



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
OBSERVATÓRIO DO VALONGO

FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO PARA
GALÁXIAS: MÉTODOS DE CÁLCULO

JEFFERSON LUIS DA SILVA MIRANDA

ORIENTADOR: JOSÉ AUGUSTO BUARQUE DE NAZARETH

RIO DE JANEIRO - 1985

ERRATA

- pág. iii - galáxias (em vez de galáxies)
- pág. 3, 19§ - por nós, aqui, empregada
- pág. 5, 39§ - poder ser (em vez de poder se)
- pág. 8, 39§ - galáctica (em vez de galática)
- pág. 8, 39§ - se (em vez de se; 19ª linha)
- pág. 9, 49§ - desvio para o vermelho (em vez de "redshift")
- pág. 11, 19§ - apreciável (em vez de apresentada)
- pág. 21, 39§ - que distam θ da borda
- pág. 21, 39§ - objetos tomados como centros (em vez objetos tomados como centro)
- pág. 22, 29§ - $w_{12} = w_{21}$, e apenas
- pág. 22, 29§ - aleatoriamente, por definição, não
- pág. 24, 19§ - erros esperados é dada pela (em vez de erros esperados é a)
- pág. 26, 29§ - Austin et al. (em vez de Austin e al.)
- pág. 28, 19§ - as funções (em vez de a função)
- pág. 28, 19§ - fortemente (em vez de fracamente)
- pág. 28, 29§ - brilhante. (em vez de brilhante, onde existe um corte.)
- pág. 28, 39§ - as hipóteses, sobre as quais.
- pág. 29, 39§ - equação (II.6.1).
- pág. 30, 29§ - convolução (em vez de convulsão)
- pág. 31 - "incompleteza" (em vez de "incompletude")
- pág. 32, 19§ - função seleção, numa resenha.
- pág. 33, 39§ - inomogeneidades (em vez de inomogeneidade)
- pág. 37, 59§ - desvio para o vermelho (em vez de "redshift")
- pág. 35, 29§ - plano asseguram, Davis e Peebles.
- pág. 39, 39§ - e que esta função (em vez de e que função)
- pág. 42, 29§ - Δl e assim (em vez de Δl , assim)
- pág. 44, 19§ - exter (em vez de exter; 8ª linha)
- pág. 44, 39§ - CÓDIGO) (em vez de CÓDIGO)
- pág. 44, 39§ - primeiramente,
- pág. 44, 39§ - 2ª registro-número (em vez de 2ª registro número)
- pág. 45, 29§ - galáctica (em vez de galática)
- pág. 47, 29§ - necessário, apenas,
- pág. 48, 39§ - quadrado; γ é a inclinação
- pág. 49, 69§ - completeza (em vez de "completude")
- pág. 51, 19§ - completeza (em vez de "completude")
- pág. 51, 39§ - fato (em vez de ffato)
- pág. 51, 39§ - débeis (em vez de débeis)
- pág. 53, 19§ - (eq.II.5.6); A amostra satisfaz, ainda, aos seguintes critérios de seleção:

pág. 6, eq. (II.1.7) - $\xi(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty dr_p w'(r_p) (r_p^2 - r^2)^{-1/2}$

pág. 16, eq. (II.6.1) - $\gamma > 1$.

pág. 20, - $n_p = (1/2) N^2 \Omega \langle \delta \Omega \rangle [1 + w(\theta_1)]$,

pág. 28, - $\Phi(L) dL = \Phi_*(L/L_*)^\alpha \exp(-L/L_*) dL$

pág. 37, eq. (III.6.2) - $\xi(r, t) = Br^{-\gamma} (1+Z)^{-(3+\epsilon)}$,

*Obscurum per obscurius
Ignotum per ignotius*

Divisa alquímica

*(Ir para o obscuro e o desconhecido
por aquilo que é ainda mais obscuro
e desconhecido).*

A G R A D E C I M E N T O S

Gostaria de deixar expressos meus sinceros agradecimentos ao José Augusto, com quem estou, particularmente, em débito: não sô pela sugestão do projeto, a extrema dedicação e indispensável orientação, como também, e, principalmente, pela presença ativa num processo de amadurecimento intelectual. As dificuldades encontradas não foram poucas, contudo, sua paciência e sagacidade motivaram-me a superá-las, mesmo nos momentos mais críticos.

Gostaria, também, de agradecer ao Gilson Gomes Vieira, cuja importância no plano computacional deste projeto sô eu posso apreciar, bem como ao Júlio César Klafke.

Os professores do Valongo, do Instituto de Física e os colegas da UFRJ foram muito importantes para minha formação acadêmica e, direta ou indiretamente, estão presentes neste projeto. Terminarei, pois, agradecendo-lhes, pelo extenso aprendizado que nossa convivência possibilitou.

R E S U M O

Concentrações de galáxias em larga escala (≥ 10 Mpc) são conhecidas há algum tempo, e o estudo de tais aglomerados, além do interesse intrínseco que desperta, pode fornecer-nos idéias que possibilitem a compreensão da forma de organização do Universo, pelo menos num primeiro plano estrutural. No presente projeto, temos por objetivo criar uma sub-rotina para o cálculo de uma estatística - a função de correlação espacial de dois pontos - usada no estudo de aglomerados de galáxias, como medida relativa da aglomeração. Apesar da proposta em caráter estritamente operacional, não nos privaremos de uma discussão o máximo abrangente. Nesse sentido, apresentaremos um desenvolvimento teórico, que nos levará a certas relações fundamentais na análise de conglomerados de galáxias, indicaremos correções a serem feitas nas estatísticas, a fim de se obter resultados mais apurados e examinaremos algumas incertezas nas estimativas envolvidas no estudo.

ÍNDICE

	Página
I - INTRODUÇÃO	1
II - FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO DE DOIS PONTOS	4
II.1 - Função de correlação espacial de dois pontos	4
II.2 - Função de correlação angular de dois pontos	7
II.3 - Relação entre as funções de correlação angu- lar e espacial de dois pontos	8
II.4 - Aproximação para pequena separação e a rela- ção de escalonamento	11
II.5 - Desacoplamento da magnitude e posição	13
II.6 - Relação entre ξ e w : exemplo	16
II.7 - Inversão da equação	17
III - ESTIMATIVAS E ERROS	20
III.1 - Estimativa de $w(\theta)$	20
III.2 - Erros sistemáticos e estatísticos de $w(\theta)$..	21
III.3 - Função luminosidade	24
III.3a- Problemas com a função luminosidade	28
III.4 - A função seleção	30
III.4a- Estimativa de $\phi(r)$	32
III.5 - Estimativa de $\xi(s)$	34
III.6 - Correção para a Curvatura e Expansão	37
III.7 - Observações	40
IV - MONTAGEM DO CATÁLOGO UNIFORME E A SUB-ROTINA	42
IV.1 - Montagem do Catálogo Aleatório	42
IV.2 - A Sub-rotina	43
V - APLICAÇÃO	51
V.1 - A Amostra	51
V.2 - Os resultados	52

	Página
VI - APÊNDICES	
A.1 - Transformada de Mellin	54
A.2 - A Sub-rotina: fluxograma e listagem	57
BIBLIOGRAFIA	92

I INTRODUÇÃO

Nosso conhecimento sobre a estrutura em larga escala do Universo é limitada por nossa habilidade em reconhecer e observar objetos remotos, bem como em determinar suas distâncias e propriedades físicas. As galáxias ocorrem numa vasta variedade de sistemas, que vão de binários, passando por pequenos grupos, indo a aglomerados de vários graus de riqueza, até a super-aglomerados. Tais sistemas, por sua vez, cobrem um vasto intervalo de densidades e tamanhos. A existência de galáxias isoladas, ou seja, galáxias que não podem ser atribuídas a nenhuma dessas estruturas, está ainda sob debate. A aglomeração parece ser uma propriedade fundamental da distribuição espacial das galáxias.

A tendência à aglomeração tem um caráter hierárquico. Os agregados de galáxias geralmente consistem de agregados menores que são membros de agregados maiores. O Grupo Local, por exemplo, contém dois sub-grupos maiores, um dominado por M31 e o outro pela Via Láctea. Tais subgrupos são também encontrados no aglomerado de Virgem (Holmberg, 1975/R7). E, de acordo com de Vaucouleurs (1953/R7), o Grupo Local e o Aglomerado de Virgem pertencem a um super-aglomerado.

A hierarquia de aglomeração estende-se indefinidamente, em direção a agregados cada vez maiores, como no modelo de Universo de Charlier (1908/R7), ou termina fortuitamente? Hubble concluiu que existe um limite superior finito para a escala de aglomeração. Zwicky (1938/R7) chegou à mesma conclusão, e estimou a escala máxima de aglomeração como sendo 7.5×10^7 pc. O estudo de Abell (1958/R7) sobre a distribuição espacial de aglomerados compactos estabeleceu que, para estes sistemas, a escala máxima de aglomeração é cerca de 9×10^7 pc. Isto implica que o Universo visível contém um grande número de "amostras justas" (Hubble, 1936/R7). Pela comparação das propriedades estatísticas, pode-se, em princípio, checar a hipótese de homogeneidade e isotropia. O fracasso em detectar qualquer diferença significativa entre propriedades estatísticas de larga escala fornece um poderoso suporte tanto para a hipótese de homogeneidade e isotropia, bem como para a existência de um limite superior efetivo para a escala de aglomeração.

No modelo pioneiro de Neyman e Scott (1952/R10), as galáxias estão localizadas em conglomerados-estruturas que podem conter uma única galáxia, aglomerados de galáxias, ou hierarquias de aglomerados em formação-que são distribuídos segundo um processo Poisson discreto uniforme e aleatório. Tal consideração pode não ser uma representação real dos processos físicos pelos quais as galáxias são organizadas, já que cada conglomerado deve ser perturbado pelos vizinhos, todavia, é-nos bastante conveniente no plano computacional, por ter a grande vantagem de tornar possível a visualização da natureza da conglomeração que está sendo modelada.

Duas aproximações gerais ao estudo empírico da distribuição em larga escala da matéria podem ser chamadas a "botânica" e a estatística das galáxias. A redução dos fenômenos a tipos específicos de objetos, como as galáxias ou os aglomerados de Abell, é direta e, certamente, confiável. Por outro lado, vê-se desde os anos trinta uma tendência em se pensar que a distribuição geral é tão complicada, e os dados que esperamos obter tão esquemáticos, que uma redução total a gêneros e espécies de conglomerações pode não ser confiável, ou mesmo possível. A alternativa é, então, reportar-nos às medidas estatísticas.

Muitos esforços fazem-se sentir nos anos recentes a fim de desenvolver uma descrição das conglomerações em termos probabilísticos. As estimativas, com claro favoritismo histórico, têm sido as variantes da função de autocorrelação. Nesta forma aproximativa, devida principalmente a Peebles, um dos resultados mais bem estabelecidos é a chamada função de correlação de dois pontos, $\xi(r)$, onde r é a separação espacial entre as galáxias. Em princípio, a partir de uma amostra adequada de posições e desvios para o vermelho, seríamos capazes de medir $\xi(r)$ diretamente, mas na prática, isto é impossível. Somos, então, forçados a introduzir uma função de correlação angular de dois pontos $w(\theta)$, sendo θ a separação angular entre as galáxias no plano do céu, e convertê-la, posteriormente, na correlação espacial. Isto é feito solucionando a equação integral de Limber, o que requer a introdução de uma função seleção, da amostra, a qual, para uma amostra limitada em magnitude, é expressa em termos da integral da função luminosidade.

O objetivo desse trabalho é a criação de uma sub-rotina para o cálculo da função de correlação espacial de dois pontos, que propicie ulteriores análises da distribuição, em larga escala, da matéria no Universo. Lembramos que a técnica por nós, aqui empregada é apenas uma variação, baseada principalmente naquela proposta por Peebles (1980), entre tantas outras. Não representa, destarte, a última palavra numa estatística de medida de conglomeração de galáxias, mas sim avanços neste sentido. Deve-se ter sempre em mente que, enquanto esta estatística tem provado sua importância, outras igualmente úteis podem emergir. Empregaremos certas sofisticações, sugeridas por Peebles e outros, mesmo onde certos autores as consideram dispensáveis; todavia, suprimiremos outras, apesar de apresentá-las, por não nos parecer conveniente, principalmente no que tange o plano prático. Observamos, entretanto, que tal ato não é de todo arbitrário, mas suportado por estudos osos no assunto.

Iniciaremos, no Capítulo II, com uma apresentação teórica da estatística em questão, indicando, também, algumas variantes. No Capítulo III, esboçaremos certos métodos de estimativa de algumas das funções envolvidas na estatística, estimativas de erros estatísticos bem como as possíveis origens de erros sistemáticos apresentando, ainda, correções a serem feitas. O quarto capítulo estará dedicado a algumas estimativas necessárias à confecção da sub-rotina, fornecendo, também, a tabela de entradas, com os respectivos formatos de leitura, requeridas para o processamento da sub-rotina. No quinto capítulo, faremos uma aplicação da sub-rotina a uma "amostra" de galáxias elípticas, retiradas do "Uppsala General Catalog". Apresentaremos, aí, os resultados principais, porém sem nos desviarmos do objetivo do presente trabalho. Ressaltamos que não tivemos os devidos cuidados na composição da amostra, o que, por fim, deixa nossos resultados bastante comprometidos. Apesar disto, não nos privaremos de uma comparação dos resultados aqui obtidos com aqueles que emergiram da análise de Davis e Geller (1976) para galáxias do mesmo tipo morfológico, retiradas do mesmo catálogo.

II FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO DE DOIS PONTOS

II.1 Função de Correlação Espacial de dois Pontos

Uma vez que muitos catálogos listam posições de galáxias, ou aglomerados de galáxias, é, geralmente, útil pensar na distribuição da matéria como uma distribuição de objetos pontuais. Se as diferenças entre os objetos são ignoradas, o problema torna-se apenas uma questão da natureza da distribuição das posições \vec{r}_j , e esta pode ser descrita por funções de correlação de n-pontos.

Seguindo Peebles (1980), a probabilidade de se encontrar um objeto à distância entre r e $r + \delta r$, de um objeto escolhido aleatoriamente, é

$$\delta P = n [1 + \xi(r)] \delta V, \quad \delta V = 4\pi r^2 \delta r, \quad (\text{II.1.1})$$

onde a densidade numérica média n é independente da posição e a função de correlação de dois pontos $\xi(r)$ é definida através da probabilidade conjunta de se encontrar um objeto nos elementos de volume δV_1 e δV_2 , à separação r_{12} ,

$$\delta P = n^2 \delta V_1 \delta V_2 [1 + \xi(r_{12})]. \quad (\text{II.1.2})$$

Consistente com a homogeneidade e isotropia, como requer o princípio cosmológico, ξ é uma função apenas da separação. No caso $\xi \equiv 0$, teremos o processo Poisson discreto uniforme e aleatório, onde as probabilidades de se encontrar objetos em δV_1 e δV_2 são independentes. Se os objetos são correlacionados, $\xi > 0$; caso sejam anti-correlacionados, $-1 \leq \xi < 0$.

Uma forma alternativa é seguir o procedimento de Davis e Peebles (1983), quando são disponíveis medidas, além de posição angular, do desvio para o vermelho de cada membro da amostra. A função de correlação de dois pontos nesse espaço é uma função de duas variáveis, as separações paralela e perpendicular à linha de visada.

$$\pi = v_1 - v_2 \quad ; \quad r_p = [(v_1 + v_2)/H_0] \tan(\theta_{12}/2) \quad (\text{II.1.3})$$

com v_1 e v_2 sendo as velocidades, usadas como estimadores de distâncias através de um puro escoamento Hubble ($H = 100 \text{ h kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$), e θ_{12} a separação angular no céu. A probabilidade de se encontrar uma galáxia no elemento de volume δV , à separação (r_p, π) de uma galáxia, sendo $\phi(r)$ a função seleção (§II.5), é

$$\delta P = n [1 + \xi(r_p, \pi)] \delta V \phi(r). \quad (\text{II.1.4})$$

Quando a separação é grande, os movimentos peculiares não são importantes e, portanto, a anisotropia entre r_p e π pode ser ignorada. Isto é útil para se medir a correlação de dois pontos como uma função da separação em desvio para o vermelho

$$s = (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta_{12})^{1/2} / H_0. \quad (\text{II.1.5})$$

A estatística $\xi(s)$ é útil por ser simples e poder se estimar da mesmo quando o ruído é muito grande para se estimar $\xi(r_p, \pi)$. A função $\xi(r_p, \pi)$ é uma convolução de $\xi(r)$ com a distribuição de diferenças em velocidades peculiares.

Em pequenas escalas (s pequeno), as velocidades peculiares fazem com que $\xi(s)$ difira da função de correlação espacial $\xi(r)$. O mapa contorno de $\xi(r_p, \pi)$ para a amostra de Davis e Peebles (1983) é mostrado na Figura 1. Os semi-círculos pontilhados mostram os contornos caso existisse um puro escoamento Hubble: o alongamento na direção π mostra o efeito marcado das velocidades peculiares.

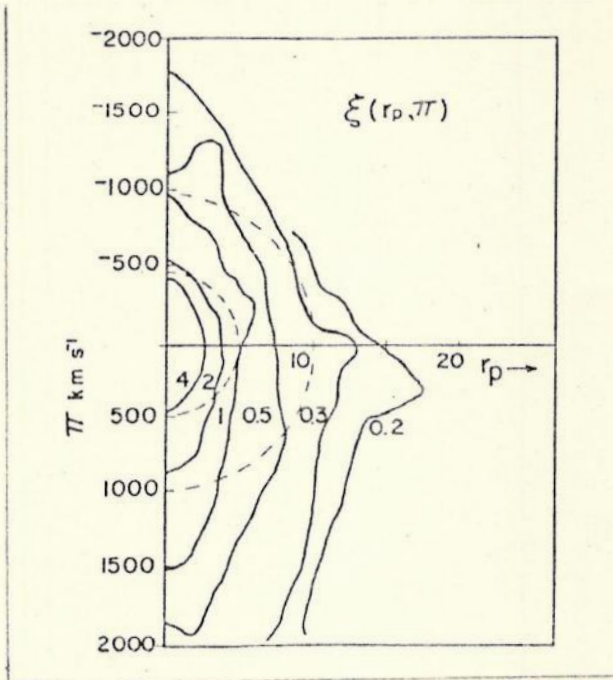


Figura 1

A correlação de dois pontos como função das separações r_p e π perpendicular e paralela à linha de visada. As linhas são os contornos de $\xi(r_p, \pi)$ fixo. Os semi-círculos pontilhados mostram a forma esperada dos contornos se as velocidades peculiares fossem desprezíveis. (Extraída de Davis e Peebles - 1983).

Para que se evite esse efeito, usa-se uma integral de $\xi(r_p, \pi)$ sobre a diferença em desvio para o vermelho, a fim de se obter a função projetada $w(r_p)$, e, então, solucionar $\xi(r)$ através de $w(r_p)$ ou ajustar $w(r_p)$ a um modelo de lei de potência para $\xi(r)$.

A função projetada é definida por

$$w(r_p) = \frac{1}{H_0} \int_{-v_L}^{v_L} d\pi \xi(r_p, \pi). \quad (\text{II.1.6})$$

E a inversa é a integral de Abel

$$\xi(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} dr' w'(r_p) (r_p^2 - r^2)^{-1/2} \quad (\text{II.1.7})$$

Apesar de termos apresentado essa forma alternativa para o cálculo da função de correlação, não a utilizaremos. Contudo, no

Capítulo III, indicaremos um método para sua estimativa.

II.2 Função de Correlação Angular de dois Pontos

Os catálogos de posições angulares dos objetos são as principais fontes de informação da natureza em larga escala da conglomeração da matéria. Uma vez que medidas de distância de objetos individuais em tais resenhas são, em geral, altamente incertas, se não impraticáveis, devemos proceder em duas etapas: primeiro, obtemos funções de correlação para as distribuições angulares, que descreverão a conglomeração da amostra no plano do céu e, após isto, analisamos a relação entre estas estatísticas e a função de correlação espacial, sob a hipótese de que observamos um processo espacialmente homogêneo e isotrópico.

A função de correlação angular é definida, de maneira análoga àquela para a espacial, a partir da probabilidade conjunta de se encontrar uma galáxia no elemento infinitesimal de ângulo sólido $\delta\Omega_1$ e uma outra no elemento $\delta\Omega_2$, separados por um ângulo θ , numa amostra com densidade média N , dada por

$$\delta P = N^2 [1 + w(\theta)] \delta\Omega_1 \delta\Omega_2 \quad (\text{II.2.1})$$

Observando que toda função $g(\theta, \phi)$, contínua, bem como suas derivadas até a segunda ordem, definida na superfície de uma esfera, pode ser expandida em séries absoluta e uniformemente convergentes em termos dos harmônicos esféricos

$$g(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n,0} P_n(\cos\theta) + \sum_{h=1}^n (a_{n,h} \cos h\phi + b_{n,h} \sin h\phi) P_{n,h}(\cos\theta)]$$

onde os coeficientes $a_{n,0}$, $a_{n,h}$, $b_{n,h}$ são determinados a partir das relações

$$a_{n,0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} g(\theta, \phi) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta d\phi,$$

$$a_{n,h} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-h)!}{(n+h)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} g(\theta, \phi) P_{n,h}(\cos\theta) \cos h\phi \sin\theta \, d\theta d\phi,$$

$$b_{n,h} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-h)!}{(n+h)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} g(\theta, \phi) P_{n,h}(\cos\theta) \sin h\phi \sin\theta \, d\theta d\phi$$

podemos definir a potência espectral angular como a transformada harmônica esférica da função de autocorrelação angular

$$u_{\ell} = \langle |a_{\ell}^m|^2 \rangle / N - 1, \quad a_{\ell}^m = \sum_j Y_{\ell}^m(j) \quad (\text{II.2.2})$$

onde a soma é feita sobre os harmônicos esféricos Y_{ℓ}^m avaliados nas posições angulares dos objetos na amostra. A u_{ℓ} fornece uma medida do número médio de vizinhos em excesso com relação a um processo aleatório.

A vantagem da potência espectral, frente a sua transformada $w(\theta)$, é que, segundo Peebles, o espectro separa as flutuações de densidade em diferentes escalas angulares.

Quando separações angulares de grande fração de radianos são envolvidas, esse procedimento é, claramente, o melhor. Para separações $< 5^{\circ}$, entretanto, o uso dos harmônicos esféricos não acrescenta precisão significativa à análise, além de ser extremamente inconveniente do ponto de vista matemático. Como veremos, existem importantes razões de ordem prática (p. ex., a dificuldade em se considerar, adequadamente, o efeito da absorção galáctica) que restringem as análises das contagens de galáxias a pequenas separações.

II.3 Relação Entre as Funções de Correlação Angular e Espacial de Dois Pontos

Um modelo geral para a relação entre a função de correlação angular e espacial, descrevendo a distribuição de galáxias é, agora, apresentado, seguindo a técnica de Peebles (1980).

A probabilidade de que uma galáxia com magnitude absoluta M no intervalo δM seja encontrada num elemento de volume δV , fixado aleatoriamente, é

$$\delta P = \phi(M) \delta M \delta V. \quad (\text{II.3.1})$$

relação que define a função luminosidade ϕ . A probabilidade de que uma galáxia com magnitude M_1 , no intervalo δM_1 , seja encontrada no elemento δV_1 e uma segunda galáxia com magnitude M_2 , no intervalo δM_2 , seja encontrada em δV_2 , à distância r_{12} da primeira, é

$$\delta P = [\phi(M_1) \phi(M_2) + \Gamma(M_1, M_2, r_{12})] \delta V_1 \delta V_2 \delta M_1 \delta M_2 \quad (\text{II.3.2})$$

Se as galáxias não forem correlacionadas em posição e magnitude, Γ anula-se. As funções ϕ e Γ integradas sobre magnitude são a densidade numérica e a função de correlação espacial de dois pontos

$$n = \int \phi dM, \quad n^2 \xi(r) = \int dM_1 dM_2 \Gamma(M_1, M_2, r) \quad (\text{II.3.3})$$

As funções correspondendo à ϕ e Γ para correlações entre posições angulares e magnitude aparente são encontradas integrando-se as equações (II.3.1) e (II.3.2) ao longo de linhas de visada. Assumiremos que os efeitos do "redshift", curvatura do espaço e absorção podem ser negligenciados (serão discutidos no próximo capítulo). Neste caso, a magnitude aparente de uma galáxia, à distância r (Mpc) com magnitude absoluta M , é

$$m = M + 5 \log r + 25, \quad (\text{II.3.4})$$

e a probabilidade de que uma galáxia apareça no céu no elemento de ângulo sólido $\delta \Omega$, com magnitude aparente entre m e $m + \delta m$, e a uma distância entre r e $r + \delta r$ do observador, é

$$\delta P_r = r^2 \delta r \delta \Omega \delta m \phi(m - 5 \log r - 25). \quad (\text{II.3.5})$$

O resultado de integrá-la sobre distância é a probabilidade de se encontrar uma galáxia com magnitude aparente m em $\delta \Omega$

$$\delta P = \delta \Omega \delta m \int_0^{\infty} r^2 dr \phi(m - 5 \log r - 25). \quad (\text{II.3.6})$$

Com a seguinte mudança de variável

$$r = s 10^{0.2m} \quad (\text{II.3.7})$$

temos

$$\delta P = (dN/dm) \delta m \delta \Omega \quad (\text{II.3.8})$$

$$dN/dm = 10^{0.6m} \int_0^{\infty} s^2 ds \phi(-5 \log s - 25),$$

que é a relação número-magnitude usual.

A probabilidade de se encontrar uma galáxia com magnitude aparente entre m_1 e $m_1 + \delta m_1$, em $\delta \Omega_1$, e uma segunda galáxia com magnitude aparente entre m_2 e $m_2 + \delta m_2$, em $\delta \Omega_2$, à distância θ_{12} da primeira é encontrada integrando-se a probabilidade na equação (II.3.2) ao longo de duas linhas de visada:

$$\delta P = \delta \Omega_1 \delta \Omega_2 \delta m_1 \delta m_2 \left[\frac{dN}{dm_1} \frac{dN}{dm_2} + g(m_1, m_2, \theta_{12}) \right].$$

onde

$$g(m_1, m_2, \theta) = \int_0^{\infty} r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2 \Gamma(M_1, M_2, r_{12}), \quad (\text{II.3.9})$$

$$r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta,$$

$$M_1 = m_1 - 5 \log r_1 - 25, \quad M_2 = m_2 - 5 \log r_2 - 25.$$

A primeira equação define a função de correlação de dois pontos em magnitude aparente e separação angular. Vê-se na segunda equação que g é uma integral linear sobre a correspondente função espacial. É a simplicidade dessa relação entre estatísticas angular e espacial que faz das funções de correlação convenientes nas aplicações práticas.

II.4 Aproximação para Pequena Separação e a Relação de Escalonamento.

No caso de maior interesse, assume-se que a escala máxima apresentada da conglomeração de galáxias é pequena comparada com as distâncias na amostra. Assim, a contribuição para a integral g (eq.II.3.9) é apreciável apenas quando os objetos estão aproximadamente a mesma distância, $|r_1 - r_2| \ll r_1$ e a separação angular é muito menor que um radiano.

Quando $\theta_{12} \ll 1$, a separação espacial de duas galáxias é

$$\begin{aligned} r_{12}^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(1 - \theta^2/2) \\ &= (r_1 - r_2)^2 - r_1r_2\theta^2 \end{aligned} \quad (\text{II.4.1})$$

e com

$$u = r_2 - r_1, \quad r^2 = r_1 r_2 \quad (\text{II.4.2})$$

a separação é

$$r_{12}^2 = u^2 + (r\theta)^2 \quad (\text{II.4.3})$$

Nesta aproximação, a função angular de dois pontos é

$$g(m_1, m_2, \theta) = \int_0^\infty r^4 dr \int_{-\infty}^\infty du \Gamma(M_1, M_2, r_{12}), \quad (\text{II.4.4})$$

$$M_\alpha = m_\alpha - 5 \log r - 25$$

Esta expressão é simplificada introduzindo-se a magnitude média e a diferença em magnitudes para cada par

$$m = (m_1 + m_2)/2, \quad \Delta m = m_2 - m_1 \quad (\text{II.4.5})$$

Galáxias selecionadas por magnitude aparente são encontradas como tendo magnitudes absolutas razoavelmente definidas, um valor típico sendo M^* , digamos, com desvio deste de, talvez, uma magnitude. M^* e m definem uma distância característica (eq.II.3.4)

$$D = 10^{0.2(m - M^*) - 5} \text{ Mpc} \quad (\text{II.4.6})$$

Com

$$r = Dy \quad (\text{II.4.7})$$

a equação (II.4.4) torna-se a relação de escalonamento

$$g = D^5 \hat{g}(\Delta m, \theta D) \quad (\text{II.4.8})$$

onde

$$\hat{g}(\Delta m, x) = \int_0^\infty y^4 dy \int_{-\infty}^\infty du \Gamma(M_1, M_2, r_{12}) \quad (\text{II.4.9})$$

$$M_1 = M^* - \Delta m/2 - 5 \log y, \quad M_2 = M^* + \Delta m/2 - 5 \log y,$$

$$r_{12} = (u^2 + (xy)^2)^{1/2}.$$

A distribuição de galáxias individuais na equação (II.3.6), com r substituído por yD , é

$$\delta P = \delta \Omega \delta m D^3 \int_0^\infty y^2 dy \phi(M^* - 5 \log y). \quad (\text{II.4.10})$$

As equações (II.4.8) e (II.4.10) mostram como as funções de um e dois pontos escalonam com a profundidade efetiva D (ou m). Estas relações de escalonamento refletem a geometria e a homogeneidade estatística da distribuição assumidas. A variação de \hat{g} com Δm depende da forma da função luminosidade da galáxia através da equação (II.4.9).

