGED TO (02,0026)
  /DOOO02/ (02,0003) CHANGED TO (02,0004)
  <SEG DTCT ITEM> (01,0002) CHANGED TO (01,0027) # 03 000004400092
  <SEG DTCT ITEM> (01,0004) CHANGED TO (01,0028) # 05 070000000091
END OF BINDING BUFF

```

ECLIPSANTES DO TIPO "ALGOL" OBSERVÁVEIS DO RIO DE JANEIRO

Anexamos aqui uma lista de 109 binárias eclipsantes do tipo 'ALGOL' (extraídas do GENERAL CATALOGUE OF VARIABLE STARS), observáveis da latitude da cidade do Rio de Janeiro. Considerando as condições de céu desta cidade e os instrumentos de que, no momento, 'dispoem os nossos observatórios, estabelecemos um limite máximo de 10.0 para as magnitudes estelares. Dentro deste limite, incluímos todos os sistemas Algol do hemisfério austral e do hemisfério boreal, com declinação inferior a $+40^{\circ}$, existentes naquele catálogo.

Cada coluna representa os seguintes dados:

- 1- Nome da estrela
- 2- Ascensão reta (para 1900.0)
- 3- Declinação (para 1900.0)
- 4- Magnitude estelar correspondente ao máximo da curva de luz
- 5- Magnitude estelar correspondente ao mínimo principal
- 6- Magnitude estelar correspondente ao mínimo secundário
- 7- Tipos das magnitudes: p-fotográfica; v-visual; B-azul (U, B,V)
- 8- Época de observação do mínimo principal em dias do período Juliano (2400000 mais o existente na tabela)
- 9- Período em dias Julianos
- 10- Duração dos mínimos em centésimos do período
- 11- Tipos espectrais das estrelas componentes dos sistemas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
DW Aps	17 13 00	-67 50.1	7.9	9.2		P	38196.4009	2.312907	14	AO
EE Aqr	22 29 16	-20 22.1	8.3	9.1		P	29881.310	0.5089951	19	FO
KO Aql	18 42 28	+10 39.1	8.3	9.3	8.4	P	33888.366	2.863954	13	AO
QS Aql	19 36 28	+13 35.1	5.8	5.95	5.85	P	23963.75	2.5133	17	B4
V805 Aql	19 00 44	-11 48.1	7.81	8.48	8.10	P	27927.8470	2.408230	12	A2+A7
V822 Aql	19 26 04	-02 19.1	6.7	7.1		P	29779.30	2.6477		B2
V889 Aql	19 14 19	+16 04.1	8.7	9.3		P	27210.596	11.12071	05	B9
R Ara	16 31 26	-56 47.1	6.0	6.9	6.2	P	25818.028	4.42507	09	B9
RR Ari	02 50 16	+23 05.1	6.42	6.84	6.75	P	36493.2	47.9	08	KO III
RX Ari	02 09 43	+22 06.1	9.4	9.8		V	38398.5697	1.029626	18	F5
WW Aur	06 25 56	+32 31.1	5.7	6.43	6.28	P	32945.53930	2.52501922	10	A7V + A7V
AR Aur	05 11 44	+33 39.1	5.82	6.49	6.37	P	26742.434	4.13466057	07	B9V + B9V
EO Aur	05 11 36	+36 31.1	7.5	8.02	7.71	B	21190.7479	4.06563378	23	B3 + B8
ZZ Boo	13 51 34	+26 24.1	7.0	7.8	7.7	P	30868.650	4.991749	06	FO + FO
TW Cnc	08 24 06	+12 47.1	9.0	9.7	9.1	P	31854.76	70.760	03	G8III + A8
RS CVn	13 05 59	+36 28.1	8.4	9.92	8.55	P	25249.028	4.797871	11	F4 IV-V + KO IV
R CMa	07 14 57	-16 12.1	6.05	6.66	6.09	B	35515.3600	1.1359386	16	A9
δ Cap	21 41 32	-16 35.1	2.88	3.05		V	35656.911	1.022768	14	A7 III
