



INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE ORBITAS

por

RUBENS HEIZER MILLELA

PROJETO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO OBSERVATÓRIO DO VALONGO  
DA U.F.R.J., COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE ASTRONOMO.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: MECÂNICA CELESTE

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

OBSERVATÓRIO DO VALONGO

JUNHO DE 1987

*Aos meus pais*

*Aqueles que sempre confiaram e me apoiaram  
em tudo.*

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e familiares que sempre me incentivaram

Ao meu orientador José Antônio Salvador, por seu apoio

A todas as pessoas que direta ou indiretamente me apoiaram, entenderam e confiaram no decorrer da elaboração deste trabalho

*" A ASTRONOMIA foi a maneira que o homem inventou  
para tentar ler os pensamentos de DEUS "*

*Rubens Heizer Villela*

## RESUMO

Neste trabalho elaboramos dois programas para integrar equações diferenciais do tipo:

$$x'' = f(x, t)$$

com condições iniciais utilizando o método de GAUSS-JACKSON, em particular resolvemos o problema de dois corpos da MECANICA CELESTE.

## SUMARIO

Dedicatória .....	i
Agradecimentos .....	ii
Pensamento .....	iii
Resumo .....	iv
Sumário .....	v
<u>CAPITULO</u> 1. INTRODUÇÃO .....	1
<u>CAPITULO</u> 2. CONCEITOS BASICOS .....	2
2.1 Anomalia Verdadeira, Excêntrica e Média ..	4
2.2 A Equação de KEPLER .....	6
<u>CAPITULO</u> 3. CALCULO DAS DIFERENÇAS FINITAS .....	9
3.1 As Diferenças Finitas .....	9
3.2 Fórmulas de Interpolação .....	13
3.2.1 Fórmula de NEWTON .....	14
3.2.2 Fórmula de GAUSS .....	15
3.2.3 Fórmula de STIRLING .....	17
3.2.4 Outras .....	18
3.3 Diferenciação Numérica .....	18
3.4 Integração Numérica .....	20
3.5 Fórmula da SOMA-SEGUNDA(GAUSS-JACKSON) ...	25
<u>CAPITULO</u> 4. RESULTADOS .....	31
<u>CAPITULO</u> 5. CONCLUSAO .....	41
<u>APENDICE</u> A. OS PROGRAMAS .....	43
<u>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS</u> .....	46

## CAPITULO 1

### INTRODUÇÃO GERAL

Um grande número de problemas na área de Ciências Exatas é resolvido à partir de equações diferenciais.

Na ASTRONOMIA, particularmente em MECANICA CELESTE, os problemas de interação entre os corpos celestes geram equações diferenciais ordinárias de segunda ordem do tipo:

$$\underline{r}'' = F(\underline{r}) \quad (100-1)$$

Estas equações são em geral muito complicadas e, na maioria das vezes, métodos numéricos são utilizados para a sua integração.

Grande número de pesquisadores utilizam métodos numéricos para integrar uma equação de primeira ordem em problemas onde a equação original é de segunda ordem, utilizando-se para isso substituição de variáveis para redução da ordem da equação. Entretanto, existem métodos eficazes de se integrar a equação de segunda ordem diretamente.

Neste trabalho é apresentado o método de GAUSS-JACKSON, através do qual são integradas a equação que rege o problema de dois corpos e algumas equações de 2<sup>a</sup> ordem diretamente, isto é, sem efetuar a redução de ordem.

Observamos ainda alguns fatos sobre a aplicabilidade do método estudado.

## CAPITULO 2

### CONCEITOS BASICOS

Neste capítulo serão abordados conceitos gerais, tanto matemáticos quanto astronômicos, que possibilitarão ao leitor informações sobre as teorias abordadas sem a preocupação de detalhes, por não ser esse o objetivo.

Nosso problema é achar a posição, em um dado instante, de um corpo de massa  $m$  orbitando outro corpo de massa maior  $M$ , sem qualquer tipo de perturbação. Este problema é conhecido como o problema de dois corpos.

No caso, a equação diferencial ordinária, que rege o problema, considerando-se que estamos no plano da órbita e a origem do nosso sistema de coordenadas centrado no corpo mais massivo é:

$$\underline{r}'' = - k^2(M+m) \frac{F(r)}{r} \underline{r} \quad (200-1)$$

onde  $k = 0.01720209895 =$  constante Gaussiana

$\underline{r}$  = vetor posição

$r$  = módulo do vetor posição do corpo de massa  $m$

$x$  = componente do vetor  $\underline{r}$  no eixo "x"

$$F(r) = \frac{1}{r^2}$$

Esta equação é do tipo da equação (100-1), mas na realidade o que faremos será integrar equações cujas variáveis são as componentes do vetor  $\underline{r}$ :



$$x'' = -k^2(M+m)\frac{x}{r^3} \quad (200-2)$$

e

$$y'' = -k^2(M+m)\frac{y}{r^3} \quad (200-3)$$

Ora, podemos notar nas equações (200-2) e (200-3) que, para cada uma delas, existe uma variável a mais implícita no "r", pois:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (200-4)$$

Esta é uma equação importante, pois, assim como outras que serão utilizadas mais tarde, ela faz parte de grupo de equações chamadas de Equações de Vínculo.

No caso o corpo, que está orbitando o outro, possui uma trajetória bem definida onde a distância do corpo à origem é dada pela equação (200-4). Ou seja, ele está vinculado(ligado) ao outro corpo.

Como observamos anteriormente, as equações(200-2) e (200-3) contém implicitamente as variáveis "y" e "x" respectivamente. Para resolver esse problema devemos calcular essas variáveis de outra maneira, para isso serão apresentados novos conceitos.

## 2.1. ANOMALIAS VERDADEIRA, EXCENTRICA E MEDIA

Consideremos a figura abaixo:

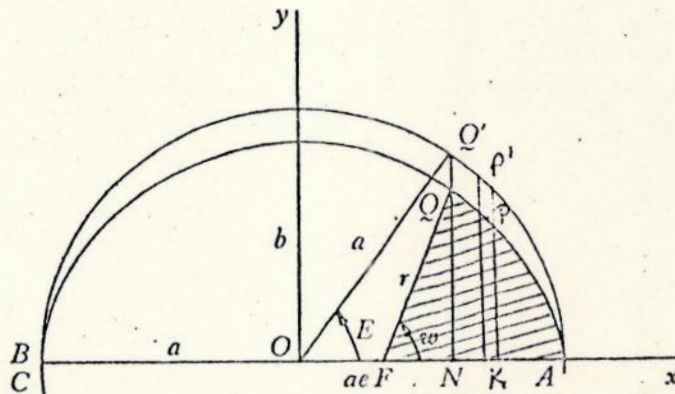


figura 210-1

Trata-se de uma circunferência de raio "a" tangenciando exteriormente uma elipse nos pontos A e B. Como se trata de um problema de MECANICA CELESTE, o centro de força do sistema (que pode ser o Sol, Terra, um corpo massivo, etc...) será considerado no foco F da elipse mais próximo do ponto A. Esse ponto é chamado de Periastro e o ponto B de Apoaastro. A origem do sistema cartesiano de eixos ficará no centro da circunferência e a origem de um sistema polar (auxiliar) ficará no foco F da elipse.

O ponto Q, na figura, representa a posição do corpo na elipse e o ponto Q', a extrapolação do ponto Q para a circunferência, sendo N a projeção desses pontos no eixo "x".

O vetor posição  $r$ , com relação à F, faz um ângulo com o eixo "x". Esse ângulo é denominado de Anomalia Verdadeira, e denotada por  $w$ .

O ângulo que o segmento OQ faz com o mesmo eixo é denominado de Anomalia Excêntrica e denotada por E. Temos que a relação entre as ordenadas com relação aos dois pontos Q e Q' é dada por:

$$\frac{y_e}{y_c} = \frac{b}{a} = \frac{QN}{Q'N} = \frac{a(1-e^2)^{1/2}}{a} = (1-e^2)^{1/2} \quad (210-1)$$

onde "a" é o semi-eixo maior da elipse, "b" é o semi-eixo menor da elipse e "e" a excentricidade.

