

I N D I C E

| | Pág. |
|---|------|
| PALAVRAS-CHAVES | 01 |
| RESUMO | 01 |
| I - INTRODUÇÃO | 02 |
| II - TRANSFORMADAS DE FOURIER | |
| a) Conceitos Básicos | 04 |
| b) Convolução | 10 |
| c) O Teorema da Resolução | 14 |
| III - FILTRO LINEAR - ALISAMENTO | |
| a) Conceitos básicos | 23 |
| b) Filtro pela Aproximação dos Mínimos · Quadrados | 29 |
| IV - APLICAÇÃO | 39 |
| V - CONCLUSÕES | 45 |
| VI - APÊNDICE | |
| (Programa de Computador) | 58 |
| VII - BIBLIOGRAFIA | 62 |

PALAVRAS - CHAVES

Técnica de Filtragem
Filtros Lineares
Transformada de Fourier
Filtragem de Sinal
Convolução

R E S U M O

O presente projeto trata da aplicação da técnica de filtragem à Astronomia. São recordados conceitos básicos sobre Transformada de Fourier e Convolução. É apresentada a teoria necessária, juntamente com um programa de computador (apêndice), para a construção de filtros lineares pelo método dos mínimos quadrados. Como exemplo, é feita uma aplicação da técnica à ocultação do Satélite Io de Júpiter pela Lua, que ocorreu no dia 01 de janeiro de 1977.

TÉCNICA DE FILTRAGEM NA ASTRONOMIA

I - INTRODUÇÃO

Um problema encontrado ao analisarmos um sinal, é que este chega sempre acrescido de interferências ou ruídos, isto é, contém uma função com um espectro de frequência que representa o sinal propriamente dito, mais uma função que representa perturbações. Como separar estas duas componentes que constituem o sinal já que desejamos apenas a informação sem ruídos? A questão é essencialmente a de produzir uma filtragem nos dados ou seja, proporcionar a passagem de um espectro de frequência desejável (o sinal da fonte em estudo) e impedir outras frequências que constituem indesejáveis (perturbações do meio, interferências do receptor, etc). Isto é feito com a aplicação de filtros lineares, o método que iremos apresentar.

O trabalho será mostrado na seguinte ordem: Primeiramente desenvolveremos as técnicas matemáticas utilizadas no método de filtragem como conceitos básicos de Transformadas de Fourier, teorema

da convolução e teorema de resolução. Em seguida daremos uma descrição da técnica de filtragem, descrevendo tipos de filtros e seus objetivos. A seguir uma descrição mais elaborada de filtros de aproximação pelos mínimos quadrados, o qual será utilizado em nosso trabalho. Para aplicação do método, mostraremos o resultado da análise de uma ocultação do satélite Io pela lua, registrado no Observatório do Valongo em 01-01-1977, e suas conclusões. No apêndice será apresentado o programa de computação, utilizado na aplicação do método, com descrição detalhada de suas variáveis e subrotinas utilizadas.

...0000000...

II - TRANSFORMADAS DE FOURIER

a) CONCEITOS BÁSICOS

Seja a função $F(x)$ e por definição

$$f(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{2\pi i x \sigma} dx \quad (2.1)$$

onde $f(\sigma)$ é a Transformada de Fourier de $F(x)$. As variáveis x e σ são chamadas de um par Fourier. A transformada inversa é

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) e^{-2\pi i x \sigma} d\sigma \quad (2.2)$$

Portanto, se $f(\sigma)$ é a Transformada de Fourier de $F(x)$, então $F(x)$ é a Transformada de Fourier de $f(\sigma)$. Deve-se observar a mudança no sinal do expoente entre as equações (2.1) e (2.2).

Se $F(x)$ é uma função par de x , isto é, se $F(x) = F(-x)$ a transformada da transformada produz a função primitiva. Esta é a propriedade cíclica da trans-

formada de Fourier, e visto que o ciclo é de dois passos, a propriedade recíproca está implícita.

As propriedades cíclicas e recíprocas não satisfazem se $F(x)$ é ímpar, isto é, se $F(x) = -F(-x)$, ou se $F(x)$ não é par e nem ímpar.

Nem toda função tem transformada. A questão da existência da transformada pode seguramente ser ignorada quando a função a ser considerada descreve uma quantidade física. (Veja Bracewell-1965-cap.2).

Vamos expandir a equação (2.1) usando a fórmula de Euler, ou seja, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, e admitindo no caso mais geral que $F(x)$ seja uma função complexa, isto é, $F(x) = F_R(x) + iF_I(x)$, consistindo de uma parte real $F_R(x)$, e de uma parte imaginária $F_I(x)$.

Então,

$$\begin{aligned}
 f(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} (F_R(x) + iF_I(x)) (\cos 2\pi x \sigma + i \sin 2\pi x \sigma) dx \\
 f(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) \cos 2\pi x \sigma dx + i \int_{-\infty}^{\infty} F_I(x) \cos 2\pi x \sigma dx + \\
 &+ i \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) \sin 2\pi x \sigma dx - \int_{-\infty}^{\infty} F_I(x) \sin 2\pi x \sigma dx \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Esta equação é útil para visualizar o processo da transformada. Considerando as integrais acima, observando que a $F(x)$ sempre está multiplicada por uma função periódica (sen ou cos), considerando também σ constante para a integração, então a soma das áreas resultantes destes produtos (a fig. 2.1 ilustra o resultado deste produto para a 3.^a integral de 2.3) é o valor procurado. Isto dá o valor de $f(\sigma)$ para um dado valor de σ . Variando a frequência dos senos e cossenos e repetindo o processo temos o resultado final. Este processo é a essência da avaliação numérica da transformada de Fourier.

Se reescrevermos a equação (2.3) $f(\sigma) = f_R(\sigma) + if_I(\sigma)$, vemos que a parte real é composta da primeira e última integrais de (2.3), enquanto a parte imaginária é composta das duas integrais centrais. De uma maneira geral ambas $F(x)$ e $f(\sigma)$ são funções complexas.

Sendo $F(x)$ uma função real, então $F_I(x) = 0$ e $f(\sigma)$ torna-se

$$f(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) \cos 2\pi x \sigma dx + i \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) \sin 2\pi x \sigma dx \quad (2.4)$$

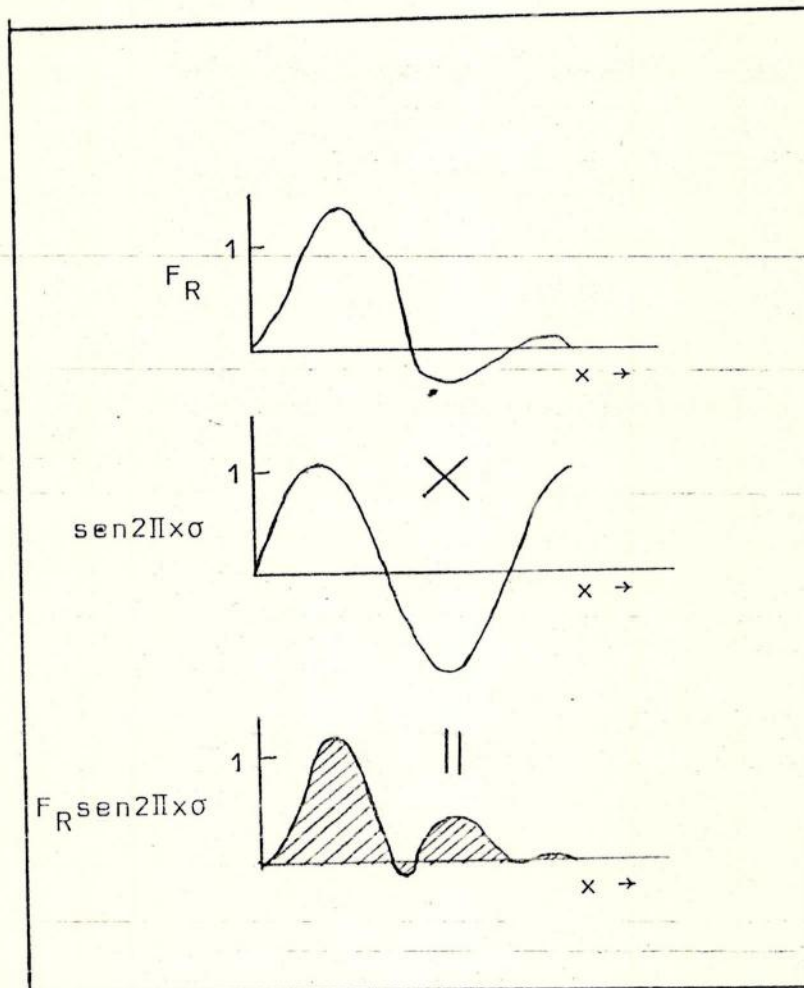


Fig. 2.1 - A função real arbitrária $F(x)$ multiplicada por $\text{sen } 2\pi x \sigma$ dando a curva tracejada. A área é o valor da transformada $f(\sigma)$ para um valor particular de σ .

Notamos que $f(\sigma)$ permanece ainda uma função complexa. Somente se $F_R(x)$ for uma função par $F_R(x) = F_R(-x)$, e que temos então

$$f(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) \cos 2\pi x \sigma dx \quad (2.5)$$

ou seja, a paridade de $F(x)$ combinada com a imparidade de $\sin 2\pi x \sigma$ produz áreas positivas e negativas iguais, cancelando assim o termo imaginário em (2.4).

Para exemplificar, vamos considerar uma função simples e sua transformada, ilustrando o procedimento básico.

Seja a função "box" $B(x)$ (fig. 2.2) de largura W tal que

$$B(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } W/2 < x < -W/2 \\ 1 & \text{para } -W/2 \leq x \leq W/2 \end{cases}$$

Sua transformada é

$$b(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} B(x) e^{2\pi i x \sigma} dx$$

$$\begin{aligned}
 b(\sigma) &= \int_{-W/2}^{W/2} e^{2\pi i x \sigma} dx = \left. \frac{1}{2\pi i \sigma} e^{2\pi i x \sigma} \right|_{-W/2}^{W/2} \\
 &= \frac{1}{2\pi i \sigma} (e^{2\pi i (W/2)\sigma} - e^{-2\pi i (W/2)\sigma}) \\
 &= \frac{1}{2\pi i \sigma} (\cos \pi W \sigma + i \operatorname{sen} \pi W \sigma - \cos \pi W \sigma + i \operatorname{sen} \pi W \sigma) \\
 &= \frac{1}{2\pi i \sigma} 2i \operatorname{sen} \pi W \sigma = W \frac{\operatorname{sen} \pi W \sigma}{\pi W \sigma} = W \operatorname{sinc} \pi W \sigma
 \end{aligned}$$

onde $\operatorname{sinc} x$ é definida como $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

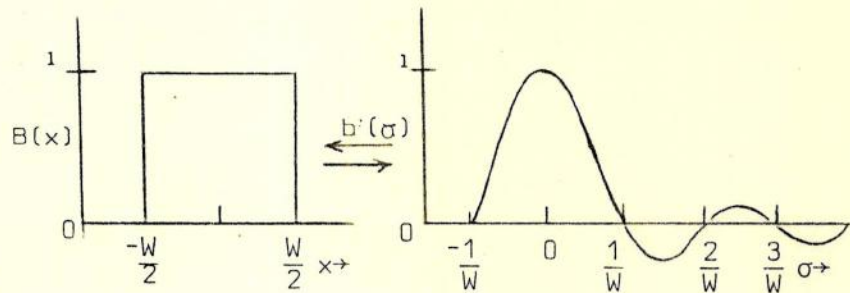


Fig. 2.2 - A função "box" $B(x)$ de largura W e sua transformada $b(\sigma)$ de largura $1/W$.

A relação entre as larguras destas funções é particularmente importante. Se W é grande, na transformada torna-se pequeno e vice-versa. Isto acontece entre todas as funções e suas transformadas. O primeiro zero da transformada é para $\sigma = 1/W$. Os outros zeros estão igualmente espaçados para $\Delta\sigma = 1/W$ ao longo do eixo σ .

O uso das transformadas de Fourier para a resolução de problemas em sistemas lineares, é uma técnica bastante conhecida e aplicada nos mais diversos ramos da ciência. Seu uso determina uma mudança no domínio da função em estudo ou seja, se os dados estiverem no domínio espacial ou temporal, a transformada os leva para o domínio das frequências espaciais ou temporais e vice-versa, permitindo que a análise seja feita num ou noutro domínio, de acordo com a conveniência.

b) CONVOLUÇÃO

A multiplicação de funções sempre acontece em problemas físicos. Como seria então a transformada de Fourier de um produto de funções tal como $F(x).G(x)$? Para solução será mostrado um novo processo chamado "convolução" que é definido como

$$h(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma_1)g(\sigma - \sigma_1)d\sigma_1$$

onde $f(\sigma)$ e $g(\sigma)$ são as transformadas de Fourier de $F(x)$ e $G(x)$.

Esta integral pode ser escrita como

$$h(\sigma) = f(\sigma) * g(\sigma)$$

onde o símbolo (*) representa a convolução.

É relativamente simples entender o que representa a convolução. A função $h(\sigma)$ é avaliada parte por parte, sendo a integração feita sobre σ_1 com σ permanecendo constante. A função $g(\sigma - \sigma_1)$ é transladada de uma quantidade σ em relação a $f(\sigma_1)$, mas por causa do sinal negativo de σ_1 no argumento $g(\sigma - \sigma_1)$, a convolução é processada da direita para a esquerda. O resultado do produto dá uma curva, que integrada dá uma área líquida para um determinado σ . Ao mudar σ de uma certa quantidade estamos mudando $g(\sigma - \sigma_1)$ para uma nova posição, conseqüentemente obtendo-se uma nova área líquida. O processo é continuado deslizando $g(\sigma - \sigma_1)$ sobre $f(\sigma_1)$ e a cada passo, sendo produzida uma nova área do produto das curvas. Integrando sobre todo o intervalo teremos a área que represen-

ta a convolução (Fig. 2.3).

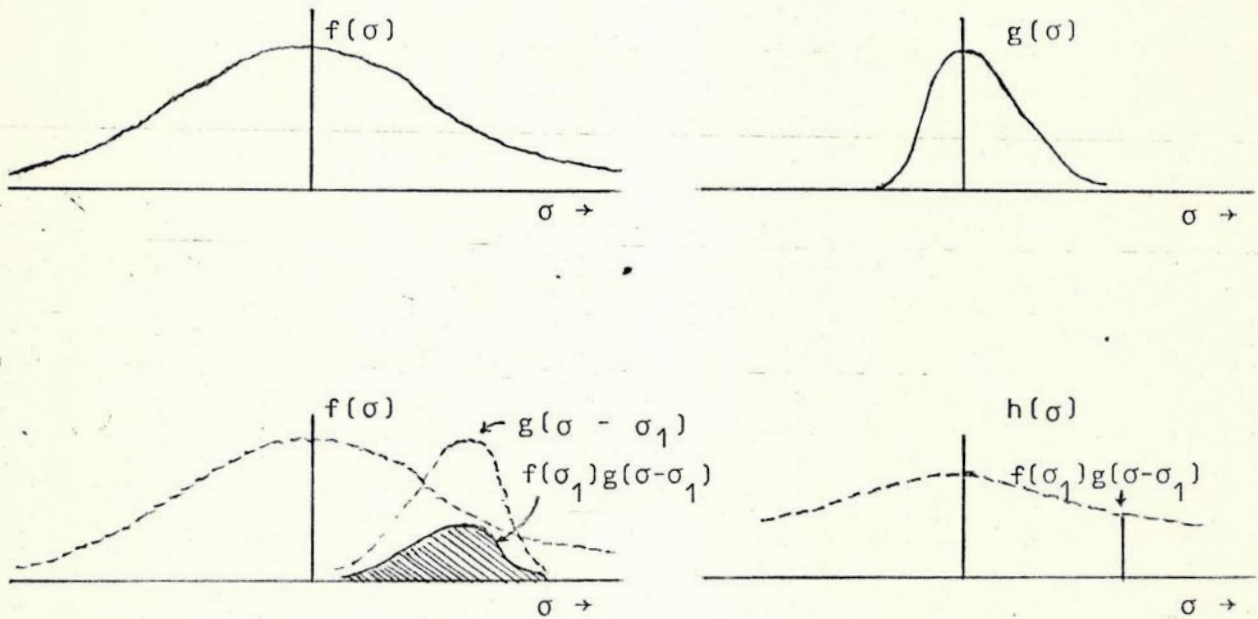


Fig. 2.3 - A convolução integral $f(\sigma)*g(\sigma)$ representada pela área tracejada.