Alguns catálogos listam posições angulares de galáxias mais brilhantes que uma magnitude limite m_0 , em vez de magnitudes aparentes individuais. Seguindo Neyman, Scott e Shane (1954/R10), pode-se modelar os erros aleatórios na seleção de galáxias assumindo-se que o catálogo inclui uma galáxia, com magnitude aparente m , com probabilidade $f(m-m_0)$. Então, a função de correlação de dois pontos para o catálogo é o resultado da multiplicação de

g(eq.II.4.4) por f para cada galáxia e da integração em magnitudes

$$dN^2w(\theta) = D^5 \int Y^4 dy du dM_1 dM_2 \Gamma(M_1, M_2, r_{12}) f_1 f_2 ,$$

onde (II.4.11)

$$f_\alpha = f(M_\alpha - M^* + 5 \log y), \quad r_{12}^2 = u^2 + (yD\theta)^2 .$$

E a profundidade característica da resenha é

$$D = 10^{0.2(m_0 - M^*) - 5} \text{ MPC} \quad \text{(II.4.12)}$$

II.5 Desacoplamento da Magnitude e Posição

A equação (II.4.11) para w é, ainda bastante complicada para aplicações práticas, já que envolve três variáveis. Felizmente, ela pode ser simplificada a partir de uma aproximação que parece ser razoavelmente boa. A hipótese é que a magnitude absoluta da galáxia é estatisticamente independente de sua posição relativa a outras galáxias, de forma a que a distribuição conjunta Γ em M_1, M_2 e r_{12} (eq.II.3.2) pode ser escrita como um produto das distribuições em magnitude e separação,

$$\Gamma(M_1, M_2, r_{12}) = \phi(M_1) \phi(M_2) \xi(r_{12}) \quad \text{(II.5.1)}$$

onde ϕ é a função luminosidade da galáxia da equação (II.3.1) e ξ é a função de correlação de dois pontos (eq.II.1.2). Nesta aproximação a equação (II.4.11) é

$$dN^2w(\theta) = D^5 n^2 \int_0^\infty Y^4 \phi(y)^2 dy \int_{-\infty}^\infty du \xi(r),$$

com $r^2 = u^2 + (yD\theta)^2$, (II.5.2)

e sendo $n = \int dM \phi(M)$ (II.5.3)

a densidade numérica média de galáxias e

$$\phi(y) = \int_{-\infty}^\infty dM (\phi(M)/n) f(M - M^* + 5 \log y) \quad \text{(II.5.4)}$$

a probabilidade de que uma galáxia à distância yD esteja no catálogo

go. A função seleção ϕ , portanto, mede os efeitos combinados da função luminosidade e da função observador $f(m-m_0)$.

Assumindo-se uma função luminosidade integral universal na forma

$$\begin{aligned}\phi(M) &= C \text{ dex } [\beta(M-M^*)], & M > M^* \\ &= C \text{ dex } [\alpha(M+M^*)], & M_0 < M < M^*, \\ &= 0, & M < M_0 \\ \phi_0 &= \text{dex } [\alpha(M_0 - M^*)].\end{aligned}\tag{II.5.5}$$

$$\alpha = 0,75, \quad \beta = 0,25, \quad \phi_0 = 0,01,$$

$$M^*_{pg} = -18,6 + 5 \log h.$$

derivada por Abell (1965/R10), o seguinte modelo para função seleção proposto por Abell (1962/R10), pode ser aplicado:

$$\begin{aligned}\phi(y) &= y^{-5\beta}, & \beta = 0,25, & y < 1 \\ &= y^{-5\alpha}, & \alpha = 0,75, & 1 < y < y_0 \\ &= 0, & & y > y_0, \\ Y_0^{-5\alpha} &= 0,01\end{aligned}\tag{II.5.6}$$

que, segundo Peebles, pensa-se ser razoavelmente realística. (No próximo capítulo, apresentaremos uma discussão sobre a função luminosidade e a função seleção).

Em termos da função seleção, a densidade numérica média no catálogo é (eq. II.3.6)

$$\bar{N} = nED^3, \quad E = \int_0^\infty y^2 dy \phi(y)\tag{II.5.7}$$

Pelas equações (II.5.2) e (II.5.7),

$$w(\theta) = D^{-1} W(\theta D)\tag{II.5.8}$$

onde a profundidade característica é dada pela função (II.4.12)

$$W(x) = \frac{\int_0^{\infty} y^4 \phi(y)^2 dy \int_0^{\infty} du \xi((u^2 + (xy)^2)^{1/2})}{[\int_0^{\infty} y^2 dy \phi(y)]^2} \quad (\text{II.5.9})$$

Esta é a equação integral que tem sido usada na maioria das medidas das estimativas para a função de correlação espacial da galáxia, iniciada por Rubin (1954/R10) e Limber (1954/R10).

A relação de escalonamento (II.5.8) pode ser entendida da seguinte forma: a função de correlação w mede a razão entre o número de vizinhos em excesso com relação à aleatoriedade e o número esperado numa distribuição uniforme. Se se conta vizinhos no ângulo sólido $\delta\Omega \propto D^{-2}$, à distância angular θD de uma galáxia, situada a uma distância D do observador, está-se olhando para uma área projetada fixa em torno desta galáxia e para uma distância projetada contada a partir dela. Então, o número de vizinhos correlacionados vistos é independente de D , enquanto o número de vizinhos acidentais, tanto do primeiro plano como do fundo, é proporcional a D . Daí, $w \propto D^{-1}$ para θD fixo.

A equação (II.5.1) para Γ na equação (II.4.9) fornece a distribuição de dois pontos em magnitudes aparentes e separação angular,

$$g(\theta, m, \Delta m) = D^5 \tilde{g}(\Delta m, \theta D)$$

$$g(\Delta m, x) = \int_0^{\infty} y^4 dy \phi_1 \phi_2 \int_0^{\infty} du \xi((u^2 + (yx)^2)^{1/2}) \quad (\text{II.5.10})$$

$$\phi_{1,2} = \phi(M^* \pm m/2 - 5 \log y).$$

Sabemos que a equação (II.5.1) é apenas uma aproximação conveniente, porém grosseira, porque o tipo morfológico das galáxias é correlacionado com suas posições (galáxias sequencialmente iniciadas tendem a aparecer em densas condensações), contudo, é consistente com os testes estatísticos disponíveis. Num estudo não publicado, Soneira (1978/R10) encontrou que a equação (II.5.10), com modelos convencionais para $\phi(M)$ e $\xi(r)$, fornece um ajustamento razoável para a distribuição conjunta em θ e em Δm , no catálogo de Zwicky. Lake e Tremaine (1980/R10) encontraram que a equação (II.5.1) concorda com as contagens de Holmberg (1969/R10) para as companheiras débeis de galáxias espirais.

II.6 Relação Entre ξ e w : Exemplo

A relação entre as funções de correlação espacial e angular será ilustrada por um modelo analítico bastante conveniente, a lei de potência:

$$\xi(r) = B r^{-\gamma}, \quad \gamma = 1. \quad (\text{II.6.1})$$

Esta forma levada na equação (II.5.9) fornece

$$w(\theta) = \frac{B}{DE^2} \int_0^\infty y^4 \phi^2 dy \int_{-\infty}^\infty du [u^2 + (\theta Dy)^2]^{-\gamma/2} \quad (\text{II.6.2})$$

Com

$$u = \theta Dyx, \quad (\text{II.6.3})$$

encontra-se

$$w(\theta) = A\theta^{1-\gamma}, \quad A = \frac{B}{D^\gamma} \frac{H_\gamma}{E^2} \int_0^\infty y^{5-\gamma} \phi(y)^2 dy, \quad (\text{II.6.4})$$

onde o número H_γ , resultante da integral sobre u , pode ser reduzido a um produto de funções gama,

$$H_\gamma = \int_0^\infty dx (1+x^2)^{-\gamma/2} = \Gamma(1/2)\Gamma(\gamma-1/2)/\Gamma(\gamma/2). \quad (\text{II.6.5})$$

A equação (II.6.4) diz que a função angular é uma lei de potência com índice reduzido por uma unidade do índice da lei de potência γ de ξ . Este resultado foi obtido por Totsuji e Kihara (1969/R10). Se $\gamma < 1$, a integral H diverge. Aqui, a hipótese de ângulos pequenos falha, porque a maioria dos pares correlacionados de galáxias observados com pequenas separações angulares estão em diferentes distâncias do observador. Se $\gamma > 6$, a integral na equação (II.6.4) diverge em $y \rightarrow 0$. Assim, a função de correlação ξ está decrescendo tão rapidamente com o aumento da separação que a contribuição dominante para $w(\theta)$ é devida ao aglomerado mais próximo do observador. A função de correlação observada para galáxias

aproxima-se de uma lei de potência com $\gamma \approx 1.8$, fora da região de ambos os casos.

II.7 Inversão da Equação

O resultado da mudança de variáveis de integração na equação (II.5.9) de u para r e da troca na ordem de integração é

$$W(x) = \frac{2}{E^2} \int_0^\infty dr \xi(r) \int_0^{r/x} \frac{y^4 dy \phi(y)^2}{(1-(xy/r)^2)^{1/2}}. \quad (\text{II.7.1})$$

A relação é, portanto, da forma

$$W(x) = E^{-2} \int_0^\infty dr \xi(r) F(x/r), \quad (\text{II.7.2})$$

onde a função janela é

$$F(z) = 2 \int_0^{z^{-1}} \frac{y^4 dy \phi(y)^2}{(1-(yz)^2)^{1/2}} \quad (\text{II.7.3})$$

A equação (II.7.3) mostra que W é simplesmente uma convolução (em variáveis logaritméticas) de ξ . Fall e Tremaine (1977/R10) e Parry (1971/R10) mostraram que esta forma pode ser invertida seguindo uma forma notável e elegante.

Uma vez que a função janela depende da razão dos argumentos, e não de sua diferença, a transformada de Mellin (ver Apêndice I) é mais conveniente que a de Fourier.

Aparecendo na função janela da equação (II.7.3) está a função

$$b(x) = 2/(1-x^2)^{1/2}, \quad 0 \leq x < 1, \quad (\text{II.7.4})$$

$$b(x) = 0, \quad x \geq 1.$$

Sua transformada de Mellin é

$$\begin{aligned}\tilde{b}(s) &= 2 \int_0^1 x^{s-1} dx / (1-x^2)^{1/2} \\ &= 2 \int_0^\infty dy (1+y^2)^{-(s+1)/2}\end{aligned}\quad (\text{II.7.5})$$

onde a segunda linha segue de $x = (1 + y^2)^{-1/2}$. Esta função é

$$\tilde{b}(s) = \Gamma(1/2) \Gamma(s/2) / \Gamma((s+1)/2). \quad (\text{II.7.6})$$

Nota-se que a equação (II.7.2) é da mesma forma que a equação (A.I.5) portanto, sua convolução é

$$E^2 \tilde{W}(s) = \tilde{F}(s) \tilde{\xi}(s+1) \quad (\text{II.7.7})$$

As equações (II.7.3) e (II.7.4) são

$$F(z) = \int_0^\infty dy y^4 \phi^2(y) b(yz) \quad (\text{II.7.8})$$

que é da mesma forma que a equação (A.I.3); então

$$\tilde{F}(s) = \tilde{b}(s) \tilde{\phi}^2(5-s) \quad (\text{II.7.9})$$

A transformada de ξ é, dessa forma

$$\tilde{\xi}(s) = E^2 \tilde{W}(s-1) / (\tilde{\phi}^2(6-s) \tilde{b}(s-1)). \quad (\text{II.7.10})$$

Usando

$$\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}, \quad \Gamma(n+1) = n \Gamma(n) \quad (\text{II.7.11})$$

podemos escrever \tilde{b} como

$$\frac{1}{\tilde{b}(s-1)} = \frac{s-1}{2\pi} \frac{\pi^{1/2} \Gamma(s/2)}{\Gamma((s-1)/2) \Gamma(s-1/2)} = \frac{s-1}{2\pi} \tilde{b}(s) \quad (\text{II.7.12})$$

e fazendo

$$E^2 / (2\pi \tilde{\phi}^2(6-s)) = \tilde{P}(s) \quad (\text{II.7.13})$$

temos

$$\tilde{\xi}(s) = (s-1) \tilde{b}(s) \tilde{W}(s-1) \tilde{P}(s) \quad (\text{II.7.14})$$

Fazendo

$$\tilde{W}(s-1) \tilde{b}(s) \equiv \tilde{H}(s) \quad (\text{II.7.15})$$

obtemos das equações (A.I.5) e (A.I.6)

$$H(x) = \frac{2}{x} \int_0^1 dy W(x/y) (1-y^2)^{-1/2}, \quad (\text{II.7.16})$$

e com

$$\tilde{J}(s-1) \equiv \tilde{H}(s) \tilde{P}(s) \quad (\text{II.7.17})$$

as equações (A.I.5) e (A.I.6) fornecem

$$J(r) = 2 \int_0^\infty dx P(x) \int_0^1 dy \frac{W(r/xy)}{(1-y^2)^{1/2}}, \quad (\text{II.7.18})$$

onde a equação (I.7.14) é, agora

$$\tilde{\xi}(s) = (s-1) \tilde{J}(s-1). \quad (\text{II.7.19})$$

Da definição de transformada, encontramos, finalmente, que

$$\xi(r) = -dJ/dr \quad (\text{II.7.20})$$

Esta é a inversão desejada: a função de correlação espacial ξ é dada como o dobro da derivada da integral da função de correlação angular observada.

III ESTIMATIVAS E ERROS

III.1 Estimativa de $w(\theta)$

A função de correlação angular é estimada a partir da lista de posições angulares dos objetos encontrados em alguma secção do céu. Se N objetos são encontrados numa região de resenha, que subtende um ângulo sólido Ω , uma estimativa da densidade é

$$\mathcal{N} = N/\Omega \quad (\text{III.1.1})$$

Como vimos, a probabilidade condicional de se encontrar um objeto em Ω , à distância θ de um objeto escolhido aleatoriamente na população, é

$$\delta P = \mathcal{N} \delta \Omega [1 + w(\theta)], \quad (\text{III.1.2})$$

Portanto, a contagem esperada de pares à separação θ à $\theta + \delta\theta$ é

$$n_p = 1/2 \mathcal{N}^2 \Omega \langle \delta \Omega \rangle [1 + w(\theta_1)],$$

onde θ_1 está entre θ e $\theta + \delta\theta$, e $\langle \delta \Omega \rangle$ é o valor médio do ângulo sólido subtendido pelo anel de θ à $\theta + \delta\theta$, cujos centros estão fixados aleatoriamente em Ω . O fator $1/2$ está relacionado com o fato de que cada par representa dois vizinhos. Uma estimativa da função seleção é, então,

$$1 + w(\theta_1) = 2n_p \Omega / (N^2 \langle \delta \Omega \rangle), \quad (\text{III.1.3})$$

onde N e n_p são as contagens de objetos e pares à separação θ na amostra.

O problema reside, agora, em métodos que possibilitem computar $\langle \delta \Omega \rangle$. Vários são propostos (ver, p.ex., Peebles 1980). Onde os objetos no catálogo são tomados como pontos o seguinte procedimento é geralmente usado. Cada objeto é tomado como centro, e as separações, entre os objetos, calculadas e classificadas segundo intervalos $\Delta\theta$. Então, se cada intervalo contém o número $M(\theta)$ de

separações entre θ e $\theta + \Delta\theta$,

$$1 + w(\theta + \Delta\theta/z) = \frac{M(\theta)}{N_c N^2 \delta\Omega}; \quad \delta\Omega = 2\pi(\cos\theta - \cos(\theta - \Delta\theta)) \quad (\text{III.1.4})$$

onde $\delta\Omega$ é o ângulo sólido do anel, N_c é o número de objetos usados como centros e N é a densidade média de objetos.

É bastante fácil computar $\langle \delta\Omega \rangle$ pelo processo Monte Carlo. Fixemos N_t pontos aleatórios na área resenhada; seja $n_p(t)$ o número de pares entre estes pontos "tentativos" com separação entre $\theta + \delta\theta$, e seja n_p o correspondente número de pares no catálogo real de N objetos. Uma vez que $w = 0$ para os pontos "tentativos", a estimativa de w para os dados será:

$$1 + w(\theta) = \frac{n_p}{n_p(t)} \frac{N_t^2}{N^2} \quad (\text{III.1.5})$$

Entretanto, para amostras limitadas em área, essa aproximação direta conduzirá a uma subestimativa. Para pontos à distâncias Ψ do contorno, todos os anéis além de Ψ conterão um número menor de pontos que o correto, devido à perda total dos pontos fora da borda. Este déficit aumentará seriamente com o aumento da escala. Devemos, então, aplicar métodos que corrijam este efeito de borda. Entre tais métodos (ver Sharp, 1979, 2º método) está o proposto por Phillips et al. (1972), que é o mais usado por ser de fácil computação. Consiste na contagem das contribuições para $w(\theta)$ que decorrem dos pontos centrais, que distam θ , da borda. Isto requer um tratamento isolado do número de objetos tomados como centro para cada intervalo.

III.2 Erros Sistemáticos e Estatísticos de $w(\theta)$

Como dissemos, para amostras que não cobrem todo o céu, a deficiência de objetos fora do contorno requer a aplicação de algum tipo de correção de borda aos pontos de estimativas. Infelizmente, as estimativas corrigidas são tendenciosas, podendo estar seriamente erradas caso a densidade varie aprecia-velmente entre regiões próximas ao contorno e regiões além deste. E isto pode ser endógeno, por exemplo, para uma região encerrando um aglomerado de galáxias conhecido, ou exógeno como o efeito do obscurecimento galáctico nas contagens através do céu.

Nessa análise fazemos uso da correlação cruzada entre duas amostras - uma de galáxias e outra de conjuntos de pontos distribuídos aleatoriamente, de igual densidade média:

$$\delta P' = N_1 N_2 [1 + w_{12}(\theta)] \delta \Omega_1 \delta \Omega_2 \quad (\text{III.2.1})$$

para duas amostras de densidade média N_1 e N_2 .

A diferença entre a primeira amostra, de pontos usados como centros a partir dos quais mediremos as separações, e a segunda amostra, que é correlacionada com a primeira, torna-se importante quando "descontos" de borda são feitos. Em geral, encontramos $w_{12} \neq w_{21}$, onde w_{12} refere-se aos objetos de tipo 1 usados como centros. É esta amostra de tipo 1 que é alterada por efeitos de contorno. (Note que a definição de w requer sua simetria, $w_{12} = w_{21}$ e apenas os estimadores diferem). Uma vez que uma amostra distribuída aleatoriamente por definição, não apresenta relação com o contorno, ela será insensível à correção de borda. Portanto, w_{rg} (r = amostra de comparação, distribuída aleatoriamente; g = dados) deve refletir apenas variações nos dados com respeito ao contorno.

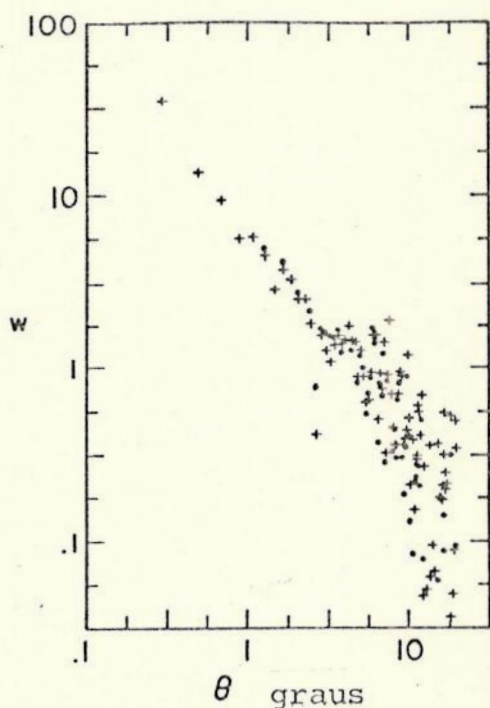


Figura 2

Função de covariância angular para E/SO do Hemisfério Sul, declinação -32° . Função corrigida: +; função não corrigida: o; Como esperado, as correções têm pouco efeito. (Extraída de Sadler e Sharp - 1984).

Sadler e Sharp (1984) definiram, então, a função de covariância corrigida por $w' = w - w_{rg}$. A Figura 2 mostra um plote log-log dos resultados para sua amostra. A Figura 3 apresenta os resultados de $w(\theta)$ para a amostra de Turner e Gott (1976/R15). Maiores detalhes são apresentados por Sharp (1979).

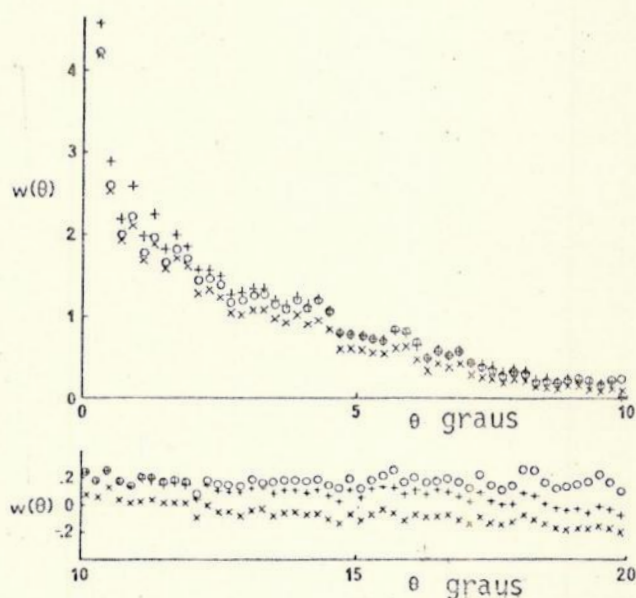


Figura 3

Três diferentes estimativas da função de covariância angular, corrigidas do efeito de borda, para um subconjunto do catálogo de Zwicky: X, sem correção; O, método descrito. (Extraída de Sharp-1979).

A incerteza estatística na estimativa de w geralmente prova ser sem importância comparada com os erros sistemáticos (Peebles, 1980). O principal problema nos catálogos é que a profundidade efetiva da resenha pode variar ao longo do céu, devido ao obscurecimento variável na Galáxia. Tais erros sistemáticos podem ser negligenciados em alguns casos. Se a distribuição de objetos aproxima-se de uma distribuição aleatória, o desvio padrão de w pode ser computado, resultando em

$$\delta w = n_p^{-1/2} \quad (\text{III.2.2})$$

que assume poderem ser ignoradas as correlações entre os objetos. Contudo, em geral, w depende da função de correlação de quatro pontos. Algumas estimativas e modelos para esta são disponíveis, mas o efeito em δw não será descrito, por parecer duvidosa sua uti

lidade.

Quando a amostra é bastante grande e, portanto, a estimativa de w se dá a partir de subconjuntos aleatórios de dados, comparações das estimativas para diferentes subconjuntos fornecerão um erro médio e um erro padrão para esta média. Todavia, o desvio padrão assim calculado não é, necessariamente, uma boa estimativa do erro numa estimativa derivada de toda a amostra. Uma possível indicação dos erros esperados é a correlação cruzada dos dados com amostras de mesmo tamanho distribuídas aleatoriamente e a consideração das variações nos histogramas resultantes. Assim, Sadler e Sharp (1984) estimaram w_{rg} para mostrar a interação da distribuição das galáxias e o contorno, e w_{gr} para revelar o tamanho provável dos erros estatísticos em w .

Davis e Geller (1976) apontaram, ainda, um outro problema referente a $w(\theta)$. A normalização de $w(\theta)$, computada para o modelo de lei de potência $w(\theta) = A\theta^{-\beta}$ - estará tendenciosa se a densidade numérica de galáxias na amostra desviar-se da média do Universo. Este erro é, geralmente, desprezível para $w(\theta) > 1$, mas para $w(\theta) < 1$, as estimativas podem ser seriamente tendenciosas. Contudo, numa análise comparativa dessas estatísticas, tal erro na normalização não é grave, uma vez que fará com que as estimativas de $w(\theta)$ tendam numa mesma direção, de forma que a inclinação relativa das várias funções estará inalterada.

III.3 Função Luminosidade

A função luminosidade integrada das galáxias num aglomerado é o número $N(m)$ de galáxias mais brilhantes que a magnitude m . $N(m)$ é, atualmente conhecida num intervalo de sete magnitudes, devido, principalmente, aos trabalhos de Abell (1962, 1976/R14), Bautz e Abell (1973/R14), Oemler (1974/R14) e outros.

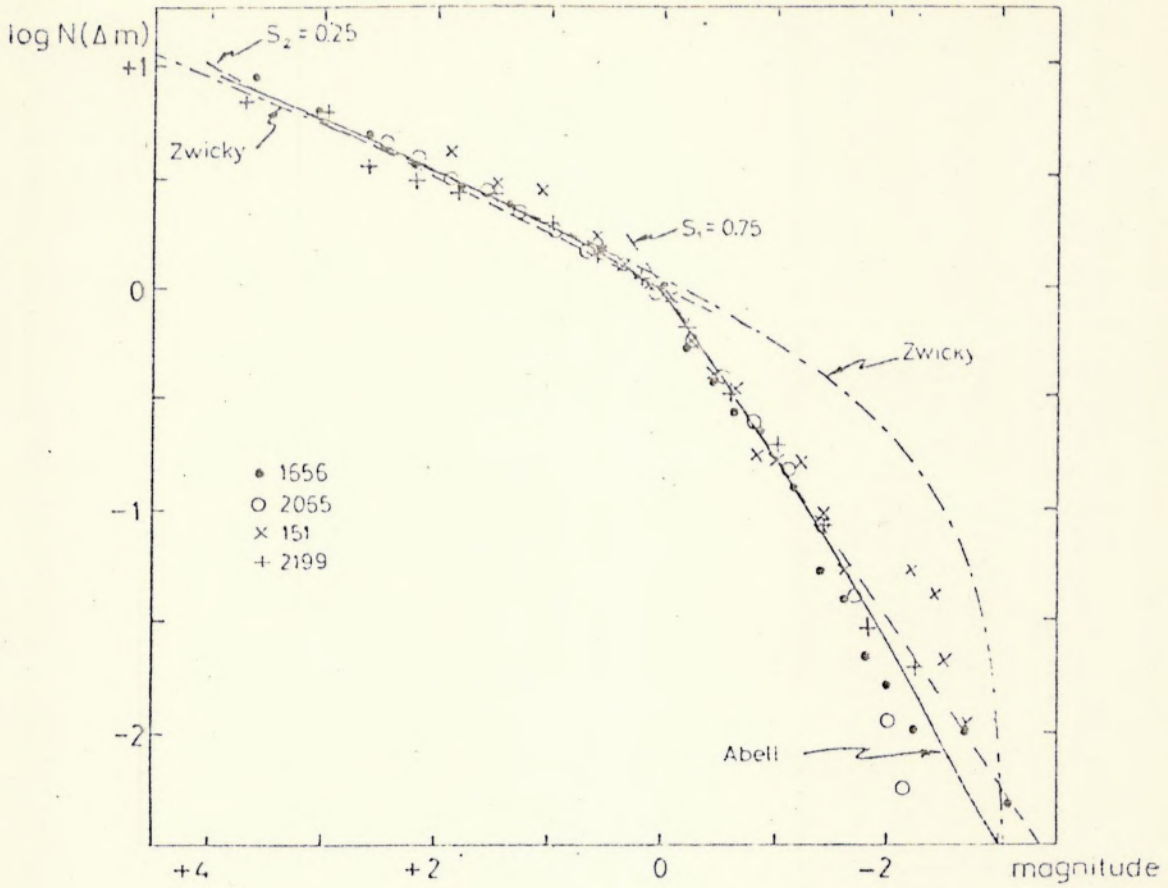


Figura 4

Funções luminosidade integradas logaritméticas para quatro aglomerados ricos. Os pontos zero das ordenadas e abscissas são arbitrários. (Extraída de Abell - 1974).