Com esta relação e utilizando a geometria da elipse:

$$FN = r \cos(w) = a \cos(E) - ae = a(\cos(E) - e) \quad (210-2)$$

$$QN = r \sin(w) = a(1-e^2)^{1/2} \sin(E) \quad (210-3)$$

Futuramente trasladaremos o eixo "y" de modo que a origem fique no foco F, desta forma:

$$x = FN = a(\cos(E) - e) \quad (210-4)$$

$$y = QN = a(1-e^2)^{1/2} \sin(E) \quad (210-5)$$

Além das Anomalias Verdadeira e Excêntrica, é definida mais uma, qual seja, a Anomalia Média, sendo denotada por M:

$$M = n(t - T) \quad (210-6)$$

onde: n= movimento médio diário

t= tempo

T= tempo em que o corpo passou pelo periastro

## 2.2.A EQUAÇÃO DE "KEPLER"

Retornemos à figura 210-1. Considerando Q a posição do corpo no instante t, na elipse, no intervalo t-T, o raio vetor ao se mover de FA para FQ descreve aquela área hachurada. De acordo com a segunda lei de KEPLER ("Um corpo numa órbita elítica percorre áreas iguais em tempos iguais."); então:

$$\frac{\text{Área FQA}}{\text{Área da el.}} = \frac{t - T}{P} \Rightarrow \text{Área FQA} = \frac{\pi ab(t - T)}{P} \quad (220-1)$$

onde P é o período.

Tendo em mente que o movimento médio é dado por  $n = \frac{2\pi}{P}$ , temos:

$$\text{Área FQA} = \frac{1}{2} n ab (t - T) = \frac{1}{2} ab M \quad (220-2)$$

Expressaremos esta área em termos da Anomalia Excêntrica. Para isso tomemos a área FQA. Esta área é igual a área do triângulo FQN + a área NQA.

A 1ª área mencionada acima é dada por:

$$\text{Área } \triangle FQN = \frac{1}{2} (FN)(QN) \quad (220-3)$$

onde

$$FN = QN - OF = a \cos(E) - ae = a(\cos(E) - e) \quad (220-4)$$

Substituindo  $Q'N = a \sin(E)$  em (210-1), temos que:

$$QN = b \sin(E) \quad (220-5)$$

Substituindo os valores de (220-4) e (220-5) em (220-3), temos:

$$\text{Área } \triangle FQN = \frac{1}{2} b \text{sen}(E)(\cos(E) - e) \quad (220-6)$$

Considerando agora a área NQA. Se dividirmos esta área em partes estreitas perpendiculares a AB, conforme a fig. 210-1, podemos escrever:

$$\frac{\text{Área do setor PK}}{\text{Área da elipse}} = \frac{\text{Área do setor P'K}}{\text{Área do círculo}}$$

ou

$$\frac{A_{pk}}{\pi ab} = \frac{A_{p'k}}{\pi a^2}, \text{ dessa forma } A_{pk} = \frac{b}{a} A_{p'k} \quad (220-7)$$

Com isso podemos concluir que:

$$\text{Área NQA} = \frac{b}{a} (\text{Área NQ'A})$$

Logo se integrarmos em "x" a área NQ'A, que é um pedaço do círculo e que vai de "acos(E)" à "a":

$$\begin{aligned} \text{Área NQ'A} &= \int_{\text{acos}(E)}^a \sqrt{(a^2 - x^2)} dx = \left[ \frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{2} \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{\text{acos}(E)}^a = \\ &= \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \text{sen}(E)\cos(E) - \frac{a^2}{2} \arcsen(\cos(E)) \end{aligned}$$

Como  $\arcsen(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ , temos:

$$\begin{aligned} \text{área NQ'A} &= \frac{\gamma a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \text{sen}(E) \cos(E) - \frac{a^2}{2} \left( \frac{\gamma}{2} - \arccos(\cos(E)) \right) = \\ &= \frac{a^2}{2} (E - \text{sen}(E) \cos(E)) \end{aligned} \quad (220-8)$$

Levando (220-8) em (220-9) e somando o resultado com a área de  $\triangle FQN$ , temos finalmente que a Anomalia Média é dada por:

$$M = E - e \text{sen}(E) \quad (220-9)$$

que é a chamada equação de KEPLER. Sua resolução, cálculo de  $E$ , é feito computacionalmente através do método de aproximações sucessivas.

A finalidade deste projeto é fazer um programa que integre funções contínuas. Mas quando a função é a função do problema de dois corpos, necessitamos de equações auxiliares para a sua integração, pelo motivo descrito no início deste capítulo. A equação de KEPLER é a equação auxiliar para o cálculo de "x", "y" e "r", pois:

$$x = a(\cos(E) - e)$$

$$y = a(1-e^2)^{1/2} \text{sen}(E) \quad e$$

$$r = x^2 + y^2$$

Por isso, para cada valor de entrada o programa é desviado para uma sub-rotina que calcula esses valores, os quais retornam ao programa principal e servem como entrada de valores da função que se deseja integrar.

## CAPITULO 3

### CALCULO DE DIFERENÇAS FINITAS

Uma função pode ser representada na forma numérica, onde seus valores são plotados numa tabela para certos valores de sua variável. Além disso, os valores numéricos de uma função podem ser interpolados de modo a obtermos os valores aproximados da função em todos os pontos dos intervalos tabulares.

O cálculo das diferenças finitas é baseado na tabela de diferenças finitas.

#### 3.1. AS DIFERENÇAS FINITAS

Considerando uma função real  $x$  e denotando por  $x_i$  o seu valor no ponto  $t_i$ , podemos definir três tipos de diferenças:

i) Diferença Ascendente ( $\Delta$ )

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (310-1)$$

ii) Diferença Descendente ( $\nabla$ )

$$\nabla x_i = x_i - x_{i-1} \quad (310-2)$$

iii) Diferença Centrada ( $\delta$ )

$$\delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} \quad (310-3)$$

EXEMPLO:

A tabela de Diferenças Ascendentes para os valores de  $t$  entre 0 e 6 com intervalo tabular 1(um) para a função:  $x(t)=t^3+5$  é:

$t_1$	$x_1$	$\Delta^1 x_1$	$\Delta^2 x_1$	$\Delta^3 x_1$	$\Delta^4 x_1$
0	5				
1	6	1			
2	13	7	6		
3	32	19	12	6	0
4	69	37	18	6	0
5	130	61	24	6	0
6	221	91	30		

Tabela 310-1

No caso  $\Delta^1 x_1$  será a primeira diferença entre os valores consecutivos da função,  $\Delta^2 x_1$  será a segunda diferença etc ...

Na tabela acima, apresentamos maiores potências de  $\Delta$ , que podem ser obtidas do seguinte modo:

Sendo

$$\Delta x(t) = x(t+h) - x(t), \quad (310-4)$$

onde  $h$  é o intervalo tabular, então:

$$\Delta^2 x(t) = \Delta(\Delta x(t))$$



$$= \Delta(x(t+h) - x(t))$$

$$= x(t+2h) - 2x(t+h) + x(t)$$

etc...

Notamos uma semelhança entre as diferenças e as derivadas da função em questão. Diferenciando a função três vezes, obteremos:

$$x'(t) = 3t^2 \quad ;$$

$$x''(t) = 6t \quad e$$

$$x'''(t) = 6$$

O valor da derivada terceira da função é igual ao valor da terceira diferença, isto é;

$$x'''(3) = \Delta^3 x(3) = 6$$

Se dividirmos ambos os membros de (310-4) por h, para um  $t_0$ :

$$\frac{\Delta x(t_0)}{h} = \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} \quad ,$$

veremos claramente a similaridade entre as expressões das derivadas e das diferenças; isto é:

$$x'(t_0) \approx \frac{\Delta x(t_0)}{h}$$

#### TEOREMA 1

"Se  $x(t)$  é uma função contínua em  $[t, t+jh]$  e j vezes

diferenciável num intervalo  $(t, t+jh)$ , com  $j$  inteiro e  $h > 0$ , então:

$$\Delta^j x(t) = h^j x^j(\beta_j) \quad t \leq \beta_j \leq t+jh.$$

DEMONSTRAÇÃO (indução)

Para  $j=1$

$$\Delta x(t) = x(t+h) - x(t)$$

Pelo Teorema do Valor Médio (T.V.M.) aplicado ao intervalo  $(t, t+h)$  vem que:

$$x'(\beta_1) = \frac{x(t+h) - x(t)}{t+h - t} \quad t \leq \beta_1 \leq t+h$$

$$x'(\beta_1) = \frac{\Delta x(t)}{h} \quad \Rightarrow \quad \Delta x(t) = hx'(\beta_1)$$