É interessante lembrar que se deslizarmos $f(\sigma - \sigma_1)$ sobre $g(\sigma)$ ou seja, fixarmos $g(\sigma)$, vamos obter exatamente o mesmo resultado.

Assim

$$h(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma_1) f(\sigma - \sigma_1) d\sigma_1$$

e portanto

$$g(\sigma) * f(\sigma) = f(\sigma) * g(\sigma)$$

A correspondência entre multiplicação e convolução de funções, a primeira num certo domínio e a segunda no domínio de Fourier, é chamado "Teorema da Convolução"; ou seja

*"Se $f(\sigma)$ tem a transformada de Fourier $F(x)$ e $g(\sigma)$ tem a transformada de Fourier $G(x)$, então $f(\sigma) * g(\sigma)$ tem a transformada de Fourier $F(x).G(x)$; isto é, a convolução de duas funções significa a multiplicação de suas transformadas."*

O teorema pode ser representado da seguinte maneira:

$$H(x) = F(x).G(x)$$

$$\downarrow \uparrow \quad \downarrow \uparrow \quad \downarrow \uparrow$$

$$h(\sigma) = f(\sigma) * g(\sigma)$$

Muitas vezes torna-se mais fácil visualizar a convolução no lugar de produto, e novamente via transformada de Fourier, pode ser aplicado o Teorema da Convolução com vantagens (Fig. 2,4).

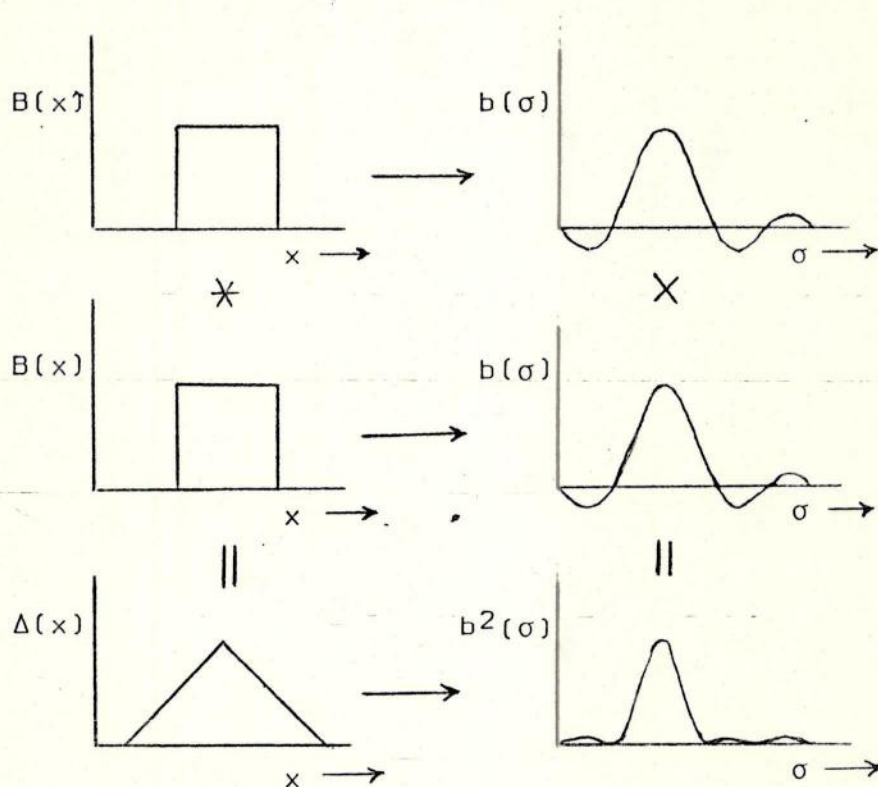


Fig. 2.4 - Mostra a convolução de duas funções "box" $B(x)$ no domínio espacial, dando como resultado uma função triângulo $\Delta(x)$. A transformada da função triângulo é $b^2(\sigma) = \text{sinc}^2 \Pi \sigma$. Uma alternativa seria tomar as transformadas de $B(x) \rightarrow b(\sigma) = \text{sinc} \Pi \sigma$ e multiplicadas entre si daria $b^2(\sigma) = \text{sinc}^2 \Pi \sigma$.

c) O TEOREMA DA RESOLUÇÃO

Os instrumentos realizam medidas durante um tempo finito ou têm sempre um limite mínimo para medidas espaciais. Quando medimos o período de uma estrela variável em dois instantes de tempo, T_1

e T_2 , o intervalo de tempo entre T_1 e T_2 está diretamente relacionado com a resolução temporal. Para exemplificar vamos tomar a função $D(x)$ como se fosse uma medida contínua de uma função verdadeira $F(x)$ de extensão W , determinada por uma função "box" $B(x)$ de altura unitária.

então

$$D(x) = B(x) \cdot F(x)$$

Sua transformada é

$$d(\sigma) = b(\sigma) * f(\sigma)$$

onde $b(\sigma) = W \operatorname{sinc} \pi W \sigma$

Vamos supor que $f(\sigma)$ mostra alguma configuração espectral de largura bem reduzida (fig. 2.5). Comparada com a extensão de $b(\sigma)$ esta configuração é considerada como impulsos. A convolução acima fornece $d(\sigma)$ centrada sobre a posição dos impulsos, e a configuração de pontas é totalmente descrita. A única forma na qual os aspectos de ponta podem ser resolvidos é estender a largura W até que $1/W$ seja menor que a largura das configurações.

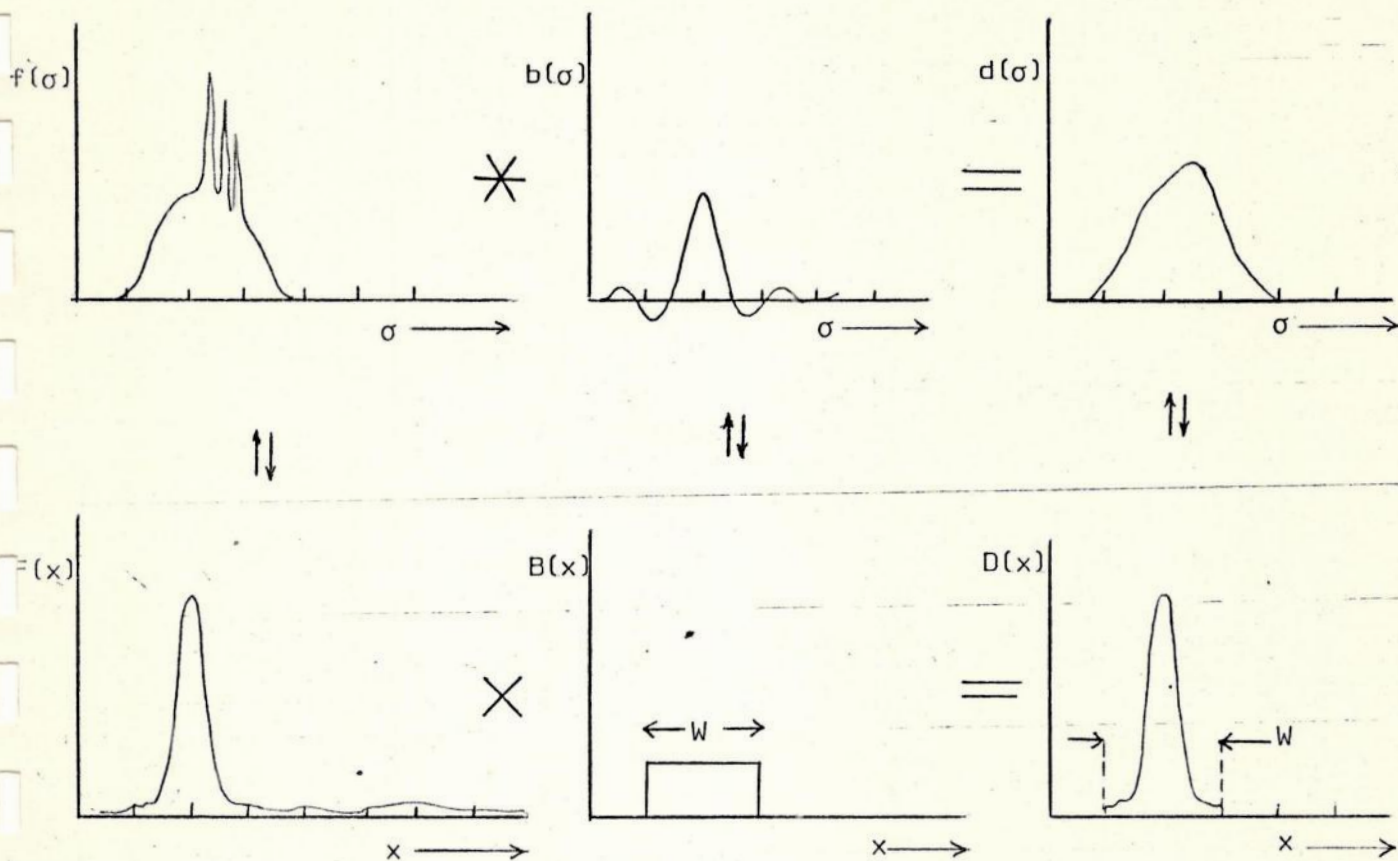


Fig. 2.5 - O teorema da resolução ilustrado para uma observação finita de extensão W . A função $D(x)$ está limitada por uma função "Box" $B(x)$, de largura W . A transformada $d(\sigma)$ está livre de todas as curvas com frequência maior que $1/W$.

Concluimos assim que devido às extensões finitas de toda medida real, as componentes de altas frequências nas transformadas, são sacrificadas.

Vejamos agora a função δ , de grande utilidade e aplicação em inúmeros problemas. Fisicamente esta função representa um impulso.

Suas propriedades são

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\delta(x-x_1) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = x_1 \\ 0 & \text{para } x \neq x_1 \end{cases}$$

Isto implica em que a ocorrência do impulso se dê em $x = x_1$.

Como exemplo consideremos o produto de uma função qualquer $F(x)$, com a função δ .

$$\delta(x-x_1).F(x) = \delta(x-x_1).F(x_1) \quad (2.6)$$

Isto porque $\delta(x-x_1) = 0$ exceto para $x = x_1$.

Em outras palavras, a multiplicação por uma função δ reproduz somente um ponto da função original.

Se integrarmos a equação 2.6 teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_1).F(x) dx = F(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_1) dx = F(x_1) \quad (2.7)$$

Podemos escrever também a equação 2.7 da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - x) F(x) dx = F(x_1)$$

Esta expressão tem a forma de convolução como já foi visto.

A transformada de $\delta(x - x_1)$ é

$$f(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_1) e^{2\pi i x \sigma} dx$$

Visto que $\delta(x - x_1) = 0$ exceto para $x = x_1$, então

$$f(\sigma) = e^{2\pi i x_1 \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_1) dx = e^{2\pi i x_1 \sigma} \quad (2.8)$$

Se tivermos duas funções δ , espaçadas simetricamente em torno de $x = 0$, (fig. 2.6), isto é, $F(x) = \delta(x - x_1) + \delta(x + x_1)$, e sabendo-se que a transformada de Fourier é linear, então podemos escrever a transformada total como a soma das transformadas, ou seja,

$$f(\sigma) = e^{2\pi i x_1 \sigma} + e^{-2\pi i x_1 \sigma}$$

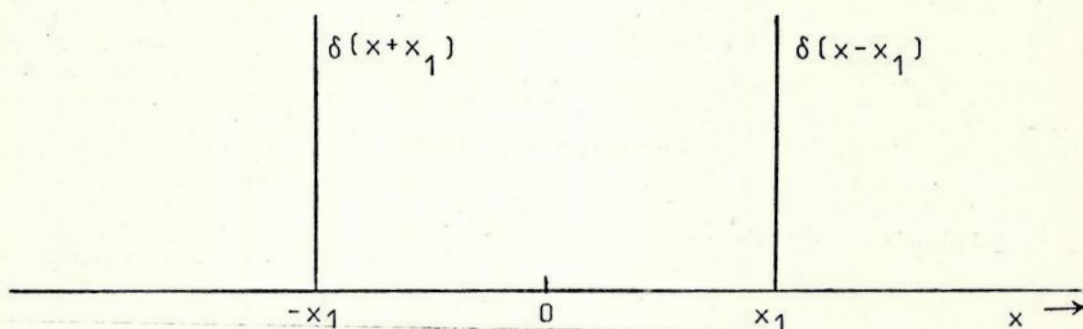


Fig. 2.6 - Duas funções δ espaçadas simetricamente em torno da origem. Sua transformada é uma função cosseno.

$$f(\sigma) = 2\cos 2\pi x_1 \sigma$$

Se agora tivermos não somente duas funções δ mas sim um arranjo infinito, espaçadas em intervalos Δx , chamamos a este arranjo de função "Shah" e é representado por $\text{III}(x)$.

Assim

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta x) \quad n = \text{inteiro}$$

A transformada de $\text{III}(x)$ é outra função "Shah", ou seja

$$\text{III}(\sigma) = \sum \delta(\sigma - n/\Delta x)$$

e como já foi visto, o espaçamento do arranjo em $III(\sigma)$ é inversamente proporcional ao espaçamento em $III(x)$.

Uma aplicação importante de $III(x)$ é multiplicá-la por uma função contínua. O resultado obtido é como se os dados da função fossem amostrados para pontos espaçados de $n\Delta x$.

Se medirmos uma série temporal tomando dados pontuais espaçados de Δx e chamarmos estes dados de $D(x)$, podemos escrever

$$D(x) = III(x).F(x) \quad (2.9)$$

onde $F(x)$ é a função real de espectro contínuo.

Podemos estender este conceito e imaginar qualquer função sendo representada por funções δ .

De acordo com o espaçamento dos dados de amostragem é que definimos a extensão da amostra.

A transformada da equação 2.9 é

$$d(\sigma) = III(\sigma) * f(\sigma) \quad (2.10)$$

O espaçamento entre as funções δ em $III(\sigma)$ é $1/\Delta x$, onde Δx é o espaçamento dos dados em $D(x)$. A convolução de $f(\sigma)$ com $III(\sigma)$ implica em que $f(\sigma)$ seja reproduzida com repetições (fig. 2.7).

Concluimos pela fig. 2.7 que na convolução, $f(\sigma)$ torna-se zero, para valores de $\sigma \leq 0,5/\Delta x$, e a convolução reproduz $f(\sigma)$ com repetições em separado. Se $f(\sigma)$ não assume um valor zero ou muito pequeno para $\sigma > 0,5/\Delta x$, essas repetições sobrepõem-se e há alterações do resultado nas partes sobrepostas. Nestas partes, o resultado da convolução produz a soma dos dados sobrepostos e isto é conhecido como "Aliasing".

Portanto, a maior frequência sobre a qual podemos obter informação útil é para $\sigma = 0,5/\Delta x$, conhecida como frequência de Nyquist (σ_n).

A única maneira de contornar esta dificuldade é tornar o espaçamento Δx dos dados da amostragem cada vez menor, até que a resolução de $f(\sigma)$ se dê sem superposição.

