



Análise do Acoplamento
Pressão-Velocidade em Problemas de
Convecção Natural

Fernando Maciel Motta

Projeto Final em Engenharia Química

Orientador

Prof. Luiz Fernando Lopes Rodrigues Silva, D.Sc.

Agosto de 2017

Análise do Acoplamento Pressão-Velocidade em Problemas de Convecção Natural

Fernando Maciel Motta

Monografia em engenharia química submetida ao Corpo Docente da Escola de Química, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Engenheiro Químico.

Aprovado por:

Fabio Pereira dos Santos, D.Sc.

Livia Flavia Carletti Jatobá, D.Sc.

Rodrigo Petrone dos Anjos, M.Sc.

Orientado por:

Luiz Fernando Lopes Rodrigues Silva, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Agosto de 2017

Motta, Fernando Maciel.

Análise do acoplamento pressão-velocidade em problemas de convecção natural/Fernando Maciel Motta - Rio de Janeiro: UFRJ/EQ, 2017

XI, 86 p.; il.

(Monografia) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola de Química, 2017.

Orientador: Luiz Fernando Lopes Rodrigues Silva

1. Fluidodinâmica Computacional. 2. Convecção Natural. 3. Acoplamento Pressão-Velocidade. 4. Monografia. (Graduação - UFRJ/EQ). 5.

Luiz Fernando Lopes Rodrigues Silva. I. Título

“Don’t Panic”

-Adams, Douglas

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família pelo apoio ao longo da minha vida.

Agradeço também aos meus amigos, tanto do tempo de colégio quanto os que adquiri ao longo da faculdade. Sem eles este processo teria sido muito mais penoso.

Por fim, agradeço ao meu orientador pelas suas contribuições para a minha formação e o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo da Monografia apresentada à Escola de Química como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Engenheiro Químico.

ANÁLISE DO ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE EM PROBLEMAS DE CONVECÇÃO NATURAL

Fernando Maciel Motta

Agosto, 2017

Orientador: Prof. Luiz Fernando Lopes Rodrigues Silva, D.Sc.

Resumo

Durante o processo de solução numérica de equações diferenciais parciais, duas das etapas mais importantes são a discretização das equações e a solução das equações acopladas de pressão e velocidade. Trabalhos recentes na literatura apontaram que a metodologia utilizada atualmente para resolver este sistema pode acarretar em problemas relacionadas ao tratamento do termo transiente. O presente trabalho busca analisar e implementar uma abordagem de discretização com correção temporal, visando remediar este problema. Como os problemas de convecção natural podem apresentar comportamento oscilatório, tendo portanto forte dependência temporal, estes foram os casos escolhidos para a implementação e os estudos de caso.

Conteúdo

Lista de Tabelas	ix
Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
1.1 Contexto e Motivação	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Estrutura do Texto	4
2 Fenômenos de Transporte	6
2.1 Princípios de Conservação	6
2.1.1 Conservação de Massa e Momento Linear	8
2.1.2 Conservação da Energia	14
2.2 Fenômenos de Transporte Aplicados à Convecção Natural . . .	17
2.2.1 Parâmetros Adimensionais	17

2.2.2	Aproximação de Boussinesq	19
3	Fluidodinâmica Computacional	22
3.1	Método dos Volumes Finitos	22
3.1.1	Discretização do domínio	22
3.1.2	Discretização das equações	24
3.2	Acoplamento pressão-velocidade	30
3.2.1	Formulação da Solução do Escoamento	31
3.3	Algoritmos Segregados	36
3.3.1	SIMPLE	36
3.3.2	PISO	39
3.3.3	PIMPLE	40
3.4	Algoritmos Acoplados	41
3.4.1	Formulação Matemática	42
3.5	Discretização do Problema de Convecção Natural	44
3.6	OpenFOAM	46
3.6.1	Convecção Natural no OpenFOAM	46
4	Metodologia	48
4.1	Introdução	48
4.2	Implementação Original	49

4.3	Implementação da Metodologia de Discretização com Correção Temporal	50
5	Caso de Validação	53
5.1	Descrição do Caso	53
5.2	Detalhamento Numérico	55
5.2.1	Caso com número de Rayleigh Elevado	59
6	Resultados	60
6.1	Teste de Malha	60
6.2	Comparação com Dados Experimentais	62
6.2.1	Componente da Velocidade na Direção x	63
6.2.2	Componente da Velocidade na Direção y	67
6.2.3	Componente da Velocidade na Direção z	69
6.3	Eficiência Computacional	72
6.4	Caso com Número de Rayleigh Elevado	73
6.5	Discussão	77
7	Conclusão e Sugestões para Trabalhos Futuros	79
	Bibliografia	81

Lista de Tabelas

5.1	Condições de Contorno no OpenFOAM	57
5.2	Condições Iniciais no OpenFOAM	57
5.3	Esquemas de discretização utilizados no OpenFOAM	58
6.1	Desempenho computacional das metodologias avaliadas.	73

Lista de Figuras

2.1	Representação da evolução temporal do volume de fluido $V_f(t)$ (HAUKE [12]).	7
2.2	Representação do volume de controle $V_c(t)$ (HAUKE [12]).	7
3.1	Exemplo de domínio discretizado (retirado de [36])	23
3.2	Arranjo com os nós centrados nos volumes (a) e com os nós nas arestas (b) (retirado de [34])	24
3.3	Parâmetros da discretização por volumes finitos (retirado de [36])	26
5.1	Representação do setup experimental com os planos de luz onde a captura de imagens é feita [27]	54
5.2	Representação da malha na horizontal, ilustrando a estrutura das divisões feitas no domínio e a orientação dos eixos	55
5.3	Representação da malha na vertical, com a nomenclatura utilizada para as regiões	56

6.1	Representação da reta ao longo do qual os resultados do teste de malha foram medidos.	61
6.2	Perfis obtidos no teste de malha.	62
6.3	Componente x da velocidade no plano horizontal central. . . .	64
6.4	Componente x da velocidade no plano horizontal inferior. . . .	65
6.5	Componente x da velocidade no plano horizontal superior. . . .	66
6.6	Componente y da velocidade no plano horizontal central. . . .	67
6.7	Componente y da velocidade no plano horizontal inferior. . . .	68
6.8	Componente y da velocidade no plano horizontal superior. . . .	69
6.9	Componente w da velocidade no plano horizontal central. . . .	70
6.10	Componente z da velocidade no plano horizontal inferior. . . .	71
6.11	Componente z da velocidade no plano horizontal superior. . . .	72
6.12	Vetores velocidade média no plano yz, com os resultados da metodologia original à esquerda.	74
6.13	Vetores velocidade média no plano xz, com os resultados da metodologia original à esquerda.	75
6.14	Valor Absoluto da Média Temporal da Velocidade, Medido em uma reta no centro do cilindro, ao longo de y	76

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contexto e Motivação

Quando em um fluido compressível existe um gradiente de temperatura, este induz um gradiente de densidade ao longo do fluido, já que a parcela mais aquecida tende a ficar mais leve. Este gradiente de densidade, por sua vez, gera um campo de velocidades no corpo do fluido devido à tendência do fluido mais leve de subir, devido às forças de empuxo [16, 42]. A este fenômeno do escoamento induzido pela diferença de temperatura dá-se o nome de convecção natural.

As aplicações da convecção natural são inúmeras, tanto na engenharia quanto cotidianamente. No cotidiano destacam-se o aquecimento da água no fogão, o aquecimento de ambientes através de radiadores, os escoamentos atmosféricos e marítimos que ocorrem na natureza, entre outros. Já no campo da engenharia, aplicações notáveis são a dissipação do calor em *chips* e circuitos eletrônicos, o projeto de sistemas de refrigeração e aquecimento,

a determinação dos perfis de temperatura em projetos de edificações e a dissipação de gases e poluentes em cenários de acidente, como incêndios ou explosões, além de emissões comuns geradas em indústrias.

Devido a esta ampla gama de aplicações, é importante obter uma modelagem adequada para que se possa fazer previsões acuradas dos perfis de temperatura e velocidade neste tipo de escoamento, além dos campos de concentrações em aplicações como dispersão de gases e poluentes, por exemplo. Este tipo de previsão é feito muitas vezes através de simulações de fluidodinâmica computacional (CFD) [28, 40]. Para tal, é necessário obter uma modelagem adequada da física do fenômeno, discretizar as equações deste modelo e resolvê-las através de algoritmos numéricos.

Para realizar simulações CFD, uma etapa fundamental é a escolha do algoritmo de solução a ser utilizado. A escolha do algoritmo, junto com o refinamento da malha, tem grande influência na qualidade da solução, em termos de acurácia e erro numérico [21]. Embora pareça natural escolher sempre o algoritmo que gera a solução mais acurada, há outros fatores que influenciam esta decisão. Em geral, os critérios para esta escolha são, além da acurácia, o esforço computacional e a convergência do método.

Muitas vezes, por exemplo, os esquemas mais acurados de discretização apresentam comportamento oscilatório e apresentam dificuldades para convergir [9]. Nestes casos, é comum utilizar um esquema que, embora menos acurado, seja mais estável, para garantir que não haja oscilações não físicas. Além disso, ao exigir muita precisão de procedimentos iterativos, normalmente o esforço computacional fica muito grande [9]. Desta forma, o que é feito é uma determinação dos termos da equação cuja acurácia é mais importante em cada caso e do nível de erro que será aceito na solução do problema.

Assim, ficam estabelecidas as tolerâncias utilizadas para a convergência do algoritmo [21] e é escolhido o algoritmo numérico, utilizando esquemas mais acurados para os termos que influenciam mais a solução. Por exemplo, em fenômenos com forte dependência temporal ou comportamento oscilatório, como a convecção natural ou problemas onde o domínio é móvel, o termo transiente tem grande influência na qualidade da solução, fazendo com que a acurácia de sua discretização seja muito importante ao tratar este tipo de fenômeno.

Alguns trabalhos recentes [23, 26] observaram que a forma usual de discretização e a formulação do acoplamento entre as equações em problemas fluidodinâmicos podem causar problemas na obtenção de resultados aplicados a problemas transientes em escoamentos incompressíveis isotérmicos. Neste caso, a metodologia de solução e suas etapas devem ser modificadas para incluir uma correção na evolução temporal das variáveis resolvidas. Neste trabalho, o foco é em estender a metodologia aplicada em [23] para problemas térmicos considerando a abordagem de Boussinesq para considerar os efeitos de empuxo. Como este é o caso de muitos cenários de convecção natural, a aplicação desta nova metodologia foi estudada nesta situação.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é analisar a metodologia de discretização com correção temporal aplicada ao problema de convecção natural. Mais especificamente, o trabalho consiste em desenvolver uma metodologia análoga à apresentada em [23]. O trabalho realizado em [23] apresenta uma forma de discretizar as equações de transporte com o termo temporal corrigido para

escoamentos incompressíveis isotérmicos. Neste trabalho foi desenvolvido e implementado um método similar, aplicado ao equacionamento da convecção natural. Em seguida esta metodologia foi implementada no pacote de fluidodinâmica computacional de código aberto OpenFOAM [22] e validada contra dados experimentais [27], tendo seu resultado comparado com o obtido pela metodologia original.

1.3 Estrutura do Texto

O presente trabalho trata da avaliação de mudanças na metodologia para a solução numérica das equações do problema de convecção natural. Assim, o texto começa com este capítulo introdutório e segue a estrutura mostrada a seguir.

Os Capítulos 2 e 3 juntos formam a revisão bibliográfica. No Capítulo 2 os fundamentos dos fenômenos de transporte são apresentados, com foco maior nos casos que serão tratados neste trabalho. Já no Capítulo 3 a metodologia para a discretização das equações do problema é apresentado, assim como os métodos de solução do acoplamento pressão-velocidade presente neste sistema. Além disso, uma introdução ao pacote CFD utilizado (OpenFOAM) é mostrada, com ênfase na metodologia de solução para problemas de convecção natural.

No Capítulo 4 foram apresentadas a forma original de discretização e acoplamento do equacionamento e a forma introduzida neste trabalho. Foi dada ênfase nas partes modificadas do algoritmo e em como isso afeta a solução.

No Capítulo 5 foram apresentadas as informações do caso que será usado para a validação e comparação das metodologias. As informações apresentadas aqui são tanto referentes à física do caso em si quanto aos detalhes numéricos da simulação.

No Capítulo 6 estão os resultados da comparação entre as duas metodologias numéricas e os dados experimentais.

O Capítulo 7 consiste na conclusão do trabalho e em sugestões para estudos futuros.

Capítulo 2

Fenômenos de Transporte

2.1 Princípios de Conservação

O processo para a obtenção das equações que regem um escoamento consiste basicamente na aplicação dos princípios de conservação de algumas grandezas específicas que são invariantes.

Para o escoamento não-isotérmico de um fluido genérico, as grandezas físicas analisadas são a massa, o momento linear, a energia e, em alguns casos, o momento angular. Desta forma, aplica-se o balanço destas grandezas, buscando obter um sistema de equações que descreva adequadamente o escoamento [12]. Para isso, são necessárias algumas definições preliminares. Volume de fluido, $V_f(t)$, é aquele que contém as mesmas partículas de fluido sempre, se movendo com velocidade \mathbf{u} . A evolução do volume de fluido com o tempo está ilustrada na Figura 2.1. Já o volume de controle, $V_c(t)$, é um volume arbitrário, que se move com velocidade \mathbf{u}^c . Um volume de controle está representado na Figura 2.2.



Figura 2.1: Representação da evolução temporal do volume de fluido $V_f(t)$ (HAUKE [12]).

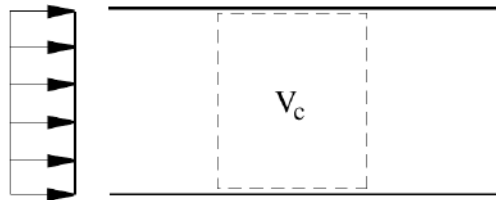


Figura 2.2: Representação do volume de controle $V_c(t)$ (HAUKE [12]).

Para generalizar a dedução das equações de conservação, define-se também a variável ϕ :

Definição. A variável $\phi(\mathbf{x}, t)$ representa a propriedade específica por unidade de massa relativa à grandeza que está sendo conservada.

Para uma propriedade específica qualquer ϕ , sua conservação em um volume genérico é dada pela seguinte integral [12].

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \phi(\mathbf{x}, t) dV$$

Para tratar esta integral, é necessário enunciar o teorema de transporte. que permite separá-la em dois termos.

Teorema do Transporte de Reynolds: Seja $V(t)$ um volume arbitrário com superfície $S(t)$, que se move com velocidade \mathbf{w} , e com normal $\hat{\mathbf{n}}$ exterior à superfície:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho\phi(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \rho\phi}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \rho\phi(\mathbf{x}, t) (\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS \quad (2.1)$$

Ao aplicar este teorema em um volume de fluido e um volume de controle, como o volume de controle é arbitrário, pode-se escolher um volume de controle que coincida com o volume de fluido em um dado instante de tempo e subtrair as expressões obtidas para cada um dos volumes, chegando à Equação 2.2 [12].

