



CÁLCULO DA POSIÇÃO DE ASTEROIDES

por

JOSÉ ANTONIO SALVADOR

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA
1979

Orientador: Prof. José Felipe C. Caldeira

i

A

ADALBERTO NOBIATO CRESPO,
ARNALDO DARONI,
HELVÉCIO RUBENS CRIPPA,
THEOPHILO BENEDICTO OTTONI FILHO,
WALDECIR BIANCHINI

e a todos os amigos que sempre me
ouviram falar de astronomia.

AGRADECIMENTOS

Aos professores JOSÉ ADOLFO S. DE CAMPOS, chefe do departamento de astronomia, LUIZ EDUARDO DA SILVA MACHADO, diretor do Observatório do Valongo e SILIO VAZ, diretor do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Rio de Janeiro e a todos os professores do departamento de astronomia do IGUFRJ, pela oportunidade que me deram de realizar o curso de astronomia e pelos seus ensinamentos sobre o complexo e maravilhoso mundo astronômico, a todos os amigos e colegas, pela amizade e pelo incentivo constante os meus sinceros agradecimentos.

Agradeço especialmente ao professor JOSÉ FELIPE CALDEIRA pela sugestão e orientação deste trabalho, ao professor EDGAR RANGEL NETTO pela paciência em ler o manuscrito e pelas valiosas sugestões e discussões durante a realização do mesmo, e ao professor HENRY DEBEHOGNE pelos seus ensinamentos sobre astrometria.

Estendo os meus agradecimentos especiais a MIRIAM CASTEDO CARQUEJA, pelo excelente trabalho de datilografia e a todos os amigos, professores e funcionários, do Instituto de Matemática da UFRJ pela convivência e pelo incentivo.

SUMÁRIO

| | |
|--|-----|
| DEDICATÓRIA | i |
| AGRADECIMENTOS | ii |
| SUMÁRIO | iii |
| RESUMO | iv |
| ABSTRACT | v |
| INTRODUÇÃO | 1 |
| CAPÍTULO 1 - ASTERÓIDES | 3 |
| 1.1 - HISTÓRICO | 3 |
| 1.2 - NOMENCLATURA | 9 |
| 1.3 - ÓRBITAS | 10 |
| 1.4 - DIMENSÕES | 15 |
| 1.5 - FORMAS E VARIAÇÕES DE BRILHO | 19 |
| 1.6 - ORIGEM DOS ASTERÓIDES | 23 |
| 1.7 - UTILIDADE | 23 |
| CAPÍTULO 2 - ALGUMAS FÓRMULAS DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA .. | 25 |
| 2.1 - PRELIMINARES SOBRE ANÁLISE VETORIAL .. | 25 |
| 2.2 - LEI DOS CO-SENOS PARA UM TRIÂNGULO ES FÉRICO | 31 |
| 2.3 - LEI DOS SENOS PARA UM TRIÂNGULO ES FÉRICO | 35 |
| 2.4 - FÓRMULA DO CO-SENO ESTENDIDA | 38 |
| CAPÍTULO 3 - MÉTODO DAS DEPENDÊNCIAS | 40 |
| 3.1 - INTRODUÇÃO AO MÉTODO | 41 |
| 3.2 - O MÉTODO DAS DEPENDÊNCIAS | 46 |
| 3.3 - O MÉTODO PARA TRÊS ESTRELAS BÁSICAS .. | 56 |
| 3.4 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÉTODO DAS DEPENDÊNCIAS PARA TRÊS ESTRELAS BÁSICAS .. | 58 |
| 3.5 - A FÓRMULA FUNDAMENTAL PARA O MÉTODO DAS DEPENDÊNCIAS | 61 |
| 3.6 - CONCLUSÃO | 69 |
| REFERÊNCIAS | 71 |

RESUMO

O presente trabalho consiste de três partes.

A primeira delas consiste numa descrição geral dos asteróides com um desenvolvimento histórico.

Na segunda delas deduzimos algumas fórmulas da trigonometria esférica, através da análise vetorial.

Finalmente, na última parte estudamos o método das dependências para a determinação da posição de um objeto celeste, especialmente a de um asteróide. Ainda apresentamos uma interpretação geométrica para o método quando utilizamos três estrelas de referência.

ABSTRACT

The present work consists in three parts.

The first part consists of a brief review about asteroids, with a historical development.

In the second part we derive some formulas about the spherical trigonometry using the vectorial analysis.

Finally, in the third and last part we study the dependence method for the determination of the position of a celestial object, especially, an asteroid.

We give a geometrical interpretation of the method studied using three stars as reference.

INTRODUÇÃO

A Pesquisa dos asteróides é uma das mais importantes na Astronomia, principalmente no que se refere ao melhor conhecimento do nosso sistema solar.

Tal pesquisa como a determinação da posição e o cálculo de órbitas tem-se desenvolvido graças aos instrumentos de observação e aos métodos matemáticos.

O presente trabalho consiste de três partes.

Na primeira delas apresentamos uma descrição geral sobre os asteróides, desde a predição da existência deles por KEPLER até as mais recentes pesquisas.

Devido ao pequeno tamanho destes objetos celestes é indispensável a utilização de recursos fotográficos, assim como na maioria das pesquisas astronômicas da atualidade.

No terceiro capítulo deste trabalho apresentamos de um modo simples um método de redução de placas fotográficas, o método das dependências, o qual interpretamos geometricamente para três estrelas e utilizamos alguns conceitos da análise vetorial, que foram introduzidos no segundo capítulo.

Isto nos possibilitou a dedução de algumas fórmulas da trigonometria esférica que utilizamos a partir de algumas definições da análise vetorial, o que é diferente do que comumente aparece nos trabalhos de astronomia.

O método das dependências permite-nos determinar facilmente a posição de um asteróide no céu e com certo grau de

precisão.

O importante também é que tal método independe da escala da placa fotográfica e da orientação do instrumento.

É evidente que quanto mais precisa for a posição determinada do asteróide, mais preciso será o cálculo de sua órbita pelos métodos da mecânica celeste.

Além disso, quanto mais detalhes soubermos sobre os asteróides, mais ainda poderemos saber sobre o nosso próprio sistema solar, sua estrutura e sua origem.

CAPÍTULO 1

ASTERÓIDES

Neste capítulo faremos um estudo geral e descritivo sobre os pequenos planetas do sistema solar que são comumente chamados de planetóides ou asteróides.

Apresentamos um histórico da pesquisa de tais objetos celestes, a nomenclatura usada para designá-los, alguns parâmetros físicos e os que tem sido mais importante.

Finalmente tratamos da origem e da utilidade da pesquisa dos mesmos.

1.1 - HISTÓRICO

Já no século XVI o astrônomo alemão JOHANNES KEPLER (1571-1630) acreditava na existência de um planeta na região compreendida entre as órbitas dos planetas marte e júpiter.

Em 1772, o astrônomo JOANN ELERT BODE (1747-1826) de Berlin e o matemático e físico JOHANN DAVID TIETZ (1729-1796) de Wittemberg, conhecido como TITIUS, estabeleceram uma relação numérica como meio de determinar as distâncias dos planetas ao sol em unidades astronômicas que pode se expressar como:

$$r_n = 0,4 + 0,3 \times 2^{n-1}$$

onde r_n é a distância média do n -ésimo planeta ao sol e n toma os valores de $-\infty, 1, 2, 3, \dots$ para obter as respectivas distâncias de mercúrio, vênus, terra, marte, \dots , ao sol.

Um fato curioso na chamada Lei de BODE-TITIUS é que

para $n = 4$, temos a distância de 2,8 unidades astronômicas e que não correspondia a nenhum planeta conhecido naquela época. Para $n = 5$ e 6 correspondiam os planetas júpiter e saturno respectivamente.

Também para $n = 7$ que corresponde a 19,6 unidades astronômicas do sol prevista pela Lei de BODE-TITIUS não correspondia a nenhum planeta conhecido, até que em 1781 o astrônomo FRIEDRICH WILHELM HERSCHEL (1738-1822) descobriu eventualmente o planeta urano, quando procurava encontrar estrelas binárias.

A distância de urano ao sol concordava de um modo satisfatório com a prevista pela Lei de BODE-TITIUS que foi prolongada com mais um termo e portanto ganhou mais crédito.

A suspeita de que deveria existir algum planeta entre as órbitas de marte e júpiter aumentou e atraiu mais ainda a atenção dos astrônomos da época.

No ano de 1796 no Congresso Astronômico de Gotha, um grupo de astrônomos formado pelo alemão FRANZ XAVIER VON ZACH (1754-1832), o francês JOSEPH JERÔME LE FRANÇOIS DE LALANDE (1732-1807) e JOHANN HIERONYMOS SCHRÖTER (1745-1816) propuseram um projeto de pesquisa que visava a procura de um planeta que deveria estar aproximadamente a 2,8 unidades astronômicas do sol conforme previa a Lei de BODE-TITIUS.

Contudo, os astrônomos empenhados na procura deste planeta não tiveram êxito, pois na primeira noite do século XIX o astrônomo italiano GIUSEPPE PIAZZI (1746-1826) diretor do Observatório de Palermo na Sicília, independentemente do projeto de colaboração internacional proposto em Gotha desco

Flamm./Banjon (idem)

180

briu um objeto peculiar de 7^a magnitude enquanto realizava seu rotineiro programa de observações de posições de estrelas para elaborar um catálogo estelar mais preciso do que os que já existiam.

Nas noites seguintes PIAZZI verificou que este objeto aparentemente estelar movia vagarosamente entre as estrelas, e a princípio pensou que se tratava de um cometa. PIAZZI observou até o dia 11 de fevereiro quando adoeceu interrompendo suas observações.

As suas observações foram enviadas a BODE na Alemanha, que reconheceu que o objeto não podia ser um cometa pois estava muito próximo do sol naquela época, embora ele não tivesse conseguido segui-lo pois as observações de PIAZZI só chegaram as suas mãos no mês de abril, e nem o próprio PIAZZI depois de recuperado da enfermidade conseguiu reencontrá-lo.

As buscas para reencontra-lo não tiveram sucesso.

Acontece que nesta época o jovem matemático, físico e astrônomo alemão CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) desenvolveu um processo de cálculo usando a mecânica newtoniana para determinar órbitas a partir de um número limitado de posições observadas, que ficou conhecido como método de GAUSS.

GAUSS aplicou o seu método às posições medidas por PIAZZI e o resultado obteve um grande sucesso, não só determinou que o pequeno planeta descoberto possuía uma órbita entre as órbitas de marte e júpiter como também previu a sua localização suficientemente precisa para que o mesmo fosse redescoberto um ano depois da primeira vez que ele tinha sido visto.

Ele foi denominado inicialmente de Ceres-Ferdinando, em homenagem a deusa protetora da Sicília e a FERDINANDO IV, rei de Nápolis, atualmente sō usamos o primeiro nome, Ceres, para designa-lo.

Em 28 de março de 1802 quando o astrônomo alemão V. HEINRICH WILHELM MATTHIAS OLBERS (1758-1840) estava procurando Ceres encontrou um novo planetóide de magnitude 7,7 que foi chamado de Palas.

Seguiram-se as descobertas de Juno por KARL HARDING, que estava trabalhando com SCHRÖTER, no dia primeiro de setembro de 1804 e de Vesta por HERSCHELL no dia 29 de março de 1807, com magnitudes 9,0 e 6,0 respectivamente.

HERSCHELL lhes deu o nome de asteróides, que significa, semelhante a uma estrela, pois é esta a aparência de que se todos eles quando vistos através do telescópio.

Nenhum outro asteróide foi descoberto até 1824, quando FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784-1846) da Academia de Ciências de Berlin, sugeriu a criação de mapas e de um catálogo de estrelas da zona zodiacal até a décima magnitude.

Um grupo de astrônomos trabalharam intensamente desde 1826 até 1859 e isto permitiu uma comparação mais fácil e consequentemente a descoberta de muitos outros asteróides.

KARL H. ENCKE, secretário do correio de Driesen em Neumark e como astrônomo amador descobriu Astrea próximo de Vesta no dia 8 de dezembro de 1845.

A procura de asteróides foi visual durante quase todo o século XIX. O observador junto ao telescópio, comparava

as estrelas numa região da esfera celeste com um mapa previamente desenhado, caso um astro não representado no mapa fosse visto, este era observado durante algum tempo na esperança de se deslocar entre as estrelas o que comprovaria o seu caráter planetário.

Por este lento processo, até o ano de 1891 já eram conhecidos cerca de 322 asteróides.

Neste ano o filósofo e astrônomo alemão MAX WOLF (1863-1932) de Heidelberg inaugurou o emprego do método foto gráfico na pesquisa de asteróides, descobrindo o 3239 asteróide, chamado Brucia. 1891

Daí em diante a frequência das descobertas aumentaram e o método visual foi praticamente abandonado.

No dia 13 de agosto de 1898, KARL GUSTAV WITT (1866-1946) do observatório Urania de Berlin descobriu Eros, e tal acontecimento expandiu mais o domínio dos asteróides que até então era limitado entre as órbitas de marte e júpiter. De fato, Eros cruza a órbita de marte e chega a 23.000.000 km da terra.