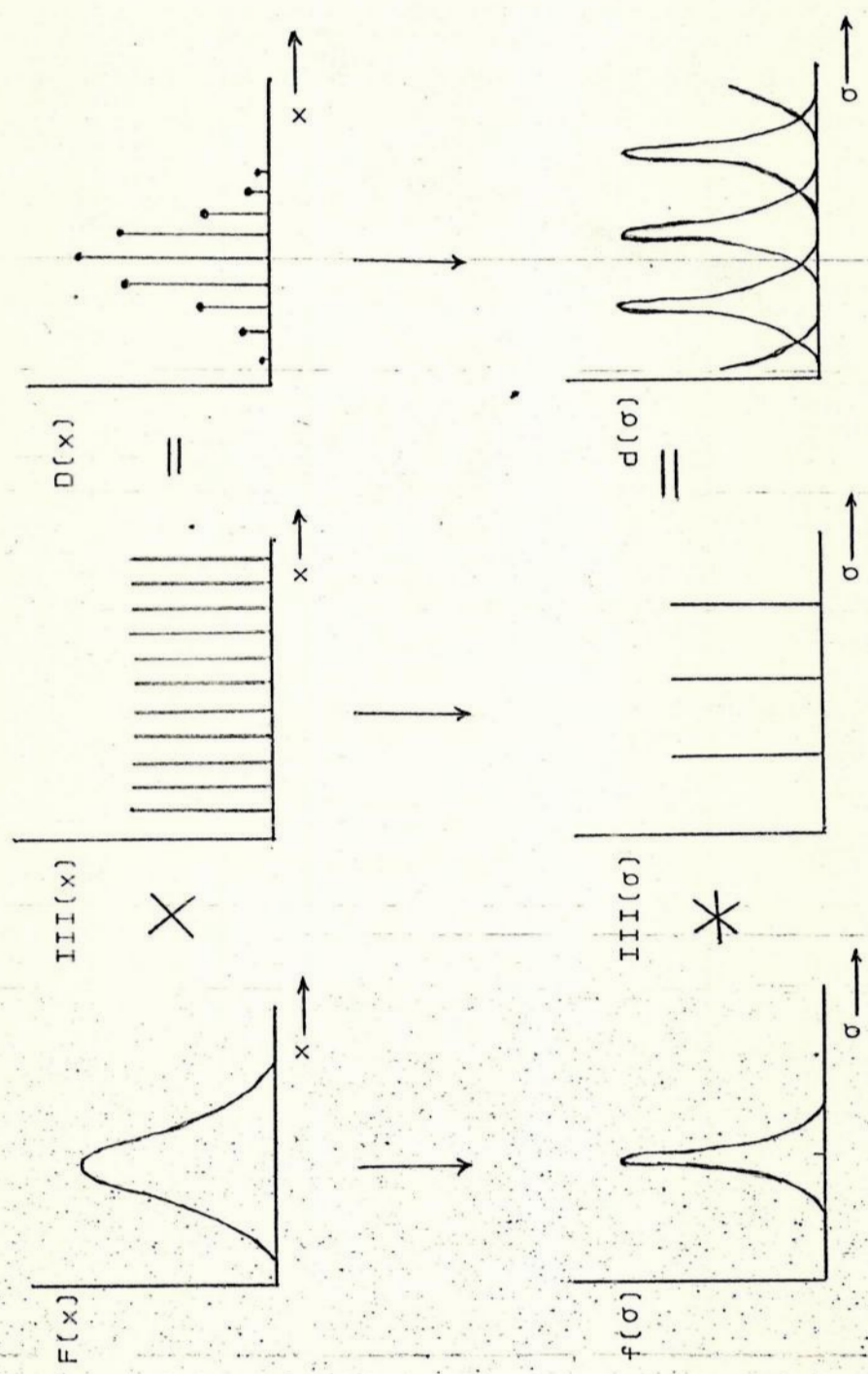


Fig. 2.7 - Gráfico ilustrando a amostragem de uma função $F(x)$ contínua. Os dados na transformada $d(\sigma)$ mostram superposição de $f(\sigma)$, conhecido como "aliasing".

III - FILTRO LINEAR - ALISAMENTO

a) CONCEITOS BÁSICOS

Sabemos que um sinal recebido $Y(t)$ pode ser escrito como $Y(t) = A(t) + E(t)$, onde $A(t)$ é a parte suave ou seja, a parte que contém o sinal real, e $E(t)$ representa perturbações ou ruído sobrepostas ao sinal. Visto que $A(t)$ é suave, as vizinhanças $A(t-1)$ e $A(t+1)$ terão aproximadamente o mesmo valor de $A(t)$. Portanto se calcularmos a média de $Y(t-1)$, $Y(t)$ e $Y(t+1)$ o resultado será aproximadamente $A(t)$ mais a média de $E(t-1)$, $E(t)$ e $E(t+1)$. Os erros tenderão a compensar-se de tal modo que o erro médio tenderá a ser menor do que os erros individuais. Se repetirmos este processo para cada valor de t , obteremos um novo grupo de dados consistindo aproximadamente de $A(t)$ mais erros, que tenderão a ser menores. Assim, por meio deste método, conseguimos diminuir a influência dos erros, exceto para os valores extremos da série, para os quais este método não pode ser feito, sem que haja algumas modificações. Uma forma clara para descrever o efeito deste pro-

cesso, que é conhecido como "médias moventes" (simple moving averaging), é através de frequências aproximadas. Vamos supor inicialmente que os dados de entrada $Y(t)$ são exatamente senoidais, isto é

$$Y(t) = R e^{i(wt+\phi)}$$

onde R = amplitude da onda;
 w = frequência angular;
 t = tempo;
 ϕ = fase.

Para podermos visualizar mais facilmente, vamos considerar a sua parte real.

$$Y(t) = R \cos(wt + \phi).$$

Aplicando o processo das "médias moventes" à função acima, temos

$$Z_t = \frac{1}{3}(Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1})$$

$$Z_t = \frac{1}{3} R [e^{i(wt-w+\phi)} + e^{i(wt+\phi)} + e^{i(wt+w+\phi)}]$$

$$Z_t = \frac{1}{3} R [e^{i(wt+\phi)} \cdot e^{-iw} + e^{i(wt+\phi)} + e^{i(wt+\phi)} \cdot e^{iw}]$$

$$Z_t = \frac{1}{3} R [e^{i(wt+\phi)} (e^{-iw} + 1 + e^{iw})]$$

$$Z_t = \frac{1}{3} R [e^{i(wt+\phi)} (\cos w - i \operatorname{sen} w + 1 + \cos w + i \operatorname{sen} w)]$$

$$Z_t = \frac{1}{3} R [e^{i(wt+\phi)} (1 + 2 \cos w)]$$

A parte real é:

$$Z_t = \frac{1}{3} R \cos(\omega t + \phi)(1 + 2\cos\omega) \quad (3.1)$$

Vemos que a saída deste processo $Z(t)$ é obtido pela função de entrada $Y(t)$ multiplicada por um fator $1/3(1 + 2\cos\omega)$. Podemos notar também que o sinal de saída é uma função linear da entrada, e então prever o que acontecerá quando o sinal de entrada é uma soma de vários termos em cossenos. A saída então conterá termos em cossenos com as mesmas frequências, porém com amplitudes moduladas por um fator $1/3(1 + 2\cos\omega)$. Portanto, frequências próximas de zero passam relativamente inalteradas ao passo que um termo com $\omega = 2\pi/3$ será completamente removido.

Sabemos que qualquer conjunto de dados pode ser escrito como uma soma de vários termos em cossenos e então podemos descrever a ação deste processo em tais conjuntos.

Se $Y(t)$ é composta de uma parte suave, "o sinal", mais perturbações ou ruído, e sabendo que, quando uma função é suave, sua transformada deve estar concentrada em baixas frequências, então o pro-

cesso das "médias moventes" que usamos, deixará passar mais do "sinal" e reduzirá a potência de ruído, pelo menos para certas frequências.

Um filtro linear geral consiste de um grupo de "pesos" (g_r, g_{r+1}, \dots, g_n), tal que se a entrada for $Y(t)$, a saída é:

$$Z_t = \sum_{u=r}^n g_u \cdot Y_{t-u} \quad (3.2)$$

A "médias moventes" acima, de 3 termos, tem: $r = -1$, $n = 1$ e $g_u = 1/3$. Portanto $u = -1, 0, 1$. Se substituirmos o valor de Y_t na expressão (3.2) teremos

$$Z_t = \sum_{u=r}^n g_u \text{Rexp}(i(wt-wu+\phi)) = \text{Rexp}(i(wt+\phi)) \sum_{u=r}^n g_u \exp(-iwu)$$

O segundo fator

$$G(w) = \sum_{u=r}^n g_u \exp(-iwu)$$

é chamado "Função de Transferência" do Filtro, e descreve a forma como a senoidal com frequência w é transferida da entrada para a saída.

No caso de um filtro simétrico (e usaremos somente filtros simétricos) em que $g_{-u} = g_u$, a função de transferência será real e a saída é

$$Z_t = R \cos(\omega t + \phi) G(\omega)$$

Neste caso podemos escrever

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \sum g_u \cos \omega u \\ &= g_0 + 2 \sum_{u>0} g_u \cos \omega u \end{aligned}$$

e visto que $\cos \omega u$ é uma polinomial em $\cos \omega$, $G(\omega)$ pode ser expandido como uma polinomial em $\cos \omega$.

A relação (3.2) definindo a saída do filtro em termos de sua entrada é um exemplo de "Convolução".

Uma vez que a função de transferência é equivalente à transformada de Fourier dos "pesos", ela pode ser invertida para dar os pesos. Assim um filtro linear geral pode ser definido em termos de seus pesos g_u , ou de sua função de transferência $G(\omega)$. Os pesos são também conhecidos como função resposta de Impulso, visto que, se a série de entrada for um impulso (contém um único valor diferente de zero), a saída consiste justamente dos pesos. Os filtros

que descrevemos são conhecidos como "Filtros de Resposta de Impulso Finito (FIR)". A função de transferência de um filtro é também conhecida como sua "Função Resposta de Frequência".

Há basicamente duas formas distintas de projetar um filtro para qualquer aplicação. A primeira é tomar um grupo de filtros primitivos, tal como a "médias moventes" de várias larguras, e usá-lo em aplicações sucessivas na montagem de um filtro com as características desejadas. A segunda é especificar os requisitos razoavelmente precisos e então construir um filtro diretamente para satisfazê-los.

O problema de separar as componentes de baixa frequência dos outros termos é típico. Um filtro que desempenha esta função é chamado "Filtro de Passagem de Baixa" (Low-Pass Filter). Sua função de transferência se encontra próximo de 1 para frequências no intervalo associado com as componentes de baixas frequências (faixa de passagem) e próximo de zero para outros valores (faixa de corte). Visto que as funções de transferências são contínuas há necessariamente uma faixa intermediária ou "faixa de transição" na qual a função permanece entre zero e 1.

b) FILTRO PELA APROXIMAÇÃO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Uma maneira mais sistemática de projetar um filtro é através da aproximação pelo método dos mínimos quadrados. Vamos supor uma função de transferência ideal $H(w)$ e que decidimos aproximá-la para um filtro resposta de impulso finito. Por exemplo, para produzir um filtro low-pass, vamos primeiramente decidir sobre as frequências de passagem w_p , a frequência de corte w_s e as tolerâncias δ_p e δ_s , e então procurar por um filtro com a menor extensão em que a função de transferência $G(w)$ satisfaça

$$|1 - G(w)| < \delta_p \quad 0 < w < w_p$$

$$|G(w)| < \delta_s \quad w_s < w < \Pi$$

Tais problemas são complexos, e somente podem ser resolvidos por aproximações numéricas.

Uma fácil aproximação é fixar o alcance da Função Resposta de Impulso e então achar o filtro em que a função de transferência melhor aproxima a $H(w)$ no sentido dos mínimos quadrados.

Em outras palavras, dados r e n , vamos achar ($g_u : r < u < n$) que minimize

$$\int_{-\Pi}^{\Pi} |H(w) - \sum_{u=r}^n g_u e^{-iwu}|^2 dw$$

Pode ser mostrado que a solução é

$$g_u = h_u = \frac{1}{2\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} H(w) e^{iwu} dw \quad u=r, \dots, n$$

ou seja, os coeficientes de Fourier de $H(w)$.

A função de transferência aproximada é

$$H_{r,n}(w) = \sum_{u=r}^n h_u e^{-iwu}$$

Se $H_{r,n}(w)$ é real e simétrica (como já foi dito, usaremos somente filtros simétricos), então $r = -n$, e temos assim

$$h_u = \frac{1}{2\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} H(w) \cos wu dw = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} H(w) \cos wu dw$$

e

$$H_{r,n}(w) = h_0 + 2 \sum_{u=1}^n h_u \cos wu \quad (3.3)$$

Vamos usar este método para aproximar a função de transferência low-pass

$$H(w) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq w \leq w_c \\ 0 & \text{se } w_c < w \leq \Pi \end{cases} \quad (3.4)$$

onde w_c é a frequência de corte. Os coeficientes de Fourier são

$$h_u = \frac{1}{\Pi} \int_0^{w_c} \cos w u dw = \frac{\text{sen } w_c u}{\Pi u} \quad u = 1, 2, \dots$$

e

$$h_0 = \frac{w_c}{\Pi}$$

A função de transferência se comporta com pronunciadas saliências (overshoot) em cada lado da frequência de corte, conhecido como fenômeno de Gibbs, e também é constituída de uma ondulação em toda sua extensão. As figuras 3.1 e 3.2 mostram estes resultados para uma frequência de corte qualquer, igual a 0,045 Hz (a escolha da frequência de corte do filtro é definida pela natureza do problema a ser estudado). A fig. 3.1 para $n = 5$, portanto com $2n + 1$ termos. A fig. 3.2, para $n = 20$. Nos dois exemplos, está sendo mostrada a função de transferência ideal.