DO Car	10 09 55	-58 43.1	9.1	9.3		P	23868.292	3.85194	09	B8
EM Car	11 07 49	-60 33.1	8.7	9.0	8.9	P	29551.574	3.41427	14	cB0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	h	m	s	o	i					
GL Car	11 10 21	-60 06.9	8.9	9.57	9.47	P	24264.448	2.4222338	14	B3
GY Car	11 01 19	-58 11.4	8.9	9.4	9.05	P	23828.433	4.294621	10	A0
HP Car	10 15 58	-56 54.1	8.5	8.8	8.8	P	24348.182	1.6004464	12	eB2
SZ Cen	13 43 50	-58 00.1	8.3	8.9	8.7	P	28360.330	4.107988	10	A2
VZ Cen	11 47 32	-60 58.1	8.5	8.8	8.65	P	29125.519	4.9287012	02	B1
BF Cen	11 31 37	-60 54.8	8.5	9.4	8.8	P	24262.28	3.69334	20	B7
LT Cen	11 24 28	-60 19.8	9.2	9.6	9.6	P	25028.937	1.625914	15	A0
MN Cen	11 23 32	-60 51.6	8.6	9.0	8.7	P	24918.58	3.48916	17	B7
V346 Cen	11 38 04	-61 52.8	8.3	8.7	8.7	P	21963.674	6.32227	11	B4
V377 Cen	12 51 35	-47 31.2	8.4	9.1		P	30393.956	8.251658	06	A3
V379 Cen	13 18 54	-59 15.6	8.8	9.6	8.9	P	28402.23	1.874685	18	B9
V636 Cen	14 10 24	-49 28.8	8.7	9.2	8.8	V	34540.340	4.28398	04	G0
V685 Cen	11 19 54	-57 10.8	9.4	9.8	9.5	P	25351.530	1.190964	02	A0
TV Cet	03 09 25	+02 22.9	8.7	9.1	9.0	V	26692.494	9.1032	03	F0
XY Cet	02 54 21	+03 07.3	8.6	9.3		P	26734.285	1.390356	20	A0
RS Cha	08 46 37	-78 42.2	6.3	6.75	6.7	B	38380.515	1.66992	12	A5
RZ Cha	10 42 25	-81 30.9	8.2	9.1	8.8	P	30439.490	2.8284	15	F5
YZ Cha	11 30 16	-77 11.7	9.0	9.5		P	28820.600	2.228685		A0
AT Cir	13 55 57	-66 15.1	8.4	8.8		P	38229.200	3.2571	15	A5
BD Cir	14 43 48	-55 30.2	9.4	9.9	9.5	P	38205.310	0.86956	18	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
U CrB	15 14 07	+32 00.7	7.04	8.35	7.07	p	16747.964	3.45220416	11	B5 + A2
α CrB	15 30 28	+27 03.0	2.21	2.32		B	23163.770	17.3599907	03	A0 V
AB CrA	12 12 16	-57 36.5	8.9	9.5	9.2	p	29235.019	3.4132987	19	B0
AE CrA	11 53 32	-60 36.6	9.0	9.7	9.03	p	30399.114	3.4781475	12	B9
AI CrA	12 00 57	-60 42.0	9.2	9.95	9.59	p	33466.3358	1.4177073	20	08
Y CyG	20 48 04	+34 16.9	7.2	7.8	7.6	p	09534.3195	2.9963331	10	B0 IV + B0 IV
MY CyG	20 16 10	+33 37.7	8.7	9.4	8.75	p	33849.610	2.002593	15	A7
V444 CyG	20 15 53	+38 25.0	8.3	8.60	8.44	p	37920.748	4.212417	20	06 + WN5.5
V453 CyG	20 02 49	+35 27.2	8.3	8.6	8.5	p	29139.01	3.889807	12	B1 III
V477 CyG	20 01 31	+31 41.2	8.3	9.18	8.46	p	32846.244	2.3469977	07	A3 + F5
V478 CyG	20 15 58	+38 01.3	8.9	9.3	9.3	p	18552.648	2.880891	17	B0 V + B0 V
V909 CyG	19 31 51	+28 03.4	9.3	9.7		p	35817.465	1.4027080	22	A0
DM Del	20 34 55	+14 04.5	8.6	8.9		v	30663.067	0.8446725	29	A3
AS Eri	03 27 25	-03 39.1	8.48	9.21	8.53	B	28538.066	2.664152	09	A0
EM Eri	04 08 44	-10 38.5	8.5	9.3		p	31140	>20 000.	<2	EM6
BT Eri	03 30 53	-39 44.7	9.0	9.6		p	34383.17			A0
BN Eri	03 44 56	-21 10.9	8.5	9.0		p	31180.49			A3