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho\phi(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho\phi(\mathbf{x}, t) dV + \int_{S_c(t)} \rho\phi(\mathbf{x}, t) [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^c) \cdot \hat{\mathbf{n}}] dS \quad (2.2)$$

2.1.1 Conservação de Massa e Momento Linear

A Equação 2.2 pode ser utilizada para se obter a formulação integral dos princípios de conservação. Sabe-se, pela definição de volume de fluido, que a massa em um volume de fluido, m_{V_f} , é constante.

$$\frac{dm_{V_f}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho dV = 0$$

Aplicando então a Equação 2.2:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho dV + \int_{S_c(t)} \rho [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^c) \cdot \hat{\mathbf{n}}] dS = 0 \quad (2.3)$$

O processo para obter o princípio de conservação integral para o momento linear é bastante similar. Partindo da segunda lei de Newton aplicada a um sistema de partículas discretas:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{u}_i = \sum \mathbf{F}_{ext} \quad (2.4)$$

onde \mathbf{F}_{ext} representa as forças externas que agem sobre o sistema. Como o sistema em questão é um fluido, o número de partículas tende a infinito e a massa no volume de fluido diferencial pode ser escrita como $m_i = dm = \rho dV$. Portanto:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{u}_i = \frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho \mathbf{u} dV \quad (2.5)$$

As forças externas que agem sobre um sistema fluido, ignorando a tensão superficial, são:

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \int_{S_f} \mathbf{f}_s dS + \int_{V_f} \rho \mathbf{f}_m dV \quad (2.6)$$

onde \mathbf{f}_s são as forças de superfície, que no caso em questão podem ser descritas pelo produto escalar do tensor tensão $\boldsymbol{\tau}$ com a normal exterior, $\hat{\mathbf{n}}$, e \mathbf{f}_m são as forças de campo presentes no problema. Substituindo estas expressões na Equação 2.5, chega-se a:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{S_f} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{V_f} \rho \mathbf{f}_m dV \quad (2.7)$$

Aplicando então a Equação 2.2, chega-se ao equacionamento aplicado ao volume de controle:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \mathbf{u} dV + \int_{S_c(t)} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^c) \cdot \hat{\mathbf{n}}] dS = \int_{S_c(t)} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{V_c(t)} \rho \mathbf{f}_m dV \quad (2.8)$$

Note que uma definição adequada da variável genérica ϕ permite transformar a sua equação de transporte nas equações referentes às propriedades conservadas. Por exemplo, para a conservação de massa a propriedade conservada é m . Assim, lembrando que ϕ é a propriedade conservada por unidade de massa, para chegar à conservação de massa utiliza-se $\phi = 1$. Já para a conservação de momento linear a propriedade conservada é $m\mathbf{u}$. Assim, a definição adequada para chegar à equação de transporte de momento linear é $\phi = \mathbf{u}$.

Considerando a formulação integral para uma propriedade genérica, pode-se obter a sua forma diferencial [12, 31]. Para uma propriedade genérica, ϕ , aplicada em uma equação de conservação generalizada:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \phi dV + \int_{S_c(t)} \rho \phi [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^c) \cdot \hat{\mathbf{n}}] dS = \int_{S_c(t)} \mathbf{t}_\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{V_c(t)} S_\phi dV \quad (2.9)$$

Aplicando o teorema de transporte ao lado esquerdo da equação:

$$\int_{V_c(t)} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV + \int_{S_c(t)} \rho \phi [\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}] dS = \int_{S_c(t)} \mathbf{t}_\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{V_c(t)} S_\phi dV \quad (2.10)$$

A conversão das integrais em superfície para volume deve ser realizada para padronizar todos os termos das equações. Para tal, faz-se uso do teorema de Gauss [37]. Para enunciar o teorema, é necessária uma definição preliminar.

Definição: Uma curva é dita C^∞ por partes se ela pode ser separada em intervalos onde cada intervalo é infinitamente diferenciável. Isto é, tem derivadas contínuas de todas as ordens.

Teorema de Gauss Seja V um subconjunto compacto de \mathbb{R} , com uma fronteira S , C^∞ por partes. Seja ainda \mathbf{F} um campo vetorial continuamente diferenciável definido em uma vizinhança de V . Então:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.11)$$

Aplicando o Teorema 2.11 à Equação 2.10:

$$\int_{V_c(t)} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV + \int_{V_c(t)} \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dV = \int_{V_c(t)} \nabla \cdot \mathbf{t}_\phi dV + \int_{V_c(t)} S_\phi dV \quad (2.12)$$

Equivalentemente:

$$\int_{V_c(t)} \left[\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{t}_\phi - S_\phi \right] dV = 0 \quad (2.13)$$

Como $V_c(t)$ é arbitrário, a integral do lado esquerdo da Equação 2.13 só pode ser nula se seu integrando for nulo. Isto implica:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{t}_\phi - S_\phi = 0 \quad (2.14)$$

que é a forma diferencial para a equação de conservação de uma propriedade genérica. Lembrando a definição de ϕ , pode-se então obter a formulação diferencial para as outras equações de conservação. Para a massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.15)$$

para o momento linear:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}) - \rho \mathbf{f}_m = 0 \quad (2.16)$$

Note que \mathbf{f}_m representa uma força por unidade de volume externa que age no fluido, frequentemente a gravidade, e que pode-se separar o tensor tensão em termos normais (pressão), p e tensões viscosas, $\boldsymbol{\tau}'$.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -p & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & -p & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & -p \end{bmatrix} = -p\mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & 0 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & 0 \end{bmatrix} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}'$$

Com isso, chega-se à Equação 2.17 para a conservação do momento linear.

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}') + \rho \mathbf{f}_m \quad (2.17)$$

Como os fluidos mais frequentemente estudados neste trabalho serão newtonianos e incompressíveis, pode-se tratar o tensor das tensões viscosas como [12]:

$$\boldsymbol{\tau}' = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}')^T$$

Para expressar a equação da forma mais usual, é necessário definir a viscosidade cinemática.

Definição. Sejam ρ a densidade do fluido e μ a sua viscosidade dinâmica. Sua viscosidade cinemática ν é então dada por:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Pode-se escrever então, considerando o fluido incompressível:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_m \quad (2.18)$$

Os detalhes desta demonstração podem ser encontrados em HAUKE [12] e PROSPERETTI [31]

2.1.2 Conservação da Energia

O processo para a obtenção da equação de conservação da energia parte da primeira lei da termodinâmica [12]:

$$\Delta E_{sistema} = W_{ext} + Q_{in} \quad (2.19)$$

onde $\Delta E_{sistema}$ é a variação de energia total no sistema, W_{ext} é o trabalho externo realizado sobre o sistema e Q_{in} é o calor adicionado ao sistema. Dividindo o balanço todo pelo intervalo de tempo e tomando o limite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta E_{sistema}}{\Delta t} = \frac{dE}{dt} = \dot{W}_{ext} + \dot{Q}_{in} \quad (2.20)$$

Para um substância compressível simples, as formas possíveis de energia são a energia interna (e) e a energia cinética ($u^2/2$). Assim, denotando por e_{tot} a energia total por unidade de massa [12]:

$$E = \int_{V_f} \rho e_{tot} dV = \int_{V_f} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) dV \quad (2.21)$$

O trabalho externo realizado é dado por [12]:

$$\dot{W}_{ext} = \int_{S_f} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS + \int_{V_f} \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{u} dV \quad (2.22)$$

Já o calor adicionado ao sistema é dado por [12]:

$$\dot{Q}_{in} = \int_{S_f} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V_f} \dot{q}_v dV \quad (2.23)$$

onde \mathbf{q} é o fluxo de calor através da superfície e \dot{q}_v é a taxa de produção de calor no interior do volume. Assim, para o volume de fluido [12]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) dV &= \int_{S_f} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS + \\ &\int_{V_f} \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{u} dV + \int_{S_f} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V_f} \dot{q}_v dV \end{aligned} \quad (2.24)$$

Manipulando o tensor tensão e aplicando o teorema de transporte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) dV + \int_{S_c} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^c) \cdot \mathbf{n}] dS = \\ \int_{S_f} (-p\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS + \int_{V_f} \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{u} dV + \int_{S_f} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V_f} \dot{q}_v dV \end{aligned} \quad (2.25)$$

Aplicando um argumento similar ao que foi feito para a equação de momento, é possível obter a conservação de energia em sua forma diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \mathbf{u} \right] = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \dot{q}_v + \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} \quad (2.26)$$

Através do processo descrito em BEJAN [3], é possível transformar esta equação para a sua formulação baseada na temperatura, T , em vez da energia total. Chega-se com isso à Equação 2.27

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q}_v + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi \quad (2.27)$$

Onde C_p é a capacidade térmica do fluido, k é a condutividade térmica do fluido, Φ é a dissipação viscosa de calor e β é o coeficiente de expansão térmica, dado por:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (2.28)$$

Na Equação 2.27, aparece a derivada substantiva, definida para uma propriedade genérica ϕ da seguinte forma:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \quad (2.29)$$

Na maior parte das aplicações a condutividade térmica do fluido é considerada constante e tanto a geração interna de calor no fluido quanto a dissipação viscosa de calor são consideradas desprezíveis, transformando a Equação 2.27 em:

$$\frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot \left(\frac{k}{\rho C_p} \nabla T \right) + \frac{\beta}{\rho C_p} T \frac{Dp}{Dt} \quad (2.30)$$

Denotando ainda $\frac{k}{\rho C_p}$ por κ :

$$\frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \frac{\beta}{\rho C_p} T \frac{Dp}{Dt} \quad (2.31)$$

2.2 Fenômenos de Transporte Aplicados à Convecção Natural

Nesta seção são discutidas as características dos problemas de convecção natural, começando pelos parâmetros que os definem. Em seguida são mostradas as implicações destas características no equacionamento, tratando em especial da aproximação de Boussinesq [6].

2.2.1 Parâmetros Adimensionais

Através da adimensionalização das equações que regem a convecção natural, é possível obter alguns números adimensionais que representam as características do escoamento. Os principais grupos adimensionais para este tipo de problema são o número de Grashof, o número de Rayleigh e o número de Prandtl [16].

Número de Prandtl Este grupo adimensional relaciona a viscosidade cinemática (que pode ser interpretada como uma difusividade de momento linear) com a difusividade térmica (α) do fluido [16]. Ou seja, para valores baixos do número de Prandtl, a difusividade térmica domina o problema, implicando que o calor se difunde mais rápido do que o momento linear [16]. Já para valores altos deste parâmetro adimensional o momento linear se difunde mais rápido do que o calor. Esta relação determina o tamanho das camadas limite térmica e de velocidade, tendo grande influência no comportamento do escoamento [4, 16]. Este parâmetro é dado pela Equação 2.32

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.32)$$

Número de Grashof Este parâmetro fornece uma medida da razão entre a força de empuxo e as forças viscosas que atuam no fluido [16]. Assim, para problemas de convecção natural, o número de Grashof determina as características do escoamento do fluido. O número de Grashof é dado pela Equação 2.33.

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2} \quad (2.33)$$

onde L é o comprimento característico do caso em questão.

Número de Rayleigh Este parâmetro indica o produto entre a razão das forças de empuxo com as forças viscosas e a razão da difusividade térmica com a difusividade de momento linear. O número de Rayleigh é dado pela Equação 2.34.

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha} \quad (2.34)$$

Note que o número de Rayleigh pode ser dado equivalentemente pelo produto do número de Prandtl pelo número de Grashof. Como o número de Prandtl só depende de características intrínsecas do fluido, o regime de escoamento pode ser avaliado tanto analisando o número de Grashof quanto o número de Rayleigh, de forma equivalente. Valores altos do número de Rayleigh implicam o surgimento de instabilidades fluidodinâmicas [16], significando comportamento oscilatório e a transição para o regime oscilatório.

Em contrapartida, valores baixos do número de Rayleigh significam um escoamento mais estável. No caso simples de placas planas, o Rayleigh crítico para a turbulência é da ordem de 10^9 [16].

2.2.2 Aproximação de Boussinesq

Ao estudar o fenômeno de convecção natural BOUSSINESQ [6] observou que na maior parte dos escoamentos induzidos por um gradiente de temperatura, as variações na densidade do fluido são muito pequenas. Contudo, mesmo estas pequenas variações de densidade são capazes de afetar o peso do volume de fluido, sendo a principal causa dos escoamentos de convecção natural. Desta observação surgiu a proposta de considerar desprezíveis as variações de densidade, exceto nos termos onde ela estiver multiplicada pela gravidade.

Além disso, a aproximação de Boussinesq estima que a relação da densidade com a temperatura pode ser dada por uma aproximação linear [4]. Para obter esta aproximação, assume-se que a variação na densidade é função unicamente da temperatura [4] e expande-se em série de Taylor em torno do ponto $T = T_0$ [33].

$$\rho(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{(n)}(T_0)}{n!} (T - T_0)^n \quad (2.35)$$

trunca-se então a série no segundo termo:

$$\rho(T) = \rho(T_0) + \frac{\partial \rho(T_0)}{\partial T} (T - T_0) \quad (2.36)$$

lembrando a Equação 2.28, pode-se reescrever 2.36 da seguinte maneira:

$$\rho(T) = \rho(T_0) - \rho(T_0)\beta(T_0)(T - T_0) \quad (2.37)$$

como em 2.37 β está sendo calculado em um ponto específico (T_0) devido à aproximação pela série de Taylor, β é uma constante nesta equação. Chegando assim à aproximação linear dada pela Equação 2.38.

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \quad (2.38)$$

com β sendo constante. Esta aproximação só é válida quando [4]:

$$\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \ll 1 \quad (2.39)$$

ou seja, quando a variação da densidade for muito pequena frente à densidade original.

Para um sistema compressível, foram obtidas nas Seções 2.1.1 e 2.1.2 as Equações 2.15, 2.17 e 2.31 para a conservação de massa, momento linear e energia, respectivamente. Aplicando a aproximação de Boussinesq a estas equações e considerando o fluido Newtoniano pode-se obter o seguinte sistema [10, 18, 38]:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \beta \mathbf{g}(T - T_0) = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.41)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (2.42)$$

A Equação 2.42 pode ainda ser expressa, expandindo a derivada material, pela Equação 2.43.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (2.43)$$

Capítulo 3

Fluidodinâmica Computacional

3.1 Método dos Volumes Finitos

3.1.1 Discretização do domínio

Todas as implementações feitas e códigos avaliados no presente trabalho serão baseados no OpenFOAM [22]. O OpenFOAM é um pacote de código aberto de fluidodinâmica computacional (CFD) baseado no método dos volumes finitos. Este método é muito bem documentado e descrições detalhadas dele podem ser encontradas em [8, 9, 21, 28, 30, 36, 40].

O método parte das equações de conservação e busca transformar o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema linear algébrico. Para isso o domínio de solução do problema é discretizado, isto é, subdividido em uma quantidade finita de pequenos volumes, chamados de volumes de controle. No caso de um problema transiente o domínio do tempo também precisa ser discretizado de forma similar.

Na solução de um problema utilizando CFD, a discretização espacial é representada pela etapa de geração de malha [9]. Na Figura 3.1 pode-se ver uma ilustração da primeira etapa do processo, a discretização dos domínios espacial e temporal:

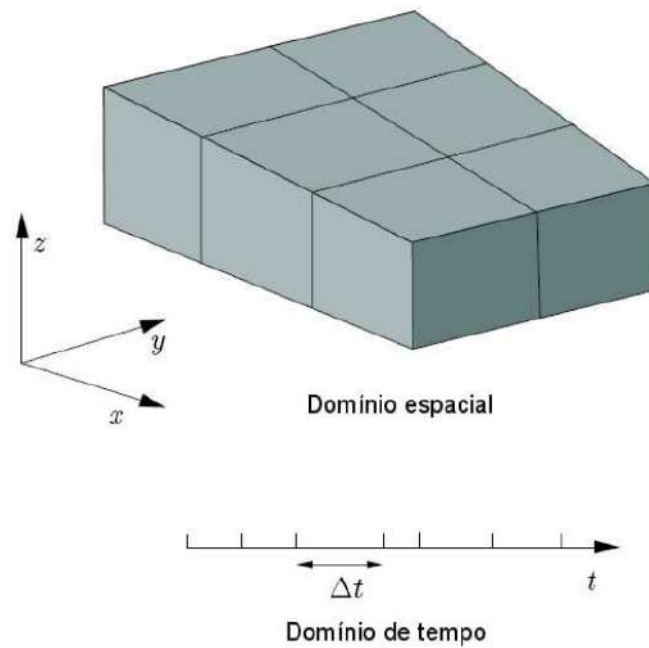


Figura 3.1: Exemplo de domínio discretizado (retirado de [36])

Na definição do domínio discretizado, é necessário optar por uma localização para os pontos nodais, isto é, os pontos onde as variáveis dependentes serão alocadas. A maioria dos códigos modernos de CFD, entre eles o OpenFOAM, usam o arranjo colocalizado, onde as variáveis são alocadas no centro dos volumes [11, 36]. Durante muito tempo este método foi deixado de lado devido aos problemas de estabilidade que ele gerava. Entretanto, com o surgimento do procedimento de Rhie-Chow de interpolação [32], a formulação

em arranjos colocalizados se tornou viável e mais adequada [8,36]. A Figura 3.2 mostra os dois tipos mais comuns de alocação de variáveis.