FIGURA 3.1
FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA
FC=0.0450
TERMOS=11

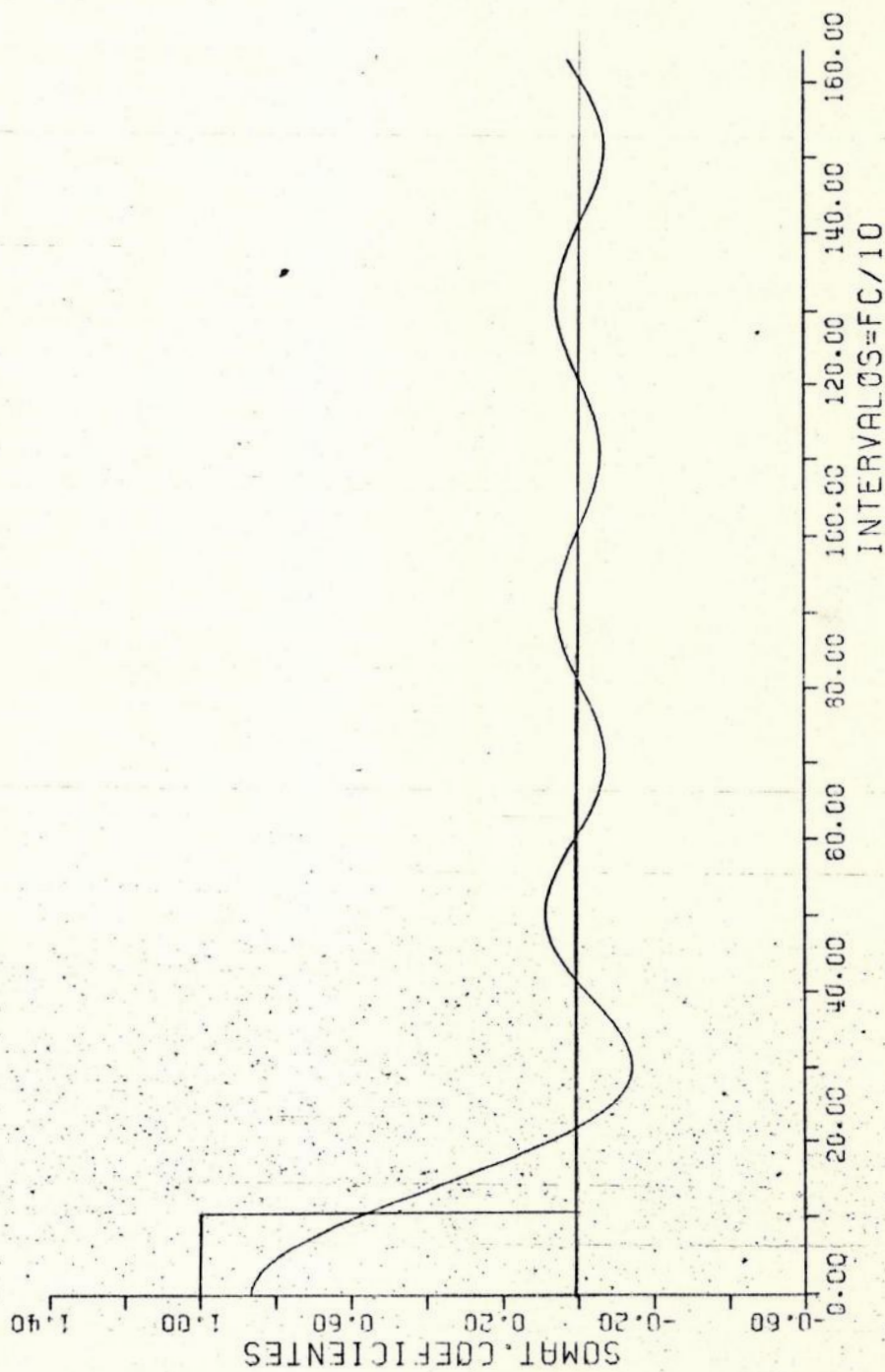
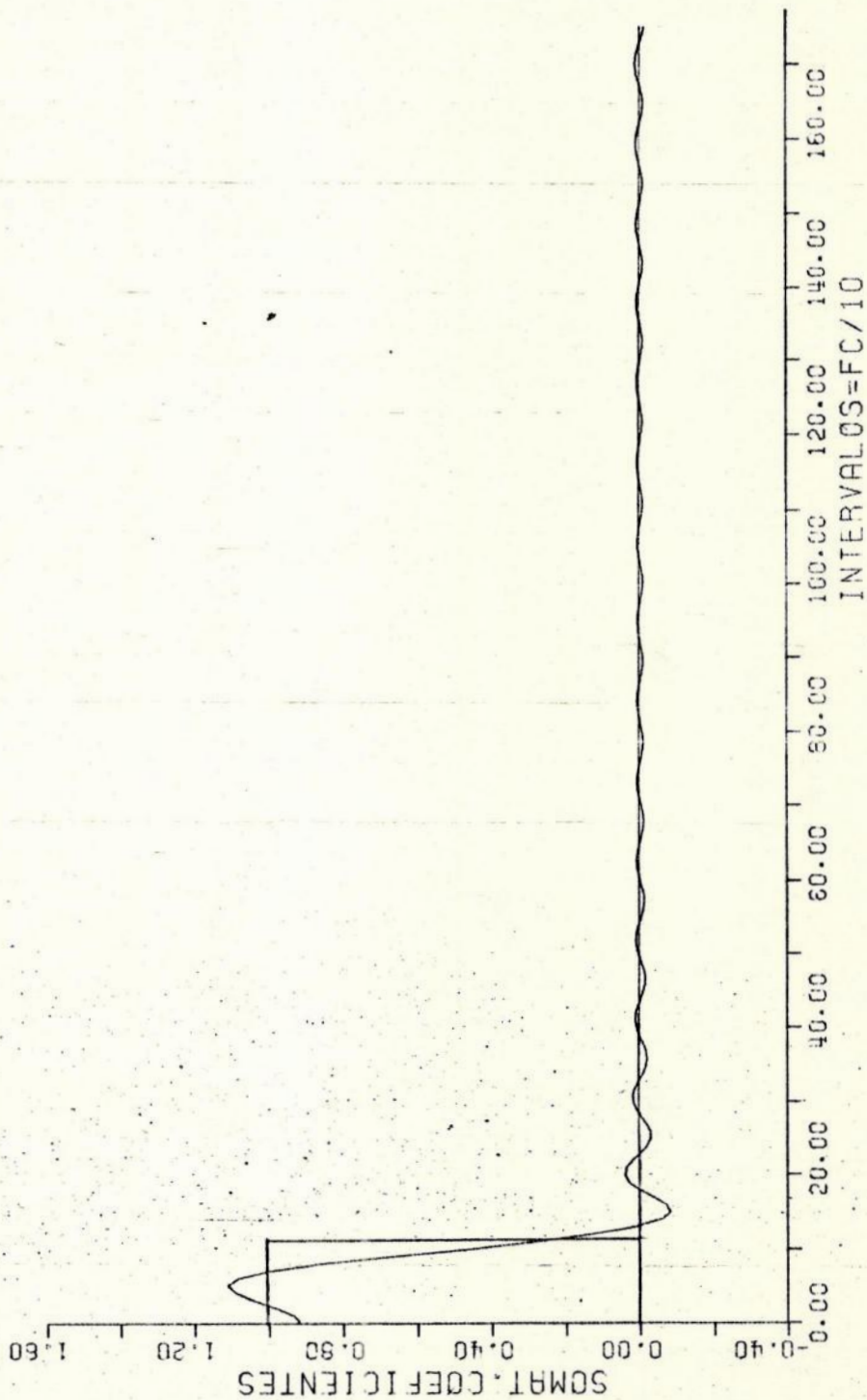


FIGURA 3.2
FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA,
FC=0.0450
TERMOS=41



Estas saliências e também as ondulações podem ser bastante reduzidas adotando-se o processo dos fatores de convergência. Mostra-se que o comprimento de onda das ondulações é

$$\delta = 4\pi / (2n+1)$$

Portanto, a função suavizada é

$$H(w) = h_0 + 2 \sum_{u=1}^n h_u \frac{\text{senu}\delta/2}{u\delta/2} \cos uw \quad (3.5)$$

(Para maiores detalhes veja Bloomfield, 1976).

E isto corresponde a substituir os coeficientes de Fourier h_u por

$$h_u \frac{\text{senu}\delta/2}{u\delta/2} = h_u \frac{\text{sen}[2\pi u / (2n+1)]}{2\pi u / (2n+1)} \quad (3.6)$$

O termo que multiplica h_u é conhecido como "fator de Convergência" e é essencialmente o mesmo utilizado para acelerar a convergência da série de Fourier. A fig. 3.3 mostra a função de transferência para 81 termos e frequência de corte 0.059 Hz, sem os fatores de convergência. A fig. 3.4 com os mesmos dados, porém com fatores de convergência.

FIGURA 3.3

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA (Sem fatores de convergência)

FC=0.0159

TERMOS=81

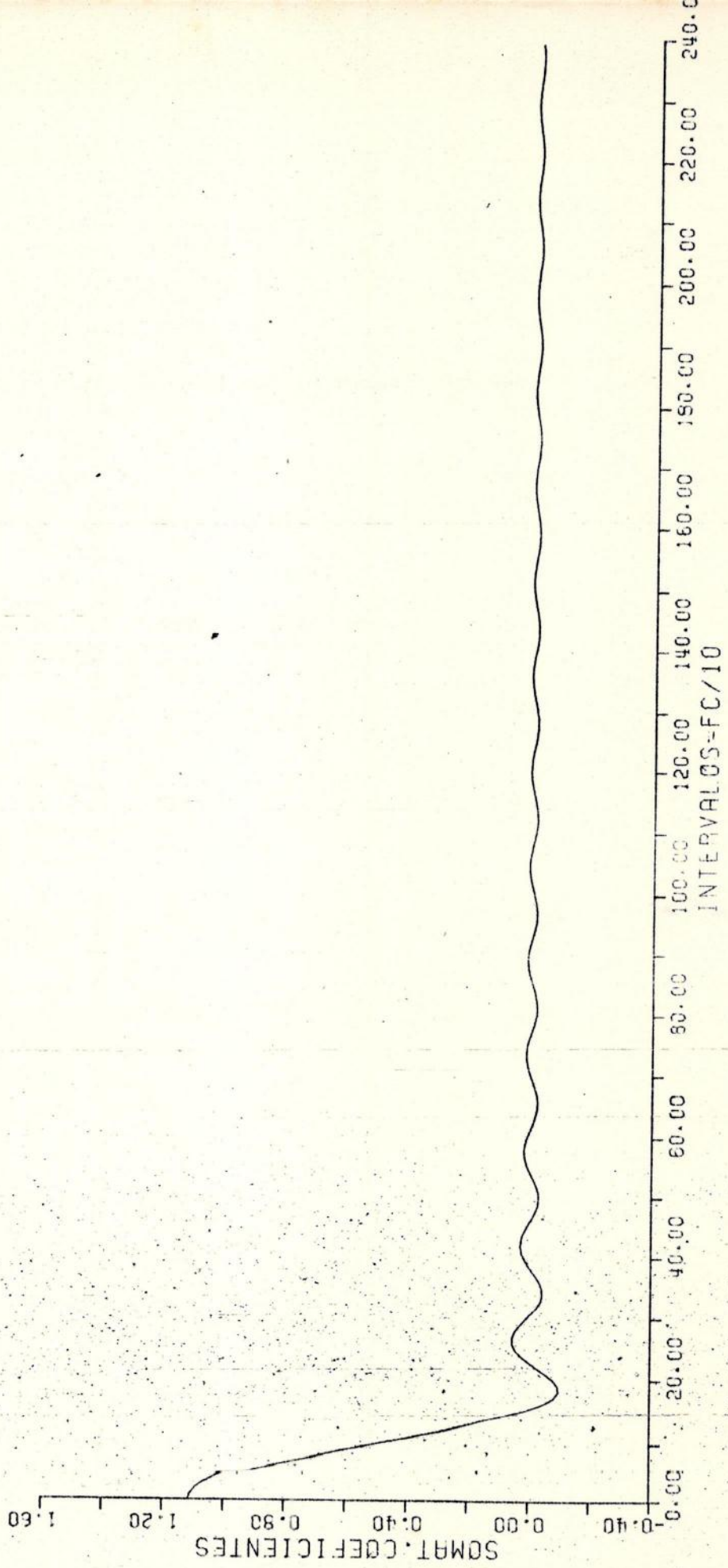
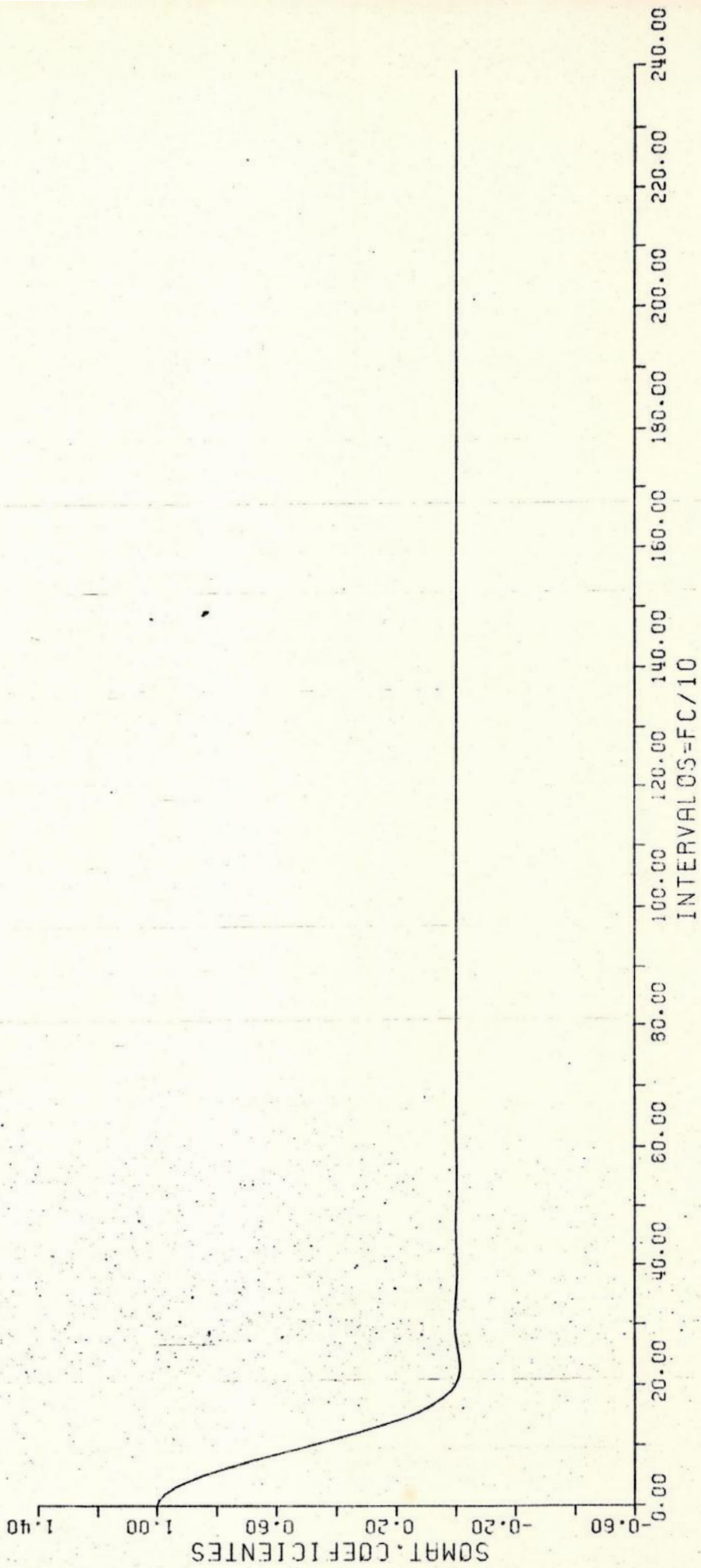


FIGURA 3.4

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA (Com fatores de convergência)

FC=0.0159

TERMOS=81



Podemos dar uma outra interpretação para os fatores de convergência, como sendo os coeficientes de Fourier da função "Box"

$$C(\lambda) = \begin{cases} 2\pi/\delta & \text{se } |\lambda| \leq \delta/2 \\ 0 & \text{se } |\lambda| > \delta/2 \end{cases}$$

e portanto, o produto (3.6) são os coeficientes de Fourier da Convolução da função de transferência ideal (3.4) com a função "Box" apresentada acima.

Para um filtro de passagem de baixa frequência, o efeito deste suavizamento é substituir a função de transferência ideal, com sua frequência de corte w_c , por uma função modificada, que decai linearmente de um valor 1 em $w_c - \delta/2$, para 0, em $w_c + \delta/2$.

Introduzimos assim uma faixa de transição com largura

$$\delta = 4\pi / (2n + 1)$$

Entretanto, isto é válido somente para $w_c \geq \delta/2$. Portanto, para um dado valor de w_c , evitaríamos o uso dos fatores de convergência, ou seja, se $w_c < \delta/2 = 2\pi / (2n+1)$, isto é, se $(2n+1) < 2\pi / w_c$.

Como já explicado, é normalmente desejável que um filtro deixe passar frequências próximas de zero. Isto requer que a função de transferência tenha valor igual a 1 para frequência zero. Mas a figura 3.3 mostra que a função aproximada de um filtro ideal pelos mínimos quadrados, com tais propriedades em geral não satisfazem esta exigência, mesmo se fatores de convergência são utilizados. Para contornar esta dificuldade, substituímos os coeficientes de Fourier h_u por

$$h_u + (1 - \sum h_u) / (2n+1)$$

onde os novos coeficientes são acrescidos algebricamente de um fator que representa a diferença entre o somatório dos h_u e a unidade, divididos pelo n° de termos $(2n+1)$.