Em 22 de fevereiro de 1906 WOLF descobriu Aquiles, o primeiro asteróide troiano, estendendo a região de asteróides no outro sentido, sua distância ao sol 5,248 u.a. ultrapassou pouco a de júpiter que é de 5,203 u.a., e em 1920 WALTER BAADE descobriu Hidalgo em Dergedorf cuja órbita se estende além da órbita de saturno.

Em 1937 KARL REINMUTH descobriu em Heidelberg o asteróide Hermes passando a 600.000 km da terra, podendo apro

ximar-se até 354.000 km de nós.

No ano de 1941, BAADE descobriu no telescópio Schimidt de 1,22 m de focal de Monte Palomar o asteróide Icarus cuja órbita se aproxima 24.000.000 km do sol, mais do que a do planeta mercúrio.

Em 1950, o astrônomo belga SYLVIEŒ AREND descobriu Antiloco que se agrupou aos asteróides troianos.

Desde que WOLF começou utilizar a fotografia muitos asteróides foram descobertos.

Para evitar os descobrimentos ilusórios e permitir a observação de asteróides conhecidos, na época de oposição, o Bureau de Cálculos de Berliner Astronomisches Jahrbuch estabeleceu as órbitas e as efemérides.

Atualmente utilizamos as Efemérides dos Pequenos Planetas, e a de 1978 por exemplo possui 1981 asteróides catalogados com número e nome, datas das oposições, efemérides da oposição para 1978, efemérides do brilho, efemérides dos (planetóides extraordinários) e uma lista crítica das observações dos asteróides no ano anterior. ?!

Alguns deles ainda não possuem órbitas bem determinados e portanto tem muitas órbitas de asteróides a calcular, e evidentemente muitos deles ainda não foram sequer descobertos. Este é um trabalho de pesquisa que ainda temos muito a fazer, quem sabe poderemos ainda descobrir um objeto celeste extraordinário e de grande importância.

1.2 - NOMENCLATURA

Os primeiros asteróides descobertos receberam nomes da mitologia greco-romana e a medida que o vocabulário mitológico exauria, os astrônomos passaram a denominá-los com os nomes de pessoas importantes, sábios, cidades, estados, etc.

Em 1924 o astrônomo E.C.BOWER do Observatório Naval de Washington elaborou uma nomenclatura provisória para o asteróide que fosse descoberto. Tal nomenclatura consiste em designá-lo pelo ano da descoberta seguido de duas letras maiúsculas do alfabeto latino, onde a primeira delas indica a quinzena da descoberta em relação ao ano e a segunda o número de ordem da descoberta na quinzena.

As letras I e J são consideradas iguais para que não ocorra eventuais confusões.

Exemplificando com o asteróide descoberto no dia 3 de março de 1971 por C.U.CESCO que foi chamado 1971 EA e outro descoberto no dia 24 de março do mesmo ano por VAN HOUTEN denominou-se 1971 FE.

Esta nomenclatura provisória se mantém até que a órbita do asteróide seja calculada.

No ano de 1931 a União Astronômica Internacional aprovou um método oficial para designar um asteróide que é definitiva desde que sua órbita esteja determinada e consiste em dar-lhe um número de ordem, ordem em que sua órbita foi calculada, seguido de um nome que é escolhido pelo descobridor.

Assim, encontramos nomes mitológicos tais como Ceres, Aquiles e nomes de sábios tais como Kepler, Newton,

Galileu, Copérnico, Painlevé, Gauss, Lagrange nomes de reis e príncipes como Balduino, Elizabeth, Fabiola, Eugenea, Albertina, Leopoldina e as virtudes como Modéstia, Paciência e ainda nomes de cidades como Brasília e outros nomes interessantes que são dados aos asteróides de acordo com o seu descobridor.

Muitos deles tem sido descobertos e depois perdidos, por isso é que eles são recebem número e nome definitivos quando já existem observações suficientes de modo que suas órbitas podem ser bem determinadas.

1.3 - ÓRBITAS

Todos os asteróides conhecidos possuem órbitas diretas satisfazendo as leis de KEPLER. Geralmente são ligeiramente inclinadas em relação ao plano da eclíptica.

A maioria deles se encontram numa larga faixa entre as órbitas de Marte e Júpiter possuindo então um período de revolução entre 4 e 7 anos com excentricidade que varia entre 0 e 0,2. Portanto a maioria deles se comportam como os grandes planetas e não estão distribuídos aleatoriamente.

Suas massas são minúsculas e portanto não tem influência sobre os planetas, mas por outro lado, um dos fatos mais interessantes é o modo com que seus parâmetros orbitais são influenciados principalmente por Júpiter, o maior dos planetas do nosso sistema solar.

O exemplo mais surpreendente da dominância de Júpiter no cinturão de asteróides é o modo no qual ocorre lacunas em certas regiões, significando que os asteróides não se encon-

tram igualmente distribuídos.

A ausência de asteróides nestas regiões foi observada primeiramente por DANIEL KIRKWOOD (1814-1895) da Universidade de Indiana em 1866 e tais lacunas são chamadas de Lacunas de KIRKWOOD. É interessante observar que estas lacunas são representadas por divisões semelhantes aos intervalos que separam os anéis de saturno, embora não estejam tão separadas.

Analisando o problema das lacunas de KIRKWOOD, verificamos que se o movimento médio de júpiter denotado por μ_J que é $299''$ e o do asteróide é μ_a então as lacunas mais destacadas são dadas por:

$$\frac{\mu_J}{\mu_a} = \frac{p}{q} \quad (1.1)$$

onde p e q são números inteiros primos com o grau de comensurabilidade

$$|p - q| = 1, 2, 3, 4 \quad (1.2)$$

que é inversamente proporcional a largura da lacuna.

Assim, as lacunas ocorrem nas regiões cujas distâncias ao sol tem períodos de revolução que são frações do período de júpiter e por (1.2) temos que os semi-eixos dessas regiões onde há lacunas correspondem a períodos de revolução em ressonância com júpiter de ordem menor ou igual a quatro. Realmente é resultado de uma ressonância entre os períodos, um dos problemas mais interessantes da mecânica celeste.

Perturbações sobre um pequeno corpo celeste com parâmetros orbitais que são simples frações dos de um corpo gran

de próximo é suficientemente forte a ponto de causar uma instabilidade e até uma mudança de órbita.

Contudo, existem acumulações em vez de lacunas para distância que não difere muito da distância de júpiter ao sol, onde a razão em (1.1) é exatamente a unidade.

A situação é especialmente interessante para as distâncias onde o período de revolução dos asteróides é aproximadamente o mesmo que o de júpiter, temos aí os grupos de asteróides chamados troianos, assim chamados porque receberam os nomes dos heróis homéricos da guerra de Tróia, o primeiro deles foi descoberto por WOLF no dia 22 de fevereiro de 1906 e recebeu o nome de Aquiles.

Quando as razões são $2/3$ e $3/4$ correspondem aos grupos de Hilda e Thule respectivamente.

Assim para as razões 1, $2/3$ e $3/4$, onde μ_a é menor do que $500''$ encontram-se as concentrações e não as divisões que também são explicadas pelos fenômenos de ressonância.

O exemplo dos asteróides troianos foi um dos fatos mais importantes para a mecânica celeste. O matemático JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736-1813) havia descoberto uma solução particular para o problema dos três corpos e concluiu que quando os corpos ocupam posições tais que formam um triângulo equilátero a configuração orbital deles torna-se estável e isto é o que acontece com os asteróides troianos formando um sistema com sol e júpiter.

Tal fato não é uma surpresa se pensarmos que em determinados instantes alguns asteróides ao cruzar os pontos

lagrangeanos do sistema sol-júpiter foram capturados ou ficaram oscilando ao redor deles.

A Figura 1.1 é uma ilustração das órbitas dos asteroides troianos.

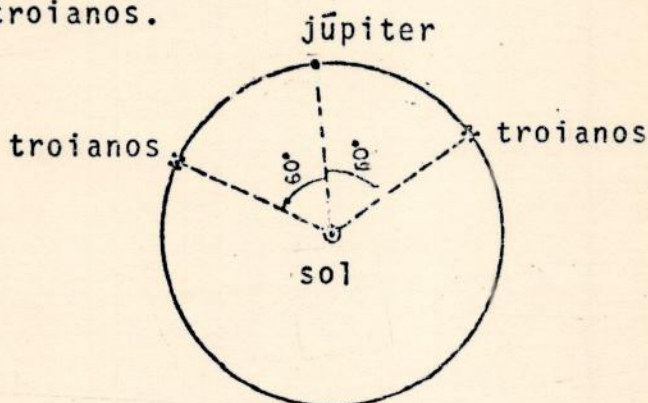


Figura 1.1 - Órbitas dos asteroides troianos

São conhecidos muitos asteroides troianos sendo que a maioria deles precede Júpiter talvez o dobro do número de asteroides troianos que o segue.

A partir dos elementos orbitais dos asteroides se deduz os movimentos próprios, entre os quais as longitudes do nodo e do periélio variam uniformemente, mesmo que a excentricidade e a inclinação permanecem constantes. Assim HIRAYAMA classificou os asteroides em cinco famílias:

Themis com 53 asteroides,
Eos com 58 asteroides,
Coronis com 33 asteroides,
Maria com 17 asteroides e
Flora com 81 asteroides.

Entretanto, atualmente admite-se uma sexta família, a saber, Phocaea.

MILLER os dividiu em sete grupos segundo as distâncias ao sol, como mostra a Figura 1.2, a seguir.

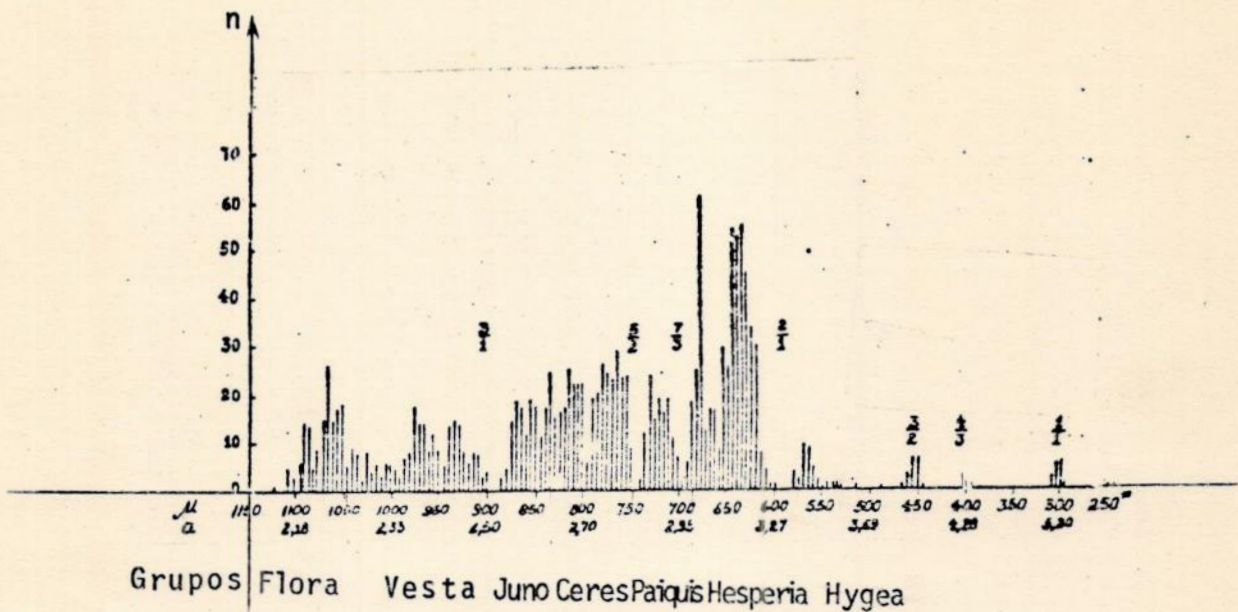


Figura 1.2 - Números de asteróides por intervalos de s'' em movimento diurno médio e os seus grupos.

Certos asteróides se destacam por apresentarem órbitas notáveis, entre eles estão: Eros, Hermes, Ícarus e Hidalgo.

Eros aproxima-se 23.000.000 km da terra.

Hermes chega até 800.000 km perto de nós e é possível que asteróides tem chegado mais próximos, como também algumas crateras meteoríticas pode de fato ter resultado da colisão de algum asteróide com a terra.

Os asteróides que passam bem próximo da terra são de particular interesse para o estudo da escala de distância no nosso sistema solar.

Ícarus, também é um asteróide extraordinário, sua órbita é a mais excêntrica, cerca de 0,83, e possui a menor distância periélica de aproximadamente 280.000 km chegando mais próximo do sol do que mercúrio.

Hidalgo, por outro lado, possui um afélio que vai além da órbita de saturno.