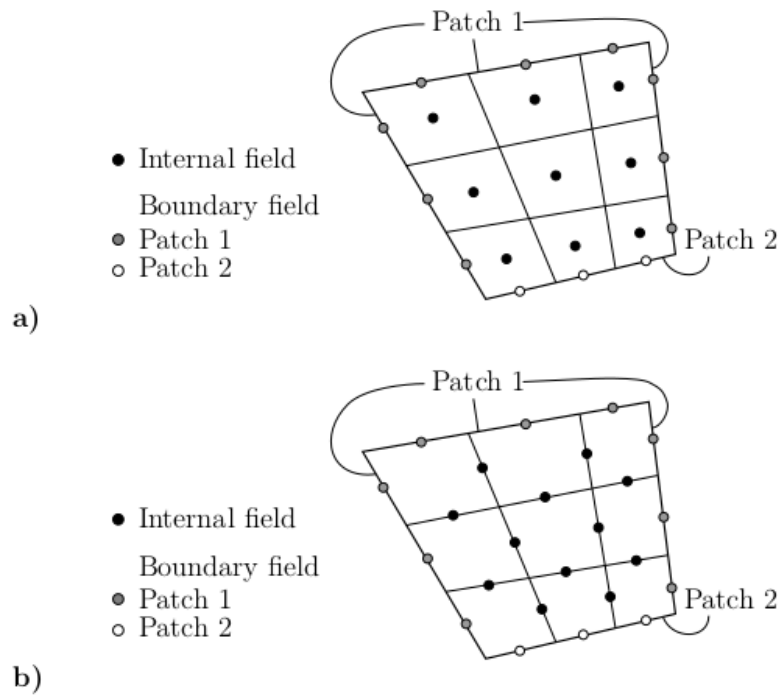


Figura 3.2: Arranjo com os nós centrados nos volumes (a) e com os nós nas arestas (b) (retirado de [34])

3.1.2 Discretização das equações

Tendo discretizado o domínio espacial e temporal, a próxima etapa consiste em aplicar processos de quadratura às equações de conservação e obter uma aproximação algébrica e linear para elas.

O desenvolvimento aqui será feito com a equação genérica de transporte para uma variável tensorial ϕ , mostrada na Equação 2.14.

O termo $\nabla \cdot \mathbf{t}_\phi$ da Equação 2.14 é referente à difusão da variável transportada ϕ . Por isso ele será expresso com base na dependência do fluxo difusivo proporcional ao gradiente de propriedade, seguindo o mesmo procedimento da Lei de Fourier [16] e de Fick [5]. Desta forma, o operador diferencial para a difusão pode ser escrito como $\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi)$, onde Γ é o coeficiente de difusão de ϕ . Além disso, o termo S_ϕ será tratado como um termo fonte genérico [21, 34, 36]:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) = S_\phi \quad (3.1)$$

O método dos volumes finitos aqui exibido é de segunda ordem e uma discussão mais detalhada de sua acurácia pode ser encontrada em JASAK [21]. Note que, embora em termos de acurácia seja ideal não utilizar esquemas de discretização com ordem menor do que a do método em si para evitar a introdução de difusão numérica [21], por vezes os métodos de segunda ordem são instáveis e apresentam comportamento oscilatório [9, 21]. Desta forma, em certas situações utiliza-se esquemas de discretização com ordem inferior à do método para estabilizar a solução com a introdução da difusão numérica [21].

No processo de discretização, os termos são obtidos em função de alguns parâmetros da malha. Estes parâmetros são definidos com o auxílio da Figura 3.3.

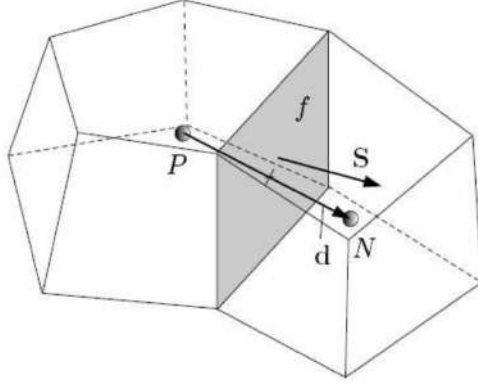


Figura 3.3: Parâmetros da discretização por volumes finitos (retirado de [36])

Na Figura 3.3, o volume P é o volume onde a discretização está sendo feita, enquanto o volume N é seu vizinho [36]. O vetor $\mathbf{d} = \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P$ liga os centros dos dois volumes em questão e tem módulo correspondente à distância entre os centros. O vetor \mathbf{S}_f é ortogonal à face f , tem magnitude igual à área desta face e aponta do volume P para o volume N . Define-se ainda o versor $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{S}_f}{|\mathbf{S}_f|}$, que é um vetor unitário e normal à face f . O volume de controle cujo centro é o ponto P é denotado por V_P .

Para discretizar a Equação 3.1, precisa-se integrá-la sobre um passo de tempo e um volume de controle, V_P .

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{V_P} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV + \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dV - \int_{V_P} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV \right] dt \quad (3.2)$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \int_{V_P} S_\phi(\phi) dV dt$$

O Teorema 2.11 é utilizado neste procedimento para transformar as inte-

grais volumétricas em integrais de superfície e o fluxo obtido é somado para cada face de forma a discretizar os termos espaciais.

A discretização do termo convectivo está descrita a seguir [21, 36]. Primeiro, utiliza-se o Teorema 2.11 para converter a integral volumétrica,

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dV = \int_{\partial V_P} (\rho \phi \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.3)$$

onde ∂V_P corresponde à superfície em torno do volume V_P . Em seguida utiliza-se uma função de interpolação M e o fluxo F na face, dado por 3.4, para obter o valor $\phi_f(F, M)$ das propriedades em cada face f com base no valor em cada um dos centros vizinhos à face.

$$F_f = \mathbf{S}_f \cdot (\rho \mathbf{u})_f \quad (3.4)$$

A partir daí, é feita a aproximação da integral de superfície assumindo um valor médio com base no centro de cada face e somando o valor de todas as faces. Vale notar que esta é a primeira aproximação numérica feita no método.

$$\int_{\partial V_P} (\rho \phi \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} \approx \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\rho \mathbf{u})_f \phi_{f(F,M)} = \sum_f F_f \phi_{f(F,M)} \quad (3.5)$$

De forma equivalente, pode-se obter a forma discretizada do termo difusivo [36]:

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \int_{\partial V_P} (\Gamma \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} \approx \sum_f \Gamma_f (\mathbf{S}_f \cdot \nabla_f \phi) \quad (3.6)$$

Para os termos fonte a abordagem é levemente diferente [21,36]. Tendo em vista que estes termos podem ser funções genéricas de ϕ , eles são linearizados expandindo-os em série de Taylor e truncando no segundo termo, antes do processo de discretização, conforme a Equação 3.7.

$$S_\phi(\phi) = S_I(\phi)\phi + S_E(\phi) \quad (3.7)$$

onde S_I é a parcela implícita do termo fonte e S_E é a sua parcela explícita, sendo que ambas podem depender de ϕ [21,36].

Ao integrar este termo no volume de controle analisado, V_P , obtém-se:

$$\int_{V_P} S_\phi(\phi)dV = S_I(\phi_P)\phi_P V_p + S_E(\phi_P)V_p \quad (3.8)$$

Assumindo que os volumes de controle não variam com o tempo, o termo transiente da Equação 3.2 se torna constante em cada volume de controle V_P [21]. Assim, a integração deste termo sobre o volume é dada pela Equação 3.9.

$$\int_{V_P} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV = \left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_P \int_{V_P} dV = \left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_P V_P \quad (3.9)$$

Ao aplicar este procedimento aos termos espaciais no volume de controle V_P , obtém-se a Equação 3.10 conhecida como a forma semi-discretizada da equação de transporte.

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_P V_P + \sum_f F \phi_f \right] dt \\
= & \int_t^{t+\Delta t} \left[\sum_f \Gamma_f \mathbf{S}_f \cdot \nabla_f \phi + S_I V_p \phi_P + S_E V_P \right] dt
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Cabe observar que dentro deste método, uma etapa essencial é a escolha do esquema de interpolação. Estes esquemas utilizam funções de interpolação baseados nos valores das propriedades no centro do volume analisado e seus vizinhos. Esta escolha é de enorme influência na solução adequada do problema, mas por uma questão de escopo não será abordada em detalhes neste trabalho, de forma que mais informações podem ser encontradas nas referências [8, 9, 21, 34, 36, 40].

Já para a derivada temporal, esquemas diferentes se aplicam. Existem principalmente os métodos de Euler e o método de Crank-Nicolson, que é de segunda ordem. Uma discussão destes métodos está disponível, entre outras referências, em [8, 21, 34, 36]. Se o processo da discretização for concluído utilizando o método de Euler implícito, por exemplo, chega-se à Equação 3.11 como produto final da discretização [34].

$$\rho_P \left(\frac{\phi_P^n - \phi_P^0}{\Delta t} \right) V_P + \sum_f F \phi_f^n = \sum_f \Gamma_f \mathbf{S}_f \cdot \nabla_f \phi^n + S_I V_p \phi_P^n + S_E V_P \tag{3.11}$$

Os valores das propriedades nas faces (ϕ_f e $\nabla_f \phi$) dependem dos valores ϕ_P e ϕ_N da variável no volume analisado e em seus vizinhos [21, 36]. Desta forma, a Equação 3.11 pode ser reescrita como uma equação algébrica para

o volume P [36], gerando a Equação 3.12.

$$a_P \phi_P^n + \sum_N a_N \phi_N = r_P \quad (3.12)$$

onde a_P são os coeficientes associados ao valor da variável no volume P, a_N são os coeficientes associados ao valor da variável no volume N e r_P é o termo explícito, sem dependência de ϕ .

3.2 Acoplamento pressão-velocidade

O objetivo dentro da fluidodinâmica computacional é, em geral, discretizar as equações de conservação. Para um sistema compressível, estas Equações são 2.15, 2.17 e 2.31, para a massa, o momento linear e a energia, respectivamente.

Nas Equações 2.15, 2.17 e 2.31 a densidade é associada à pressão pela equação de estado [35].

$$\rho = \rho(P, T) \quad (3.13)$$

No caso de escoamento incompressível, a densidade passa a ser constante. Desta forma, a sua dependência em relação à temperatura e à pressão deixa de existir. Com isso, a Equação 2.31 se torna independente do resto do sistema, podendo ser resolvida separadamente. O mesmo não é verdade para as equações de conservação de massa e momento linear, pois ambas dependem da velocidade e da pressão. Desta forma, estas equações precisam ser resolvidas de forma acoplada. Neste caso, pode-se simplificar as Equações

2.15 e 2.17, chegando às Equações 2.40 e 2.18, respectivamente.

3.2.1 Formulação da Solução do Escoamento

É necessário observar que, embora a princípio o sistema esteja bem determinado por ter 4 equações e 4 incógnitas, há dois problemas que requerem atenção para a solução. Primeiramente, tem-se o fato de que a equação do momento apresenta um termo não linear ($\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})$). Isto implica que o sistema discretizado não é linear. Além disso, a pressão e a velocidade estão acopladas, pois apresentam uma dependência implícita entre si.

Diante do primeiro problema há duas possibilidades: utilizar um método para solução de sistemas não-lineares ou tratar o termo em questão de forma iterativa. Dentre estas, a segunda alternativa em geral é preferida, devido ao seu menor custo computacional e do pequeno efeito no resultado final da simulação [21, 40]. Esta solução iterativa é feita da seguinte forma [35]:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \approx \nabla \cdot (\mathbf{u}^o \mathbf{u}^n) \quad (3.14)$$

Na Equação 3.14, \mathbf{u}^o é a solução disponível da iteração anterior ou uma estimativa inicial e \mathbf{u}^n é a solução a ser obtida na iteração atual do algoritmo.

Note que não há, com estas equações, uma forma explícita de calcular a pressão, já que não há uma equação independente para esta grandeza. As equações de conservação de momento linear permitem calcular o campo de velocidades, dado um gradiente de pressão. Entretanto, este campo não necessariamente satisfaz à conservação de massa, pois esta restrição está expressa somente na equação da continuidade [9, 21].

Para resolver este problema cria-se um campo de pressão que satisfaça necessariamente à conservação de massa. Isto é feito manipulando a equação da continuidade para obter uma equação explícita para o campo de pressão [35].

Retomando a Equação 3.12 e escrevendo-a considerando todos os volumes de controle da malha, é possível obter um sistema de equações algébricas.

$$\mathbf{A}\phi = \mathbf{r} \quad (3.15)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz esparsa, ϕ é o vetor das variáveis ϕ e \mathbf{r} é o vetor dos termos fonte. Os coeficientes da diagonal de \mathbf{A} são dados por a_P , enquanto que os coeficientes fora da diagonal são a_N . Na equação de momento linear, este procedimento transforma a Equação 2.18 na Equação algébrica 3.16, se o único termo fonte considerado for o gradiente de pressão.

$$\mathbf{A}_u \mathbf{u} + \nabla p = 0 \quad (3.16)$$

Note que o termo ∇p foi mantido em sua forma diferencial. Isto ocorre pois, no procedimento de solução não é necessário realizar esta operação, já que todas as ocorrências da pressão são dentro do operador gradiente. Ou seja, basta obter uma solução para o campo de ∇p . Multiplicando ambos os lados da Equação 3.16 pelo inverso do operador \mathbf{A}_u , pode-se obter uma equação com a velocidade isolada.

$$\mathbf{A}_u^{-1} \mathbf{A}_u \mathbf{u} + \mathbf{A}_u^{-1} \nabla p = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = -\mathbf{A}_u^{-1} \nabla p \quad (3.17)$$

Substituindo na Equação 2.40:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{A}_u^{-1} \nabla p) = 0 \quad (3.18)$$

Teoricamente o problema está resolvido, pois foi obtida uma equação explícita para a pressão. Entretanto, a inversão do operador \mathbf{A}_u pode gerar uma matriz densa, cuja solução é muito custosa. Como alternativa, o operador pode ser decomposto antes da inversão em:

$$\mathbf{A}_u = \mathbf{D}_u + \mathbf{L}\mathbf{U}_u \quad (3.19)$$

onde \mathbf{D}_u contém apenas os termos na diagonal principal de \mathbf{A}_u e $\mathbf{L}\mathbf{U}_u$ contém todos os termos fora da diagonal principal. Isto leva à seguinte formulação do sistema linear:

$$\mathbf{D}_u \mathbf{u} + \nabla p = -\mathbf{L}\mathbf{U}_u \mathbf{u} \quad (3.20)$$

Aplicando o mesmo procedimento feito anteriormente, chega-se à equação da pressão 3.21.

$$-\nabla \cdot (\mathbf{D}_u^{-1} \nabla p) = \nabla \cdot (\mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{L}\mathbf{U}_u \mathbf{u}) \quad (3.21)$$

Agora que uma equação para a pressão foi obtida, é necessário obter a formulação discretizada deste sistema. Analisando a equação 3.16 e considerando agora possíveis termos fonte, que serão denotados por \mathbf{r} , chega-se à Equação para o momento linear [35]:

$$\mathbf{A}_u \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{r} \quad (3.22)$$

Pode-se reescrever a Equação 3.22 para cada volume de controle V_P , de forma similar à Equação 3.12.

$$a_P \mathbf{u}_P + \sum_N a_N \mathbf{u}_N = \mathbf{r} - \nabla p \quad (3.23)$$

Para simplificar a notação, será introduzido o operador $\mathbf{H}(\mathbf{u})$, definido por:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{r} - \sum_N a_N \mathbf{u}_N \quad (3.24)$$

Segue então que:

$$a_P \mathbf{u}_P = \mathbf{H}(\mathbf{u}) - \nabla p \quad (3.25)$$

O que implica:

$$\mathbf{u}_P = \frac{1}{a_P} (\mathbf{H}(\mathbf{u}) - \nabla p) \quad (3.26)$$

Substituindo esta equação para \mathbf{u}_P , Equação 3.26, na Equação 2.40 para obter a equação da pressão:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{a_P} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{u})}{a_P} \right) \quad (3.27)$$

Pode-se aplicar ainda o procedimento de discretização visto na Seção 3.1.2 para completar a discretização dos operadores deste sistema linear [21]. O sistema dado pelas Equações 3.27 e 3.25 se torna então:

$$\sum_f \mathbf{S}_f \cdot \left[\left(\frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f \right] = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{u})}{a_P} \right)_f \quad (3.28)$$

$$a_P \mathbf{u}_P = \mathbf{H}(\mathbf{u}) - \nabla p \quad (3.29)$$

Além disso, pode-se obter uma equação para os fluxos em cada face:

$$F = \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{u}_f = \mathbf{S}_f \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{u})}{a_P} \right)_f - \left(\frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f \right] \quad (3.30)$$

Com as equações obtidas deste processo, se os campos usados nas equações são adequados, F precisa satisfazer a equação da continuidade.