Quando fatores de convergência são utilizados a modificação se faz, substituindo h_u por

$$h_u + \frac{1 - \sum h_u}{\sum \sigma_n}$$

onde, agora divididos pelo somatório dos fatores de convergência.

IV - APLICAÇÃO

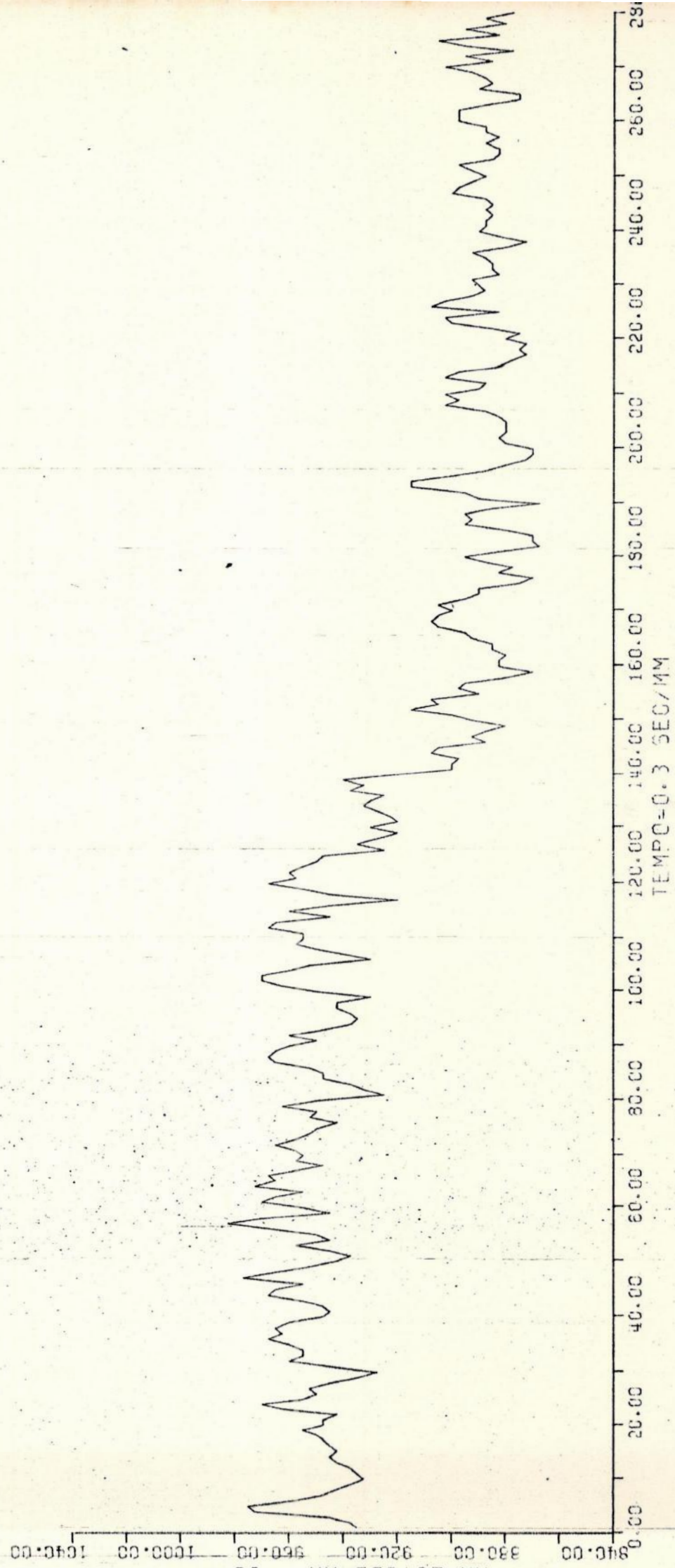
Para aplicação, vamos tomar os dados de uma ocultação do satélite "Io" pela lua, realizado no Observatório do Valongo entre os dias 31/12/76 e 01/01/77 no telescópio Coude ($D = 15\text{cm}$, $F = 225\text{ cm}$), utilizando o fotômetro fotoelétrico feito pela Pacific Photometric Instruments. As medidas foram feitas através do filtro V e registradas no registrador gráfico Hewlett-Packard 680 M.

Neste trabalho vamos utilizar os 280 pontos, registrados pelo fotômetro durante a ocultação, representando a função de entrada, e que chamaremos $L(t)$ (fig. 4.1). Cada intervalo no eixo x espaçados de 1 mm, corresponde ao tempo de medida de aproximadamente 0,3 seg. Portanto, pelo critério de Nyquist (Cap. II-c), a maior frequência sobre a qual, podemos esperar obter informações é de aproximadamente 1,67 Hz. As amplitudes de leitura (eixo y) estão em 10^{-2} mm .

Notamos uma queda na curva, durante o desenvolvimento do gráfico, porém não podemos precisar os instantes em que se deu o início e término do

OCULTACAO DO SATELITE "IO" PELA LUA

FIGURA 4.1



fenômeno. Vamos construir um filtro de passagem de baixa frequência, utilizando a aproximação para um filtro ideal pelo processo dos mínimos quadrados, e utilizando quando necessários, os fatores de convergência e termos de ajustamento final.

Como já dissemos, a escolha da frequência de corte do filtro depende da natureza do problema. No caso da ocultação do satélite "Io" não conhecemos a duração do evento, e visto que os 280 pontos representam 84 seg, vamos admitir inicialmente uma frequência de corte de 0.0119 Hz.

A curva de transmissão do filtro é mostrada na fig. 4.2.

Como os dados de entrada $L(t)$ estão no domínio do tempo, e visto que o processo requer a utilização de convolução, faremos uso do teorema da convolução, porque a função de transferência, calculada pelo método dos mínimos quadrados, encontra-se no domínio das frequências. Devemos ter a sua transformada h_u para ser utilizada na convolução com a função $L(t)$.

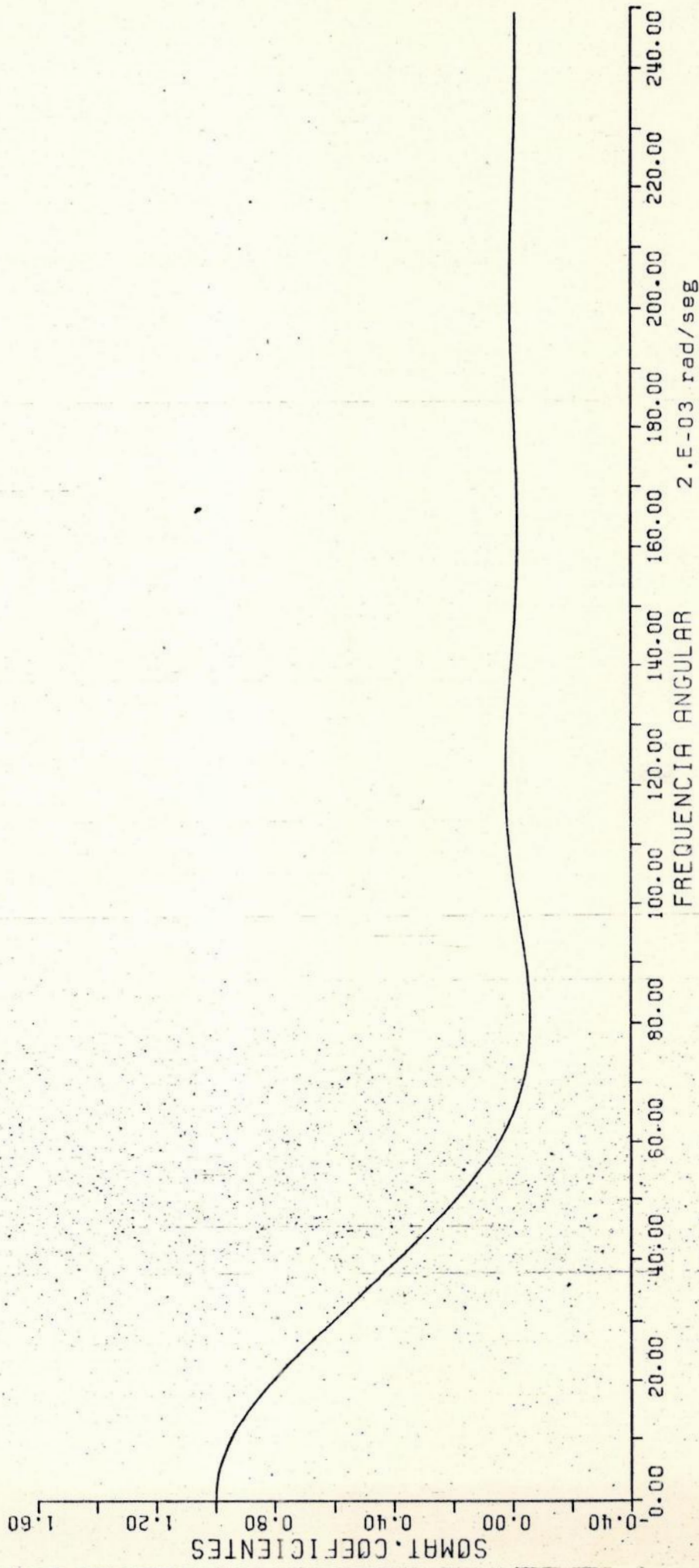
Achamos assim $P(t)$, resultante da convolução entre a função de entrada $L(t)$, com a Trans-

FIGURA 4.2

FUNCAO DE TRANSFERENCIA

FC=0.0119

TERMOS=81



formada de Fourier da Função de Transferência. Estes são os dados da ocultação depois da aplicação do filtro. A figura 4.3 mostra este resultado.

Comparando os gráficos das figuras 4.1 e 4.3, podemos agora notar com maior facilidade o início e término do fenômeno ou seja, tempo inicial e final da ocultação.

Para melhor determinação dos pontos que caracterizam o fenômeno, é conveniente porém, que se ajuste uma polinomial à curva que descreve a ocultação. Esta polinomial será usada para a determinação dos instantes de início e fim da ocultação. A escolha quanto à ordem do polinômio a ser ajustado não é tarefa fácil.

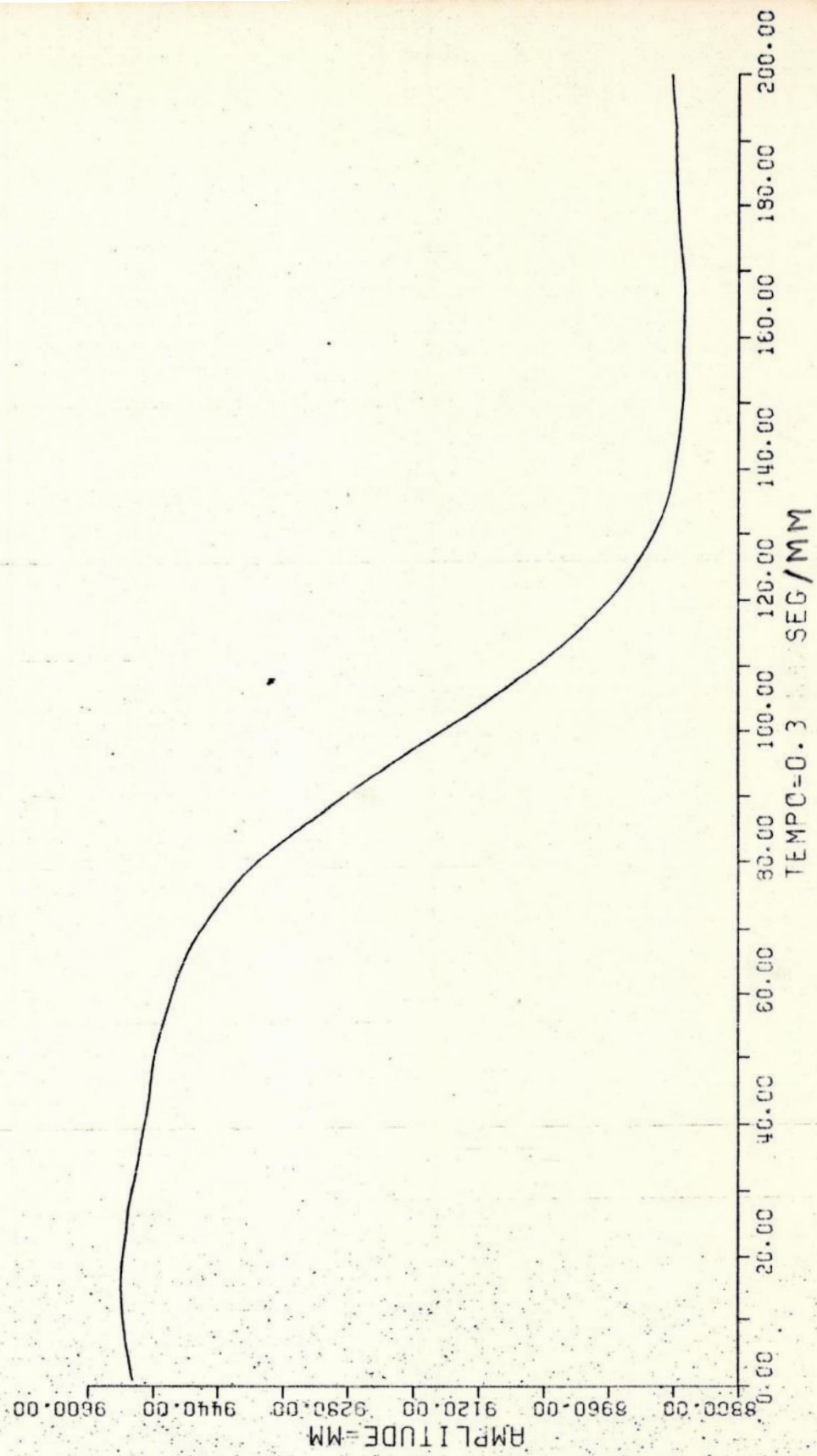
Como resultado deste exemplo, podemos calcular o diâmetro do satélite Io, uma vez que se conheça a velocidade do limbo lunar no instante da ocultação.

PL
OT
E
R
Z
3

CNTA:CMV04001
USUARIQ:ROSSI

FILTRO COM 81 TERMOS. FREQUENCIA DE CORTE=0.0119 HZ

FIGURA 4.3



V - CONCLUSÕES

Observemos que a faixa de transmissão de frequência do filtro se estende além da frequência de corte. Uma forma de minimizar esta fuga e aumentar o n° de termos do filtro. As figuras 5.1 à 5.5 mostram a evolução da curva de transmissão em função do n° de termos.

Quanto maior o n° de termos, mais suave se torna o resultado dos dados filtrados, porém vamos perdendo mais n° de pontos para os extremos da função.

As figuras 5.6 à 5.8 mostram este comportamento.

Numa aplicação mais geral, estas regiões de extremo podem conter informações valiosas e que são sacrificadas pela utilização do método.

