



AUTO-INTERAÇÃO NO ELETROMAGNETISMO -
- UM ESTUDO CLÁSSICO RELATIVÍSTICO .

Aluno: Gil de Oliverira Neto
Aluno do Curso de As-
tronomia da UFRJ.

Orientador: Alberto Corrêa dos
Reis
Pesquisador do C.B.P.F.

DEDICATÓRIA

A todos aqueles espíritos,
que mesmo conscientes
de não saberem:
de onde vem
o que são
e para onde vão,
continuam passando pela janela aberta...

RESUMO

Um dos problemas mais interessantes que se coloca para pessoa que pensa, é sem dúvida a possibilidade de um dado sistema poder alterar sua evolução. Ou seja, a auto-interação. Em física esse problema apareceu primeiramente no eletromagnetismo, pois uma partícula carregada em movimento acelerado é capaz de emitir momento e energia sobre a forma de radiação. Essas duas grandezas são fundamentais em física para caracterizar o movimento da partícula, assim vemos que esta interfere diretamente em seus estados de movimento futuros.

Nesse trabalho vamos estudar explicitamente esse caso particular de auto-interação, baseados em resultados bem estabelecidos e usando um enfoque clássico-relativístico. Inicialmente derivamos os campos eletromagnéticos da partícula carregada em movimento além das taxas de emissão de momento e energia.

O ponto alto do trabalho é sem dúvida a obtenção das equações de movimento, na verdade um conjunto de duas equações integro-diferenciais quadri-vetoriais. Para obtermos essas equações partimos das leis de conservação do momento e da energia, obtendo assim um resultado intermediário bem conhecido, a equação de Lorentz-Dirac. Essa é uma equação diferencial de 3ª ordem na posição, que ao ser integrada uma vez no tempo próprio, fornece com o uso devido de condições assintóticas para aceleração a equação de movimento desejada.

Finalmente depois de estudarmos um pouco a equação obtida e suas implicações, resolvemos esta para algumas interações bem conhecidas. Entre elas a força constante, o pulso de duração finita e o potencial Couloumbiano.

ÍNDICE

	<u>Págs.</u>
<u>INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 1 - HISTÓRICO</u>	3
<u>CAPÍTULO 2 - CAMPO DA PARTÍCULA CARREGADA EM DIVERSAS SITUAÇÕES</u>	10
<u>APÊNDICE 2A</u>	26
<u>APÊNDICE 2B</u>	28
<u>CAPÍTULO 3 - DETERMINAÇÃO DA ENERGIA E MOMENTO DA PARTÍCULA CARREGADA EM MOVIMENTO</u>	37
<u>APÊNDICE 3A</u>	48
<u>APÊNDICE 3B</u>	51
<u>APÊNDICE 3C</u>	54
<u>APÊNDICE 3D</u>	55
<u>CAPÍTULO 4 - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO</u>	57
<u>CAPÍTULO 4A</u>	70
<u>CAPÍTULO 4B</u>	74
<u>CAPÍTULO 4C</u>	78
<u>CAPÍTULO 5 - DISCUSSÃO SOBRE A EQUAÇÃO E SUAS SOLUÇÕES</u> ..	84

Págs.

5.1 - Discussão Sobre a Equação.....	84
5.2 - Soluções da Equação de Movimento para Alguns Sistemas Simples.....	89
<u>APÊNDICE 5A</u>	105
<u>REFERÊNCIAS</u>	107

INTRODUÇÃO

Esse trabalho é o resultado de um estudo intensivo feito pelo autor sobre o material mais tradicional, disponível, relacionado ao fenômeno de auto-interação no eletromagnetismo. O enfoque clássico-relativístico foi escolhido seguindo-se a proposta de estudar as idéias mais bem fundamentadas.

O objetivo dessa monografia é reunir vários pontos de vista a cerca do tema, para que o leitor possa formar uma idéia bem clara de todas as potencialidades do assunto em discussão.

Inicialmente é feito um histórico sobre a idéia de partícula carregada; sua relação com os fenômenos macroscópicos e o desenvolvimento de uma teoria sobre o eletron propriamente dito. Mostra-se também as propostas ligadas a idéia de partícula pontual e estruturada. É feito também um breve comentário sobre a teoria de ação-à-distância do Fokker.

No segundo capítulo calculamos os campos eletromagnéticos da partícula carregada, em movimento. Isso é feito a partir das equações de Maxwell não-homogêneas, para os potenciais. Depois de obtermos os campos em termos de grandezas cinematicas da partícula carregada, identificamos dois tipos de campos a saber: os campos de velocidade e os de aceleração.

Em seguida no Capítulo 3, introduzimos algumas entidades fundamentais para o tratamento relativístico do problema: o tensor simétrico momento-energia eletromagnético, o quadri-mo

mento eletromagnético e finalmente a taxa de momento e energia associada a emissão de radiação. Esse último resultado nos ajudará a identificar termos na equação que descreve a evolução da partícula carregada.

O Capítulo seguinte representa o sistema nervoso de toda a discussão. Nele obtemos a equação de Lorentz-Dirac, uma equação de terceira ordem no quadri-vetor posição. Posteriormente usando a equação acima mencionada e condições assintóticas fisicamente justificadas, obtemos equações integro-diferenciais de segunda ordem, para descrever a trajetória da partícula carregada.

O último Capítulo é sem dúvida o mais rico em termos de idéias pouco convencionais em física. Muitas propriedades gerais do sistema em estudo, introduzidas pela equação obtida no Capítulo anterior são discutidas. Entre as idéias figuram a violação do princípio da causalidade, e a formulação de uma imagem bem interessante da partícula carregada em movimento.

Ainda nesse Capítulo teremos a obtenção de soluções da equação obtida no Capítulo 4, para sistemas bem representativos. Um estudo aproximado de átomos de 1 elétron, nos permitirá demonstrar a impropriedade do nosso modelo no tratamento de tal sistema. Pois obteremos um resultado instável, o que está em claro desacordo com nosso conhecimento empírico.

CAPÍTULO 1

HISTÓRICO

As primeiras idéias que ligavam os fenômenos elétricos (correntes elétricas) com a existência de partículas carregadas, datam de 1845 e se devem a Gustav T. Fechner. Após isso, em 1881 Sir Joseph J. Thomson [1] lançou a idéia de que a massa de uma partícula carregada poderia ter uma explicação puramente eletromagnética, e seria dada por:

$$m_{elm} = f \frac{e^2}{RC^2} \quad 1(1)$$

onde e é a carga da partícula carregada, R seu raio, f um fator numérico que depende da distribuição de carga no interior da carga esférica e C a velocidade da luz. A primeira estimativa teórica para o raio do eletrão foi obtida de 1(1);

$$R_e = f \frac{e^2}{m_e C^2} \quad 1(2)$$

onde m_e é a massa do eletrão. Alguns anos depois em 1897, o próprio J.J. Thomson confirmou a teoria das partículas elétricas ao comprovar experimentalmente a existência do eletrão [2].

Em 1892 surge uma teoria eletromagnética, baseada na existência de partículas carregadas, que tinha a proposta de explicar todos os fenômenos óticos e eletrodinâmicos macroscópicos, em termos do comportamento de eletrões e íons [3]. Essa teoria se deve a Hendrik Anton Lorentz e foi chamada de Teoria

dos eletrons.

Nesta teoria a interação entre partículas se dava através do campo, ou seja, uma dada partícula produzia seu campo eletromagnético e este ao se encontrar com outra partícula, interagiria com aquela. Com esta forma de ver o problema tornava-se necessário a introdução da forma da interação dos campos com as partículas, pois já se sabia calcular os campos através das equações de Maxwell. Então Lorentz introduziu a famosa expressão da densidade de força eletromagnética:

$$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{C} \times \vec{B}) \quad 1(3)$$

onde ρ é a densidade volumar de carga, \vec{E} e \vec{B} são respectivamente os campos elétricos e magnéticos e \vec{v} é a velocidade da partícula.

Partindo da imagem de que a matéria é na verdade formada de eletrons ligados elasticamente à átomos e íons, Lorentz usou como modelo simplista para representar a matéria, um oscilador harmônico carregado. A partir daí ele derivou a expressão para o oscilador, a qual seria a base para as análises posteriores:

$$m\ddot{\vec{r}} = K\vec{r} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{C^3} \ddot{\vec{r}} \quad 1(4)$$

onde a primeira parcela da direita se deve a força restauradora do oscilador, a segunda a reação devido a emissão de radiação

pela partícula, e os pontos se referem a derivadas em relação ao tempo.

O outro programa da teoria de Lorentz era o estudo do próprio eletrôn, ou seja, desejava-se construir um modelo para o eletrôn. O primeiro a ser proposto nesse contexto considerava o eletrôn como uma esfera rígida com distribuição de carga esfericamente simétrica, e foi bastante estudado por Max Abraham. Ao calcular a energia e o momento este obteve respectivamente valores |4|:

$$E = (m_0 + m_{elm}) \frac{v^2}{2} \quad 1(5)$$

onde $m_{elm} = f \frac{e^2}{RC^2}$ e f é um fator numérico (de ordem 1) que depende da distribuição de cargas do eletrôn. m_0 é a massa da partícula caso ela fosse neutra, e

$$\vec{p} = (m_0 + \frac{4}{3} m_{elm}) \vec{v} = \vec{p}_0 + \vec{p}_{elm} \quad 1(6)$$

onde \vec{p}_{elm} foi obtido com a hipótese de que o momento do campo Coulombiano fosse descrito por:

$$\vec{p}_{Coul} = \frac{1}{C^2} \int \vec{S} d^3r \quad 1(7)$$

no qual \vec{S} é o vetor de Poynting. Dessa forma vemos que o Campo Coulombiano contribui tanto para energia da partícula carregada quanto para o seu momento. Mas estranhamente surge um fator 4/3 na relação que liga a velocidade ao momento eletromagnético,

o qual na verdade provém da definição errada 1(7) para o \vec{p}_{Coul} .

A partir desses resultados Lorentz e outros pensaram na possibilidade de uma partícula puramente eletromagnética, o que seria obtido se toda a massa se devesse apenas a massa eletromagnética, fazendo $m_0=0$. Um resultado imediato dessa idéia é a existência de uma força de repulsão Coulombiana no interior do eletron, uma vez que sua carga é negativa. Essa força foi calculada por Lorentz a partir de:

$$\vec{F}_{\text{int}} = \int \rho (\vec{E}_{\text{int}} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_{\text{int}}) d^3r \quad 1(8)$$

onde \vec{E}_{int} e \vec{B}_{int} são respectivamente os campos elétrico e magnético internos a partícula carregada. Usando esse resultado, podemos escrever a equação de movimento da partícula carregada sobre a ação de uma força externa \vec{F}_{ext} , supondo que este se dá quando:

$$\vec{F}_{\text{int}} + \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad 1(9)$$

$$\text{obtemos, } \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} m_{\text{int}} \vec{v} \right) - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\vec{a}} (1+O(R)) = \vec{F}_{\text{ext}} \quad 1(10)$$

onde $m_{\text{int}} = \frac{w_{\text{int}}}{c^2}$ e $O(R)$ indica uma expressão da ordem de magnitude de R , o raio de eletron. Uma vez que $m_{\text{int}} = m_{\text{elm}}$ vemos que a equação 1(4) é um caso particular de 1(10), quando desprezamos a contribuição dos termos em $O(R)$ nessa equação. Sem dúvida nenhuma a equação 1(10) foi o grande resultado do modelo do eletron com estrutura puramente eletromagnética. Mas três pontos ficavam pendentes; a) A partícula, se levarmos em conta esse modelo, não é

estável devido à força de repulsão Coulombiana; (b) Se tentarmos obter uma equação independente de R (a partir de 1(10) fazendo o $\lim R \rightarrow 0$, ficaremos com uma m_{elm} infinita. (c) A estranha relação entre o momento eletromagnético e a velocidade, que envolve um inexplicável fator $4/3$.

Uma grande revolução ocorreu no tratamento do problema da partícula carregada e de toda física em geral quando em 1905 Albert Einstein publicou seu trabalho introduzindo a Relatividade Especial [5]. A exigência de que as grandezas físicas e as equações se transformassem de forma apropriada sobre o grupo das transformações de Lorentz fez com que muitos resultados fossem revistos. Uma das exigências da relatividade era de que a antiga relação entre o momento e a velocidade fosse mantida, considerando-se que a massa agora é equivalente a energia. Poincaré sugeriu então a existência de forças coesivas no interior do eletrão capazes de mantê-lo estável, e ao mesmo tempo deixar o momento relativisticamente aceitável. Então escrevemos:

$$\vec{p} = \left(\frac{4}{3} \frac{m_{int}}{c^2} - \frac{m_{coe}}{c^2} \right) \vec{v} = \frac{m_{int}}{c^2} \vec{v} \quad 1(11)$$

pois por definição $m_{coe} \equiv m_{int}/3$.

Outro resultado importante foi a obtenção por Abraham de uma generalização relativística do segundo termo do lado esquerdo de 1(10) (para o caso de uma partícula pontual) que ficou conhecido como o quadri-vetor de Abraham, e é escrito como:

$$\Gamma^\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{C^3} \left(\frac{d^2 v^\mu}{d\tau^2} - \frac{dv^\alpha}{d\tau} \frac{dv_\alpha}{d\tau} v^\mu \right) \quad 1(12)$$

onde τ é o tempo próprio e v^μ é a quadri-velocidade da partícula carregada.

Uma teoria interessante acêrca das partículas carregadas foi aquela proposta por Fokker (1929) [6], Wheeler e Feynman (WF) (1945) [7], que resgatavam a idéia da ação-a-distância. A teoria foi proposta inicialmente por Fokker, mas este não conseguiu explicar de forma consistente a radiação sem a ajuda do campo eletromagnético. Mas posteriormente isso foi conseguido por WF, o que colocou essa teoria em boas condições de aceitação, exceto pelo fato de o foton não ser necessário nesse enfoque.

Em 1938 Dirac publica seu importante trabalho sobre o assunto, fortalecendo a imagem de partícula puntiforme para o elétron [8]. Usando as equações de Maxwell e as leis de conservação para a energia e o momento Dirac derivou uma equação livre de divergências,

$$m\dot{v}^\mu = F_{\text{ext}}^\mu + \Gamma^\mu \quad 1(13)$$

onde m é igual a soma da massa eletromagnética com a da partícula neutra. Um dos resultados importantes dessa teoria foi a construção de um quadri-momento eletromagnético que era compatível com as exigências da relatividade especial, ou seja, era um quadri-vetor na forma $m_{\text{elm}} v^\mu$ (sem a presença de fatores numéricos indesejáveis).

Os problemas principais dessa teoria se relacionavam com as soluções da equação (13). Pelo fato dela ser uma equação diferencial de 3ª ordem, esta apresenta soluções divergentes, mesmo para sistemas sobre os quais não estão agindo forças externas. O outro problema é a quebra da causalidade imposta pelas soluções fisicamente aceitáveis, ou seja, o surgimento de acelerações nas partículas antes da ação dos agentes externos.

Após isso muitas propostas foram feitas para solucionar esses problemas, entre eles a do próprio Dirac. Até que em (1961) Rorlich [9] propôs o uso de condições assintóticas sobre a quadri-aceleração, em regiões distantes, como sendo uma exigência física. Esse procedimento resulta na obtenção de equações integro-diferenciais (solúveis para um grande número de forças), as quais são livres das indesejáveis soluções assintoticamente ilimitadas. Quanto ao problema da quebra-da-causalidade não se atribui importância pelo menos no limite clássico, pois esta se dá num intervalo de tempo fora do domínio do mundo macroscópico.

As propostas mais importantes feitas a partir do trabalho de Dirac serão analisadas no corpo desse trabalho.

CAPÍTULO 2

CAMPO DA PARTÍCULA CARREGADA EM DIVERSAS SITUAÇÕES

Um resultado importante para o nosso objetivo final é o campo eletromagnético da partícula carregada em movimento. Nesse Capítulo estaremos interessados em sua derivação explícita a partir das equações de Maxwell para o quadri-potencial; $A^\gamma = (\phi, \vec{A})$ (2(1) onde ϕ é o potencial escalar e \vec{A} é o potencial vetor, ligados com os campos elétricos (\vec{E}) e magnéticos (\vec{B}) através de relações, que podem ser escrita em forma covariante como:

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad 2(2)$$

onde $F^{\alpha\beta}$ é o tensor anti-simétrico intensidade do campo, que escrito em termos das componentes cartesianas de \vec{E} e \vec{B} fica:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{vmatrix} \quad 2(3)$$

Outra grandeza que aparece em 2(2) é o operador quadri-vetorial contra-variante,

$$\partial^\alpha = \left(-\frac{\partial}{c\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad 2(4)$$

que se liga a sua representação co-variante ∂_α através do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, que em sua representação matricial se escreve;

$$g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 2(5)$$

As equações de Maxwell não-homogêneas são escritas, em formas covariante como:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} J^\beta \quad 2(6)$$

onde $J^\beta = (\rho c, \vec{J})$ é o quadri-vetor densidade de corrente, responsável pelas fontes. Temos então que ρ e \vec{J} se referem respectivamente as densidades de carga e corrente de uma dada distribuição de cargas.

Como dissemos anteriormente iremos resolver a equação de Maxwell 2(6) em termos do potencial A^α ; o que pode ser obtido com o auxílio de 2(2), logo:

$$\square A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) = -\frac{4\pi}{c} J^\beta \quad 2(7)$$

Temos aí o surgimento do operador D'Alembertiano, definido como a contração invariante:

$$\square = \partial_\alpha \partial^\alpha = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{C^2 \partial t^2} \quad 2(8)$$

Para simplificar a equação 2(7) usaremos a liberdade de definição que os potenciais eletromagnéticos gozam. No nosso caso será mais conveniente o uso do calibre de Lorentz que em notação covariante se escreve:

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad 2(9)$$

Assim a equação de Maxwell para os potenciais 2(7) fica escrita:

$$\square A^\beta = - \frac{4\pi}{C} J^\beta \quad 2(10)$$

resolvendo essas equações pelo método das funções de Green (veja Apêndice 2A) temos duas soluções covariantes possíveis:

$$A^\alpha(x) = A_{\text{in}}^\alpha(x) - \frac{4\pi}{C} \int d^4x' D_{\text{r}}(x-x') J^\alpha(x') \quad 2(11)$$

$$A^\alpha(x) = A_{\text{out}}^\alpha(x) - \frac{4\pi}{C} \int d^4x' D_{\text{a}}(x-x') J^\alpha(x') \quad 2(12)$$

onde os quadri-vetores sem linha e com linha se referem aos pontos dos campos e das fontes respectivamente.

As soluções se diferenciam devido a presença das duas diferentes funções de Green:

$$D_{\text{r}}(x-x') = \frac{1}{2\pi} \theta(x_0-x'_0) \delta(|(x-x')|^2) \quad 2(13)$$

$$D_a(x-x') = \frac{1}{2\pi} \theta(x'_0 - x_0) \delta(|x-x'|^2) \quad 2(14)$$

que caracterizam respectivamente os potenciais retardados 2(11) e os avançados 2(12). Essa nomenclatura se deve ao fato de que na solução 2(11), potenciais retardados, temos os instantes em cujo os campos são calculadas sempre posteriores aos instantes em que a contribuição das fontes na formação dos campos é computada. Esse fato é garantido pela presença, na função de Green retardada 2(13), da função $\theta(x_0 - x'_0)$ que só será diferente de zero na região do espaço-tempo em que $x_0 > x'_0$. Uma interpretação simétrica pode ser dada para solução avançada 2(12). Os termos $A_{in}^\alpha(x)$ e $A_{out}^\alpha(x)$ em 2(11) e 2(12) respectivamente são as soluções da equação homogênea. O $A_{out}^\alpha(x)$ pode ser interpretado como um potencial, observado em um instante muito posterior a qualquer situação física, pois em 2(14) ao fazermos $X \rightarrow +\infty$ e considerarmos que a fonte está situada em alguma região do espaço-tempo teremos $\delta(|x-x'|^2)$ igual a zero. E $A_{out}^\alpha(x)$ será igual ao termo $A_{in}^\alpha(x)$; podemos fazer uma consideração simétrica a anterior em relação a $A_{in}^\alpha(x)$.