Suponhamos agora que:

$$\Delta^{j-1} x(t) = h^{j-1} x^{j-1}(\beta_{j-1}) \quad \text{onde } t < \beta_{j-1} < t+(j-1)h$$

E para  $j > 1$  temos:

$$\begin{aligned} \Delta^j x(t) &= \Delta \Delta^{j-1} x(t) = \\ &= \Delta (h^{j-1} x^{j-1}(\beta_{j-1})) = \\ &= h^{j-1} \Delta x^{j-1}(\beta_{j-1}) \end{aligned} \quad (310-5)$$

Então pelo T.V.M., para  $x^{j-1}(t)$  em  $(\beta_{j-1}, \beta_{j-1}+h)$ , podemos dizer que existe  $\beta_j$  com  $\beta_{j-1} < \beta_j < \beta_{j-1}+h$ , tal que:

$$x^j(\beta_j) = \frac{x^{j-1}(\beta_{j-1}+h) - x^{j-1}(\beta_{j-1})}{\beta_{j-1}+h - \beta_{j-1}}$$

ou

$$\Delta x^{j-1}(\beta_{j-1}) = h x^j(\beta_j) \quad (310-6)$$

levando (6) em (5), vem que:

$$\Delta^j x(t) = h^j x^j(\beta_j)$$

e finalmente somando-se membro a membro as desigualdades:

$$\begin{array}{l} \beta_{j-1} < \beta_j < \beta_{j-1}+h \\ t < \beta_{j-1} < t+(j-1)h \end{array}$$

---


$$t < \beta_j < t+jh$$

*q. e. d.*

OBS. O Cálculo é análogo para os outros tipos de diferenças.

### 3.2. FORMULAS de INTERPOLAÇÃO

São, na essência, polinômios que coincidem com a função exatamente num número limitado de pontos tabulados e entre esses pontos eles aproximam os valores dessa função.

Quanto menor a diferença dos valores do polinômio interpolante e os valores da função, melhor o grau de aproximação da função.

Seja  $t$  um ponto do intervalo tabular  $[t_1, t_{1+1}]$ , definimos o fator interpolante "u", como:

$$u = \frac{t - t_1}{t_{1+1} - t_1} = \frac{t - t_1}{h} \quad (320-1)$$

### 3.2.1. FORMULA DE 'NEWTON'

Considerando a seguinte tabela:

$\Sigma^2$	$\Sigma$	x	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
$\Sigma^2 x_{i-2}$		$x_{i-2}$		$\Delta^2 x_{i-2}$	
	$\Sigma x_{i-3/2}$		$\Delta x_{i-3/2}$		$\Delta^3 x_{i-3/2}$
$\Sigma^2 x_{i-1}$		$x_{i-1}$		$\Delta^2 x_{i-1}$	
	$\Sigma x_{i-1/2}$		$\Delta x_{i-1/2}$		$\Delta^3 x_{i-1/2}$
$\Sigma^2 x_i$		$x_i$		$\Delta^2 x_i$	
	$\Sigma x_{i+1/2}$		$\Delta x_{i+1/2}$		$\Delta^3 x_{i+1/2}$
$\Sigma^2 x_{i+1}$		$x_{i+1}$		$\Delta^2 x_{i+1}$	
	$\Sigma x_{i+3/2}$		$\Delta x_{i+3/2}$		
$\Sigma^2 x_{i+2}$		$x_{i+2}$			
	$\Sigma x_{i+5/2}$				
$\Sigma^2 x_{i+3}$					

tabela 321-1

Desta tabela, obtemos as seguintes fórmulas de recorrência:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_{i+1/2} \quad (321-1)$$

$$\Delta x_{i+3/2} = \Delta x_{i+1/2} + \Delta^2 x_{i+1} \quad (321-2)$$

$$\Delta^2 x_{i+2} = \Delta^2 x_{i+1} + \Delta^3 x_{i+3/2}, \text{ etc ...} \quad (321-3)$$

$$x_{i+2} = x_{i+1} + \Delta x_{i+3/2} = x_i + 2\Delta x_{i+1/2} + \Delta^2 x_{i+1} \quad (321-4)$$

$$\Delta x_{i+5/2} = \Delta x_{i+1/2} + 2\Delta^2 x_{i+1} + \Delta^3 x_{i+3/2}, \text{ etc...} \quad (321-5)$$

$$x_{i+3} = x_i + 3\Delta x_{i+1/2} + 3\Delta^2 x_{i+1} + \Delta^3 x_{i+3/2} \quad (321-6)$$

$$x_{i+4} = x_i + 4\Delta x_{i+1/2} + 6\Delta^2 x_{i+1} + 4\Delta^3 x_{i+3/2} + \Delta^4 x_{i+2}, \text{ etc...} \quad (321-7)$$

Estas equações sugerem:

$$x_{1\pm n} = x_1 + u\Delta x_{1\pm 1/2} + N_2\Delta^2 x_{1\pm 1} + N_3\Delta^3 x_{1\pm 3/2} + N_4\Delta^4 x_{1\pm 2} + \dots \quad (321-8)$$

que é a fórmula de NEWTON, onde

$$N_2 = \frac{u(u\mp 1)}{2!}, \quad N_3 = \frac{u(u\mp 1)(u\mp 2)}{3!}$$

$$N_4 = \frac{u(u\mp 1)(u\mp 2)(u\mp 3)}{4!} \quad \text{e} \quad N_5 = \frac{u(u\mp 1)(u\mp 2)(u\mp 3)(u\mp 4)}{5!}$$

são os chamados coeficientes de NEWTON.

### 3.2.2. FORMULA DE 'GAUSS'

Considerando a fórmula de NEWTON :

$$x_{1\pm n} = x_1 + u\Delta x_{1\pm 1/2} + N_2\Delta^2 x_{1\pm 1} + N_3\Delta^3 x_{1\pm 3/2} + N_4\Delta^4 x_{1\pm 2} + \dots \quad (322-1)$$

e sabendo que:

$$\Delta^2 x_{1\pm 1} = \Delta^2 x_1 + \Delta^3 x_{1\pm 1/2} \quad (322-2)$$

$$\Delta^3 x_{1\pm 3/2} = \Delta^3 x_{1\pm 1/2} + \Delta^4 x_1 + \Delta^5 x_{1\pm 1/2} \quad (322-3)$$

$$\Delta^4 x_{1\pm 1/2} = \Delta^4 x_1 + 2\Delta^5 x_{1\pm 1/2} + \Delta^6 x_1 + \Delta^7 x_1 \quad (322-4)$$

Então substituindo (322-2), (322-3) e (322-4) em (322-1), obtemos:

$$\begin{aligned}
 x_{i \pm n} = & x_i + u \Delta x_{i \pm 1/2} + N_2 (\Delta^2 x_i \pm \Delta^3 x_{i \pm 3/2}) + N_3 (\Delta^3 x_{i \pm 1/2} \pm \\
 & \pm \Delta^4 x_i + \Delta^5 x_{i \pm 1/2}) + N_4 (\Delta^4 x_i \pm 2 \Delta^5 x_{i \pm 1/2} + \Delta^6 x_i \pm \\
 & \pm \Delta^7 x_{i \pm 1/2}) + \dots \quad (322-5)
 \end{aligned}$$

E reescrevendo (322-5), obtemos:

$$\begin{aligned}
 x_{i \pm n} = & x_i + u \Delta x_{i \pm 1/2} + N_2 \Delta^2 x_i \pm N_2 \Delta^3 x_{i \pm 3/2} + N_3 \Delta^3 x_{i \pm 1/2} \pm \\
 & \pm N_3 \Delta^4 x_i + N_3 \Delta^5 x_{i \pm 1/2} + N_4 \Delta^4 x_i \pm 2 N_4 \Delta^5 x_{i \pm 1/2} + \\
 & + N_4 \Delta^6 x_i \pm N_4 \Delta^7 x_{i \pm 1/2} + \dots \quad (322-6)
 \end{aligned}$$

Colocando em evidência os  $\Delta^n x_i$  em (322-6), temos:

$$\begin{aligned}
 x_{i \pm n} = & x_i + u \Delta x_{i \pm 1/2} + N_2 \Delta^2 x_i + (\pm N_2 + N_3) \Delta^3 x_{i \pm 1/2} + (\pm N_3 + \\
 & + N_4) \Delta^4 x_i + (N_3 \pm 2 N_4 \Delta^5 x_{i \pm 1/2}) + \dots \quad (322-7)
 \end{aligned}$$

Finalmente, arrumando os coeficientes, obtemos a fórmula de GAUSS:

$$\begin{aligned}
 x_{i \pm n} = & x_i + u \Delta x_{i \pm 1/2} + G_2 \Delta^2 x_i + G_3 \Delta^3 x_{i \pm 1/2} + G_4 \Delta^4 x_i + \dots \\
 & \quad (322-8)
 \end{aligned}$$

onde

$$G_2 = N_2 = \frac{u(u \mp 1)}{2!} \quad ; \quad G_3 = (\pm N_2 + N_3) = \frac{u(u^2 - 1)}{3!}$$

$$G_4 = N_4 \pm N_3 = \frac{u(u^2 - 1)(u \mp 2)}{4!}$$

são os coeficientes da fórmula de GAUSS.