Outro aspecto também observado, é que se aplicarmos filtros com frequências de corte cada vez menores, as flutuações tendem a diminuir, porém modificam a curva de descida, alongando-a e consequen-

FIGURA 5.1

FUNCAO DE TRANSFERENCIA

FC=0.0119

TERMS-21

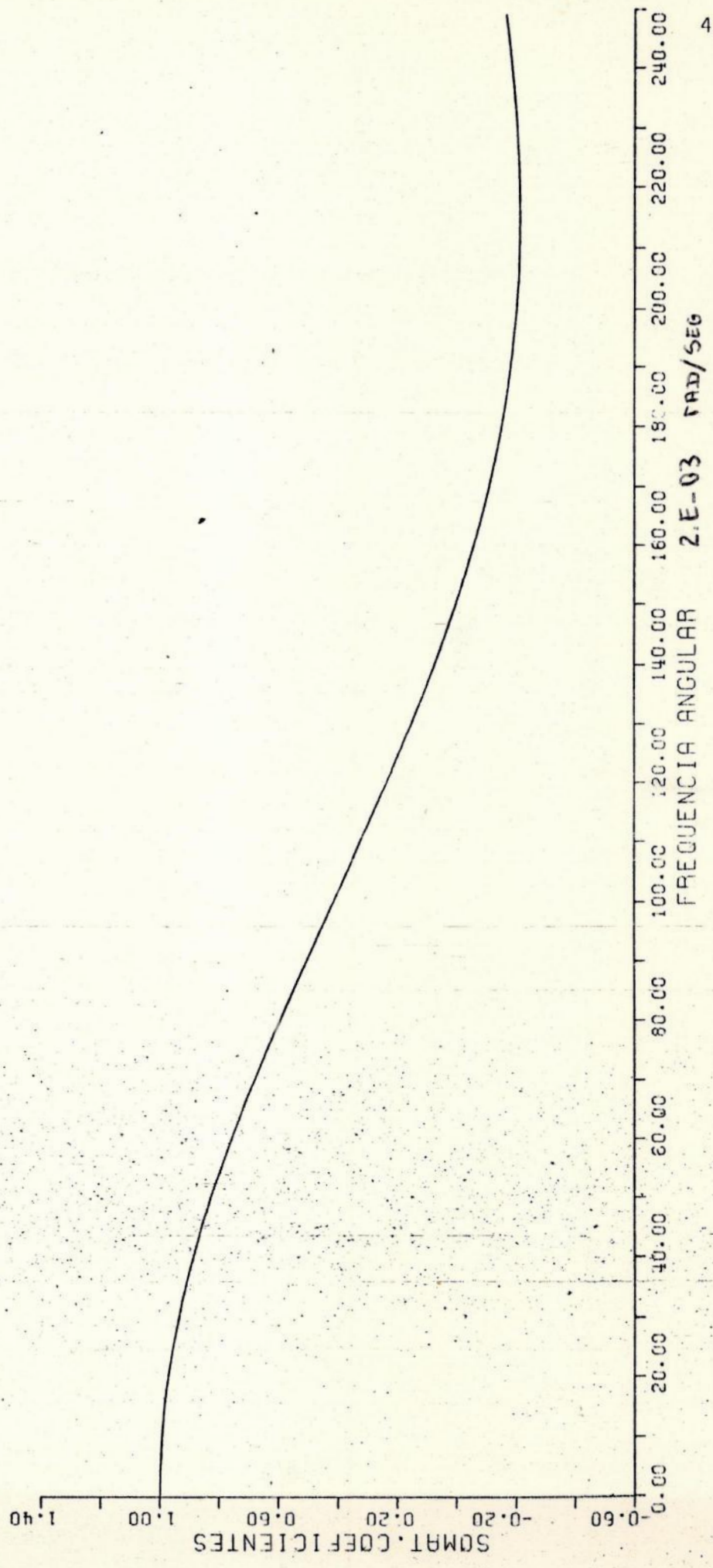


FIGURA 5.2

FUNÇÃO DE TRANSFERENCIA

FC=0.0119

TERMS=41

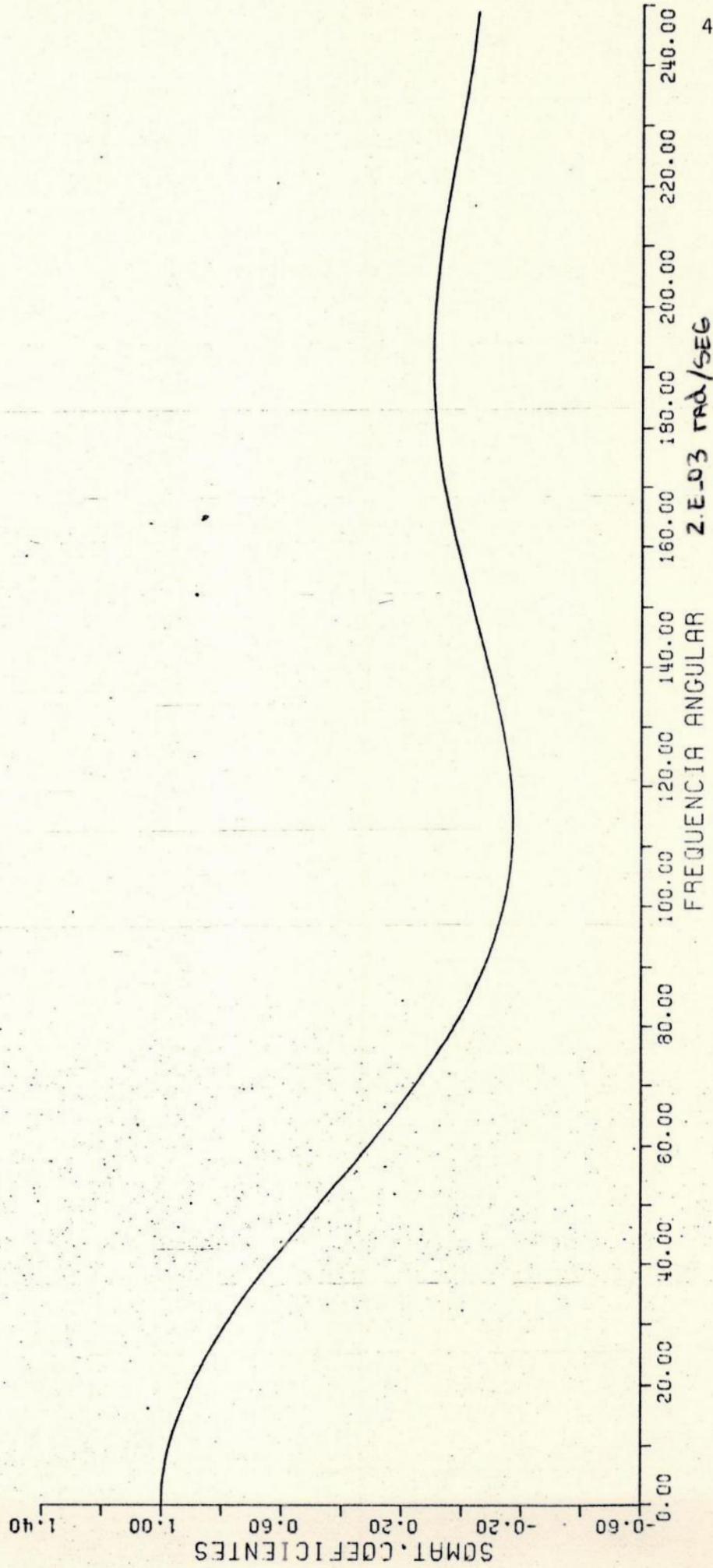


FIGURA 5.3

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

FC=0.0119

TERMS-61

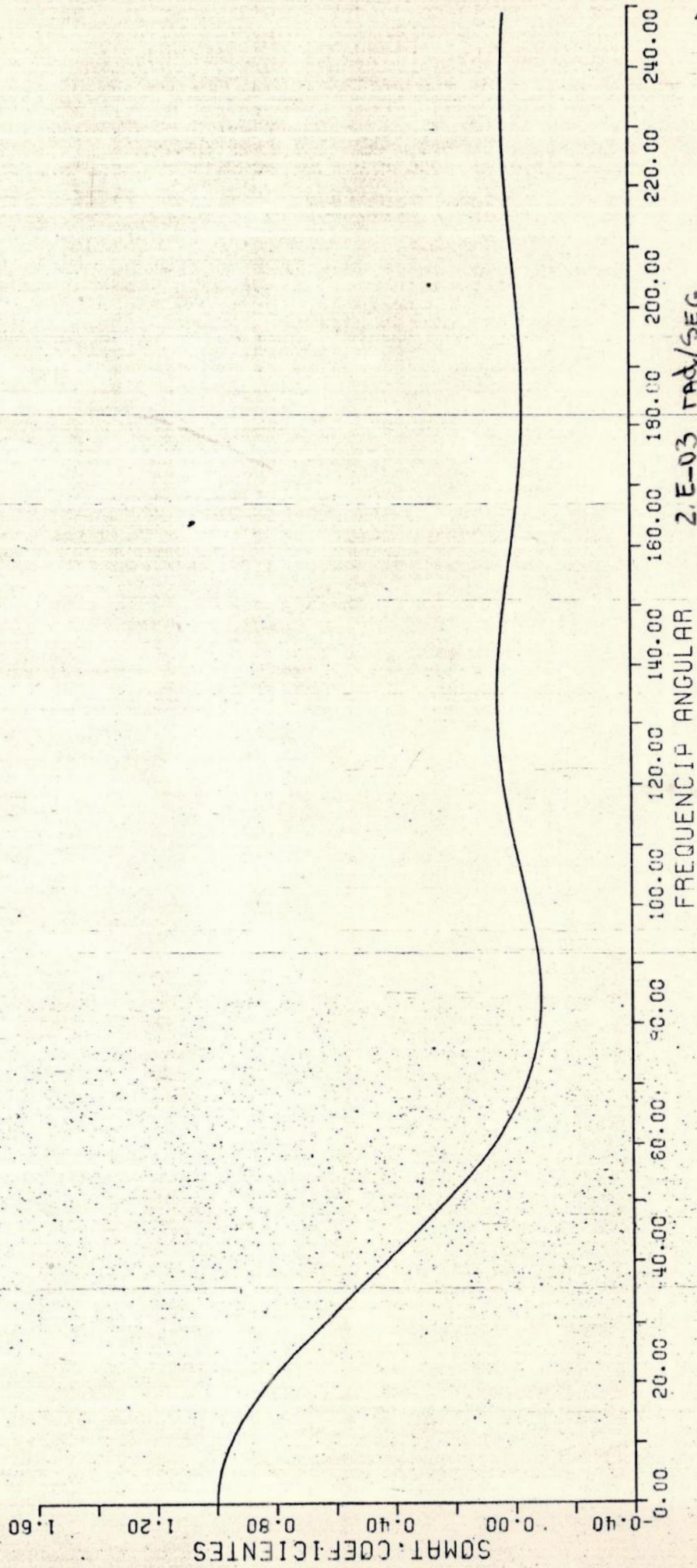
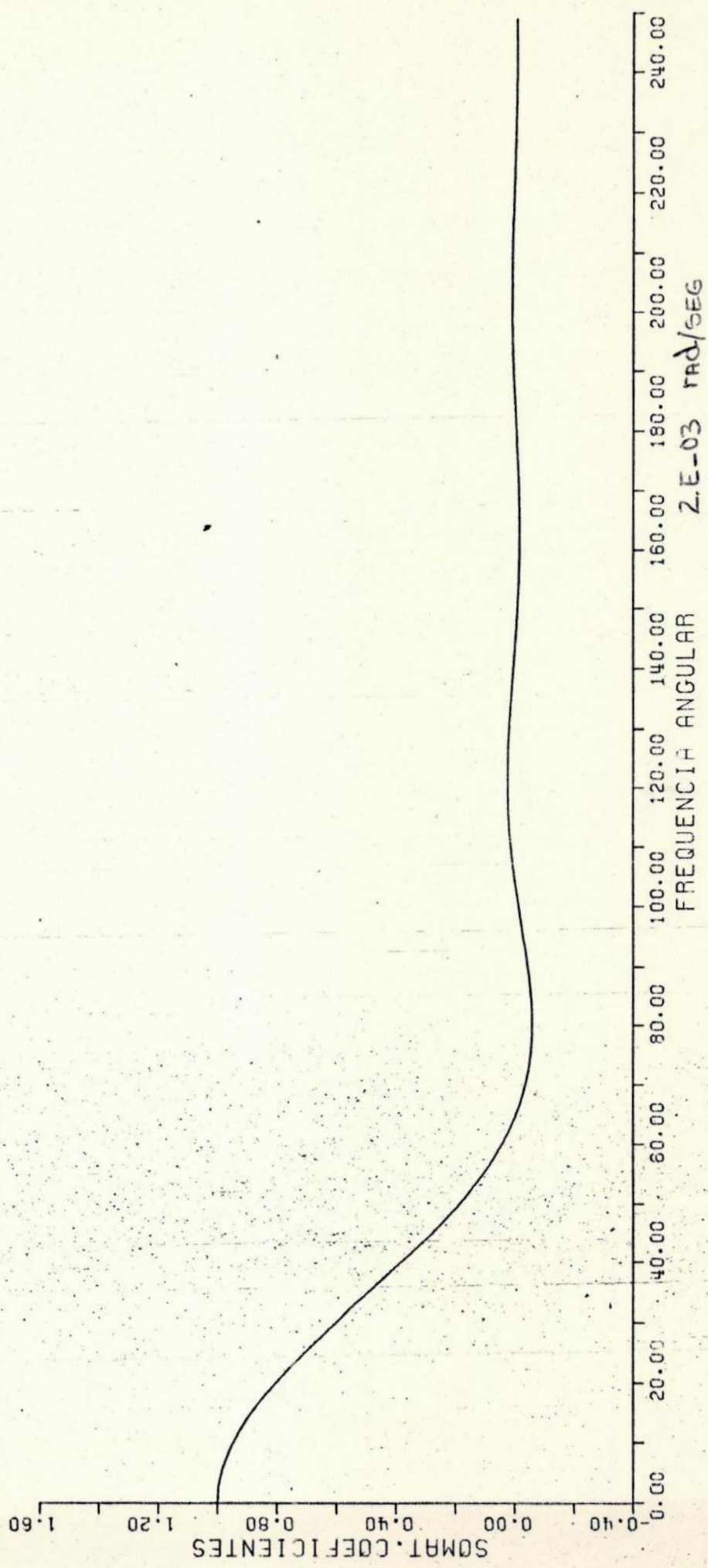