De posse das soluções das equações de Maxwell, passemos para resolução do problema de nosso interesse, ou seja, a obtenção dos campos gerados por uma partícula carregada (e) em movimento, cuja trajetória é $r(\tau)$ e a densidade de corrente evidentemente covariante é dada por:

$$J^\alpha(x) = ec \int_{-\infty}^{\infty} d\tau v^\alpha(\tau) \delta^{(4)}(x-r(\tau)) \quad 2(15)$$

onde $v^\alpha(\tau) = \frac{dr^\alpha(\tau)}{d\tau}$. Que quando analisada por componentes e fei

ta as transformações de variáveis necessárias se reduz as conhecidas relações para as densidades de carga ρ e corrente \vec{J} de uma carga e :

$$\rho(\vec{x}, t) = e \delta|\vec{x} - \vec{r}(t)|$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = e \vec{v}(t) \delta|\vec{x} - \vec{r}(t)|$$

Então de posse da densidade $J^\alpha(x)$ 2(15) vamos obter os potenciais avançados e retardados, para tal observando 2(13) e 2(14) vemos que a diferença entre as duas funções de Green está nas funções degraus. Assim podemos escrever uma forma compacta para os potenciais, a qual especificaria as funções degrau avançada e retardada pela presença dos índices a e r respectivamente. Além disso uma vez que queremos obter as soluções para os potenciais gerados pela partícula carregada não vamos nos preocupar com as soluções da equação homogênea que como já vimos representam campos livres. Então o $A_{r,a}^\alpha$ será dado por:

$$A_{r,a}^\alpha(x) = -\frac{4\pi}{C} \int d^4x' D_{r,a}(x-x') J^\alpha(x') \quad 2(16)$$

introduzindo agora o valor de $J^\alpha(x)$ dado em 2(15) teremos:

$$A_{r,a}^\alpha(x^\alpha) = -2e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau v^\alpha(\tau) \theta_{r,a}(r_0(\tau), x_0) \delta|(x-r(\tau))^2| \quad 2(17)$$

Observando então a integral 2(17) vemos que só haverá contribuição da partícula na formação do Potencial no ponto x^α , no instante τ_0 que satisfaça a equação:

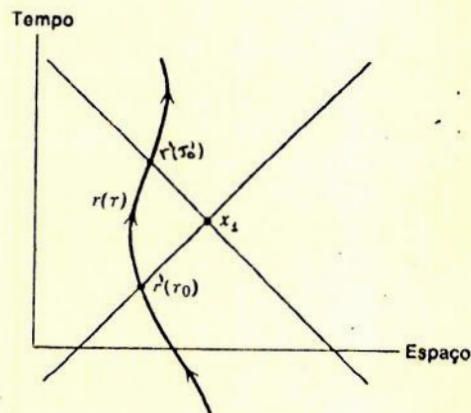
$$|\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau)|^2 = 0 \quad 2(18)$$

Essa é a equação do cone de luz com origem na linha de mundo da partícula no instante τ_0 e que intercepta o ponto x^α . A equação 2(18) tem duas soluções, tais que

$$-(x^0 - r^0(\tau))^2 + (\vec{x} - \vec{r}(\tau))^2 = 0$$

$$x^0 - r^0(\tau) = \pm R = \pm |\vec{x} - \vec{r}(\tau)| \quad 2(19)$$

logo a solução retardada é tal que $x^0 - r^0(\tau_0) = +R > 0$ e na avançada temos $x^0 - r^0(\tau'_0) = -R < 0$. Podemos ver essas duas situações distintas no diagrama bidimensional 1;



Neste diagrama a curva cheia é a linha de mundo da partícula e os pontos $r'(\tau'_0)$ e $r'(\tau_0)$ representam os pontos de trajetória em que a partícula contribuiu para os potenciais avançados e retardados respectivamente, no ponto x_1 .

Podemos então calcular a integral 2(17) usando a relação:

$$\delta |f(x)| = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left| \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_i} \right|} \quad 2(20)$$

onde os x_i são os zeros da equação $f(x)=0$. Se fizermos $f(x) = f(\tau) = (x-r(\tau))^2$ teremos com a ajuda da derivada:

$$\frac{df(\tau)}{d\tau} = -2(x^\alpha - r^\alpha(\tau)) v_\alpha(\tau) \quad 2(21)$$

e das raízes τ_0 e τ'_0 da equação $f(\tau)=0$, a relação 2(20) escrita como:

$$\delta |f(\tau)| = \frac{\delta(\tau-\tau_0)}{2(x^\alpha - r^\alpha(\tau))v_\alpha \Big|_{\tau=\tau_0}} + \frac{\delta(\tau-\tau'_0)}{2(x^\alpha - r^\alpha(\tau))v_\alpha \Big|_{\tau=\tau'_0}} \quad 2(22)$$

e substituindo o resultado 2(22) em 2(17) teremos:

$$A_{R,a}^\alpha(x) = -2e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau v^\alpha(\tau) \theta_{R,a}(r_0(\tau), x_0) \left| \frac{\delta(\tau-\tau_0)}{2(x^\alpha - r^\alpha(\tau))v_\alpha} \right|_{\tau=\tau_0} + \frac{\delta(\tau-\tau'_0)}{2(x^\alpha - r^\alpha(\tau))v_\alpha \Big|_{\tau=\tau'_0}} \quad 2(23)$$

Para o potencial retardada temos só o 1º termo dentro dos colchetes contribuindo, pois nele $\delta(\tau-\tau_0) \neq 0$ em τ_0 e $\tau_0 < \tau$. Com isso $\theta_{R,a}(r_0(\tau), x_0) \neq 0$ nesse ponto, então:

$$A_{R,a}^\alpha(x) = \frac{-e v^\alpha(\tau)}{v_\alpha(\tau) |x^\alpha - r^\alpha(\tau)|} \Big|_{\tau=\tau_0} \quad 2(24)$$

Escrevendo $A_r^\alpha(x^\alpha)$ em termos do vetor \vec{R} e seu modulo, ambos definidos em 2(19), teremos:

$$A_r^\alpha(\vec{r}, t) = \frac{ev^\alpha(\tau)}{\gamma C R(1-\vec{\beta} \cdot \hat{n})} \quad 2(25)$$

onde \hat{n} , é o unitário na direção de \vec{R} e $\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$. Os potenciais 2(24) são os conhecidos potenciais de Liénard-Wiechert, e devem ser calculados no instante τ_0 . Por componentes teremos:

$$A_r^0(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) = \frac{e}{(1-\vec{\beta} \cdot \hat{n})R} \quad 2(26)$$

$$A_r^k(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e\vec{\beta}}{(1-\vec{\beta} \cdot \hat{n})R} \quad k=1, 2, 3$$

Considerando agora a solução avançada $A_a^\alpha(x)$, usaremos em 2(23) apenas o 2º termo dentro dos colchetes uma vez que $\delta(\tau-\tau'_0) \neq 0$ em τ'_0 e $\tau'_0 > \tau$, e portanto $\theta_a(r_0(\tau), x_0) \neq 0$ nesse ponto. Então usando um procedimento análogo ao anterior, chegamos a uma expressão analoga a 2(24), executando o ponto de aplicação:

$$A_a^\alpha(x) = \frac{+ ev^\alpha(\tau)}{v_\alpha(\tau) |x^\alpha - r^\alpha(\tau)|} \Big|_{\tau=\tau'_0} \quad 2(27)$$

Escrevendo uma expressão similar a 2(25) para $A_a^\alpha(x)$, vem que:

$$A_r^\alpha(\vec{r}, \tau) = \frac{ev^\alpha(\tau)}{\gamma C R(1+\vec{\beta} \cdot \hat{n})} \quad 2(28)$$

a qual deve ser calculada no ponto $\tau=\tau'_0$.

A próxima etapa sem dúvida consiste no cálculo dos campos. Para tal, usaremos a relação 2(2) que liga os potenciais aos campos (Tensor $F^{\alpha\beta}$). Como forma de simplificação do problema usaremos a forma 2(17) para os potenciais, sendo que explicitaremos a forma dos potenciais retardado e avançado:

$$A_{ra}^{\alpha}(x) = -2e \int d\tau v^{\alpha}(\tau) \theta |_{\pm}(x_0 - r_0(\tau)) | \delta\{|x - r(\tau)|^2\} \quad 2(29)$$

Calculamos agora o 2º termo de 2(2);

$$\begin{aligned} \partial^{\beta} A_{ra}^{\alpha}(x) &= -2e \int d\tau v^{\alpha}(\tau) | \partial^{\beta} \theta |_{\pm}(x_0 - r_0(\tau)) | \delta\{|x - r(\tau)|^2\} + \\ &+ \theta |_{\pm}(x_0 - r_0(\tau)) | \partial^{\beta} \delta\{|x - r(\tau)|^2\} | \end{aligned} \quad 2(30)$$

Observemos mais de perto as derivadas de cada um dos termos da direita de 2(30).

$$\text{Se } \beta \neq 0 \text{ temos } \partial^{\beta} \theta |_{\pm}(x_0 - r_0(\tau)) | = 0$$

$$\text{Se } \beta = 0 \text{ temos } \partial^0 \theta |_{\pm}(x_0 - r_0(\tau)) | = \delta(x_0 - r_0(\tau))$$

$$\text{Uma vez que: } \partial^{\beta} \delta|f(x, \tau)| = \frac{\partial \delta|f|}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial f} \cdot \partial^{\beta} f \text{ então fazendo}$$

$$f(x, \tau) = |x - r(\tau)|^2 \text{ teremos:}$$

$$\partial^{\beta} \delta|(x - r(\tau))^2| = - \frac{|x^{\beta} - r^{\beta}(\tau)|}{|x_{\alpha} - r_{\alpha}(\tau)| \cdot v^{\alpha}(\tau)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \delta|(x - r(\tau))^2| \quad 2(31)$$

Por componentes a equação 2(30) fica escrita:

$$\partial^0 A_{ra}^\alpha(x) = -2e \left\{ d\tau \{ v^\alpha(\tau) | \delta(x_0 - r_0(\tau)) \delta\{(x-r(\tau))^2\} + \right. \\ \left. - \theta | \pm(x_0 - r_0(\tau)) | \cdot \frac{|x^0 - r^0(\tau)|}{|x_\alpha - r_\alpha(\tau) v^\alpha(\tau)|} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \delta\{(x-r(\tau))^2\} \right\} \quad 2(32)$$

mas observe que para $\beta=0$, temos que o 1º termo do integrando são   diferente de zero se $x_0 = r_0(\tau)$ com isso temos $x_0 - r_0 = \pm R = 0$, daí

$$\partial^0 A_{ra}^\alpha(x) = -2e \int d\tau \left\{ v^\alpha(\tau) \left| \delta\{-(\vec{x} - \vec{r})^2\} - \frac{\theta | \pm(x_0 - r_0(\tau)) | |x^0 - r^0(\tau)|}{|x_\alpha - r_\alpha(\tau) v^\alpha(\tau)|} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial}{\partial \tau} |(x-r(\tau))^2| \right\} \quad 2(33)$$

se não considerarmos o caso $\vec{R} = \vec{x} - \vec{r} = 0$, ou seja, o cálculo dos campos na posição instantânea das partículas fontes, temos que o 1º termo da direita em 2(33)   zero e podemos escrever uma são equação para todas componentes:

$$\partial^\beta A_{ra}^\alpha(x) = +2e \int d\tau v^\alpha(\tau) \theta | \pm(x_0 - r_0(\tau)) | \cdot \frac{|x^\beta - r^\beta(\tau)|}{|x_\alpha - r_\alpha(\tau) v^\alpha(\tau)|} \cdot \frac{\partial \delta\{(x-r(\tau))^2\}}{\partial \tau}$$

fazendo uma integração por partes na integral a direita:

$$\partial^\beta A_{ra}^\alpha(x) = 2e v^\alpha(\tau) \theta | \pm(x_0 - r_0(\tau)) | \frac{|x^\beta - r^\beta(\tau)|}{|x_\alpha - r_\alpha(\tau) v^\alpha(\tau)|} \cdot \delta\{(x-r(\tau))^2\} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ - 2e \int d\tau \delta\{(x-r(\tau))^2\} \frac{d}{d\tau} \left\{ \theta | \pm(x_0 - r_0(\tau)) | \cdot \frac{v^\alpha(\tau) |x^\beta - r^\beta(\tau)|}{|x_\alpha - r_\alpha(\tau) v^\alpha(\tau)|} \right\}$$

Como a função $\delta |(x-r(\delta))^2|$ só será diferente de zero para τ 's que sejam raízes de: $(x-r(\tau))^2=0$, e supondo que estes estão localizados em regiões definidas do espaço-tempo (pois são associados e posições temporais de partículas) teremos:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{r}_a}^{\beta} A_{\mathbf{r}_a}^{\alpha}(x) &= -2e \left| \int d\tau \delta |(x-r(\tau))^2| |\delta(x_0-r_0(\tau))| \cdot \frac{v^{\alpha}(\tau) |x^{\beta}-r^{\beta}(\tau)|}{|x_{\alpha}-r_{\alpha}(\tau)| \cdot v^{\alpha}(\tau)} + \right. \\ &\quad \left. + \int d\tau \delta |(x-r(\tau))^2| |\theta|_{\pm}(x_0-r_0(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau} \left| \frac{v^{\alpha}(\tau) |x^{\beta}-r^{\beta}(\tau)|}{|x_{\alpha}-r_{\alpha}(\tau)| \cdot v^{\alpha}(\tau)} \right| \right| \end{aligned}$$

observando a consideração feita após a equação 2(32) temos:

$$\partial_{\mathbf{r}_a}^{\beta} A_{\mathbf{r}_a}^{\alpha} = -2e \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left| \frac{v^{\alpha}(\tau) |x^{\beta}-r^{\beta}(\tau)|}{|x_{\alpha}-r_{\alpha}(\tau)| \cdot v^{\alpha}(\tau)} \right| |\theta|_{\pm}(x_0-r_0(\tau)) |\delta |(x-r(\tau))^2| \quad 2(34)$$

trocando os índices na equação 2(34) obteremos o 1º termo da direita de 2(2):

$$\partial_{\mathbf{r}_a}^{\alpha} A_{\mathbf{r}_a}^{\beta} = -2e \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left| \frac{v^{\beta}(\tau) |x^{\alpha}-r^{\alpha}(\tau)|}{|x_{\beta}-r_{\beta}(\tau)| \cdot v^{\beta}(\tau)} \right| |\theta|_{\pm}(x_0-r_0(\tau)) |\delta |(x-r(\tau))^2| \quad 2(35)$$

com isso podemos obter os campos $F^{\alpha\beta}$ a partir de 2(2), 2(34) e 2(35),

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{r}_a}^{\alpha} A_{\mathbf{r}_a}^{\beta} - \partial_{\mathbf{r}_a}^{\beta} A_{\mathbf{r}_a}^{\alpha} &= F_{\mathbf{r}_a}^{\alpha\beta} = -2e \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left| \frac{v^{\beta}(\tau) |x^{\alpha}-r^{\alpha}(\tau)| - v^{\alpha}(\tau) |x^{\beta}-r^{\beta}(\tau)|}{(x_{\mu}-r_{\mu}(\tau)) \cdot v^{\mu}(\tau)} \right| \\ &\quad x \pm |\theta|_{\pm}(x_0-r_0(\tau)) \delta |(x-r(\tau))^2| \quad 2(36) \end{aligned}$$

usando a relação 2(22) em 2(36) teremos as soluções;

$$F_{ra}^{\alpha\beta} = \frac{\pm e}{v_{\mu}(\tau) |x^{\mu} - r^{\mu}(\tau)|} \frac{d}{d\tau} \left| \frac{-v^{\beta}(\tau)(x^{\alpha} - r^{\alpha}(\tau)) + v^{\alpha}(\tau)(x^{\beta} - r^{\beta}(\tau))}{|x_{\mu} - r_{\mu}(\tau)| \cdot v^{\mu}(\tau)} \right| \Bigg|_{\tau_0}^{\tau_0'} \quad 2(37)$$

Vamos agora redefinir algumas variáveis do nosso problema e introduzir algumas outras para facilitar as nossas expressões. Para começar seja:

$$R^{\mu} \equiv x^{\mu} - r^{\mu}(\tau) \quad 2(38)$$

usando o resultado 2(19) escrevemos: $R_{ra}^{\mu} = (\pm |R|, \vec{R})$

Seja ainda a definição de um quadri-vetor tipo espaço unitário U_{μ} ortogonal a v^{μ} ,

$$U^{\mu} U_{\mu} = 1 \quad e \quad U^{\mu} v_{\mu} = 0 \quad 2(39)$$

Podemos então escrever o quadri-vetor R_{ra}^{μ} (os subíndices especificam o fato de R^{μ} ser calculado nos instantes retardados (r) e avançados (a)):

$$R_{ra}^{\mu} = \rho_{ra} (U^{\mu} \pm v^{\mu}/C) \quad e \quad \rho_{ra} = U_{\mu} R^{\mu}_{ra} = \pm v_{\mu} R^{\mu}_{ra}/C \quad 2(40)$$

Em termos dessas novas grandezas temos que os potenciais retardados 2(24) e avançados 2(27), que podem ser escrito em uma só expressão

$$\Lambda_{ra}^{\alpha} = \pm \frac{e v^{\alpha}(\tau)}{v_{\alpha}(\tau) |x^{\alpha} - r^{\alpha}(\tau)|} \Bigg|_{\tau_0}^{\tau_0'} \quad 2(41)$$

ficam como:

$$A_{ra}^{\alpha} = \frac{e}{C} \frac{v^{\alpha}}{\rho r_a} \quad 2(42)$$

Com a ajuda da equação 2(42) podemos esboçar uma interpretação para alguma das grandezas introduzidas. Considere o referencial de repouso da partícula, nele teremos:

$$v^{\mu} = (C, 0, 0, 0) \text{ e de } 2(39) \quad U^{\mu} = (0, \hat{U}) \quad 2(43)$$

Calculando agora a componente espacial de R_{ra}^{μ} com a ajuda de (40) vem que:

$$\vec{R}_{ra} = \rho r_a \hat{U} \quad 2(44)$$

E também temos que observando 2(43) e 2(42) vemos que:

$$\phi_{ra} = e/\rho r_a \quad \text{e} \quad \vec{A}_{ra} = \vec{0} \quad 2(45)$$

Então vemos que o vetor \vec{R}_{ra} obtido em 2(44) liga a partícula desde a posição atrasada ou adiantada até o ponto aonde queremos calcular o campo. Ou seja, tendo sua origem na partícula, \vec{R} tem a direção \hat{U} do ponto aonde queremos calcular o campo (\vec{r}) e seu módulo ρr_a é a distância entre a partícula e o ponto \vec{r} . Então podemos supor que U^{μ} e ρ sejam as generalizações covariantes desses conceitos.

Vamos agora escrever os campos 2(37) em termos dessas

novas grandezas; Podemos fazer isso com a ajuda de 2(40) e ficamos com:

$$F_{ra}^{\mu r}(x^\alpha) = \pm \frac{e}{\rho C^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v^\mu R^r - v^r R^\mu}{\rho} \right) \quad 2(46)$$

Podemos escrever $F_{ra}^{\mu r}$ 2(46) em uma forma diferente que nos será muito útil. Então depois de fazermos a derivada em relação ao tempo próprio τ e usarmos as relações 2(40) $F_{ra}^{\mu r}(x)$ fica (apêndice 2B):

$$F_{ra}^{\mu r} = \frac{e}{\rho^2 C} (v^\mu U^r - v^r U^\mu) + \frac{e}{\rho C^2} \left\{ (a^\mu v^r - a^r v^\mu) / C - U^\mu \left(\frac{v^r a^\mu \pm a^r v^\mu}{C} \right) + U^r \left(\frac{v^\mu a^r \pm a^\mu v^r}{C} \right) \right\} \quad 2(47)$$

onde $a_\mu = a_\mu U^\mu$ 2(48)

Da forma 2(47) do $F_{ra}^{\mu r}$ podemos ver uma separação bem nítida em duas partes; a primeira que depende da quadri-velocidade e cai com ρ^2 e a segunda que depende da aceleração e cai com ρ , as quais são chamadas respectivamente de campos de velocidades ou Coulombianos e campos de radiação. Os campos Coulombianos só são importantes a pequenas distâncias da partícula, se levarmos em conta a interpretação de ρ como o módulo do quadri-vetor R_{ra}^μ . Estes campos levam este nome pois diferem do campo Colombiano de uma partícula carregada em repouso somente por uma transformação de Lorentz, se não vejamos. Considere o referencial de repouso instantâneo da partícula 2(49), com isso os campos de velocidade ficam:

$$F_{\text{vel. a}}^{\mu r} = \frac{e}{\rho^2 C} (v^\mu u^r - v^r u^\mu)$$

para $\mu=0$ e $r=k \neq 0$: $F_{\text{vel. a}}^{0k} = \frac{e}{\rho^2 C} (v^0 u^k - v^k u^0) \Rightarrow F_{\text{vel. a}}^{0k} = \frac{e}{\rho^2} U^k$.

Então teremos o campo elétrico escrito como,

$$\vec{E}_{\text{vel. a}}^r = \frac{e\hat{U}}{R^2} \quad 2(49)$$

observando o resultado 2(44) e as componentes do tensor $F^{\mu r}$.

E para $\mu=k$ e $r=w$ onde k e $w \neq 0$ ficamos com:

$$F_{\text{vel. a}}^{k,w} = \frac{e}{\rho^2 C} (v^k u^w - v^w u^k) = 0 \quad 2(50)$$

o que implica que $\vec{B}=\vec{0}$ dá forma do tensor $F^{\mu r}$.