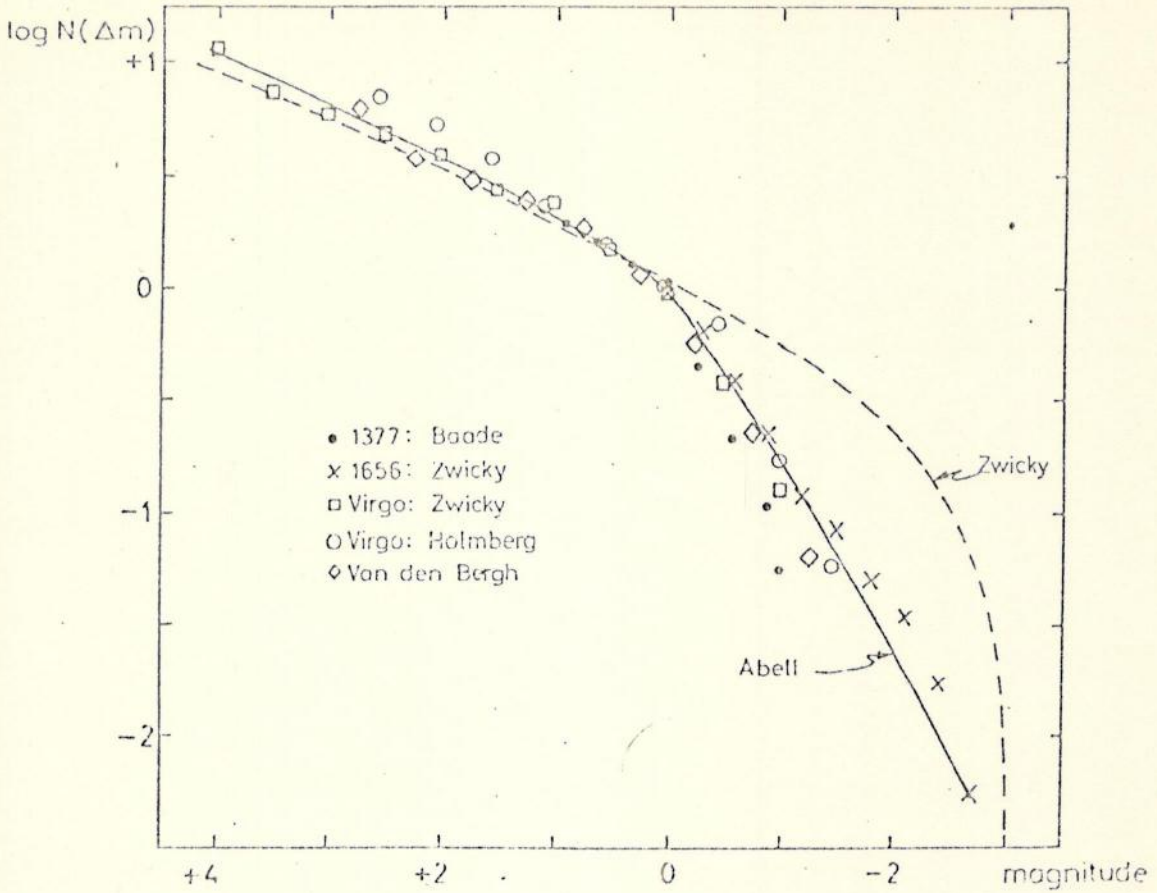


Figura 5

Funções luminosidade integradas logaritméticas para aglomerados, adaptadas dos dados de vários observadores. Os pontos zeros são arbitrários. (Extraída de Abell - 1974).

Zwicky sugeriu uma forma exponencial $N(m) = K(10^{0.2M-1})$, com K sendo uma constante, mas esta função super-representa o final brilhante da função luminosidade. Abell, por sua vez, usou uma representação linear "quebrada" de $\log N(m)$,

$$\begin{aligned} \log N(m) &= K_1 + S_1 m & \text{se } m \leq m^* \\ \log N(m) &= K_2 + S_2 m & \text{se } m \geq m^* \end{aligned} \quad (\text{III.3.1})$$

onde $S_1 = 0,75$ e $S_2 = 0,25$ (em acordo com Zwicky). A descontinuidade em m^* parece ser universal e corresponde a uma magnitude absoluta $M_V^* = -20,41 \pm 0,15$, como se seguiu de uma dúzia de aglomerados estudados por Bautz e Abell (1973/R14) e Austin e al. (1975 /R14).

A função luminosidade diferencial $\phi(M)$, correspondendo à curva de "Abell" nas Figuras 4 e 5 é mostrada na Figura 6. A fun-

ção $\log N(m)$ mostra uma mudança de inclinação bem definida depois do intervalo das magnitudes mais brilhantes 2 a 3. Esta mudança abrupta da inclinação corresponde a um máximo próximo ao final brilhante de $\phi(M)$. Existe alguma evidência que, pelo menos para o aglomerado de Coma, este pico advém da contribuição, principalmente, das galáxias próximas ao núcleo central do aglomerado (Rood 1969, Rood e Abell 1973/R1).

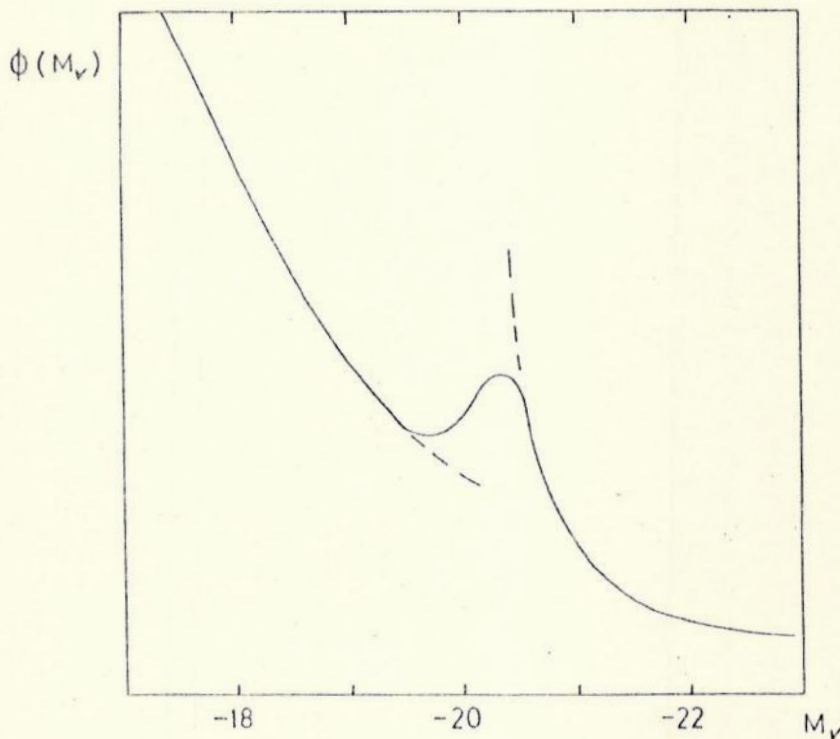


Figura 6

Função luminosidade diferencial para aglomerados, derivada das Figs. 4 e 5. A escala das ordenadas é arbitrária. (Extraída de Abell - 1974).

A função luminosidade composta para os aglomerados na Figura 4 pode ser representada, aproximadamente, por duas linhas retas que se interceptam (linhas pontilhadas), as quais representam simples relações exponenciais sobre dois intervalos diferentes de magnitude. Estas linhas são meramente fórmulas de interpolação, e o caráter aproximadamente exponencial das funções luminosidade integradas não pode ser tomado literalmente. Além do mais, se as duas linhas retas forem aplicadas rigorosamente, a função luminosidade diferencial seria descontínua (linhas pontilhadas na Figura 6), o que, obviamente, não é fisicamente realístico.

Segundo Abell (1974), a função luminosidade para todos os aglomerados, então investigados, mostram, fracamente, a mesma forma característica. A magnitude na qual as duas linhas se interceptam na Figura 4, a qual definiremos como m^* , é um ponto definido operacionalmente na função luminosidade, através do melhor ajustamento desta à forma da Figura 4, para o aglomerado em questão.

A forma diferencial da função luminosidade $\phi(L)dL$ dada por Schechter (1976/R5)

$$\phi(L)dL = \phi_*(L/L_*)^\alpha \exp(-L/L_*)dL$$

é analiticamente conveniente e é moderadamente precisa, apesar de não fornecer um ajustamento muito bom para $\phi(M)$. Representa, contudo, o melhor ajustamento disponível. Em particular, é difícil ajustar simultaneamente uma inclinação baixa no final débil e uma inclinação mais forte no final brilhante, onde existe um corte. Desta forma, os valores de α e L_* podem flutuar. Felten (1977/R14) mostrou que esta representação da função luminosidade $\phi(L)$ fornece um excelente ajustamento para muitos aglomerados com os valores $\alpha = -1,25$ (correspondente ao $S_2 = 0.25$ de Abell) e $L_* \approx 1,7 \times 10^{10}$ unidades solares, inclusive para galáxias de campo. Davis, Geller e Huchra utilizaram $\alpha \approx 1$ para o ajustamento de $\phi(M)$ com $M^* = -19,0 + 5 \log h$, para o Hemisfério Sul, e $M^* = -18,5 + 5 \log h$, para o norte. Davis e Huchra (1982), a partir de uma análise que classificava as galáxias segundo hemisfério galáctico e classes morfológicas, concluíram que os valores $\alpha = -1,3$ e $M^* = -19,4$ deveriam ser utilizados em seus estudos.

III.3.a Problemas com a função luminosidade

As hipóteses sobre as quais discutimos a relação entre as funções espacial e angular, devem ser consideradas num tratamento mais apurado, que as leve em conta como possíveis fontes de erros.

Apesar de que, em princípio, podemos considerar a dependência da função luminosidade com o tipo morfológico, as diferenças nas formas destas funções, devidas a diferenças no tipo morfológi-

co, não são claramente discerníveis com os dados disponíveis atualmente (Oemler 1974, Shapiro 1971/R3). De fato, a função luminosidade para galáxias em campos dominados por espirais é marcadamente similar à função luminosidade para aglomerados compactos dominados por elípticas e lenticulares (Peebles, 1971/R3). Assumimos, então, uma função de luminosidade integral universal, e ainda, independente da distância, das influências da conglomeração, e assim por diante (eq. II.5.5). Necessitamos, apenas, assumir uma relação simples entre magnitude e distância de cada objeto.

Davis e Huchra (1982) comentaram que as distribuições de luminosidade são marcadamente similares através dos tipos morfológicos. Peebles (1974) mostrou que a relação entre as funções de correlação são sensíveis à forma do final brilhante da função luminosidade, na condição de uma inclinação β significativamente menor que 0,4.

Sendo assim, a análise pode conter alguns erros sistemáticos. Ao assumirmos uma função luminosidade universal, independente da posição, introduzimos erros que, apesar de não afetarem a inclinação, afetam o fator de normalização, equação (II.6.1). Contudo, segundo Davis e Geller, os dados disponíveis parecem indicar que a hipótese de uma forma universal para a função luminosidade, para todos os tipos de galáxias, não é um erro sério. Sérsic (1982), por outro lado, afirma que, apesar de a função luminosidade fornecer um excelente ajustamento para muitos aglomerados, este fato não se constitui numa sugestão de universalidade desta função, já que vários e importantes desvios têm sido encontrados.

Quanto à hipótese de que a luminosidade de uma galáxia é uma variável aleatória não correlacionada com sua posição, pode não ser estritamente verdadeira, uma vez que a morfologia de uma galáxia é definitivamente uma função de seu "ambiente". As regiões centrais dos aglomerados ricos e compactos parecem dominados por galáxias elípticas e lenticulares e contêm poucas espirais normais; aglomerados irregulares e menos densos, que têm uma composição similar à do campo, contêm muitas espirais (Oemler 1974/R3).

III.4 A função Seleção

Scott e Neyman enfatizaram que a interpretação dos catálogos de galáxias depende não somente da distribuição de frequências de propriedades intrínsecas, como a luminosidade, mas também da função probabilidade que uma galáxia de um dado tipo e magnitude seja incluída no catálogo.

A função seleção $\phi(y)$, já definida, é a densidade numérica de galáxias visíveis à distância y do observador, sendo uma convulsão da função luminosidade para as galáxias com a função que descreve tendências observacionais, i.e., o corte à magnitude aparente limite.

A principal fonte de incerteza no fator de normalização da função de correlação espacial - $\xi = (r_Y/r)^Y$ - é, justamente, a função seleção. Este fato, contudo, pode ser evitado, se os desvios para o vermelho são conhecidos para a amostra de galáxias e, portanto, a distribuição real de objetos é conhecida, pois, assim, podemos derivar uma estimativa de $\phi(y)$, tanto a partir da distribuição de velocidade das fontes, como da distribuição de magnitudes aparentes.

Se movimentos peculiares (não Hubble) podem ser ignorados, o número esperado de galáxias no intervalo de velocidades (ou, equivalentemente, no intervalo de distâncias) dv é

$$dN = A\phi_V(v/H_0)v^2 dv/H_0^3, \quad (\text{III.4.1})$$

onde A é o ângulo sólido subtendido pela região da amostra e a função seleção em velocidades, $\phi_V(y)$, é o número de galáxias por unidade de volume, visível à distância y do observador. O histograma da Figura 7 foi retirado de Davis, Geller e Huchra, e fornece uma medida direta de $\phi_V(y)$. Este estimador é, todavia, tendencioso, dadas as inhomogeneidades na distribuição de galáxias, e é alargado por movimentos peculiares. Numa amostra onde a dispersão típica em um aglomerado rico é pequena comparada com a velocidade Hubble, na distância limite da amostra, este problema pode ser negligenciado.

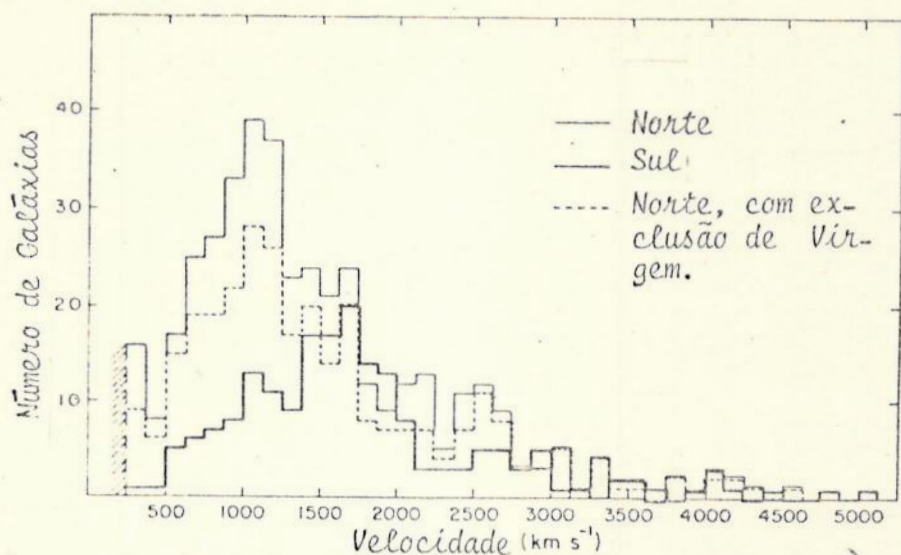


Figura 7

Distribuição de Velocidades para três amostras. (Extraída de Davis, Geller e Huchra - 1978).

Tanto a função seleção $\phi_V(y)$ como a $\phi_M(y)$ (eq.II.5.4) são tendenciosas na presença de inomogeneidades na distribuição de galáxias, sendo $\phi_V(y)$ mais sensível. Um vez que a escala das inomogeneidades deve ser pequena comparada com a profundidade da amostra, os momentos das funções seleção não devem ser seriamente tendenciosos. É importante notar que a função de correlação espacial $\xi(r)$ depende apenas de momentos de $\phi(y)$. Obviamente, grandes inomogeneidades, como o aglomerado de Virgem, produzirão uma tendência significativa em qualquer função seleção.

Uma vez que a dedução de $\phi_V(M)$ e $\phi_M(y)$ assume que as galáxias são distribuídas uniformemente dentro do volume em que são visíveis, uma "incompletude" do catálogo próxima à magnitude limite conduz a uma super-estimativa de $\phi_M(y)$ em grandes y . A função seleção em velocidade $\phi_V(y)$ é, entretanto, livre de tal tendência, já que a "incompletude" da amostra depende da magnitude aparente e não da posição angular ou da densidade superficial que circunda uma dada galáxia. Este fato levou Davis et al. (1978) a optarem pela função seleção em velocidades na análise dos dados e na estimativa de $\xi(r)$. A Tabela 1 construída por estes autores apresenta comparações de $\phi_V(y)$ e $\phi_M(y)$.

Amostra	$\bar{x} = I_3 / I_2$	$J_{3,2} / I_2^2$
<i>Sul:</i>		
ϕ_V	0,90	1,15
ϕ_M	1,01	0,74
<i>Norte:</i>		
ϕ_V	0,73	1,50
ϕ_M	0,84	1,08
<i>Norte, Virgem excluído</i>		
ϕ_V	0,76	1,41
ϕ_M	0,83	1,08

Tabela 1

I_n : momentos de n -ésima ordem das funções seleção ϕ_V e ϕ_M ;

J_n : momento de n -ésima ordem do quadrado das funções seleção. Valores obtidos para a amostra de Davis, Geller e Huchra. É aparente que estas funções têm momentos que concordam dentro de, aproximadamente 20%.

III.4.a Estimativa de $\phi(r)$

A importância do efeito da função seleção numa resenha limitada em magnitude aparente, depende da amplitude dos erros nas estimativas da magnitude comparada com o espalhamento em magnitudes absoluta das galáxias contadas. Caso esta última distribuição seja mais larga, o efeito da seleção não é importante. Sendo assim, o melhor caminho a se seguir é estimar a função seleção para a amostra em análise, pois, desta forma, critérios específicos a partir dos quais a amostra é composta entram cena. Peebles (1974)

e Davis e Geller (1976), por exemplo, modelaram a função seleção assumindo a função observador com valor 1 para $m < m_{lim}$ e 0 para $m > m_{lim}$.

Visto as possibilidades de tendências na determinação de $\phi(M)$, uma alternativa para a determinação da função seleção é o método descrito por Turner (1979/R5) e usado por diversos autores, que não se apresenta tendencioso devido a inomogeneidade na densidade.

Definimos, então, a função seleção $\phi(r)$, como sendo a fração de objetos à distância r que foram incluídos no catálogo, por que são observáveis à distância r ou maior (i.e., aqueles objetos com magnitude aparente igual ou menor que o limite do catálogo). Assim, $\phi(r)$ é a porcentagem de galáxias que passam pelo critério de seleção. Para cada galáxia, temos um raio observado r e um possível raio máximo r_{max} , que é a distância na qual a galáxia estaria na amostra, se sua magnitude aparente fosse a limite. Suponha que $F(r)$ objetos são observados com r_{max} entre r e $r + \Delta r$ - i.e., $F(r)$ é o histograma dos valores de r_{max} para a amostra. Seja $T(r)$ o número de galáxias que são realmente observadas dentro de uma distância r e que são observáveis até distâncias $\geq r$ - i.e., $T(r)$ é o histograma para o qual cada galáxia contribui em todos os intervalos entre seu r e seu r_{max} . Portanto, se a luminosidade de uma galáxia for uma variável aleatória, deve-se esperar, independente das inomogeneidades, que a mudança fracional de $\phi(r)$ seja dada pela razão entre $F(r)$ e $T(r)$, i.e.

$$\frac{\phi(r+\Delta r) - \phi(r)}{\phi(r)} \approx \frac{d}{dr} [\ln \phi(r)] \Delta r = - \frac{F(r)}{T(r)} = -A(r) \quad (\text{III.4.2})$$

Davis e Huchra ajustaram um polinômio de quarto grau, o que, segundo eles, parece bastante adequado, apesar de não ser necessário para seu conjunto de dados, e, após isto, integraram analiticamente a fim de se obter $\phi(r)$. Sadler e Sharp (1984) dizem, com respeito ao ajuste, que, além do problema dos dados, funções cumulativas são notavelmente boas em cancelar erros, o que faz da sofisticação proposta por aqueles desnecessária.

Quando do momento da composição da amostra, torna-se necessário retirar os objetos intrinsecamente débeis (quando possível)

a fim de se obter uma amostra pelo menos parcialmente limitada em volume e muito menos afetada por amplificação da densidade local. Com este corte em magnitude absoluta, fixamos $\phi = 1$ para $r < r_{\min}$, onde r_{\min} é a distância na qual uma galáxia com a magnitude absoluta de corte estará quando apresentar a magnitude limite do catálogo. Para $r > r_{\min}$, $\phi(r)$ pode ser deduzida a partir do processo indicado acima.

III.5 Estimativa de ξ (s)

O papel da magnitude aparente deve ser cuidadosamente considerado nas estimativas das funções de correlação. É fundamental levar-se em conta os vários efeitos de seleção. A forma mais conveniente para fazê-lo é formar as estimativas de ξ pela comparação da distribuição dos dados reais com um conjunto de pontos distribuídos aleatoriamente através do volume em questão. Sadler e Sharp, todavia, distribuíram os pontos de comparação de acordo com a distribuição de densidade, uma vez que sua amostra era fortemente não homogênea radialmente.

Assim, a função de correlação pode ser estimada, segundo a técnica proposta por Davis e Peebles (1983), como se segue: primeiro, calcula-se a soma de todas as separações galáxia-galáxia, dentro de um dado intervalo Δs ou $(\Delta r_p, \Delta \pi)$: chamemos DD. Feito isto, calcula-se a soma de todas as separações galáxia-ponto aleatório dentro do mesmo intervalo: chamemos DR. A estimativa da função de correlação resultante é dada por

$$1 + \xi = \frac{n_R}{n_D} \frac{DD}{DR}, \quad (\text{III.5.1})$$

onde as densidades n_R e n_D são as estimativas para os dados e para a amostra de comparação, respectivamente

$$n = \frac{1}{\text{volume}} \sum \frac{N}{\phi} \quad (\text{III.5.2})$$

onde N é o número esperado de pontos observados numa concha de raio r e espessura Δr , dentro de um cone de ângulo sólido Ω e ϕ

a função seleção.

Duas formas de ponderar as separações nas contagens DD e DR foram apresentadas: a primeira conta cada par com igual peso, a segunda pondera cada par ij por $\phi_i^{-1} \phi_j^{-1}$, de forma que cada parte do espaço é ponderada em proporção ao número de pares que estaria presente numa amostra realmente limitada em volume. A importância de tal ponderação reside no fato da possibilidade de haver flutuações apreciáveis na densidade em escalas comparáveis à profundidade da amostra, que, então, não podem ser ignoradas.

O segundo plano, asseguram Davis e Peebles (1983), ser próximo a uma ponderação de variância mínima na determinação de $\xi(r)$, mas, como apontaram, isto conduz a um aumento considerável no nível de ruído.

Na tentativa de testar o comportamento dos resultados, Sadler e Sharp (1984) calcularam um grande número de correlações cruzadas. Estes testes incluíram séries de correlações cruzadas galáxia-aleatório e correlações cruzadas aleatório-aleatório. Seus resultados não são conclusivos; todavia, parece que a ponderação pode ser tendenciosa em grandes escalas, mas é certamente mais ruidosa.

Quando à não ponderação, esta parece ligeiramente tendenciosa em pequenas escalas. Entretanto, correlações aleatório-aleatório ocasionalmente mostram as mesmas tendências.

É difícil, à luz desses problemas, ser definitivo sobre qual método é realmente melhor. (As Figuras 8 e 9 mostram os resultados obtidos). Maiores detalhes são encontrados em Davis e Peebles (1983).

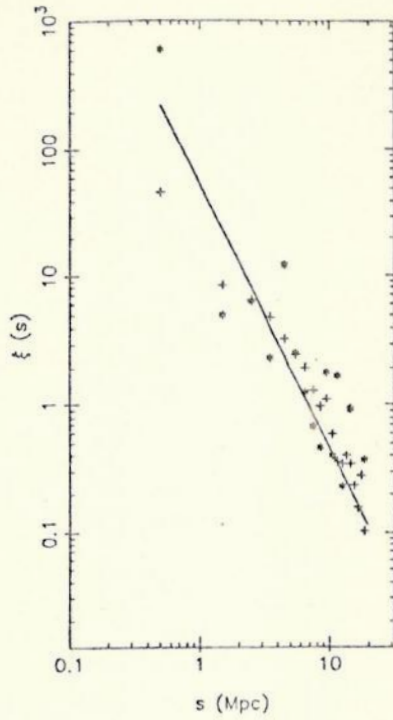


Figura 8

Estimativas ponderadas (*) e não ponderadas (+) da função espacial $\xi(s)$, juntamente com o ajuste à lei de potência $\xi = (r_0/r)^\gamma$, $r_0 = 6,58$ e $\gamma = 2,07$, para a amostra de Sadler e Sharp - 1984.

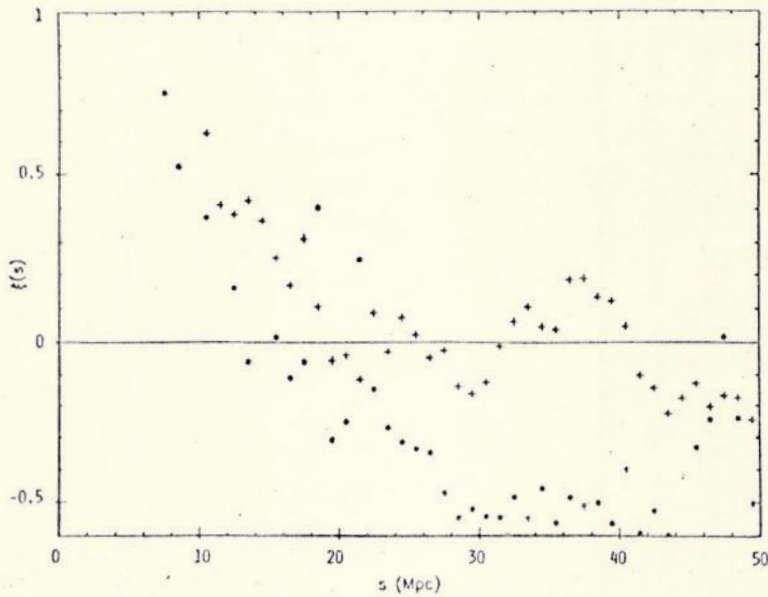


Figura 9

Estimativas de $\xi(s)$ como na Figura 8, para grandes escalas.

III.6 Correção para a Curvatura e Expansão

As resenhas de galáxias alcançam desvio para o vermelho razoavelmente altos - um valor típico para as galáxias no catálogo de Lick é $Z \sim 0,08$ e a profundidade das resenhas vai bem além da referente a este catálogo - de tal forma que é útil avaliar como as relações entre as funções de correlação angular e espacial são afetadas pelo modelo cosmológico.

Uma exposição essencial é feita por Peebles (1980). Limitar-nos-emos à apresentação dos resultados. Na análise do referido autor, o modelo padrão de Friedamn-Lemaître foi assumido.

A correção K é (Oke e Sandage, 1968, Pence, 1976)

$$\Delta m \approx kZ \quad (\text{III.6.1})$$

e relaciona-se ao fato de que a magnitude m medida numa banda fixa de comprimentos de onda é uma função do desvio para o vermelho. Para $Z < 0,5$, pensa-se que o melhor valor da constante de proporcionalidade está entre 3 e 5.

Um modelo conveniente para ξ , que se ajusta bastante bem às observações, é a lei de potência

$$\xi(r, t) = Br^{-\gamma} (1+Z)^{-(3+\epsilon)}, \quad (\text{III.6.2})$$

onde B é uma constante. O último fator modela a possível evolução da aglomeração: se $\epsilon = 0$, a aglomeração medida em coordenadas próprias não está mudando. A integral relacionando ξ e w pode ser avaliada para esta forma de $\xi(r)$, fornecendo

$$A = BH_{\gamma} a_0^{-\gamma} \frac{\int_0^{\infty} x^{5-\gamma} dx \phi(x)^2 (a/a_0)^{3+\epsilon-\gamma} / F(x)}{\left(\int_0^{\infty} x^2 dx \phi(x) / F(x) \right)^2} \quad (\text{III.6.3})$$

Na qual o modelo cosmológico entra através do fator de volume F , do fator de redshift a_0/a , e da variação da função de seleção com

*Anteriormente
o desvio era 3.7*

X

a distância x .