Para resolver este sistema linear, há duas abordagens possíveis. A primeira delas seria resolvê-lo diretamente através da inversão da matriz do sistema. Este tipo de algoritmo, dito acoplado, passou muito tempo tendo seu uso e desenvolvimento restrito devido ao alto custo computacional. Entretanto, com os avanços recentes do poder de computação, estes algoritmos estão voltando à tona na comunidade científica [15, 19, 21, 23].

A alternativa são os chamados métodos segregados, clássicos e fundamentais em códigos CFD, onde as equações são solucionadas em sequência em um processo iterativo, onde necessita-se de uma estimativa inicial para o campo de velocidade, de forma a inicializar a simulação. Dentre eles se destacam os algoritmos SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC, PISO e PIMPLE [9, 40].

Nas próximas seções estes algoritmos serão abordados em um pouco mais de detalhe.

3.3 Algoritmos Segregados

Nos algoritmos chamados segregados, as equações são resolvidas de forma sequencial. Como as equações apresentam um acoplamento implícito, é necessário realizar um processo iterativo até que os campos de pressão e velocidade sejam consistentes entre si e convirjam.

3.3.1 SIMPLE

SIMPLE é um acrônimo para *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*. Se trata de um algoritmo proposto por Patankar e Spalding [29] em 1972. Este é o algoritmo padrão utilizado para problemas estacionários, sendo um algoritmo que é iterativo até a convergência dos campos. Apesar de ser usado para casos estacionários, este algoritmo apresenta numericamente um avanço temporal a cada iteração. Este avanço temporal, entretanto, não precisa refletir o tempo físico da simulação e usualmente é utilizado um passo de tempo alto, já que só há interesse na solução convergida do estado estacionário [9]. Este tipo de análise é dito pseudo-estacionário.

Além disso ele é formulado de forma que o acoplamento não é inteiramente resolvido em cada iteração, visto que soluções consecutivas apresentam uma grande variação. Isto é, os estados intermediários, antes da convergência não apresentam necessariamente compromisso com a solução final do problema, ou mesmo com uma solução que seja física [8, 9].

Para remediar este problema, utiliza-se os chamados fatores de relaxação. Estes fatores servem para reduzir a diferença entre o campo utilizado na iteração atual e o campo atualizado para a próxima iteração, de forma a tornar o algoritmo convergente [9].

O algoritmo consiste no seguinte procedimento [8, 9, 21, 29, 35]:

1. Para a iteração $n+1$, começa-se com os campos da solução da iteração n ou, no caso de $n = 0$, com uma estimativa inicial inicial.
2. Obtem-se uma aproximação do campo de velocidade \mathbf{u}^{n+1} resolvendo a equação do momento linear. Uma relaxação implícita desta equação é usada, com fator de relaxação α_u , de acordo com a equação:

$$\frac{a_P}{\alpha_u} \mathbf{u}_P^{n+1} = \mathbf{H}(\mathbf{u}) - \nabla p^n + \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} a_P \quad (3.31)$$

3. Calcula-se o novo campo de pressão, baseado no campo de velocidades. Isto é feito através da Equação 3.28.
4. Com estes campos atualizados, calcula-se o fluxo, que é conservativo por ser consistente com a equação da pressão. Este cálculo é feito pela Equação 3.30.
5. Recalcula-se os coeficientes de $\mathbf{H}(\mathbf{u})$.
6. A pressão é relaxada de acordo com a Equação 3.32.

$$p^{n+1} = p^n + \alpha_p(p^n - p^n) \quad (3.32)$$

onde p^{n+1} é a pressão que será utilizada para a predição de momento da próxima iteração, p^n é a pressão usada no preditor da iteração atual,

p^p é a solução da equação da pressão e α_p é o fator de relaxação da pressão.

7. Com estes novos campos como estimativa, o processo é repetido até a convergência. Isto é, até que os resíduos dos campos fiquem abaixo de um valor de tolerância estabelecido [9,13].

A determinação dos fatores de relaxação mais adequados varia muito de caso para caso, entretanto a matemática para a sua estimativa está descrita em FERZIGER [9].

Derivados do SIMPLE

Durante a derivação do algoritmo SIMPLE [8,9,21,29] o campo de velocidades não obedece necessariamente à conservação de massa. Por isso, o campo de pressão calculado em geral tem uma contribuição não-física, para equilibrar este erro no campo de velocidades.

Este problema torna o método divergente [9]. Desta forma, outros métodos foram desenvolvidos buscando uma forma de corrigir o campo de velocidade antes de utilizá-lo para obter o campo de pressão.

Note que uma boa escolha dos fatores de relaxação dentro do algoritmo SIMPLE original torna o método convergente e serve para contrabalancear esta deficiência. Apesar disso, outros métodos derivados dele apresentam uma aceleração na convergência introduzindo uma forma de corrigir o campo de velocidades.

Dentre estes métodos destacam-se o SIMPLEC [39] e o SIMPLER [28]. No método SIMPLEC, uma correção de velocidade é feita através de uma

média ponderada do valor deste campo nos nós vizinhos. Já no SIMPLER, ocorre primeiro uma abordagem idêntica ao SIMPLE, calculando a velocidade sem se preocupar com a continuidade, mas em seguida utiliza o campo de pressão calculado desta forma para atualizar o campo de velocidades para que este satisfaça a continuidade e usa este campo atualizado em uma nova correção de pressão.

3.3.2 PISO

Se trata de um algoritmo para escoamentos transientes, proposto por ISSA [17]. Sua sigla significa *Pressure Implicit with Splitting of Operators*. Ele consiste nos seguintes passos [9, 21]:

1. Inicializa-se o algoritmo com os valores do passo de tempo anterior ou, no caso do primeiro passo, com uma estimativa inicial.
2. Resolve-se a equação do momento usando o campo de pressão com o qual o algoritmo foi inicializado e obtém-se uma estimativa do campo de velocidade.

$$a_p \mathbf{u}_P^{n+1} = \mathbf{H}(\mathbf{u}) - \nabla p^n \quad (3.33)$$

3. Com o campo de velocidade obtido, utiliza-se a Equação 3.28 para calcular o novo campo de pressão.
4. Com a Equação 3.30 obtém-se um conjunto de fluxos que satisfazem à continuidade e são consistentes com o novo campo de pressões.

5. Com os novos campos e fluxos, atualiza-se explicitamente o campo de velocidades, de acordo com a Equação 3.29.
6. Usando este novo campo, corrige-se os coeficientes de $\mathbf{H}(\mathbf{u})$, retornando para o passo 3 e iterando o processo até a convergência.
7. Após a convergência, avança-se para o próximo passo de tempo, usando os campos convergidos como palpite inicial e itera-se o processo até o último passo de tempo.

Note que este algoritmo é bastante similar ao SIMPLE. A grande diferença é que o PISO tem um segundo passo de correção da velocidade, de forma a garantir uma solução do problema em cada passo de tempo e não necessitar de relaxação na pressão [9]. Por garantir uma solução consistente a cada passo de tempo, o PISO é próprio para problemas transientes. Entretanto, suas características fazem com que sua convergência dependa da utilização de um passo de tempo pequeno, visto que só é realizada uma correção da velocidade após o cálculo do campo de pressão [9, 13].

3.3.3 PIMPLE

O algoritmo PIMPLE é um híbrido entre o SIMPLE e o PISO [14]. Em sua essência, o algoritmo consiste na busca por um estado estacionário dentro de cada passo de tempo com o uso da relaxação, de forma similar ao SIMPLE. Tendo a solução estacionário dentro do passo de tempo, o algoritmo então avança no tempo. Para realizar isto, o algoritmo utiliza laços externos de correção para garantir a convergência das equações [13, 14]. Note que no PISO, há um processo iterativo dentro de cada passo de tempo que retorna

para a correção de pressão até que este campo esteja convergido. Os laços externos de correção do PIMPLE, por outro lado, inserem uma iteração além desta já presente no PISO. Estes laços levam o algoritmo de volta para o começo da solução do acoplamento pressão-velocidade e iteram até que todos os campos estejam convergidos.

Cabe notar que ao usar este algoritmo é preciso escolher o número de corretores externos, onde operar sem corretores é equivalente a utilizar o PISO. A vantagem deste algoritmo híbrido é permitir o uso de passos de tempo mais altos que o PISO, que em geral fica limitado pelo número de Courant [11, 14].

3.4 Algoritmos Acoplados

Resolver as equações de um sistema discretizado de forma individual, como nos algoritmos segregados, requer um acoplamento explícito das variáveis e, conseqüentemente, um método iterativo [19].

Pode-se observar este fato nas seções anteriores em que foi necessário elaborar uma equação para a pressão e iterar as soluções em todas as metodologias apresentadas, devido à interdependência dos campos que se buscava resolver.

A proposta da metodologia apresentada agora é resolver o acoplamento entre as equações de forma implícita. Isto implicaria obter uma matriz estruturada de todo o sistema de equações e resolver o sistema através de sua inversão [15, 19].

Esta abordagem apresenta diversas vantagens, de acordo com a litera-

tura [7, 15, 19]. Dentre elas pode-se destacar uma redução significativa no tempo para a obtenção da solução e uma maior estabilidade do algoritmo. Entretanto, esta abordagem foi deixada de lado por muito tempo devido ao maior custo computacional em termos de memória, que em máquinas antigas tornava este método inviável.

As principais metodologias de acoplamento no caso monofásico, que já estão implementadas, têm testes feitos na literatura comparando-as com as suas análogas segregadas [19, 20].

3.4.1 Formulação Matemática

O sistema resolvido em um procedimento segregado é dado por [15, 19]:

$$\mathbf{A}(y)x = a \quad (3.34)$$

$$\mathbf{B}(x)y = b \quad (3.35)$$

Neste equacionamento $\mathbf{A}(y)$ e $\mathbf{B}(x)$ são matrizes que têm dependência explícita das variáveis y e x , respectivamente. a e b são termos fonte.

Isto é equivalente a escrever, em forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(y) & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Entretanto, nesta formulação ainda há o acoplamento de forma explícita.

A idéia então é remover a dependência linear da variável não resolvida em cada uma das matrizes e adicionar um termo cruzado (fora da diagonal) que resolve esta dependência implicitamente.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{A}_y \\ \mathbf{B}_x & \mathbf{B}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Na Equação 3.37, \mathbf{A}' e \mathbf{B}' representam as matrizes $\mathbf{A}(y)$ e $\mathbf{B}(x)$ sem a dependência linear de y e x , respectivamente. Já \mathbf{A}_y e \mathbf{B}_x são as matrizes que resolvem implicitamente a dependência de y e x , respectivamente. Note que uma matriz cujos elementos são matrizes, como no lado esquerdo da Equação 3.37 é denominada como uma matriz de blocos.

Por isso, a estrutura de esparsidade da matriz de blocos não é afetada e continua sendo dependente somente da malha e da formulação matemática do problema. Isto facilita a abordagem para resolver o sistema linear em si.

Note que, ao expandir o sistema linear descrito por 3.37, cada termo só opera a variável da qual ele próprio depende.

$$\begin{cases} \mathbf{A}'(x) + \mathbf{B}_x(x) = a \\ \mathbf{A}_y(y) + \mathbf{B}'(y) = b \end{cases} \quad (3.38)$$

ou seja, a dependência cruzada entre as equações do sistema linear foi eliminada.

Ao considerar o sistema como uma matriz de blocos é natural reescrever o sistema da seguinte forma equivalente:

$$\mathbf{C}(\mathbf{z}) = \mathbf{c} \quad (3.39)$$

onde \mathbf{C} é dado [19], utilizando a notação tensorial [12], por:

$$\mathbf{C} = C_{i,j} = \begin{bmatrix} c_{i,j}^{a,a} & c_{i,j}^{a,b} \\ c_{i,j}^{b,a} & c_{i,j}^{b,b} \end{bmatrix}_{i,j} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{c} = c_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{z} = z_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Perceba que, embora esta formulação resolva o problema dos acoplamentos lineares entre as equações, ainda há o problema gerado pela não-linearidade do termo convectivo da equação de Navier-Stokes ($\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})$). Para este termo, a mesma abordagem iterativa feita na formulação segregada é mantida [19].

3.5 Discretização do Problema de Convecção Natural

Para resolver o problema proposto no presente trabalho, é necessário discretizar pelo método dos volumes finitos o equacionamento apresentado na Seção 2.2.2 para a convecção natural com a aproximação de Boussinesq. Ou seja, é preciso aplicar o procedimento apresentado na Seção 3.1.2 às Equações 2.40,

2.41 e 2.43.

No que diz respeito às equações da continuidade e de momento linear, o sistema referente ao problema de convecção natural é essencialmente idêntico ao tratado na Seção 3.2, à exceção de um termo fonte referente à temperatura na equação de momento. Este termo fonte será tratado explicitamente. Desta forma, pode-se aplicar o mesmo procedimento da Seção 3.2 e obter uma equação para a velocidade e uma equação para a pressão.

Fica faltando então a discretização da equação de transporte de temperatura, pois a densidade será atualizada explicitamente ao final de cada passo de tempo. Retomando então a Equação 2.43 e lembrando que, sejam ψ um escalar e \mathbf{v} um vetor [37].

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{v}) = \psi \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \quad (3.43)$$

pode-se, então, reescrever 2.43.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}T) - T \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (3.44)$$

mas, como 2.40 implica que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, a equação da energia se torna:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (3.45)$$

Aplicando então o método apresentado na Seção 3.1.2 e utilizando o método de Euler implícito, pode-se obter a equação discretizada.

$$\left(\frac{T_P^n - T_P^o}{\Delta t}\right) V_P + \sum_f F_f T_f - \sum_f \kappa \mathbf{S}_f \cdot \nabla_f T \quad (3.46)$$

3.6 OpenFOAM

Todas as simulações e desenvolvimentos realizados no presente trabalho foram feitos utilizando o OpenFOAM [22]. Trata-se de um pacote CFD de código aberto baseado na discretização por volumes finitos.

O pacote é desenvolvido em C++ e se aproveita da modularidade possibilitada pela estrutura de classes e templates para representar as equações discretizadas dos fenômenos de transporte de forma clara e legível. Devido a esta opção filosófica no desenvolvimento e à abertura do código, o OpenFOAM se apresenta como uma ferramenta atraente para o desenvolvimento pela comunidade de usuários e desenvolvedores de CFD. A estrutura do OpenFOAM é baseada em *solvers*, que são algoritmos implementados para aplicações específicas usando as classes e templates presentes no código base do OpenFOAM.