### 3.2.3. FORMULA DE 'STIRLING'

Separando na fórmula de GAUSS (322-8) as duas equações implícitas, chamadas de formas "forward" e "backward" pela nomenclatura usual (forward quando o índice fracionário é aditivo e backward quando subtrativo), somando-as e em seguida dividindo por dois, temos:

$$x_{1+n} = x_1 + \frac{u(\Delta x_{1+1/2} + \Delta x_{1-1/2})}{2} + S_2 \Delta^2 x_1 + S_3 \frac{(\Delta^3 x_{1+1/2} + \Delta^3 x_{1-1/2})}{2} + \frac{\Delta^3 x_{1-1/2}}{2} + S_4 \Delta^4 x_1 + \dots \quad (323-1)$$

fazendo agora as seguintes aproximações:

$$\Delta x_1 \approx \frac{(\Delta x_{1+1/2} + \Delta x_{1-1/2})}{2} ; \quad \Delta^3 x_1 \approx \frac{(\Delta^3 x_{1+1/2} + \Delta^3 x_{1-1/2})}{2} \text{ etc.}$$

temos a fórmula de STIRLING:

$$x_{1+n} = x_1 + u \Delta x_1 + S_2 \Delta^2 x_1 + S_3 \Delta^3 x_1 + \dots \quad (323-2)$$

onde os coeficientes  $S_2, S_3, S_4, \dots$  são os chamados coeficientes de STIRLING e são dados por:

$$S_2 = \frac{u^2}{2!} ; \quad 2S_3 = \frac{u(u^2 - 1)}{3!} ; \quad S_4 = \frac{u^2(u^2 - 1)}{4!} e$$

etc ...

Observamos que a fórmula de STIRLING é mais usada, na prática, do que as de NEWTON e GAUSS, pois é baseada nas diferenças centrais. O erro contido em STIRLING, segundo CONTE [9], é da mesma ordem que o de NEWTON, como podemos observar abaixo:

Erro de truncamento em NEWTON:

$$R_n(x) = \frac{u!}{(u-n-1)!(n+1)!} h^{n+1} x^{(n+1)}(\beta)$$

Erro de truncamento em STIRLING:

$$R_n(x) = \frac{(u+n/2)!}{(u+n/2-n-1)!(n+1)!} h^{n+1} x^{(n+1)}(\epsilon)$$

#### 3.2.4. OUTRAS

Existem outras fórmulas, além das apresentadas aqui, mas cuja dedução e apresentação mais detalhada fogem ao escopo deste trabalho. Algumas dessas outras fórmulas são: fórmula de EVERETT, BESSEL e LAGRANGE.

#### 3.3. DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

As expressões para as derivadas são obtidas à partir da derivação das fórmulas de interpolação. Escrevendo  $x(t)$  em função do fator interpolante  $u$ , definido por (3.20-1), temos que se

$$x(t) = x(t(u)), \text{ então}$$



$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \frac{du}{dt} \quad (330-1)$$

mas diferenciando (320-1):  $\frac{du}{dt} = \frac{1}{h}$ , pois  $u = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{t - t_0}{h}$

então

$$h \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \quad (330-2)$$

Utilizando uma das fórmulas de interpolação, por exemplo a de STIRLING (323-2):

$$x_u = x_1 + u \Delta x_1 + S_2 \Delta^2 x_1 + S_3 \Delta^3 x_1 + \dots \quad (330-3)$$

$$\frac{dx}{du} = \Delta x_1 + u \Delta^2 x_1 + \frac{(3u^2 - 1)}{12} \Delta^3 x_1 + \dots \quad (330-4)$$

Então, de (330-2) e (330-4) segue que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[\Delta x_1 + u \Delta^2 x_1 + ((3u^2 - 1)/12) \Delta^3 x_1 + \dots]}{h} \quad (330-5)$$

Para a derivada segunda, o processo é análogo. Diferenciando-se ambos os membros de (330-2) com relação a 't' e utilizando a regra da cadeia no segundo membro:

$$\frac{d}{dt} h \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{du} \Rightarrow \frac{hd^2x}{dt^2} = \frac{d}{du} \frac{dx}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{du^2} \frac{du}{dt} \quad (330-6)$$

Como  $\frac{du}{dt} = \frac{1}{h}$ , então:

$$\frac{h^2 d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x}{du^2} \quad (330-7)$$

E utilizando a fórmula de STIRLING, segundo o exemplo anterior, temos:

$$\frac{dx}{du} = \Delta x_1 + u \Delta^2 x_1 + \frac{(3u^2-1)}{12} \Delta^3 x_1 + \dots \quad (330-8)$$

$$\frac{d^2 x}{du^2} = \Delta^2 x_1 + \frac{u}{2} \Delta^3 x_1 + \dots \quad (330-9)$$

logo,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{h^2} [\Delta^2 x_1 + u \Delta^3 x_1 + \dots] \quad (330-10)$$

Que é uma das fórmulas de diferenciação de segunda ordem, visto que poderíamos ter utilizado qualquer uma das fórmulas de interpolação vistas anteriormente.

#### 3.4. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA E A FÓRMULA DA SOMA SEGUNDA

Neste tópico desenvolveremos primeiro a fórmula de integração dupla de diferença central, pois é a partir dela que, com algumas modificações, chegaremos à fórmula da Soma-

Segunda, também conhecida como fórmula de GAUSS-JACKSON.

Considerando:

$$x' = \frac{1}{h} \frac{dx}{du} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{1}{h^2} \frac{d^2x}{du^2} \quad (340-1)$$

Temos por integração que:

$$x'_{i+n} = x'_i + h \int_i^{i+n} x'' du \quad (340-2)$$

e

$$x_{i+n} = x_i + nhx'_i + h^2 \int_i^{i+n} \int_i^{i+n} x'' du^2 \quad (340-3)$$

Tomando o valor  $\Delta^2 x_i$  :

$$\Delta^2 x_i = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} \quad (340-4)$$

substituindo (340-3) em (340-4), com  $n=1$  e  $n=-1$ , ficamos com

$$\Delta^2 x_i = h^2 \left\{ \int_i^{i+1} \int_i^{i+1} x'' du^2 + \int_i^{i-1} \int_i^{i-1} x'' du^2 \right\} \quad (340-5)$$

Da mesma forma para  $\Delta x'_{i+1/2}$  como em (321-1):

$$\Delta x'_{i+1/2} = x'_{i+1} - x'_i \quad (340-6)$$

substituindo (340-2) em (340-6), com  $n=1$ , temos:

$$\Delta x'_{i+1/2} = h \int_i^{i+1} x'' du \quad (340-7)$$

Necessitaremos também das expressões das médias de  $\Delta x_i$

e  $\Delta x'_1$ , para isso sabemos que:

$$\Delta x_1 \approx \frac{\Delta x_{1+1/2} + \Delta x_{1-1/2}}{2} = \frac{x_{1+1} - x_{1-1}}{2} \quad (340-8)$$

substituindo (340-3) em (340-8), com  $n=1$  e  $n=-1$ :

$$2\Delta x'_1 = 2hx'_1 + h^2 \left\{ \int \int_1^{1+1} x'' du^2 - \int \int_1^{-1+1} x'' du^2 \right\} \quad (340-9)$$

Da mesma forma para  $\Delta x'_1$ :

$$\begin{aligned} 2\Delta x'_1 &\approx \Delta x'_{1+1/2} + \Delta x'_{1-1/2} = x'_{1+1} - x'_{1-1} = \\ &= h \left\{ \int_1^{1+1} x'' du - \int_1^{-1+1} x'' du \right\} \end{aligned} \quad (340-10)$$