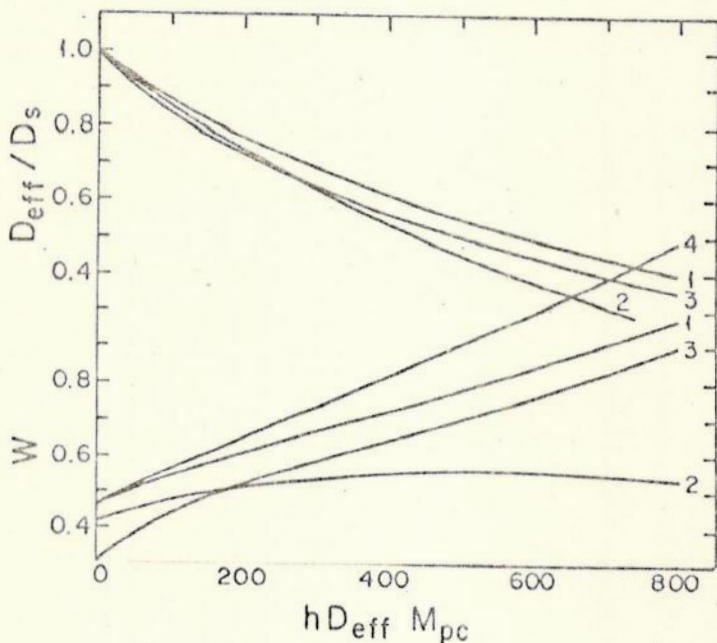


Figura 10

Exemplos dos efeitos da expansão e curvatura. O primeiro gráfico é a razão de duas profundidades efetivas, D_{eff} e D_s (eqs. III.6.4 - III.6.5). W mede o desvio de uma lei de escalonamento Euclidiana para $w(\theta)$, (eq. III.6.6). Os índices das curvas correspondem a diferentes escolhas nos parâmetros: o modelo 1 utiliza os parâmetros na equação (II.5.5) com $\Omega_0 = 1$, $k = 3$, $\epsilon = 0$, e $\gamma = 1,75$. Um parâmetro é alterado neste conjunto padrão em cada uma das demais curvas: em (2), $\beta = 0$; em (3), $\phi_0 = 0,0001$; em (4), $k = 5$. (Ex - traída de Peebles - 1980).

A profundidade efetiva D_{eff} é definida por

$$D_{\text{eff}} = (N(m_0)/n_0 E)^{1/3} \quad (\text{III.6.4})$$

onde $N(m_0)$ é a densidade esperada no catálogo limitado na magnitude m_0 , e $n_0 D_s^3 E$, onde

$$D_s = \text{dex}[0.2(m_0 - M^*) - 5] \text{ Mpc} \quad (\text{III.6.5})$$

é a densidade que se esperaria à magnitude limite m_0 , na ausência de correções para a expansão e curvatura.

O segundo gráfico na Figura 10 mostra como a função de correlação de dois pontos varia com a profundidade no modelo de lei de potência para ξ . Equação (III.6.3) para $w(\theta)$ foi escrita como

$$w(\theta) = H_Y (B/D_{\text{eff}}^Y) W \theta^{1-Y}, \quad (\text{III.6.6})$$

então, W mede o desvio da lei de escalonamento Euclidiana $w \propto D^{-Y}$ (eq. II.6.4).

Vê-se da figura que os principais problemas, no momento, são a função luminosidade e a correção K . Para uma resenha profunda, $D_{\text{eff}} > 500h^{-1}$ Mpc, o valor esperado de $w(\theta)$ para catálogos de menor alcance pode variar por um fator de ~ 2 , sob moderadas variações da função luminosidade e correção K . Até que estes sejam mais bem compreendidos, os parâmetros na cosmologia, como Ω_0 e ϵ , provavelmente não causarão muitos problemas. A evolução nas luminosidades das galáxias não tem sido discutida separadamente, porque esta apenas muda a melhor correção K efetiva, que é bastante incerta de qualquer forma.

Um tratamento completo do efeito do desvio para o vermelho deve levar em conta o fato de que diferentes tipos morfológicos de galáxias têm diferentes correções K . E também, deve-se esperar que a eficiência de detecção (f na eq. II.4.11) seja uma função do tamanho angular bem como da magnitude aparente, e que função pode ser substancialmente diferente para diferentes formas de detecção de galáxias. Claramente, estes pontos dão origem a um problema maior, pois sabe-se que a morfologia é sistematicamente diferente em aglomerados compactos e no campo. Isto significa que o aparecimento de conglomerado em alto desvio para o vermelho pode ser afetado pelo fato de as galáxias em aglomerados compactos tenderem a ter correções K maiores que as requeridas por galáxias médias (o que tenderia a suavizar a distribuição aparente ao suprimir o número de galáxias visíveis em concentrações mais cerradas).

III.7 Observações

As magnitudes totais observadas das galáxias sofrem dois tipos de efeito de extinção: a absorção por obscurecimento interno nas galáxias e a absorção galáctica. Ambos os efeitos podem ser determinados, no mínimo num sentido estatístico, através da análise de dados observacionais.

A determinação da extinção galáctica tem sido matéria de muitos debates, resultando em alguns modelos. Todavia, uma vez que existe evidência que a extinção galáctica é não regular e não uniforme em todas as latitudes (Burnstein e Heiles, 1982/R13), qualquer modelo geral é igualmente preciso em não mais que $0,1 - 0,2$ mag em A_B (coeficiente de extinção), e para galáxias abaixo de 15° de latitude galáctica ($A_B > 1,0$ mag), os valores calculados de A_B devem ser considerados apenas como tentativas.

Quase todas as estimativas de $\xi(r)$ a partir de distribuições angulares têm assumido que o obscurecimento não regular e não uniforme pode ser negligenciado. Uson e Seldner (1982/R6) examinaram cuidadosamente a hipótese de que parte apreciável na conglomeração aparente nas amostras de Lick em amostras mais profundas é devida à absorção irregular e não uniforme. Concluíram, ainda, que este fato acarreta um aumento significativo em γ e um decréscimo em r_0 .

A forma de lei de potência de $w(\theta)$ é reproduzida pelo modelo de lei de potência para a função de correlação espacial de dois pontos

$$\xi(r) = (r_0/r)^\gamma, \quad \gamma = \delta + 1$$

Comportamento que permanece a mais notável característica das correlações das galáxias. Existem sugestões de desvios de uma lei de potência para $r < 0,1 h^{-1} \text{Mpc}$, onde $\xi(r)$ pode ser ligeiramente mais inclinada que a média, e para $5 < r < 10 h^{-1} \text{Mpc}$, onde $\xi(r)$ é ligeiramente menos inclinada. Entretanto, mesmo se a população de galáxias em aglomerados fosse descrita por uma lei de

potência pura, pequenos desvios seriam esperados em qualquer amostra relativamente pequena.

A forma de $\xi(r) \sim r^{-\gamma}$ - deve falhar para algum r pequeno, isto porque o arrasto dinâmico faz com que pares cerrados de galáxias movam-se juntos.

A forma de $\xi(r)$ para $r \sim 10h^{-1}$ Mpc é pobremente conhecida e é de considerável interesse. As amostras CfA Norte e Sul e o catálogo de Lick indicam que $\xi(r)$ não segue a lei de potência para $r \sim 10 - 20 h^{-1}$ Mpc. A primeira e a última destas amostras são as mais bem avaliáveis na detecção de tal característica, e a coincidência dos resultados é sugestiva, contudo não podemos ainda excluir a hipótese de que estamos olhando apenas flutuações na amostra. Se a quebra for real, será um importante e altamente sugestivo efeito, porque ocorre na transição entre flutuações caracteristicamente lineares e não-lineares.

IV MONTAGEM DO CATÁLOGO UNIFORME E A SUB-ROTINA

IV.1 Montagem do Catálogo Aleatório

Para a estimativa da função de correlação angular, faz-se necessária a fixação de objetos aleatoriamente na região de análise; objetos que servirão como uma amostra de comparação. Precisamos, assim, montar um catálogo aleatório.

Descreveremos, agora, o método por nós empregado para montagem desse catálogo.

- Fixamos o número de objetos N que constarão no catálogo;
- Calculamos a área A do catálogo por $A = (\text{sen } B_f - \text{sen } B_i) (L_f - L_i)$, onde L_j e B_j são as coordenadas que limitam a área;
- Dividimos esta área A pelo número de objetos N ;
- Fixamos a amplitude do intervalo em longitude $\Delta \ell$, assim a área ficará dividida em meridianos;
- Dividimos, agora, a região estudada no sentido das latitudes, de tal forma que as áreas resultantes sejam iguais.

$$A' = (\text{sen } b_f - \text{sen } b_i) (\ell_f - \ell_i)$$

mas

$$\ell_f - \ell_i = \Delta \ell$$

$$A' = A/N,$$

então

$$\text{sen } b_f - \text{sen } b_i = \frac{A}{N \cdot \Delta \ell}$$

- O primeiro valor de b_i é aquele correspondente ao contorno da região, ou seja

$$b_i^{(1)} = B_i^{(1)}$$

- A partir disto:

$$b_f^{(1)} = \text{arc sen} (\text{sen } b_i^{(1)} + A/N \cdot \Delta \ell) \quad (\text{IV-1.1})$$

- Obtemos assim

$$\ell^{(n)} = \ell_i + \Delta \ell^{(2n+1)}/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \ell_i = L_i$$

$$b^{(n)} = (b_i^{(n)} + b_f^{(n)})/2$$

- Fixamos, então, o valor de b obtido e associamos a este todos os valores de ℓ ;
- Repetimos o processo, tendo o último b_f calculado como valor de entrada para (IV.1.1), que nos levará a um novo b_f , o qual associaremos a todos os ℓ ; e assim, sucessivamente, até que toda a área seja coberta;

IV.2 A Sub-Rotina

A sub-rotina, aqui criada, possui algumas peculiaridades. Faremos agora, uma enumeração destas, a fim de tornar a sub-rotina viável, no sentido de facilitar sua execução por um usuário, mesmo que este desconheça toda a base teórica envolvida na estatística, que o projeto se propôs apresentar.

Assim:

- Para que se ative a sub-rotina, cujo nome é PROJETO/FONTE, é necessária a entrada no disco fixo ALLPACK, onde se encontra ar-

quivada.

- Caso o usuário deseje estimar a função de correlação angular através do processo Monte Carlo, um pré-processamento, com o objetivo de se criar um arquivo (número lógico 4), contendo a distribuição dos números de pares para uma amostra de comparação, deve ser realizado. A principal razão deste pré-processamento encontra-se no possível fato de o tempo requerido para a geração do arquivo ser grande, além de tornar possível um controle externo desta distribuição, "padrão", a partir da qual se fará uma das três estimativas da função de correlação angular. As demais serão realizadas através do cálculo direto do ângulo sólido do anel (eq. III.1.4), uma sem que se corrija do efeito de borda e a outra aplicando o método descrito para corrigi-la.
- Caso o usuário introduza valores para os parâmetros diretamente envolvidos com a montagem da amostra de comparação e a distribuição dos números de pares, para a execução da sub-rotina, que sejam diferentes daqueles utilizados na criação do arquivo número 4, a mensagem - OS VALORES DOS PARÂMETROS "NCLASS", "TE" E "TF" NÃO SÃO COMPATÍVEIS COM AQUELES QUE FORAM UTILIZADOS NA MONTAGEM DO NÚMERO DE PARES DA AMOSTRA DE COMPARAÇÃO. CASO DESEJE ALTERAR ESTE ARQUIVO, FAÇA UM PRÉ-PROCESSAMENTO PARA OS VALORES DESEJADOS, UTILIZANDO O PROGRAMA GAU/NP, QUE SE ENCONTRA NO ARQUIVO DE MESMO NOME - será emitida.
- Se se desejar a ativação do programa GAU/NP (compilado como GAU/NP /CODIGO, entre, primeiramente com os seguintes parâmetros, no arquivo de número 1; 1º registro - número de objetos na amostra de comparação "padrão" (formato I7); 2º registro - número de divisões em longitude (formato I4); 3º registro - limite inferior para a distribuição das separações angulares (formato F5.2); 4º registro - limite superior para a mesma distribuição (formato F5.2); 5º registro - número de classes angulares (formato I4); 6º registro - longitude mínima e máxima e latitude mínima e máxima da área "padrão" (formato 4F6.2).

Esse programa utiliza-se do procedimento descrito no capítulo IV para a montagem do catálogo aleatório. E, quando ativado, emitirá a mensagem - "O NO. DE CLASSES ANGULARES UTILIZADO NÃO

SERÁ CONVENIENTE PARA A ANÁLISE. TENTE OUTRO" - se o número de pares em uma classe qualquer for nulo.

Cumpra observar que o resultado da divisão do número de objetos pelo número de divisões em longitude deve ser um inteiro.

- A sub-rotina pressupõe que um catálogo, com, no máximo, dois mil objetos, faça parte de um arquivo, cujo número lógico é 3. Este arquivo deve conter os dados de: IDENTIFICAÇÃO - formato I3 ; LONGITUDE GALÁTICA - formato F6.2; LATITUDE GALÁTICA - formato F6.2; DECLINAÇÃO - formato F6.2; MAGNITUDE APARENTE - formato F4.1 e, caso seja disponível, VELOCIDADE RADIAL - formato I5 , havendo um espaço entre os dados;
- O número máximo de divisões em latitude no programa GAU/NP é dois mil;
- O número máximo de classes, segundo as quais os dados de separação angular entre os objetos sob análise são classificados, é trinta;
- O número máximo de classes, segundo as quais classifica-se os dados de distâncias dos objetos, é cinquenta;
- Para a execução da sub-rotina, faz-se necessária a entrada dos seguintes parâmetros:

1º Bloco

- . Parâmetro de informação 0
0, não existe uma amostra de comparação "padrão".

2º Bloco

- . Parâmetro de informação 1
- . Número de objetos
Formato: I2, I4

3º Bloco

- . Separação angular mínima e máxima (TE,TF)
- . Número de classes angulares (NCLASS)
Formato: 2F5.2, I3

4º Bloco

- . Parâmetro de Informação 20
 - = 0, a região do catálogo é única;
 - = 1, a região é definida por duas sub-regiões;
- . Parâmetro de Informação 21
 - (caso o parâmetro de informação 20 seja 1)
 - = 0, as duas sub-regiões são simétricas ($|b| \geq b_{\text{mínimo}}$, para declinação fixa);
 - = 1, as duas sub-regiões não são simétricas;

5º Bloco

- . Latitude mínima e máxima e declinação
Valores para estes parâmetros que definem a região do catálogo .
Formato: 3F6.2

6º Bloco

- . Parâmetro de informação 22
 - = -1, o valor da declinação é a cota superior da região;
 - = 1, o valor da declinação é a cota inferior;
 Formato: I2.

Se a região se constituir de apenas uma sub-região ou de duas sub-regiões simétricas, não são necessários os blocos 7 e 8.

7º Bloco

- . Latitude mínima e máxima e declinação
Valores referentes à segunda sub-região;
Formato: 3F6.2

8º Bloco

- . Parâmetro de informação 23
Semelhante ao parâmetro de informação 22, referindo-se à segunda sub-região.

9º Bloco

- . Magnitude limite e típica
Formato: 2F5.1

10º Bloco

- . Parâmetro de informação 3
= 0, o valor da distância característica é fixado em termos da magnitude absoluta característica da função luminosidade para galáxias;
= 1, o valor da distância característica é uma entrada.
Formato: I2.

11º Bloco

- . Distância característica.
Valor para este parâmetro necessário, apenas quando o parâmetro acima mencionado for 1.
Formato: F8.4.

12º Bloco

- . Magnitude absoluta limite.
Formato: F5.1
Os quatro seguintes blocos são necessários apenas se o catálogo contiver dados de velocidade radial.

13º Bloco

- . Profundidade da amostra.
- . Número de classes radiais.
Formato: F8.4, I3.

14º Bloco

- . Erro no ajuste.
- . Erro máximo desejado na determinação dos coeficientes do polinômio de quarto grau ajustado à razão A (Eq. III.4.2), através do método de Gauss-Seidel.
Número de interações
Número máximo de iterações que serão realizadas para o ajuste , pelo método acima referido.
Formato: F16.13, I4.

15º Bloco

- . Erro no cálculo da integral

Erro relativo máximo desejado nas integrações realizadas pela regra de Simpson, para o cálculo dos momentos necessários da função seleção e de seu quadrado.

Formato: F6.4

16º Bloco

- . Três valores de distância para os quais se deseja o valor de função seleção estimada.

Formato: 3F5.1

17º Bloco

- . Parâmetro de informação 4

Relaciona-se com outras saídas da sub-rotina.

= 0, nenhuma outra saída é desejada ;

= 1, caso contrário.

As demais saídas da sub-rotina são:

- . Valores da função de correlação angular e dos respectivos ângulos, e, caso a função seleção seja estimada:

- . Valores da razão A (estimada e ajustada) e das distâncias correspondentes;

- . Valor dos coeficientes do polinômio ajustado à razão A;

- . razão entre os momentos de segunda ordem da função seleção e de ordem $(5-\gamma)$ de seu quadrado, γ é a inclinação da função de correlação espacial.

Formato: I2.

- Todos os parâmetros angulares devem entrar com seus valores em graus e as distâncias, em mega-parsecs.

- A sub-rotina faz uso do modelo de lei de potência para as funções de correlação angular e espacial, para o ajuste dos dados . Todavia, não corrige estas estatísticas dos efeitos de expansão e curvatura.

- A sub-rotina realiza uma seleção da amostra segundo os critérios: magnitude aparente, e, ainda, em magnitude absoluta e distância, caso o catálogo contenha dados de velocidade radial.
- Caso os parâmetros relacionados com a definição da região e do catálogo não definam uma região comum, a mensagem-" NÃO HÁ REGIÃO COMUM" - será emitida.
- Se, após a classificação das distâncias dos objetos (para a estimativa da função seleção), houver classe vazia, a mensagem - "O NO. DE CLASSES RADIAIS NÃO É CONVENIENTE" - é emitida, juntamente com os valores da razão A e os correspondentes valores da distância.
- Caso o número de objetos tomados como centro seja nulo para alguma classe, a mensagem - "A FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO ANGULAR CORRIGIDA DO EFEITO DE BORDA NÃO FOI CALCULADA PARA AS CLASSES CUJO NÚMERO DE PONTOS CENTRAIS É NULO" - é emitida.
- O ajuste do polinômio de quarto grau à razão A é realizado através do método dos mínimos quadrados e o sistema de equações, então formado, para a determinação de seus coeficientes é resolvido pelo método de Gauss-Seidel. Se não houver convergência na utilização deste método para os valores do erro e do número de iterações, o método de eliminação pivotal será, automaticamente, aplicado e a mensagem - "COM O METODO GAUSS-SEIDEL NÃO HOUE CONVERGÊNCIA: O MÉTODO DE ELIMINAÇÃO PIVOTAL FOI, ENTÃO, APLICADO" - será emitida.
- O teste V/V_{\max} é o mais comumente usado para se avaliar a "completude" de uma amostra (apesar de poder não ser o melhor método, devido à possível presença de flutuações em larga escala). Assim, a sub-rotina realiza o cálculo de V/V_{\max} para cada galáxia da amostra, através de

$$V/V_{\max} = 10^{0,6(m - m_{\text{lim}})},$$

para $m \leq m_{lim}$ e fornece seu valor médio.

- São as seguintes as saídas da sub-rotina: número de objetos analisados, valor da área da região, valor $\langle v/v_{max} \rangle$ para a amostra, o valor da função seleção para três valores da distância (caso esta função seja estimada), os fatores de normalização e as inclinações da função de correlação angular e espacial. Todos estes valores farão parte do arquivo de número lógico 5.

V APLICAÇÃO

V.1 A Amostra

Os objetos utilizados na aplicação da sub-rotina foram selecionados do catálogo Uppsala, preparado por P. Nilson (1973). Este catálogo, baseado em fotografias do "Palomar Sky Survey", contém 12921 galáxias, observadas entre as declinações $-2^{\circ},5$ e $+90^{\circ}$. Assume-se uma "completude" até o diâmetro limite de 1 segundo de arco nas placas azuis do "Sky Survey", incluindo, também, objetos cujas magnitudes vão até 14,5, apesar de conter alguns com diâmetros aparentes menores, tomados do catálogo de galáxias e aglomerados de Zwicky.

Utilizamos, desse catálogo, apenas as galáxias elípticas, não compactas, que possuem dados de velocidade radial e com

$$|b| \geq 13^{\circ}, \quad \delta \geq 2^{\circ},5.$$

Quanto à razão da escolha dessa classe morfológica específica, podemos encontrá-la na crença de que esta classe popula, preferencialmente, regiões densas. Após esta primeira fase de seleção, ficamos com apenas 87 objetos, apesar do fato de a compactidade não ter entrado em cena na alteração do tamanho da amostra, já que nenhuma galáxia elíptica, compacta, possui, catalogado, dado de velocidade radial. Contudo, um segundo critério na definição da amostra, baseado na magnitude limite do catálogo e na magnitude absoluta, esta para remover os objetos débeis, fez com que chegássemos a 63 objetos estudados com

$$m_{pg} \leq 14,5, \quad M \leq 18,5.$$

Como com o número de objetos selecionados não houve preenchimento de todas as classes angulares, para a estimativa da função de correlação angular, vimos-nos forçados a incluir objetos hipotéticos no catálogo, o que nos deixou com uma amostra composta por 72 objetos.

Nossa amostra fica, assim, bastante comprometida, por seu tamanho, para se tentar modelar as estatísticas apresentadas. Toda via, como esta aplicação tem por objetivo precípuo a explicitação do funcionamento da sub-rotina, o fato de a amostra ser pequena não nos preocupou mais seriamente.

V.2 Resultados

A função de correlação $w(\theta)$ foi estimada no intervalo $0^\circ, 1 \leq \theta \leq 5^\circ$, utilizando a amostra de comparação "padrão" composta por 14456 objetos numa região definida por $0^\circ < l < 210^\circ$ e $20^\circ < b < 90^\circ$. Desprezamos a possível amplificação das correlações devida ao obscurecimento galáctico, e assumimos o valor típico da magnitude absoluta como sendo $M^* = -18,5$, os resultados, então, obtidos, são apresentados na Tabela 2.

FUNCAO DE CORRELACAO ANGULAR										
FATOR DE NORMALIZACAO					INCLINACAO					
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	3
8.93	10.95	9.38	1.57	1.51	1.32					
FUNCAO DE CORRELACAO ESPACIAL										
FUNCAO SELECAO	FATOR DE NORMALIZACAO					INCLINACAO				
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
HEAVISIDE	32.86	40.90	36.27	2.57	2.51	2.32				
"ABELL"	123.40	158.32	151.31	"	"	"				
ESTIMADA	32.86	40.90	36.27	"	"	"				

OS NUMEROS 1, 2, 3 REFEREM-SE A FORMA PELA QUAL A FUNCAO DE CORRELACAO ANGULAR FOI ESTIMADA:

- 1-CALCULO DIRETO DO ANGULO SOLIDO
- 2-CALCULO DO ANGULO SOLIDO COM CORRECAO DE BORDA
- 3-COMPARACAO COM UMA AMOSTRA ALEATORIA

Tabela 2

Resultados obtidos na aplicação da sub-rotina

A título de comparação, apresentaremos os resultados obtidos por Davis e Geller (1976), para uma amostra de 200 galáxias elípticas, retiradas do mesmo catálogo. Observamos que estes autores não utilizaram dados de velocidade radial, e desta forma, foram forçados a lançar mão de um modelo para a função seleção, o modelo proposto por Abell (eq. II.5.6).

$$m_{pg} \leq 14,5, \quad b \geq 40^{\circ}, \quad \delta \geq 0^{\circ}.$$

Os resultados a que chegaram foram:

Função de correlação angular: fator de normalização = 2,83(0,10)
 inclinação = $1,10 \pm 0,09$

Função de correlação espacial: fator de normalização = 53

Uma inspeção na Tabela 2, deixa evidente que a forma assumida para a função seleção é uma fonte de incertezas a ser criteriosamente considerada nas estimativas.

APÊNDICE A.1

TRANSFORMADA DE MELLIN

Fórmulas de inversão de Mellin. TEOREMA 1: seja $s = \tau + ti$ uma variável complexa. Seja a função $f(s)$ regular na faixa $\alpha < \tau < \beta$ suponha que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau + ti)| dt$ convirja nesta faixa. Além do mais, suponha que a função $f(s)$ tenda uniformemente a zero com o aumento de $|t|$ em todas as faixas $\alpha + \delta < \tau < \beta - \delta$ ($\delta > 0$, fixado arbitrariamente). Se para x real e positivo e τ fixo, definimos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau - \infty i}^{\tau + \infty i} x^{-s} \tilde{f}(s) ds, \quad (\text{A.1.1})$$

então,

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} g(x) dx \quad (\text{A.1.2})$$

na faixa $\alpha < \tau < \beta$.

Demonstração: uma vez que, por hipótese, $f(s)$ converge uniformemente para zero para $\alpha + \delta < \tau < \beta - \delta$ com $|t| \rightarrow \infty$, o caminho de integração em (A.1.1) pode ser deslocado paralelamente a si mesmo enquanto permanece na faixa $\alpha < \tau < \beta$; portanto, $f(x)$ não depende de τ . Se escolhermos duas abscissas τ_1 e τ_2 com $\alpha < \tau_1 < \tau < \tau_2 < \beta$, teremos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{s-1} g(x) dx &= \int_0^1 x^{s-1} dx \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_1 - \infty i}^{\tau_1 + \infty i} x^{-s_1} f(s_1) ds_1 + \\ &+ \int_0^{\infty} x^{s-1} dx \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_2 - \infty i}^{\tau_2 + \infty i} x^{-s_2} f(s_2) ds_2 = J_1 + J_2 \end{aligned}$$

A ordem das integrações nestas integrais pode ser trocada, porque temos as estimativas

$$|J_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau_1 + t_i)| dt \int_0^1 x^{-1+(\tau-\tau_1)} dx < \infty,$$

$$|J_2| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau_2 + \tau_i)| dt \int_1^{\infty} x^{-1+(\tau-\tau_2)} dx < \infty$$

para as integrais intercambiadas.

Obtemos, então

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} g(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_2 - \infty i}^{\tau_2 + \infty i} \frac{f(s_2)}{s_2 - s} ds_2 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_1 - \infty i}^{\tau_1 + \infty i} \frac{f(s_1)}{s_1 - s} ds_1.$$

De acordo com a fórmula integral de Cauchy, a diferença do lado direito é igual a $f(s)$, uma vez que as integrais sobre os segmentos horizontais conectando as duas linhas verticais $s = \tau_1$, e $s = \tau_2$ tendem a zero para $|t| \rightarrow \infty$ (já que $f(s) \rightarrow 0$).

TEOREMA 2: suponha que $f(x)$ seja suave para $x > 0$, e que $\int_0^{\infty} x^{\tau-1} f(x) dx$ converge absolutamente para $\alpha < \tau < \beta$. Então, a fórmula de inversão (A.1.1) segue-se de (A.1.2).

Demonstração: façamos $x = e^u$. Temos, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau - \infty i}^{\tau + \infty i} x^{-s} f(s) ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u(\tau+ti)} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma(\tau+ti)} g(e^{\sigma}) d\sigma \\ &= \frac{e^{-u\sigma}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\sigma-u)} e^{\sigma\tau} g(e^{\sigma}) d\sigma. \end{aligned}$$

Pelo teorema integral de Fourier, a última expressão é igual a $e^{-u\tau} e^{u\tau} g(e^u) = g(x)$; o teorema está, portanto, provado.

Para a função

$$G(x) = \int_0^{\infty} dy x^p y^q f(xy) g(y), \quad (\text{A.1.3})$$

a transformada de Mellin é

$$\begin{aligned} \tilde{G}(S) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dy dx x^{p+s-1} y^q f(xy) g(y) \\ &= \tilde{f}(p+s) \tilde{g}(q-p-s+1) \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

onde a segunda linha segue da mudança de variáveis $xy = z$. De forma similar, encontramos que, para a função

$$K(x) = \int_0^{\infty} dy x^p y^q f(x/y) g(y), \quad (\text{A.1.5})$$

a transformada de Mellin é

$$\tilde{K}(s) = \tilde{f}(p+s) \tilde{g}(q+p+s+1) \quad (\text{A.1.6})$$

APÊNDICE A.2

A SUB-ROTINA: FLUXOGRAMA E LISTAGEM

FLUXOGRAMA

Programa gerador de amostras uniformes e cálculo do número de pares - GAU/NP (Pré-processamento).