Atualmente o OpenFOAM está dividido em duas vertentes. Há uma vertente mantida pela empresa ESI e a vertente foam-extend, mantida pela comunidade, sobretudo pelo grupo do professor Hrvoje Jasak. Mais detalhes sobre o OpenFOAM podem ser encontrados em [21, 36].

3.6.1 Convecção Natural no OpenFOAM

O solver básico do OpenFOAM para problemas de convecção natural na versão *foam-extend-4.0* é o **boussinesqBuoyantFoam**. Se trata de um

solver simples para escoamentos laminares de convecção natural, utilizando a aproximação de Boussinesq. Este solver utiliza o algoritmo PISO para tratar o acoplamento pressão velocidade e trata a equação da energia separadamente após estabelecer os campos de pressão e velocidade em cada passo de tempo.

Alguns trabalhos recentes na literatura [23, 26] apontam um problema com a estrutura de implementação dos algoritmos de acoplamento pressão velocidade. O problema reportado é que ao gerar o operador $\mathbf{H}(\mathbf{u})$ utilizando o campo de velocidades interpolado disponível do passo de tempo anterior (u^o), o conjunto de dados utilizado envolve um campo de velocidades que não necessariamente satisfaz a continuidade, já que a continuidade só é garantida no processo de geração do fluxo.

Na abordagem original, este problema é resolvido através de uma correção *ad-hoc* que remove o divergente do campo de velocidade utilizado e adiciona a o divergente do fluxo do passo de tempo anterior. A princípio esta abordagem resolveria o problema, porém este processo de correção local gera problemas numéricos pois é difícil garantir que no momento da chamada da correção o fluxo do passo anterior e o campo de velocidades utilizado no operador sejam consistentes [23]. Além disso, em casos onde a malha do problema é móvel esta abordagem pode encontrar problemas pois o fluxo do passo de tempo anterior não necessariamente existe em todas as células, gerando problemas para o algoritmo.

Além disso, existe um problema similar que ocorre em problemas estacionários. Neste caso o que causa a inconsistência não é mais o passo de tempo, mas sim o fator de relaxação. Este tipo de problema não apresenta nenhuma correção na abordagem antiga do código.

Capítulo 4

Metodologia

4.1 Introdução

A solução proposta para o problema descrito na Seção 3.6.1 consiste em separar a equação da velocidade em uma parte só com o termo transiente e uma parte contendo os outros termos. Ao construir os operadores $\mathbf{H}(\mathbf{u})$ e \mathbf{A}_u , utiliza-se apenas a parcela que não contém o termo transiente, evitando assim chamar o campo de velocidades do tempo anterior.

Em seguida, o algoritmo PISO resolve normalmente a equação da pressão com este fluxo consistente gerado e, ao final, a velocidade é reconstruída com a contribuição de todos os termos.

4.2 Implementação Original

Nesta seção a implementação original será mostrada através das equações resolvidas pelo algoritmo. A implementação presente no foam-extend-4.0 começa criando a equação da velocidade com todos os termos. Ou seja, o algoritmo declara a Equação 3.29, sendo que, como se trata do problema de convecção natural, é necessário que esta equação seja equivalente a 2.41. Isto é, o termo de resíduos, r_P da Equação 3.12, precisa incluir o termo referente ao empuxo, $\beta \mathbf{g}(T - T_0)$ da Equação 2.41, gerando a Equação 4.1.

$$r_P = -\beta \times \mathbf{g} \times (T_P - T_0) \quad (4.1)$$

Em seguida, o *solver* resolve a Equação 3.29 no passo preditor de momento em sua forma completa, com a definição de $\mathbf{H}(\mathbf{u})$ levando em conta a Equação 4.1. Passado este passo, o *solver* entra no laço PISO de iterações, gerando os operadores a_P e $\mathbf{H}(\mathbf{u})$, dividindo-os para obter o campo de $\mathbf{H}(\mathbf{u})/a_P$. Em seguida, usando este campo, influenciado pelo campo de velocidades do passo anterior, que foi usado na solução do termo transiente da Equação 3.29 e na construção dos campos de a_P e $\mathbf{H}(\mathbf{u})$, gera o fluxo que será usado na solução da equação da pressão, Equação 3.28.

Na construção deste fluxo pela metodologia original, ocorre a correção *ad-hoc* citada na Seção 3.6.1. A Equação 3.30 fica, portanto, modificada.

$$F = \mathbf{S}_f \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{u})}{a_P} \right)_f - \left(\frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f \right] + \phi_f^{corr} \quad (4.2)$$

onde ϕ_f^{corr} é o termo de correção de fluxo, dado pela Equação 4.3.

$$\phi_f^{corr} = \phi_f^o - \mathbf{u}_f^o \cdot \mathbf{S}_f \quad (4.3)$$

A princípio esta correção não seria problemática. Entretanto, não há garantia de que o fluxo do tempo anterior chamado (ϕ_f^o) seja consistente com o campo de velocidades do tempo anterior (\mathbf{u}_f^o). Desta forma, a correção poderia estar introduzindo um erro adicional e propagando-o. Além disso, em casos com malha móvel não há sequer garantia de que o fluxo no tempo anterior exista para todas as faces existentes no tempo atual, gerando um problema ainda maior para o algoritmo [23].

Após este passo o *solver* entra no processo de solução da equação da pressão, Equação 3.28 e, ao acabar, gera o campo de fluxos com a Equação 3.30. Tendo gerado este campo de fluxos consistente, a velocidade é atualizada explicitamente com a Equação 3.29.

Tendo feito isso até a convergência, o algoritmo sai do processo iterativo do PISO, resolve a equação de transporte da energia, calcula explicitamente a densidade e conclui assim o passo de tempo, avançando para o próximo tempo.

4.3 Implementação da Metodologia de Discretização com Correção Temporal

A idéia da nova implementação proposta é construir os operadores da discretização de forma consistente, para eliminar a necessidade de uma correção *ad-hoc* do fluxo e manter toda a formulação consistente. Já no início do pro-

cesso, em vez de criar uma matriz com todos os operadores, a implementação nova cria duas matrizes separadas.

$$E_P^t = \rho_P \left(\frac{\mathbf{u}_P^n - \mathbf{u}_P^0}{\Delta t} \right) V_P \quad (4.4)$$

$$HU_P^t = \sum_f F \mathbf{u}_f^n - \sum_f \Gamma_f \mathbf{S}_f \cdot \nabla_f \mathbf{u}^n - S_I V_p \mathbf{u}_P^n - S_E V_P \quad (4.5)$$

No passo preditor de momento, é gerado um sistema equivalente à Equação 3.29 usando as duas equações geradas, resolvendo este passo para a equação com todos os operadores inclusos. O algoritmo cria então um campo de a_p^H sem utilizar a equação referente à derivada temporal. Isto significa que a Equação 3.12 é gerada utilizando apenas os operadores da Equação 4.5. O algoritmo entra então no processo iterativo PISO, onde da mesma forma cria um campo de $\mathbf{H}^H(\mathbf{u})$ utilizando somente os termos referentes à Equação 4.5. Estes campos são usados então para resolver a equação de pressão, gerando uma equação análoga à Equação 3.28.

$$\sum_f \mathbf{S}_f \cdot \left[\left(\frac{1}{a_P^H} \right)_f (\nabla p)_f \right] = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \left(\frac{\mathbf{H}^H(\mathbf{u})}{a_P^H} \right)_f \quad (4.6)$$

Note que, como os campos $\mathbf{H}^H(\mathbf{u})$ e a_p^H não têm qualquer influência de \mathbf{u}_P^0 , não foi necessário introduzir nesta metodologia qualquer correção para os campos gerados. Ao concluir o cálculo da pressão os fluxos são calculados utilizando ainda os campos sem influência temporal.

$$F = \mathbf{S}_f \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{H}^H(\mathbf{u})}{a_P^H} \right)_f - \left(\frac{1}{a_P^H} \right)_f (\nabla p)_f \right] \quad (4.7)$$

Tendo gerado os fluxos, a velocidade é reconstruída utilizando os campos de a_P e $\mathbf{H}(\mathbf{u})$ referentes às duas matrizes geradas (Equações 4.4 e 4.5).

$$\mathbf{u}_P = \frac{1}{a_P^H + a_P^t} (\mathbf{H}^H(\mathbf{u}) + \mathbf{H}^t(\mathbf{u}) - \nabla p) \quad (4.8)$$

onde a_P^t e $\mathbf{H}^t(\mathbf{u})$ são os campos gerados a partir da Equação 4.4. Tendo repetido este processo até a convergência, o algoritmo sai do processo iterativo do PISO, resolve a equação de transporte da energia, calcula explicitamente a densidade e conclui assim o passo de tempo, avançando para o próximo tempo.

Capítulo 5

Caso de Validação

5.1 Descrição do Caso

Para validar a modificação implementada no processo de solução, os resultados da simulação com a metodologia original e com a metodologia modificada apresentada neste trabalho foram comparados com dados experimentais para um caso teste. O caso teste escolhido foi o apresentado por NÚÑEZ *et al* [27].

O caso consiste em um cilindro vertical com razão de aspecto de 1.25. Especificamente o cilindro tem diâmetro de 16 milímetros e altura de 20 milímetros. A captura dos dados experimentais foi feita a partir de um sistema de câmeras PIV (*Particle Image Velocimetry*) em planos de luz conforme a Figura 5.1.

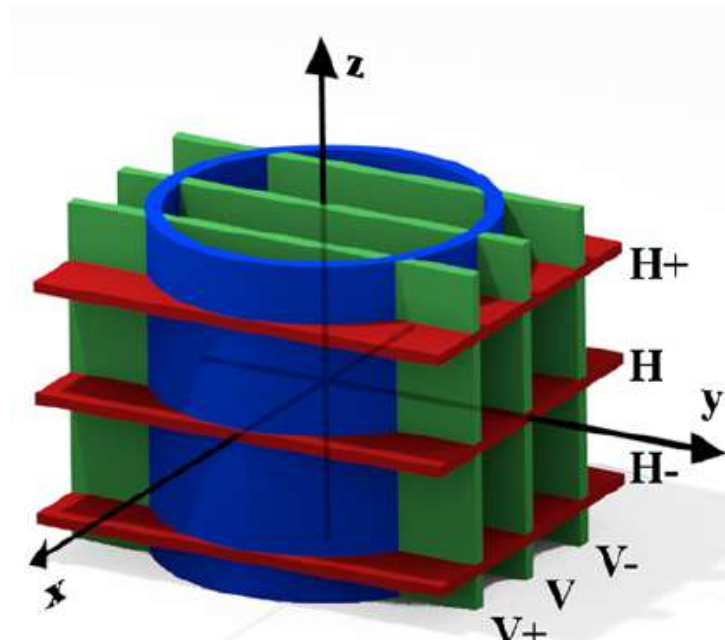


Figura 5.1: Representação do setup experimental com os planos de luz onde a captura de imagens é feita [27]

No interior deste cilindro está contida água. A parede inferior do cilindro é mantida a uma temperatura fixa mais alta, enquanto a parede superior é mantida a uma temperatura fixa mais baixa. Dentro do estudo experimental são considerados diferentes cenários de temperaturas e, conseqüentemente, números de Rayleigh [27]. Os resultados expostos e usados no presente trabalho são correspondentes a uma diferença de temperatura de $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ e um número de Rayleigh de 5.12×10^5 .

Neste cenário, o escoamento induzido pela diferença de temperatura atinge um perfil estacionário [27]. Assim, os dados utilizados para comparação quantitativa serão os perfis das componentes da velocidade no estado estacionário atingido.

5.2 Detalhamento Numérico

Para a simulação numérica do problema foi gerada uma malha estruturada com 5000 elementos. Para a determinação do número de elementos foi realizado um teste de convergência de malha, comparando malhas de 625, 5000 e 40000 elementos. A malha com 40000 elementos está ilustrada nas Figuras 5.2 e 5.3, com a nomenclatura de cada região indicada. Na Figura 5.2 estão indicados também os eixos do sistema de coordenadas do problema com sua orientação.

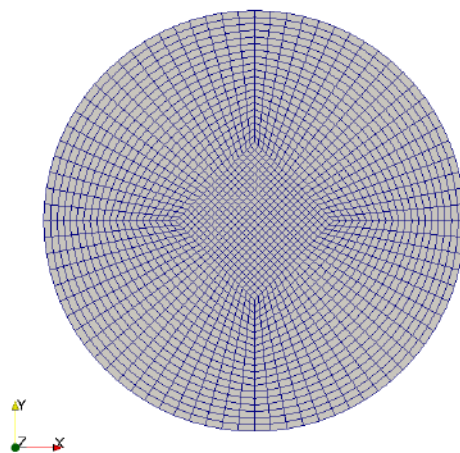


Figura 5.2: Representação da malha na horizontal, ilustrando a estrutura das divisões feitas no domínio e a orientação dos eixos

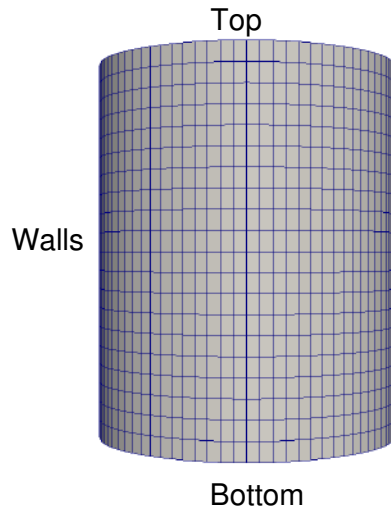


Figura 5.3: Representação da malha na vertical, com a nomenclatura utilizada para as regiões

As condições de contorno utilizadas para a temperatura foram de valor fixo para as duas paredes com temperatura controlada (*Top* e *Bottom*), em 298 K e 302 K , respectivamente. Para a parede lateral do cilindro foi usada uma condição de gradiente nulo ($\nabla T = 0$). Para a velocidade, em todas as paredes foi utilizada a condição de não escorregamento, isto é, valor fixo e igual a zero. Para a pressão foi utilizada a condição de gradiente nulo em todas as paredes. Na terminologia utilizada no OpenFOAM, estas condições estão resumidas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Condições de Contorno no OpenFOAM

	Top	Bottom	Walls
T	fixedValue 298	fixedValue 302	zeroGradient
U	fixedValue (0 0 0)	fixedValue (0 0 0)	fixedValue (0 0 0)
p	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient

Os campos do problema foram inicializados uniformemente. A temperatura teve como condição inicial o valor da parede fria ($298K$), enquanto que a velocidade e a pressão foram inicializados com valor nulo. Estas condições iniciais estão resumidas na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Condições Iniciais no OpenFOAM

	Inicial
T	uniform 298
U	uniform (0 0 0)
p	uniform 0

Na escolha dos esquemas de discretização, buscou-se utilizar esquemas de segunda ordem e alta resolução [9]. Esta escolha se baseou no objetivo de capturar adequadamente os perfis de velocidade gerados, minimizando a difusão numérica [9], mas, ao mesmo tempo, buscando um esquema estável para a simulação. As escolhas de esquema para a discretização de cada operador estão descritas na Tabela 5.3. Para garantir que eventuais diferenças no resultado sejam devidas unicamente à mudança na implementação, os esquemas utilizados foram os mesmos para ambas as simulações.

Tabela 5.3: Esquemas de discretização utilizados no OpenFOAM

	Esquema
ddtSchemes	CrankNicolson 0.9
gradSchemes	Gauss linear
divSchemes	Gauss Minmod
laplacianSchemes	Gauss linear corrected
interpolationSchemes	linear
snGradSchemes	linear

O *solver* estudado é inerentemente transiente. Entretanto, o caso escolhido para a validação atinge um estado estacionário. Desta forma, há a necessidade de estabelecer um critério para determinar se a solução calculada atingiu o estado estacionário no passo de tempo atual. Isto foi feito utilizando um critério de diferença de velocidade entre dois passos de tempo consecutivos, considerando o estado estacionário atingido se a diferença máxima de velocidade for menor ou igual a 10^{-6} m/s. Ou seja, considerou-se que a solução atingiu o estado estacionário se:

$$\max_i |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^o| \leq 10^{-6} \quad (5.1)$$

onde o índice i corre por todos os pontos da malha e \mathbf{u}^o representa a velocidade no passo de tempo anterior ao atual.