Logo obtivemos o campo Colombiano da partícula carregada em repouso, o que comprova nossa afirmativa.

Vemos que diferentemente dos campos de velocidade, os campos de aceleração são importantes a grandes distâncias da fonte que os produziu, uma vez que cai com ρ . Para o caso do referencial de repouso instantâneo, no qual $a^\mu = (0, \vec{a})$ (Veja Apêndice 3C), esses campos são dados por:

$$F_{\text{acel. a}}^{\mu r} = \frac{e}{\rho C^2} \left\{ \frac{(a^\mu v^r - a^r v^\mu)}{C} - U^\mu \left(\frac{v^r a_u}{C} + a^r \right) + U^r \left(\frac{v^\mu a_u}{C} + a^\mu \right) \right\}$$

$$F_{\text{acel. a}}^{0k} = \frac{e}{\rho C^2} \left\{ \frac{a^0 v^k - a^k v^0}{C} - U^0 \left(\frac{v^k a_u}{C} + a^k \right) + U^k \left(\frac{v^0 a_u}{C} + a^0 \right) \right\}$$

$$F_{\text{acel.}a}^{\text{ok}} = \frac{e}{\rho C^2} \left\{ -a^k + a_\mu U^\mu U^k \right\}; \text{ como } a_\mu U^\mu = -a_0 U^0 + a_k U^k = a \hat{U},$$

teremos; considerando o vetor campo elétrico formado pelas componentes $F_{\text{acel.}a}^{\text{ok}}$,

$$\vec{E}_{\text{acel.}a} = \frac{e}{RC^2} \{ -\vec{a} + (\vec{a} \cdot \hat{U}) \hat{U} \} = \frac{e}{RC^2} \hat{U} \times (\hat{U} \times \vec{a}) \quad 2(51)$$

E para $\mu=k$ e $r=w$, k e $w \neq 0$ teremos:

$$F_{\text{acel.}a}^{kw} = \frac{e}{\rho C^2} \left\{ \frac{(a^k v^w - a^w v^k)}{C} - U^k \left(\frac{v^w a^u}{C} \pm a^w \right) + U^w \left(\frac{v^k a^u}{C} \pm a^k \right) \right\}$$

$$F_{\text{acel.}a}^{kw} = \pm \frac{e}{\rho C^2} (-U^k a^w + U^w a^k) \text{ para } k=1 \text{ e } w=2 \text{ teremos:}$$

$$B_z = \pm \frac{e}{\rho C^2} (-U_x a_y + U_y a_x) = \pm \frac{e}{\rho C^2} (\hat{U} \times \vec{a})_z. \text{ Então}$$

podemos escrever: $\vec{B}_{\text{acel.}a} = \pm \frac{e}{RC^2} (\hat{U} \times \vec{a})$, que a partir de 2(51) pode ser escrito também como, $\vec{B}_{\text{acel.}a} = \hat{U} \times \vec{E}_{\text{acel.}a}$.

APÊNDICE 2A

$$\text{Temos: } \rho \frac{r}{a} = \mp v_{\mu} \frac{R^{\mu}}{a} / C$$

$$\text{então } \frac{d\rho}{d\tau} \frac{r}{a} = \dot{\rho} \frac{r}{a} = \pm a_{\mu} R^{\mu} \frac{r}{a} / C \pm v_{\mu} (-\dot{z}^{\mu}) / C$$

$$= \pm a_{\mu} \frac{R^{\mu}}{a} / C \mp C = \pm (1 + a_{\mu} U^{\mu} U_{\mu} R^{\mu} / C^2)$$

$$= \pm C (1 + a_{\mu} \rho / C^2)$$

2A(1)

Usando o resultado 2A(1) calculemos:

$$\frac{d}{d\tau} \left| \frac{1}{\rho} (x^{\mu} - z^{\mu}(\tau)) \right| = \frac{-v^{\mu}}{\rho} \pm \frac{R^{\mu} C}{\rho^2} (1 + a_{\mu} \rho / C^2)$$

Agora estamos prontos para calcular $F_{\frac{r}{a}}^{\mu r}$, como:

$$F_{\frac{r}{a}}^{\mu r} = \pm \frac{e}{\rho C^2} \frac{d}{d\tau} \left| \frac{v^{\mu} R^r}{\rho} - \frac{v^r R^{\mu}}{\rho} \right| = \pm \frac{e}{\rho C^2} \left\{ \frac{a^{\mu} R^r}{\rho} + v^{\mu} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{R^r}{\rho} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{a^r R^{\mu}}{\rho} - v^r \frac{d}{d\tau} \left(\frac{R^{\mu}}{\rho} \right) \right\} = \pm \frac{e}{\rho C^2} \left\{ \frac{a^{\mu} R^r}{\rho} + v^{\mu} \left(-\frac{v^r}{\rho} \pm \frac{R^r C}{\rho} (1 + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{\mu} \rho}{C^2} \right) - \frac{a^r R^{\mu}}{\rho} - v^r \left(-\frac{v^{\mu}}{\rho} \pm \frac{R^{\mu} C}{\rho^2} (1 + \frac{a_{\mu} \rho}{C^2}) \right) \right\} = \pm \frac{e}{\rho C^2} \left\{ \frac{a^{\mu} R^r}{\rho} - \right.$$

$$\left. - \frac{v^{\mu} v^r}{\rho} \pm \frac{v^{\mu} R^r C}{\rho^2} \pm \frac{v^{\mu} R^r a_{\mu}}{\rho C} - \frac{a^{\mu} R^{\mu}}{\rho} + \frac{v^r v^{\mu}}{\rho} \mp \frac{v^r R^{\mu} C}{\rho^2} \mp \frac{v^r R^{\mu} a_{\mu}}{\rho C} \right\}$$

Usando a definição $R^\mu = \rho(U^\mu \pm v^\mu/C)$, temos:

$$F_{\text{a}}^{\mu\text{r}} = \pm \frac{e}{\rho C^2} \left\{ \frac{a^\mu \rho}{\rho} \left(U^{\text{r}} \pm \frac{v^{\text{r}}}{C} \right) \pm \frac{v^\mu C \rho}{\rho^2} \left(U^{\text{r}} \pm \frac{v^{\text{r}}}{C} \right) \pm \frac{v^\mu \rho}{\rho C} \left(U^{\text{r}} \pm \frac{v^{\text{r}}}{C} \right) a_{\text{u}} - \right. \\ \left. - \frac{a^{\text{r}}}{\rho} \left(U^\mu \pm \frac{v^\mu}{C} \right) \mp \frac{v^{\text{r}} C \rho}{\rho^2} \left(U^\mu \pm \frac{v^\mu}{C} \right) \mp \frac{v^{\text{r}}}{\rho C} \rho \left(U^\mu \pm \frac{v^\mu}{C} \right) a_{\text{u}} \right\}$$

$$F_{\text{a}}^{\mu\text{r}} = \pm \frac{e}{\rho C^2} \left\{ (a^\mu U^{\text{r}} \pm \frac{a^\mu v^{\text{r}}}{C} \pm \frac{v^\mu U^{\text{r}} a_{\text{u}}}{C} + \frac{v^\mu v^{\text{r}} a_{\text{u}}}{C^2} - a^{\text{r}} U^\mu \mp \frac{a^{\text{r}} v^\mu}{C} \mp \right. \\ \left. \mp \frac{v^{\text{r}} U^\mu a_{\text{u}}}{C} - \frac{v^{\text{r}} v^\mu a_{\text{u}}}{C^2} \right) + \frac{1}{\rho} (\pm v^\mu U^{\text{r}} C + v^\mu v^{\text{r}} \mp v^{\text{r}} U^\mu C - v^{\text{r}} v^\mu) \left. \right\}$$

e agrupando nos termos que contenham fatores ρ^{-1} e ρ^{-2} teremos, o resultado desejado:

$$F_{\text{a}}^{\mu\text{r}} = \frac{e}{\rho^2 C} (v^\mu u^{\text{r}} - v^{\text{r}} u^\mu) + \\ + \frac{e}{\rho C^2} \left\{ (a^\mu v^{\text{r}} - a^{\text{r}} v^\mu) / C - U^\mu \left(\frac{v^\mu a_{\text{u}}}{C} \pm a^{\text{r}} \right) + U^{\text{r}} \left(\frac{v^\mu a_{\text{u}}}{C} \pm a^\mu \right) \right\}$$

APÊNDICE 2B

A partir da equação 2(10) podemos construir, usando o método de função de Green, a equação:

$$\square D(x, x') = \delta^{(4)}(x - x'), \text{ onde } \delta^{(4)}(x - x') = \delta(x^0 - x'^0) \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad 2B(1)$$

De tal forma que:

$$A^\alpha(x) = -\frac{4\pi}{C} \int dx'^4 D(x, x') J^\alpha(x') \quad 2B(2)$$

logo

$$\begin{aligned} \square A^\alpha(x) &= -\frac{4\pi}{C} \int dx'^4 \square D(x, x') J^\alpha(x') = \\ \square A^\alpha(x) &= -\frac{4\pi}{C} \int dx'^4 \delta^{(4)}(x - x') J^\alpha(x') = -\frac{4\pi}{C} J^\alpha(x) \end{aligned} \quad 2B(3)$$

e então vemos que 2B(2) é solução para o nosso problema. Sendo assim resolvamos a equação 2B(1), para tal observemos que uma vez que não existem condições de fronteira a função de $D(x, x')$ deve ser da forma $D(x - x') = D(Z)$, então 2B(1) fica:

$$\square_Z D(Z) = \delta^{(4)}(Z) \quad 2B(4)$$

Vamos usar agora para resolver 2B(4) o espaço dos números de onda K , para tal vamos substituir $D(Z)$ e $\delta^{(4)}(Z)$ por suas expansões numa base desse espaço, ou seja:

$$D(Z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4K \tilde{D}(K) e^{-iK_\alpha Z^\alpha} \quad 2B(5)$$

onde $K_\alpha Z^\alpha = -K_0 Z_0 + \vec{K} \cdot \vec{Z}$ e $\tilde{D}(K)$ é a transformada de Fourier de $D(Z)$.

$$\delta(Z)^{(4)} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4K e^{-iK_\alpha Z^\alpha} \quad 2B(6)$$

Substituindo 2B(5) e 2B(6) em 2B(4) teremos:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4K \tilde{D}(K) e^{-iK_\alpha Z^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4K e^{-iK_\alpha Z^\alpha}$$

$$\int \left(\frac{-\partial^2}{\partial Z_0^2} + \nabla_{\vec{Z}}^2 \right) e^{-iK_\alpha Z^\alpha} \tilde{D}(K) d^4K = \int d^4K e^{-iK_\alpha Z^\alpha}$$

$$\int \left(\frac{-\partial^2}{\partial Z_0^2} + \nabla_{\vec{Z}}^2 \right) e^{iK_0 Z_0} e^{-i\vec{K} \cdot \vec{Z}} \tilde{D}(K) d^4K = \int d^4K e^{-iK_\alpha Z^\alpha}$$

$$\int \left| (K_0^2 - |\vec{K}|^2) \tilde{D}(K) - 1 \right| e^{-iK_\alpha Z^\alpha} d^4K = 0$$

Logo teremos: $\tilde{D}(K) = \frac{1}{K_0^2 - K^2} \quad K = |\vec{K}|$

$$\text{e de (5): } D(Z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{K} e^{-i\vec{K} \cdot \vec{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} dK_0 \frac{e^{iK_0 Z_0}}{K_0^2 - K^2} \quad 2B(7)$$

Vamos supor agora que a variável K_0 é complexa ($\varepsilon \mathbb{C}$) e fazer a integral 2B(7) no plano complexo, pois como K_0 assume dois valores $\pm |K|$ que deixam indefinida a função que queremos integrar, a integral não seria definida no domínio $K_0 \in \mathbb{R}$. Con-

sidere o plano complexo:

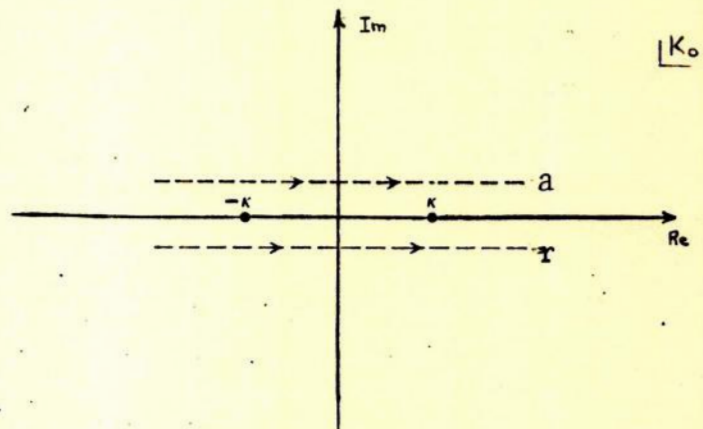


figura 1

$$K_0 = d + ie$$

Ao transformarmos K_0 de variável real para complexa, transformamos também a integral desejada em outra sobre um contorno fechado no plano complexo (fig. 1). Vemos da figura 1 que temos dois contornos possíveis r e a , a escolha de qual deles usar virá da observação da integral desejada I :

$$\begin{aligned} I &= \oint dK_0 \frac{e^{+iK_0 Z_0}}{K_0^2 - K^2} = \oint dK_0 \frac{e^{+i(d+ei)Z_0}}{K_0^2 - K^2} = \\ &= \oint dK_0 \frac{e^{+dZ_0 i} e^{-eZ_0}}{K_0^2 - K^2} \end{aligned}$$

1º Caso: $Z_0 > 0$ (solução retardada): Para a função ser limitada no infinito temos que fechar o contorno por cima $e > 0$, vemos então da fig. 1 que somente o contorno r é tal que os polos da função a ser integrada estão nele contido. Por isso, para podermos usar o teorema dos resíduos temos que usar o contorno r .

2º Caso: $Z_0 < 0$ (solução avançada): Neste caso o contorno deve ser fechado por baixo e $\epsilon < 0$, e dessa forma devemos usar o contorno a.

Consideremos a solução para o 2º caso:

$$I = \oint \frac{dK_0 e^{iK_0 Z_0}}{(K_0 - K)(K_0 + K)} = -2\pi i \left[\text{Res}_{(K_0 - K)} \frac{e^{iK_0 Z_0}}{(K_0 - K)(K_0 + K)} \Big|_{-K} + \text{Res}_{(K_0 + K)} \frac{e^{iK_0 Z_0}}{(K_0 - K)(K_0 + K)} \Big|_K \right]$$

$$I = -2\pi i \left[\frac{-e^{-iKZ_0}}{2K} + \frac{e^{iKZ_0}}{2K} \right] = \frac{-2\pi i \cdot i}{K} \left[\frac{e^{iKZ_0} - e^{-iKZ_0}}{2i} \right]$$

$$I = \frac{2\pi}{K} \text{sen } KZ_0 \tag{2B(8)}$$

agora introduzindo o resultado 2B(8) em 2B(7) teremos:

$$D_a(Z) = \frac{\theta(-Z_0)}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{K} e^{-i\vec{K} \cdot \vec{Z}} \frac{\text{Sen} KZ_0}{K}$$

onde $\theta(-Z_0)$ foi introduzida para garantir a região de validade da solução. Vamos agora introduzir a representação dos vetores em coordenadas esféricas, resolvendo a integral para as coordenadas angulares:

$$D_a(Z) = \frac{\theta(-Z_0)}{(2\pi)^3} \int K^2 \text{sen}\theta d\kappa d\theta d\alpha e^{-iKz\cos\theta} \frac{\text{sen} KZ_0}{K}, \text{ onde } z = |\vec{Z}|$$

$$D_a(Z) = \frac{\theta(-Z_0)}{(2\pi)^2} \int dK K \text{sen } Z_0 \int_0^\pi d\theta e^{-iKz\cos\theta} \text{sen}\theta$$

fazendo a transformação $x = \cos \theta$ $\left\{ \begin{array}{l} \theta = \pi \Leftrightarrow x = -1 \\ \theta = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{array} \right.$ então:

$$D_a(Z) = \frac{\theta(-Z_0)}{(2\pi)^2} \int dK K \operatorname{sen} KZ_0 \int_1^{-1} dx e^{-Kzx}$$

$$D_a(Z) = -\frac{\theta(-Z_0)}{2\pi^2 z} \int dK K \frac{\operatorname{sen} KZ_0}{K} \left| \frac{e^{iKz} - e^{-iKz}}{2i} \right|$$

$$D_a(Z) = -\frac{\theta(-Z_0)}{2\pi^2 z} \int dK \operatorname{sen} KZ_0 \operatorname{sen} Kz$$

resolvendo agora a parte em K ficamos com:

$$D_a(Z) = \frac{-\theta(-Z_0)}{2\pi^2 z} \int dK \left(\frac{e^{iKZ_0} - e^{-iKZ_0}}{2i} \right) \left(\frac{e^{iKz} - e^{-iKz}}{2i} \right)$$

$$D_a(Z) = \frac{\theta(-Z_0)}{8\pi^2 z} \left| \int_0^\infty dK e^{iK(z_0+z)} - \int_0^\infty dK e^{iK(z_0-z)} - \int_0^\infty dK e^{-iK(z_0-z)} + \right. \\ \left. + \int_0^\infty dK e^{-iK(z_0+z)} \right|$$

trocando na 3ª e na 4ª integrais K por $-K$ teremos:

$$D_a(Z) = \frac{\theta(-Z_0)}{8\pi^2 z} \left| \int_0^\infty dK e^{iK(z+z_0)} - \int_0^\infty dK e^{iK(z_0-z)} - \int_{-\infty}^0 dK e^{iK(z_0-z)} \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^0 dK e^{iK(z_0+z)} \right|$$

$$D_a(Z) = \frac{\theta(-Z_0)}{8\pi^2 z} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dK (e^{iK(z_0+z)} - e^{iK(z_0-z)}) \right| \quad 2B(9)$$

observando 2B(6) vemos que as duas integrais em 2B(9) são na verdade as deltas de Dirac:

$$\delta(x_0 - x'_0 + z) \quad \text{e} \quad \delta(x_0 - x'_0 - z) \quad 2B(10)$$

Uma vez que para essa solução avançada $z_0 < 0$, ou seja, $x_0 - x'_0 < 0$; teremos assim, uma vez que $z > 0$ que a 2ª delta em 2B(10) será sem pre nula, logo

$$D_a(x_0 - x'_0) = \frac{\theta |-(x_0 - x'_0)|}{4\pi z} \delta(x_0 - x'_0 + z) \quad 2B(11)$$

Repetindo o procedimento acima para o 1º caso obtemos a solução:

$$D_r(x_0 - x'_0) = \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{4\pi z} \delta(x_0 - x'_0 - z) \quad 2B(12)$$

Podemos escrever 2B(11) e 2B(12) em forma covariante pelo uso da identidade:

$$\delta |(x-x')^2| = \frac{1}{2z} |\delta(x_0 - x'_0 - z) + \delta(x_0 - x'_0 + z)|$$

Logo, uma vez que a função $\theta(\pm Z_0)$ selecionará uma das funções $\delta(Z_0 \pm z)$ teremos as soluções na forma covariante:

$$D_r(x-x') = \frac{1}{2\pi} \theta(x_0 - x'_0) \delta |(x-x')^2| \quad 2B(13)$$

$$D_a(x-x') = \frac{1}{2\pi} \theta(x'_0 - x_0) \delta |(x-x')^2| \quad 2B(14)$$

Vamos agora verificar o fato de que 2B(13) e 2B(14) são covariantes. A função $\delta |(x^\alpha - x'^\alpha)(x_\alpha - x'_\alpha)|$ é invariante por uma transformação de Lorentz, uma vez que seu argumento é invariante por ser um escalar de Lorentz. Vejamos agora o que ocorrer com as funções θ .

Consideremos uma transformação do referencial S para um outro S', tal que a velocidade relativa seja \vec{v} na direção x. Além disso para simplificar consideremos o problema em uma dimensão espacial apenas. Com isso teremos:

$$x^\mu = (x_0, x_1) \quad e \quad Z^\mu = (Z_0, Z_1) \quad 2B(15)$$

onde os x^μ se referem as coordenadas do campo e os Z^μ as da fonte.