INÍCIO
 $rad(x) = x \cdot \pi / 180$
 Entradas: $na_f, n, te, ts, nclass,$
 li_f, lf_f, bi_f, bf_f

$te = rad(te)$
 $ts = rad(ts)$
 $li_f = rad(li_f)$
 $lf_f = rad(lf_f)$
 $bi_f = rad(bi_f)$
 $bf_f = rad(bf_f)$
 $m = na_f / n$
 $dl = (lf_f - li_f) / n$
 $area_f = (\text{sen } bf_f - \text{sen } bi_f) (lf_f - li_f)$
 $be = bf_f$

② → $be = bi_f$
 ③ $k_1 = 1, m - k_2 + 1$
 $arg = \text{sen}(be) + area / (na_f \cdot dl)$
 $b_f = \text{sen}^{-1}(arg)$
 $k = k_1$
 $b_k = (b_f + be) / 2$
 $\text{cos } b_k = \cos(b_k)$
 $\text{sen } b_k = \text{sen}(b_k); be = b_f$

↓
 ③

↓
 ⑤

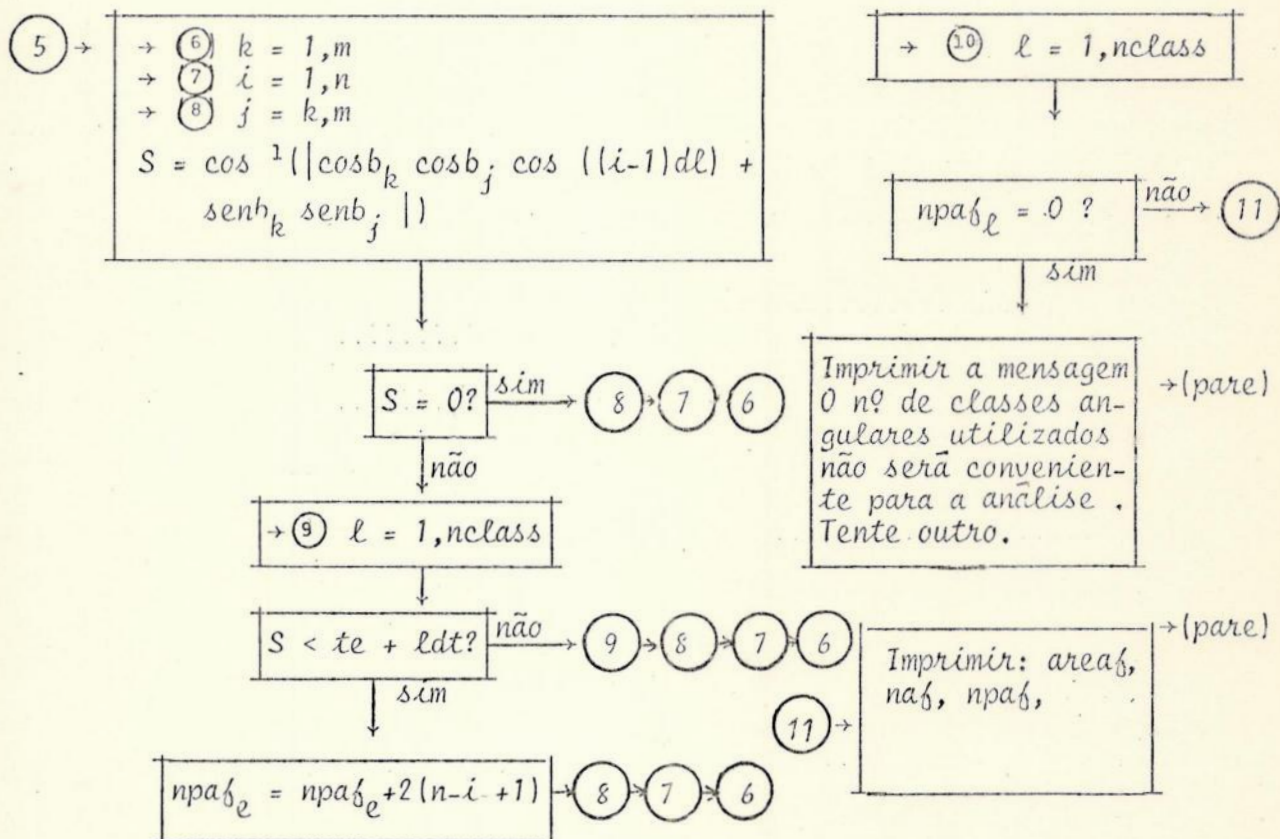
→ ① $k_2 = 1, m$
 $arg = \text{sen } be - area_f / (na_f \cdot dl)$

↓
 $|arg| > 1?$ *sim* → ②
 ↓*não*

$b_f = \text{sen}^{-1}(arg)$
 $k = m - k_2 + 1$
 $b_k = (b_f + be) / 2$
 $\text{cos } b_k = \cos(b_k)$
 $\text{sen } b_k = \text{sen}(b_k)$
 $be = b_f$

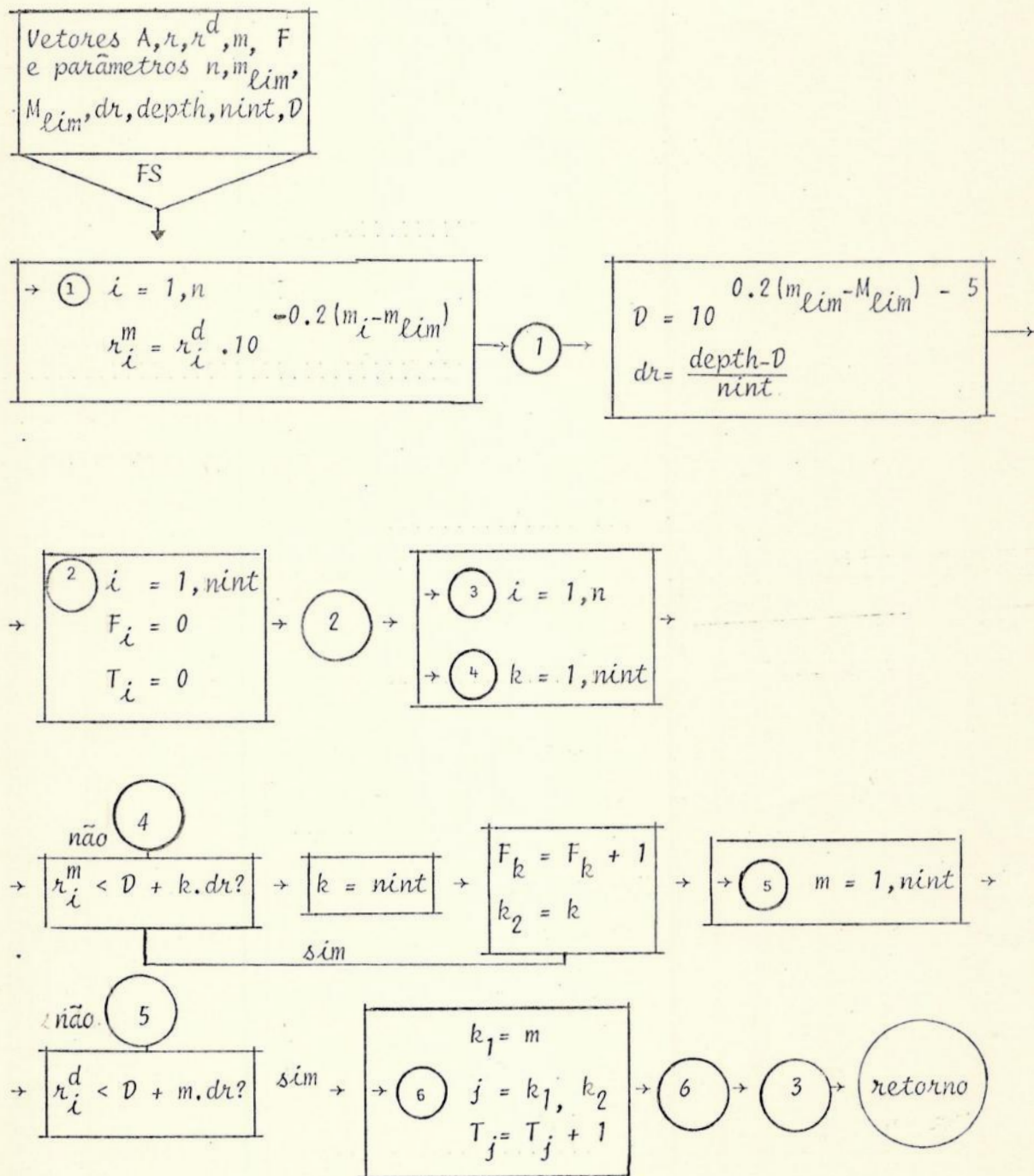
↓
 ①

↓
 ⑤



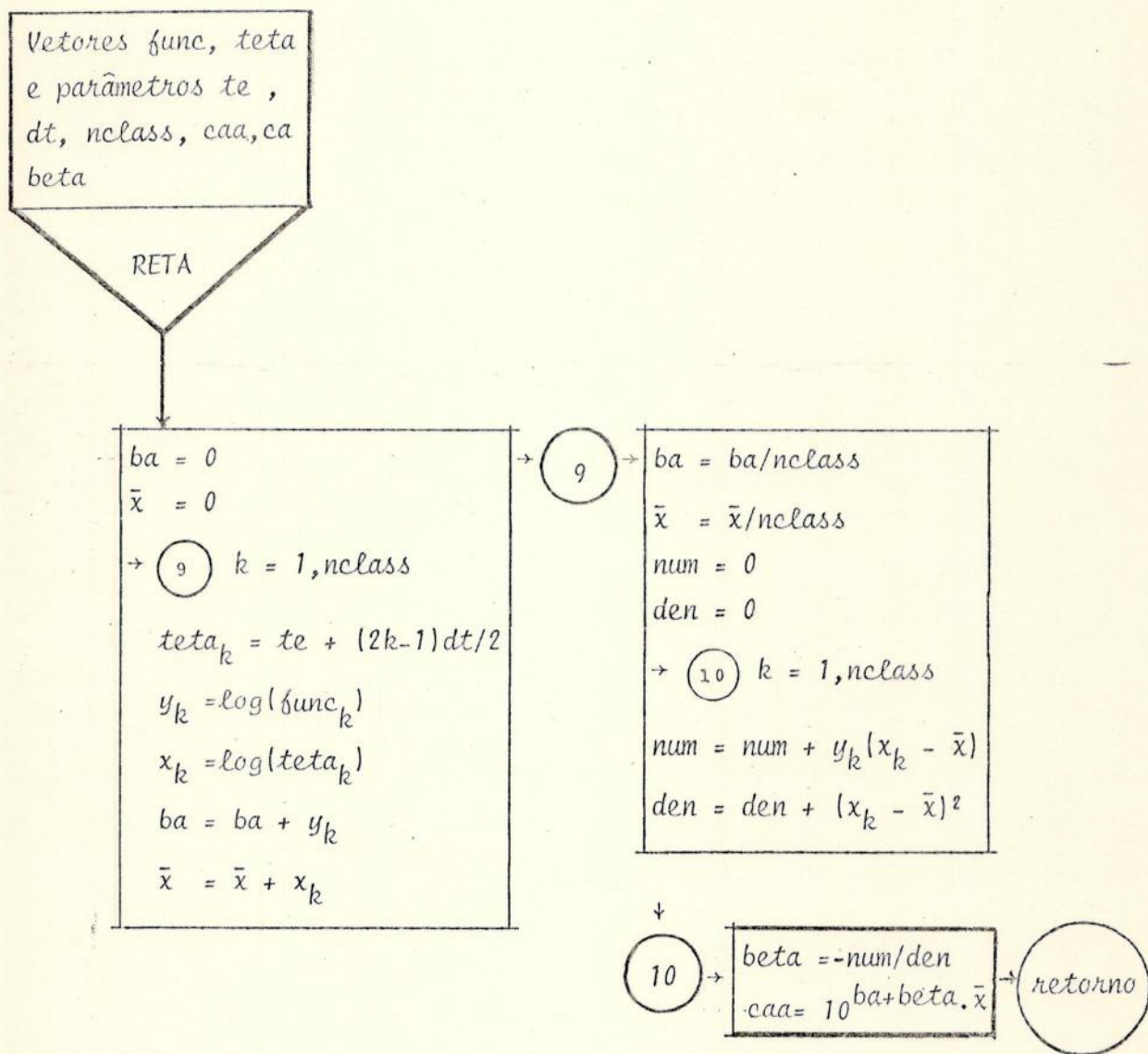
SUBROTINA

Para o cálculo da razão "A" entre as distribuições das distâncias



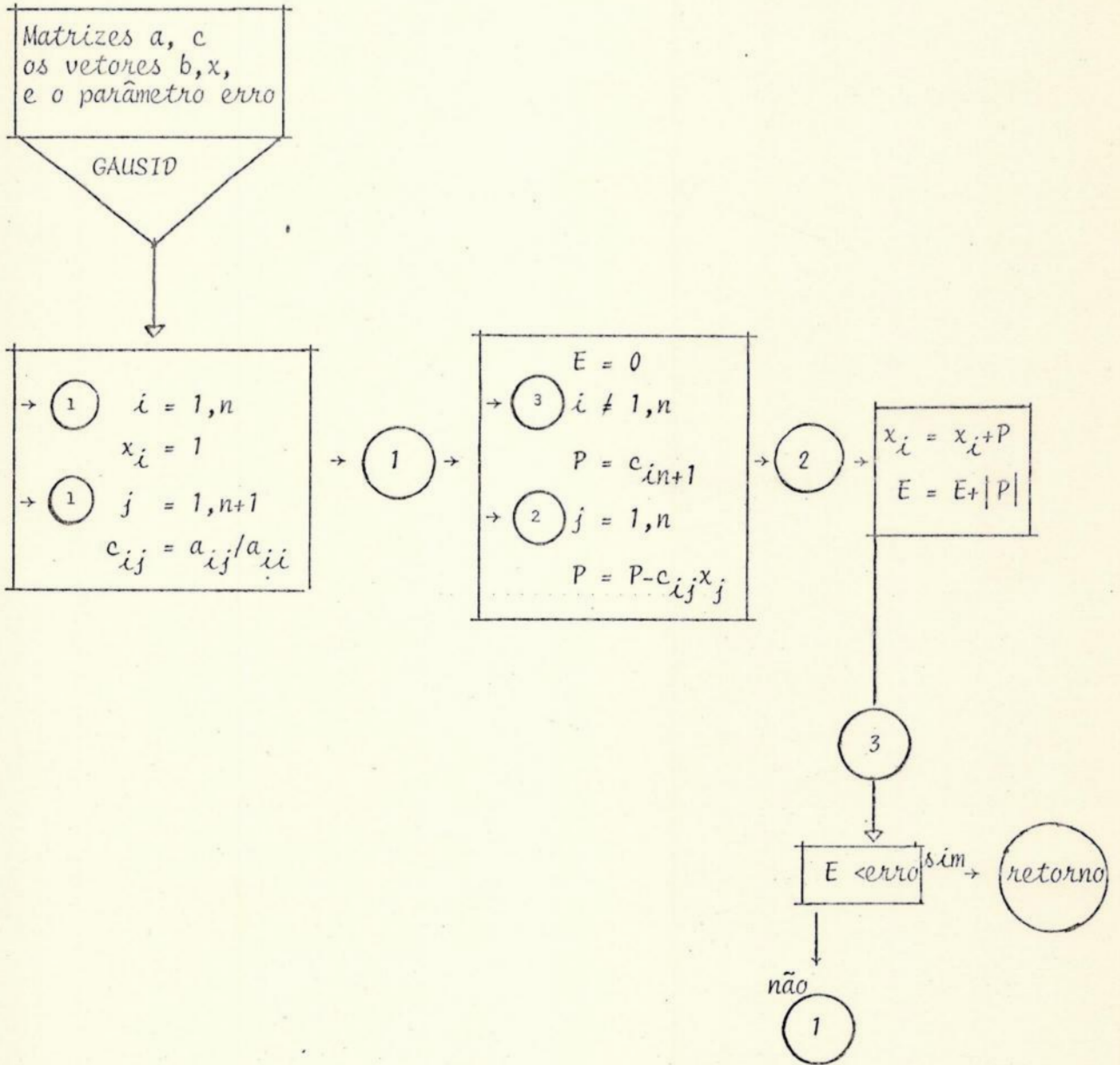
SUBROTINA

Para o ajuste à forma de potência.



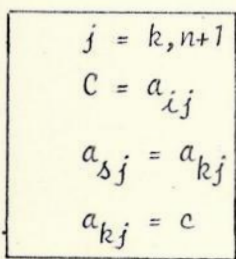
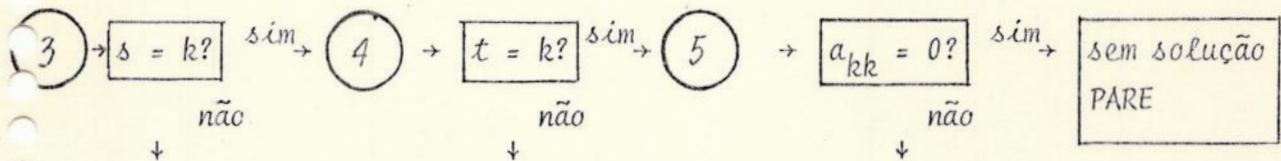
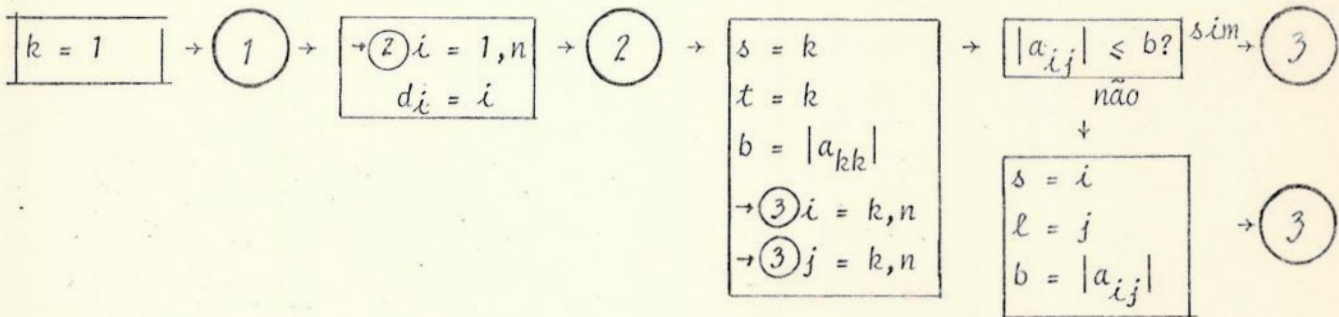
SUBROTINA

Para resolução de sistema de equações lineares pelo método de Gauss-Seidel.

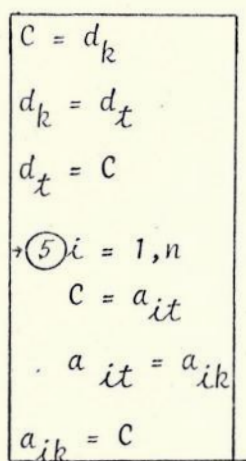


SUBROTINA

Para resolução do sistema de equações lineares pelo método da Eliminação Pivotal.

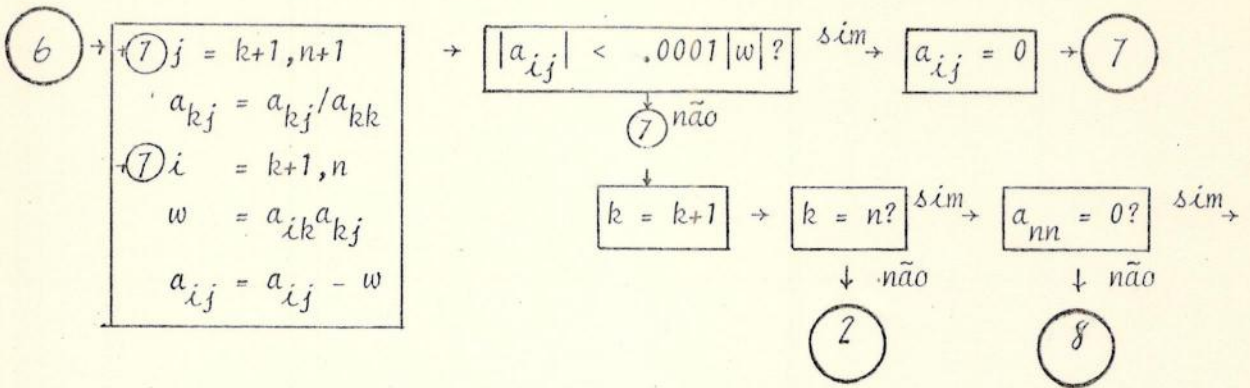


4

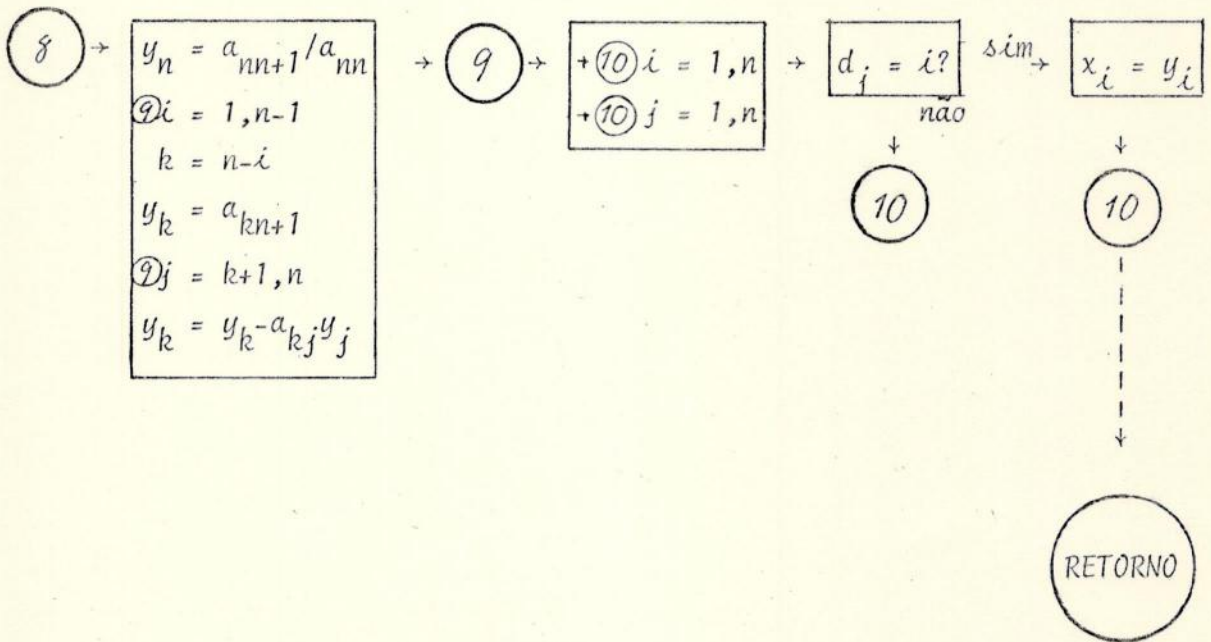


5

6



→ Sem solução
 PARE



SUBROTINA

Para o ajuste por mínimos quadrados.



$$z_{ij} = f_i(x_j) \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$a_{ki} = \sum_{j=1}^n z_{ij} z_{kj} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, i \end{cases}$$

$$a_{ik} = a_{ki} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ k = i+1, \dots, m \end{cases}$$

$$b_k = \sum_{j=1}^n y_j z_{kj} \quad k = 1, \dots, m$$

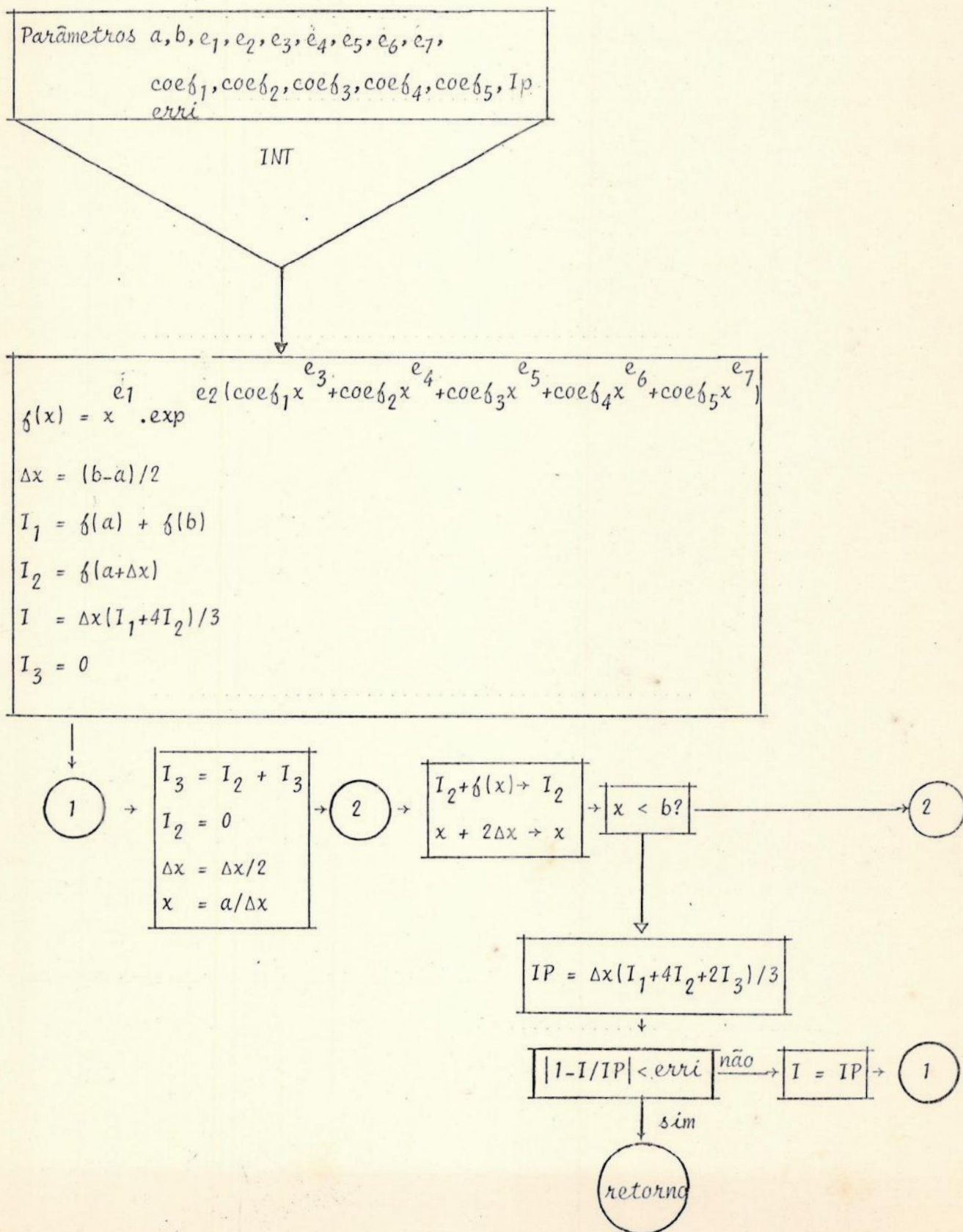
Saída para sub-rotina que resolve o sistema de equações lineares

$$\sum_{i=1}^m a_{ki} a_i = b_k, \quad k = 1, \dots, m$$

retorno

SUBROTINA

Para cálculo de integrais pela regra de Simpson com controle de erro.