CO Eri	02 31 55	-45 30.3	9.0	9.6		p	28776.575	5.7836		GO
YY Gem	07 28 14	+32 05.2	9.1	9.65	9.64	v	24595.81720	0.81428254	11	dMLe + dMLe
V Gru	21 45 40	-42 50.5	9.5	9.8		p	29966.725	4.4942942	15	F5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Z Her	17 53 36	+15 08.9	7.3	8.1	7.4	p	13086.348	3.9928012	11	F4 IV-V
RX Her	18 26 01	+12 32.6	7.26	7.89	7.77	p	33170.398	1.7785724	14	A0 + A0
DI Her	18 49 17	+24 09.3	8.3	9.0	8.9	p	15182.732	10.550185	04	B4 III + B5 III
HS Her	18 46 42	+24 36.1	8.2	8.6	8.22	p	30880.349	1.637412	12	B6 III
NQ Her	18 07 11	+18 18.1	8.0	8.6		p				A0
TT Hya	11 08 19	-25 55.3	7.5	9.5	7.54	p	24615.388	6.9534124	10	A3e + aG6p
AI Hya	08 13 38	-16 56.9	9.0	9.5	9.4	v	28935.46	8.29		F0 + F5
HS Hya	10 19 49	-18 35.8	8.5	9.2		p	38471.530	3.665		F5
TX Leo	10 29 47	+09 10.0	5.71	5.81	5.73	B	27159.390	2.455058	08	A2 V
RY Lep	05 43 50	-20 03.0	8.2	9.1		v	38315.595			F0
♂ Lib	14 55 37	-08 07.3	4.91	5.96		B	22852.3598	2.32735297	23	Als
FZ Lup	14 25 36	-53 14.9	9.4	9.8		p	28328.300	2.267310		A0
TZ Men	05 49 34	-84 50.1	6.2	7.0		p	38196.370	8.569		A0
UX Men	05 33 57	-76 19.0	8.8	9.2		p	28778.650	2.090550		F8
VY Mic	20 42 53	-34 06.0	8.4	8.7		p	38295.265	4.4358	10	A3
UX Mon	07 54 24	-07 14.0	8.0	8.94	8.24	v	33328.849	5.90450	17	A6p + G2p IV
AO Mon	07 01 40	-04 28.4	9.3	9.9	9.8	p	26735.333	1.884758	14	B3 + B5
AU Mon	06 49 50	-01 15.0	8.29	9.2	8.4	v	26743.12	11.1130	09	B5 + F0
CX Mus	11 42 57	-68 25.7	8.7	9.3		p	28687.275	5.90322		B9
TV Nor	15 56 37	-51 16.0	8.7	9.3	8.9	p	25832.231	8.524406	25	A0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
IR Nor	15 41 58	-43 47.1	9.0	9.5		p	38471.500	3.509		AO
IT Nor	16 10 03	-44 44.2	9.4	9.8		v	08279.641	1.6773460	17	B4n + B5n
U Oph	17 11 27	+01 19.3	5.88	6.58	6.48	v	35648.775	4.183511	06	εGO + εGO
WZ Oph	17 01 49	+07 55.0	9.14	9.82	9.82	v	34165.4900	2.1965962	12	AO + A2
V451 Oph	18 24 32	+10 49.6	7.86	8.46	8.31	p	22717.28	6.4055	11	B3 V
BM Ori	05 30 21	-05 27.1	8.0	8.7		v	33009.553	3.150404	07	AO
FT Ori	06 07 58	+21 27.3	9.1	9.7		p	27126.360	2.757240	17	AO
V642 Ori	05 53 58	+09 14.2	8.7	9.1		p	19068.20	5.732476	13	09.5 II
δ Ori	05 26 56	-00 22.4	1.94	2.13	2.52	B	28667.600	1.89975		F2
KZ Pav	20 48 57	-70 48.4	7.8	8.4		p	26543.474	10.622543	07	A3-5 V + F5 IV
AW Peg	21 47 45	+23 32.6	7.4	9.0		p	34622.632	2.6282	10	A4 V
EE Peg	21 35 07	+08 43.9	6.9	7.57	7.10	v	26647.345	2.556138	08	A3
GH Peg	21 46 04	+14 46.6	9.1	9.6		p	24946.5156	2.02872933	12	B4 + B5 V
AG Per	04 00 32	+33 10.6	6.50	6.80	6.74	p	32667.012	1.6697597	14	B7 V
ζ Phe	01 04 11	-55 46.8	3.91	4.41		v	36114.565	3.96637	11	K1 IV-V + F8 V
SZ Psc	23 08 17	+02 07.8	8.02	8.69	8.10	B	34974.063	0.84166	18	F0 IV + F4 V