5.2.1 Caso com número de Rayleigh Elevado

Em problemas de convecção natural, o número de Rayleigh está associado ao surgimento de instabilidades no escoamento [16]. Desta forma, a dependência temporal em escoamentos com alto Rayleigh é mais forte. Portanto, espera-se que as diferenças entre os resultados obtidos pelas duas metodologias sejam maiores neste tipo de escoamento.

Para testar esta hipótese, foi executado mais um caso, representando a mesma física, mas com número de Rayleigh mais elevado. Este aumento do número de Rayleigh foi obtido através da mudança na diferença de temperatura entre as paredes. No caso original, a temperatura das paredes difere em 4 °C. Neste novo caso proposto a diferença de temperatura é de 80 °C. Esta mudança implica um número de Rayleigh de 1.024×10^7 .

Capítulo 6

Resultados

6.1 Teste de Malha

A primeira etapa da validação consiste de um estudo de convergência em malha, com o objetivo de mostrar a partir de qual número de elementos o resultado obtido deixa de variar, dentro de um critério estabelecido. Tendo realizado este teste, fica caracterizada a independência do resultado obtido em relação à malha e a menor malha que gere um resultado dentro do critério é utilizada para a simulação do caso.

Foram testadas malhas com 625, 5000 e 40000 elementos neste trabalho. Tomando como base o teste de malha realizado por NÚÑEZ *et al* [27], a grandeza avaliada no teste de malha foi o módulo da velocidade ao longo de uma linha no cilindro, centralizada nos eixos y e z e percorrendo o eixo x , conforme a Figura 6.1. Os resultados estão expostos na Figura 6.2. Na Figura 6.2, a curva com legenda U_5 representa o perfil obtido com a malha de 625 elementos, a curva com legenda U_10 representa o perfil obtido com

a malha de 5000 elementos e a curva com legenda U_{20} representa o perfil obtido com a malha de 40000 elementos.

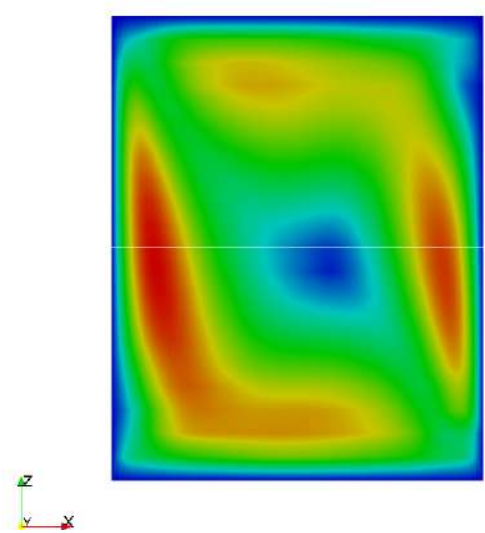


Figura 6.1: Representação da reta ao longo do qual os resultados do teste de malha foram medidos.

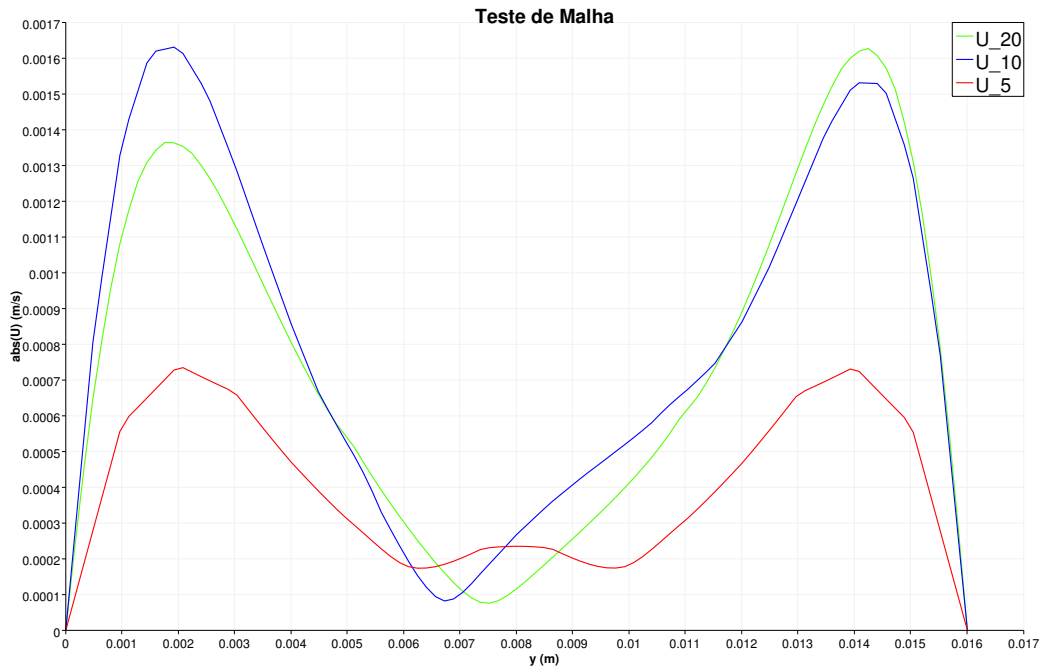


Figura 6.2: Perfis obtidos no teste de malha.

A diferença entre os perfis obtidos para as malhas de 5000 elementos e 40000 elementos foi considerada pequena e suficiente e, portanto, a malha com 5000 elementos foi utilizada.

6.2 Comparação com Dados Experimentais

Para validar a modificação na metodologia de discretização do termo transiente, foram comparados os valores obtidos para cada componente da velocidade em diferentes pontos da malha. Este dado experimental está disponível no estudo feito por NÚÑEZ *et al* [27]. Os pontos de medida para a velocidade na malha são os planos horizontais $\mathbf{H-}$, \mathbf{H} e $\mathbf{H+}$, conforme a Figura

5.1.

Em todos os gráficos desta seção a linha contínua azul indica o resultado obtido com a metodologia originalmente implementada no OpenFOAM, com a nomenclatura de “ $U_i\text{-OF}$ ” na legenda das figuras, a linha contínua vermelha representa o resultado obtido utilizando a metodologia com correção temporal implementada no presente trabalho, com a nomenclatura de “ $U_i\text{-modificado}$ ” na legenda das figuras e os pontos pretos indicam os dados experimentais, com a nomenclatura de “ $U_i\text{-exp}$ ” na legenda das figuras. Nesta descrição o índice i se refere à componente da velocidade analisada.

6.2.1 Componente da Velocidade na Direção x

Na Figura 6.3 estão representadas ambas as soluções numéricas para a componente da velocidade em x e os dados experimentais, todos ao longo do eixo y , medidas no plano horizontal central \mathbf{H} . Note que, em todos os casos, os dados experimentais têm um domínio ligeiramente maior do que o tamanho do cilindro, onde os valores medidos são sempre zero. Isto se deve à metodologia experimental, que utiliza um plano de luz que acaba por exceder o domínio físico.

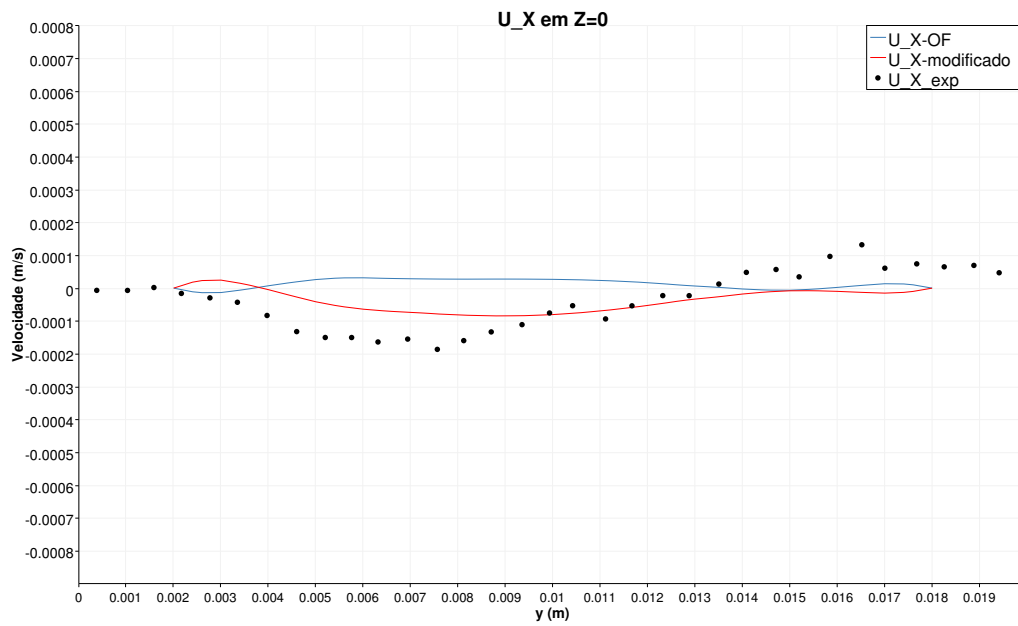


Figura 6.3: Componente x da velocidade no plano horizontal central.

Na Figura 6.4 estão os resultados comparados para a componente x da velocidade, medidos no plano horizontal inferior **H**.

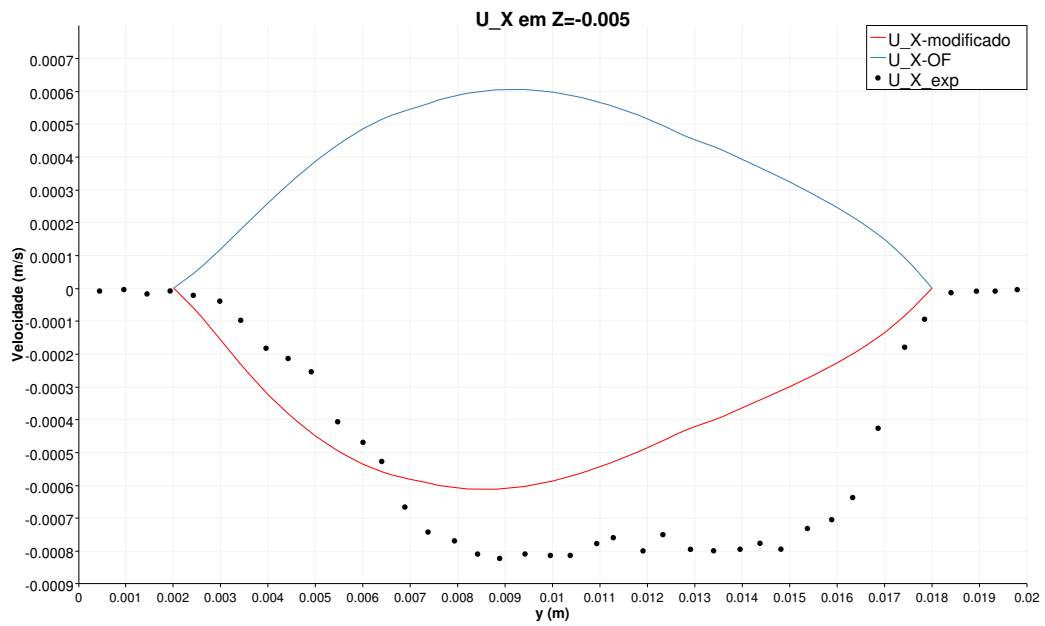


Figura 6.4: Componente x da velocidade no plano horizontal inferior.

Na Figura 6.5 estão os resultados comparados para a componente x da velocidade, medidos no plano horizontal superior $\mathbf{H}+$.

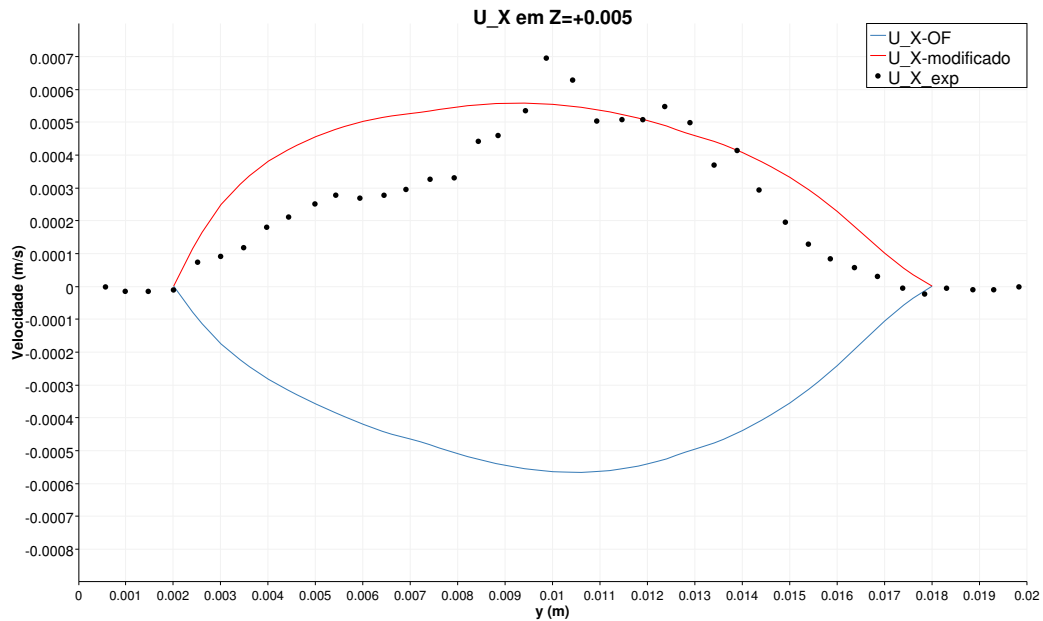


Figura 6.5: Componente x da velocidade no plano horizontal superior.

Na Figura 6.3 nota-se que o comportamento obtido com a metodologia com a correção temporal se aproximou mais dos dados experimentais, sobretudo capturando o comportamento de descida observado para valores baixos de y , que o resultado obtido pela metodologia numérica original não apresentou. Nas Figuras 6.4 e 6.5 o resultado obtido com a metodologia implementada neste trabalho capturou o comportamento qualitativo dos dados experimentais, enquanto que a metodologia original registrou o comportamento inverso. Vale notar que os perfis obtidos são muito parecidos, porém estão espelhados.

6.2.2 Componente da Velocidade na Direção y

Na Figura 6.2.2 estão os resultados comparados para a componente y da velocidade, medidos no plano horizontal central **H**.

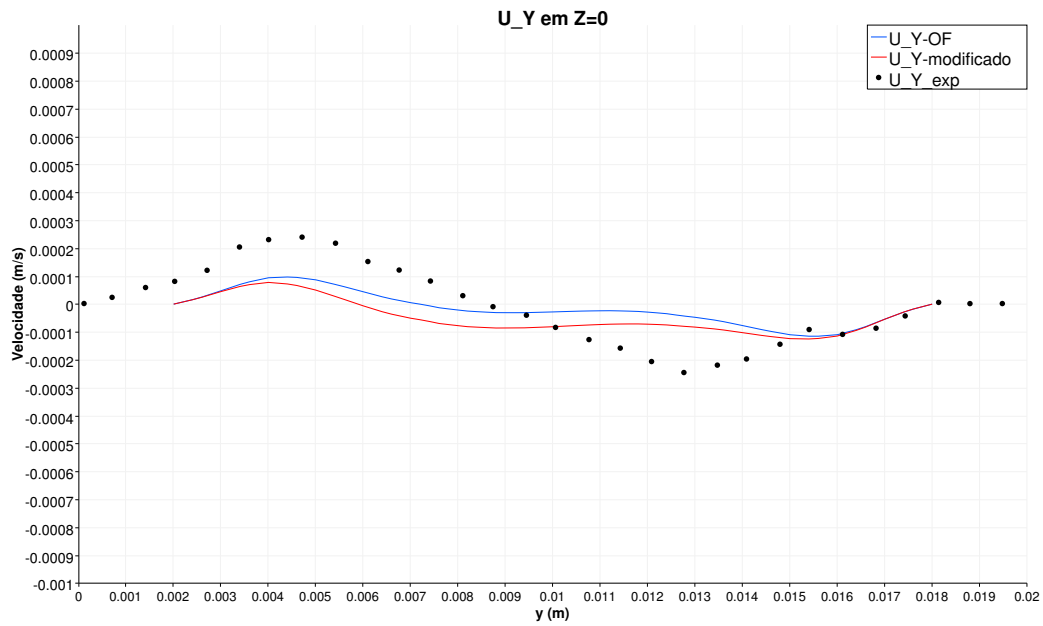


Figura 6.6: Componente y da velocidade no plano horizontal central.