As transformações de Lorentz serão:

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1) & Z'_0 &= \gamma(Z_0 - \beta Z_1) \\ x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta x_0) & Z'_1 &= \gamma(Z_1 - \beta Z_0) \end{aligned} \quad e \quad 2B(16)$$

Calculando a diferença entre as componentes temporais, no referencial S' teremos:

$$x^{0'} - z^{0'} = \gamma(x_0 - \beta x_1) - \gamma(Z_0 - \beta Z_1)$$

$$x^{0'} - z^{0'} = \gamma(x_0 - Z_0) - \gamma\beta(x_1 - Z_1)$$

Seja agora $\theta_r |x^0 - z^0| \delta |x - z|^2$. Fazendo a transformação para o referencial S' teremos:

$T\theta_r \longrightarrow \theta_r' |x^{0'} - z^{0'}| \delta |(x' - z')^2|$ e dos resultados anteriores :

$$\theta_r' = \theta_r \left\{ \gamma(x_0 - Z_0) - \frac{|\vec{v}|}{C} \gamma(x_1 - Z_1) \right\} \delta |(x^\mu - Z^\mu)^2|$$

vamos agora interpretar os termos no argumento de θ_+ :

- 1) $x_1 - Z_1$ = distância entre o ponto do campo e a da fonte
- 2) $\frac{x_1 - Z_1}{C} = \Delta t_1$ = tempo que a luz leva para percorrer essa distância
- 3) $|\vec{v}| \cdot \Delta t_1$ = distância percorrida pela partícula em Δt_1
- 4) $x_0 - Z_0 = c\Delta t_1$ = distância percorrida pela rad. eletrom. em Δt_1

Então concluímos que:

sempre que $x_0 > Z_0 \Rightarrow$ argumento de $\theta_r > 0 \Rightarrow \theta_r = 1$

sempre que $x_0 < Z_0 \Rightarrow$ argumento de $\theta_r < 0 \Rightarrow \theta_r = 0$

Essas conclusões vem do fato de que a distância percorrida pela luz (p.e.) será sempre maior que qualquer distância percorrida pela partícula no mesmo intervalo de tempo.

Fazendo a mesma transformação em $\theta_a |-(x^0 - Z^0)| \delta |(x-Z)^2|$ obtemos:

$$\theta'_a = \theta_a |\gamma\{-(x_0 - Z_0) - \beta(Z_1 - x_1)\}| \delta |(x-Z)^2|$$

donde tiramos: sempre que $x_0 > Z_0 \Rightarrow$ argumento de $\theta_a < 0 \Rightarrow \theta'_a = 0$
 sempre que $x_0 < Z_0 =$ argumentos de $\theta_a > 0 \Rightarrow \theta'_a = 1$

devido a razões análogas ao do caso anterior.

Logo vemos que as transformações do argumento das funções θ_{r_a} mantêm as restrições das funções θ_{r_a} originais sobre a função $\delta |(x^\mu - z^\mu)^2|$ que se manteve invariante. Ou seja, em qualquer referencial teremos:

$$D'_r(x' - Z') = \frac{1}{2\pi} \theta(x^{0'} - Z^{0'}) \delta |(x' - Z')^2|$$

$$D'_a(x' - Z') = \frac{1}{2\pi} \theta |-(x^{0'} - Z^{0'})| \delta |(x' - Z')^2|$$

que é exigido para uma solução covariante.

CAPÍTULO 3DETERMINAÇÃO DA RADIAÇÃO EMITIDAPOR UMA PARTÍCULA CARREGADA

Nesta seção estaremos interessados no cálculo explícito da radiação eletromagnética emitida por uma partícula carregada em movimento acelerado. Vamos escrevê-la em termos de grandezas da partícula, o que nos será de grande utilidade na determinação da equação da reação da radiação. Com tais objetivos, teremos que introduzir novas grandezas tais como o tensor de energia eletromagnética $M_{elm}^{\mu\nu}$ e o quadri-vetor momento-energia eletromagnético P_{elm}^{μ} .

Inicialmente vamos considerar as transformações de Lorentz não-homogêneas. Como sabemos, estas formam um grupo de Lie a 10 parâmetros, a saber: 4 relativos as translações, 3 as rotações e finalmente 3 aos boosts. Podemos obter o tensor de energia eletromagnético $M_{elem}^{\mu\nu}$ a partir dos geradores das translações infinitesimais do grupo de Lorentz não-homogêneo, com a ajuda da densidade de Lagrangiana para o campo eletromagnético livre:

$$L = - \frac{1}{16\pi} F_{\mu r} F^{\mu r} \quad 3(1)$$

e do teorema de Noether generalizado, para uma dada transformação a p parâmetros:

$$\partial_{\mu} F_i^{\mu} = 0 \quad (i=1,2,\dots,p)$$

3(2)

$$F_i^{\mu} \equiv L \delta_i^{\mu} x^{\mu} + \frac{\partial L}{\partial v_{K\mu}} (\delta_i^{\mu} U_K - v_{Kr} \delta_i^{\mu} x^r)$$

onde:

U_K são funções diferenciáveis das variáveis x^{μ} ($\mu=1,2,\dots,r$)

$$v_K^{\mu} \equiv \partial^{\mu} U_K \quad (K=1,2,\dots,n)$$

e

$\delta_i x^{\mu}$ são os parâmetros característicos de transformação infinitesimal em questão.

Com isso, podemos obter facilmente (apêndice 3A), o tensor simétrico momento-energia eletromagnético:

$$M_{elm}^{\mu r} = \frac{1}{4\pi} (F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^r + \frac{1}{4} g^{\mu r} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \quad 3(3)$$

que segue a lei de conservação,

$$\partial_{\mu} M_{elm}^{\mu r} = 0 \quad (\text{apêndice 3A}) \quad 3(4)$$

Podemos explicitar suas componentes com a ajuda de sua definição 3(3) e do tensor anti-simétrico, intensidade do campo eletromagnético $F^{\mu r}$ | 2(5) |.

Então expresso em termos dos campos \vec{E} e \vec{B} as componentes do tensor $M_{elm}^{\mu r}$ são escritas (vide apêndice 3B):

1º) Componentes temporal-temporal,

$$M^{00} = \frac{-1}{8\pi} (E^2 + B^2) \equiv -U \quad 3(5)$$

onde U é a densidade de energia eletromagnética.

2º) Componentes temporal-espacial, ($K=1,2,3$)

$$M^{0K} = \frac{-1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_K \quad 3(6)$$

e temos que

$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad 3(7)$$

é o vetor de Poyting.

3º) Componentes espacial-espacial, ($i=1,2,3$)

$$M^{iK} = \frac{1}{4\pi} |E_i E_K + B_i B_K - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta_{iK}| \quad 3(8)$$

as quais são idênticas as componente do tensor das tensões de Maxwell:

$$T = \frac{1}{4\pi} |\vec{E}\vec{E} + \vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \mathbf{1}| \quad 3(9)$$

Podemos escrever a lei de conservação (4) em termos das componentes de $M^{\mu r}$ como:

$$\begin{aligned} \text{a) } 0 &= \partial_{\mu} M^{\mu 0} = \partial_0 M^{00} + \partial_K M^{K0} = \frac{-\partial U}{c \partial t} + \frac{-1}{4\pi} \sum_K \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})_K}{\partial x_K} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial U}{c \partial t} + \frac{1}{C} \sum_K \frac{\partial \vec{S}_K}{\partial x_K} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \end{aligned} \quad 3(10)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 0 &= \partial_{\mu} M^{\mu K} = \partial_0 M^{0K} + \partial_i M^{iK} = \\ &0 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (T_{iK}) \end{aligned}$$

onde T_{iK} são as componentes do tensor das tensões de Maxwell.

$$\partial_{\mu} M^{\mu K} = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \vec{S}}{C^2 \partial t} = \vec{0} \quad 3(11)$$

As equações 3(10) e 3(11) expressam as leis diferenciais de conservação da Energia e do Momento do Campo eletromagnético livre, respectivamente.

Vamos nos preocupar agora com a obtenção de uma definição covariante para o momento eletromagnético. Para tal consideremos a grandeza:

$$P^{\mu} \equiv \frac{1}{C} \int_{\sigma \text{ tipo-espaço}} M_{\text{elm}}^{\mu\nu} d\sigma_r \quad 3(12)$$

Uma vez que o divergente quadri-dimensional de $M_{\text{elm}}^{\mu r}$ é zero [3(4)], P^{μ} é independente da superfície tipo espaço σ e por isso

é um quadri-vetor |10|. Vamos calcular suas componentes em um referencial particular, o qual nos permitirá identificar o quadri-vetor P^μ . Para tal considere o referencial no qual a normal a superfície tipo-espaço é $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$, ou seja, isso significa que estamos calculando a integral de $M^{\mu r}$ sobre todo o volume tridimensional num dado instante. Logo ficamos com:

$$P^\mu = \frac{1}{C} \int M^{\mu r} n_r d\sigma = -\frac{1}{C} \int M^{\mu 0} d\sigma$$

Então, usando 3(5) e 3(6),

$$P^0 = \frac{1}{C} \int U d^3x = \frac{1}{C} W_{elm}^{(0)} \quad 3(13)$$

onde $d\sigma$, uma superfície quadri-dimensional, equivale a um volume tri-dimensional. E o índice em $W_{elm}^{(0)}$ restringe a associação ao referencial em questão.

$$P^K = \frac{1}{C^2} \int S_K d^3x \Rightarrow \vec{P} = \frac{1}{C^2} \int \vec{S} d^3x = \vec{P}_{elm}^{(0)} \quad 3(14)$$

De tal forma que podemos identificar nosso vetor P^μ nesse referencial como sendo o próprio quadri-vetor momento energia, nesse referencial:

$$P^\mu(0) = P_{elm}^\mu(0) = \left(\frac{1}{C} W_{elm}^{(0)}, \vec{P}_{elm}^{(0)} \right) \quad 3(15)$$

E uma vez que tínhamos chegado a conclusão de que o P^μ é um quadri-vetor, podemos identificar completamente P^μ com o P_{elm}^μ de tal forma que podemos obter o P_{elm}^μ para um dado referencial pela aplicação da transformação de Lorentz apropriada sobre o

quadri-vetor obtido em 3(15). Fazendo isso para um referencial cuja normal a superfície tipo-espaço é dada por $n^\mu = (\gamma, \sqrt{\gamma^2 - 1} \hat{n})$ onde $\gamma \geq 1$ e \hat{n} é um vetor unitário tridimensional, obtemos para o vetor:

$$P_{elm}^\mu = \left(\frac{1}{C} W_{elm}, \vec{P}_{elm} \right) \quad 3(16)$$

as componentes:

$$W_{elm} = \gamma \int U \, d\sigma - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{C^2} \int \vec{S} \cdot \hat{n} d\sigma \quad 3(17)$$

$$\vec{P}_{elm} = \frac{\gamma}{C^2} \int \vec{S} \, d\sigma + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{C} \int T \cdot \hat{n} d\sigma \quad 3(18)$$

Então o quadri-vetor momento-energia P_{elm}^μ [3(16)], identificado com P^μ , é obtido através da definição 3(12).

Finalmente vamos calcular a taxa de emissão de momento e energia devido a radiação. Para tal podemos partir da definição 3(12) para P_{elm}^μ e obtermos uma relação conveniente e covariante, usando argumentos de conservação da quantidade de radiação emitida na ausência de outras fontes [10]. Mas nós não usaremos essa idéia e sim uma outra mais simples, que começa considerando a taxa de energia emitida na radiação, por um partícula carregada, quando observada de um de seus referenciais de repouso instantâneo: (S^0) .

$$P^0 = \frac{2e^2}{3C^3} |\vec{a}|^2 \quad 3(19)$$

que para \vec{a} igual a aceleração da partícula é a conhecida

formula de Larmor [11]. Observando a forma 3(19) e a forma covariante da aceleração (vide apêndice 3C) escrita em termos de \vec{v} e \vec{a} temos (onde \vec{v} é a velocidade da partícula):

$$a^\mu = \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}; \gamma^4 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) \quad 3(20)$$

Vemos que para o referencial em questão 3(20) fica escrita como:

$$a_0^\mu = (0; \vec{a})$$

onde o subíndice em a_0^μ indica o referencial particular aonde calculamos a aceleração. Então vemos que 3(19) pode ser escrito como:

$$P^0 = \frac{2e^2}{3c^3} a_0^\mu a_{0\mu} \quad 3(21)$$

Para generalizarmos a relação 3(21) para um referencial qualquer consideremos uma propriedade das taxas de Energia:

$$P^0 = \frac{dE^0}{dt^0} \quad 3(22)$$

Seja P^0 a taxa calculada em S^0 e P a taxa calculada no referencial S , dada as transformações de Lorentz, como a energia é a componente temporal do quadri-vetor momento energia esta se transforma igualmente a componente temporal do quadri-vetor posição, então:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{\gamma dE^0}{\gamma dt^0} = \frac{dE^0}{dt^0} = P^0 \quad 3(23)$$

Logo, por 3(23), P é um invariante. Então a generalização da rela-

ção 3(21) é trivial uma vez que nós sabemos que o quadrado de um quadri-vetor é um invariante, logo:

$$P = \frac{2e^2}{3C^3} a^\mu a_\mu \quad 3(24)$$

onde a^μ é a quadri-aceleração calculada em um referencial qualquer. Então a relação 3(24) nos dá a forma covariante para a taxa de emissão de energia.

Vamos obter agora a derivada em relação ao tempo próprio do quadri-vetor momento-energia eletromagnético devido a radiação; Para tal consideremos novamente o referencial inercial S^0 solidário à partícula carregada em movimento acelerado, e instantaneamente em repouso. Para esse caso especial do referencial S^0 usaremos os resultados clássicos para lei de conservação de energia e momento, escritos respectivamente nas formas [11] 3(25) e 3(27).

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{mec}} + E_{\text{campo}}) = - \oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} da \quad 3(25)$$

onde \hat{n} é a normal a superfície S e \vec{S} é o vetor de Poynting.

$$\frac{dE_{\text{mec}}}{dt} = + \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} d^3x \quad \text{e} \quad E_{\text{campo}} = \int_V U d^3x \quad 3(26)$$

onde \vec{J} é a densidade de corrente elétrica e U é a densidade de energia eletromagnética

$$\frac{d}{dt} (\vec{P}_{\text{mec}} + \vec{P}_{\text{campo}}) = \oint_S \sum_i T_{ij} n_i da \quad 3(27)$$

onde T_{ij} são as componentes do tensor das tensões de Maxwell |3(9)|.

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mec}}}{dt} = \int_V (\rho \vec{E} + \frac{1}{C} \vec{J} \times \vec{B}) dv \quad \text{e} \quad \vec{P}_{\text{campo}} = \frac{1}{4\pi C} \int (\vec{E} \times \vec{B}) d^3x \quad 3(28)$$

onde ρ é a densidade de carga elétrica e V é o volume limitado pela superfície S de 3(27).

Então, observando as relações que ligam a variação temporal da energia e do momento do sistema partícula mais campo, no volume V , com um fluxo de energia e momento devido a radiação eletromagnética através da superfície S (não estamos considerando agentes externos), vemos que em regiões próximas à partícula:

1º) Uma vez que instantaneamente a partícula está em repouso (vamos pensar nesse referencial como sendo o limite instantâneo de um não-inercial que acompanha a partícula) podemos dizer que o fluxo:

$$\vec{F} = \oint_S \sum_j T_{ij} n_j da$$

que pode ser considerado como a integral sobre toda superfície S de uma densidade superficial de força dada por:

$$f_i = \sum_j T_{ij} n_j x_i \quad i=1,2,3$$

deve se anular, ou seja, deve haver um equilíbrio das forças devidas a radiação.

2º) Para esse caso especial em que a velocidade da partícula é zero temos que o fluxo da componente normal do vetor de Poynting é dada pela formula de Larmor, ou seja é a taxa de emissão de energia 3(24):

$$\oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} da = P \quad 3(29)$$

Usando esses dois resultados teremos que para o nosso quadrive-
tor $\frac{dP_{\text{rad}}^{\mu}}{d\tau}$ no referencial S^0 suas componentes serão:

$$\left(\frac{d\vec{P}}{d\tau}\right)_{0\text{rad}} = \vec{0} \quad \left(\frac{dP^0}{d\tau}\right)_{\text{rad}} = + \frac{1}{C} P \quad 3(30)$$

Então no referencial S^0 teremos uma taxa temporal de momento devido a radiação nula e uma taxa temporal de energia (Potencia) dada pela fórmula de Larmor. Se agora quisermos determinar $\frac{dP_{\text{rad}}^{\mu}}{dt}$ em um referencial qualquer vemos de 3(30) que uma vez que o intervalo de tempo próprio ($d\tau$) é um invariante, necessitamos apenas fazer uma transformação de Lorentz para esse referencial, que fica simplificado pelo fato de P ser um invariante também. Então procedendo dessa forma teremos as componentes transformadas para o referencial S dadas por (apêndice 3D):

$$\frac{d\vec{P}_{\text{rad}}}{d\tau} = \frac{\gamma\beta P}{C} \quad e \quad \frac{dP^0_{\text{rad}}}{d\tau} = \frac{\gamma P}{C} \quad 3(31)$$

onde $\gamma = (1 - \beta^2/c^2)^{-1/2}$ e $\vec{\beta} = \vec{v}/c$.

E a partir de 3(31) e da forma do quadri-vetor velocidade; $v^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ teremos uma forma explicitamente covariante para a variação temporal do momento de radiação eletromagnética dada por:

$$\frac{dP_{\text{rad}}^\mu}{d\tau} = \frac{P}{c^2} v^\mu \quad 2(32)$$

que é o resultado desejado.

APÊNDICE 3A

Considerando as transformações de Lorentz não-homogêneas teremos:

$$x'^{\mu} = \alpha^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + \alpha^{\mu} \quad 3A(1)$$

Seja agora transformações infinitesimais; especificamente os parâmetros associados a translação ficarão escritos em 1ª aproximação:

$$\alpha^{\mu} = \epsilon^{\mu} + \dots \quad 3A(2)$$

Então considerando $\delta x^{\mu} = \epsilon^{\mu}$ arbitrárias e linearmente independentes, e do fato que $\delta A^{\alpha} = 0$ para translações (que é uma propriedade de qualquer quadri-vetor), usando 3(2) teremos:

$$\partial_{\alpha} T_{elm}^{\alpha\beta} = 0 \quad 3A(3)$$

e

$$T_{elm}^{\alpha\beta} = + \left(\frac{\partial L}{\partial \partial_{\alpha} A^{\lambda}} \partial^{\beta} A^{\lambda} - g^{\alpha\beta} L \right) \quad 3A(4)$$

onde L é dada por 3(1). Desenvolvendo 3A(4) teremos:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{-\partial}{\partial(\partial_{\alpha} A^{\lambda})} \left| \frac{(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu})(\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu})}{16\pi} \right| \partial^{\beta} A^{\lambda} - g^{\alpha\beta} L$$

onde usamos a definição de $F^{\mu\nu}$ dada em 2(2);

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A^\lambda)} \left| g_{\sigma r} \partial_\mu A^\sigma F^{\mu r} - g_{a\mu} \partial_r A^a F^{\mu r} + \right.$$

$$\left. + g^{b\mu} \partial_b A^r F_{\mu r} - g^{Cr} \partial_C A^\mu F_{\mu r} \right| \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta} L$$

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{16\pi} \left| g_{\sigma r} \delta_\alpha^\mu \delta_\lambda^\sigma F^{\mu r} - g_{a\mu} \delta_\alpha^r \delta_\lambda^a F^{\mu r} + g^{b\mu} \delta_\alpha^b \delta_\lambda^r F_{\mu r} - \right.$$

$$\left. - g^{Cr} \delta_\alpha^C \delta_\lambda^\mu F_{\mu r} \right| \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta} L$$

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{16\pi} \left| g_{\lambda r} F^{\alpha r} - g_{\lambda\mu} F^{\mu\alpha} + g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} - g^{\alpha r} F_{\lambda r} \right| \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta} L$$

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{16\pi} \left| F_\lambda^\alpha - F_\lambda^\alpha + F_\lambda^\alpha - F_\lambda^\alpha \right| \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta} L$$

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{16\pi} \left| 4F_\lambda^\alpha \right| \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta} L$$

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\lambda} \partial^\beta A_\lambda - g^{\alpha\beta} \cdot \left(-\frac{1}{16\pi} F^{\mu r} F_{\mu r} \right)$$

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} (F^{\alpha\lambda} \partial^\beta A_\lambda - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\mu r} F_{\mu r})$$

usando novamente 2(2) na forma $\partial^\beta A_\lambda = -F_\lambda^\beta + \partial_\lambda A^\beta$, vem

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} (F^{\alpha\lambda} F_\lambda^\beta + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\mu r} F_{\mu r}) - \frac{1}{4\pi} F^{\alpha\lambda} \partial_\lambda A^\beta \quad 3A(5)$$

Podemos definir o tensor simétrico momento-energia eletromagnético, $M_{elm}^{\alpha\beta}$, observando que o último termo da direita em 3A(5) tem uma quadri-divergência nula:

$$\partial_\alpha (F^{\alpha\lambda} \partial_\lambda A^\beta) = \partial_\alpha \partial_\lambda (F^{\alpha\lambda} A^\beta) - \partial_\alpha (A^\beta \partial_\lambda F^{\alpha\lambda}) \quad 3A(6)$$

O 1º termo da direita se anula pois é o produto de um tensor simétrico ($\partial_\alpha \partial_\lambda$) por outro anti-simétrico ($F^{\alpha\lambda}$), e o 2º se anulará devido as equações para o campo livre $\partial_\lambda F^{\alpha\lambda} = 0$. Então definido $M_{elm}^{\alpha\beta}$ como:

$$M_{elm}^{\alpha\beta} = T_{elm}^{\alpha\beta} + \frac{1}{4\pi} F^{\alpha\lambda} \partial_\lambda A^\beta \quad 3A(7)$$

vemos que este satisfaz a relação: $\partial_\alpha M_{elm}^{\alpha\beta} = 0$ 3(4) e é dado explicitamente em termos de $F^{\mu\nu}$ por 3(3).