Voltando à fórmula de STIRLING e escrevendo-a agora para a segunda derivada, temos:

$$\begin{aligned} x'' = x''_{1+n} = x''_1 + u\Delta x''_1 + \frac{u^2 \Delta^2 x''_1}{2} + \frac{(u^3 - u)\Delta^3 x''_1}{3!} + \\ + \frac{(u^4 - u)\Delta^4 x''_1}{4!} + \frac{(u^5 - 5u^3 + 4u)\Delta^5 x''_1}{5!} + \dots \end{aligned} \quad (340-11)$$

Assim, integrando (340-11) com relação à  $u$ :

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} x'' du = nx'_1 + \frac{1}{2} n^2 \Delta x''_1 + \frac{1}{3!} n^3 \Delta^2 x''_1 + \\ + \frac{1}{4!} (n^4 - 2n^2) \Delta^3 x''_1 + \frac{1}{5!} (n^5 - 5n^3) \Delta^4 x''_1 + \dots \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{6!} (n^6 - 15 \cdot 2n^4 + 12n^2) x''_1 + \dots \quad (340-12)$$

E integrando uma segunda vez:

$$\begin{aligned} \iint_1^{n+1} x'' du^2 &= \frac{1}{2} n^2 x''_1 + \frac{1}{3!} n^3 \Delta x''_1 + \frac{1}{4!} n^4 \Delta^2 x''_1 + \\ &+ \frac{1}{5!} (n^5 - 10 \cdot 2n^3) \Delta^3 x''_1 + \\ &+ \frac{1}{6!} (n^6 - 5 \cdot 2n^4) \Delta^4 x''_1 + \\ &+ \frac{1}{7!} (n^7 - 21 \cdot 2n^5 + 28n^3) \Delta^5 x''_1 + \dots \quad (340-13) \end{aligned}$$

Para  $n = 11$ ,

$$\begin{aligned} \iint_1^{11+1} x'' du^2 &= \frac{1}{2} x''_1 \pm \frac{1}{6} \Delta x''_1 + \frac{1}{24} \Delta^2 x''_1 - \frac{7}{360} \Delta^3 x''_1 - \\ &- \frac{1}{480} \Delta^4 x''_1 \pm \frac{37}{10080} \Delta^5 x''_1 + \dots \quad (340-14) \end{aligned}$$

Na equação (340-14) estão implícitas duas equações. Para se chegar à fórmula de  $\Delta^2 x_1$  ou fórmula de integração dupla de diferença central, fazemos a soma dessas duas equações implícitas e multiplicamos por  $h^2$ , conforme a equação (340-5).

Então:

$$\Delta^2 x_1 = h^2 \left\{ x''_1 + \frac{1}{12} \Delta^2 x''_1 - \frac{1}{240} \Delta^4 x''_1 + \frac{31}{60480} \Delta^6 x''_1 - \frac{289}{3628800} \Delta^8 x''_1 + \dots \right\} \quad (340-15)$$

Para iniciar o procedimento de integração dupla por este método, precisamos de uma equação auxiliar. Para se chegar a esta equação, segue-se os mesmos passos até à equação (340-12). Mudamos o valor de "n" para  $\pm 1$  e substituímos em (340-10), obtendo:

$$2\Delta x'_1 = 2hx' + h^2 \left\{ \frac{1}{3} \Delta x''_1 - \frac{7}{180} \Delta^3 x''_1 + \frac{37}{5040} \Delta^5 x''_1 - \dots \right\} \quad (340-16)$$

onde aproximamos  $\Delta x''_1$  pela média:

$$\Delta x''_1 \approx \frac{1}{2} (\Delta x''_{1+1/2} + \Delta x''_{1-1/2}) = \Delta x''_{1+1/2} - \frac{1}{2} \Delta^2 x''_1$$

e

$$\Delta^3 x''_1 \approx \frac{1}{2} (\Delta^3 x''_{1+1/2} + \Delta^3 x''_{1-1/2}) = \Delta^3 x''_{1+1/2} - \frac{1}{2} \Delta^4 x''_1, \quad \text{etc.} \quad (340-17)$$

Este tipo de método precisa, para a integração passo à passo, de duas fases distintas: a do Preditor e do Corretor. Como os próprios nomes já mostram, a primeira prediz valores que estão fora da tabela de diferenças finitas e a segunda corrige estes valores para serem usados na

equação (340-15). Existem mais detalhes deste método, mas que fogem ao escopo deste trabalho. Estabeleceremos então o método de GAUSS-JACKSON.

### 3.5. METODO DA SOMA-SEGUNDA (GAUSS-JACKSON)

Este método é baseado no método da Diferença Central, que por sua vez utiliza fórmulas de interpolação e que são fundamentadas na teoria das diferenças finitas.

O método da Soma Segunda possui uma diferença importante em relação aos outros métodos: " só quando os outros métodos utilizarem a fase Corretor pela segunda vez é que o GAUSS-JACKSON, como também é chamado, a utilizará pela primeira vez.

Normalmente podemos trabalhar uma vez apenas com o Preditor, pois a margem de erro, em comparação com os outros métodos, é pequena, de acordo com HERRICK [6].

Afirmamos acima que a fórmula de GAUSS-JACKSON é derivada da fórmula de integração dupla da Diferença Central, então, de (340-15):

$$\Delta^2 x_{i+1} = h^2 \left\{ x''_{i+1} + \frac{1}{12} \Delta^2 x''_{i+1} - \frac{1}{240} \Delta^4 x''_{i+1} + \frac{31}{60480} \Delta^6 x''_{i+1} - \frac{289}{3928800} \Delta^8 x''_{i+1} + \dots \right.$$

Colocando-se o operador  $\Delta^2$  em evidência:

$$\Delta^2 [x_{i+1}] = h^2 \Delta^2 \left[ \Sigma^2 x''_{i+1} + \frac{1}{12} x''_{i+1} - \frac{1}{240} \Delta^2 x''_{i+1} + \right. \\ \left. + \frac{31}{60480} \Delta^4 x''_{i+1} - \frac{289}{3928800} \Delta^6 x''_{i+1} + \dots \right] \quad (350-1)$$

onde em lugar de  $\Delta^{-2}$  foi escrito  $\Sigma^2$ .

Como temos o mesmo operador em ambos os lados, simplificamos obtendo:

$$x_{i+1} = h^2 \left[ \Sigma^2 x''_{i+1} + \frac{1}{12} x''_{i+1} - \frac{1}{240} \Delta^2 x''_{i+1} + \right. \\ \left. + \frac{31}{60480} \Delta^4 x''_{i+1} - \frac{289}{3928800} \Delta^6 x''_{i+1} + \dots \right] \quad (350-2)$$

Esta é a chamada fórmula da Soma Segunda ou fórmula de GAUSS-JACKSON. Este método, como o anterior, precisa de uma fórmula auxiliar para iniciar o procedimento. Esta fórmula auxiliar é formada da mesma maneira que a (350-2) só que partindo da (340-16), obtendo assim a seguinte equação:

$$x'_{i+1} = h \left[ \Sigma x''_{i+1} - \frac{1}{12} \Delta x''_{i+1} + \frac{11}{720} \Delta^3 x''_{i+1} - \right. \\ \left. - \frac{191}{60480} \Delta^5 x''_{i+1} + \frac{289}{3928800} \Delta^7 x''_{i+1} - \dots \right] \quad (350-3)$$

onde  $\Delta^{-1}$  foi substituído por  $\Sigma$ .