FIGURA 5.4

FUNCAO DE TRANSFERENCIA

FC=0.0119

TERMS=81



Z.E.-03

BUR 1.5

FUNCAO DE TRANSFERENCIA

FC=0.0119

TERMS=101

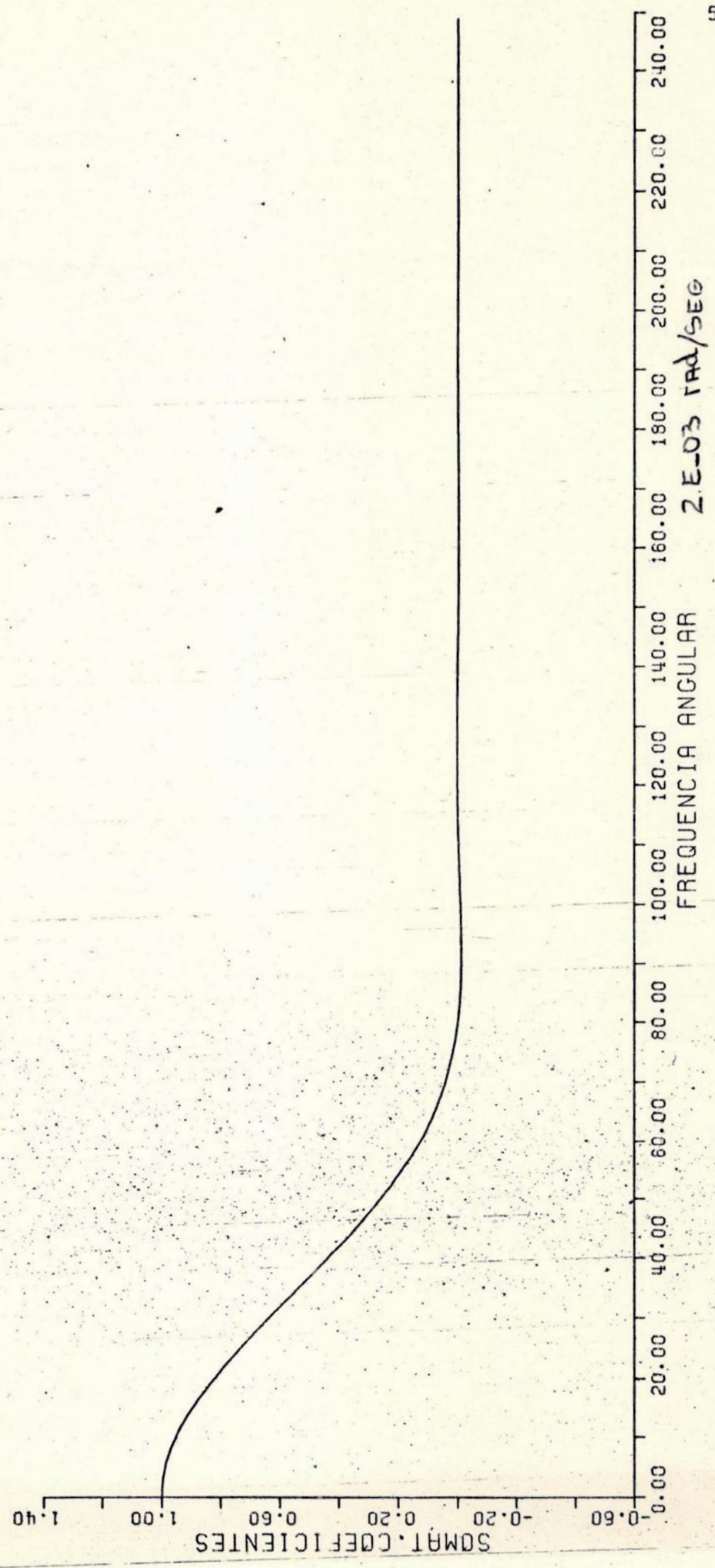


FIGURA 5.6

FILTRO COM 21 TERMOS. FREQUENCIA DE CORTE=0.01119 HZ

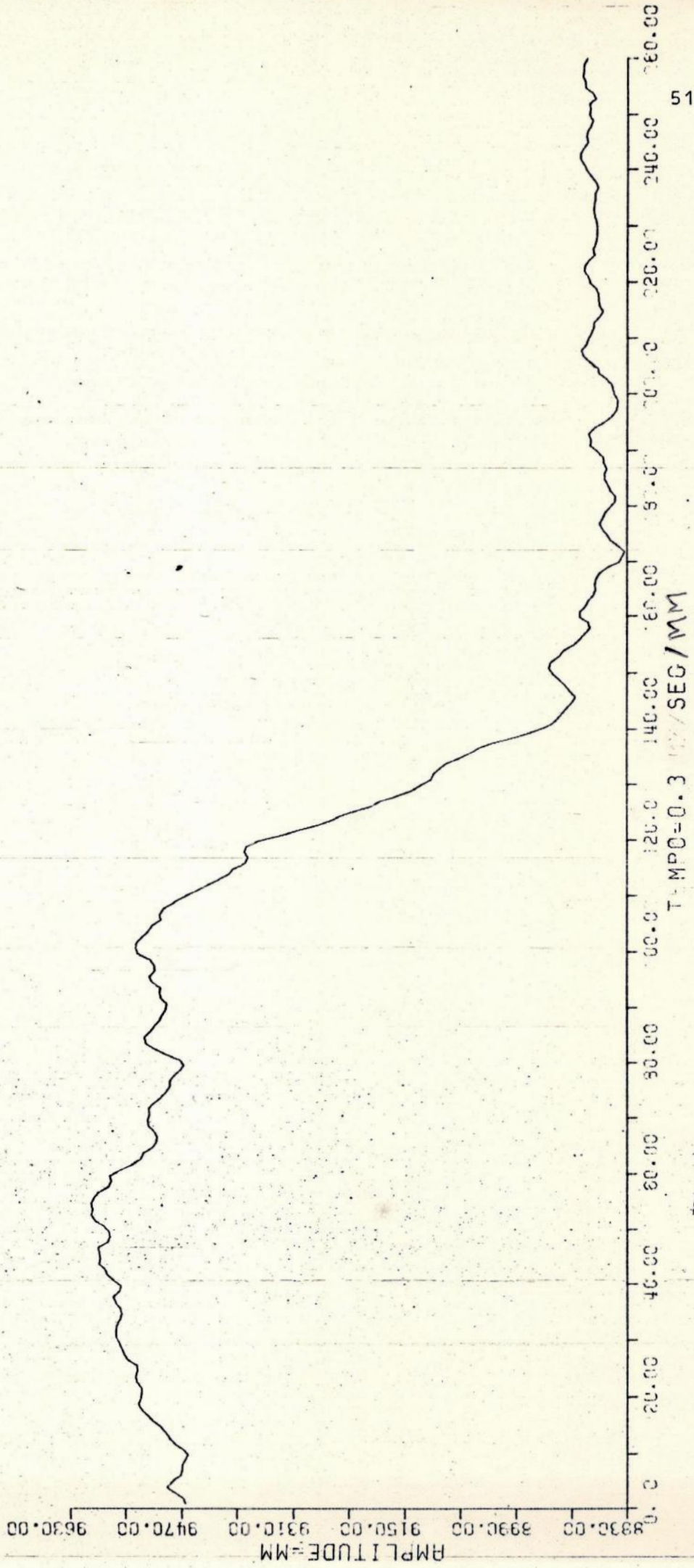


FIGURA 5.7

FILTRO COM 41 TERMOS. FREQUENCIA DE CORTE=0.0119 HZ

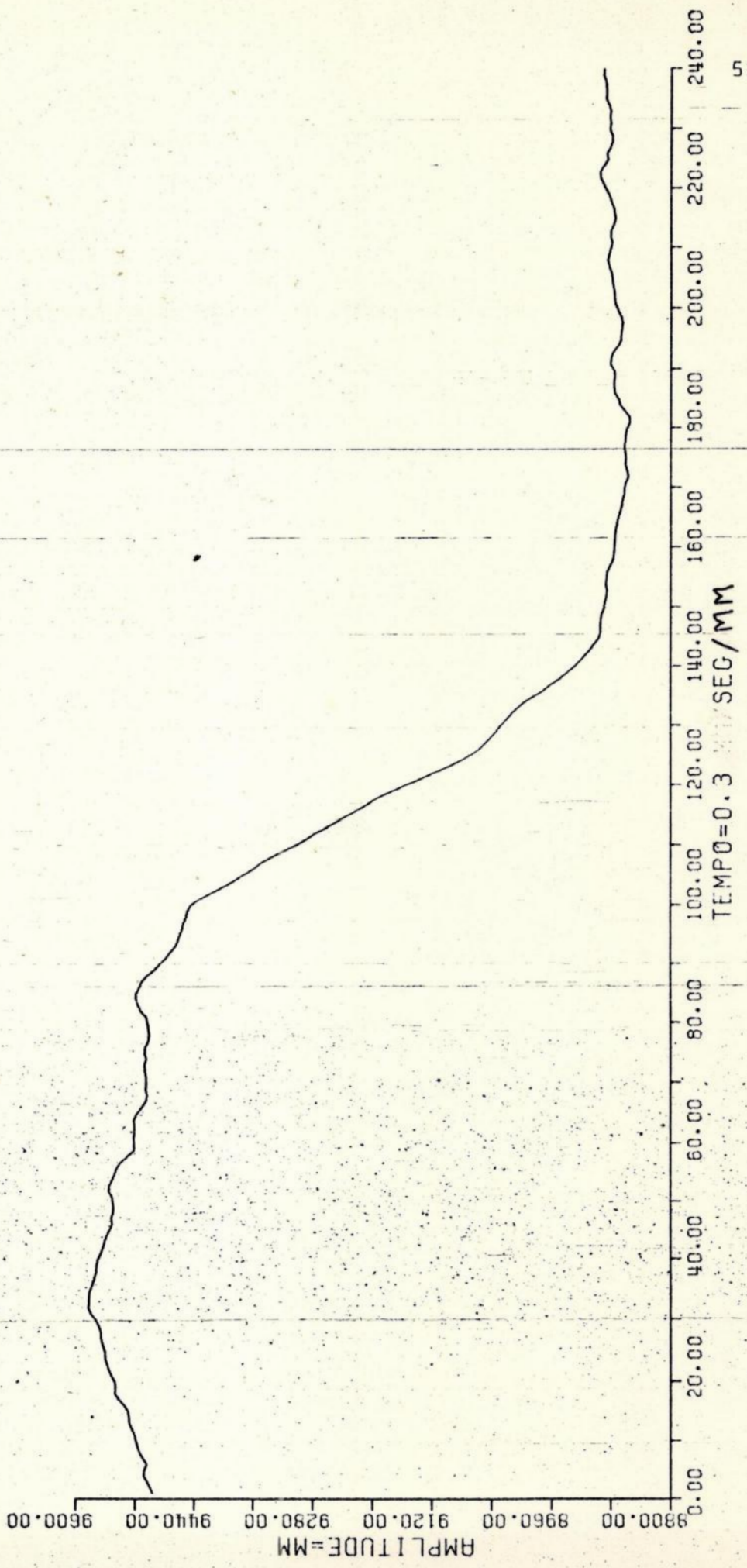
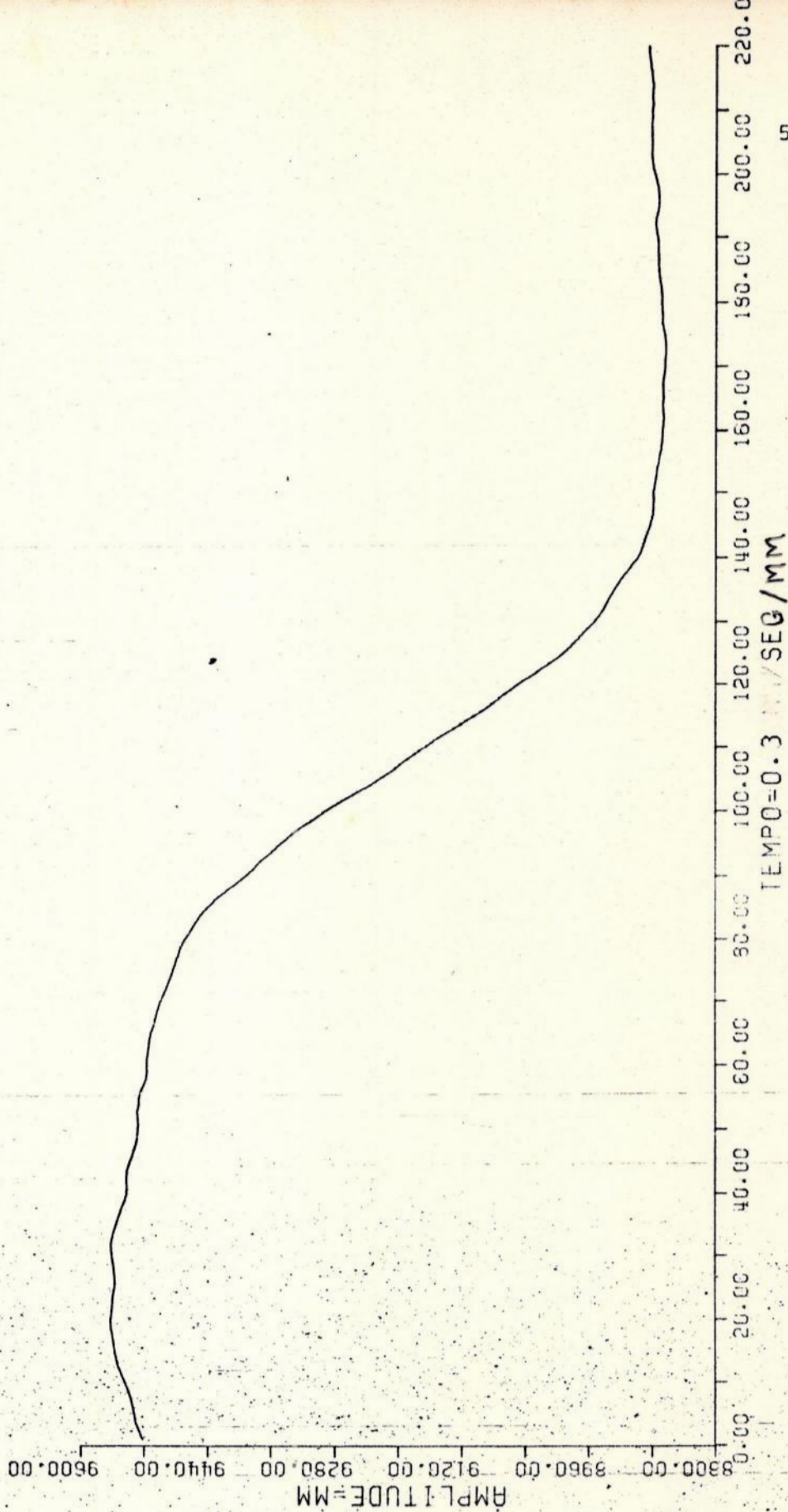


FIGURA 5.8

FILTRO COM 61 TERMOS. FREQUENCIA DE CORTE=0.0119 HZ



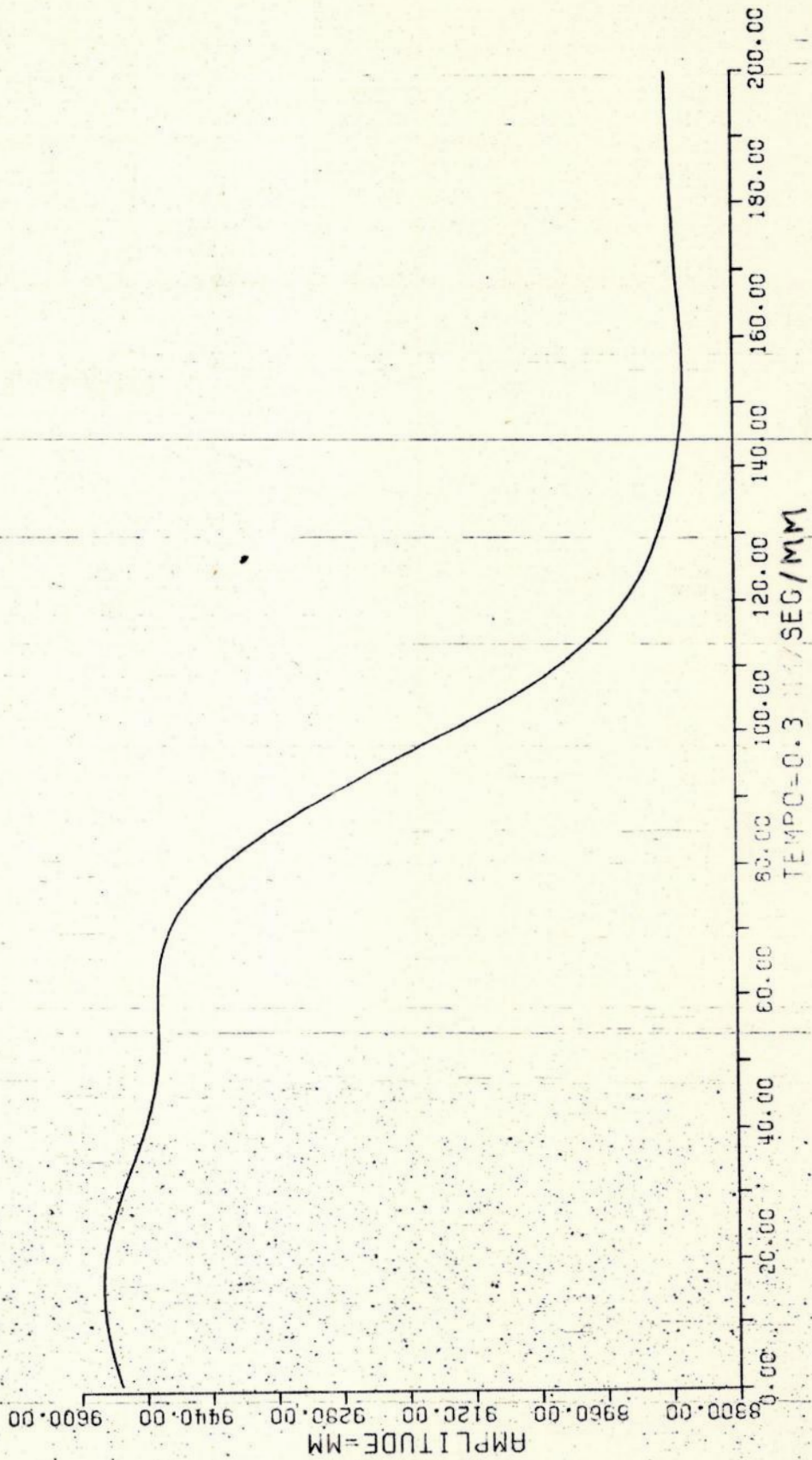
CONTA: CMO4001
USUARIO: ROSSI

temente levando a determinação errônea dos instantes da ocultação. As figuras 5.9 e 5.10 ilustram este aspecto.