APÊNDICE 3B

Vamos começar calculando a componente temporal-temporal, para tal, usemos a definição 3(3) de $M_{elm}^{\alpha\beta}$ e 2(3) de $F^{\mu r}$

$$M^{00} = \frac{1}{4\pi} (g_{\alpha r} F^{0\alpha} F^{r0} + \frac{1}{4} g^{00} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \quad 3B(1)$$

temos que

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -2(E^2 - B^2) \quad 3B(2)$$

então:

$$M^{00} = \frac{1}{4\pi} (g_{00} F^{00} F^{00} + g_{11} F^{01} F^{10} + g_{22} F^{02} F^{20} + g_{33} F^{03} F^{30} + \frac{1}{2}(E^2 - B^2))$$

onde usamos a convenção da soma para índices repetidos,

$$M^{00} = \frac{1}{4\pi} (-E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + \frac{1}{2}(E^2 - B^2))$$

$$M^{00} = -\frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = -U \quad 3B(3)$$

Vamos obter agora as componentes temporal-espacial:

$$M^{0i} = \frac{1}{4\pi} (g_{\alpha r} F^{0\alpha} F^{ri} + g^{0i} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \text{ onde } i=1,2,3$$

$$M^{0i} = \frac{1}{4\pi} (g_{\alpha r} F^{0\alpha} F^{ri}) = \frac{1}{4\pi} (F^{01} F^{1i} + F^{02} F^{2i} + F^{03} F^{3i})$$

$$\text{Para } i=1, \quad M^{01} = \frac{1}{4\pi} (F^{01} F^{11} + F^{02} F^{21} + F^{03} F^{31})$$

$$M^{01} = \frac{1}{4\pi} (0 - E_y B_z + E_z B_y) = - \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_x$$

e analogamente teremos para $i=2$ e 3 ;

$$M^{02} = - \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_y \quad \text{e} \quad M^{03} = - \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_z$$

o que se escreve em forma geral como:

$$M^{0i} = - \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i \quad 3(6)$$

Finalmente calculando as componentes espacial-espacial teremos:

$$M^{iK} = \frac{1}{4\pi} (g_{\alpha r} F^{i\alpha} F^{rK} + \frac{1}{4} g^{iK} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})$$

$$i = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad K = 1, 2, 3$$

$$M^{iK} = \frac{1}{4\pi} (-F^{i0} F^{0K} + F^{i1} F^{1K} + F^{i2} F^{2K} + F^{i3} F^{3K} - \frac{g^{iK}}{2} (E^2 - B^2))$$

$$1) \quad i \neq K; \quad M^{iK} = \frac{1}{4\pi} (-F^{i0} F^{0K} + F^{i1} F^{1K} + F^{i2} F^{2K} + F^{i3} F^{3K})$$

$$\text{para } i=1 \text{ e } K=2; \quad M^{12} = \frac{1}{4\pi} (-F^{10} F^{02} + F^{11} F^{12} + F^{12} F^{22} + F^{13} F^{32})$$

$$M^{12} = \frac{1}{4\pi} (E_x E_y + B_x B_y) \quad 3B(4)$$

e generalizando para valores de i e K quaisquer e identificados em coordenadas cartesianas como; $x=1$, $y=2$ e $z=3$

$$M^{ik} = \frac{1}{4\pi} (E_i E_k + B_i B_k)$$

$$2) \quad i=K; \quad M^{iK} = \frac{1}{4\pi} (-F^{i0} F^{0K} + F^{i1} F^{1K} + F^{i2} F^{2K} + F^{i3} F^{3K} - \frac{1}{2}(E^2 - B^2))$$

para $i=K=3$;

$$M^{33} = \frac{1}{4\pi} (-F^{30} F^{03} + F^{31} F^{13} + F^{32} F^{23} - \frac{1}{2}(E^2 - B^2))$$

$$M^{33} = \frac{1}{4\pi} (E_z^2 - B_y^2 - B_x^2 - \frac{E^2}{2} + (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \frac{1}{2})$$

$$M^{33} = \frac{1}{4\pi} (E_z^2 - \frac{E^2}{2} + \frac{1}{2}(-B_x^2 - B_y^2 + B_z^2))$$

$$M^{33} = \frac{1}{4\pi} (E_z E_z + B_z B_z - \frac{1}{2}(E^2 + B^2))$$

e analogamente para $i = k = 1$ e 2 ;

$$M^{ii} = \frac{1}{4\pi} (E_i E_i + B_i B_i - \frac{1}{2}(E^2 + B^2)) \quad 3B(5)$$

Observando 3B(4) e 3B(5) vemos que podemos escrever uma forma geral para os casos 1 e 2, na forma;

$$M^{iK} = \frac{1}{4\pi} (E_i E_K + B_i B_K - \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \delta_{iK}) \quad 3(8)$$

$i = 0, 1, 2, 3$ e $K = 0, 1, 2, 3$

APÊNDICE 3C

Sabendo-se que $v^\mu = (\gamma C; \gamma \vec{V})$ temos:

$$a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dv^\mu}{dt} = \gamma \left(C \frac{d\gamma}{dt}; \frac{d\gamma}{dt} \vec{V} + \gamma \frac{d\vec{V}}{dt} \right) \quad 3C(1)$$

Calculemos separadamente a derivada temporal do termo $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$;

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-3/2} (-2 \frac{\vec{v}}{c^2}) \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \quad 3C(2)$$

Substituindo 3C(2) em 3C(1) teremos:

$$a^\mu = \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}; \gamma^4 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^2} \vec{V} + \gamma^2 \vec{a} \right) \quad 3(20)$$

APÊNDICE 3D

Vamos fazer a transformação de Lorentz que leva do referencial S^0 para um referencial inercial qualquer, cuja velocidade relativa a S^0 é \vec{V} .

$$x^\mu = \omega^\mu{}_\alpha x_0^\alpha \quad 3D(1)$$

No nosso caso temos:

$$x_0^\alpha = \left(\frac{dP_0^\mu}{d\tau} \right)_{\text{rad}} = \left(+ \frac{P}{C}, \vec{0} \right) \quad 3D(2)$$

E

$$\omega^\mu{}_\alpha = A(\vec{\beta}) = \begin{vmatrix} \gamma & +\gamma\beta_1 & +\gamma\beta_2 & +\gamma\beta_3 \\ +\gamma\beta_1 & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ +\gamma\beta_2 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ +\gamma\beta_3 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{vmatrix} \quad 3D(3)$$

obtido por |11|.

Então fazendo a aplicação 3D(1) obtemos $x^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau}$;

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{array} \right| \\
 = \\
 \left| \begin{array}{cccc|c}
 \gamma & A_{01} & A_{02} & A_{03} & +P/C \\
 \gamma\beta_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\
 \gamma\beta_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\
 \gamma\beta_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{array} \right| \\
 = \\
 \left| \begin{array}{c}
 +\gamma P/C \\
 +\gamma\beta_1 P/C \\
 +\gamma\beta_2 P/C \\
 +\gamma\beta_3 P/C
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\log_0 \frac{dP^\mu}{d\tau} = \left(\frac{\gamma P}{C}, \frac{\gamma \vec{\beta} P}{C} \right)$$

3D(4)

CAPÍTULO 4COMO SÃO OBTIDAS AS EQUAÇÕES

Chegamos agora na parte central da discussão, que é a obtenção propriamente dita da equação de movimento para a partícula carregada. Para tal usaremos as leis de conservação do momento e da energia, um argumento que leva em conta o caráter fenomenológico das equações a serem obtidas e condições assintóticas. Com os três primeiros argumentos chegaremos a uma equação diferencial linear de 3º ordem na posição, a conhecida equação de Lorentz-Dirac. Depois disso usando as condições assintóticas chegaremos a uma equação de movimento integro-diferencial de 2º ordem, que será nosso resultado final.

Primeiramente vamos determinar condições assintóticas razoáveis para o nosso problema: Uma partícula carregada executando um movimento qualquer. Imaginemos que o movimento executado pela partícula seja acelerado, onde essa aceleração é qualquer uma, fisicamente possível (causada por qualquer agente externo real). Como vimos na seção anterior a partícula nessas condições perde energia na taxa dada por 3(24), então para um sistema fisicamente possível (dotado de uma quantidade finita de energia) é razoável supor que dentro de um intervalo de tempo finito o agente externo cessará de exercer ação sobre a partícula carregada. Baseado nesse argumento e observando a relação 3(20) poderemos introduzir a primeira das condições assintóticas:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} a^\mu = 0 \quad 4(1)$$

a qual nos garante que estamos tratando com um sistema físico. Poderia se pensar em restrições para o uso dessa condição: por exemplo ao considerarmos estados ligados de partículas carregadas. Mas estes também não fugiriam aos argumentos colocados, uma vez que todos os sistemas ligados de partículas carregadas (por exemplo átomo de hidrogênio) são classicamente instáveis, tendendo rapidamente a estados de movimento não-acelerado.

Consideremos agora que dado um sistema físico; uma vez que a ação de qualquer agente externo se dá durante um intervalo de tempo finito, e parte da energia cedida a partícula carregada é perdida sobre a forma de radiação. Devemos esperar que o estado final da partícula seja bem definido, igualmente ao estado inicial, o qual ainda não tinha sofrido ação de agentes externos. Com isso podemos formular a 2ª condição assintótica, que fica:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} v^\mu = v_{in}^\mu \quad e \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} v^\mu = v_{out}^\mu \quad 4(2)$$

aonde v_{in}^μ e v_{out}^μ tem valores bem definidos, independentes do tempo próprio. Ou seja, depois de terminada, a ação do agente externo a partícula estará em um movimento inercial cuja velocidade é limitada e bem definida.

Agora podemos nos preocupar em obter a equação diferencial linear de 3ª ordem na posição. Para isso usaremos primeira-

mente as leis de conservação do momento e da energia. Para tal precisamos calcular o momento dos campos solidário à partícula ("Colombiano") e dos campos livres (devido a radiação e externos).

Vamos considerar inicialmente as soluções das equações de Maxwell para partícula carregada (2(6)) em um ponto x^μ qualquer. Estas podem ser formadas pelos campos retardados $F_r^{\mu r}$ mais campos livres externos $F_{in}^{\mu r}$, soluções da equação homogênea associada. Então teremos os campos solução escritos na forma:

$$F_s^{\mu r} = F_r^{\mu r} + F_{in}^{\mu r} \quad 4(3)$$

A outra solução possível envolve os campos avançados $F_a^{\mu r}$ além de uma solução da equação homogênea que chamaremos $F_{out}^{\mu r}$, e estará associada aos campos livres externos e de radiação. E essa segunda solução será escrita

$$F_s^{\mu r} = F_a^{\mu r} + F_{out}^{\mu r} \quad 4(4)$$

Podemos interpretar os campos livres $F_{in}^{\mu r}$ e $F_{out}^{\mu r}$ como sendo, o primeiro, os campos externos incidentes sobre a partícula e o segundo, os mesmos campos anteriores mais os campos de radiação em regiões próximas a partícula. Baseados nessa interpretação teremos o tensor do campo eletromagnético devido a radiação dada por:

$$F_{rad}^{\mu r} = F_{out}^{\mu r} - F_{in}^{\mu r} \quad 4(5)$$

Usando as relações 4(3) e 4(4) podemos escrever $F_{\text{rad}}^{\mu r}$ em termos das soluções avançadas e retardadas,

$$F_{\text{rad}}^{\mu r} = F_r^{\mu r} - F_a^{\mu r} \quad 4(6)$$

Notadamente, essa forma de escrever o Tensor de radiação não coincide com a maneira clássica, que identifica termos da solução atrasada com a parte dos campos relativa a radiação (Vide Capítulo 2). Mas como em pontos distantes da partícula (região passível de medida) temos a coincidência das duas formas, uma vez que nessa $F_a^{\mu r}$ é nulo (pois a partícula responsável por seu aparecimento não estaria mais em movimento acelerado), podemos usar a forma 4(5) sem o risco de esta não representar o conceito físico desejado. Um dos resultados interessantes da forma 4(6) para o campo da radiação, é que para regiões próximas da linha de mundo este é bem definido, e sobre a linha de mundo temos o valor (Apêndice 4A):

$$F_{\text{rad}}^{\mu r} = -\frac{8e}{3C^4} \dot{a}^{\mu} |v^r| \quad 4(7); \quad \text{onde } \dot{a}^{\mu} |v^r| \equiv \frac{1}{2}(\dot{a}^{\mu} v^r - \dot{a}^r v^{\mu}) \quad 4(8)$$

Vamos agora definir um novo quadri-vetor que será dado por:

$$f^{\mu r} = F_s^{\mu r} - \frac{1}{2} (F_r^{\mu r} + F_a^{\mu r}) \quad 4(9)$$

Como podemos ver das relações 4(3) e 4(4), $f^{\mu r}$ é um tensor formado por campos livres e é dado explicitamente por:

$$f^{\mu r} = \frac{1}{2} (F_{\text{in}}^{\mu r} + F_{\text{out}}^{\mu r}) \quad 4(10)$$

Podemos agora calcular o momento devido aos campos da partícula carregada, para tal usemos a definição obtida por Rorlich [10] para o momento que flui por uma dada superfície em um intervalo de tempo escolhido:

$$\Delta P_{elm}^{\mu} = \int_{\Delta\sigma(\text{tipo tempo})} M_{elm}^{\mu r} d^3\sigma_r \quad 4(11)$$

Para o nosso cálculo usaremos uma "quadri-superfície" que é um cilindro de raio bem pequeno ρ , que envolve a linha de mundo da partícula carregada entre os instantes τ_1 e τ_2 (relacionados aos pontos 1 e 2). Então com a ajuda da definição 3(3) para o tensor simétrico $M_{elm}^{\mu r}$ e usando a solução 4(3) obtivemos para o momento do campo eletromagnético da partícula carregada, o valor (apêndice 4B):

$$- \frac{1}{C} \int_1^2 M_{elm}^{\mu r} d\sigma_r = \int_1^2 \left(\frac{dP_{Coul}^{\mu}}{d\tau} - \frac{e}{C} f^{\mu r} v_r \right) d\tau \quad 4(12)$$

onde P_{Coul}^{μ} é o quadri-momento associado ao campo Coulombiano da partícula em movimento. Observando o integrando do termo da direita da relação acima vemos que, uma vez que $f^{\mu r}$ está associado aos campos livres o fluxo de momento e energia devido a $f^{\mu r}$, é independente da superfície fechada entorno da partícula escolhida. Com isso vemos que o termo $(e/C) f^{\mu r} v_r$ só pode depender dos instantes inicial e final escolhidos, ou seja, é uma diferencial exata. Como o mesmo é válido para $dP_{Coul}^{\mu}/d\tau$ podemos escrever:

$$\left(\frac{dP_{Coul}^{\mu}}{d\tau} - \frac{e}{C} f^{\mu r} v_r \right) d\tau = dP_{Coul}^{\mu} + dP^{\mu} \quad 4(13)$$

onde $dP^\mu = -e/C \int_{\mathcal{V}} f^{\mu r} v_r d\tau$ 4(14), é a variação do momento devido ao campo eletromagnético livre.

Vamos agora considerar as leis diferenciais de conservação de energia e momento para o sistema composto pela partícula mais campos eletromagnéticos Coulombianos e livres. Então chamando o momento da partícula de P_y^μ teremos:

$$dP_y^\mu + dP_{\text{Coul}}^\mu + dP^\mu = 0 \quad 4(15)$$

que escrito explicitamente em termos das expressões do momento Coulombiano (apêndice 4B) e do momento da partícula fica:

$$d(m_p v^\mu) + d\left(\left(\frac{e^2}{2\rho C^2}\right)v^\mu\right) + dP^\mu = 0 \quad 4(16)$$

onde m_p é a massa da partícula e e é a sua carga. Observando atentamente a equação 4(16) constatamos a presença de dois grandes problemas, a saber:

1º No termo devido a variação do momento Coulombiano, o fator $e^2/2\rho C^2$ que está associado a inércia do campo (baseando-se na equivalência de massa e energia) tem uma dependência explícita do raio do tubo ρ , usado na determinação da quantidade de momento e energia que fluem pela superfície do tubo no intervalo de tempo $\tau_1 - \tau_2$.

2º O primeiro termo nos dá a massa da partícula isoladamente, o que fisicamente não é muito relevante, uma vez que não conseguimos medir a massa da partícula sem medir simultaneamente a contribuição devido ao campo Coulombiano, que sempre está presente na região da partícula carregada. Com isso, a massa m_p isoladamente não deve aparecer em nossa equação, configurando assim seu caráter notadamente fenomenológico.

Podemos resolver esses dois problema e obter uma equação para partícula carregada baseando-se na hipótese de que esta deve ser uma equação fenomenológica. Assim devemos ter um termo em que apareça explicitamente a massa associado ao sistema partícula mais campo Coulombiano, ou seja, a variação do momento desse sistema. Observando a equação 4(16) vemos que, uma vez que a quadri-velocidade de ambos os componentes do sistema é a mesma (no nosso modelo), se definirmos a massa do mesmo como sendo a soma dos seus constituintes, teremos:

$$m = m_p + e^2/2\rho C^2 \quad 4(17)$$

E um novo momento $P_S^\mu = P_Y^\mu + P_{Coul}^\mu \quad 4(18)$

assim nossa equação pode ser escrita na forma:

$$dP_S^\mu + dP^\mu = 0 \quad 4(19)$$

Vamos considerar agora a presença de forças externas; para introduzi-las em nossa equação vamos lançar mão da idéia clássica baseada na 2º lei de Newton, escrita na forma:

$$\frac{dP_{\text{class}}^{\mu}}{d\tau} = F_{\text{ext}}^{\mu} \quad 4(20)$$

logo reescrevendo 4(19) para o novo sistema considerado teremos:

$$dP_S^{\mu} + dP^{\mu} = F_{\text{ext}}^{\mu} d\tau \quad 4(21)$$

Podemos reescrever o termo $f^{\mu r}$, baseando-se nas relações 4(3), 4(6) e 4(9) como:

$$f^{\mu r} = F_{\text{in}}^{\mu r} + \frac{1}{2} F_{\text{rad}}^{\mu r} \quad 4(22)$$

Consideremos agora o limite em que o tubo tende a linha de mundo da partícula, ou seja, o limite $\rho \rightarrow 0$ nas nossas equações, uma vez que isso nos permitirá escrever $F_{\text{rad}}^{\mu r}$ na forma 4(7). Assim,

$$f^{\mu r} = F_{\text{in}}^{\mu r} - \frac{4e}{3C^4} \dot{a} |\mu_{\nu} r| \quad 4(23)$$

Observemos que ao fazermos o limite acima mencionado, ficaremos com um momento Coulombiano infinito pois a massa a ele ligada tende para infinito. Então a equação 4(16) perderia o significado nessa situação. Temos então que lançar mão da idéia que para compensar o infinito associado a massa do campo teríamos um infinito de sinal contrário relativo a massa da partícula, cuja soma com a primeira resultasse no valor de massa mensurável atribuído ao eletron.

Tendo em vista a discussão acima, vemos que no modelo da partícula puntiforme devemos tomar como equação fundamental

para conservação do momento e da energia, a relação 4(19). Esta não apresenta infinitudes ou ambiguidades dos termos nela contidos. Utilizando então 4(14), 4(23) e a relação $\dot{a}^\mu v_\mu = -a^\mu a_\mu$ 4(24) (resultado este deduzível a partir da invariância de $v^\mu v_\mu$); podemos escrever a partir da lei de conservação 4(21) para um sistema sobre a ação de um agente externo, a equação:

$$ma^\mu = \frac{e}{c} F_{in}^\mu r_{v_r} + F_{ext}^\mu + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\dot{a}^\mu - \frac{1}{c^2} a^\lambda a_\lambda v^\mu \right) \quad 4(25)$$

que é a equação diferencial linear de 3º ordem na posição que estavamos procurando.

Observando a equação 4(25) vemos que esta não é uma equação de movimento, no sentido da física clássica, uma vez que contém um termo que depende explicitamente da quadri-variação temporal da aceleração. Vamos integrar essa equação uma vez em relação ao tempo próprio e tentar obter uma nova equação mais próxima da idéia clássica de equação de movimento. Para tal precisaremos usar as condições assintóticas 4(1), as quais, nos dão os valores da quadri-aceleração em pelo menos um tempo próprio (o que é uma condição necessária para obtenção de $a^\mu(\tau)$).