Com estas duas fórmulas e as fórmulas de recorrência seguintes:



$$\Delta^2 x''_{i \pm 1} = \Delta^2 x''_i - \Delta^3 x''_{i \pm 1/2}$$

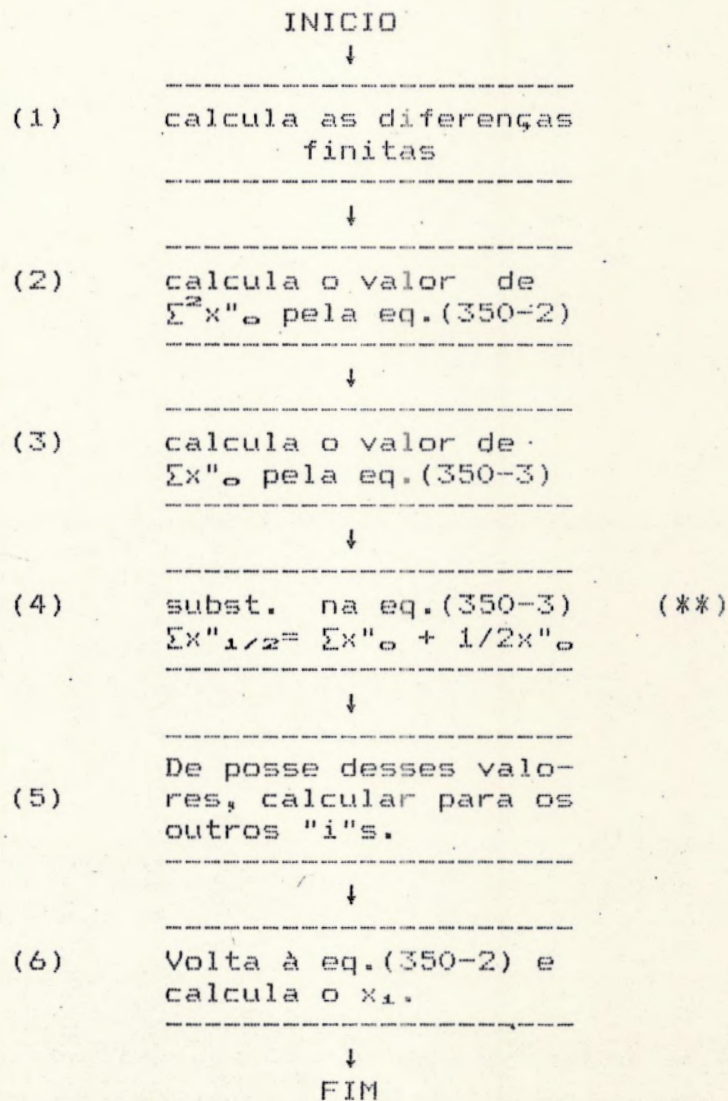
$$\Delta x''_0 \approx \frac{1}{2}(\Delta x''_{1/2} + \Delta x''_{-1/2})$$

$$\Delta^3 x''_0 \approx \frac{1}{2}(\Delta^3 x''_{1/2} + \Delta^3 x''_{-1/2})$$

$$\Delta^5 x''_0 \approx \frac{1}{2}(\Delta^5 x''_{1/2} + \Delta^5 x''_{-1/2})$$

podemos começar o procedimento de integração do método passo à passo.

No fluxograma abaixo é mostrado tal procedimento.



(\*\*). Este passo pode ser ignorado se modificarmos a equação (350-2), de tal forma que, ela passe a incluir esta relação.

Seguiremos com a explicação de cada passo do fluxograma:

i) Deve-se primeiro calcular o valor da função, no intervalo fechado, que se deseja integrar e construir uma tabela de diferenças finitas, base deste método.

ii) Substituindo o valor inicial  $x(t_0)$  em 350-2 no lugar de  $x_{i+1}$ , explicitamos  $\Sigma^2$  calculando o seu valor:

$$\Sigma^2 x_0 = h^{-2} x_0 - \frac{1}{12} x''_0 + \frac{1}{240} \Delta^2 x''_0 - \frac{31}{60480} \Delta^4 x''_0 + \dots$$

iii) Mesmo procedimento do item acima, só que, substituímos o  $x'_0$  na equação 350-3.

iv) Na realidade, quando plotamos a tabela de diferenças finitas, o valor de  $\Sigma x''_0$  não existe. Existe sim o de  $\Sigma x''_{1/2}$ , mas nós podemos substituir este valor por uma equação de recorrência:

$$\Sigma x''_{1/2} = \Sigma x''_0 + \frac{1}{2} x''_0$$

Após esta substituição, poderemos utilizar os valores iniciais de  $x_0$  e  $x'_0$  sem qualquer problema.

v) Através de fórmulas de recorrência e utilizando os valores de  $\Sigma^2 x''_0$ ,  $\Sigma x''_0$  e  $x''_0$ , calculamos  $\Sigma^2 x''_1$  e  $\Sigma x''_1$  para os demais valores do intervalo.

vi) Com os valores de  $\Sigma^2 x''$ ,  $\Sigma x''$ ,  $x''$  e das diferenças finitas, podemos construir, por exemplo, a seguinte tabela da função  $x(t) = t^2$ ,  $-3 \leq t \leq 3$  e suas diferenças:

$\Sigma^2 x''$	$\Sigma x''$	$x(t)$	$\Delta^1 x''$	$\Delta^2 x''$
6.008333		9.000000		
	-5.000000		-5.000000	
1.008333		4.000000		2.000000
	-1.000000		-3.000000	
0.008333		1.000000		2.000000
	0.000000		-1.000000	
0.008333		0.000000		2.000000
	0.000000		1.000000	
0.008333		1.000000		2.000000
	1.000000		3.000000	
1.008333		4.000000		2.000000
	5.000000		5.000000	
6.008333		9.000000		

tabela 350-1.

Neste caso estaríamos resolvendo a equação  $x'' = t^2$  numericamente. A tabela mostra os valores da  $x(t)$ , das suas duas primeiras diferenças  $\Delta^1$  e  $\Delta^2$  e de  $\Sigma^2 x''$  e  $\Sigma x''$ , que são valores auxiliares para o cálculo da integral segunda.

De posse dos valores da tabela, voltamos à equação (350-2) e calculamos o valor da integral segunda para cada valor de  $t$  pedido no intervalo de integração  $[-3,3]$ :

$t$	val. da integ. 2 <sup>a</sup>
-3	6.7500000219
-2	1.3333333428
-1	0.0833333354
0	-0.0000000004
1	0.0833333354
2	1.3333333428
3	6.7500000219

tabela 350-2

OBS. Se tivéssemos resolvido analiticamente o problema:

$x'' = t^2$ , com as condições iniciais  $x(0)=0$  e  $x'(0)=0$ ,

teríamos

$$x(t) = \frac{t^4}{12}$$

e os valores exatos desta integral nos pontos acima são dados na tabela abaixo.

t	Val. real da Integ 2 <sup>aa</sup>
-3	6.7500000000
-2	1.3333333333
-1	0.0833333333
0	0.0000000000
1	0.0833333333
2	1.3333333333
3	6.7500000000

tabela 350-3

Comparando os valores da tabela 350-3 com os valores da tabela 350-2, verificamos que estes estão bem próximos.

## CAPITULO 4

### RESULTADOS

Este trabalho conta efetivamente com resultados de dois programas: um que é voltado para o problema de dois corpos e outro voltado para o cálculo da integral segunda de funções contínuas e limitadas num intervalo limitado.

Neste capítulo serão apresentados estes resultados, considerando a ordem de programas mencionada acima. Posteriormente, estes resultados serão analisados.

Este primeiro programa foi feito para a integração de uma função específica, qual seja, a do problema de dois corpos na área de MECANICA CELESTE, em ASTRONOMIA. Este programa utiliza o programa posterior como sub-rotina, pois ele possui no seu corpo principal elementos específicos de ASTRONOMIA, tais como, excentricidade, semi-eixo maior da órbita, etc...

Para testar este programa, tomemos um exemplo de BROWER [1]. Trata-se de um planeta hipotético orbitando o SOL. Sua excentricidade é de 0.2 e o semi-eixo maior de sua órbita vale 2 u.a.(Unidades Astronômicas). No sistema de medidas utilizado em ASTRONOMIA, a massa do SOL igual à 1 e a massa do planeta igual à 0(desprezível).

A tabela auxiliar gerada pelo programa é bastante compatível com a gerada em BROWER [1], a menos de  $h^2$ , pois em BROWER [1], o passo  $h$  está embutido na função do problema ao invés de estar na fórmula do método. Mesmo assim, a

tabela abaixo, não possui os valores da integral segunda, e sim valores que entram no cálculo dos mesmos. O programa além de gerar a tabela, calcula os valores da integral segunda. Abaixo mostramos a tabela(400-1):

a)Tabela de BROWER [1], considerando a integração segundo a componente 'x', até a 1ª diferença:

t	$\Sigma^2x$	$\Sigma x$	x	$\Delta x$
-30			-109729	
				-3220
-20			-112949	
				-1975
-10			-114924	
				- 667
0	+1.6009638		-115591	
		- 57796		+ 667
10	+1.5951842		-114924	
		-172720		+1975
20	+1.5779122		-112949	
		-285669		+3220
30	+1.5493453		-109729	
		-395398		+4358
40	+1.5098055		-105371	
		-500769		+5360
50	+1.4597286		-100011	

tabela 400-1

Podemos notar que os valores de  $\Sigma^2x, \Sigma x, x$  e  $\Delta x$  foram multiplicados por uma potência de dez( $10^{-7}$ ) para facilitar a montagem da tabela .