1.4 - DIMENSÕES

Os asteróides são todos tão pequenos que somente poucos deles podem ser distinguidos como sendo não estelar através dos maiores telescópios.

Medidas micrométricas e interferométricas tem determinado os diâmetros para os quatro maiores asteróides, a saber Ceres possui um diâmetro de 770 km, enquanto Pallas, Juno e Vesta possuem diâmetros de 490, 190 e 390 km respectivamente.

Todos os outros asteróides provavelmente possuem diâmetros menores do que 200 km e talvez são uns 200 deles possuem diâmetros maiores do que 50 km e a grande maioria deve possuir somente alguns quilômetros de diâmetro.

Hermes, Amor e Apolo possuem diâmetros de 1,4 km, 1,6 e 2 km respectivamente enquanto que o pequenino Adonis possui 800 m de diâmetro.

A velocidade de escape sobre a terra é de 11,2 km/s e sobre a lua é de 2,4 km/s, enquanto que sobre Ceres esta velocidade é menor do que 0,5 km/s, de modo que uma bala de fuzil lançada verticalmente não voltaria sobre o mesmo, e nos menores asteróides ocorreria o mesmo se fosse lançada uma pedra com a mão.

Nestas condições os asteróides não possuem atmosfera, pois são tão pequenos que a gravidade é demasiadamente

baixa para retê-la.

O diâmetro dos asteróides é medido principalmente através da medida do ângulo, o qual o vemos da terra.

Sendo θ o valor de tal ângulo em segundos de arco e D a distância Terra-Asteróide em unidades astronômicas, pela fórmula do triângulo retângulo se obtém o diâmetro d do asteróide expresso em km dado por:

$$d = 725 D \cdot \theta'' \quad (1.3)$$

Este método serve para os quatro primeiros, enquanto que para os asteróides menores em que o diâmetro não pode ser medido diretamente, uma maneira de estimar os seus tamanhos conhecendo a magnitude visual aparente m , deduzida da comparação com as magnitudes das estrelas e asteróides de referência ou por fotômetro visual, se obtém a magnitude visual absoluta g por:

$$g = m - 5 \log (r \cdot D) \quad (1.4)$$

onde r é a distância sol-asteróide.

Tendo o ângulo de fase P , sob o qual do asteróide se observaria o sol e a terra, pelo qual se determina a fração não iluminada do hemisfério do asteróide voltada para a terra, e o coeficiente de fase f correspondente a taxa de variação da magnitude proporcional ao ângulo de fase, utilizamos a relação

$$g = m - 5 \log (r \cdot D) - f \cdot P \quad (1.5)$$

Ainda utilizando o albedo, razão entre a luz refletida e a luz incidente, expressado pelo produto $p \cdot q$ onde p é o chamado albedo geométrico por BELL, independente da fase e da forma do corpo, MÜLLER estabeleceu a relação:

$$\text{Log}\left(\frac{D \cdot \theta''}{2}\right) = -\text{Log}\sqrt{p} - 0,03 - \frac{g}{5} \quad (1.6)$$

BAUSCHINGER e AREND consideraram um albedo médio para todos os asteróides que é igual a 0,24, a média aritmética dos albedos de mercúrio 0,187 e de marte 0,293, o que possibilitou AREND a considerar uma fórmula simples, expressando o diâmetro em função da magnitude visual absoluta como único argumento, assim:

$$\text{Log } d = 3,6145 - 0,2g \quad (1.7)$$

A partir de 1958 foi adotada uma resolução pela União Astronômica Internacional no Congresso de Moscou, que as magnitudes dos asteróides devemos extrair de uma lista estabelecida pelo astrônomo norte-americano THOMAS GEHRELS. Consequentemente todas as magnitudes utilizadas são magnitudes fotográficas reduzidas ao sistema fotográfico internacional.

Com isso, podemos escrever que

$$\text{Log } d = c - 0,2g \quad (1.8)$$

onde a constante c é determinada conhecendo as magnitudes fotográficas g e os diâmetros dos quatro maiores asteróides determinados por BARNARD que são:

| | Nome | d | g |
|---|-------|-----|------|
| 1 | Ceres | 767 | 4,00 |
| 2 | Palas | 489 | 5,06 |
| 3 | Juno | 193 | 6,33 |
| 4 | Vesta | 386 | 4,22 |

O astrônomo belga JEAN MEEUS encontrou a constante $c = 3,592$ levando em consideração os valores de g determinados pelo astrônomo norte-americano GERARD P. KUIPER e as observações micrométricas dos quatro primeiros e maiores asteroides deduzidas pelo astrônomo EDWARD BARNARD, também norte-americano, assim;

$$\text{Log } d = 3,592 - 0,2g \quad (1.9)$$

AREND utilizou a relação de MEEUS para construir uma tabela que mostra o valor do diâmetro de um asteroide em função da magnitude absoluta g , embora os valores dos diâmetros calculados não são rigorosos, tendo em vista as hipóteses básicas.

Por outro lado devemos ter um erro médio em g de 0,25 magnitudes, donde o erro cometido no cálculo do diâmetro do asteroide é de 12%.

Um outro modo de obter o diâmetro dos asteroides é observar as ocultações dos mesmos pela lua ou as ocultações de estrelas pelos mesmos. A ocultação de asteroides pela lua dura no máximo alguns segundos enquanto que a ocultação de estrelas pelos asteroides pode durar quase dois minutos.

Unindo os 1550 primeiros asteroides num só planeta,

este teria um raio de 673 km e uma massa igual a 1/847 da massa terrestre e extrapolando para 2.000 asteróides este valor segundo AREND seria de 1/840 a massa da terra.

Uma vez determinado o volume surge a questão de conhecer a massa dos asteróides, e muitos pesquisadores recorreram a teoria das perturbações para tentar determinar a massa total do cinturão de asteróides, mas cada um obteve diferentes valores.

URBAIN JEAN JOSEPH LE VERRIER (1811-1877) estimou que a massa total dos asteróides não poderia ultrapassar 0,25 da massa terrestre sem provocar perturbações sobre marte, mas nunca se constatou tais perturbações sobre o planeta marte.

Um outro procedimento consiste em supor uma densidade e conhecendo o diâmetro aproximado obtemos a massa do asteróide.

Assim se a densidade do asteróide for 2,65 entre marte e júpiter a massa total dos asteróides será $6,6 \times 10^{-3}$ da massa terrestre e se a densidade for 5,5 entre a de marte 3,8 e a de mercúrio 6,2 que é a densidade média da terra a massa total dos asteróides será $1,32 \times 10^{-2}$ da massa terrestre.

1.5 - FORMAS E VARIAÇÕES DE BRILHO

Para corpos tão pequenos como os asteróides pode se mostrar que a força gravitacional não é suficiente para induzir a forma esférica, de modo que eles devem ter formas irregulares, o que foi comprovado para alguns asteróides que mostram fases de variação de luminosidade. Através de observações fo

tométricas da variação de brilho de alguns asteróides pode-se chegar ao conhecimento de sua forma e origem.

A fotometria combinada com a polarimetria permite a determinação da forma e da superfície de um dado asteróide embora até agora tem sido determinadas de um modo ainda grosseiro para uns poucos asteróides.

A causa da variação do brilho também pode ser atribuída a rotação de um asteróide esférico com regiões de albedos diferentes ou então um asteróide apresentando faces de constituição distintas.

Alguns pesquisadores ainda acreditam em certos casos na existência de um ou mais companheiros, o que também provoca a variação do brilho devido as suas posições.

O estudo da forma dos asteróides pode muito contribuir para o estudo da origem, se irregular seriam restos de uma explosão ou de colisões.

Eros por exemplo possui a rotação no sentido contrário aos ponteiros do relógio e dura aproximadamente 5h17min. Em geral os períodos de rotação variam de 2 até mais de 10 horas para alguns asteróides, supondo que a variação de luz recebida é devido as suas irregularidades.

A figura 1.3 dá uma representação da curva de luz para o asteróide Juno.

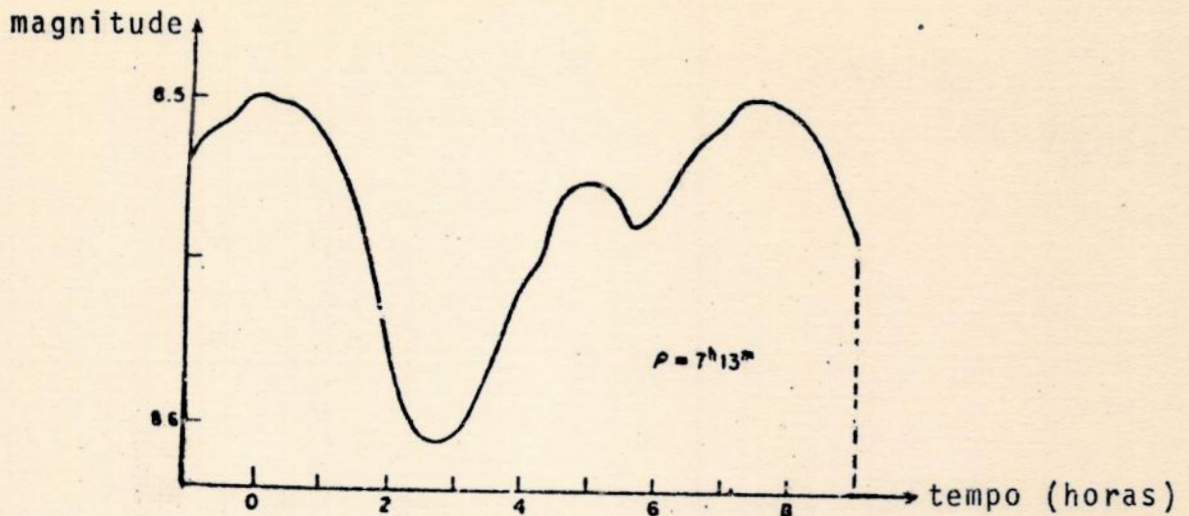


Figura 1.3 - Curva de luz do asteroide Juno

Observamos que o período de rotação de Juno é de aproximadamente 7h13min, levando em consideração que a curva de luz varia com o ângulo que vemos o asteroide em sua órbita.

A luminosidade de um asteroide está parcialmente num plano perpendicular ao plano formado por sol-asteroide-terra, no máximo de 9/1000 para um ângulo de fase de 140°.

O espectro da luz solar refletida pelos asteroides tem mostrado novas indicações de suas composições mineralógicas, suas origens, suas evoluções e suas relações com os meteoritos como mostra o trabalho de CHAPMAN [3].

A intensidade de brilho aparente I de um asteroide refletindo a luz solar é dado por:

$$i = \frac{I_1}{r^2 D^2} \quad (1.10)$$

onde r e D são respectivamente as distâncias do asteroide ao sol e à terra e I_1 é o brilho absoluto, isto é, o brilho que o asteroide teria caso estivesse situado a uma distância

unitária desses dois astros, neste caso $r = D = 1$.

Como o brilho médio do asteróide I_0 , durante a oposição corresponde à distância a do sol e $a-1$ da terra, temos que:

$$I_0 = \frac{I_1}{a^2(a-1)^2} \quad (1.11)$$

Geralmente, ao invés de utilizar as intensidades de brilho aparente I , absoluta I_1 e média I_0 leva-se em consideração a lei de POGSON, utilizando as magnitudes aparente m , absoluta g e a magnitude média na oposição m_0 .

Utilizando então (1.5) tais grandezas são interligadas por:

$$g = m - 5 \text{ Log}(r.D) - f.P \quad e$$

$$g = m_0 - 5 \text{ Log } a(a-1) - f.P \quad (1.12)$$

Como vimos em 1.4 as observações fotométricas permitem determinar também por via indireta o diâmetro d de um asteróide além da rotação.

A maioria dos asteróides reflete 7% da luz solar incidente como acontece com a superfície lunar, cujo albedo é 7,3%.

O espectro de asteróides é análogo ao da luz solar, não se constatando nenhum traço de emissão própria.

1.6 - ORIGEM DOS ASTERÓIDES

Para que uma teoria seja viável, digamos que ela deve explicar todos os fatos da observação e existem muitas continuações das principais teorias ligadas às cosmogonias do sistema solar para explicar a origem dos asteróides, por exemplo:

A explosão do planeta de OLBERS, completada por YOUNG, que considerou explosões secundárias subsequentes para justificar a existência das famílias distintas.

No entanto, tudo parece indicar que os asteróides são oriundos da desintegração de um planeta, ou provenientes da matéria de um planeta que não se teria condensado.

Baseando-se na existência das famílias de meteoros, tem-se a hipótese de que essas famílias seriam planetas maiores ainda em condensação, segundo a teoria do "Jet Streams", do físico sueco HANNES ALFVÉN.

1.7 - UTILIDADE

Eros e outros asteróides foram utilizados para a determinação da distância terra-sol.

Através das perturbações exercidas sobre o movimento dos asteróides podemos determinar as massas dos planetas, principalmente a dos planetas inferiores mercúrio e vênus que são desprovidos de satélites.