UU Psc	00 09 50	+08 15.9	5.9	5.99	5.97	p				
SV Psa	21 32 42	-33 48.2	9.0	9.5		p				
AZ Pup	08 14 30	-34 37.1	9.3	9.8	9.7	p	28110.870	0.96737053	20	
BH Pup	08 04 51	-41 44.2	8.4	9.1		p	21692.523	1.915854		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	h	m	s	o	'					
TT Pyx	08 44 12	-25 47.6	8.8	9.4		p	25622.57	1.515769	30	B9
TX Pyx	08 35 28	-31 59.0	9.5	9.9		p	38406.515	1.12455		A3
U Sge	19 14 26	+19 25.7	6.31	9.92	6.34	p	29111.3228	3.3806184	14	B9e + gG2
RS Sgr	18 10 58	-34 08.5	6.0	6.9	6.2	p	20586.387	2.4156832	17	B5
V356 Sgr	18 41 56	-20 23.0	7.0	7.87	7.39	B	33900.827	8.89610	12	B3c v + A2 II
V505 Sgr	19 47 28	-14 51.6	6.4	7.56	6.53	p	33515.3295	1.18267141	20	A1 v + F6
V777 Sgr	17 40 12	-26 09.6	9.4	9.7		p	29411.7	936.07	06	K5 Ib + A
V1647Sgr	17 52 26	-36 55.7	7.0	7.15	7.12	p	31344.442	3.282807	06	A0
V2349Sgr	18 22 38	-16 45.5	8.4	9.0	8.8	p	38505.574	5.2747	12	B0
μ Sgr	18 07 47	-21 05.1	3.79	3.92		v	29051.	180.45	11	B8ep Ia
FV Sco	17 07 14	-32 44.1	7.9	8.6	8.0	p	20277.30	5.72786	13	B9
V393 Sco	17 42 07	-35 01.3	7.7	8.6	7.8	p	28321.118	7.71249	12	B9
RZ Sct	18 21 00	-09 15.6	7.7	8.9	7.8	p	37033.697	15.190246	16	B3 Ib
ER Sct	18 37 19	-07 47.4	9.1	9.4	9.2	p	27335.483	1.361041		A0
EG Ser	18 20 51	-01 44.1	8.7	9.5		p	26487.525	4.97362	05	A0
CD Tau	05 11 36	+20 01.4	7.0	7.6	7.9	p	26793.353	3.43515	08	F2s + F2s
HU Tau	04 32 22	+20 29.0	6.0	6.8	6.2	v	25641.285	2.056297	16	B9
λ Tau	03 55 08	+12 12.5	3.5	4.0	3.59	p	35089.204	3.952955	15	B3.3 v + A4 IV
BL Tel	18 58 49	-51 34.1	7.72	9.82		B	34692.6	778.1	12	eF8 + M
EP Tra	15 40 32	-63 57.9	9.4	9.9	9.5	p	38204.360	2.14165	16	A0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

h m s o ' "

EQ Tra	16 00 30	-65 53.2	8.9	9.5	9.0	p	38228.285	2.7095	20	F5
AS Vel	08 24 37	-38 38.4	8.8	9.4	8.9	p	26454.440	1.55788874	12	A3
CV Vel	08 57 29	-51 09.8	6.56	7.3	7.2	p	34091.302	6.892	10	B2 V + B2 V
UY Vir	12 56 34	-19 14.1	8.5	9.2	8.7	p	30020.667	1.8945051	14	A7 V
DL Vir	13 47 11	-18 13.0	7.0	7.5		v	38796.525	1.31548	14	F2 + A2
DM Vir	14 02 32	-10 40.9	9.0	9.8	8.1	p	26087.505	2.334715	12	F5 + F5
Z Vul	19 17 32	+25 23.1	7.38	9.20	7.66	B	25456.117	2.454926	18	B4 V + A2-3 III
RS Vul	19 13 25	+22 15.7	6.9	7.63	6.94	p	32808.257	4.4776635	14	B5 V + A2
DR Vul	20 09 36	+26 26.9	8.6	9.3	9.3	p	30903.360	2.250844	11	B8

REFERÊNCIAS

- 1 - Aitken, R. G. - The Binary Stars - Dover Publications, Inc., New York
- 2 - Binnendijk, L. - Properties of Double Stars - University of Pennsylvania Press - Philadelphia
- 3 - Russel, H. N. - On the Determination of the Elements of Eclipsing Variable Stars - A.S.P., 35-315; 36-54
- 4 - Russel, H. N. & Shapley, H. - On the Darkening at the Limb in Eclipsing Variables - A.S.P., 36-239, 385