Observamos que BROWER [1] nos dá os valores da tabela que denominamos tabela Auxiliar. Reproduzimos tal tabela e calculamos os valores da integral, os quais são apresentados no próximo item.

b) Tabela gerada pelo programa CORPOS, para a mesma variável:

t	$\Sigma^2 x$	$\Sigma x$	x
-30	154934579		-1097268
		2856678	
-20	157791257		-1129481
		1727197	
-10	159518455		-1149244
		577953	
0	160096407		-1155906
		- 577953	
10	159518455		-1149244
		-1727197	
20	157791258		-1129486
		-2856683	
30	154934575		-1097293

tabela 400-2

Também nesta tabela foi omitido o caráter não inteiro dos números e todos os valores foram multiplicados por  $10^{-6}$ . Como podemos observar as tabelas 400-1 e 400-2 são compatíveis.

Abaixo temos os valores calculados, pelo programa, da integral assumindo valores de sua própria tabela:

t	Val. Calc.	Val. real
-30	1.5484307928	1.54840810
-20	1.5769707013	1.57696599
-10	1.5942261723	1.59422574
0	1.6000001420	1.60000000
10	1.5942261731	1.59422603
20	1.5769706986	1.57697053
30	1.5484307259	1.54843054

O segundo programa é uma tentativa de se generalizar a aplicação do método. Para isso foram testadas as seguintes funções:

EXEMPLO 1)  $x(t) = \frac{1}{(1-t^2)}$ , com  $x_0 = 0$  e  $x'_0 = 0$ :

Como podemos constatar, esta possui dois pontos de descontinuidade  $-1$  e  $1$ . Restringiremos, então, a integração nos intervalos onde a função é contínua.

Seguem os valores obtidos:

a) Para o intervalo  $[-0.6, 0.6]$  e com passo de  $0.2$ :

t	Val. Calc.	Val. real
-0.6	0.1927837842	0.1927447468
-0.4	0.0822773147	0.0822829157
-0.2	0.0201358398	0.0201355107
0	0.0000000000	0.0000000000
0.2	0.0201358388	0.0201355461
0.4	0.0822773088	0.0822828934
0.6	0.1927837727	0.1927447319

b) Para o intervalo  $[-0.3, 0.3]$  e com o passo  $0.1$ :

t	Val. Calc.	Val. Real
-0.3	0.0457006958	0.0457005799
-0.2	0.0201354945	0.0201355070
-0.1	0.0050083678	0.0050083669
0	0.0000000000	0.0000000000
0.1	0.0050083678	0.0050083576
0.2	0.0201354945	0.0201354921
0.3	0.0457006958	0.0457005426



EXEMPLO 2)  $x(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ , com  $x_0 = -1$  e  $x'_0 = 0$  :

a) Para o intervalo  $[-3,3]$  com o passo de 1:

t	Val. Calc.	Val. Real
-3	2.3004342667	2.2930612564
-2	0.6574290071	0.6512026787
-1	-0.5278883928	-0.5328398943
0	-0.9999999974	-1.0000000000
1	-0.5278883928	-0.5328399539
2	0.6574290071	0.6512029171
3	2.3004342667	2.2930617332

b) Para o intervalo  $[-1.5,1.5]$  e com passo de 0.5:

t	Val. Calc.	Val. Real
-1.5	-0.0106977933	-0.0106306076
-1.0	-0.5327846213	-0.5328398943
-0.5	-0.8773690174	-0.8774281144
0	-0.9999999994	-1.0000000000
0.5	-0.8773690174	-0.8774281144
1.0	-0.5327846213	-0.5328399539
1.5	-0.0106977933	-0.0106306076

Os resultados do item (a) são menos precisos que os do item (b). Isto é devido ao erro de truncamento num dos casos ser maior que no outro.

EXEMPLO 3)  $x(t) = t^2 + 4t + 3$ , com  $x_0 = 0$  e  $x'_0 = 0$  :

a) Para o intervalo  $[-3,3]$ , com passo de 1:

t	Val. Calc.	Val. Real
-3	2.2499999996	2.2499980927
-2	1.9999999971	2.0000000000
-1	0.9166666662	0.9166666269
0	0.0000000070	0.0000000000
1	2.2500000194	2.2500000000
2	12.6666667035	12.6666669846
3	38.2500000592	38.2500038147

b) Para o intervalo  $[-5,5]$ , com o passo de 1:

t	Val. Calc.	Val. Real
-5	7.9166665430	6.2500228882
-4	4.0000000150	2.6666660309
-3	2.2499999996	2.2499980927
-2	1.9999999971	2.0000000000
-1	0.9166666662	0.9166666269
0	0.0000000070	0.0000000000
1	2.2500000194	2.2500000000
2	12.6666667035	12.6666669846
3	38.2500000592	38.2500038147
4	86.6666667532	88.0000000000
5	171.2500001188	172.9166259766

Devemos determinar o domínio da função a ser integrada de tal maneira que, o domínio da sua integral segunda seja compatível com o passo empregado para a sua integração.

A seguir, mostraremos a importância de se achar o intervalo e o passo certo para a integração de uma função. Consideremos a função:

EXEMPLO 4)  $x(t) = te^{2t}$ , com  $x_0 = -0.25$  e  $x'_0 = -0.25$  :

a) Para o intervalo  $[-3,3]$ , com o passo de 1:

t	Val. Calc.	Val. Real
-3	1.4006149316	-0.0024787528
-2	0.9129378821	-0.0137367295
-1	0.3862796010	-0.0676676407
0	-0.2500000025	-0.2500000000
1	-0.2753306954	0.0000000000
2	10.7523226914	13.6495370865
3	214.6689501830	201.7143554688

b) Para o intervalo  $[-1.5, 1.5]$ , com o passo 0.5:

t	Val. Calc.	Val. Real
-1.5	-0.0240392746	-0.0311169215
-1.0	-0.0631158739	-0.0676676407
-0.5	-0.1356827081	-0.1379548013
0	-0.2500000001	-0.2500000000
0.5	-0.3419602411	-0.3397852182
1.0	-0.0075886896	-0.0000000000
1.5	2.5232527179	2.5106918812

c) Para o intervalo  $[-0.75, 0.75]$ , com o passo de 0.25:

t	Val. Calc.	Val. Real
-0.75	-0.0975624594	-0.0976194516
-0.50	-0.1379240299	-0.1379548013
-0.25	-0.1895248823	-0.1895408332
0	-0.2500000000	-0.2500000000
0.25	-0.3091511052	-0.3091352582
0.50	-0.3398312383	-0.3397852182
0.75	-0.2800615278	-0.2801055610

Podemos notar grande diferença entre as tabelas acima.

A medida que diminuimos o intervalo e o passo, passamos a obter melhores resultados, isto sempre mantendo o valor central. Este valor é um dos valores iniciais necessários para se poder utilizar o método. Para quaisquer intervalos, os valores mais precisos são sempre os situados mais próximos deste valor central. Consequentemente, se diminuirmos o intervalo mantendo este valor sempre no centro, os resultados serão mais precisos; é como se estivéssemos desenvolvendo a solução em torno de um ponto que é, justamente, o valor inicial; estamos diminuindo o erro de

truncamento, pois passo pequeno em intervalo de integração grande aumenta o erro de arredondamento.

Para todas estas funções foram testados não somente estes intervalos, mas também outras variações de amplitudes e passos. Foi observado que para qualquer intervalo, a precisão diminui do centro para as extremidades do intervalo.

Se quisermos deslocar o intervalo, necessariamente teremos que ter novos valores iniciais, que por construção do programa, ficarão localizados no centro do novo intervalo.

Com relação à função do exemplo 4, se compararmos os valores correspondentes das tabelas dos itens (a) e (b), podemos notar uma grande variação entre tais valores. Por exemplo:

Para o valor de  $t=-1$ , temos que para o item (a) é aproximadamente 0,386 enquanto o valor correspondente para (b) é 0,063.