O estudo dos asteróides é utilizado indiretamente para melhorar o conhecimento da órbita terrestre, e é possível detetar as irregularidades da rotação terrestre.

Todos estes fatos anteriores servem para a determinação de erros sistemáticos das posições de estrelas.

O avanço do periélio de Icaro, que é cinco vezes o de Mercúrio, isto é, 43" por século, se ajusta a relatividade geral.

A determinação cada vez mais precisa de dados relativos aos asteróides torna-se de grande importância para o estudo dos problemas da mecânica celeste; em particular o estudo dos satélites artificiais, da astrofísica e da cosmogonia. Suas órbitas permitem testar cálculos de perturbação no problema dos três corpos e, sua observação fotométrica oferece importantes dados astrofísicos. Enfim, os asteróides contribuem para o aperfeiçoamento de nosso conhecimento do sistema solar como um todo.

CAPÍTULO 2ALGUMAS FÓRMULAS DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

Os princípios teóricos da astronomia esférica e suas aplicações práticas em astrometria depende fundamentalmente da geometria de uma superfície esférica, desde que um fenômeno é observado, imediatamente ele é representado em termos de relações entre arcos e ângulos na esfera celeste.

Como na maioria dos trabalhos que versam sobre a astronomia esférica e astrometria as fórmulas da trigonometria esférica são realmente fundamentais.

As fórmulas que encontramos em alguns textos como em [12], [13] e outros em geral quando são deduzidas com detalhes não são feitas através da análise vetorial. Tendo em vista que elas serão de grande importância para o estudo do método das dependências, o qual daremos um tratamento vetorial vamos deduzí-las utilizando alguns conceitos da análise vetorial.

A análise vetorial se iniciou nos meados do século passado e atualmente é parte essencial da matemática necessária ao astrônomo e demais cientistas.

Inicialmente daremos alguns conceitos elementares de análise vetorial.

2.1 - PRELIMINARES SOBRE ANÁLISE VETORIAL

Um escalar é uma quantidade física caracterizada pela

sua intensidade, e é representada por um número, como por exemplo o comprimento, massa, tempo, etc... .

Entretanto, um vetor é uma quantidade física caracterizada por uma intensidade, que é o módulo, uma direção e um sentido, como por exemplo a velocidade, aceleração, força, etc... .

Graficamente um vetor \vec{u} é representado por um segmento da reta orientado \vec{OP} , como ilustra a Figura 2.1.

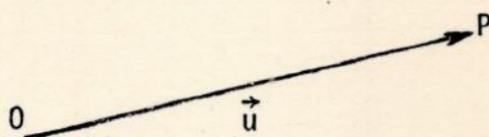


Figura 2.1 - Representação geométrica do vetor \vec{u}

O vetor \vec{u} tem a direção e o sentido de O para P do segmento de reta orientado \vec{OP} .

O comprimento $|\vec{PQ}|$ do segmento de reta exprime a intensidade, módulo ou o valor absoluto do vetor \vec{u} , que é representado por $|\vec{u}|$.

Um vetor \vec{u} é unitário se o seu módulo é igual a um, isto é,

$$|\vec{u}| = 1$$

O produto escalar ou produto interno de dois vetores \vec{u} e \vec{v} é um escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dado pelo produto dos módulos de \vec{u} e \vec{v} pelo co-seno do ângulo entre eles, isto é,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad (2.1)$$

onde (\vec{u}, \vec{v}) é o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} e $0 \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$.

O produto escalar goza das propriedades comutativa e distributiva com relação a adição de vetores, isto é, se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são três vetores quaisquer temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Pela definição de produto escalar entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} , não nulos, podemos determinar o ângulo formado entre eles, assim:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \quad (2.3)$$

Observamos que a condição necessária para que os mesmos sejam perpendiculares é que o produto escalar entre eles seja nulo, isto é,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Num sistema de coordenadas retangulares $Oxyz$ onde \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são os vetores unitários triortogonais correspondentes aos eixos x , y e z respectivamente, qualquer vetor \vec{u} pode ser escrito como uma combinação linear deles, isto é,

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \quad (2.4)$$

onde u_1 , u_2 e u_3 são as coordenadas do vetor \vec{u} que também pode ser representado pela terna ordenada (u_1, u_2, u_3) , ou seja,

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3),$$

pois tais coordenadas do vetor são as respectivas projeções de

\vec{u} sobre os eixos coordenados, assim:

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = u_1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = u_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{k} = u_3$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \\ \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \\ \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \end{array}$$

Em termos das suas coordenadas ou componentes o produto escalar entre \vec{u} e \vec{v} pode ser escrito como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}) \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k})$$

donde;

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

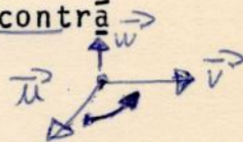
ou na forma de somatório:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$$

(2.5)

Vimos que o produto escalar entre dois vetores é um escalar, isto é, um número real, agora definiremos o produto vetorial entre dois vetores que é um novo vetor.

O produto vetorial ou externo entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} é um vetor \vec{w} tal que o módulo de \vec{w} é o produto dos módulos de \vec{u} e \vec{v} pelo seno do ângulo formado entre eles, além disso \vec{w} é perpendicular ao plano formado por \vec{u} e \vec{v} e aponta na direção de rotação de \vec{u} para \vec{v} no sentido contrário aos ponteiros do relógio.



O produto vetorial \vec{w} de \vec{u} e \vec{v} é denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$, assim;

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\angle \vec{u}, \vec{v})$$

(2.6)

onde o ângulo (\vec{u}, \vec{v}) entre \vec{u} e \vec{v} é tal que $0 \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$.

O produto vetorial goza das propriedades anti-comutativa e distributiva com relação a adição de vetores, isto é,

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= -\vec{v} \times \vec{u} \\ \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}\end{aligned}\tag{2.7}$$

Podemos observar também que uma condição necessária para que dois vetores \vec{u} e \vec{v} não nulos sejam paralelos é que o seu produto vetorial seja nulo, isto é,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

A direção de \vec{u} , \vec{v} e $\vec{u} \times \vec{v}$ nesta ordem tem a mesma orientação que os vetores básicos \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} representados pela indicação dos dedos da mão esquerda.

Em coordenadas cartesianas temos que:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\tag{2.8}$$

e resolvendo o determinante acima vem que;

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}$$

O módulo do produto vetorial $|\vec{u} \times \vec{v}|$ de \vec{u} e \vec{v} representa geometricamente a área do paralelogramo de lados $|\vec{u}|$ e $|\vec{v}|$.

Por meio de produtos escalares e vetoriais de três vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} podemos formar produtos da forma $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$,

$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

O produto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ se chama produto misto ou tríplo produto escalar e satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}\end{aligned}\tag{2.9}$$

Além disso o valor absoluto do produto escalar misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ representa o volume do paralelepípedo de arestas \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .

O produto $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ é chamado de tríplo produto vetorial e não goza da propriedade associativa mas satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} &= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Tais propriedades são facilmente demonstradas, apenas um pouco trabalhosa quando utilizamos as suas componentes.

Podemos também formar o produto com quatro vetores por exemplo $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{z})$ e $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{z})$ que gozam das seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{z}) &= (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{z}) - (\vec{u} \cdot \vec{z})(\vec{v} \cdot \vec{w}) \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{z}) &= \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w} \times \vec{z}) - \vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{z}) \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{z}) &= \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{z}) - \vec{z}(\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w})\end{aligned}\tag{2.11}$$

e fazendo $\vec{u} = \vec{w}$ em (2.11) obtemos:

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{z}) &= (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{z}) - (\vec{u} \cdot \vec{z})(\vec{v} \cdot \vec{v}) \\
 (\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{z}) &= (\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{z})\vec{u}
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

que também são fáceis de serem demonstradas.

2.2 - LEI DOS CO-SENOS PARA UM TRIÂNGULO ESFÉRICO

Consideremos um triângulo ABC sobre a esfera de raio unitário e centro no ponto 0 e seja OABC o ângulo triédrico subtendido por ABC como na Figura 2.2 abaixo:

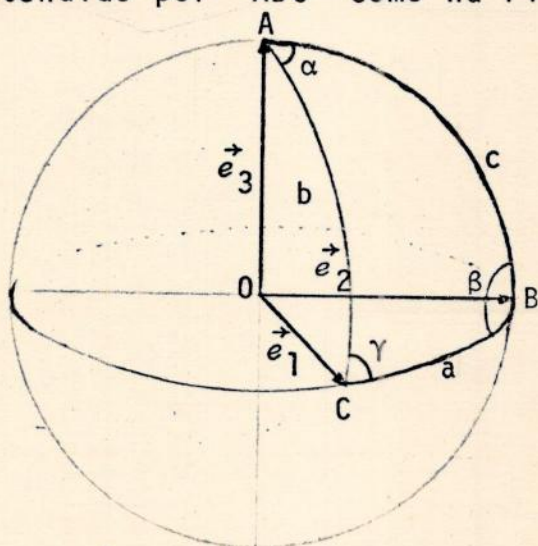


Figura 2.2 - O triângulo esférico ABC

Sejam α , β e γ os ângulos do tal triângulo e a , b e c os seus lados que são arcos da esfera unitária.

Uma vez que estamos interessados na esfera celeste que é considerada raio unitário, os seus lados a , b e c são exatamente iguais aos respectivos ângulos planos BOC, AOC e AOB.

Estamos interessados em obter as relações entre os ângulos α , β e γ e os lados a , b e c do triângulo esférico ABC que são ângulos faces do ângulo triédrico OABC, e

para tais deduções utilizaremos alguns conceitos da análise vetorial vistos em 2.1.

Introduziremos então os vetores unitários \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 com origem no centro O da esfera celeste e extremidades nos vértices do triângulo esférico A , B e C respectivamente.

Observando o fato de que um ângulo entre dois planos é exatamente igual ao ângulo formado pelas suas normais, temos que o ângulo α entre os planos OAC e OAB é exatamente igual ao ângulo entre as normais a esses planos.

Denotando o vetor normal ao plano OAB por \vec{n}_{12} que possui evidentemente a mesma direção da reta normal a este plano, temos que o mesmo é obtido pelo produto vetorial dos vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 , isto é;

$$\vec{n}_{12} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \quad (2.13)$$

Analogamente as normais aos planos OAC e OBC são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \vec{n}_{13} &= \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \\ \vec{n}_{23} &= \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Através da definição de produto escalar podemos obter o valor do ângulo α entre os planos OAB e OAC , assim utilizando (2.3) e os vetores normais a estes planos temos:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_{12} \cdot \vec{n}_{13}}{|\vec{n}_{12}| |\vec{n}_{13}|} \quad (2.15)$$

e pela definição dos vetores normais dadas por (2.13) e (2.14), temos que:

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| |\vec{e}_1 \times \vec{e}_3|} \quad (2.16)$$

Segue de (2.6) que:

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = |\vec{e}_1| |\vec{e}_2| \sin b$$

pois b é o ângulo formado pelos vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 .

Lembrando o fato de que os vetores \vec{e}_i , $i=1,2,3$ são unitários temos:

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = \sin b \quad (2.17)$$

Analogamente segue que:

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_3| = \sin c \quad (2.18)$$

Além disso, demonstrando e utilizando (2.12)₁ temos:

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_1 \cdot [\vec{e}_2 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)]$$

pela propriedade (2.9)₂, e também;

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_1 \cdot [(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_1 - (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_3]$$

pela propriedade (2.10)₁, donde segue que:

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1)(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) - (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3)(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1)$$

Agora observamos a Figura 2.2 e lembramos o fato dos vetores acima serem unitários temos que:

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = 1 \cos a - \cos c \cos b \quad (2.19)$$

Substituindo (2.17), (2.18) e (2.19) em (2.16) temos:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin b \sin c}$$

ou então:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad (2.20)$$

Em outras palavras, temos que num triângulo esférico o co-seno de qualquer lado é igual ao produto dos co-senos dos outros dois lados somado ao produto dos senos desses mesmos lados pelo co-seno do ângulo oposto ao primeiro lado.

Permutando os valores de a , b e c obtemos as fórmulas análogas para $\cos b$ e $\cos c$, isto é,

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Tais fórmulas representam o primeiro grupo de fórmulas fundamentais da trigonometria esférica, que é a lei dos co-senos, para os lados de um triângulo esférico.

A lei dos co-senos, para os ângulos de um triângulo esférico é análoga e para demonstrá-la basta considerar o triângulo polar ou suplementar $A'B'C'$ de ABC , para o qual

$$\begin{array}{ll}
 a' = 180^\circ - \alpha & \alpha' = 180^\circ - a \\
 b' = 180^\circ - \beta & e \quad \beta' = 180^\circ - b \\
 c' = 180^\circ - \gamma & \gamma' = 180^\circ - c
 \end{array}$$

donde aplicando (2.20) temos que:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \cos(180^\circ - \beta) \cos(180^\circ - \gamma) + \sin(180^\circ - \beta) \sin(180^\circ - \gamma) \cos \alpha'$$

Observando que:

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

e

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

para qualquer ângulo θ , vem que:

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos(180^\circ - a)$$

ou então:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \quad (2.21)$$

e permutando α , β e γ obtemos as demais fórmulas referente a lei dos co-senos para os ângulos de um triângulo esférico.