Um vez que sô precisaremos de uma das condições usaremos aquela que diz que:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} a^\mu(\tau) = 0 \quad 4(26)$$

mas pode-se mostrar que a outra é tão boa quanto essa (apêndice 4C), não introduzindo assim (ao escolhermos 4(26)) qualquer restrição à nossa solução.

Começemos então o nosso programa por definir duas novas grandezas:

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mC^3} \quad 4(27)$$

$$K^\mu(\tau) = F_{in}^\mu + F_{ext}^\mu - \frac{2}{3} \frac{e^2}{C^5} a^\lambda a_\lambda v^\mu \quad 4(28)$$

$$\text{onde } F_{in}^\mu = \frac{e}{C} F_{in}^{\mu r} v_r \quad 4(29)$$

Introduzindo essas grandezas em 4(25) ela assume a forma:

$$m(a^\mu - \tau_0 \dot{a}^\mu) = K^\mu \quad 4(30)$$

essa equação é facilmente solúvel, pela multiplicação do fator integrante $e^{-\tau/\tau_0}$, que dá:

$$-\frac{d}{d\tau} (e^{-\tau/\tau_0} a^\mu(\tau)) = \frac{1}{m\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} K^\mu(\tau) \quad 4(31)$$

logo:

$$-\int_{g^\mu(\tau)}^{\lim_{\tau \rightarrow \infty} g^\mu(\tau)} d(e^{-\tau'/\tau_0} a^\mu(\tau')) = \frac{1}{m\tau_0} \int_{\tau}^{\infty} e^{-\tau'/\tau_0} K^\mu(\tau') d\tau' \quad 4(32)$$

$$\text{onde } g^\mu(\tau) = e^{-\tau/\tau_0} a^\mu(\tau) \quad 4(33)$$

Então usando a condição assintótica 4(26) obteremos uma condição mais fraca que esta (a qual usaremos), mas que é essencial para escrevermos a equação desejada. Essa nova condição é:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g^\mu(\tau) = 0 \quad 4(34)$$

Logo a equação 4(32) se reduz a:

$$a^\mu(\tau) = \frac{e^{\tau/\tau_0}}{m\tau_0} \int_{\tau}^{\infty} e^{-\tau'/\tau_0} K^\mu(\tau') d\tau' \quad 4(35)$$

A equação acima ainda não é nosso resultado final uma vez que ela não é suficiente para garantir nenhuma das condições assintóticas, vamos então fazer uma nova integração no tempo próprio, de um valor τ até $+\infty$ (ou de $-\infty$ até τ), e usar as condições assintóticas 4(2); para obtermos:

$$p^\mu(\tau) = p_{in}^\mu + \frac{1}{\tau_0} \int_{-\infty}^{\tau} e^{\tau'/\tau_0} d\tau' \int_{\tau'}^{\infty} e^{-\tau''/\tau_0} K^\mu(\tau'') d\tau'' \quad 4(36)$$

$$p^\mu(\tau) = p_{out}^\mu - \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau}^{\infty} e^{\tau'/\tau_0} d\tau' \int_{\tau'}^{\infty} e^{-\tau''/\tau_0} K^\mu(\tau'') d\tau''$$

Dessas duas equações podemos ver que, se existe soluções para elas, ou seja, as integrais dão valores definidos, vale de imediato a condição assintótica 4(2). Vale também a condição 4(1) pois esta aparece como uma condição necessária para existência das integrais, pois de 4(35) e 4(1) temos:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left| e^{\tau/\tau_0} \int_{\tau}^{\infty} e^{\tau'/\tau_0} K^{\mu}(\tau') d\tau' \right| = 0 \quad 4(37)$$

É possível demonstrar-se a existência de soluções para as equações 4(36) para um grande número de sistemas físicos, apesar do problema da unicidade ainda estar em aberto |10|, com isso temos então que as equações 4(36) são as equações de movimento para partícula carregada que procurávamos.

Podemos ainda escrever a equação de movimento para a partícula carregada de forma a ficar mais parecida com a equação Newtoniana 4(20), escrita em termos da quadri-aceleração:

$$ma^{\mu}(\tau) = F^{\mu}(\tau) \quad 4(38)$$

Para tal, tomemos a equação 4(35) e façamos a seguinte transformação de variáveis:

$$\alpha = \frac{\tau' - \tau}{\tau_0} \quad 4(39)$$

Assim 4(35) fica:

$$ma^{\mu}(\tau) = \int_0^{\infty} K^{\mu}(\tau + \alpha\tau_0) e^{-\alpha} d\alpha \quad 4(40)$$

Existem três diferenças básicas entre essas duas equações 4(35) e 4(37), a saber:

1º) A primeira é uma equação diferencial linear ordinária de 2º ordem na posição $Z^{\mu}(\tau)$, enquanto que a 2ª é uma equação

integro-diferencial, uma vez o termo da direita em 4(40) depende de Z^μ , v^μ e a^μ (diferente de 4(38) onde o termo a direita só depende de Z^μ e v^μ).

- 2º) Nós dizemos que a equação 4(38) é local, pois para um dado tempo próprio, sabendo-se o valor da quadri-força obteremos o valor da quadri-aceleração. Isso caracteriza também o princípio físico da causalidade que associa a cada efeito uma causa, ordenados temporalmente de forma que a causa preceda ou no máximo seja simultânea ao efeito (num dado referencial). A equação 4(40) é não-local e não-causal pois para um dado tempo próprio (τ) o valor da quadri-aceleração depende do valor da ação exercida "sobre" o sistema desde o instante τ até um instante muito posterior ($\tau \rightarrow \infty$).
- 3º) A primeira equação determina por si só (a menos das condições iniciais) a trajetória da partícula carregada. Enquanto que 4(40) precisa (além das condições iniciais) das condições assintóticas 4(1) e 4(2); para dar uma descrição completa da trajetória da partícula.

APÊNDICE 4A

Vamos calcular o tensor campo eletromagnético de radiação, 4(6), em regiões próximas da linha de mundo da partícula carregada, para tal, calculemos inicialmente os tensores do campo ($F_{elm}^{\mu r}$), nas posições retardadas e avançadas. Usaremos as expressões dos $F_{ra}^{\mu r}$ na forma 2(46):

$$F_{ra}^{\mu r} = + \frac{2e}{\rho} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v^{\mu} R^r}{\rho} \right) \quad 4A(1)$$

onde usamos a abreviação introduzida em 4(8).

Consideremos inicialmente um ponto qualquer do quadri-espaco x^{μ} próximo a linha de mundo da partícula carregada. Este ponto será simultâneo a um ponto da linha de mundo, caracterizado pelo tempo próprio τ_0 . Fazendo $\tau_0=0$ e considerando a análise sendo feita no referencial de repouso da partícula, podemos escrever:

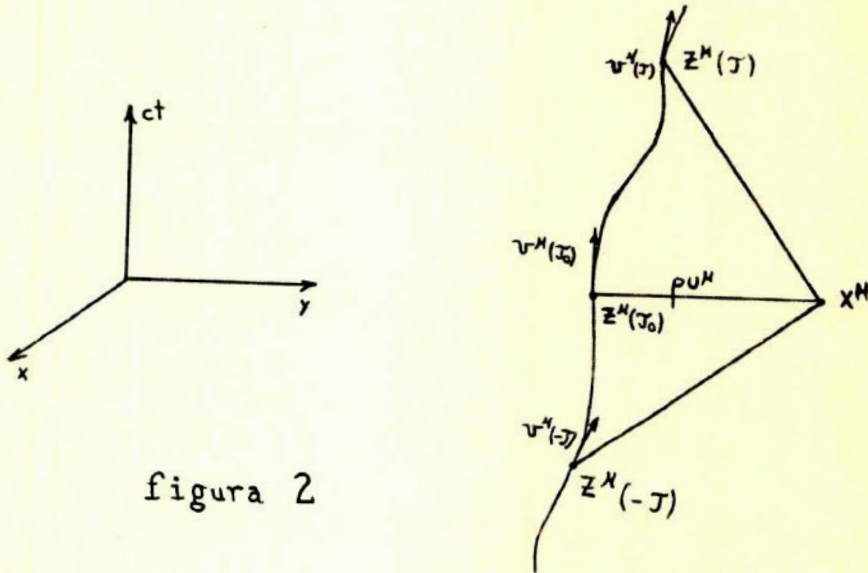
$$v^{\mu} (Z_{\mu} - x_{\mu}) = 0 \quad 4A(2)$$

onde os valores dos quadri-vetores se referem ao instante τ_0 . Se usarmos a notação 2(39), teremos:

$$x^{\mu} - Z^{\mu} = \rho U^{\mu} \quad 4A(3)$$

Estamos interessados em escrever as expressões 4A(1) em termos da quantidade ρ que como, já vimos, é a extensão do conceito de módu-

lo para o quadri-vetor que liga x^μ a z^μ como vemos mais claramente na figura abaixo:



Nossa intenção é obter o limite $\rho \rightarrow 0$ para as grandezas desejadas (pois isso representaria o valor de tais grandezas em regiões próximas à linha de mundo de partícula). Mas como podemos observar, todas as quantidades em 4A(1) são funções de τ . Com isso teremos que obter inicialmente uma expansão dessas quantidades em termos de τ (no nosso caso $\tau=0$) e depois encontrar uma forma de ligar τ a ρ . Vamos chamar os instantes retardados e avançados, respectivamente de $-\tau$ e τ , uma vez que encontram-se simetricamente posicionados em relação a τ_0 . Logo, escrevendo 4A(1) explicitamente em termos dos dois valores do tempo próprio vem:

$$F_{ra}^{\mu r}(x^\mu) = \frac{-2e}{\rho(\bar{\tau})} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v^\mu(\pm\tau) R^r |(\pm\tau)}{\rho(\bar{\tau})} \right) \quad 4A(4)$$

Agora vamos obter a expansão, em termos de $\pm \tau$, de todas as grandezas relevantes para obtenção de 4A(4):

$$Z^\mu(\tau) = Z^\mu + \tau v^\mu + \frac{\tau^2}{2} a^\mu + \frac{\tau^3}{6} \dot{a}^\mu + \dots \quad 4A(5)$$

$$Z^\mu(-\tau) = Z^\mu - \tau v^\mu + \frac{\tau^2}{2} a^\mu - \frac{\tau^3}{6} \dot{a}^\mu + \dots \quad 4A(6)$$

$$v^\mu(\mp\tau) = v^\mu \mp \tau a^\mu + \frac{\tau^2}{2} \dot{a}^\mu + \dots \quad 4A(7)$$

$$R^\mu(\mp\tau) = x^\mu - Z^\mu(\mp\tau) = \rho U^\mu \pm v^\mu \tau - \frac{\tau^2}{2} a^\mu \mp \frac{\tau^3}{6} \dot{a}^\mu + \dots \quad 4A(8)$$

$$\rho(\mp\tau) = \mp v_\mu(\mp\tau) R^\mu(\mp\tau) = (1 + \rho a_u) \tau \mp \rho \frac{\tau^2}{2} \dot{a}_u + \frac{\tau^3}{6} a^2$$

onde usamos 2(38), 2(40) e $a_u \equiv a_\lambda U^\lambda$, $\dot{a}_u = \dot{a}_\lambda U^\lambda$, $a^2 = a_\lambda a^\lambda$. Para obtermos uma expansão em potências de τ de $F_{ra}^{\mu r}$, só nos resta substituir as expressões 4A(6), 4A(7) e 4A(8) em 4A(4) e calcular a derivada ali presente, o que dá:

$$\begin{aligned} F_{ra}^{\mu r} &= \frac{2e}{(1 + \rho a_u)^2} \left(-\frac{\rho}{\tau^3} v^{|\mu} U^{r|} + \frac{1}{2\tau} v^{|\mu} a^{r|} \mp \frac{\rho^2}{2\tau^2} \dot{a}_u^{|\mu} U^{r|} + \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{2}{3} \dot{a}^{|\mu} v^{r|} + \frac{\rho}{2\tau} \dot{a}^{|\mu} U^{r|} \right) \end{aligned} \quad 4A(9)$$

Vamos obter agora a relação entre τ e ρ , a qual nos possibilitará escrever 4A(9) em termos de ρ unicamente. Usaremos a propriedade de R^μ ser um vetor nulo, ou seja;

$$R_\mu(\mp\tau) R^\mu(\mp\tau) = 0 \quad 4A(10)$$

usando 4A(8) obtemos:

$$\rho^2 = \tau^2 \left(1 + \rho a_u \mp \frac{\rho \tau}{3} \dot{a}_u + \frac{\tau^2}{12} a^2 \right) \quad 4A(11)$$

que depois de algumas aproximações e manipulações algébricas pode ser escrita como:

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{1 - |(\rho^2/6)(a^2/4 \mp \dot{a}_u)|}{(1 + \rho a_u)^{1/2}} \quad 4A(12)$$

Então introduzindo essa relação em 4A(9) e fazendo as aproximações necessárias, teremos:

$$\begin{aligned} F_{\frac{r}{a}}^{\mu r}(x^\mu) = & \frac{2e}{\sqrt{1+\rho a_u}} \left(\frac{1}{\rho^2} v^{|\mu U^r|} - \frac{1}{2\rho} v^{|\mu a^r|} + \frac{1}{2} a_u v^{|\mu a^r|} + \right. \\ & \left. + \frac{a^2}{8} v^{|\mu U^r|} - \frac{1}{2} \dot{a}^{|\mu U^r|} \mp \frac{2}{3} \dot{a}^{|\mu v^r|} \right) \quad 4A(13) \end{aligned}$$

E usando a definição 4(6) para o $F_{\text{rad}}^{\mu r}$ no limite em que $\rho \rightarrow 0$ teremos:

$$F_{\text{rad}}^{\mu r} = - \frac{8e}{3C^4} \dot{a}^{|\mu v^r|} \quad 4A(14)$$

que é o resultado desejado.

APÊNDICE 4B

Vamos calcular o quadri-momento eletromagnético [4(11)] associado a solução 4(3), das equações de Maxwell não-homogêneas, escrita na forma 4(9). Escolhamos uma quadri-superfície tipo tempo que é um tubo de raio ρ envolvendo a linha de mundo da partícula, e se estendendo deste τ_1 a τ_2 . Ela é escrita como:

$$d^3\sigma^r = u^r d^3\sigma \quad (1)$$

onde u^r é uma quadri-vetor tipo-espaço, unitário e normal a superfície considerada. O elemento de superfície é formado pelo produto de uma superfície tri-dimensional com o módulo de um quadri-vetor tipo-tempo na direção da linha de mundo da partícula ($v^\mu(\tau)$). A superfície tri-dimensional, devido a escolha do tubo de raio ρ , é a superfície de uma esfera de mesmo raio. Com isso teremos:

$$d^3\sigma = \rho^2 d\Omega \alpha d\tau \quad (2)$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido e $\alpha d\tau$ é a contribuição na direção de movimento da partícula. Podemos determinar α , se exigirmos que o deslocamento dos pontos da superfície do tubo sejam tais que as linhas que formam o tubo sejam sempre paralelas à linha de mundo da partícula. Observando a figura do apêndice 4A vemos que, considerando x^μ como um ponto do tubo, para a propriedade acima seja mantida, devemos exigir que:

$$\frac{d}{d\tau} |(x^\mu - z^\mu)v_\mu| = 0 \quad 4B(3)$$

ou seja, $(dx^\mu - v^\mu d\tau)v_\mu + \rho U^\mu a_\mu d\tau = 0$

e

$$v_\mu dx^\mu = -(1 + \rho a_u) d\tau \quad 4B(4)$$

Logo, para que as linhas que formam o tubo, ao serem variadas (dx^μ), se mantenham paralelas à linha de mundo (v^μ), a componente de dx^μ nessa direção é dada por:

$$|dx^\mu|_{v_\mu} = (1 + \rho a_u) d\tau \quad 4B(5)$$

onde $|dx^\mu|_{v_\mu}$ é a componente de dx^μ na direção de v^μ . Com isso teremos que $\alpha = 1 + \rho a_u$ pois $|dx^\mu|_{v_\mu}$ representa o elemento de arco que um ponto no tubo descreveria, caso se mantivesse paralelo a v^μ . Assim podemos escrever a expressão para o momento eletromagnético, atravessando o tubo desde τ_1 a τ_2 , como:

$$- \int_1^2 M^{\mu r} d^3\sigma_r = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d\Omega M^{\mu r} U_r \rho^2 (1 + \rho a_u) \quad 4B(6)$$

Então, a partir de 3(3), que é a definição do tensor simétrico momento-energia do campo e usando o tensor $F_S^{\mu r}$ dado por:

$$F_S^{\mu r} = f^{\mu r} + \frac{1}{2} (F_r^{\mu r} + F_a^{\mu r}) \quad 4B(7)$$

podemos calcular 4B(6). Do resultado 4A(13) do apêndice 4A sabemos que:

$$\begin{aligned}
 F_r^{\mu r} + F_a^{\mu r} &= \frac{2e}{\sqrt{1+\rho a_u}} \left(\frac{1}{\rho^2} v^{|\mu} U^r| - \frac{1}{2\rho} v^{|\mu} a^r| + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} a_u v^{|\mu} a^r| + \frac{a^2}{8} v^{|\mu} U^r| - \frac{1}{2} \dot{a}^{|\mu} U^r| \right) \quad 4B(8)
 \end{aligned}$$

e além disso, como $f^{\mu r}$ deve ser dado, podemos então começar o cálculo de $M_{elm}^{\mu r}$, considerando apenas os termos $1/\rho^n$ tais que $n \geq 2$. Com isso:

$$\begin{aligned}
 F_s^{\mu\alpha} F_\alpha^s \quad r \quad U_r &= \frac{e^2}{1+\rho a_u} \left| \frac{U^\mu}{\rho^4} - \frac{a^\mu}{\rho^3} + \frac{5a_u}{4\rho^2} a^\mu - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3a^2}{4\rho^2} U^\mu + \frac{f^{\mu r}}{\rho^2} v_\alpha \right| \quad 4B(9)
 \end{aligned}$$

e

$$F_{\alpha\beta}^s F_s^{\alpha\beta} = \frac{4e^2}{1+\rho a_u} \left| \frac{-1}{2\rho^4} + \frac{a_u}{2\rho^3} + \frac{a^2}{4\rho^2} - \frac{a_u a_u}{2\rho^2} \right| \quad 4B(10)$$

Então teremos de 3(3), 4B(9) e 4B(10):

$$\begin{aligned}
 M^{\mu r} &= \frac{e^2}{4\pi(1+\rho a_u)} \left| \left(\frac{1}{2\rho^4} - \frac{a^2}{2\rho^2} \right) U^\mu - \left(\frac{1}{2\rho^3} - \frac{3a_u}{4\rho^2} \right) a^\mu + \right. \\
 &\quad \left. + f^{\mu r} v_r \right| \quad 4B(11)
 \end{aligned}$$

Substituindo 4B(11) em 4B(6) e calculando a integral sobre o ângulo sólido temos que:

1º) Os termos que dependem linearmente de U^μ vão a zero; pois U^μ , só contendo a parte espacial, quando integrado sobre todo

o domínio dos ângulos polares dá contribuição nula.

2º) Para os termos que não dependem de U^μ a integral é diferente de zero e dá o resultado 4π pois não temos dependência nos ângulos polares. Então,

$$- \int_1^2 M^{\mu r} d^3\sigma_r = \int_1^2 \frac{e^2}{2\rho} a^\mu d\tau - \int_1^2 ef^{\mu r} v_r d\tau \quad 4B(12)$$

ou

$$- \int_1^2 M^{\mu r} d^3\sigma_r = \int_1^2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{e^2}{2\rho} v^\mu \right) d\tau - \int_1^2 ef^{\mu r} v_r d\tau \quad 4B(13)$$

Pode-se mostrar [10] que o termo entre parênteses, no integrando do 1º termo da direita, é a quadri-momento associado ao campo Coulombiano de uma partícula em movimento com quadri-velocidade v^μ , devido a todos os pontos do espaço, excetuando o volume de uma pequena esfera de raio ρ devido a partícula. Com isso, chegamos ao resultado

$$- \int_1^2 M^{\mu r} d^3\sigma_r = \int_1^2 \frac{dp_{\text{coul}}^\mu}{d\tau} d\tau - \int_1^2 \frac{ef^{\mu r}}{C} v_r d\tau \quad 4(12)$$

o qual queríamos demonstrar.

Nos apêndices A e B fizemos $C=1$ nas partes iniciais, resgatando seu valor correto nos resultados destes apêndices.

APÊNDICE 4C

Vamos considerar inicialmente que o sistema físico em estudo, se encontra livre da ação de forças externas de origem não-eletromagnética. Com isso a equação 4(28) se reduz a:

$$K^\mu(\tau) = F_{in}^\mu - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^5} a^\lambda a_\lambda v^\mu \quad 4C(1)$$

Então com a alteração acima em K^μ podemos manter as equações as equações 4(30) e 3(35) inalteradas.