Essa discrepância de valores, em parte se deve ao fato desta função variar muito em intervalos pequenos. Como o método é baseado em diferenças finitas, esta variação é transmitida através dos valores das diferenças de maiores potências.

A seguir mostramos a tabela de diferenças finitas da função do exemplo 4, no intervalo  $[-3,3]$ :

$f(t)$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
-0.0074362583		0.0000000000		0.0000000000
	-0.0291950204		0.0000000000	
-0.0366312787		-0.0695089824		0.0000000000
	-0.0987040028		0.3035482666	
-0.1353352815		0.2340392843		6.7161333733
	0.1353352815		7.0196816400	
0.0000000000	$(\Delta x_1)$	7.2537209243	$(\Delta^3 x_1)$	80.1447817162
	7.3890562057		87.1644633561	
7.3890562057		94.4181842804		817.6999479979
	101.8072404861		904.8644113541	
109.1962966919		999.2825956345		0.0000000000
	1101.0898361206		0.0000000000	
1210.2861328125		0.0000000000		0.0000000000

tabela 400-3

Como no item (b) pegamos a metade do intervalo de (a), e a variação da função é bastante significativa à partir do valor extremo do intervalo em (b) e, neste caso, estamos nos aproximando cada vez mais do valor central, houve uma mudança significativa nos valores de  $t=-1$ .

Podemos entender melhor se olharmos para a equação (350-3):

$$\begin{aligned}
 x'_{i+1} = h \left[ \sum x''_{i+1} - \frac{1}{12} \Delta x''_{i+1} + \frac{11}{720} \Delta^3 x''_{i+1} - \right. \\
 \left. - \frac{191}{60480} \Delta^5 x''_{i+1} + \frac{289}{3928800} \Delta^7 x''_{i+1} - \dots \right] \quad (400-1)
 \end{aligned}$$

Notamos que, não existem os valores de  $\Delta x_1, \Delta^3 x_1, \dots$ , na tabela acima. Estes valores, como afirmamos no capítulo 3, são aproximados pela média dos valores consecutivos na mesma coluna de diferenças. Se esses valores nas diferenças de

potências mais elevadas, são muito grandes e como a contribuição dessa média na equação 400-1 deveria ser menor a medida que a potência das diferenças aumenta, observamos que este é um dos motivos que faz aumentar substancialmente o erro.

## CAPITULO 5

### CONCLUSAO

Recentemente novas técnicas foram desenvolvidas para se determinar a solução de equações diferenciais que governam o movimento de corpos no Sistema Solar sob a ação de forças gravitacionais mútuas. Alguns desses métodos foram testados e comparados no trabalho de FOX [4], e o método de GAUSS-JACKSON foi considerado o melhor quando o passo de integração é considerado constante. Daí o motivo da escolha deste método.

Assim como FOX [4], BROWER [1] e outros autores, um dos testes que utilizamos foi o problema de dois corpos, por se tratar de um problema no qual podemos contar com a solução analítica para comparação.

Foi testada empiricamente e aprovada a estabilidade do método, o que nos deu a confiabilidade dos resultados.

Ressaltamos a importância do programa, elaborado em linguagem MBASIC para ser utilizado em microcomputadores e cujos cálculos são feitos em dupla precisão, onde não só podemos obter os resultados finais da integração, mas também as tabelas de Diferenças Finitas da função a ser integrada e a Auxiliar, que visam ajudar o usuário à acompanhar o desenvolvimento do programa.

Introduzimos um modo de deslocar o intervalo de integração no eixo da variável. Este processo possui uma limitação importante, pois a medida que nos afastamos do

intervalo inicial, os erros aumentam devido ao fato de que os novos valores iniciais são calculados através do próprio programa, assim estes valores possuem todos os tipos de erro que o método e o próprio computador inserem nos mesmos.

Este processo pode ser repetido até que o erro obtido pelo programa seja aceitável pelo usuário.

Notamos que o método não pode ser aplicado indiscriminadamente à qualquer equação diferencial de segunda ordem com condições iniciais, principalmente para funções cuja variação seja muito grande considerando passo constante. O que de certa forma justifica a necessidade do desenvolvimento de muitos métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais, cada um viável à cada tipo ou família de funções ser integradas.



## APENDICE A

### OS PROGRAMAS

Neste projeto foram desenvolvidos 2 programas: um que integra funções contínuas e outro que integra a função do problema de dois corpos. O primeiro, exibe explicações iniciais às quais são suficientes para a utilização do mesmo.

Tanto o primeiro quanto o segundo programa fazem uma primeira integração através de valores que os próprios programas pedem como valores de entrada. Após esta 1<sup>ª</sup> integração (entenda-se como 1<sup>ª</sup> integração, o cálculo da integral 2<sup>ª</sup> da função definida no início do programa para o intervalo e o passo inicial) o programa exibe um menu no qual aparecem os seguintes itens:

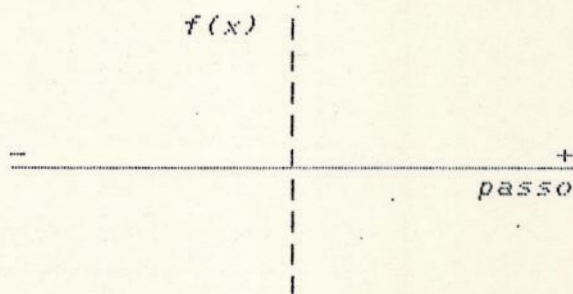
1. DESEJA OUTRA INTEGRAÇÃO?
2. DESEJA OUTRA INTERAÇÃO?
3. DESEJA ENCERRAR?
4. DESEJA RECOMEÇAR?

Para o item 1, o programa faz nova pergunta:

"DESEJA INTEGRAR NO SENTIDO POSITIVO?"

Esta pergunta tem a finalidade de determinar outro intervalo de integração com mesma amplitude e passo que o

anterior , só que, deslocado no sentido positivo ou negativo com relação ao sistema de coordenadas utilizado. Por exemplo:



O item (2) foi feito para a reprodução, didática, de uma tabela-exemplo de HERRICK [6]. Este item só é executável quando a equação que se deseja integrar for do tipo:

$$x'' = -x \quad (600-1)$$

O item 3 termina a execução do programa e o item 4 zera todas as variáveis e recomeça o mesmo.

Os programas são auto-explicativos. Eles exibem 2 tabelas antes de exibir o resultado final. A 1ª tabela é uma tabela de diferenças finitas da função a ser integrada. A segunda tabela contém valores que entram no cálculo da integral segunda e metade da tabela de diferenças finitas, para que o usuário tenha uma visão total dessas quantidades. Logo após apresentará os resultados da integração.

Para o 2º programa, não há necessidade de se definir a função, pois este programa é aplicado ao problema de dois corpos; conseqüentemente a função utilizada é a função que

rege este problema. Este programa também é auto-explicativo e possui as mesmas perguntas e menu que o primeiro.

É importante salientar, que os valores iniciais devem ser sempre referidos ao valor central do intervalo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Brower, D. ; Clemence, G. M..METHODS OF CELESTIAL MECHANICS, Academic Press, New York, 1961.
- [2] De Luca, N..MECANICA CELESTE, Editora da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 1982.
- [3] Fitzpatrick, P. M..PRINCIPLES OF CELESTIAL MECHANICS, Academic Press, New York, 1970.
- [4] Fox, K..NUMERICAL INTEGRATION OF THE EQUATIONS OF MOTION OF CELESTIAL MECHANICS, Celestial Mechanics, 33,127-142,1984.
- [5] Herrick, S..ASTRODYNAMICS, Vol 1, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.
- [6] Herrick, S..ASTRODYNAMICS, Vol 2, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1972.
- [7] Jackson, J.. NOTE ON THE NUMERICAL INTEGRATION OF  $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x,t)$ , Mon. Not. Roy. Astron. Soc.,84,602-606, 1924.
- [8] Sato, Massae. ANAIS DA V REUNIAO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MAT. APLICADA E COMPUTACIONAL E 3<sup>o</sup> SIMPOSIO DE ASTRONOMIA DINAMICA E MAT. APLICADA, 91-96, Rio Claro, S.Paulo, 1985.
- [9] Conte, S.D..ELEMENTOS DE ANALISE NUMERICA, Editora Globo, 3<sup>a</sup> edição, Porto Alegre, 1977.