2.3 - LEI DOS SENOS PARA UM TRIÂNGULO ESFÉRICO

Deduziremos agora a lei dos senos para um triângulo esférico como o da Figura 2.2.

Segue de (2.6) que o seno do ângulo α pode ser dado por:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n}_{12} \times \vec{n}_{13}|}{|\vec{n}_{12}| |\vec{n}_{13}|} \quad (2.22)$$

ou seja

$$\text{sen } \alpha = \frac{|(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| |\vec{e}_1 \times \vec{e}_3|} \quad (2.23)$$

Temos por (2.12)₂ que:

$$|(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)| = |(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \vec{e}_1|$$

que nos dá:

$$|(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)| = |\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3| |\vec{e}_1|$$

Como $|\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3|$ representa o volume V do paralelepípedo de arestas \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 e $|\vec{e}_i| = 1$ $i=1,2,3$ temos que:

$$|(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)| = V$$

donde segue que (2.23) torna-se:

$$\text{sen } \alpha = \frac{V}{\text{sen } b \text{ sen } c} \quad (2.24)$$

Do mesmo modo, temos que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{|(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)|}{|\vec{e}_3 \times \vec{e}_2| |\vec{e}_2 \times \vec{e}_1|}$$

Utilizando os mesmos resultados que usamos na dedução de (2.24) temos que:

$$\text{sen } \beta = \frac{V}{\text{sen } a \text{ sen } c}, \quad (2.25)$$

e também, segue que

$$\text{sen } \gamma = \frac{V}{\text{sen } a \text{ sen } b} \quad (2.26)$$

De (2.24), (2.25) e (2.26) segue que:

$$V = \text{sen } \alpha \text{ sen } b \text{ sen } c$$

$$V = \text{sen } \beta \text{ sen } a \text{ sen } c$$

$$V = \text{sen } \gamma \text{ sen } a \text{ sen } b$$

e as igualdades abaixo são verificadas,

$$\text{sen } \alpha \text{ sen } b \text{ sen } c = \text{sen } \beta \text{ sen } a \text{ sen } c = \text{sen } \gamma \text{ sen } a \text{ sen } b$$

Como os lados a , b e c do triângulo esférico não são nulos dividimos toda a expressão acima pelo produto

$$\text{sen } a \text{ sen } b \text{ sen } c$$

e obtemos

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } c} \quad (2.27)$$

que é a lei dos senos para um triângulo esférico.

Em outras palavras podemos enunciar a lei dos senos para um triângulo esférico do seguinte modo:

Em qualquer triângulo esférico os senos dos ângulos são proporcionais aos senos dos lados opostos.

A lei dos senos também é conhecida como analogia dos senos ou módulo do triângulo esférico.

2.4 - FÓRMULA DO CO-SENO ESTENDIDA

Sabemos pela lei dos co-senos para os lados deduzidas em 2.2 que:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad (2.28)$$

e

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta \quad (2.29)$$

Multiplicando agora (2.28) por $\cos c$ obtemos;

$$\cos a \cos c = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos c \cos \alpha \quad (2.30)$$

Comparando o valor acima de $\cos a \cos c$ com o valor do mesmo obtido de (2.29) e utilizando que:

$$\sin^2 c = 1 - \cos^2 c$$

temos:

$$\cos b \sin^2 c - \sin b \sin c \cos c \cos \alpha = \sin a \sin c \cos \beta$$

Dividindo ambos os membros por $\sin c$ obtemos:

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha \quad (2.31)$$

que é a fórmula do co-seno estendida.

De um modo análogo temos:

$$\sin a \cos \gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha \quad (2.32)$$

e ainda os dois pares de fórmulas análogas a (2.31) e (2.32), a saber:

$$\text{sen } b \cos \alpha = \cos a \text{ sen } c - \text{sen } a \cos c \cos \beta$$

$$\text{sen } b \cos \gamma = \cos c \text{ sen } a - \text{sen } c \cos a \cos \beta$$

$$\text{sen } c \cos \alpha = \cos a \text{ sen } b - \text{sen } a \cos b \cos \gamma$$

$$\text{sen } c \cos \beta = \cos b \text{ sen } a - \text{sen } b \cos a \cos \gamma$$

Com isto estabelecemos neste capítulo um conjunto de fórmulas que iremos utilizar na dedução da fórmula fundamental para o método das dependências.

$$\text{sen } 1^\circ \cos 2^\circ = - \cos 3^\circ \cos 4^\circ \text{sen } 5^\circ + \text{sen } 3^\circ \cos 5^\circ$$

CAPÍTULO 3MÉTODO DAS DEPENDÊNCIAS

A utilização da fotografia é de grande importância na pesquisa astronômica e desde 1891 a fotografia tornou-se fundamental na pesquisa de asteróides.

Os métodos de redução da posição de asteróides e outros objetos celestes através das placas fotográficas, estabelecem uma correspondência biunívoca entre a placa fotográfica, isto é, o plano das coordenadas medidas (x,y) e o plano tangente à esfera celeste que é o plano das coordenadas padrões (X,Y) . *bijecção*

Tal correspondência é determinada por intermédio das coordenadas padrões de um certo número de estrelas de referências, das quais se conhecem as suas coordenadas equatoriais celestes; ascensões retas e declinações fornecidas em catálogos estelares e as coordenadas medidas de suas imagens sobre a placa fotográfica.

Embora as posições reais sejam submetidas às influências de diferentes fatores instrumentais tais como ópticos ou mecânicos, a aberração e a refração, as fórmulas de transformações devem considerá-las permitindo determinar as coordenadas padrões (X,Y) de um asteróide de coordenadas equatoriais desconhecidas a partir das coordenadas medidas (x,y) da imagem desse asteróide.

Assim as coordenadas equatoriais do asteróide podem

ser calculadas a partir do conhecimento das coordenadas padrões.

3.1 - INTRODUÇÃO AO MÉTODO

A placa fotográfica e a objetiva constituem os elementos principais de uma câmara astro-fotográfica.

Sejam O_1 e O_2 os respectivos pontos nodais principais primário e secundário de uma objetiva, e para facilidade de compreensão supomos coincidentes.

Imaginamos a esfera celeste de centro O e raio unitário como na Figura 3.1 abaixo:

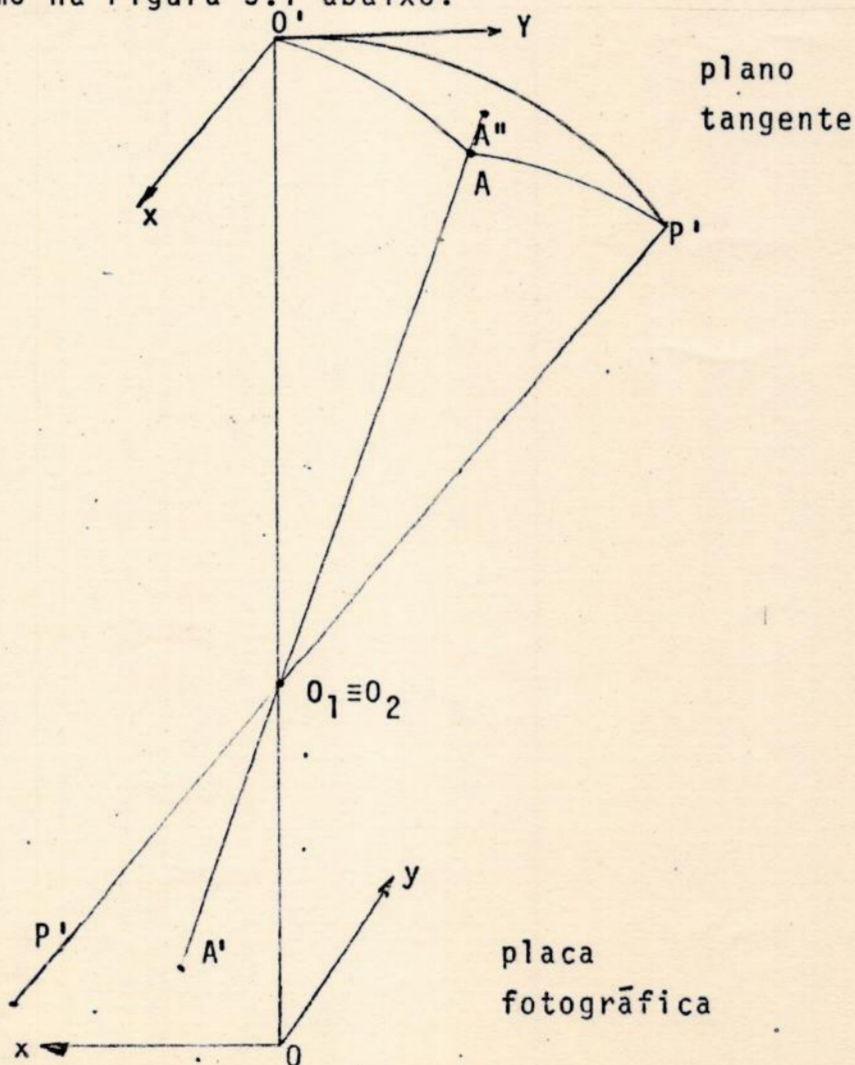


Figura 3.1 - Homografia entre o plano tangente e a placa fotográfica.

A direção do eixo óptico coincide com a reta OO' , onde o plano tangente em O' , perpendicular a esse eixo é paralelo à placa fotográfica e ao plano focal.

Cada astro dá um ponto análogo sobre a esfera celeste e sobre o plano tangente, assim um astro A na esfera celeste terá como imagem um ponto A' na placa fotográfica um ponto A'' no plano tangente à esfera celeste.

O ponto base O é a projeção do centro óptico da objetiva de distância focal f , sobre o plano focal que faz com o eixo óptico um ângulo reto.

Supondo que a placa fotográfica coincide com o plano focal temos a seguinte relação entre as coordenadas medidas e as coordenadas padrões:

$$\begin{aligned}x &= X f \\y &= Y f\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde f é a distância focal da objetiva.

As coordenadas padrões, isto é, as coordenadas da projeção de um corpo celeste no plano tangente são mostradas na Figura 3.2 a seguir:

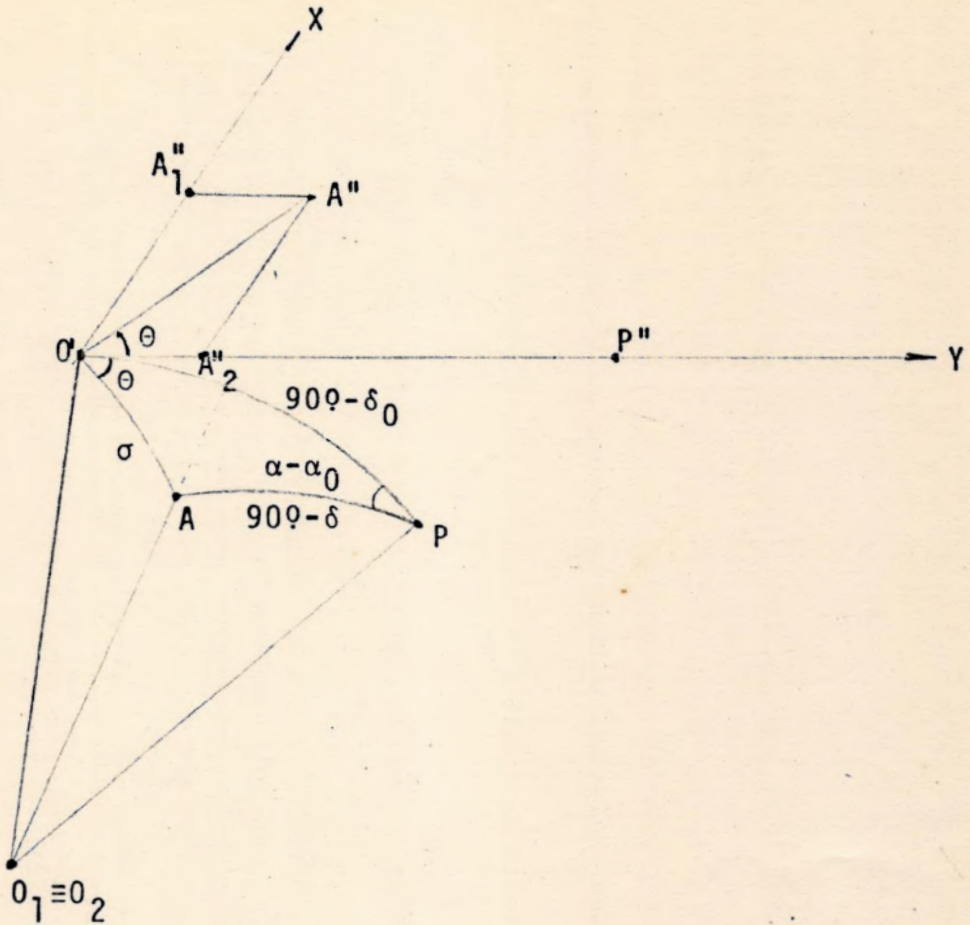


Figura 3.2 - As coordenadas padrões

O ponto P representa o polo celeste a A um astro enquanto que P'' e A'' as respectivas projeções destes dois pontos no plano tangente.