PROGRAMA PRINCIPAL - FCAE

Início

$$\text{rad}(x) = x \cdot \pi / 180$$

$$\delta y(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_4 (\text{sen } z_1 \cos z_3 - \text{sen } z_2) / \text{sen } z_3$$

$$\delta x(z_1, z_2) = \sqrt{\cos^2 z_1 - z_2^2}$$

$$\delta \text{ang}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7) = \cos^{-1} [(z_1 z_2 + z_3 z_4 \cos z_5) / \cos z_6 \cos z_7]$$

$$\delta \text{ksi}(z_1, z_2) = 2 \text{tg}^{-1}(z_1 / z_2)$$

$$S(z_1, z_2) = z_1 \cdot \cos z_2$$

$$P\text{gamma}(x) = \text{gamma}[(x+1)/2] / [\text{gamma}(1/2) \text{gamma}(x/2)]$$

$$a\text{fce}_1(x, y, z, w) = x \cdot y^{(1+z)} \cdot w \cdot (\pi/180)^z$$

$$v\text{fs}(x, \delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5) = e^{-(\delta_1 x + \delta_2 x^2 + \delta_3 x^3 + \delta_4 x^4 + \delta_5 x^5) / \delta_0}$$

Entradas:

pinf 0 ≠ 0 e te = tef e dt = dtf e nclass = nclass?

não

49

sim

$$NN = n$$

$$j = 0$$

O catálogo contém dados de velocidade radial?

sim

→ 1 $i = 1, n$

$$r_i^d = |v_r| / 100$$

$$M_i = \text{oldm}_i - 5 \log r_i^d - 25$$

$r_i^d < \text{depth}$ e $M_i < M_{\text{lim}}$ e
 $\text{oldm}_2 \leq m_{\text{lim}}?$

não

$$NN = NN - 1$$

1

sim

não

→ 2 $i = 1, n$

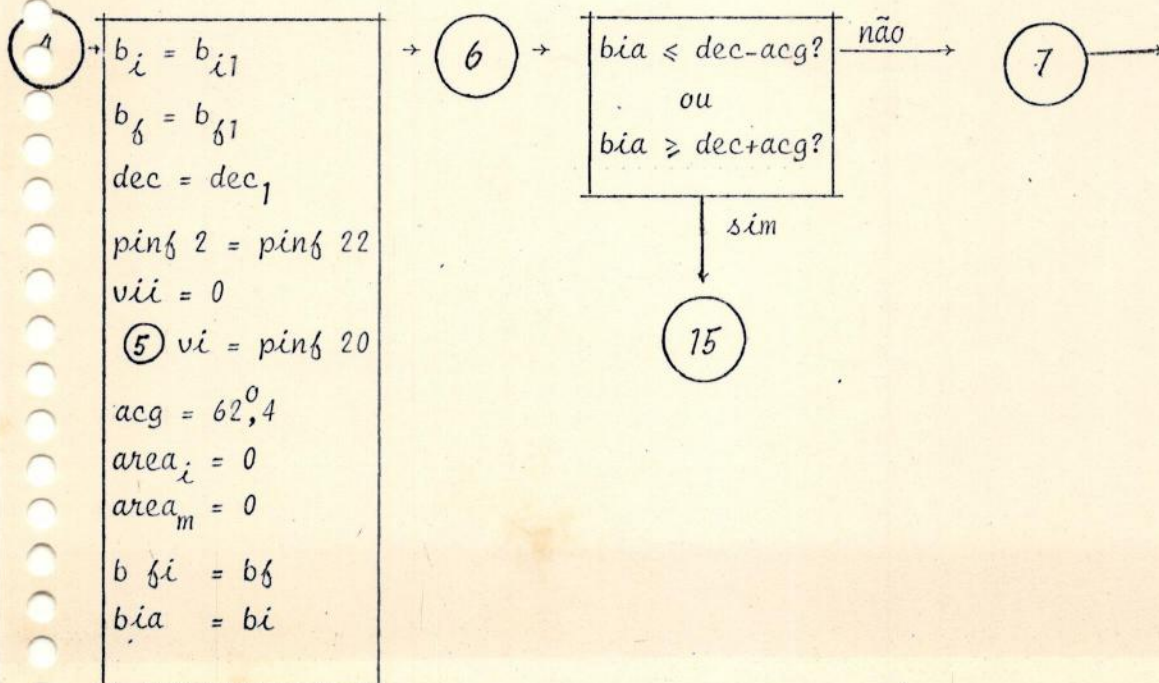
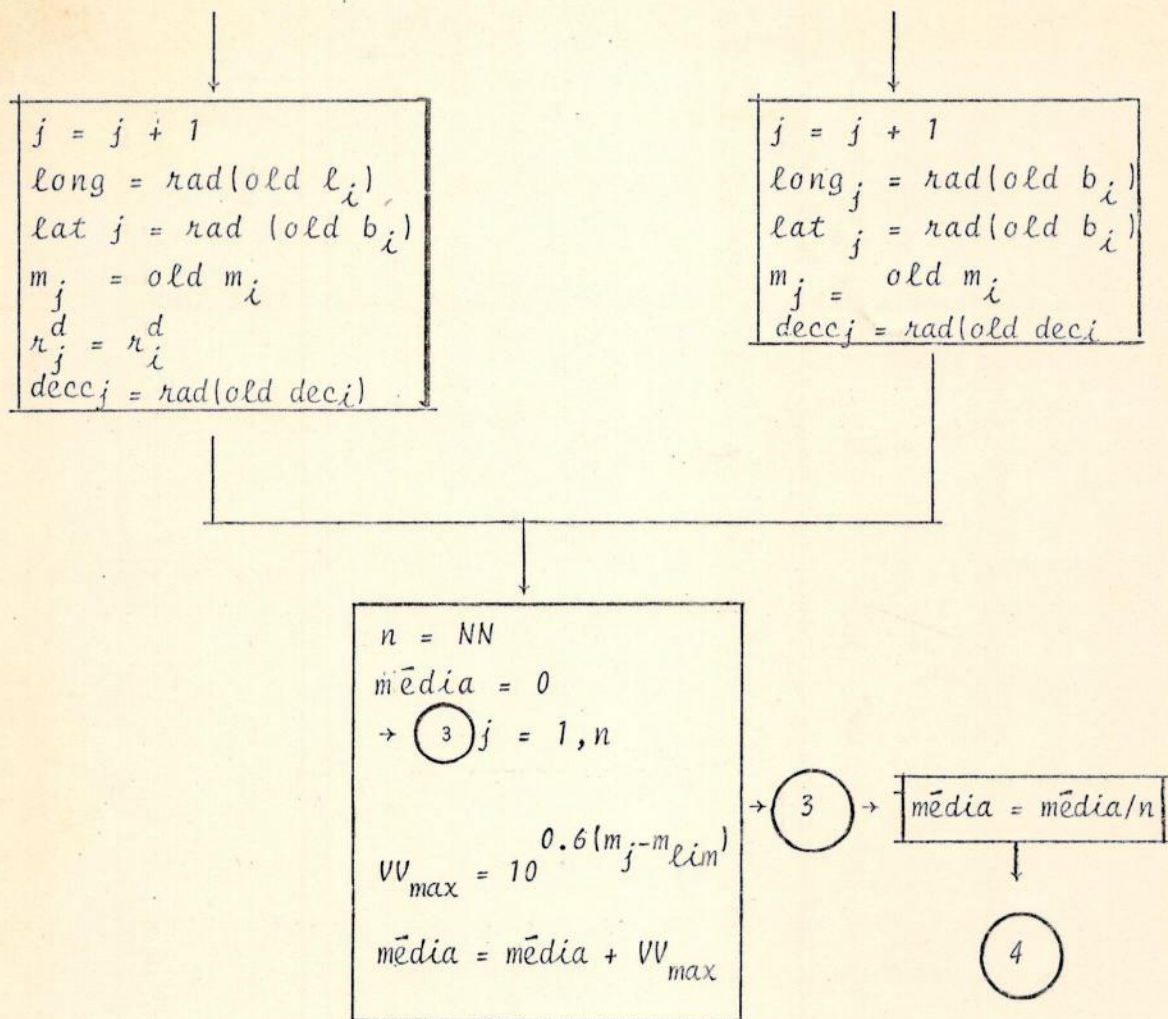
$\text{oldm}_i \leq m_{\text{lim}}?$

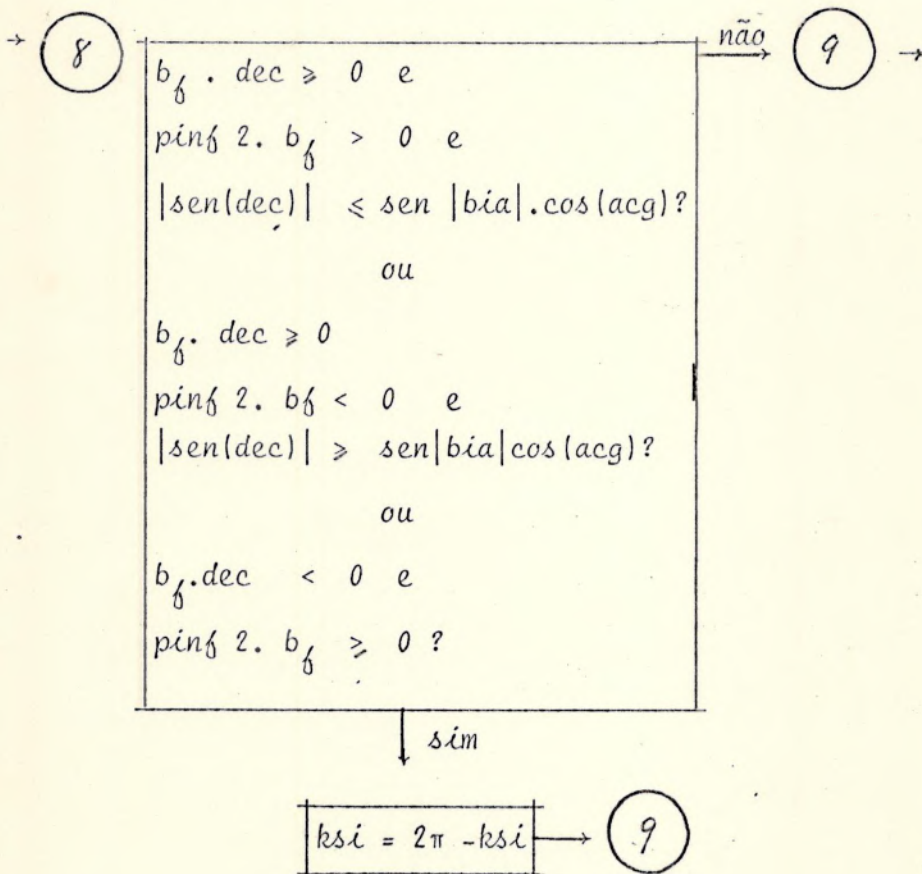
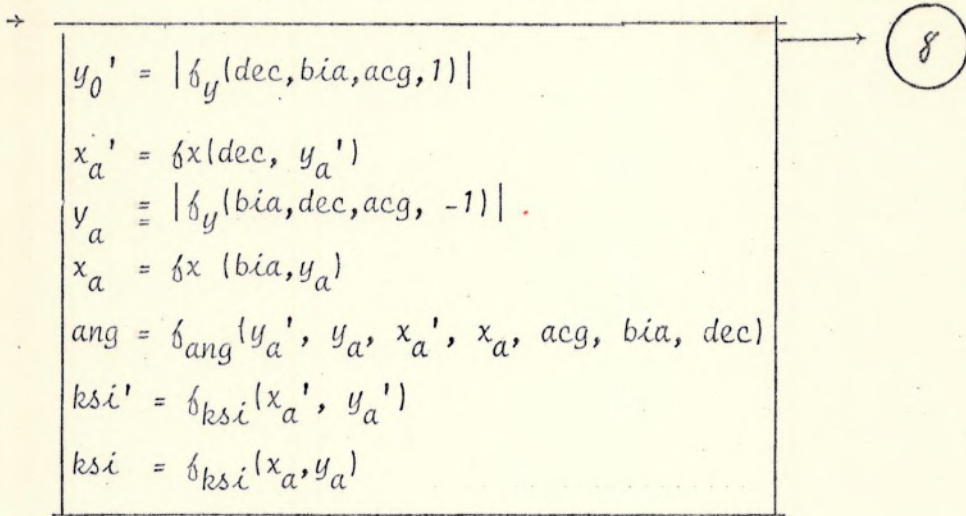
não

$$NN = NN - 1$$

2

sim





9

$S_1 = S(ksi, bia)$

$b_f \cdot dec > 0$ e $|sen(bia)| \leq sen|dec|cos(acg)?$

sim $\rightarrow ksi' = 2\pi - ksi'$

10

10

$S_2 = S(ksi', dec)$

pinf 2. dec ≤ 0 ?

sim $\rightarrow t_1 = -1$ \rightarrow 11

11

11 \rightarrow pinf 2. $b_f < 0$? \rightarrow sim $\rightarrow ang = \pi - ang$ \rightarrow 12

12

12 \rightarrow $area = 2(\pi - ang) - |S_1 \cdot tg(bia)| - t_1 \cdot |S_2 \cdot tg(dec)|$
 $area = area + area_m$

$vi = 0$ e $v = 0$? \rightarrow não \rightarrow 16

16

17 sim

$vi = 0$ e $v = 1$? \rightarrow não \rightarrow 13

13 \rightarrow pinf 21 = 1 e $v = 0$? \rightarrow não \rightarrow 16

pinf 21 = 1 e $v = 1$? \rightarrow não \rightarrow 17

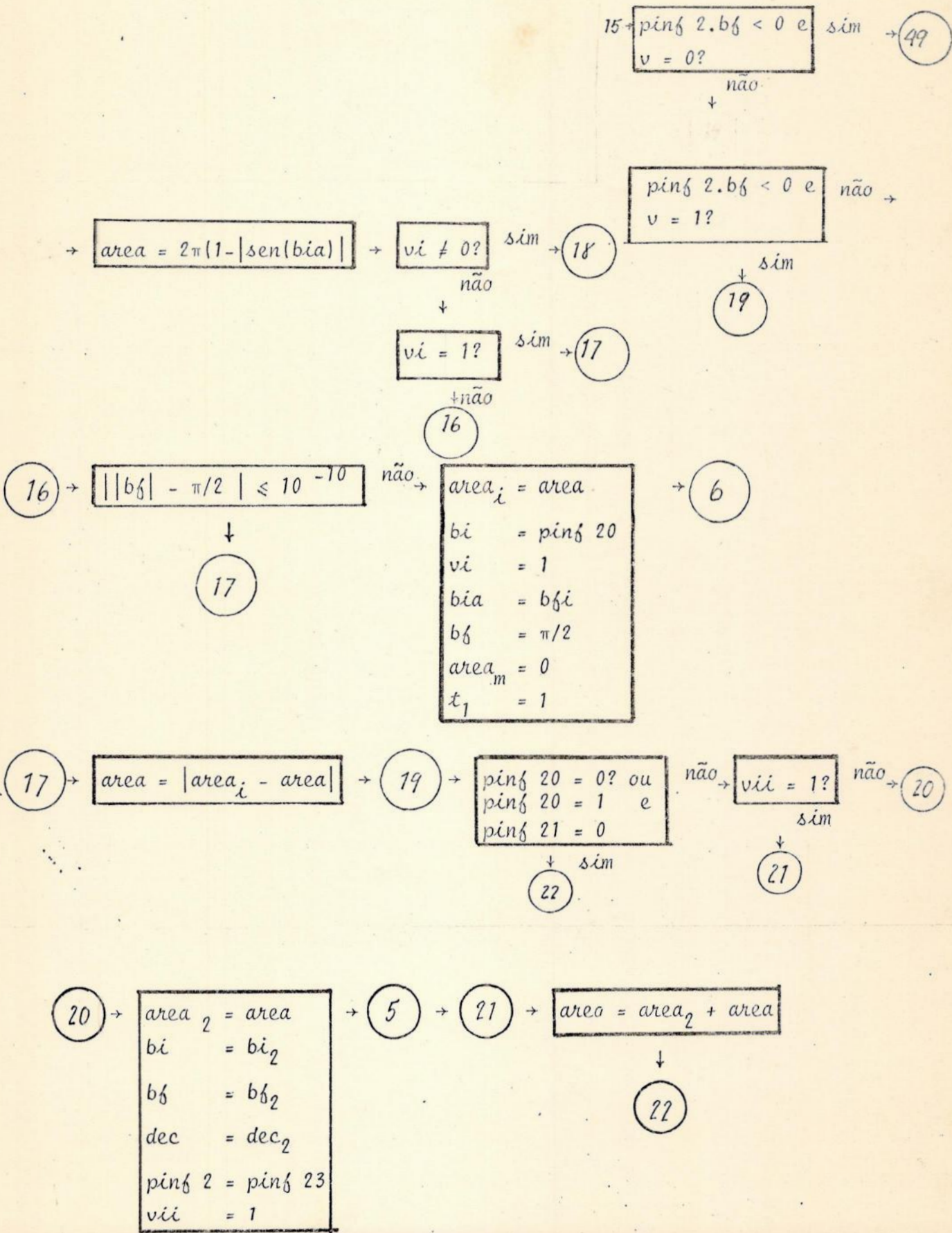
$bia = -bi$ \rightarrow

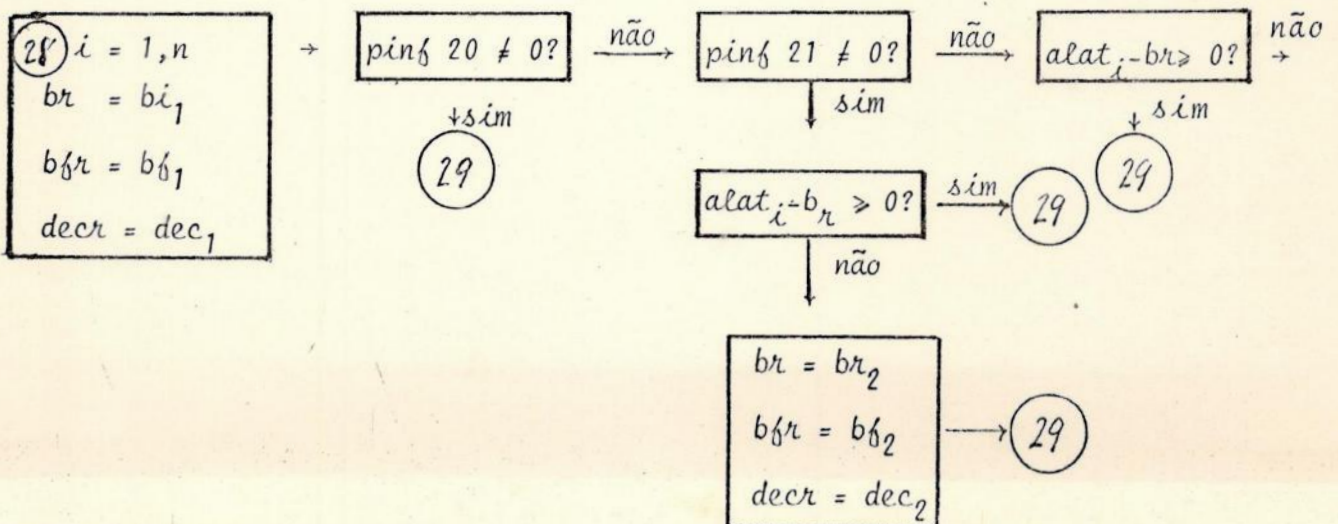
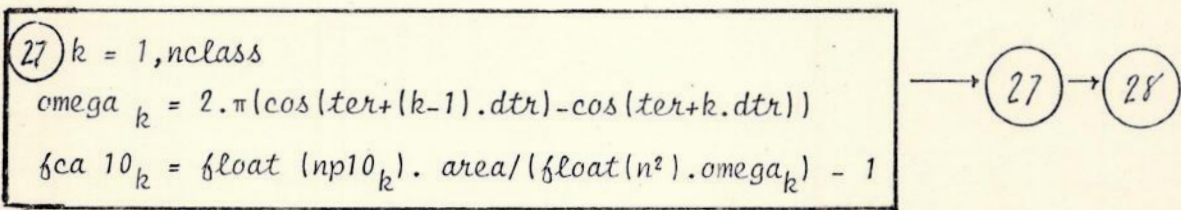
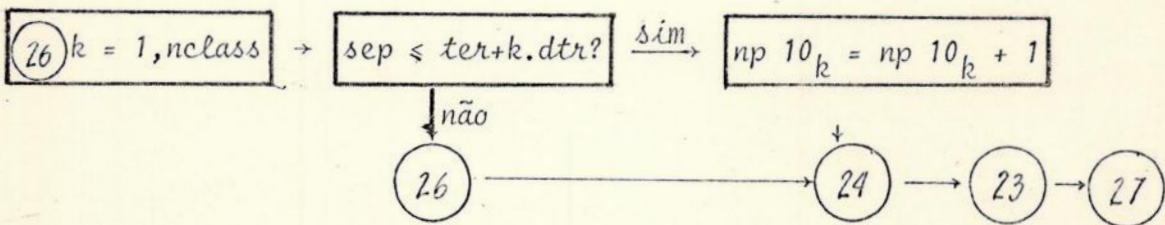
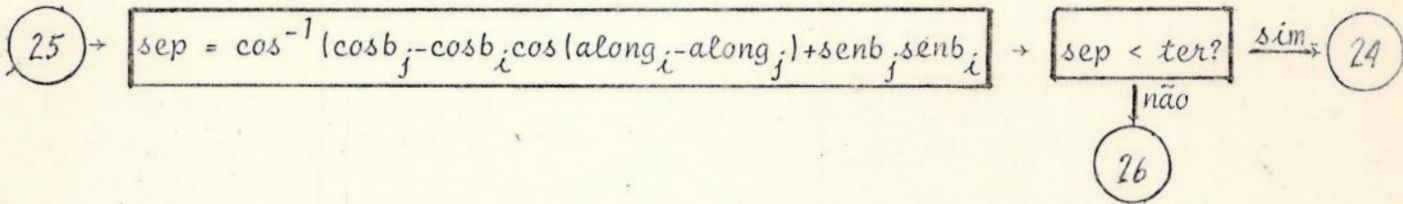
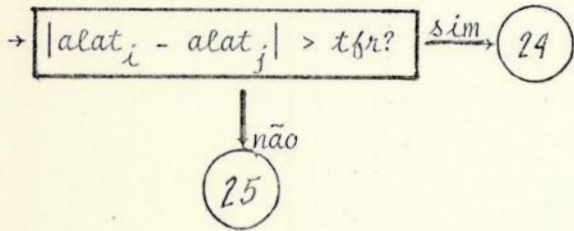
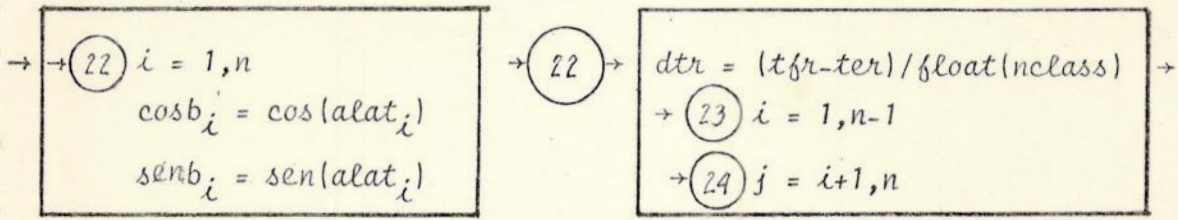
$|bia| \geq |dec - acg|$? \rightarrow não \rightarrow 16

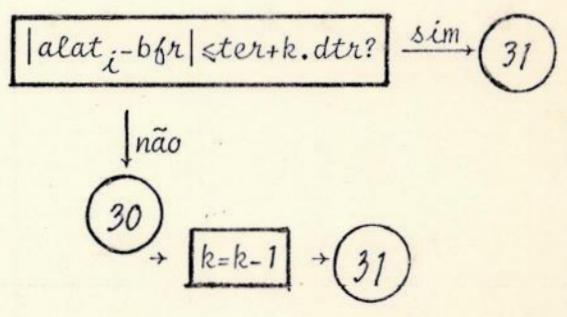
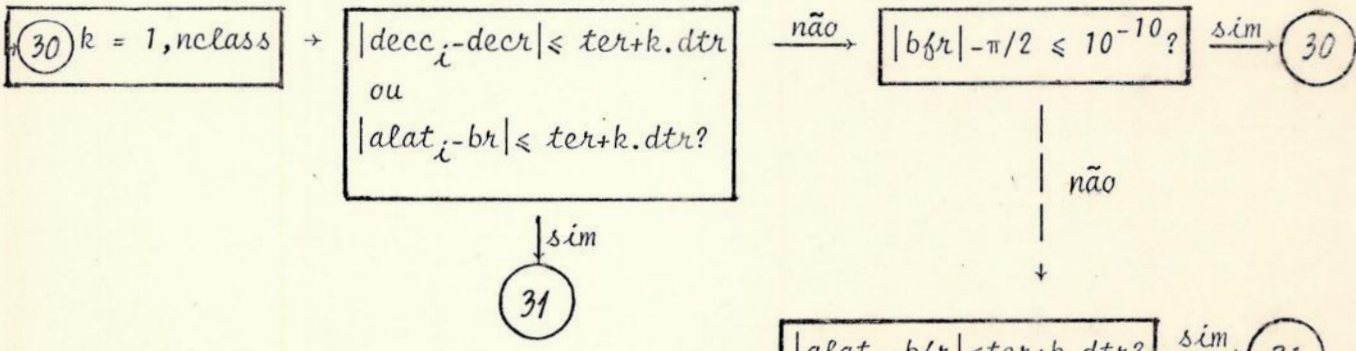
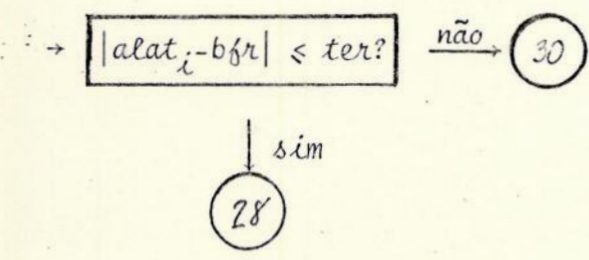
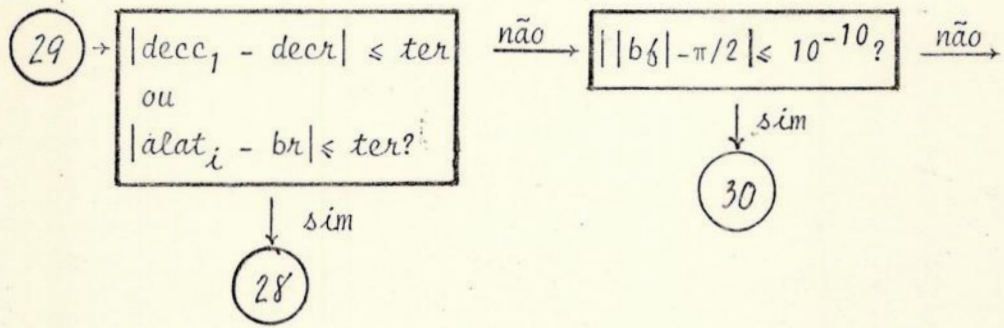
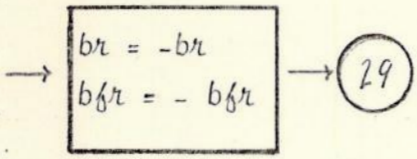
$area_m = area$ \rightarrow 7