Levando em conta o acima exposto, nesse apêndice iremos demonstrar que o uso da condição assintótica

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} a^\mu(\tau) = 0 \quad 4C(2)$$

Sobre a equação que é o resultado de uma inversão temporal efetuada sobre 4(30) (para o sistema fechado, sem força externa), nos levará a uma equação de "movimento" que tem as mesmas propriedades que 4(35) (para o sistema estudado). Esse resultado nos indica que:

1º O uso de qualquer uma das condições assintóticas, 4(1) ou 4C(2), é igualmente possível, ou seja, não introduz qualquer particularização do resultado. 4C(3)

2º A nossa teoria é invariante por uma inversão temporal 4C(4)

Vamos inicialmente considerar a inversão temporal, definida de tal forma que:

$$T: t \rightarrow t' \Leftrightarrow t' = -t \quad 4C(5)$$

onde

$$0 \leq t < \infty$$

e

4C(6)

$$-\infty < t' \leq 0$$

Podemos ver facilmente a aplicação de T sobre algumas grandezas fundamentais (quando reescrevemos as mesmas como função de t):

$$T: x^\mu \rightarrow x'^\mu = x_\mu \quad 4C(7)$$

$$T: \tau \rightarrow \tau' = -\tau \quad 4C(8)$$

Usando os resultados acima, teremos:

$$T: v^\mu(\tau) \rightarrow v'^\mu(\tau') = v_\mu(\tau) \quad 4C(9)$$

$$T: a^\mu(\tau) \rightarrow a'^\mu(\tau') = a_\mu(\tau) \quad 4C(10)$$

Seja agora a equação 4(25) para um sistema em que não atuem forças externas:

$$ma^\mu = \frac{e}{C} F_{in}^{\mu r} v_r + \frac{2}{3} \frac{e^2}{C^3} (\dot{a}^\mu - \frac{1}{C^2} a^\lambda a_{\lambda} v^\mu) \quad 4C(11)$$

ou

$$ma^\mu = F_{in}^\mu + \frac{1}{2} F_{rad}^\mu \quad 4C(12)$$

onde

$$F_{in}^\mu = \frac{e}{C} F_{in}^{\mu r} v_r \quad 4C(13)$$

$$F_{rad}^\mu = \frac{4}{3} \frac{e^2}{C^3} (\dot{a}^\mu - \frac{1}{C} a^\lambda a_{\lambda} v^\mu) = F_{rad}^{\mu r} v_r \quad 4C(14)$$

Calculando a inversão temporal de 4C(12) ficamos com a nova equa

ção, em termos de τ' :

$$T: ma^\mu(\tau) = F_{in}^\mu(\tau) + \frac{1}{2} F_{rad}^\mu \rightarrow ma'^\mu(\tau') = F_{in}'^\mu(\tau') + \frac{1}{2} F_{rad}'^\mu(\tau') \quad 4C(15)$$

Para as novas grandezas linha, escritas em termos de τ' , as antigas relações das grandezas sem linha, escritas em termos de τ , devem continuar valendo. Com isso, poderemos escrever 4C(15) na forma:

$$ma'(\tau') = F_{in}'^\mu(\tau') + \frac{1}{2} F_{rad}'^\mu + \frac{1}{2} F_{rad}'^\mu - \frac{1}{2} F_{rad}'^\mu$$

$$ma'(\tau') = F_{out}'^\mu(\tau') - \frac{1}{2} F_{rad}'^\mu \quad 4C(16)$$

onde $F_{out}'^\mu(\tau')$ é definido em analogia com $F_{in}'^\mu(\tau')$. Vamos agora derivar a equação de movimento para esse sistema, a partir de 4C(16), com a ajuda da condição assintótica 4C(2); comecemos por reescrever 4C(16) na forma:

$$m(a'(\tau') + \tau_0 \dot{a}'^\mu(\tau')) = K_{out}'^\mu(\tau') \quad 4C(17)$$

$$K_{out}'^\mu(\tau') = F_{out}'^\mu(\tau') + \frac{2}{3} \frac{e^2}{C^5} a'^\lambda(\tau') a'^\lambda(\tau') v'^\mu(\tau') \quad 4C(18)$$

Usando a condição assintótica 4C(2), escrita em termos de variável τ' ,

$$\lim_{\tau' \rightarrow -\infty} a'^\mu(\tau') = 0 \quad 4C(19)$$

obtemos a partir de 4C(17), (analogamente ao procedimento seguido no Capítulo 4):

$$a'^{\mu}(\tau') = \frac{e^{-\tau'/\tau_0}}{m\tau_0} \int_{-\infty}^{\tau'} K'_{out}{}^{\mu}(\tau'') e^{\tau''/\tau_0} d\tau'' \quad 4C(20)$$

ou, depois da transformação, $\alpha = \frac{\tau'' - \tau'}{\tau_0}$, 4C(21)

$$ma'^{\mu}(\tau') = \int_{-\infty}^0 K'_{out}{}^{\mu}(\tau' + \alpha\tau_0) e^{\alpha} d\alpha \quad 4C(22)$$

que é a análoga à equação de "movimento" 4(35). Resta-nos agora mostrar que a equação 4C(20), escrita em termos de τ' , tem as mesmas propriedades que 4(35). Uma das formas de fazer isso é escrevendo 4C(20) em termos de τ e mostrando que essa nova equação coincide com 4(35). Podemos fazer isso com a ajuda de 4C(5), 4C(9), 4C(10) e do fato de que |10|.

$$T: F_{in}^{\mu}(\tau) \rightarrow F'_{in}{}^{\mu}(\tau') = F_{\mu}^{out}(\tau) \quad 4C(23)$$

Usando esses resultados em 4C(18), teremos, depois de levantar os índices,

$$K_{out}^{\mu}(-\tau) = F_{in}^{\mu}(\tau) - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^5} a^{\lambda}(\tau) a_{\lambda}(\tau) v^{\mu}(\tau) \equiv K_{in}^{\mu}(\tau) \quad 4C(24)$$

Logo, escrevendo 4C(20) em termos de τ , teremos:

$$a^{\mu}(\tau) = \frac{e^{\tau/\tau_0}}{m\tau_0} \int_{\tau}^{\infty} K_{in}^{\mu}(\bar{\tau}) e^{-\bar{\tau}/\tau_0} d\bar{\tau} \quad 4C(25)$$

que é a equação 4(35). Com isso, vemos que a equação 4C(20) escrita em termos de τ' tem as mesmas propriedades que 4C(25) em termos de τ . Ou seja valem 4C(4) e 4C(3).

Observação: Não consideramos forças externas, pois a forma das mesmas, como função de τ , só é especificada para cada caso particular em questão.

CAPÍTULO 5

DISCUSSÃO SOBRE A EQUAÇÃO E SUAS SOLUÇÕES

Essa seção é dividida em duas partes que visam um estudo da equação obtida na seção anterior. A primeira parte é uma análise dessa equação buscando a identificação dos termos nela contidos, além de um argumento que mostra que, pelo menos no domínio clássico (região de validade da nossa equação), a quebra da causalidade imposta pela equação de movimento é reconciliável com os princípios físicos de causa precedendo (ou sendo simultânea) ao efeito. Já a segunda parte trata da solução explícita da equação de movimento para alguns sistemas físicos simples tais como: partícula livre, pulso instantâneo, pulso finito, força constante, potencial coulombiano. Também é feito um estudo simultâneo de algumas características de alguns desses sistemas, à luz das soluções obtidas para cada um deles.

5.1 - Discussão Sobre a Equação

Vamos observar as equações de movimento 4(36), nelas observamos a presença do quadri-vetor K^μ definido em 4(28). Esse quadri-vetor representa as forças que atuam no sistema partícula mais campo de velocidades. K^μ é formado pela soma de três termos: O primeiro, F_{in}^μ , representa a força eletromagnética devido a campos externos. Já F_{ext}^μ é a interação do sistema com agentes externos de origem eletromagnética ou não. Finalmente, $-(1/C^2)Rv^\mu$ pode ser interpretado, se levarmos em conta o resultado do Capítulo 3, como sendo a taxa de variação do momento do

sistema (partícula + campo de velocidade) devido a emissão de radiação. Podemos fazer duas observações importantes sobre o último termo; em primeiro lugar, vemos que este é uma quadri-fprã tipo-tempo, o que apesar de não ser muito comum, não introduz problemas para o nosso modelo. E em segundo lugar, esse termo é a própria reação de radiação (Capítulo 3), e será diferente de zero se e somente se $a^\mu \neq 0$, como era de se esperar.

Os demais termos que aparecem em 4(36) são de fácil interpretação e estão relacionados a valores definidos, para um dado instante, dos quadri-vetores (p_{in}^μ e p_{out}^μ). Além do momento como função do tempo próprio para o sistema em questão $p^\mu(\tau)$.

As características mais importantes das equações 4(36) é a não-localidade temporal imposta sobre o sistema. Para visualizarmos melhor este fato, vamos considerar a forma 4(40) da equação de movimento. Uma vez que as forças externas agem durante um intervalo de tempo finito, podemos fazer a pergunta aproximação em 4(40),

$$ma^\mu(\tau) \approx K^\mu(\tau + b\tau_0) - K^\mu(\tau) \quad 5(1)$$

onde a última aproximação vem do fato de que τ_0 é muito pequeno. Em verdade temos que para o eletrón, $\tau_0 |4(27)|$ é aproximadamente

0.62×10^{-23} segundos. Vemos então de 5(1) que a localidade no tempo é então restabelecida após tais aproximações. Um fato importante a ser notado é que a diferença entre 5(1) com $b=0$ e a equação 4(30) (a qual é temporalmente local) é o termo:

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{a}^\mu \quad 5(2)$$

Este termo pode ser identificado como o responsável pela não-localidade no tempo da equação de movimento, uma vez que é a sua presença que força a integração de 4(30). E uma vez que esta equação é integrada, o termo 5(2) desaparece, mas surge o caráter não-local na equação integrodiferencial resultante.

Podemos ver da equação 5(1) que o caráter de não-localidade temporal da equação de movimento nos leva à quebra do princípio de causalidade, pois podemos interpretar 5(1) da seguinte forma: o sistema é acelerado no instante τ , devido a ação de uma força no instante $\tau + b\tau_0$, posterior a τ .

Vejamos porém que apesar da existência da quebra de causalidade, esta é tal que ocorre em um intervalo de tempo da ordem de grandeza de τ_0 , como pode ser visto de 5(1) e do que foi dito no parágrafo anterior. Com isso, para identificarmos tal efeito, deveríamos ter uma força que levasse um intervalo de tempo $\Delta\tau < \tau_0$ para começar a agir, o que não é possível para uma força clássica. O que torna a quebra de causalidade não observável para a região de validade da equação.

Outra evidência de que o caráter não-local não é relevante para o tratamento considerado, é obtido a partir da componente temporal da equação 4(25):

$$\frac{dE}{d\tau} = \gamma \vec{V} \cdot \vec{F} + \tau_0 \cdot \frac{d}{d\tau} (\gamma \vec{V} \cdot \vec{F}) - \gamma P \quad 5(3)$$

onde usamos a definição do quadri-momento de uma partícula e a aproximação $\dot{\mu} = \dot{F}^\mu/m$ em 5(2) uma vez que este é pequeno. Observe que, uma vez que 5(2) é o responsável por efeitos não-locais, a observação da energia associada a esse termo (a partir de 5(3)) nos levará a confirmação da não-localidade temporal na própria equação integrodiferencial de movimento.

Para o sistema em movimento circular (radiação de sincrotron), no qual $\vec{V} \cdot \vec{F} = 0$, teremos, a partir de 5(3), e depois de algumas aproximações (Apêndice 5A):

$$- \frac{dE}{dt} = P \left(1 - 5\tau_0 \frac{P}{mC^2} \right) \quad 5(4)$$

Vemos, a partir de 5(4), que a diferença entre a variação da energia cinética do sistema e a taxa de energia emitida na radiação (P) é diferente de zero e a diferença é uma taxa de energia devido ao termo 5(2). Logo, ao medirmos tal diferença, estaremos evidenciado o caráter não-local e daí a não-causalidade. Considerando que essa diferença seja da ordem de 1% da taxa de energia cinética temos que P deve ser $>10^{20}$ Mev/s para um elétron. Essas taxas de emissão de energia, seguramente não estão no domínio da física clássica, o que respalda o nosso desprezo pelo ca-

ráter acausal das equações de movimento obtidas.

Segundo Konopinsky [12] uma forma diferente de vermos esse problema pode ser obtida de interpretação da componente temporal 5(3), escrita agora de forma exata. Para isso consideremos $v^\mu = (\gamma C, \gamma \vec{v})$, e daí:

$$\frac{d}{d\tau} \left| (\gamma - \tau_0 \dot{\gamma}) m C^2 \right| = \gamma \vec{F} \cdot \vec{V} - \gamma P \quad 5(5)$$

Vemos com isso que no lado esquerdo da equação aparece entre colchetes, um termo que difere do termo $\gamma m C^2$ usualmente usado para sistemas nos quais toda a massa está localizada em um ponto. A diferença é tal que diminui aquela parcela, quando o sistema se encontra com $\dot{\gamma} > 0$, e é dada pelo termo $-\tau_0 \dot{\gamma} m C^2$. Logo, vemos que 5(5) não descreve o movimento de uma massa localizada; idéia que já nos era familiar, pois tínhamos visto que o sistema em questão é a partícula carregada, mais seu campo Coulombiano os quais não podem ser isolados.

Baseados nessa idéias, podemos dizer que a diminuição de energia em relação àquela, de uma partícula localizada, em 5(5), se deve ao fato de a massa espalhada pelo espaço (devido ao campo Coulombiano solidário a partícula) não adquirir instantaneamente a nova velocidade devido a aceleração, pois a velocidade de transmissão do sinal que comunica a modificação da velocidade a todos os pontos do campo é finita. Com isso somente parte da massa total do sistema adquire a energia devido a nova velocidade.

5.2 - Soluções da Equação de Movimento para Alguns Sistemas Simples

Inicialmente vamos considerar movimentos unidimensionais, o que facilitará bastante nosso trabalho, mas não deixará de introduzir os resultados característicos das equações obtidas. Posteriormente faremos o tratamento do problema, devido a uma força central do tipo Coulombiano. Mais especificamente, consideraremos o sistema ligado formado pelo átomo de um elétron.

a) Movimentos Unidimensionais.

Como primeiro passo vamos escrever as componentes da equação de Lorentz-Dirac (4(25)). Vemos primeiramente que, num movimento qualquer, a quadri-velocidade fica escrita:

$$v^\mu = (C\gamma, \vec{w}) \quad 5(6)$$

onde $\vec{w} = \gamma \vec{v}$. Usando o resultado

$$v^\mu v_\mu = -C^2 \quad 5(7)$$

podemos relacionar as duas componentes de 5(6) pois:

$$\gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{w^2}{C^2}\right)^{1/2} \quad 5(8)$$

Com isso podemos calcular outras grandezas necessárias para nosso objetivo, tais como:

$$a^\mu = (C\dot{\gamma}, \dot{\vec{w}}) = \left(\frac{\vec{w} \cdot \dot{\vec{w}}}{(w^2 + C^2)^{1/2}}, \dot{\vec{w}} \right) \quad 5(9)$$

$$\dot{a}^\mu = \left(\frac{\vec{w} \cdot \ddot{\vec{w}}}{(w^2 + C^2)^{1/2}} + \frac{C^2 \dot{w}^2}{(w^2 + C^2)^{3/2}}, \ddot{\vec{w}} \right) \quad 5(10)$$

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{C^3} a_\mu a^\mu = m\tau_0 \frac{C^2 \dot{w}^2}{w^2 + C^2} \quad 5(11)$$

E finalmente a componente espacial da equação de Lorentz-Dirac fica escrita na forma;

$$\dot{\vec{w}} = \frac{\vec{F}}{m} \left(1 + \frac{w^2}{C^2} \right)^{1/2} + \tau_0 \left(\ddot{\vec{w}} - \frac{\vec{w} \cdot \dot{w}^2}{w^2 + C^2} \right) \quad 5(12)$$

onde $\gamma\vec{F}$ é a componente espacial do quadri-vetor K^μ , o qual representa a ação dos agentes externos. Ao calcularmos a componente temporal da equação 5(6) vemos que esta é idêntica à 5(12). Assim, não obtemos nenhuma informação dessa componente.

Para o caso unidimensional podemos simplificar grandemente pela introdução de uma nova variável chamada rapidez (ϵ) e definida explicitamente pela relação:

$$w \equiv C \sinh \epsilon \quad 5(13)$$

Podemos fazer uma identificação da rapidez para velocidades não-relativísticas, nesse caso:

$$w \approx v \quad \text{e} \quad \text{como} \quad v/C \ll 1 \Rightarrow \sinh \epsilon \approx \epsilon$$

e com isso,

$$\epsilon = v/C \quad 5(14)$$

ou seja, nesse limite a rapidez representa a velocidade da partícula em unidades da velocidade da luz (C). Observe também, a partir de 5(13), que ϵ varia entre os limites $-\infty < \epsilon < \infty$. Então, podemos passar agora ao cálculo das grandezas anteriores expressando-as agora em termos da rapidez. A partir de 5(8) e da definição 5(13) teremos:

$$\gamma = \cosh \epsilon \quad 5(15)$$

$$v = \frac{w}{\gamma} = c \tanh \epsilon \quad 5(16)$$

$$\dot{w} = C\dot{\epsilon} \cosh \epsilon \quad e \quad \ddot{w} = C\ddot{\epsilon} \cosh \epsilon + C\dot{\epsilon}^2 \sinh \epsilon \quad 5(17)$$

e a equação 5(12) fica reduzida a:

$$\dot{\epsilon} - \tau_0 \ddot{\epsilon} = \frac{F}{mC} \quad 5(18)$$

Podemos resolver essa equação, ou seja, obter o valor da rapidez como função do tempo próprio para uma dada força externa. Mas para isso precisaremos da ajuda das condições assintóticas 4(1) e 4(2) devidamente escritas em termos de ϵ . As quais ficam, a partir da definição 5(13):

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \dot{\epsilon}(\tau) = 0 \quad 5(19)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varepsilon(\tau) = \varepsilon(\infty) \quad \text{e} \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \varepsilon(\tau) = \varepsilon(-\infty) \quad 5(20)$$

Então, usando 5(19), podemos integrar a equação 5(18), assim usando um procedimento análogo àquele usado na obtenção de 4(35).

Ficamos com:

$$\dot{\varepsilon}(\tau) = e^{\tau/\tau_0} \int_{\tau}^{\infty} \frac{d\tau'}{\tau_0} \frac{F}{mC} e^{-\tau'/\tau_0} \quad 5(21)$$

Uma característica importante dessa equação é que o valor de $\dot{\varepsilon}(\tau)$ não depende de algum termo associado a reação de radiação, o que facilita a obtenção das suas soluções. Finalmente, usando a condição 5(22) podemos integrar 5(21) e obter a rapidez como função de τ ;

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(-\infty) + \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' e^{\tau'/\tau_0} \int_{\tau'}^{\infty} \frac{d\tau''}{\tau_0} \frac{F(\tau'')}{mC} e^{-\tau''/\tau_0} \quad 5(22)$$

onde o valor assintótico da rapidez está associado a uma velocidade inicial do movimento v_0 , que a partir de 5(16) é dada por:

$$\varepsilon(-\infty) = \text{tahn}^{-1}(v_0/C) \quad 5(23)$$

Vamos agora passar para obtenção explícita da rapidez a partir de 5(22) para alguns casos particulares. Primeiramente, trataremos um caso simples que, apesar de não introduzir as características próprias da equação 5(18), nos mostrará que essa é compatível com nossos conhecimentos anteriores. E posteriormente, passaremos a outros gradualmente mais complexos:

1. Partícula livre

Nesse caso teremos,

$$F = 0 \quad 5(24)$$

e a partir de 5(21) ficamos com:

$$\dot{\epsilon}(\tau) = 0 \quad 5(25)$$

$$\epsilon(\tau) = \epsilon(-\infty) \quad 5(26)$$

e esses resultados garantem a validade da 2ª lei de Newton para o movimento inercial do sistema.

2. Partícula Uniformemente Acelerada.

Agora faremos agir sobre o sistema uma força do tipo,

$$F = B \quad 5(27)$$

onde B é uma constante. A ação dessa força se dará a partir do instante zero e poderá ser calculada em um instante τ posterior qualquer. Assim obtemos facilmente:

$$\dot{\epsilon} = e^{\tau/\tau_0} \int_{\tau}^{\infty} \frac{d\tau'}{\tau_0} \frac{B}{mC} e^{-\tau'/\tau_0} \quad 5(28)$$

que integrando dá,

$$\dot{\epsilon} = \frac{B}{mC} \quad 5(29)$$

que é constante.