O eixo dos X coincide com a reta O'A'', perpendicular ao eixo dos Y.

Sendo θ o ângulo PO'A e considerando os triângulos O'A''A e O_1A''O' temos:

$$X = O'A'' \operatorname{sen} \theta$$

$$Y = O'A'' \operatorname{cos} \theta$$

(3.2)

Designando o arco AO' por σ temos:

$$\begin{aligned} O'A'' &= \operatorname{tg} O'O_1A \\ O'A'' &= \operatorname{tg} \sigma \end{aligned} \quad (3.3)$$

Determinamos as expressões das coordenadas x e y associando as relações (3.2) e (3.3) e substituindo em (3.1), assim:

$$\begin{aligned} x &= f \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta \\ y &= f \operatorname{tg} \sigma \operatorname{cos} \theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

Conhecendo-se x , y e f pode-se calcular σ e θ .

Vamos estabelecer a relação entre as coordenadas padrões e equatoriais e o nosso problema é o de exprimir σ e θ em função das coordenadas equatoriais celestes.

O eixo dos Y é orientado positivamente para leste de modo que os valores crescentes de X correspondem aos valores crescentes de ascensão reta.

Os segmentos de retas $O'A''_1$ e $O'A''_2$ representam as coordenadas padrões do astro A , e as coordenadas equatoriais celestes de A e O' são designadas por (α, δ) e (α_0, δ_0) respectivamente.

Aplicando as fórmulas fundamentais da trigonometria esférica que estudamos no capítulo 2, ao triângulo esférico fundamental PAO' temos:

$$\begin{aligned} PA &= 90^\circ - \delta \\ PO' &= 90^\circ - \delta_0 \\ APO' &= \alpha - \alpha_0 \end{aligned}$$

e daí segue que:

$$\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(\alpha - \alpha_0) \cos \delta$$

$$\operatorname{sen} \sigma \cos \theta = \operatorname{sen} \delta \cos \delta_0 - \cos \delta \operatorname{sen} \delta_0 \operatorname{sen}(\alpha - \alpha_0)$$

$$\cos \sigma = \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)$$

Dividindo a primeira e a segunda equação acima pela terceira obtemos respectivamente:

$$\operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \alpha_0) \cos \delta}{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)} \quad (3.6)$$

$$\operatorname{tg} \sigma \cos \theta = \frac{\operatorname{sen} \delta \cos \delta_0 - \cos \delta \operatorname{sen} \delta_0 \operatorname{sen}(\alpha - \alpha_0)}{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)} \quad (3.7)$$

que são as duas primeiras equações fundamentais da astrometria plana. ??

Poderemos inverter o problema, isto é, procurar as coordenadas equatoriais (α, δ) do astro uma vez conhecida as coordenadas equatoriais do centro da chapa fotográfica (δ_0, δ_0) e as coordenadas medidas (x, y) do astro.

Aplicando novamente as fórmulas fundamentais vistas no capítulo anterior ao triângulo esférico PAO' obtemos:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0) = \frac{\operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta}{\cos \delta_0 - \operatorname{sen} \delta_0 \operatorname{tg} \sigma \cos \theta} \quad (3.8)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\cos(\alpha - \alpha_0) \operatorname{sen} \delta_0 + \cos \delta_0 \operatorname{tg} \sigma \cos \theta}{\cos \delta_0 - \operatorname{sen} \delta_0 \operatorname{tg} \sigma \cos \theta} \quad (3.9)$$

3.2 - O MÉTODO DAS DEPENDÊNCIAS

Na determinação da posição desconhecida de um asteróide ou um objeto celeste em coordenadas equatoriais celestes, obtida a sua posição na placa fotográfica, intervem muitos erros de difícil determinação tais como o valor da escala da placa, a orientação da placa no instrumento de medida, etc... .

O método das dependências foi elaborado pelo astrônomo norte-americano FRANK SCHLENSINGER e mais tarde aperfeiçoado por muitos outros pesquisadores, entre eles AREND. Tal método permite a obtenção rápida e precisa das coordenadas de um objeto desconhecido em pouco tempo.

O método das dependências consiste no uso de um ponto teórico imaginário que denominamos de centro das dependências ou baricentro, que deve coincidir com a posição do objeto celeste, no caso o asteróide, cujas coordenadas são desconhecidas. Acontece porém, que nem sempre, tal coincidência se verifica e a pequena diferença entre a posição do asteróide e o centro das dependências não afetará o resultado. †

A principal vantagem do método é a fácil determinação dos efeitos das estrelas de referências no resultado obtido. *

Vamos agora descrevê-lo.

Sejam (x_0, y_0) as coordenadas retilíneas de um asteróide medidas em uma placa fotográfica cuja posição queremos determinar e (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ as coordenadas retilíneas medidas na placa, das n estrelas de referência, escolhidas como ponto de referência que formam um polígono cujo interior contém o asteróide cuja posição queremos determinar.

As coordenadas equatoriais celestes das n estrelas de referência ou base são denotadas por (α_i, δ_i) ; ascensão re \tilde{c} ta e declinação respectivamente e seus movimentos pr \tilde{o} prios $(\mu_{\alpha_i}, \mu_{\delta_i})$ são extraídos para um equin \tilde{o} cio m \tilde{e} dio, por exemplo o de 1950,0 de um cat \tilde{a} logo estelar tais como o SAO (Shmithsonian Astrophysical Observatory), YALE etc..., por com \tilde{p} aração da placa com a respectiva carta celeste.

Suas coordenadas (x_i, y_i) na placa são medidas com um medidor de placas por exemplo o coordenat \tilde{o} grafo Ascorecord do Observat \tilde{o} rio do Valongo da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Do mesmo modo são medidas as coordenadas dos aster \tilde{o} ides que estamos interessados em determinar sua posiç \tilde{a} o no c \tilde{e} u.

Podemos ent \tilde{a} o equacionar as coordenadas padr \tilde{o} es do aster \tilde{o} ide como funç \tilde{a} es polinomiais das coordenadas medidas das estrelas de refer \tilde{e} ncia, isto \tilde{e} ,

$$X = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x^i y^j$$

$$Y = \sum_{i,j=0}^n b_{ij} x^i y^j$$

e as coordenadas equatoriais celestes do aster \tilde{o} ide como funç \tilde{a} es de suas coordenadas padr \tilde{o} es, isto \tilde{e} ,

$$\alpha = f(X, Y)$$

$$\delta = g(X, Y)$$

E para controle são igualmente medidas as coordenadas de outras estrelas da placa além das estrelas de referência que são chamadas estrelas testes.

SCHLESINGER, mostrou que a posição reduzida do asteroide que procuramos suas coordenadas pode ser reduzida como uma função linear explícita das coordenadas medidas.

O método das dependências assim chamado pode ser empregado com ou sem o auxílio das coordenadas padrões.

Em alguns casos tal método também admite solução gráfica.

Sejam então:

(X_i, Y_i) as coordenadas padrões das estrelas.

(x_i, y_i) as coordenadas medidas das estrelas.

(x_0, y_0) as coordenadas medidas do baricentro.

(X_0, Y_0) as coordenadas padrões do baricentro.

(α_0, δ_0) as coordenadas equatoriais celestes do baricentro.

Para $n = 5$ estrelas podemos ver a configuração na Figura 3.3.

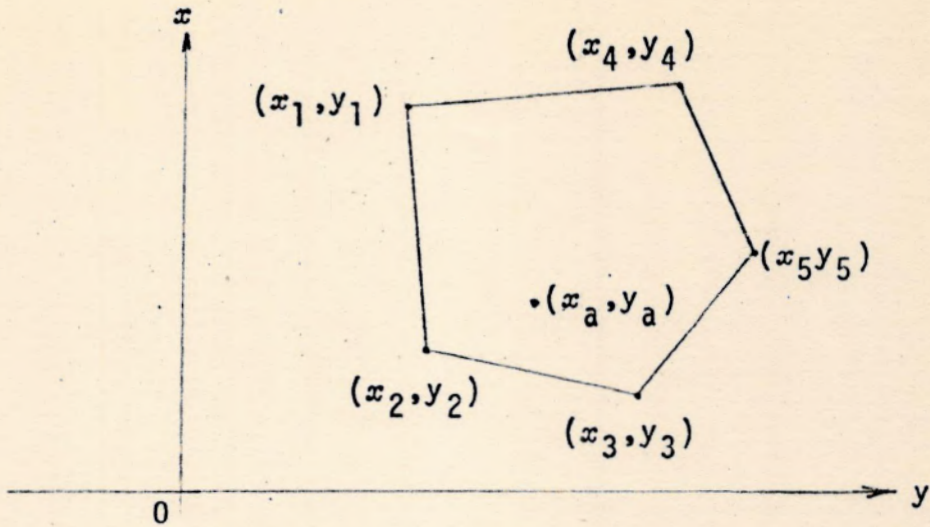


Figura 3.3 - Coordenadas do asteróide e das 5 estrelas de referência na placa fotogrãfica.

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{i=1}^n D_i x_i \\ y_0 &= \sum_{i=1}^n D_i y_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde n é o número de estrelas de referência e as dependências D_i são determinadas por:

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{i=1}^n D_i x_i \\ y_0 &= \sum_{i=1}^n D_i y_i \end{aligned} \quad (3.11)$$

com a condição de que:

$$\sum_{i=1}^n D_i = 1 \quad (3.12)$$

As relações (3.10) e (3.11) podem ser escritas de vido a homografia entre a placa $x_0 y_0$ e o plano tangente XAY .

As dependências D_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são tais que a função

$$f(D_i) = \sum_{i=1}^n D_i^2$$

é mínima pelo método dos mínimos quadrados.

Portanto devemos calcular o mínimo de tal função su-
jeito às restrições:

$$\begin{aligned} x_0 - \sum_{i=1}^n D_i x_i &= 0 \\ y_0 - \sum_{i=1}^n D_i y_i &= 0 \\ 1 - \sum_{i=1}^n D_i &= 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Empregando o método dos multiplicadores de LAGRANGE para achar os extremos condicionados da função $f(D_i)$ temos:

$$\frac{d}{dD_i} \left[\sum_{i=1}^n D_i^2 + A(x_0 - \sum_{i=1}^n D_i x_i) + B(y_0 - \sum_{i=1}^n D_i y_i) + C(1 - \sum_{i=1}^n D_i) \right] = 0$$

onde $\frac{d}{dD_i}$ representa a derivada com relação a D_i e A , B e C são os multiplicadores de LAGRANGE.

Efetuando os cálculos, obtemos:

$$2 \sum_{i=1}^n D_i - A \sum_{i=1}^n x_i - B \sum_{i=1}^n y_i - C \sum_{i=1}^n 1 = 0$$

ou então:

$$\sum_{i=1}^n (2D_i - Ax_i - By_i - C) = 0$$

donde vem que:

$$2D_i - Ax_i - By_i - C = 0$$

ou seja:

$$D_i = \frac{A}{2} x_i + \frac{B}{2} y_i + \frac{C}{2}$$

e fazendo $a = \frac{A}{2}$, $b = \frac{B}{2}$ e $c = \frac{C}{2}$ temos que:

$$D_i = ax_i + by_i + c \quad (3.14)$$

Substituindo este valor de D_i obtido no sistema (3.13) temos:

$$x_0 - \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i y_i + cx_i) = 0$$

$$y_0 - \sum_{i=1}^n (ax_i y_i + by_i^2 + cy_i) = 0$$

$$1 - \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i + c) = 0$$

que é um sistema de três equações lineares a três incógnitas a , b e c , o qual podemos escrevê-lo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Supondo inicialmente que a origem coincide com o centro de gravidade da configuração das estrelas temos:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 0$$

logo o sistema (3.15) torna-se:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i & 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

cuja solução pelo método de CRAMER é:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ y_0 & \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{vmatrix} \cdot n}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{vmatrix} \cdot n}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & x_0 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & y_0 \end{vmatrix} \cdot n}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{vmatrix} \cdot n}$$

$$c = \frac{1}{n}$$

ou então resolvendo os determinantes anteriores, vem que:

$$a = \frac{x_0 \sum_{i=1}^n y_i^2 - y_0 \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2}$$

$$b = \frac{y_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_0 \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2}$$

$$c = \frac{1}{n}$$

Supondo agora que a origem das medidas \bar{e} a imagem do asteróide e que coincide com o baricentro teremos as coordenadas medidas das estrelas (x_i, y_i) correspondentes \bar{a} origem $(x_0, y_0) = (0, 0)$ que \bar{e} :

$$x_i - x_0 = x_i - 0$$

$$y_i - y_0 = y_i - 0$$

Assim, o sistema (3.15) transforma-se em:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Temos que o determinante N do sistema (3.17) é:

$$N = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i & n \end{vmatrix}$$

e assim sendo

$$N \neq 0$$

Temos que a solução do sistema (3.17) é:

$$a = \frac{1}{N} \begin{vmatrix} 0 & \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ 0 & \sum_{i=1}^n y_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i \\ 1 & \sum_{i=1}^n y_i & n \end{vmatrix}$$

$$b = \frac{1}{N} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & 0 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & 0 & \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & 1 & n \end{vmatrix}$$

$$c = \frac{1}{N} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i & 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 & 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i & 1 \end{vmatrix}$$

Resolvendo os determinantes temos:

$$a = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n y_i^2 \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$b = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i \right)$$

$$c = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \right)$$

Chamando os valores dos determinantes acima de n_1 , n_2 e n_3 respectivamente, temos que os valores de a , b e c são dados por:

$$a = \frac{n_1}{N}$$

$$b = \frac{n_2}{N}$$

$$c = \frac{n_3}{N}$$

que substituídos na expressão (3.14) obtemos os valores das dependências desejados:

$$D_i = \frac{1}{N} (n_1 x_i + n_2 y_i + n_3) \quad (3.18)$$

onde os n_i , $i = 1, 2, 3$ são os menores complementares da terceira linha do sistema (3.17).