Na Figura 6.2.2 estão os resultados comparados para a componente y da velocidade, medidos no plano horizontal inferior **H-**.

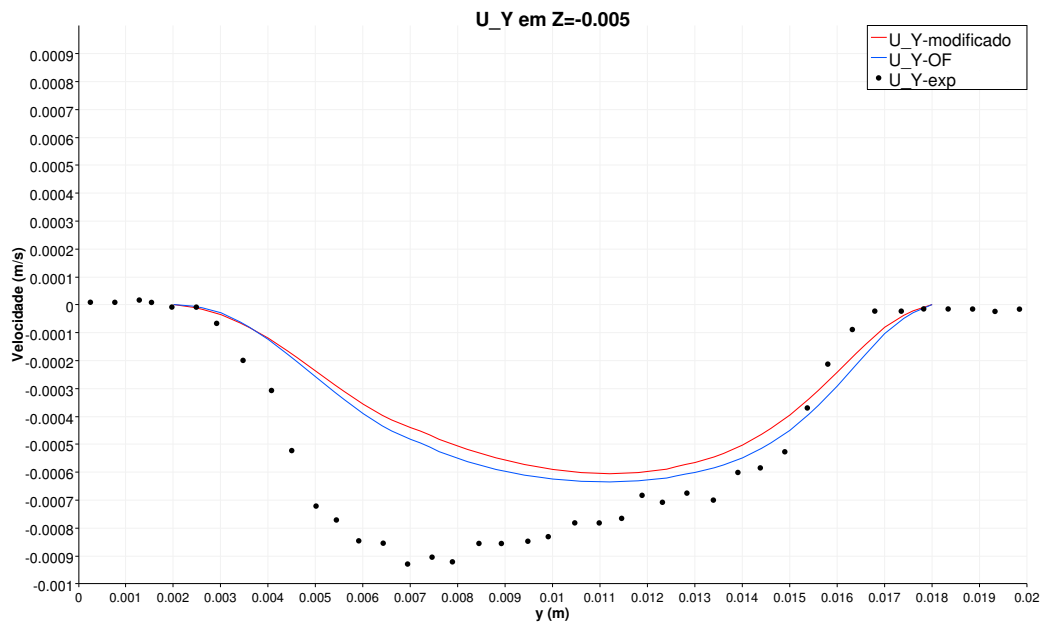


Figura 6.7: Componente y da velocidade no plano horizontal inferior.

Na Figura 6.2.2 estão os resultados comparados para a componente y da velocidade, medidos no plano horizontal superior $\mathbf{H}+$.

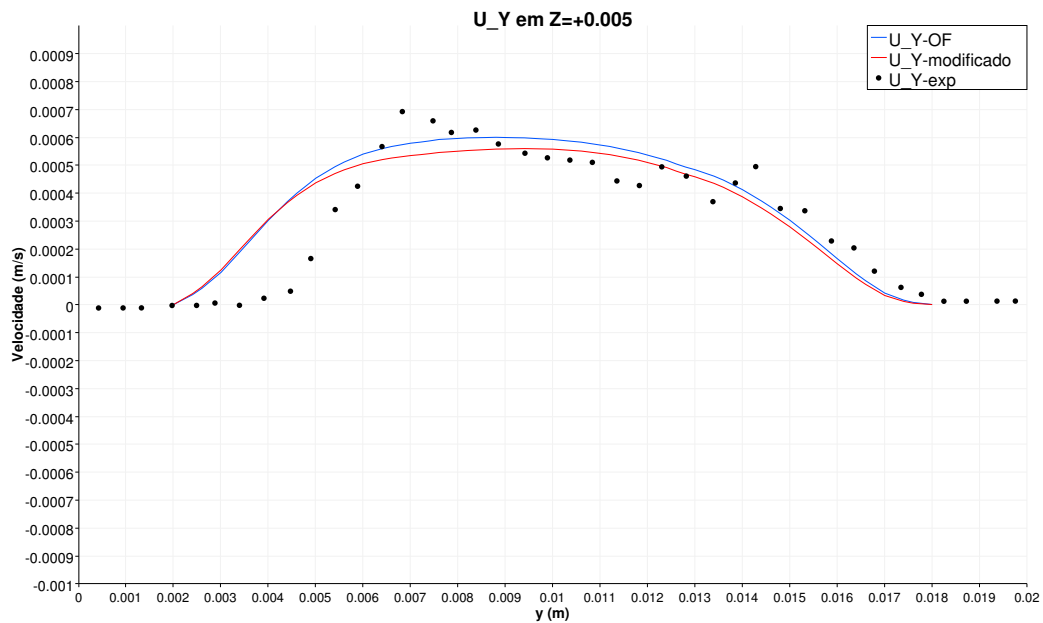


Figura 6.8: Componente y da velocidade no plano horizontal superior.

Nos três locais de avaliação da componente y da velocidade o comportamento de ambas as metodologias foi muito próximo. Houve um pequeno distanciamento entre as duas curvas numéricas, mas de uma forma geral o perfil foi o mesmo, sendo que em partes das curvas a metodologia original se aproximou mais dos dados experimental, enquanto que em outros trechos a metodologia com correção temporal foi mais acurada.

6.2.3 Componente da Velocidade na Direção z

Na Figura 6.2.3 estão os resultados comparados para a componente z da velocidade, medidos no plano horizontal central \mathbf{H} .

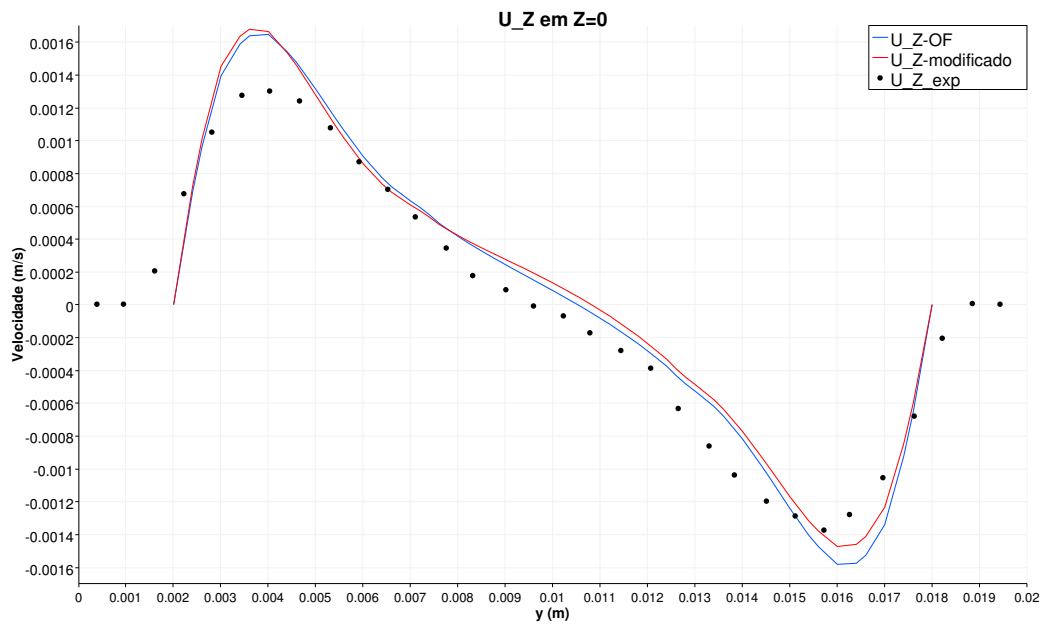


Figura 6.9: Componente w da velocidade no plano horizontal central.

Na Figura 6.2.3 estão os resultados comparados para a componente z da velocidade, medidos no plano horizontal inferior **H-**.

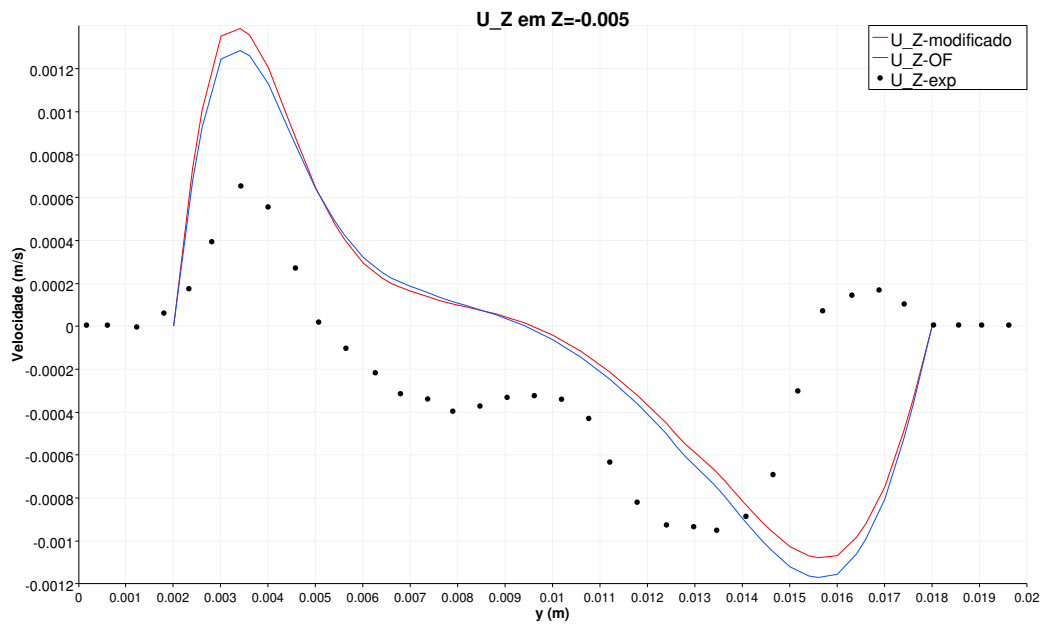


Figura 6.10: Componente z da velocidade no plano horizontal inferior.

Na Figura 6.2.3 estão os resultados comparados para a componente z da velocidade, medidos no plano horizontal superior $\mathbf{H}+$.

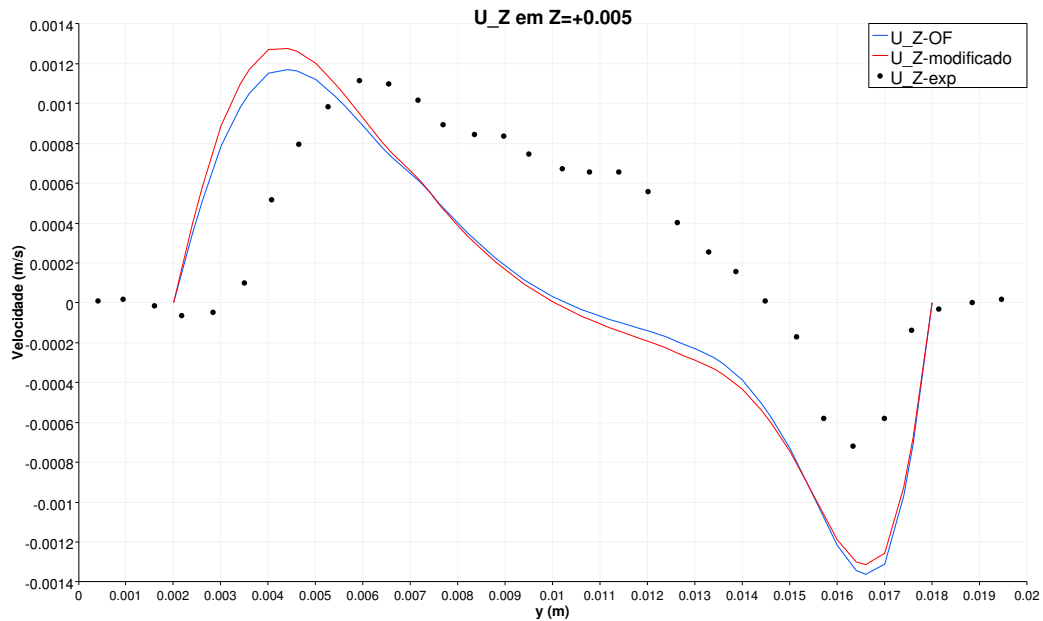


Figura 6.11: Componente z da velocidade no plano horizontal superior.

Também neste grupo de resultados o comportamento das duas soluções numéricas foi muito parecido. Dependendo do trecho, as metodologias alteraram maior proximidade dos dados experimentais. Em geral a metodologia original se aproximou mais dos dados experimentais nos picos, enquanto que a metodologia com correção temporal foi mais precisa nos vales.

6.3 Eficiência Computacional

Em termos de eficiência computacional ambos os *solvers* apresentaram um comportamento bastante similar, tanto em termos de convergência quanto em termos de tempo gasto de computação. Os dados de resíduos e tempo de

computação na última iteração de ambas as metodologias numéricas estão representados na Tabela 6.1. Todas as simulações foram realizadas em um computador com processador i7-6700K com 4 núcleos a 4GHz e com 16GB de memória RAM. Na Tabela, os dados referentes às grandezas físicas se referem ao seu resíduo na última iteração. O dado de continuidade cumulativa indica o fechamento do balanço de massa, indicando que, quanto mais baixo o seu valor, menor a diferença entre a quantidade de material que entra no domínio e a que sai [21].

Tabela 6.1: Desempenho computacional das metodologias avaliadas.

	Correção Temporal	Original
Tempo	4922.62 s	5279.48 s
T	6.387×10^{-7}	4.188×10^{-7}
U_x	2.126×10^{-5}	2.626×10^{-5}
U_y	2.149×10^{-5}	2.706×10^{-5}
U_z	6.311×10^{-6}	1.192×10^{-5}
p	1.319×10^{-4}	1.830×10^{-4}
Continuidade Cumulativa	6.356×10^{-16}	-7.172×10^{-17}

6.4 Caso com Número de Rayleigh Elevado

Com o objetivo observar a diferença no resultado obtido para um caso com oscilações mais fortes, foi simulado um problema igual ao anterior, mas com o número de Rayleigh 1.024×10^7 . Segundo NÚÑEZ [27], este número de Rayleigh implica que o fenômeno observado não atinge um estado estacionário. De fato isso foi observado na simulação e, para extrair resultados

comparáveis, foi realizada uma média temporal ao longo de 2000 segundos, após desprezar um tempo inicial longo para que a simulação se estabilizasse. De fato, como se pode observar nas Figuras 6.12 e 6.13, mesmo o perfil qualitativo médio obtido para as velocidades apresenta grandes diferenças.