Isto é um ponto que merece cuidado. A partir de uma dada frequência de corte não estamos só eliminando o ruído, mas também estamos alterando o sinal original. Portanto é fundamental ter-se uma noção do espectro de frequências esperado do evento, porque é baseado nele que escolhemos a frequência de corte.

FIGURA 5.9

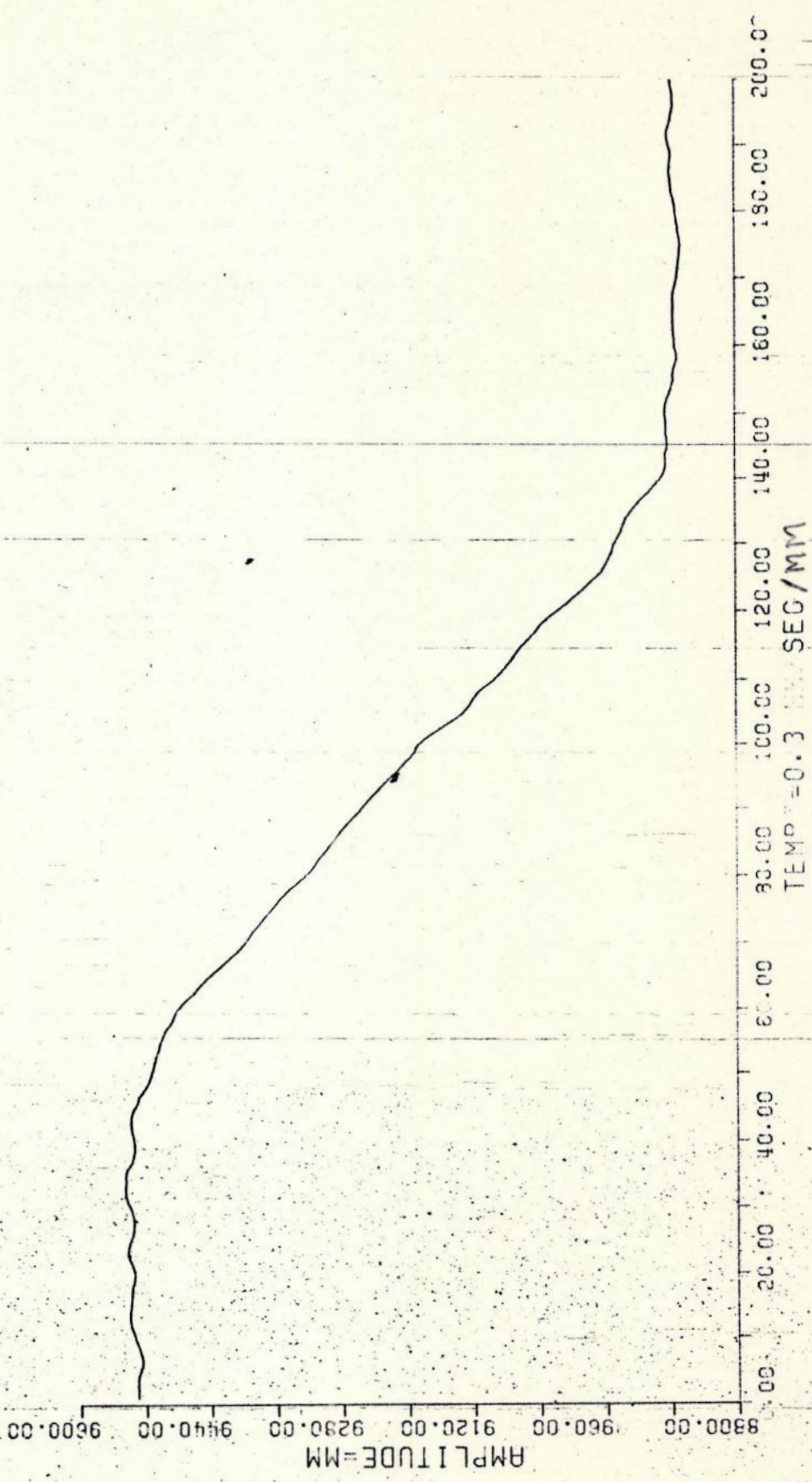
FILTRO COM 81 TERMOS. FREQUENCIA DE CORTE=0.0159 HZ



CONTR:CMV04001
USUARIO:ROSSI

FIGURA 5.10

FILTRO COM 81 TERMOS. FREQUENCIA DE CORTE=0.0016 HZ



CONTR: C0162001
USUARIO: R0551

VI - A P Ê N D I C E

C ESTE PROGRAMA EXECUTA A FILTRAGEM NOS DADOS DE OCULTACAO DO SATELITE
 C "IO" PELA LUA, UTILIZANDO FILTRO COM APROXIMACAO PELO METODO DOS MINI-
 C MOS QUADRADOS
 C PARAMETROS UTILIZADOS:
 C L=NUMERO DE PONTOS REGISTRATOS PELO FOTOMETRO.
 C M=NUMERO DE PONTOS P/PLOTAGEM DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA.
 C N=NUMERO DE PONTOS P/CALCULO DOS COEF. DE FOURIER E PARA DEFINIR O
 C NUMERO DE TERMOS DO FILTRO.
 C FC=FREQUENCIA DE CORTE. CICLOS/SEG.
 C MC=FREQUENCIA ANGULAR DE CORTE.
 C IO=FUNCAO DE ENTRADA (LEITURA DOS DADOS).
 C IOX=EIXO X P/PLOTAGEM DA FUNCAO DE ENTRADA
 C H=COEFICIENTES DE FOURIER
 C X=MUDANCA DOS COEF. P/TECNICA DE CONVOLUCAO
 C G=FUNCAO DE TRANSFERENCIA
 C MX=EIXO X P/PLOTAGEM DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA
 C P=RESULTADO DA CONVOLUCAO (DADOS FILTRADOS).
 C LX=EIXO X P/PLOTAGEM DA CONVOLUCAO
 DIMENSION IO(300), IOX(300), H(100), G(300), X(100), P(300), LX(300), MX(
 1300)
 PI=3.1416
 READ(5,50)M,L,(IO(I),I=1,L)
 50 FORMAT(2I5,20(/,14I5))
 READ(5,100)FC,N
 100 FORMAT(F10.4,I5)
 LN=L-2*N
 MC=2.*PI*FC
 TERMS=FLOAT(2*N+1)
 DO 10 I=1,L
 IOX(I)=I
 10 CONTINUE
 WRITE(6,150)FC,MC,N,M,L
 150 FORMAT(T20,'FC=',F10.4,' HZ',5X,'MC=',F10.4,' /,T21,'N=',I5,' /,T21,
 1'M=',I5,' /,T21,'L=',I5,' //,1X)
 WRITE(6,200)(IO(I),I=1,L)
 200 FORMAT(T20,'MEDIDAS DO SATELITE IO PARA PROCESSAMENTO DE FILTRAGEM
 1',/,T20,'=====',/
 2//,(10(I10,2X)))
 CALL COEF(H,MC,N,PI)
 WRITE(6,400)(H(I),I=1,N+1)
 400 FORMAT(/////T20,'COEFICIENTES DE FOURIER H(N) DA FUNCAO DE TRANS
 1FERENCIA G(W)',/,T20,'=====',/
 2=====,///,(15F8.4))
 CALL TRANSF(G,H,N,M,MX)
 WRITE(6,600)(G(I),I=1,M)
 600 FORMAT(/////T20,'FUNCAO DE TRANSFERENCIA G(W) PARA W=0.002*M. M=
 10,1,2...',/,T20,'=====',/
 2=====,///,(15F8.4))

```

C SUBSTITUICAO DOS COEFICIENTES H(I) POR X(I), PARA MAIOR FACILIDADE
C NA APLICACAO DA TECNICA DE CONVOLUCAO.
NN=N+1
K=0
DD 30 I=1,2*N+1
X(I)=H(NN)
IF((K.EQ.1).OR.(NN.EQ.1))GO TO 5
NN=NN-1
GO TO 30
5 K=1
NN=NN+1
30 CONTINUE
CALL CONV(ID,X,P,LX,N,L)
WRITE(6,800)(P(I),I=1,L-2*N)
800 FORMAT(//////,T20,'CONVOLUCAO DE HCN) COM AS MEDIDAS DO SATELITE I
10',/,T20,'=====','//,(1
20F12.4))
WRITE(6,950)
950 FORMAT(//,T40,'*****',/,T40,'*****
1*****',//,1X)
CALL LIMITE(105,30)
CALL PLOTS(10)
CALL NOME(23,'COI62001','ROSSI')
CALL FACTOR(2)
CALL PLOT(3,10,-3)
CALL SYMBOL(3,15,0.4,'OCULTACAO DO SATELITE "IO" PELA LUA',0.,35)
CALL SCALE(IOX,L/10,L,1)
CALL SCALE(ID,10,L,1)
CALL AXIS(0,0,'TEMPO=0.3 SEG/MM',-16,L/10,0,IOX(L+1),IOX(L+2),2)
CALL AXIS(0,0,'AMPLITUDE=MM',12,10,90,IO(L+1),IO(L+2),2)
CALL LINE(IOX,IO,L,1,0,0)
CALL PLOT(40,0,-3)
CALL SYMBOL(3,15,0.4,'FUNCAO DE TRANSFERENCIA',0.,23)
CALL SYMBOL(3,14,0.2,'FC=',0.,3)

CALL NUMBER(999,999,0.2,FC,0,4)
CALL SYMBOL(3,13,0.2,'TERMOS=',0,7)
CALL NUMBER(999,999,0.2,TERMOS,0,-1)
CALL SCALE(MX,M/10,M,1)
CALL SCALE(G,10,M,1)
CALL AXIS(0,0,'FREQUENCIA ANGULAR 2.E-03 RAD/SEG.',-35,M/10,0,
1MX(M+1),MX(M+2),2)
CALL AXIS(0,0,'SDMAT. COEFICIENTES',18,10,90,G(M+1),G(M+2),2)
CALL LINE(MX,G,M,1,0,0)
CALL PLOT(30,0,-3)
CALL SYMBOL(3,15,0.4,'DADOS FILTRADOS',0,15)
CALL SYMBOL(3,14,0.2,'FC=',0,3)
CALL NUMBER(999,999,0.2,FC,0,4)
CALL SYMBOL(3,13,0.2,'TERMOS=',0,7)
CALL NUMBER(999,999,0.2,TERMOS,0,-1)
CALL SCALE(LX,LN/10,LN,1)
CALL SCALE(P,10,LN,1)
CALL AXIS(0,0,'TEMPO=0.3 SEG/MM',-16,LN/10,0,LX(LN+1),LX(LN+2),2)
CALL AXIS(0,0,'AMPLITUDE=MM',12,10,90,P(LN+1),P(LN+2),2)
CALL LINE(LX,P,LN,1,0,0)
CALL PLOT(0,0,999)
STOP
END

```

SUBROUTINE COEF(H,WC,N,PI)

C ESTA SUBROTINA DETERMINA OS COEFICIENTES DE FOURIER, OS QUAIS SATIS-
 C FAZEM A EQUACAO DO FILTRO PELO PROCESSO DOS MINIMOS QUADRADOS.
 C SAO UTILIZADOS FATORES DE CONVERGENCIA, QUANDO NECESSARIOS.
 C TAMBEM SAO UTILIZADOS TERMOS DE AJUSTAMENTO PARA QUE O SOMATORIO DOS
 C COEFICIENTES APROXIME-SE DA UNIDADE

DIMENSION H(100)

DELTA=(4.*PI)/FLOAT(2*N+1)

H(1)=WC/PI

SOMAT=H(1)

IF(WC.LT.DELTA/2.)GO TO 5

SOFAT=1.

DO 10 I=1,N

FATOR=SINC(2.*PI*I)/FLOAT(2*N+1)/((2.*PI*I)/FLOAT(2*N+1))

SOFAT=SO FAT+2.*FATOR

H(I+1)=(SIN(I*WC)/(PI*I))*FATOR

SOMAT=SOMAT+2.*H(I+1)

10 CONTINUE

1 IF(ABS(1.-SOMAT).LT.(1.E-04))RETURN

H(1)=H(1)+(1.-SOMAT)/SO FAT

SNH=H(1)

DO 20 I=1,N

H(I+1)=H(I+1)+(1.-SOMAT)/SO FAT

SNH=SNH+2.*H(I+1)

20 CONTINUE

SOMAT=SNH

GO TO 1

5 DO 30 I=1,N

H(I+1)=SIN(I*WC)/(PI*I)

SOMAT=SOMAT+2.*H(I+1)

30 CONTINUE

IF(ABS(1.-SOMAT).LT.(1.E-04))RETURN

DO 40 I=1,N+1

H(I)=H(I)+(1.-SOMAT)/FLOAT(2*N+1)

40 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE TRANSF(G,H,N,M,MX)

C ESTA SUBROTINA DETERMINA A CURVA DE TRANSMISSAO DO FILTRO.
 C A VARIAVEL W REPRESENTA A FREQUENCIA ANGULAR A PARTIR DE ZERO, E COM
 C INCREMENTO DE 0.002.
 C A VARIAVEL G ESTABELECE A FAIXA DE TRANSMISSAO DO FILTRO EM FUNCAO
 C DE W.

DIMENSION G(300),H(100),MX(300)

MX(M+1)=0.

MX(M+2)=2.E-03

DO 10 I=1,M

MX(I)=I-1

W=(2.E-03)*MX(I)

SOMAT=0.

DO 20 J=1,N

SOMAT=SOMAT+H(J+1)*COS(J*W)

20 CONTINUE

G(I)=H(1)+2.*SOMAT

10 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE CONV(I0,X,P,LX,N,L)

C ESTA SUBROTINA PRODUZ A CONVOLUCAO ENTRE A FUNCAO DE ENTRADA (I0) E
 C OS COEFICIENTES DE FOURIER (X) DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA (G) DO FIL-
 C TRO. A VARIAVEL P DETERMINA A SOMA DO PRODUTO DOS DADOS DE ENTRADA,
 C COM OS COEFICIENTES DE FOURIER, PARA UM DADO NUMERO DE TERMOS (2N+1).
 C CALCULADO PARA TODOS OS P(I), RESULTA NA CURVA DOS DADOS FILTRADOS.

DIMENSION I0(300),X(100),P(300),LX(300)

INC=0

DO 10 I=1,L-2*N

LX(I)=I

SOMA=0.

DO 20 J=1,2*N+1

RES=FLOAT(I0(J+INC))*X(J)

SOMA=SOMA+RES

20 CONTINUE

P(I)=SOMA

INC=INC+1

10 CONTINUE

RETURN

END

VII - BIBLIOGRAFIA

- BLOOMFIELD, P., (1976). Fourier Analysis of Time Series: An Introduction. New York: John Wiley & Sons.
- BRACEWELL, R., (1965). The Fourier Transform and its Applications. New York: McGraw-Hill, Inc.
- GRAY, F. (1976). The Observations and Analysis of Stellar Photospheres. New York: John Wiley & Sons.