Temos os casos particulares para três e para cinco estrelas de referência.

3.3 - O MÉTODO PARA TRÊS ESTRELAS BÁSICAS

Consideramos o centro das dependências (x_0, y_0) coincidindo com as coordenadas (x_a, y_a) de um asteróide que pretendemos obter as suas coordenadas celestes.

Assim,

$$x_0 = x_a$$

$$y_0 = y_a$$

e as coordenadas das estrelas serão:

$$x_{i0} = x_i - x_0$$

$$y_{i0} = y_i - y_0$$

para $i = 1, 2, 3$.

Por (3.11) e (3.12) temos que:

$$\sum_{i=1}^3 D_i x_{i0} = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 D_i y_{i0} = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 D_i = 1$$

ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} & x_{30} \\ y_{10} & y_{20} & y_{30} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

cuja solução pelo método de CRAMER é:

$$D_1 = \frac{n_1}{N}$$

$$D_2 = \frac{n_2}{N}$$

$$D_3 = \frac{n_3}{N}$$

onde:

$$N = \begin{vmatrix} x_{10} & x_{20} & x_{30} \\ y_{10} & y_{20} & y_{30} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$n_1 = \begin{vmatrix} 0 & x_{20} & x_{30} \\ 0 & y_{20} & y_{30} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$n_2 = \begin{vmatrix} x_{10} & 0 & x_{30} \\ y_{10} & 0 & y_{30} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$n_3 = \begin{vmatrix} x_{10} & x_{20} & 0 \\ y_{10} & y_{20} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

que resolvido nos dá:

$$N = (x_{20}y_{30} - x_{30}y_{20}) + (x_{30}y_{10} - x_{10}y_{30}) + (x_{10}y_{20} - x_{20}y_{10})$$

$$n_1 = x_{20}y_{30} - x_{30}y_{20}$$

$$n_2 = x_{30}y_{10} - x_{10}y_{30}$$

$$n_3 = x_{10}y_{20} - x_{20}y_{10}$$

3.4 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÉTODO DAS DEPENDÊNCIAS PARA TRÊS ESTRELAS BÁSICAS.

Observamos o fato de que o vetor \vec{n}_i definido pelo produto vetorial dos vetores (x_{j0}, y_{j0}) e (x_{k0}, y_{k0}) isto é,

$$\vec{n}_i = (x_{j0}, y_{j0}) \times (x_{k0}, y_{k0}) \quad (3.20)$$

onde i, j e k são inteiros que variam ciclicamente de 1 até 3, \vec{n}_i é um vetor tal que o seu módulo ou valor absoluto é exatamente n_i , isto é,

$$|\vec{n}_i| = n_i$$

Realmente podemos verificar que:

$$\vec{n}_1 = (x_{20}, y_{20}) \times (x_{30}, y_{30})$$

$$\vec{n}_2 = (x_{30}, y_{30}) \times (x_{10}, y_{10})$$

$$\vec{n}_3 = (x_{10}, y_{10}) \times (x_{20}, y_{20})$$

são dados pela solução dos respectivos determinantes:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{20} & y_{20} & 0 \\ x_{30} & y_{30} & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{30} & y_{30} & 0 \\ x_{10} & y_{10} & 0 \end{vmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{10} & y_{10} & 0 \\ x_{20} & y_{20} & 0 \end{vmatrix}.$$

Assim:

$$\vec{n}_1 = (x_{20}y_{30} - x_{30}y_{20})\vec{k}$$

$$\vec{n}_2 = (x_{30}y_{10} - x_{10}y_{30})\vec{k}$$

$$\vec{n}_3 = (x_{10}y_{20} - x_{20}y_{10})\vec{k}$$

onde \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} representam os vetores triortonormais e portanto o módulo de \vec{n}_i é realmente n_i .

O módulo n_i de \vec{n}_i como vimos no capítulo anterior representa geomêtricamente a área do paralelogramo de lados (x_{j0}, y_{j0}) e (x_{k0}, y_{k0}) que é o dobro da área do triângulo de vêrtices (x_0, y_0) , (x_j, y_j) e (x_k, y_k) .

Além disso, podemos definir \vec{n} como:

$$\vec{n} = (n_1 + n_2 + n_3)\vec{k} \quad (3.21)$$

e o seu módulo é N que representa o dobro da área do triângulo formado pelos vetores (x_{10}, y_{10}) , (x_{20}, y_{20}) e (x_{30}, y_{30}) representando as três estrelas de referência como na Figura 3.3 .

Daí as dependências D_i podem ser definidas como:

$$D_i = \frac{n_i}{N} \quad (3.22)$$

para $i = 1, 2, 3$.

Temos assim que as dependências D_i são relações entre áreas de figuras planas, logo elas são adimensionais e portanto eliminamos a necessidade de determinar a escala do instrumento e a orientação da placa.

É evidente que a soma das dependências é igual a um, isto é;

$$\sum_{i=1}^3 D_i = \sum_{i=1}^3 \frac{n_i}{N} = 1.$$

Consideremos a Figura 3.4 abaixo:

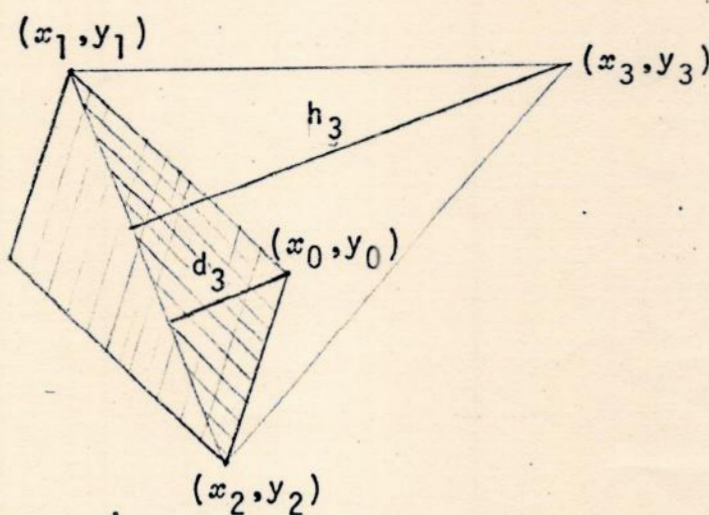


Figura 3.4 - O método das dependências para três estrelas

4 Sendo n_3 a área do paralelogramo hachuriado na Figura 3.3 acima, $\frac{n_3}{2}$ é a área do triângulo quadrículado correspondente a metade do paralelogramo que é $\frac{1}{2} b_3 d_3$ onde b_3 é a base e d_3 é a altura de tal triângulo.

Temos também que $\frac{N}{2}$ representa a área do triângulo cujos vértices são as posições das três estrelas de refe

rência cuja área também pode ser escrita como $\frac{1}{2} b_3 h_3$ onde b_3 é a base comum dos dois triângulos e h_3 a altura deste último.

De um modo geral é fácil deduzir pela Figura 3.3 que as dependências D_i , $i = 1, 2, 3$ são dadas por:

$$D_i = \frac{d_i}{h_i} \quad (3.23)$$

De fato, dividindo o numerador e o denominador de (3.22) por 2 temos pela consideração feita sobre a Figura 3.3 que:

$$D_i = \frac{\frac{1}{2} b_i d_i}{\frac{1}{2} b_i h_i}$$

que simplificado nos dá (3.23).

A interpretação é análoga para um número ímpar $n \geq 5$ estrelas.

3.5 - A FÓRMULA FUNDAMENTAL PARA O MÉTODO DAS DEPENDÊNCIAS

Supomos que a placa fotográfica subtende uma pequena região da esfera celeste, e seja

$$\Delta\delta = \delta - \delta_0 \quad (3.24)$$

uma quantidade infinitesimal donde;

$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta \quad (3.25)$$

Assim,

$$\text{sen } \delta = \text{sen}(\delta_0 + \Delta\delta)$$

$$\text{cos } \delta = \text{cos}(\delta_0 + \Delta\delta)$$

$$\begin{cases} x - x_0 = f \text{ sen } \theta \text{ sen } \psi \\ y - y_0 = f \text{ sen } \theta \text{ cos } \psi \end{cases}$$

que desenvolvidos nos dá;

$$\text{sen } \delta = \text{sen } \delta_0 \text{ cos } \Delta\delta + \text{sen } \Delta\delta \text{ cos } \delta_0 \quad (3.26)$$

$$\text{cos } \delta = \text{cos } \delta_0 \text{ cos } \Delta\delta - \text{sen } \Delta\delta \text{ sen } \delta_0 \quad (3.27)$$

Sendo $\Delta\delta$ uma quantidade infinitesimal, teremos as aproximações:

$$\text{sen } \Delta\delta \approx \Delta\delta \quad (3.28)$$

$$\text{cos } \Delta\delta \approx 1$$

De modo que (3.26) e (3.27) tornam-se:

$$\text{sen } \delta = \text{sen } \delta_0 + \Delta\delta \text{ cos } \delta_0 \quad (3.29)$$

$$\text{cos } \delta = \text{cos } \delta_0 - \Delta\delta \text{ sen } \delta_0 \quad (3.30)$$

Pelas mesmas considerações anteriores,

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0 \quad (3.31)$$

é uma quantidade infinitesimal e assim:

$$\text{sen } \Delta\alpha = \Delta\alpha - \dots \quad (3.32)$$

$$\text{cos } \Delta\alpha = 1 - \frac{\Delta\alpha^2}{2} + \dots \quad (3.33)$$

pelo desenvolvimento em série de TAYLOR das funções acima em torno da origem até os termos segunda ordem.

Utilizando (3.31) teremos em (3.32) e (3.33);

$$\operatorname{sen}(\alpha - \alpha_0) = \alpha - \alpha_0 \quad (3.34)$$

$$\operatorname{cos}(\alpha - \alpha_0) = 1 - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right)^2 \quad (3.35)$$

Substituindo agora (3.29), (3.30), (3.34) e (3.35) nas equações fundamentais (3.6) teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta &= \\ &= \frac{(\alpha - \alpha_0) [\operatorname{cos} \delta_0 - (\delta - \delta_0) \operatorname{sen} \delta_0]}{[\operatorname{sen} \delta_0 + (\delta - \delta_0) \operatorname{cos} \delta_0] \operatorname{sen} \delta_0 + [\operatorname{cos} \delta_0 - (\delta - \delta_0) \operatorname{sen} \delta_0] \operatorname{cos} \delta_0 \left[1 - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sigma \operatorname{cos} \theta &= \\ &= \frac{[\operatorname{sen} \delta_0 + (\delta - \delta_0) \operatorname{cos} \delta_0] \operatorname{cos} \delta_0 - [\operatorname{cos} \delta_0 - (\delta - \delta_0) \operatorname{sen} \delta_0] \operatorname{sen} \delta_0 \left[1 - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right)^2\right]}{[\operatorname{sen} \delta_0 + (\delta - \delta_0) \operatorname{cos} \delta_0] \operatorname{sen} \delta_0 - [\operatorname{cos} \delta_0 - (\delta - \delta_0) \operatorname{sen} \delta_0] \operatorname{cos} \delta_0 \left[1 - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

Desenvolvendo e simplificando as expressões acima teremos:

$$\operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta = \frac{(\alpha - \alpha_0) \operatorname{cos} \delta_0 - (\alpha - \alpha_0)(\delta - \delta_0) \operatorname{sen} \delta_0}{1 - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right)^2 \operatorname{cos}^2 \delta_0 + (\delta - \delta_0) \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right)^2 \operatorname{sen} \delta_0 \operatorname{cos} \delta_0}$$

$$\operatorname{tg} \sigma \operatorname{cos} \theta = \frac{(\delta - \delta_0) + \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right)^2 \operatorname{cos} \delta_0 \operatorname{sen} \delta_0 + \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right)^2 (\delta - \delta_0) \operatorname{sen}^2 \delta_0}{1 - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right)^2 \operatorname{cos}^2 \delta_0 + \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right)^2 (\delta - \delta_0) \operatorname{sen} \delta_0 \operatorname{cos} \delta_0}$$

Considerando somente até os termos de terceira ordem teremos:

$$\operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta = (\alpha - \alpha_0) \operatorname{cos} \delta_0 - (\alpha - \alpha_0)(\delta - \delta_0) \operatorname{sen} \delta_0 \quad (3.36).$$

$$\operatorname{tg} \sigma \cos \theta = (\delta - \delta_0) + \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right)^2 \cos \delta_0 \operatorname{sen} \delta_0 \quad (3.37)$$

Substituindo (3.36) e (3.37) em (3.4) obtemos:

$$\begin{cases} x = f[(\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0 - (\alpha - \alpha_0)(\delta - \delta_0) \operatorname{sen} \delta_0] \\ y = f[(\delta - \delta_0) + \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\right)^2 \cos \delta_0 \operatorname{sen} \delta_0] \end{cases}$$

Sejam (x_0, y_0) e (x_a, y_a) as respectivas coordenadas retilíneas medidas do ponto tangente da placa à esfera celeste e do asteróide, (x_i, y_i) e (α_i, δ_i) , $i = 1, 2, 3$ as coordenadas retilíneas das três estrelas de referência e as suas coordenadas celestes respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x_i - x_0 = f[(\alpha_i - \alpha_0) \cos \delta_0 - (\alpha_i - \alpha_0)(\delta_i - \delta_0) \operatorname{sen} \delta_0] \\ y_i - y_0 = f[(\delta_i - \delta_0) + \left(\frac{\alpha_i - \alpha_0}{2}\right)^2 \cos \delta_0 \operatorname{sen} \delta_0] \end{cases}$$

onde $i = 1, 2, 3$.