Para a rapidez podemos obter, a partir de 5(29):

$$\epsilon(\tau) = \epsilon(0) + \int_0^\tau d\tau' \frac{B}{mC}$$

ou

$$\epsilon(\tau) = \epsilon(0) + \frac{B}{mC} \tau \quad 5(30)$$

Um resultado interessante para esse tipo de movimento aparece quando vamos observar o balanço de energia, dado pela equação 5(3). Para o movimento uniformemente acelerado pode-se mostrar que vale a relação entre o termo de Schott e aquele devido a reação de radiação (4(24)):

$$\dot{a}^\mu - \frac{1}{C^2} a^\lambda a_{\lambda\nu} \nu^\mu = 0 \quad a^\lambda a_\lambda \neq 0 \quad 5(31)$$

Então observando a equação 5(3) escrita na forma:

$$\frac{d}{d\tau} (\gamma m C^2) = \vec{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{F} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{C^3} \left(\dot{a}^0 - \frac{1}{C^2} a^\lambda a_{\lambda\nu} \nu^0 \right) \quad 5(32)$$

onde $\vec{F} = B\hat{u}$ e $\vec{v} = c \tan \epsilon(\tau) \hat{u}$, podemos dizer que a energia cinética da partícula de massa m é toda ela devida a força externa e a energia irradiada é devido ao termo de Schott (responsável pela não-causalidade como vimos). Pois devido a 5(31) temos que 5(32) na verdade representa duas equações:

$$\frac{d}{d\tau} (\gamma m C^2) = \gamma \vec{v} \cdot \vec{F} \quad e \quad \dot{a}^0 = \frac{1}{C^2} a^\lambda a_{\lambda\nu} v^0 \quad 5(33)$$

que valem independentemente. Vemos com isso que uma outra forma de evidenciarmos o caráter não-causal das nossas equações, é medirmos a radiação emitida durante o movimento uniformemente acelerado.

3. Partícula sobre a ação de um pulso.

Seja agora uma força uniforme igual ao caso anterior, mas que age sobre o sistema durante um intervalo de tempo finito. Essa é uma situação fisicamente possível enquanto que a anterior é um limite do presente caso, obtido ao fazermos o intervalo de tempo próprio durante o qual age a força externa, ser muito maior do que qualquer intervalo considerado no problema.

Como definição para o nosso pulso teremos:

$$F(\tau < 0) = 0; \quad F(0 \leq \tau \leq \tau_1) = B \quad F(\tau > \tau_1) = 0 \quad 5(34)$$

Introduzindo essa definição na equação 5(21), poderemos calcular a variação temporal da rapidez (a qual no limite não-relativístico é aproximadamente a própria aceleração, em unidades de C , da partícula de massa m). Vemos, a partir de 5(21), que a "aceleração" está definida para os intervalos de tempo próprio anteriores a zero e entre zero e τ_1 . Então, fazendo o cálculo apropriado para esses dois intervalos, obtemos:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}(\tau) &= \frac{B}{mC} (1 - e^{-\tau_1/\tau_0}) e^{\tau/\tau_0} & \tau < 0 \\ \dot{\varepsilon}(\tau) &= \frac{B}{mC} (1 - e^{-(\tau_1-\tau)/\tau_0}) & 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ \dot{\varepsilon}(\tau) &= 0 & \tau > \tau_1 \end{aligned} \right\} \quad 5(35)$$

Podemos ver a forma da "aceleração" obtida, fazendo um gráfico da mesma versus o tempo próprio. Tal procedimento resulta em:

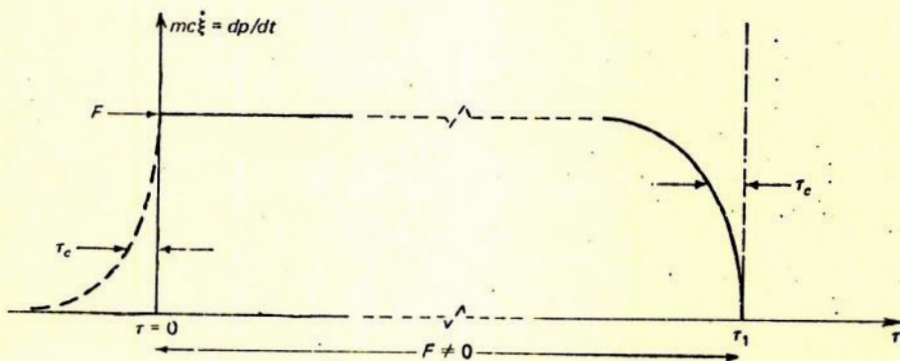


figura 3

Observando a figura 3, vemos agora claramente o efeito de "preaceleração", ou seja, antes de iniciar-se a ação da força externa temos, num intervalo da ordem de τ_0 , a presença de uma "aceleração" diferente de zero. Um fato análogo acontece próximo (da ordem de τ_0) ao fim da ação da força externa. Mas como vimos, devido ao fato desses dois fenômenos ocorrerem num intervalo de tempo tão pequeno, não precisamos nos preocupar com eles dentro do nosso enfoque clássico.

Novamente ao analisarmos o balanço de energia do siste-

ma, teremos a possibilidade de interpretar o fenômeno da "preaceleração" de uma forma bem interessante [12]. Durante a maior parte do movimento acelerado, ou seja, no intervalo $0 \leq \tau \leq \tau_1$ tudo ocorre como no movimento uniformemente acelerado (veja item anterior). Mas pouco antes do início da ação da força, vemos que uma vez que já existe uma quadri-aceleração $a^\mu \neq 0$, teremos também emissão de radiação. A energia necessária para equilibrar aquela, transportada pela radiação, não pode vir diretamente da força externa, que ainda não começou a agir sobre a partícula. Então pode-se lançar mão novamente da idéia do campo Coulombiano solidário a partícula e espalhado em uma região em torno da mesma. E agora dizemos que a interação do sistema (partícula + campo Coulombiano) com a força externa tem início quando a região mais externa do campo Coulombiano efetivo entra em contato com aquela. Logo, a energia associada com a emissão da radiação é proveniente dessa interação do Campo Coulombiano com a força externa.

b) Movimentos Tridimensionais

Nesse item, nós nos preocuparemos em analisar um movimento tridimensional em particular, a saber: o movimento de uma partícula carregada sobre a ação de uma força central atrativa. Para tal, vamos iniciar nosso estudo demonstrando que, mesmo ao introduzirmos a reação de radiação, o movimento sobre a ação da referida força, se dá em um plano, o que reduzirá o conjunto de equações a ser resolvida.

Inicialmente, vamos escrever a componente espacial da equação de Lorentz-Dirac, na forma:

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = \frac{f(r)\vec{r}}{mr} + \tau_0 \frac{d^3\vec{r}}{d\tau^3} + \frac{\tau_0}{C^2} \frac{d\vec{r}}{d\tau} a^\lambda a_\lambda \quad 5(36)$$

Tomando o produto vetorial dessa equação, com \vec{r} , teremos:

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} \times \vec{r} = \tau_0 \frac{d^3\vec{r}}{d\tau^3} \times \vec{r} + \frac{\tau_0}{C^2} a^\lambda a_\lambda \frac{d\vec{r}}{d\tau} \times \vec{r} \quad 5(37)$$

Tomando novamente o produto vetorial da nova equação, agora com $d\vec{r}/d\tau$, podemos obter após algumas operações algébricas e vetoriais, o resultado:

$$\frac{\vec{r}}{\tau_0} \times \frac{d\vec{r}}{d\tau} \times \frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{d\tau} \times \frac{d^3\vec{r}}{d\tau^3} \quad 5(38)$$

Ao resolvermos essa equação encontramos o resultado geral:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{d\tau} \times \frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = \vec{C} e^{\tau/\tau_0} \quad 5(39)$$

que não é uma solução fisicamente possível pois é divergente para valores crescentes no tempo próprio. Então devemos escolher o valor zero para a constante C. Fazendo isso teremos o resultado (para todo τ) que diz que os três vetores do lado esquerdo de 5(39) se encontram no mesmo plano. E além disso pode-se mostrar também que \vec{r} e $d^2\vec{r}/d\tau^2$ são colineares. Esse resultado nos permite tratar o problema em duas dimensões, assim podemos escrever as componentes espaciais da equação de Lorentz-Dirac para o problema. A partir da forma geral 5(12) teremos em coordenadas cartesianas:

$$\dot{w}_i = \frac{F_i}{m} \left(1 + \frac{w_x^2 + w_y^2}{C^2} \right)^{1/2} + \tau_0 \left(\ddot{w}_i - \frac{w_i (\dot{w}_x^2 + \dot{w}_y^2)}{w_x^2 + w_y^2 + C^2} \right) \quad i = x, y \quad 5(40)$$

onde

$$\vec{w} = \gamma \vec{v} = \gamma \dot{x} \hat{x} + \gamma \dot{y} \hat{y} \Rightarrow w_x = \gamma \dot{x} \quad \text{e} \quad w_y = \gamma \dot{y} \quad 5(41)$$

Vamos agora restringir o nosso estudo a um tipo especial de força central, a saber, a força Coulombiana. Sua forma é bem conhecida e para a interação entre um centro de cargas positivas $+Ze$ e uma partícula de carga negativa $-e$ é dada por:

$$\vec{F} = -\frac{Ze^2}{r^3} \vec{r} \quad 5(42)$$

Podemos agora escrever a equação de Lorentz-Dirac para esse caso, introduzindo 5(42) e a definição das componentes de \vec{w} (ambos em coordenadas cartesianas) na componente espacial 5(40):

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} \dot{x}_i + \gamma \ddot{x}_i = & -\frac{Ze^2 x_j \gamma}{(x_i^2 + x_j^2)^{3/2}} + \tau_0 (\ddot{\gamma} \dot{x}_i + \dot{\gamma} \ddot{x}_i + \dot{\gamma} \ddot{x}_i + \gamma \ddot{x}_i - \\ & - \frac{\dot{x}_i (\dot{\gamma}^2 v^2 + 2\dot{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{a} + \gamma^2 a^2)}{c^4})_{i \neq j} \quad \text{e} \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad 5(43)$$

onde $\dot{\gamma}$ foi dado em 5C(2),

$$\dot{\gamma} = 3\gamma^5 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{c^4} + \gamma^3 \frac{a^2}{c^2} + \frac{\gamma^3}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{a} \quad , \quad 5(44)$$

e os índices referem-se as duas componentes cartesianas usadas na descrição da trajetória. Observando a equação 5(43) podemos ver que esta equação não possui soluções analíticas, além de ser, não-linear, ou seja, esta só permite soluções numéricas. Vamos então pensar no sistema que iremos analisar com essas equações.

Para a maior parte das trajetórias de elétrons em núcleos típicos a formulação relativística é desnecessária, pois nessas órbitas tais partículas movem-se com velocidades muito inferiores da luz. Dessa forma, ao usarmos um enfoque não-relativístico do problema, o sistema de equações 5(3) fica escrito:

$$\ddot{x}_i - \tau_0 \ddot{x}_i^* = \frac{-Ze^2 x_i}{m(x_i^2 + x_j^2)^{3/2}} \quad i \neq j \quad \text{e} \quad i, j = 1, 2 \quad 5(45)$$

Apesar de não termos soluções analíticas para este conjunto vemos (pelo mesmo motivo do caso anterior) que as equações 5(45) são bem mais simples, possibilitando assim o surgimento de soluções analíticas aproximadas. Uma solução desse tipo foi obtida por Clavier [13], para regiões próximas ao centro de força. A solução é uma espiral logarítmica que, escrita em coordenadas polares (ρ e θ), fica:

$$\rho = \rho_0 e^{-(\cot \phi)\theta}$$

$$\rho = s \cos \phi \quad 5(46)$$

$$K_1 = \rho^{-1} \sin \phi = s^{-1} \tan \phi$$

onde ϕ é o ângulo constante entre o raio vetor e a tangente à trajetória, s é o comprimento de arco sobre a trajetória medido para trás a partir do zero na origem, e K_1 é a curvatura. Temos ainda que o ângulo ϕ é dado pela relação:

$$4 \cos^{3/2} \phi = 3(1 - \cos 2\phi) \quad 5(47)$$

O fato de termos obtido como solução 5(46) nos leva a pensar um pouco acerca da estabilidade de um sistema constitui

do dessa forma. A imagem que nós podemos fazer agora é de um eletron orbitando um núcleo devido a força centrípeta imposta ao primeiro. Este (por ter carga) emite uma dada quantidade de radiação. Por outro lado essa radiação transporta energia e com isso, para contrabalançar essa perda de energia, o elétron se aproxima do núcleo para o qual já era atraído e diminui sua energia potencial. Assim, vemos que, dada uma órbita inicial para o eletron, após um certo intervalo de tempo este se precipita sobre o núcleo. Uma vez que na natureza observamos vários elementos estáveis, esse modelo se mostra ineficaz e na verdade foi uma das falhas da Mecânica Clássica, e somente depois da introdução da Mecânica Quântica, pudemos obter uma solução aceitável para esse problema. Vamos agora obter alguns resultados quantitativos para esse problema.

Como vimos anteriormente, as quantidades de energia transportadas pela radiação são uma fração bem pequena da energia da partícula acelerada. Dessa forma além do uso de relações não-relativísticas (que já tínhamos visto serem uma boa aproximação para esse sistema), partiremos de equações válidas para uma partícula carregada que não emite radiação, ao descrever uma dada órbita circular. Inicialmente escreveremos a energia da partícula de massa m e carga $-e$ sobre a ação de um núcleo de carga Ze , em uma órbita de raio r_n :

$$\epsilon_n = \frac{1}{2} mU_n^2 - \frac{Ze^2}{r_n} = -\frac{1}{2} mU_n^2 = -\frac{Ze^2}{2r_n} \quad 5(48)$$

onde as duas últimas igualdades foram obtidas devido ao equilíbrio entre as forças centrífugas e atrativas:

$$\frac{mU_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{r_n^2} \quad 5(49)$$

Além disso temos também o período de uma dada órbita dado por:

$$T_n = \frac{2\pi r_n}{U_n} = 2\pi \left(\frac{m}{Ze^2} \right)^{1/2} r_n^{3/2} \quad 5(50)$$

Na nossa aproximação teremos, durante uma dada orbita, a partícula sendo acelerada de uma quantidade constante, uma vez que a orbita não é desviada. Essa aceleração será dada pelo termo centrípeto igual a U_n^2/r_n , a qual dá origem à emissão de uma certa quantidade de radiação na taxa de Larmor. E isso, a partir de 3(19), vale:

$$P_n = \frac{2}{3} \frac{e^2}{C^3} \left(\frac{U_n^2}{r_n} \right)^2 = \frac{64}{9Z^2} \left(\frac{-\epsilon_n}{mC^2} \right)^4 \frac{mC^2}{\tau_0} \quad 5(51)$$

onde usamos 5(48) para obtermos a última igualdade. Observando essa última equação vemos que quanto menor o raio, maior será a taxa de emissão de radiação. Isso justifica o que dissemos acerca do balanço entre a energia potencial e aquela transportada na radiação. A partir, de 5(51) podemos escrever a quantidade de energia emitida em uma revolução:

$$P_n T_n = \frac{4}{3} \pi \frac{e^2}{r_n} \left(\frac{U_n}{C} \right)^3 = |\epsilon_n| \frac{8\pi}{3Z} \left(\frac{Ze^2/r_n}{mC^2} \right)^{3/2} \quad 5(52)$$

Vamos testar uma de nossas hipóteses e ver se esta é aplicável ou não. Podemos determinar, a partir de 5(52), a quantidade de energia irradiada durante um período e vemos se nossa aproximação de considerar orbitas não perturbadas é boa ou não. Fazendo isso vem

$$\frac{P_n T_n}{|\epsilon_n|} = \frac{8\pi Z^{1/2}}{3} \left(\frac{e^2}{m r_n C^2} \right)^{3/2} = \eta_n \quad 5(53)$$

Calculando o valor da fração de energia perdida para um valor típico do raio atômico, $r_n \approx 10^{-8}$ cm teremos $\eta \approx 10^{-6} Z^{1/2}$, que devido ao seu pequeno valor, justifica nosso modelo. Estamos prontos para calcular um valor aproximado do intervalo de tempo gasto por um elétron para precipitar-se sobre o núcleo. Esse resultado pode ser obtido a partir da taxa de perda de energia 5(51); durante o referido intervalo de tempo a energia deve diminuir de um valor inicial (finito) até $-\infty$. Isso porque, como já vimos, a energia emitida pela radiação é proveniente da diminuição da energia potencial da partícula. Dessa forma teremos, a partir de 5(51):

$$\Delta T_C = - \int_{\epsilon_n}^{-\infty} \frac{d\epsilon}{P(t)} = - \frac{9Z^2}{64} \tau_0 (mC^2)^3 \int_{\epsilon_n}^{-\infty} \frac{d\epsilon}{\epsilon^4} \quad 5(54)$$

Temos ainda como escrever esse resultado em termos do raio r_n que, durante o intervalo ΔT_C , deve variar desde o seu valor inicial até zero. Assim usando 5(48), que relaciona o raio ao valor da energia, ficamos com

$$\Delta T_C = - \frac{9\tau_0}{8Z} \left(\frac{mC^2}{e^2} \right)^3 \int_{r_n}^0 r^2 dr = \frac{3\tau_0}{8Z} \left(\frac{r_n}{e^2} mC^2 \right)^3 \quad 5(55)$$

Observando o resultado acima vemos que o intervalo de tempo que o elétron passa em orbitas próximas ao núcleo, contribui pouco para o ΔT_C , uma vez que em 5(55) aparece uma integral em r^2 . Isso é bom para o nosso modelo não-relativístico pois em regiões próximas ao núcleo essa aproximação já não é mais válida, mas como

a contribuição devido a essas orbitas é pequena não precisamos nos preocupar. Usando o valor típico para o raio inicial $r=10^{-8}$ cm, o valor de ΔT_c fica:

$$\Delta T_c \approx 10^{-10} Z^{-1} s \quad 5(56)$$

Com esse resultado vemos que é impossível tentar explicar a estabilidade atômica, bem conhecida, a partir da nossa Teoria Clássica.

APÊNDICE 5A

Vamos partir de dois resultados bem conhecidos, a saber; $E = \gamma m c^2$, o valor da energia cinética relativística para uma partícula de massa m , e a relação que liga o tempo próprio ao tempo, $\gamma d\tau = dt$. Consideremos também, em primeira aproximação, que a variação da energia cinética da partícula carregada é somente devido a força externa:

$$\frac{dE}{d\tau} = \gamma \vec{v} \cdot \vec{F} \quad 5A(1)$$

introduzindo esses resultados em 5(3) ficamos com,

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} + \tau_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{m c^2} \frac{dE}{dt} \right) - P \quad 5A(2)$$

Vamos agora determinar o balanço de energia para um movimento circular ($\vec{v} \cdot \vec{F} = 0$). Além disso, vamos considerar a aproximação de que, para tal sistema, a variação da energia cinética é devida a emissão de radiação:

$$\frac{dE}{dt} = - P(t) \quad 5A(3)$$

Assim a expressão 5A(2) pode ser escrita na forma:

$$P(t) = - \frac{dE}{dt} - \tau_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{EP}{m c^2} \right) \quad 5A(4)$$

usando o resultado que para altas energias, P é proporcional a $E^4 |10|$, o último termo de 5A(4) é aproximadamente,

$$\tau_0 \frac{d}{dt} (EP) = 5\tau_0 P \frac{dE}{dt} \quad 5A(5)$$

Assim,

$$- \frac{dE}{dt} = \frac{P}{1+5\tau_0 P/mC^2} \approx P \left(1 - 5\tau_0 \frac{P}{mC^2}\right) \quad 5(4)$$

ou seja, o resultado desejado.

REFERÊNCIAS

- | 1 | J.J. Thomson, Phil. Mag. (5) 11, 229 (1881).
- | 2 | J.J. Thomson, Phil. Mag. 44, 298 (1897).
- | 3 | H. Lorentz; Arch. Ne'erland, Sci. Exact. Nat. 25, 363
(1892). Uma apresentação mais completa foi feita posterior-
mente em Ehzykl. Math. Wiss. V, 1, 188 (1903).
- | 4 | M. Abraham, Ann. Physik 10, 105 (1903).
- | 5 | A. Einstein; Ann. Physik 17, 891 (1905).
- | 6 | A.D. Fokker; Z.f. Physik, 58, 386 (1929).
- | 7 | J.A. Wheeler e R.P. Feynman; Rev. Mod. Phys. 17, 157 (1945).
- | 8 | P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A 167, 148 (1938).
- | 9 | F. Rohrlich; Ann. of Phys. 13, 93 (1961).
- | 10 | F. Rohrlich; "Classical Charged Particles" - Addison-Wesley,
Reading Massachusetts (1965).
- | 11 | J.D. Jackson; "Classical Electrodynamics" - John Willey &
Sons, New York 2nd edition (1975).

- [12] Emil, J. Konopinski; "Eletromagnetic Fields and Relativistic Particles", McGraw-Hill Book Company (1981).
- [13] Gilbert N. Plass; Rev. Mod. Phys. 33(1), 37(1961) o trabalho de Clavier é citado nesse artigo, sem ter sido publicado.