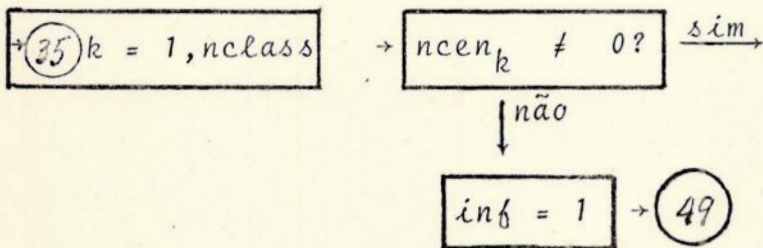
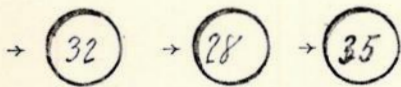
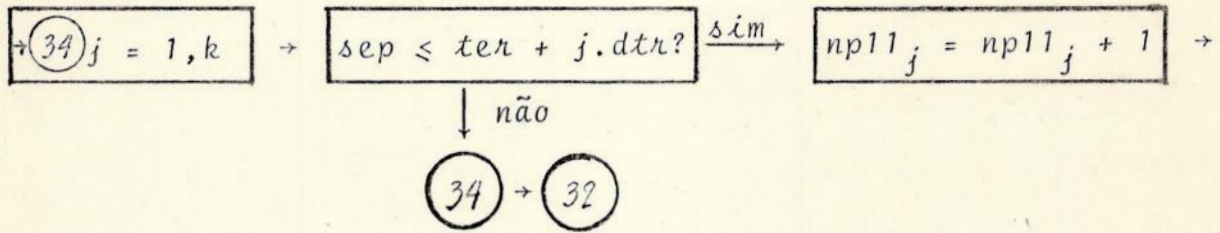
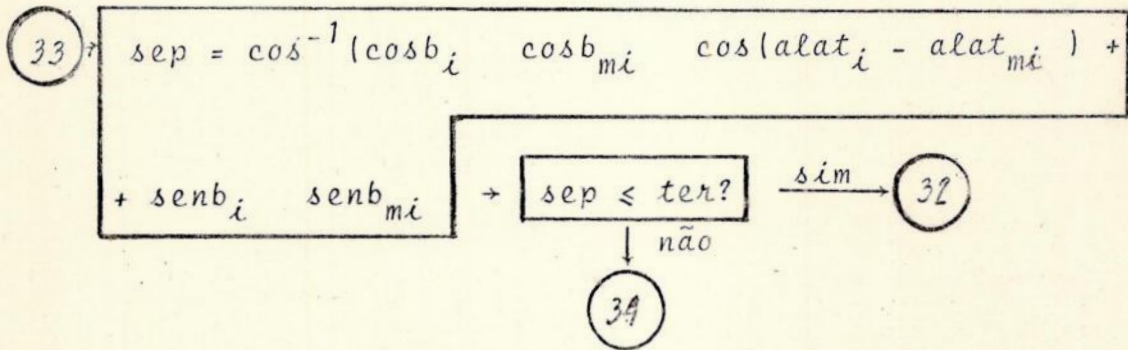
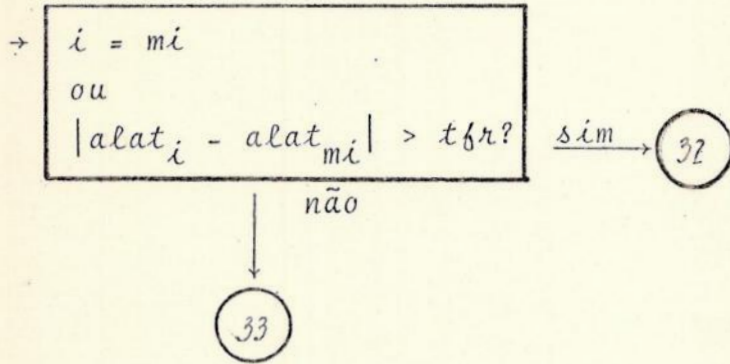
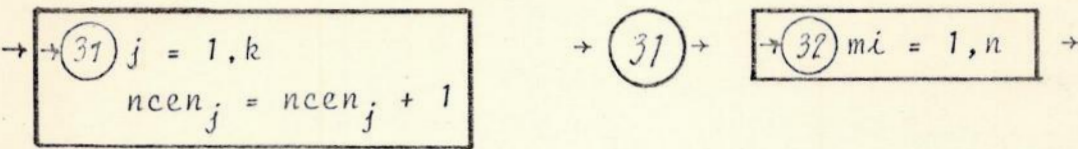
16

$vi = 0$
 $b_f = -b_f$
 $t_1 = 1$









$$\rightarrow fca11_k = \text{float}(np11k) \cdot \text{Area} / (\text{float}(ncen_k) \cdot \text{float}(n) \cdot \text{omega}_k) - 1$$

↓
 (35) → (36)

(36) → dt = dtr.180/π
 Saída para subrotina
 RETA - parâmetros:
 fca 10, te, dt, teta, nclass
 ca 10, caa 10, beta 10
 Saída para subrotina
 RETA - parâmetros:
 fca11, te, dt, teta, nclass
 ca 11, caa 11, beta 11

→ ping0 = 0? → não
 ↓ sim
 (38)

→ (37) k = 1, nclass

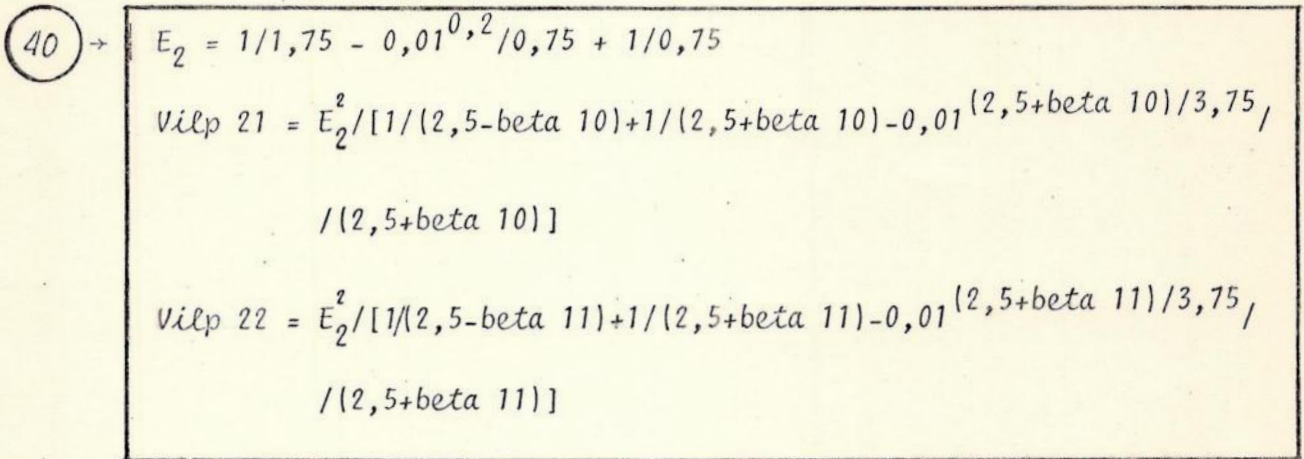
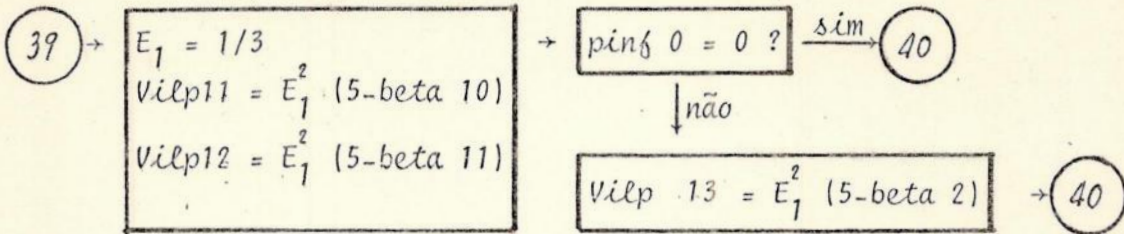
$$fca2_k = \text{float}(np10_k/2) \cdot \text{float}(na\beta^2) / (\text{float}(n^2) \cdot \text{float}(npa\beta_k)) - \text{ifix}(\text{area}/\text{area}\beta) - 1$$

↓
 (37)
 ↓

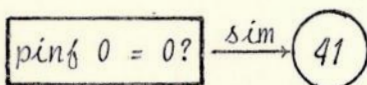
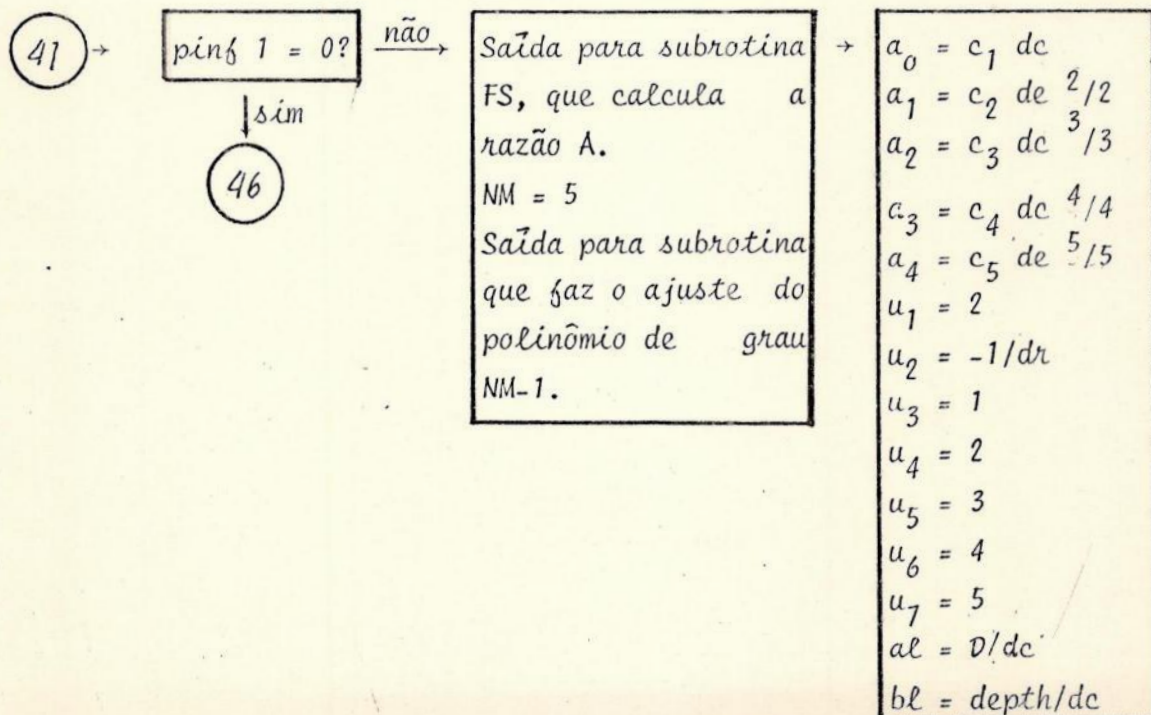
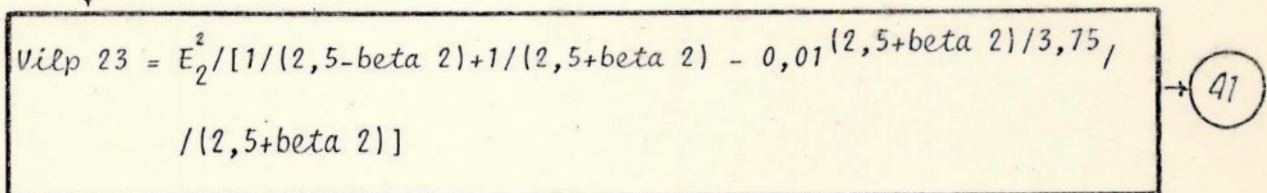
Saída para subrotina
 RETA - parâmetros:
 fca2, te, dt, teta, nclass
 ca2, caa2, beta 2

→ (38)

(38) → $d_c = 10^{0.2(m_{lim} - M^*) - 5}$ → ping3 = 1? → sim → dc = de → (39)
 ↓ não
 (39)



+

 $\downarrow \text{n\~{a}o}$ 

42 →

Saída para subrotina INT que realiza o cálculo de integrais (IE)

$$E_3 = (D/3dc)^3 + IE$$

$$p_{11} = 4 - \text{beta } 10$$

$$p_2 = -2/dr$$

$$p_{12} = 4 - \text{beta } 11$$

Saída para subrotina INT

(IP1)

Saída para subrotina INT

(IP2)

pinf 0 = 0? → sim → 43

não

$$p_{13} = 4 - \text{beta } 2$$

Saída para subrotina INT (IP3)

$$Vilp\ 33 = E_3^2 / \{ D^{5-\text{beta } 2} /$$

$$/ [(5-\text{beta } 2)dc^{5-\text{beta } 2}]$$

$$+ IP3 \}$$

↓
43

3 →

$$Vilp\ 31 = E_3^2 / \{ D^{5-\text{beta } 10} / [(5-\text{beta } 10)dc^{5-\text{beta } 10}] + IP1 \}$$

$$Vilp\ 32 = E_3^2 / \{ D^{5-\text{beta } 11} / [(5-\text{beta } 11)dc^{5-\text{beta } 11}] + IP2 \}$$

↓

44 $l = 1, nint$

$$AA_l = c_1 + c_2 r_l^2 + c_3 r_l^3 + c_4 r_l^4 + c_5 r_l^5$$

→ 44 → 45

45 →

$$b_0 = c_1$$

$$b_1 = c_2/2$$

$$b_2 = c_3/3$$

$$b_3 = c_4/4$$

$$b_4 = c_5/5$$

$$v\delta s_1 = v\delta s(v_1, dr, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$$

$$v\delta s_2 = v\delta s(v_2, dr, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$$

$$v\delta s_3 = v\delta s(v_3, dr, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$$

→ 46

46 →

gama = beta 10+1
 pgam 10 = Pgamma(beta 10)
 Afe 0₋₁ = afe₋₁(caa10,dc,beta 10, pgam 10)
 Afe 01 = Afe 0₋₁. Vilp 11
 Afe 02 = Afe 0₋₁. Vilp 21
 gama 2 = beta 11+1
 pgam 11 = Pgamma(beta 11)
 Afe 1₋₁ = afe₋₁(caa 11,dc,beta 11, pgam 11)
 Afe 11 = Afe 1₋₁. Vilp 12
 Afe 12 = Afe 1₋₁. Vilp 22

ping 1 = 0? → sim → 47
 ↓ não

Afe 03 = afe 0₋₁. Vilp 31
 Afe 13 = afe 1₋₁. Vilp 32 → 47

47 ping 0 = 0? → sim → 49
 ↓ não
 48

48 →

gama 3 = beta 2+1
 pgam 2 = Pgamma(beta 2)
 Afe 2₋₁ = afe₋₁(caa 2,dc,beta 2, pgam 2)
 Afe 21 = Afe 2₋₁. Vilp 13
 Afe 22 = Afe 2₋₁. Vilp 23

ping 1 = 0? → sim → 49
 ↓ não

Afe 23 = Afe 2₋₁. Vilp 33
 ↓
 49

49 → Mensagens e impressão dos resultados → Pare

LISTAGEM

```

C      PROGRAMA GERADOR DE AMOSTRAS UNIFORMES E CALCULO DO NUMERO
C      DE PARES- GAU/NP
      REAL LFF,LIF
      DIMENSION NPAF(30),B(2000),COSE(2000),SINB(2000)
      DATA NPAF/30*0/
      CONVERSAO DE GRAUS EM RADIANS
      RAD(PI,X)=X*PI/180.
C      LEITURA DOS PARAMETROS
      READ(1,101)NAF,N,TE,TF,NCLASS,LIF,LFF,BIF,BFF
101    FORMAT(I7,/,I7,/,F5.2,/,F5.2,/,I4,/,4F6.2)
      PI=ATAN(1.)*4.
C      CONVERSAO DOS VALORES DOS PARAMETROS ANGULARES PARA RADIANS
      TE=RAD(PI,TE)
      TF=RAD(PI,TF)
      LIF=RAD(PI,LIF)
      LFF=RAD(PI,LFF)
      BIF=RAD(PI,BIF)
      BFF=RAD(PI,BFF)
C      TAMANHO DAS CLASSES ANGULARES
      DT=(TF-TE)/FLOAT(NCLASS)
C      NUMERO DE DIVISOES EM LATITUDE
      M=NAF/N
C      CALCULO DO INCREMENTO EM LONGITUDE
      DL=(LFF-LIF)/FLOAT(N)
C      CALCULO DA AREA "PADRAO"
      AREAF=(SIN(BFF)-SIN(BIF))*(LFF-LIF)
C      MONTAGEM DA AMOSTRA DE COMPARACAO "PADRAO"
      BE=BFF
      DO 1 K2=1,M
      ARG=SIN(BE)-AREAF/(NAF*DL)
      IF(ABS(ARG).GT.1.)GO TO 2
      BF=ARSIN(ARG)
      K=M-K2+1
      B(K)=(BF+BE)/2.
      COSB(K)=COS(B(K))
      SINB(K)=SIN(B(K))
      BE=BF
1      CONTINUE
      GO TO 111
2      BE=BIF
      DO 777 K1=1,M-K2+1
      ARG=SIN(BE)+AREAF/(NAF*DL)
      BF=ARSIN(ARG)
      K=K1
      B(K)=(BF+BE)/2.
      COSB(K)=COS(B(K))
      SINB(K)=SIN(B(K))
      BE=BF
777    CONTINUE
111    CONTINUE
C      CALCULO DAS SEPARACOES ANGULARES ENTRE OS OBJETOS
      DO 4 K=1,M
      DO 5 I=1,N
      DO 6 J=K,M
      IF((I.EQ.1).AND.(J.EQ.K))GO TO 6
      S=ARCOS(ABS(COSB(K)*COSE(J)*COS((I-1)*DL)+SINB(K)*SINB(J)))
      IF(S.LT.TE)GO TO 5
      IF(S.GT.TF)GO TO 5
C      CLASSIFICACAO DOS DADOS DE SEPARACAO ANGULAR
      DO 7 KL=1,NCLASS
      IF(S.LE.TE+KL*DT)GO TO 13
7      CONTINUE
      GO TO 6
13     IF(I.EQ.1)GO TO 14
      IF(J.EQ.K)GO TO 15
      NPAF(KL)=NPAF(KL)+2*(N-I+1)
      GO TO 6
14     NPAF(KL)=NPAF(KL)+N
      GO TO 6
15     NPAF(KL)=NPAF(KL)+N-I+1
6      CONTINUE
5      CONTINUE
4      CONTINUE

```



```
C      EXISTE ALGUMA CLASSE VAZIA?
      DO 8 I=1,NCLASS
8     IF(NPAF(I).EQ.0)GO TO 10
      GO TO 11
C     CASO EXISTA(M) CLASSE(S) VAZIA(S)
10    WRITE(4,12)
12    FORMAT(' C NO. DE CLASSES ANGLLARES UTILIZADO NAO SERA CONVENIENTE
      * TENTE OUTRO.')
C     CONVERSAO PARA GRAUS
11    TE=TE*180./PI
      IF=IF*180./PI
      WRITE(4,9)NCLASS,TE,IF,AREAF,NAF
9     FORMAT(I2,/,F5.2,/,F5.2,/,F14.10,/,I7)
      DO 30 KL=1,NCLASS
30    WRITE(4,20)NPAF(KL)
20    FORMAT(I8)
      LOCK(4)
      STOP
      END
```

```

C *****
C *
C * ESTE PROGRAMA CALCULA AS FUNCOES DE CORRELACAO ANGULAR E ESPACIAL
C * DE DOIS PONTOS PARA O MODELO DE LEI DE POTENCIA
C *
C *
C * AUTOR: JEFFERSON L. DA S. MIRANDA
C * EM: FEVEREIRO-MAIO DE 1985
C *****
C
C SUBROTINA PARA O CALCULO DA RAZAO "A" ENTRE OS HISTOGRAMAS
C DE DISTANCIAS
C SUBROTINE F(N,MAGLIM,MGABSL,DR,DEPTH,NINT,D,A,F,R,RC,MAGAP)
C INTEGER I
C DIMENSION MAGAP(2000),RM(2000),F(50),T(50),A(50),R(50),RC(2000)
C DATA T/50*0/
C CALCULO DA DISTANCIA E DA DISTANCIA MAXIMA
C DO 1 I=1,N
C RM(I)=RC(I)*(10.**((MAGAP(I)-MAGLIM)*(-0.2)))
1 CONTINUE
C D=10.**(.2*(MAGLIM-MGABSL)-5.)
C DR=(DEPTH-D)/FLOAT(NINT)
C HISTOGRAMAS DOS VALORES DE R MAXIMO
C DO 2 I=1,N
C DO 3 K=1,NINT
C IF(RM(I).LE.(D+K*DR))GO TO 4
3 CONTINUE
C K=NINT
C GO TO 60
4 F(K)=F(K)+1
60 K2=K
C DO 5 M=1,NINT
C IF(RC(I).LE.D+M*DR)GO TO 70
5 CONTINUE
70 K1=M
C DO 9 J=K1,K2
C T(J)=T(J)+1
9 CONTINUE
2 CONTINUE
C RAZAO ENTRE OS HISTOGRAMAS
C DO 6 L=1,NINT
C A(L)=FLOAT(F(L))/FLOAT(T(L))
C R(L)=D+(2.*L-1.)*DR/2.
6 CONTINUE
C DO 57 L=1,NINT
C IF(A(L).EQ.0)GO TO 75
57 CONTINUE
C GO TO 58
75 WRITE(5,912)
912 FORMAT(' C NO. DE CLASSES RADIAIS NAO FOI CONVENIENTE, POIS EXISTE
* (M) CLASSE(S) VAZIA(S).',/, ' FAZAO "A" ENTRE OS HISTOGRAMAS:')
C DO 129 L=1,NINT
129 WRITE(5,945)A(L),R(L)
945 FORMAT(1X,F7.5,3X,'R=',F7.2)
C LOCK(5)
C STOP
58 RETURN
C END

```


C
C

```

SUBROTINA PARA O AJUSTE A FORMA DE POTENCIA
SUBROUTINE BETA(FUNC,TER,DTR,TETA,NCLASS,CAA,CA,BETA)
DIMENSION FUNC(30),TETA(30),Y(30),X(30)
DATA B,XMED/0.,0./,ONUM,DEN/0.,0./
DO 1 K=1,NCLASS
TETA(K)=TER+(2.*K-1.)*DTR/2.
Y(K)=ALOG10(FUNC(K));X(K)=ALOG10(TETA(K))
B=B+Y(K);XMED=XMED+X(K)
1 CONTINUE
B=B/FLOAT(NCLASS); XMED=XMED/FLOAT(NCLASS)
DO 2 K=1,NCLASS
ONUM=ONUM+Y(K)*(X(K)-XMED)
DEN=DEN+(Y(K)-XMED)**2
2 CONTINUE
BETA=-(ONUM/DEN)
CA=B+BETA*XMED; CAA=10.**CA
RETURN
END

```

C
C

```

SUBROTINA PARA RESOLVER O SISTEMA DE EQUACOES LINEARES
SUBROUTINE GAUSSID(A,N,E,X,ERR,NIT,INF)
DIMENSION A(20,20),B(20),C(20,21),X(20)
INF=1
K=0
NN=N+1
DO 11 I=1,N
IF(A(I,I))12,6,12
12 X(I)=1.
C(I,NN)=B(I)/A(I,I)
DO 11 J=1,N
11 C(I,J)=A(I,J)/A(I,I)
1 CONTINUE
E=0.
DO 3 I=1,N
P=C(I,NN)
DO 2 J=1,N
P=P-C(I,J)*X(J)
2 CONTINUE
X(I)=X(I)+P
E=E+ABS(P)
3 CONTINUE
IF (E-ERR)4,4,5
4 RETURN
5 K=K+1
IF(NIT-K)6,1,1
6 INF=0
WRITE(5,1000)
RETURN
1000 FORMAT(' COM O METODO GAUSS-SEIDEL NAO HOVE CONVERGENCIA.O METODO
* DE ELIMINACAO PIVOTAL FOI ENTIAC. APLICADO.')
END

```


C

SUBROTINA PARA O AJUSTE DO POLINOMIO PELO METODO DA ELIMINACAO
 SUBROUTINE ELIMIN(AA,N,BB,X)
 DIMENSION AA(20,20),BB(20),A(20,21),Y(20),X(20),ID(20)

```

NN=N+1
DO 200 I=1,N
A(I,NN)=BB(I)
DO 200 J=1,N
200 A(I,J)=AA(I,J)
K=1
1 CONTINUE
DO 21 I=1,N
21 ID(I)=I
2 CONTINUE
KK=K+1
IS=K
IT=K
B=ABS(A(K,K))
DO 3 I=K,N
DO 3 J=K,N
31 IF(ABS(A(I,J))-B)3,3,31
IS=I
IT=J
B=ABS(A(I,J))
3 CONTINUE
IF(IS-K)4,4,41
41 DO 42 J=K,NN
C=A(IS,J)
A(IS,J)=A(K,J)
42 A(K,J)=C
4 CONTINUE
IF(IT-K)5,5,51
51 IC=ID(K)
ID(K)=ID(IT)
ID(IT)=IC
DO 52 I=1,N
C=A(I,IT)
A(I,IT)=A(I,K)
52 A(I,K)=C
5 CONTINUE
IF(A(K,K))6,102,6
6 CONTINUE
DO 7 J=KK,NN
A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
DO 7 I=KK,N
W=A(I,K)*A(K,J)
A(I,J)=A(I,J)-W
IF(ABS(A(I,J))-0.0001*ABS(W))71,7,7
71 A(I,J)=0.
7 CONTINUE
K=KK
IF(K-N)2,81,102
81 IF(A(N,N))8,102,8
8 CONTINUE
Y(N)=A(N,NN)/A(N,N)
NN=N-1
DO 9 I=1,NN
K=N-I
KK=K+1
Y(K)=A(K,NN)
DO 9 J=KK,N
Y(K)=Y(K)-A(K,J)*Y(J)
9 CONTINUE
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,N
IF(ID(J)-I)10,101,10
101 X(I)=Y(J)
10 CONTINUE
RETURN
102 WRITE(5,1000)
STOP
RETURN
1000 FORMAT(' O SISTEMA DE EQUACoes NAO TEM SOLUCAO UNICA.')
END

```


C
C

SUBROTINA PARA C AJUSTE DE POLINOMIO COM CONTROLE DE ERRO
 SUBROUTINE LSTSD(X,Y,N,C,M,ERR,NIT)
 DIMENSION X(50),Y(50),C(20),F(20,50),AM(20,20),B(20)

FU1F(X)=1.

FU2F(X)=X

FU3F(X)=X**2.

FU4F(X)=X**3.

FU5F(X)=X**4.

DO 1 J=1,N

F(1,J)=FU1F(X(J))

F(2,J)=FU2F(X(J))

F(3,J)=FU3F(X(J))

F(4,J)=FU4F(X(J))

1 F(5,J)=FU5F(X(J))

DO 3 I=1,M

DO 3 K=1,I

AM(K,I)=0.

DO 2 J=1,N

2 AM(K,I)=AM(K,I)+F(I,J)*F(K,J)

3 AM(I,K)=AM(K,I)

DO 4 K=1,M

B(K)=0

DO 4 J=1,N

4 B(K)=B(K)+Y(J)*F(K,J)

CALL GAUSID(AM,M,B,C,ERR,NIT,INF)

IF(INF.NE.0)GO TO 9001

CALL ELIMIN(AM,M,B,C)

9001 RETURN

END

C
C
C

SUBROTINA PARA C CALCULO DE INTEGRAIS, CUJO INTEGRANDO E DEFINIDO
 PELA "FUNC", COM CONTROLE DE ERRO RELATIVO

SUBROUTINE INTC(A,B,E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7,CDEF1,CDEF2,CDEF3,
 *CDEF4,CDEF5,FIP,ERRI)

FUNC(X)=(X**E1)*EXP(E2*(CDEF1*(X**E3)+CDEF2*(X**E4)+CDEF3*
 *(X**E5)+CDEF4*(X**E6)+CDEF5*(X**E7)))

DX=(B-A)/2.

FI1=FUNC(B)+FUNC(A)

FI2=FUNC(A+DX)

FI3=0.

FI=DX*(FI1+4.*FI2)/3.

2 FI3=FI2+FI3

FI2=0.

IDX=DX

DX=.5*DX

X=A+DX

3 FI2=FI2+FUNC(X)

X=X+IDX

IF(X-B)3,3,4

4 FIP=DX*(FI1+4.*FI2+2.*FI3)/3.

IF(ABS(FIP-FI)-ERRI*ABS(FIP))6,6,5

5 FI=FIP

GO TO 2

6 RETURN

END

***** PROGRAMA FCAE *****

REAL IE, IP1, IP2, IP3, MEDIA, MAGAP, MCLIM, MGTIP, MGABSL, M, KSI, KSII
 INTEGER PINFC, PINF1
 INTEGER PINF20, PINF21, PINF22, PINF23, PINF2, V, VI, VII
 INTEGER PINF3, PINF4
 INTEGER F

DIMENSION GALENG(2000), ALONG(2000), GALAT(2000), ALAT(2000),
 * UDEC(2000), DECC(2000), CMAGAP(2000), MAGAP(2000),
 * M(2000), VELR(2000), RD(2000)

DIMENSION COSE(2000), SINE(2000)

DIMENSION TETA(30)

DIMENSION FCA2(30), NPAF(30),

* FCA10(30), NP10(30),

* FCA11(30), NP11(30),

* NCEA(30), DOMECA(30)

DIMENSION A(50), R(50), F(50)

DIMENSION C(20), AA(50)

DATA ACG/62.4/

DATA MEDIA/0./

DATA INF/0/

DATA NP10, NP11/30*0, 30*0/

DATA DOMECA, FCA10, FCA11, FCA2/30*C., 30*C., 30*C., 30*0./

DATA F/50*0/

DATA NM/5/

CONVERSAO DE GRAUS EM RADIANDS

RAD(CPI, X)=X*PI/180.