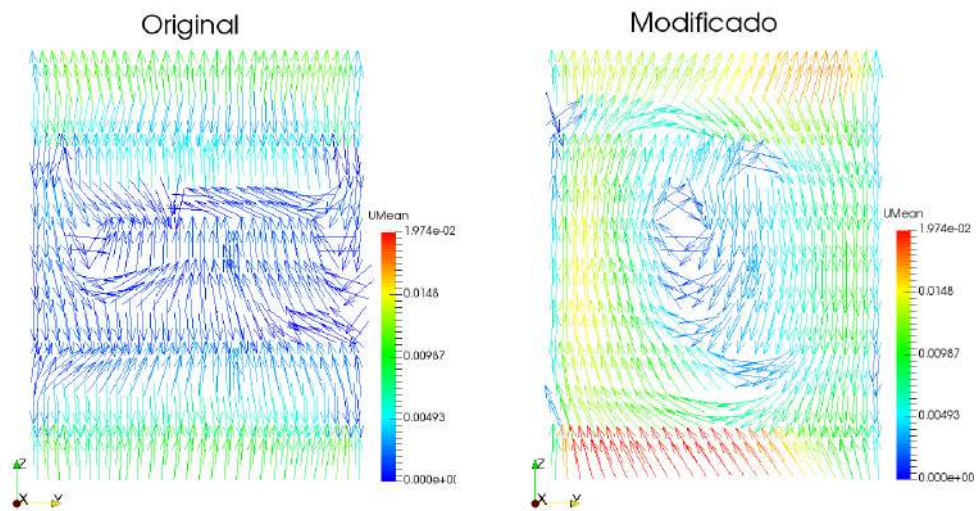


Figura 6.12: Vetores velocidade média no plano yz , com os resultados da metodologia original à esquerda.

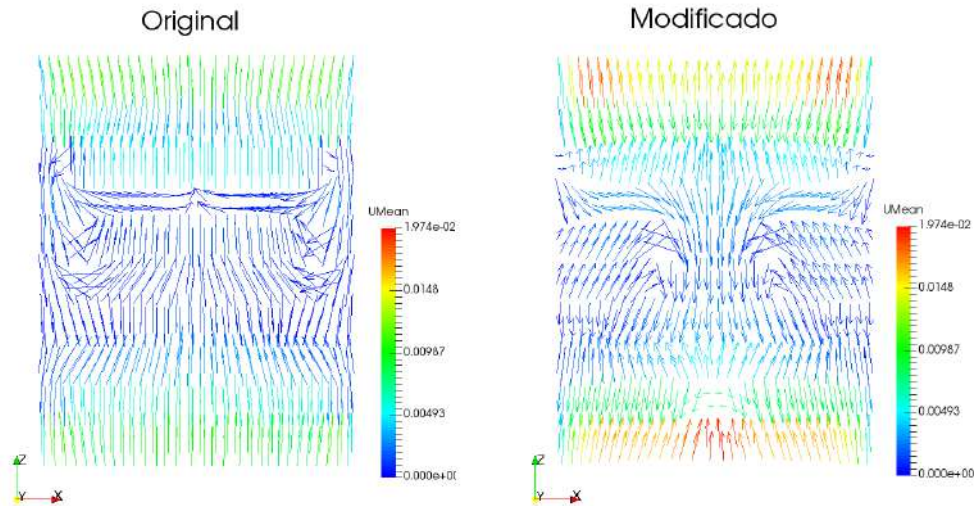


Figura 6.13: Vetores velocidade média no plano xz , com os resultados da metodologia original à esquerda.

Na Figura 6.12 estão expressos os vetores da média temporal da velocidade, no plano yz do cilindro (isto é, ortogonal ao eixo x). Na Figura 6.13 estão expressos os vetores da média temporal da velocidade, no plano xz do cilindro (isto é, ortogonal ao eixo y). Claramente os resultados obtidos para ambos os planos apresentam diferenças já no perfil qualitativo entre a metodologia com correção temporal e a metodologia original. Vale notar que no caso com baixo Rayleigh, na maioria dos perfis observados, a diferença obtida era apenas quantitativa. Ou seja, ambas as metodologias capturavam o perfil qualitativo experimental na maior parte dos casos. Na Figura 6.14 é possível comparar os perfis de velocidade observados. Na legenda da Figura 6.14, $UMean_OF$ é o perfil de velocidade obtido com a implementação original, enquanto $UMean_modificado$ é o perfil obtido utilizando a metodologia

com correção temporal.

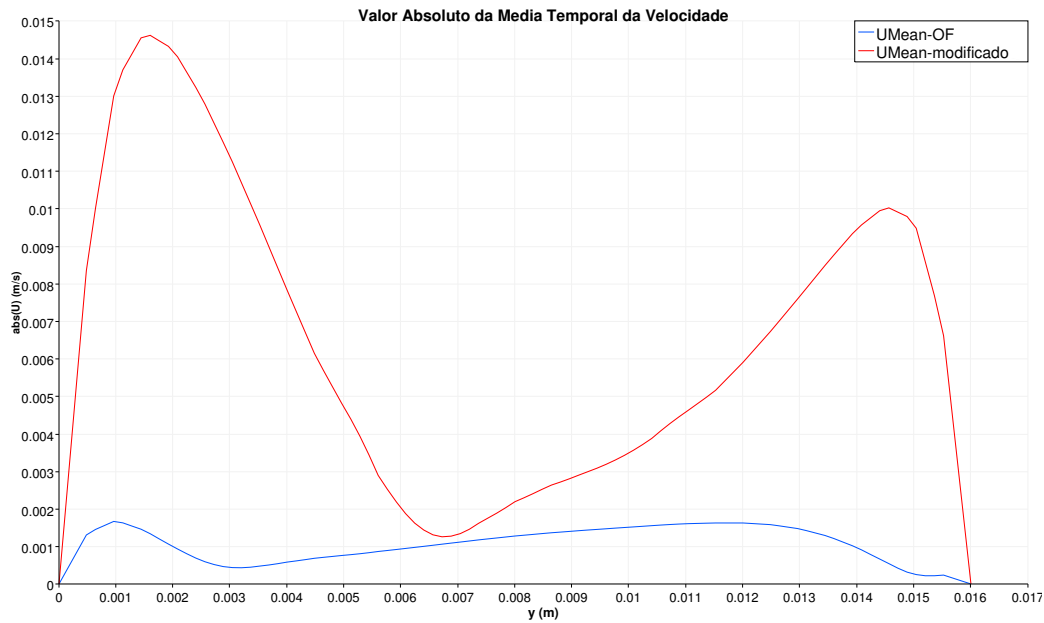


Figura 6.14: Valor Absoluto da Média Temporal da Velocidade, Medido em uma reta no centro do cilindro, ao longo de y .

Na Figura 6.14 estão apresentados os perfis do valor absoluto da média temporal da velocidade, medida ao longo de uma reta que está no centro do cilindro tanto na direção x quanto na direção z . É possível perceber que os perfis obtidos apresentam grandes diferenças, corroborando com a hipótese de que em casos onde o número de Rayleigh é alto, a diferença entre as metodologias de cálculo do termo temporal é exacerbada.

6.5 Discussão

De uma maneira geral, é possível perceber que ambas as metodologias de discretização do termo transiente apresentaram resultados bastante similares para o primeiro caso. Uma explicação para este fenômeno é o número de Rayleigh relativamente baixo do caso estudado no trabalho experimental [27], implicando que as oscilações físicas observadas são menores [16]. Em um escoamento de caráter oscilatório mais forte, a dependência física do termo temporal é mais forte, fazendo com que mudanças na sua metodologia de discretização possivelmente tenham também efeitos maiores.

As exceções a este padrão observado de resultados similares foram os perfis da componente x da velocidade, medidos nos planos fora do centro do domínio, como visto nas Figuras 6.4 e 6.5. Nestes casos a metodologia implementada originalmente no OpenFOAM gerou um resultado qualitativamente errado, enquanto que a metodologia implementada neste trabalho se aproximou bastante do perfil observado experimentalmente. Em termos de performance computacional os dois algoritmos se comportaram de forma praticamente idêntica.

Com o objetivo de verificar se o aumento do número de Rayleigh aumentaria a diferença entre as soluções obtidas, foi introduzido um caso muito similar mas com o número de Rayleigh vinte vezes maior. De fato o que foi observado foi uma diferença bem maior dos resultados neste caso, apresentando até mesmo perfis qualitativos diferentes entre si.

Ainda que ambas as metodologias tenham fornecido resultados muito similares em boa parte dos casos para número de Rayleigh baixo, a presença de mudanças indica que a mudança na metodologia de discretização do termo

transiente surtiu efeito. Isto sugere que a metodologia baseada em corrigir o fluxo inconsistente *ad-hoc* afeta diretamente a solução do problema.

Capítulo 7

Conclusão e Sugestões para Trabalhos Futuros

Embora a validação da metodologia com os dados experimentais apresentados por NÚÑEZ *et al* [27] não tenha sido conclusiva, devido à adequação com o resultado não ter sido tão próxima, é possível ver que a mudança na discretização do termo transiente surtiu efeito no resultado e capturou o comportamento qualitativo de alguns casos (Figuras 6.4 e 6.5) onde a metodologia implementada anteriormente falhou, mesmo no caso com Rayleigh baixo.

Ao testar um caso com o número de Rayleigh elevado a diferença entre as soluções obtidas se tornou muito mais pronunciada, conforme o esperado. Entretanto, como não há dados experimentais disponíveis em NÚÑEZ [27] para este caso, não foi possível averiguar se esta diferença tornou a metodologia com correção temporal mais ou menos próxima do resultado experimental. Para comprovar a melhora introduzida por esta modificação recomenda-se

então realizar mais testes contra dados experimentais.

Para estes testes, seria ideal buscar casos onde o efeito oscilatório seja acentuado. Isto é, casos com número de Rayleigh mais alto, onde a dependência temporal é maior [16]. Seria sobretudo proveitoso realizar um estudo numérico e experimental, onde o efeito da discretização temporal pode ser observado em escoamentos com a variação do número de Rayleigh.

Além disso é necessário estender a implementação desta metodologia para outras físicas onde seu efeito também pode ser sentido. Exemplos interessantes para avaliar este efeito são os casos simulados utilizando malhas móveis, já que esta característica pode trazer grandes problemas ao realizar uma correção explícita do fluxo utilizando campos de velocidade que não sejam consistentes [23]. Além disso todas as físicas onde se observe comportamento oscilatório ou forte dependência do tempo devem apresentar efeitos desta modificação na metodologia.

Por fim, sugere-se implementar uma modificação análoga nos algoritmos de solução para problemas estacionários (sobretudo usando o algoritmo SIMPLE e seus derivados). Nestes algoritmos, embora não haja qualquer influência do termo transiente, o uso dos fatores de relaxação faz com que haja também um corretor *ad-hoc* no fluxo gerado na solução. Este corretor explícito pode ser removido reestruturando o algoritmo de maneira similar ao que foi feito no presente trabalho. Assim, seria proveitoso avaliar os efeitos desta modificação em diversos problemas físicos.

Bibliografia

- [1] Acheson, D. J. *Elementary Fluid Dynamics (Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series)*. Clarendon Press, 1 edição, 8 1990.
- [2] Aris, R. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics (Dover Books on Mathematics)*. Dover Publications, 1 1990.
- [3] Bejan, A. *Convection Heat Transfer*. Wiley and Sons, 2004.
- [4] Bejan, A., Kraus, A. *Heat Transfer Handbook*. Wiley and Sons, 2003.
- [5] Bird, R., Stewart, W., Lightfoot, E. *Transport Phenomena*. John Wiley and Sons Inc, 1960.
- [6] Boussinesq, J. *Théorie Analytique de la Chaleur - Tome II*. Gauthier-Villars, 1903.
- [7] Clifford, I. Block-Coupled Simulations Using OpenFOAM. *OpenFOAM Workshop 6*.
- [8] Darwish, F. M. M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab (Fluid Mechanics and Its Applications)*. Springer, 2015.

- [9] Ferziger, J. H., Peric, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 3 edição, 2013.
- [10] Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R., Sammakia, B. *Buoyancy-Induced Flows and Transport*. Hemisphere Publishing, 1988.
- [11] Greenshields, C. J. *OpenFOAM User Guide, version 4.0*, 2016.
- [12] Hauke, G. *An Introduction to Fluid Mechanics and Transport Phenomena (Fluid Mechanics and Its Applications)*. Springer, 10 2008.
- [13] Holzmann, T. *Kurzzusammenfassung der numerischen Methoden II und Anwendungsbeispiele für Matlab und C++*. Holzmann CFD, 2016.
- [14] Holzmann, T. *Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM*. Holzmann CFD, 4 edição, 2017.
- [15] Hrvoje Jasak, T. U., Vukcevic, V. Recent Advances in Pressure-Velocity Coupled Solver. *OpenFOAM Workshop 11*.
- [16] Incropera, F., Lavine, A., Bergman, T., Dewitt, D. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley and Sons, 2014.
- [17] Issa, R. Solution of Implicitly Discretized Fluid Flow Equations by Operator Splitting. *Journal of Computational Physics*, 62:40 – 65, 1986.
- [18] Jaluria, Y. *Natural Convection Heat and Mass Transfer*. Pergamon Press, 1980.
- [19] Jareteg, K. Block Coupled Calculations in OpenFOAM. *Chalmers University Project within 'CFD with Open Source Software'*, 2013.
- [20] Jareteg, K. Block Coupled Matrix Solvers in foam-extend-3 and More. *Presentation Slides within 'CFD with Open Source Software'*, 2013.

- [21] Jasak, H. *Error analysis and estimation for the Volume Finite Method with applications to fluid flows*. Tese de Doutorado, Imperial College London (University of London), 1996.
- [22] Jasak, H. OpenFOAM: Open source CFD in research and industry. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*, 2009.
- [23] Jasak, H. Pressure-Velocity Coupling in FOAM. *11th OpenFOAM Workshop*, 2016.
- [24] Lax, P. *Linear Algebra and it's Applications*. Wiley interscience, 2007.
- [25] L.D Landau, E. L. *Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics S)*. Butterworth-Heinemann, 2 edição, 1987.
- [26] Norberto Fueyo, A. C., Alberto Sanchez-Insa. Development of a Consistent and Conservative Eulerian-Eulerian Algorithm for Multiphase Flows. *6th OpenFOAM Workshop*, 2011.
- [27] Núñez, J., López-Caballero, M., Ramos, E., Hernández-Cruz, G., Vargas, M., Cuevas, S. Verification and Experimental Validation of a Numerical Simulation of Natural Convection in a Slender Cylinder. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 38, 2012.
- [28] Patankar, S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow (Hemisphere Series on Computational Methods in Mechanics and Thermal Science)*. CRC Press, 1 edição, 1980.
- [29] Patankar, S., Spalding, D. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(10):1787 – 1806, 1972.

- [30] Paulo L. C. Lage, J. C. P. *Métodos numéricos em problemas de engenharia química*. E-papers, 1 edição, 2001.
- [31] Prosperetti, A., Tryggvason, G. (editores). *Computational Methods for Multiphase Flow*. Cambridge University Press, 1 edição, 7 2009.
- [32] Rhie, C., Chow, W. Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation. *AIAA J*, 21:1525 – 1532, 1983.
- [33] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill, 1976.
- [34] Rusche, H. *Computational fluid dynamics of dispersed two-phase flows at high phase fractions*. Tese de Doutorado, Imperial College London (University of London), 2003.
- [35] Silva, L. F. L. R. Solving Fluid Flow Equations - Pressure-Velocity Coupling. *NUMAP-Foam-br*.
- [36] Silva, L. F. L. R. *Desenvolvimento de metodologias para simulação de escoamentos polidispersos usando código livre*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, PEQ/COPPE, RJ, Brasil, 2008.
- [37] Spivak, M. *Calculus On Manifolds: A Modern Approach To Classical Theorems Of Advanced Calculus*. Westview Press, 1971.
- [38] Tritton, D. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 2007.
- [39] van Doormal, J., Raithby, G. Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Flow. *Numerical Heat Transfer*, 7:147 – 163, 1984.

- [40] Versteeg, H., Malalasekera, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method (2nd Edition)*. Pearson, 2 edição, 2007.
- [41] Zhang, D., Prosperetti, A. Ensemble phase-averaged equations for bubbly flows. *Physics of Fluids (1994-present)*, 6(9):2956–2970, 1994.
- [42] Çengel, Y., Ghajar, A. *Heat and Mass Transfer - Fundamentals and Applications*. McGraw Hill, 2014.