Multiplicando cada uma das seis equações acima pelas respectivas dependências D_i , $i = 1, 2, 3$ temos:

$$D_i x_i - D_i x_0 = f[D_i (\alpha_i - \alpha_0) \cos \delta_0 - (\alpha_i - \alpha_0)(\delta_i - \delta_0) \operatorname{sen} \delta_0]$$

$$D_i y_i - D_i y_0 = f[D_i (\delta_i - \delta_0) + D_i \left(\frac{\alpha_i - \alpha_0}{2}\right)^2 \cos \delta_0 \operatorname{sen} \delta_0],$$

$i = 1, 2, 3$.

Somando desde $i = 1$ até 3 e utilizando (3.12) temos:

$$D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 = x_0 + f \left[\sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_0) \cos \delta_0 - \sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_0) (\delta_i - \delta_0) \sin \delta_0 \right] \quad (3.40)$$

$$D_1 y_1 + D_2 y_2 + D_3 y_3 = y_0 + f \left[\sum_{i=1}^3 D_i (\delta_i - \delta_0) + \sum_{i=1}^3 D_i \left(\frac{\alpha_i - \alpha_0}{2} \right)^2 \cos \delta_0 \sin \delta_0 \right]$$

Mas por (3.11) o primeiro membro dessas equações são as coordenadas do asteróide que se procura determinar a posição, ou seja (x_a, y_a) assim;

$$x_a = x_0 + f \left[(\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0 - (\alpha_a - \alpha_0) (\delta_a - \delta_0) \sin \delta_0 \right] \quad (3.41)$$

$$y_a = y_0 + f \left[(\delta - \delta_0) + \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right)^2 \cos \delta_0 \sin \delta_0 \right]$$

Comparando as expressões (3.40) com (3.41) e eliminando x_0, y_0 e f temos:

$$\begin{aligned} & \left[(\alpha_a - \alpha_0) \cos \delta_0 - (\alpha_a - \alpha_0) (\delta_a - \delta_0) \sin \delta_0 \right] = \\ & \sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_0) \cos \delta_0 - \sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_0) (\delta_i - \delta_0) \sin \delta_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[(\delta_a - \delta_0) + \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right)^2 \cos \delta_0 \sin \delta_0 \right] = \\ & \left[\sum_{i=1}^3 D_i (\delta_i - \delta_0) + \sum_{i=1}^3 D_i \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right)^2 \cos \delta_0 \sin \delta_0 \right] \end{aligned}$$

Donde segue que:

$$\alpha_a - \alpha_0 = \sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_0) - \left[\sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_0) (\delta_i - \delta_0) - (\alpha_a - \alpha_0) (\delta_a - \delta_0) \right] \operatorname{tg} \delta_0 \quad (3.42)$$

$$\delta_a - \delta_0 = \sum_{i=1}^3 D_i (\delta_i - \delta_0) + \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_0)^2 - (\alpha_a - \alpha_0)^2 \right] \operatorname{sen} 2\delta_0$$

pois temos que:

$$\operatorname{sen} 2\delta_0 = 2 \operatorname{sen} \delta_0 \cos \delta_0$$

e por isto

$$\operatorname{sen} \delta_0 \cos \delta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\delta_0.$$

Para que as fórmulas (3.42) sejam utilizadas na prática elas devem ser coerentemente dimensionadas, pois aparecem nos segundos membros fatores em segundos de tempo como $(\alpha_i - \alpha_0)$ e em segundos de arco como $(\delta_i - \delta_0)$.

Como o primeiro membro da fórmula (3.42) em ascensão reta deve ser expresso em segundo de tempo devemos então multiplicar o seu último fator por $\operatorname{sen} 1''$, enquanto que o primeiro membro de (3.42) em declinação deve ser expresso em segundo de arco devemos também multiplicar o seu último fator por $.15^2 \operatorname{sen} 1''$.

Então (3.42) torna-se:

$$\alpha_a - \alpha_0 = \sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_0) - \left[\sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_0) (\delta_i - \delta_0) - (\alpha_a - \alpha_0) (\delta_a - \delta_0) \right] \operatorname{sen} 1'' \operatorname{tg} \delta_0 \quad (3.43)$$

$$\delta_a - \delta_0 = \sum_{i=1}^3 D_i (\delta_i - \delta_0) - \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_0)^2 - (\alpha_a - \alpha_0)^2 \right] .15^2 \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} 2\delta_0$$

Geralmente em (3.43) chamamos:

$$F = \text{sen } 1'' \text{ tg } \delta_0$$

$$G = \frac{1}{4}(225 \text{ sen } 1'' \text{ sen } 2\delta_0)$$

que são:

$$F = 0,000\ 004\ 8481 \text{ tg } \delta_0$$

$$G = 0,000\ 272\ 7076 \text{ sen } 2\delta_0$$

(3.44)

Os valores de $\frac{F}{1000}$ e $\frac{G}{100}$ são encontrados frequentemente em tabelas especiais utilizadas nos cálculos numéricos e atualmente são facilmente calculados com uso dos computadores.

Como é praticamente impossível determinar o ponto de tangência da projeção da placa sobre a esfera celeste devemos efetuar as medidas das três ou mais estrelas de referência e do asteróide em relação a uma primeira estrela de referência considerada como origem das coordenadas e também o procedimento com as coordenadas das estrelas de referência tiradas do catálogo é o mesmo.

A fórmula fundamental dada pelas expressões (3.43)

toma a seguinte forma:

$$\alpha_a - \alpha_1 = \sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_1) - F \left[\sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_1) (\delta_i - \delta_1) - (\alpha_a - \alpha_1) (\delta_a - \delta_1) \right]$$

(3.45)

$$\delta_a - \delta_1 = \sum_{i=1}^3 D_i (\delta_i - \delta_1) + G \left[\sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_1)^2 - (\alpha_a - \alpha_1)^2 \right]$$

onde (α_1, δ_1) são as coordenadas da primeira estrela de referência.

Desprezando os t ermos quadr aticos, podemos obter uma primeira aproximação para as coordenadas desconhecidas (α_a, δ_a) do aster oide;

$$\alpha_{a1} = \alpha_1 + \sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_1)$$

$$\delta_{a1} = \delta_1 + \sum_{i=1}^3 D_i (\delta_i - \delta_1)$$
(3.46)

Uma segunda aproximação   utilizando o processo iterativo, assim:

$$\alpha_{a2} = \alpha_1 + \sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_1) - F \left[\sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_1) (\delta_i - \delta_1) - (\alpha_{a1} - \alpha_1) (\delta_{a1} - \delta_1) \right]$$
(3.47)

$$\delta_{a2} = \delta_1 + \sum_{i=1}^3 D_i (\delta_i - \delta_1) + G \left[\sum_{i=1}^3 D_i (\alpha_i - \alpha_1)^2 - (\alpha_{a1} - \alpha_1)^2 \right],$$

que   melhor do que $(\alpha_{a1}, \delta_{a1})$.

E podemos ainda continuar o processo iterativo obtendo aproximações cada vez melhores para as coordenadas equatoriais celestes do aster oide.

O método das dependências que desenvolvemos aqui foi para três estrelas de referência, mas de um modo geral podemos utilizar um número ímpar maior ou igual a três que o desenvolvimento   análogo, basta tomar n estrelas de referência e fazer a soma desde $i = 1$ até n na fórmula fundamental.

O motivo de tomar um número n ímpar de estrelas maior ou igual a três pode ser visualizado geometricamente em (3.4).

Geralmente tomamos $n = 5$ estrelas de referência que nos dá um bom resultado.

3.6 - CONCLUSÃO

Com a fantástica descoberta de Ceres por PIAZZI o estudo dos asteróides engrandeceu e se tornou um dos mais importantes no mundo da astronomia.

Os assuntos apresentados no primeiro capítulo visaram um exame rápido dos conhecimentos básicos dos asteróides.

No segundo capítulo mostramos que se pode facilmente deduzir as fórmulas fundamentais da astronomia esférica através da análise vetorial e finalmente fizemos o uso da análise vetorial na apresentação do método das dependências para obtenção da posição de asteróides.

O cálculo de três posições precisas de um asteróide permite a determinação de sua órbita pelo método de GAUSS, além disso eles serão de grande utilidade para estudar os problemas de perturbações que ocorrem frequentemente na mecânica celeste.

As características orbitais de certos asteróides permitem a utilização dos mesmos como ponto de referência para a astrometria e para a confirmação da medida da distância terra-sol, a unidade astronômica.

Por outro lado, quando os asteróides são considerados como "matéria interplanetária" e através de observações fotométricas obtemos importantes dados astrofísicos e das relações entre os mesmos e outros tipos de matéria interplanetária

é possível deduzir importantes conclusões sobre a estrutura do nosso sistema solar e tais resultados pode nos fornecer direta ou indiretamente uma boa visão dentro da estrutura do próprio universo.

Como vimos o estudo fotométrico de um asteróide e a análise da sua curva de luz pode nos mostrar as características de sua superfície e o seu período de rotação.

Com a finalidade de aperfeiçoar cada vez mais o conhecimento do nosso sistema solar devemos continuar empenhados na observação astrométrica dos asteróides e a existência de muitos deles ainda desconhecidos nos dá uma esperança de encontrá-los e quem sabe o descobrimento de um astro de extraordinária importância.

Finalmente salientamos que o método das dependências é amplamente utilizado na determinação de posições de cometas, estrelas e outros objetos celestes além dos asteróides.

REFERÊNCIAS

- [1] BAKER, ROBERT H., *Astronomia*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 8^a edição (1964).
- [2] BRANDT, J.C. e HODGE, P.W., *Solar System Astrophysics*, McGraw Hill, Inc., USA (1964).
- [3] CHAPMAN, CLARK B., The nature of asteroids, *Scientific American*, vol. 232, nº 1 (1975).
- [4] DEBEHOGNE, HENRY, Los planetas menores, *R.Muscae, Instituto Copérnico*, vol. III.2, nº 14, 40-48 (1978).
- [5] DEBEHOGNE, HENRY, Notas de aula do Curso de astrometria extrameridiana, Observatório do Valongo (1977).
- [6] FREITAS MOURÃO, R.R. DE, Da terra às galáxias, Edições Melhoramentos (1977).
- [7] KAMP, P. VAN DE, *Principles of astrometry*, W.H. Freeman and Company, San Francisco and London (1967).
- [8] LAVROV, S., *Ephemerides of minor planets*, Institute of theoretical astronomy, Academy of Sciences of USSR (1978).
- [9] MOSER, JÜRGEN, Is the solar system stable?, *The mathematical intelligenzer*, vol. 1, nº 2, Springer-Verlag (1978).

- [10] PODOBED, V.V., Fundamental astrometry, edited by A.N. VYSSOTSKY, The University of Chicago Press, Chicago and London (1962).
- [11] ROTH, GÜNTER D., The system of minor planets, Faber and Faber LTD, London (1962).
- [12] SMART, W.M., Textbook on spherical astronomy, sixth edition, Cambridge University Press (1977).
- [13] VAZ, SILIO, Notas de trigonometria esférica, Departamento de astronomia da UFRJ (1978).