DEFINICAO DOS PARAMETROS RELACIONADOS COM O CALCULO DA AREA

FY(Z1, Z2, Z3, Z4)=Z4*(SIN(Z1)*COS(Z3)-SIN(Z2))/SIN(Z3)

FX(Z1, Z2)=SQRT((COS(Z1)**2)-Z2**2)

FANG(Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6, Z7)=ARCCS((Z1*Z2+Z3*Z4*COS(Z5))/(COS(Z6)*
 COS(Z7)))

* FKSI(Z1, Z2)=2.*ATAN(Z1/Z2)

S(Z1, Z2)=Z1*COS(Z2)

DEFINICAO OS PARAMETROS RELACIONADOS COM A AMPLITUDE DA FUNCAO
 DE CORRELACAO ESPACIAL

PGAMMA(X)=GAMMA((X+1.)/2.)/(GAMMA(1./2.)*GAMMA(X/2.))

AFCEM(X, Y, Z, W)=X*Y**((1.+Z)*W**((PI/180.)*Z))

FORMA ANALITICA DA FUNCAO SELECPC ESTIMADA

VFSC(X, F0, F1, F2, F3, F4, F5)=EXP((-1./FG)*X*(F1+X*(F2+X*(F3+X*(F4+F5*
)))))

PI=ATAN(1.)*4.

LEITURA DOS PARAMETROS

READ(2, 1) PINFC, PINF1, N, TE, TF, NCLASS, PINF20, PINF21, BI1, BF1, DEC1,
 * PINF22

1 FORMAT(I2, /, I2, /, I4, /, 2F5.2, /, I3, /, 2I2, /, 3F6.2, /, I2)

IF(PINF21.NE.1)GO TO 12

READ(2, 10) BI2, BF2, DEC2, PINF23

10 FORMAT(3F6.2, /, I2)

12 READ(2, 11) MCLIM, MGTIP, PINF3

11 FORMAT(2F5.1, /, I2)

IF(PINF3.EQ.C)GO TO 101

READ(2, 100) DE

100 FORMAT(F8.4)

101 IF(PINF1.EQ.C)GO TO 110

READ(2, 111) MGABSL, DEPTH, NINT, ERR, NIT, ERRI, V1, V2, V3

111 FORMAT(F5.1, /, F8.4, I3, /, F16.13, I4, /, F6.4, /, 3F5.1)

110 READ(2, 1000) PINF4

1000 FORMAT(I2)

LEITURA DOS PARAMETROS RELACIONADOS COM A AMOSTRA DE COMPARACAO

IF(PINF.CEQ.C)GO TO 1001

READ(4, 1010) ENCLAS, FIE, FIF

1010 FORMAT(I2, /, F5.2, /, F5.2)

OS VALORES DOS PARAMETROS NCLASS, TE E TF SAO COMPATIVELIS COM A

AMOSTRA DE COMPARACAO PADFAO?

IF(((NCLASS.NE.ENCLAS).OR.(TE.NE.FIE)).OR.(TF.NE.FIF))GO TO 9400

CASO AFIRMATIVO, LEIA OS DEMAIS DADOS

READ(4, 1011) AFEAF, NAF

1011 FORMAT(F14.10, /, I7)

KL=1

1100 READ(4, 1101, END=1001) NPAF(KL)

1101 FORMAT(I8)

KL=KL+1

GO TO 1100


```

C 1001 LEITURA DO CATALOGO
      NN=N
      J=0
      IF(PINF1.EQ.0)GO TO 2
C     CATALOGO COM DADOS DE VELOCIDADE RADIAL
      DO 20 I=1,N
22    READ(3,200,END=3)OALONG(I),CALAT(I),CDECC(I),CMAGAP(I),VELR(I)
200   FORMAT(3X,3F7.2,X,F4.1,X,15)
C     CALCULO DA DISTANCIA E DA MAGNITUDE ABSOLUTA
      RC(I)=ABS(VELR(I))/100.
      M(I)=CMAGAP(I)-5.*ALOG10(RC(I))-25.
C     CRITERIO DE SELECAO
      IF((RC(I).LE.DEPTH).AND.(M(I).LE.MGAPSL)).AND.(CMAGAP(I).LE.MGLIM
*    ))GO TO 202
      NN=NN-1
      GO TO 20
C 202  DEFINICAO DA AMOSTRA
      J=J+1
      ALONG(J)=RAD(PI,OALONG(I))
      ALAT(J)=RAD(PI,CALAT(I))
      DECC(J)=RAD(PI,CDECC(I))
      MAGAP(J)=CMAGAP(I)
      RC(J)=RC(I)
20    CONTINUE
      GO TO 3
C     CATALOGO SEM DADOS DE VELOCIDADE RADIAL
2    DO 220 I=1,N
222   READ(3,222,END=3)OALONG(I),CALAT(I),CDECC(I),CMAGAP(I)
222   FORMAT(3X,3F7.2,X,F4.1)
C     CRITERIO DE SELECAO
      IF(CMAGAP(I).LE.MGLIM)GO TO 2000
      NN=NN-1
      GO TO 220
C 2000 DEFINICAO DA AMOSTRA
      J=J+1
      ALONG(J)=RAD(PI,OALONG(I))
      ALAT(J)=RAD(PI,CALAT(I))
      DECC(J)=RAD(PI,CDECC(I))
      MAGAP(J)=CMAGAP(I)
220   CONTINUE
C     CONVERSAO DOS PARAMETROS ANGULARES
3    TER=RAD(PI,TE); TFR=RAD(PI,TF); ACC=RAD(PI,ACG)
      BI1=RAD(PI,BI1); BF1=RAD(PI,BF1); DEC1=RAD(PI,DEC1)
      IF(PINF21.NE.1)GO TO 30
      EI2=RAD(PI,BI2); BF2=RAD(PI,BF2); DEC2=RAD(PI,DEC2)
C     APLICACAO DO TESTE <V/VMAX>
30   N=NN
      DO 33 J=1,N
      VVMAX=10.**((CMAGAP(J)-MGLIM)*.6); MEDIA=MEDIA+VVMAX
33   CONTINUE
      MEDIA=MEDIA/FLOAT(N)
C

```



```

C      CALCULO DA AREA
      BI=BI1; BF=BF1; DEC=DEC1; PINF2=PIAF22; VII=0
400   V=0; VI=PIINF20; AREA1=0.; AREAM=0.; T1=1.
      BFI=BF; BIA=BI
41    IF((BIA.LE.DEC-ACG).OR.(BIA.GE.DEC+ACG))GO TO 45
C      HA INTERSECAO ENTRE OS PARALELOS
42    YAL=ABS(FY(DEC,BIA,ACG,1.))
      XAL=FX(DEC,YAL)
      YA=ABS(FY(BIA,DEC,ACG,-1.))
      XA=FX(BIA,YA)
      ANG=FANG(YAL,YA,XAL,XA,ACC,BIA,DEC)
      KSIL=FKSI(XAL,YAL); KSI=FKSI(XA,YA)
      IF((BF*DEC.GE.0.).AND.(FLOCAT(PINF2)*BF.GT.0.).AND.(ABS(SIN(DEC))
*    LE.SIN(ABS(BIA))*COS(ACC)))KSI=2.*PI-KSI
      IF((BF*DEC.GE.0.).AND.(FLOCAT(PINF2)*BF.LT.0.).AND.(ABS(SIN(DEC))
*    GE.SIN(ABS(BIA))*COS(ACC)))KSI=2.*PI-KSI
      IF((BF*DEC.LT.0.).AND.(FLOCAT(PINF2)*BF.GE.0.))KSI=2.*PI-KSI
      S1=S(KSI,BIA)
      IF((BF*DEC.GT.0.).AND.(ABS(SIN(BIA)).LE.SIN(ABS(DEC))*COS(ACG)))
*    KSIL=2.*PI-KSIL
      S2=S(KSIL,DEC)
      IF(FLOCAT(PINF2)*DEC.LE.0.)T1=-1.
      IF(FLOCAT(PINF2)*BF.LT.0.)ANG=PI-ANG
43    AREA=2.*(PI-ANG)-ABS(TAN(BIA)*S1)-T1*ABS(TAN(DEC)*S2)
      AREA=AREA+AREAM
      IF((VI.EQ.0.).AND.(V.EQ.0.))GO TO 46
      IF((VI.EQ.0.).AND.(V.EQ.1.))GO TO 47
      IF((PIINF21.EQ.1.).AND.(V.EQ.0.))GO TO 46
      IF((PIINF21.EQ.1.).AND.(V.EQ.1.))GO TO 47
44    BIA=-BIA
      IF(ABS(BIA).GE.ABS(DEC-ACG))GO TO 46
      AREAM=AREA; BF=-BF; T1=1.; VI=0; GO TO 42
45    IF((FLOCAT(PINF2)*BF.LT.0.).AND.(V.EQ.0.))GO TO 9510
      IF((FLOCAT(PINF2)*BF.LT.0.).AND.(V.EQ.1.))GO TO 48
C      NAO HA INTERSECAO ENTRE OS PARALELOS
      AREA=2.*PI*(1.-ABS(SIN(BIA)))
      IF(VI.EQ.0)GO TO 44; IF(V.EQ.1)GO TO 47
46    IF(ABS(ABS(BF)-PI/2.).LE.10.**(-10))GO TO 47
      AREA1=AREA
      VI=PIINF20; V=1; BIA=BFI; BF=PI/2.; T1=1.; AREAM=0.; GO TO 41
47    AREA=ABS(AREA1-AREA)
48    IF((PIINF20.EQ.0.).OR.((PIINF20.EQ.1.).AND.(PIINF21.EQ.0.))GO TO 500
      IF(VII.EQ.1)GO TO 49
      AREA2=AREA
      BI=BI2; BF=BF2; DEC=DEC2; PINF2=PIINF23; VII=1; GO TO 400
49    AREA=AREA2+AREA
C

```



```

C ESTIMATIVAS DA FUNCAO DE CORRELACAO ANGULAR
500 DO 5 I=1,N
    COSB(I)=COS(ALAT(I))
    SINB(I)=SIN(ALAT(I))
5 CONTINUE
    DTR=(TFR-TER)/FLOAT(NCLASS)
    DO 50 I=1,N-1
    DO 51 J=I+1,N
    IF(ABS(ALAT(I)-ALAT(J)).GT.TFR)GO TO 51
    SEP=ARCCOS(COSB(J)*COSB(I)*COS(ALONG(I)-ALONG(J))+SINB(J)*SINB(I))
    IF(SEP.LT.TER)GO TO 51
    DO 52 K=1,NCLASS
    IF(SEP.LE.TER+K*DTR)GO TO 53
52 CONTINUE
    GO TO 51
53 NP10(K)=NP10(K)+2
51 CONTINUE
50 CONTINUE
    DO 54 K=1,NCLASS
    DOMEGA(K)=2.*PI*(COS(TER+(K-1)*DTR)-COS(TER+K*DTR))
    FCA10(K)=FLCAT(NP10(K))*AREA/(FLCAT(N**2)*DOMEGA(K))-1.
54 CONTINUE
    DO 55 I=1,N
    BR=BI1;BFR=BF1;DECR=DEC1
    IF(PINF20.EQ.C)GO TO 56; IF(PINF21.NE.C)GO TO 57
    IF(ALAT(I)-BR.GE.0.)GO TO 56
    BR=-BR;BFR=-BFR;GO TO 56
57 IF(ALAT(I)-BR.GE.0.)GO TO 56
    BR=BI2;BFR=BF2;DECR=DEC2
56 IF((ABS(DEC(I)-DECR).LE.TER).OR.(ABS(ALAT(I)-BR).LE.TER))GO TO 55
    IF(ABS(ABS(BFR)-PI/2.).LE.10.**(-10))GO TO 58
    IF(ABS(ALAT(I)-BFR).LE.TER)GO TO 55
58 DO 59 K=1,NCLASS
    IF((ABS(DEC(I)-DECR).LE.TER+K*DTR).OR.
    * (ABS(ALAT(I)-BR).LE.TER+K*DTR))GO TO 501
    IF(ABS(ABS(BFR)-PI/2.).LE.10.**(-10))GO TO 59
    IF(ABS(ALAT(I)-BFR).LE.TER+K*DTR)GO TO 501
59 CONTINUE
    K=K-1
501 DO 502 J=1,K
502 NCEN(J)=NCEN(J)+1
    DO 503 MI=1,N
    IF((I.EQ.MI).OR.(ABS(ALAT(I)-ALAT(MI)).GT.TFR))GO TO 503
    SEP=ARCCOS(COSB(I)*COSB(MI)*COS(ALONG(I)-ALONG(MI))+SINB(I)*SINB(MI))
    * )
    IF(SEP.LT.TER)GO TO 503
    DO 504 J=1,K
    IF(SEP.LE.TER+J*DTR)GO TO 505
504 CONTINUE
    GO TO 503
505 NP11(J)=NP11(J)+1
503 CONTINUE
55 CONTINUE
    DO 506 K=1,NCLASS
    IF(NCEN(K).NE.C)GO TO 507
    INF=1; GO TO 9520
507 FCA11(K)=(FLOAT(NP11(K))*AREA)/(FLCAT(NCEN(K))*FLCAT(N)*DOMEGA(K))
    * -1.
506 CONTINUE
    DT=DTR*180./PI
    CALL RETA(FCA10,TE,DT,TETA,NCLASS,CAA10,CA10,BETA10)
    CALL RETA(FCA11,TE,DT,TETA,NCLASS,CAA11,CA11,BETA11)
    IF(PINFO.EQ.C)GO TO 60
    DO 557 K=1,NCLASS
    FCA2(K)=(FLCAT(NP10(K)/2))*(FLCAT(NPAF**2))/(FLCAT(N**2))*
    * FLOAT(NPAF(K))*IFIX(AREA/AREAF)-1.
557 CONTINUE
    CALL RETA(FCA2,TE,DT,TETA,NCLASS,CAA2,CA2,BETA2)

```



```

C   CALCULO DA AMPLITUDE E INCLINACAO DA FUNCAO DE CORRELACAO ESPACIAL
C   -INVERSAO DA EQUACAO DE LIMBER
C   60  CALCULO DA DISTANCIA CARACTERISTICA
      DC=10.**(.2*(MGLIM-MGTIP)-5.)
      IF(PINF3.EQ.1)DC=DE
C   CASO:A FUNCAO SELECAO SEQUE O MODELO PROPOSTO POR ABELL
      E2=1./1.75-(.01**2)/.75+1./1.75
      VILP21=(E2**2)/(1./(2.5-BETA10)+1./(2.5+BETA10)-(0.01**((2.5+
*      BETA10)/3.75))/(2.5+BETA10))
      VILP22=(E2**2)/(1./(2.5-BETA11)+1./(2.5+BETA11)-(0.01**((2.5+
*      BETA11)/3.75))/(2.5+BETA11))
      IF(PINFO.EQ.0)GO TO 62
      VILP23=(E2**2)/(1./(2.5-BETA2)+1./(2.5+BETA2)-(0.01**((2.5+
*      BETA2)/3.75))/(2.5+BETA2))
C   62  CASO:A FUNCAO SELECAO E MODELADA POR UMA FUNCAO DE HEAVISIDE
      YO=1.
      E1=(YO**3)/3.
      VILP11=(E1**2)/((YO**((5.-BETA10)))/(5.-BETA10))
      VILP12=(E1**2)/((YO**((5.-BETA11)))/(5.-BETA11))
      IF(PINFO.EQ.0)GO TO 63
      VILP13=(E1**2)/((YO**((5.-BETA2)))/(5.-BETA2))
C   63  IF(PINF1.EQ.0)GO TO 600
C   CASO:A FUNCAO SELECAO E ESTIMADA
      CALL FSCN,MGLIM,MGABSL,DR,DEPTH,NINT,D,A,F,R,RD,MAGAP)
C   AJUSTE DO POLINOMIO A FAZAC "A" ENTRE OS HISTOGRAMAS DE DISTANCIAS
      CALL LSTISCR,A,NINT,C,AM,ERR,NIT)
C   CALCULO DO TERMO "E"
      AO=C(1)*DC; A1=C(2)*(DC**2)/2.; A2=C(3)*(DC**3)/3.
      A3=C(4)*(DC**4)/4.; A4=C(5)*(DC**5)/5.
      EE1=2.; EE2=-1./DR; EE3=1.; EE4=2.; EE5=3.; EE6=4.; EE7=5.
      AL=D/DC; BL=DEPTH/DC
      CALL INTCAL,BL,EE1,EE2,EE3,EE4,EE5,EE6,EE7,AC,A1,A2,A3,A4,IE,ERR1)
      E3=(D**3)/(3.*DC**3)+IE
C   CALCULO DA INTEGRAL EM "P(X)"
      P11=4.-BETA10; P2=-2./DR
      P12=4.-BETA11
      CALL INTCAL,BL,P11,P2,EE3,EE4,EE5,EE6,EE7,AC,A1,A2,A3,A4,IF1,ERR1)
      CALL INTCAL,BL,P12,P2,EE3,EE4,EE5,EE6,EE7,AC,A1,A2,A3,A4,IF2,ERR1)
      IF(PINFO.EQ.0)GO TO 61
      P13=4.-BETA2
      CALL INTCAL,BL,P13,P2,EE3,EE4,EE5,EE6,EE7,AC,A1,A2,A3,A4,IF3,ERR1)
      VILP33=(E3**2)/((D**((5.-BETA2)))/(5.-BETA2)*(DC**((5.-BETA2))))+IF3)
C   61  VILP31=(E3**2)/((D**((5.-BETA10)))/(5.-BETA10)*(DC**((5.-BETA10))))+
*      IP1)
      VILP32=(E3**2)/((D**((5.-BETA11)))/(5.-BETA11)*(DC**((5.-BETA11))))+
*      IP2)
C   VALORES DA FAZAC "A" AJUSTADA
      DO 64 L=1,NINT
      AA(L)=C(1)+R(L)*(C(2)+R(L)*(C(3)+R(L)*(C(4)+R(L)*(C(5)*R(L))))))
C   64  CONTINUE
C   FUNCAO SELECAO ESTIMADA PARA TRES VALORES DA DISTANCIA
      B0=C(1); B1=C(2)/2.; B2=C(3)/3.; B3=C(4)/4.; B4=C(5)/5.
      VFS1=VFS(V1,DF,B0,B1,B2,B3,B4)
      VFS2=VFS(V2,DF,B0,B1,B2,B3,B4)
      VFS3=VFS(V3,DF,B0,B1,B2,B3,B4)
C   600  GAMA1=BETA10+1.; PGAM10=FGAMMA(BETA10)
      AFE0M1=AFCEM1(CAA10,DC,BETA10,PGAM10)
      AFE01=AFCEM1*VILP11; AFE02=AFCEM1*VILP21
      GAMA2=BETA11+1.; PGAM11=FGAMMA(BETA11)
      AFE1M1=AFCEM1(CAA11,DC,BETA11,PGAM11)
      AFE11=AFE1M1*VILP12; AFE12=AFE1M1*VILP22
      IF(PINF1.EQ.0)GO TO 601
      AFE03=AFCEM1*VILP31; AFE13=AFE1M1*VILP32
C   601  IF(PINFO.EQ.0)GO TO 700
      GAMA3=BETA2+1.; PGAM2=FGAMMA(BETA2)
      AFE2M1=AFCEM1(CAA2,DC,BETA2,PGAM2)
      AFE21=AFE2M1*VILP13; AFE22=AFE2M1*VILP23
      IF(PINF1.EQ.0)GO TO 700; AFE23=AFE2M1*VILP33
C   SAIDAS

```



```

700 WRITE(5,701)N,AREA,MEDIA
701 FORMAT('*****
:*****',/,
: ' NUMERO DE OBJETOS ANALISADOS=' ,I4,/,
: ' AREACESEFERCERRADIANO)=' ,F5.2,/,
: ' <V/VMAX>=' ,F4.2)
IFCPINF3.NE.C)GC TO 702
WRITE(5,703)DC
703 FCRMAIC ' DISTANCIA CARACTERISITICA (MPC)=' ,F6.2)
702 IFCPINF1.EQ.0)GC TO 711
IFCPINFO.EQ.0)GC TO 71
WRITE(5,707)V1,VFS1,V2,VFS2,V3,VFS3,
: CAA10,CAA11,CAA2,BETA10,BETA11,BETA2,
: AFE01,AFE11,AFE21,GAMA1,GAMA2,GAMA3,
: AFE02,AFE12,AFE22,AFE03,AFE13,AFE23
707 FORMAT(' FSC(' ,F5.1,')=' ,F12.7,/, ' FSC(' ,F5.1,')=' ,F12.7,/, ' FSC(' ,
: F5.1,')=' ,F12.7,/,/,
: ' FUNCAO DE CORRELACAO ANGULAR',/,
: -----',/,
: ' FATOR DE NORMALIZACAO I INCLINACAO',/,
: -----',/,
: ' 1 I 2 I 3 I 1 I 2 I 3',/,
: -----',/,
: 2X,F6.2, ' I ',F6.2, ' I ',F6.2, ' I ',F4.2, ' I ',F4.2, ' I ',F4.2,/,
: -----',/,
: ' FUNCAO DE CORRELACAO ESPACIAL',/,
: -----',/,
: ' FUNCAO SELECAO I FATOR DE NORMALIZACAO I INCLINACAO',/,
: -----',/,
: ' I 1 I 2 I 3 I 1 I 2 I 3',/,
: -----',/,
: ' HEAVISIDE I ',F6.2, ' I ',F6.2, ' I ',F6.2, ' I ',F4.2, ' I ',
: ',F4.2, ' I ',F4.2,/,
: -----',/,
: ' "ABELL" I ',F6.2, ' I ',F6.2, ' I ',F6.2, ' I " I "
: ',/,
: -----',/,
: ' ESTIMADA I ',F6.2, ' I ',F6.2, ' I ',F6.2, ' I " I "
: ',/,
: -----',/,
: ' )
: *****
: )
GO TO 9000
71 WRITE(5,710)V1,VFS1,V2,VFS2,V3,VFS3,
: CAA10,CAA11,BETA10,BETA11,
: AFE01,AFE11,GAMA1,GAMA2,
: AFE02,AFE12,AFE03,AFE13
710 FORMAT(' FSC(' ,F5.1,')=' ,F12.7,/, ' FSC(' ,F5.1,')=' ,F12.7,/, ' FSC(' ,
: F5.1,')=' ,F12.7,/,/,
: ' FUNCAO DE CORRELACAO ANGULAR',/,
: -----',/,
: ' FATOR DE NORMALIZACAO I INCLINACAO',/,
: -----',/,
: ' 1 I 2 I 1 I 2',/,
: -----',/,
: 6X,F6.2, ' I ',F6.2, ' I ',F4.2, ' I ',F4.2,/,
: -----',/,
: ' FUNCAO DE CORRELACAO ESPACIAL',/,
: -----',/,
: ' FUNCAO SELECAO I FATOR DE NORMALIZACAO I INCLINACAO',/,
: -----',/,
: ' I 1 I 2 I 1 I 2',/,
: -----',/,
: ' HEAVISIDE I ',F6.2, ' I ',F6.2, ' I ',F4.2, ' I ',F4.2,
: ',/,
: -----',/,
: ' "ABELL" I ',F6.2, ' I ',F6.2, ' I " I "
: ',/,
: -----',/,
: ' ESTIMADA I ',F6.2, ' I ',F6.2, ' I " I "
: ',/,
: -----',/,
: ' )
: *****
: )
GO TO 9000

```



```

711 IF(PINFO.EQ.C)GO TO 7001
WRITE(5,7010)CAA10,CAA11,CAA2,BETA10,BETA11,BETA2,
: AFE01,AFE11,AFE21,GAMA1,GAMA2,GAMA3,
: AFE02,AFE12,AFE22
7010 FORMAT(/,
: 'FUNCAO DE CORRELACAO ANGULAR',/,
: ' FATOR DE NORMALIZACAO I INCLINACAO',/,
: ' 1 I 2 I 3 I 1 I 2 I 3',/,
: 2X,F6.2,' I ',F6.2,' I ',F6.2,' I ',F4.2,' I ',F4.2,' I ',F4.2/,
: 'FUNCAO DE CORRELACAO ESPACIAL',/,
: 'FUNCAO SELECAO I FATOR DE NORMALIZACAO I INCLINACAO',/,
: ' I 1 I 2 I 3 I 1 I 2 I 3',/,
: 'HEAVISIDE I ',F6.2,' I ',F6.2,' I ',F6.2,' I ',F4.2,' I ',F4.2/,
: '"ABELL" I ',F6.2,' I ',F6.2,' I ',F6.2,' I " I "',/,
: '*****')
GO TO 9000
7001 WRITE(5,7011)CAA10,CAA11,BETA10,BETA11,
: AFE01,AFE11,GAMA1,GAMA2,
: AFE02,AFE12
7011 FORMAT(/,
: 'FUNCAO DE CORRELACAO ANGULAR',/,
: ' FATOR DE NORMALIZACAO I INCLINACAO',/,
: ' 1 I 2 I 1 I 2',/,
: 6X,F6.2,' I ',F6.2,' I ',F4.2,' I ',F4.2/,
: 'FUNCAO DE CORRELACAO ESPACIAL',/,
: 'FUNCAO SELECAO I FATOR DE NORMALIZACAO I INCLINACAO',/,
: ' I 1 I 2 I 1 I 2',/,
: 'HEAVISIDE I ',F6.2,' I ',F6.2,' I ',F4.2,' I ',F4.2/,
: '"ABELL" I ',F6.2,' I ',F6.2,' I " I "',/,
: '*****')

```


B I B L I O G R A F I A

- [1] ABELL, G.O.; Clusters of Galaxies. In: SANDAGE, A., SANDAGE, M. e KRISTIAN, J. *Galaxies and the Universe*. The University of Chicago Press, 1975. 818 p.P. 601-642.
- [2] COURANT, R. e HILBERT, D.; *Methods of Mathematical Physics*. Interscience Publishers, Inc. 1937.
- [3] DAVIS, M. e GELLER, M.J.; Galaxy Correlations as a Function of Morphological Type. *The Astrophysical Journal*. Nº208, p.13-19. 15/08/1976.
- [4] DAVIS, M., GELLER, M.J. e HUCHRA, J.; The Local Mean Mass Density of the Universe: New Methods for Studying Galaxy Clustering. *The Astrophysical Journal*. Nº221, p.1-18. 01/04/1978.
- [5] DAVIS, M. e HUCHRA, J.; A Survey of Galaxy Redshifts. *The Astrophysical Journal*. Nº254, p.437-450. 15/03/1982.
- [6] DAVIS, M. e PEEBLES, P.J.E.; A Survey of Galaxy Redshifts. v. The Two-Point Position and Velocity Correlations. *The Astrophysical Journal*, Nº267. p.465-482. 15/04/1983.
- [7] LAYZER, D.; Galaxy Clustering: Its Description and Its Interpretation. In: SANDAGE, A., SANDAGE, M. e KRISTIAN, J. *Galaxies and the Universe*. The University of Chicago Press, 1975. 818 p.P.665-722.
- [8] MIHALAS, D. e BINNEY, J.; *Galactic Astronomy: Structure and Kinematics*. 2ª edição. W.H.Freeman Company. 1981.
- [9] NILSON, P.; *Uppsala General Catalogue of Galaxies*, Nova Acta, Reg.Soc.Sci.Upsaliensis. 1973. Serv.V.A., Vol.1.

[10] PEEBLES, P.J.E.; *The Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press, 1980.

[11] PEEBLES, P.J.E. e HAUSER, M.G.; *Statistical Analysis of Catalogs of Extragalactic Objects*. *The Astrophysical Journal. Supplement Series*, Nº253, p.19-36, 1974.

[12] SADLER, E.M.; *Radio and Optical Observations of a Complete Sample of E and SO Galaxies*. *The Astrophysical Journal*. 89, p.44, 1984.

[13] SADLER, E.M. e SHARP, N.A.; *A Complete Sample of Southern E and SO Galaxies: Glustering Properties*. *The Astrophysical Journal*. Nº208, p.80-88, 10/12/1984.

[14] SERSIC, J.L.; *Extragalactic Astronomy*. D.Reidel Publishing Company. 1982, V.20.

[15] SHARP, N.A.; *Practical Estimation of the Angular Covariance Function*. *Astronomy and Astrophysics*. Nº74, p.308-312. 1979.

Nota: As demais referências bibliográficas que não constam desta lista não foram investigadas diretamente, sendo citadas pelos textos pesquisados. Os índices que, no texto, acompanham estas referências relacionam-se com os números da lista acima, por conseguinte, os textos que as referenciam.