

**Universidade Federal do Rio de Janeiro**  
**Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza**  
**Observatório do Valongo**

Idades Cinemáticas para Anãs Tardias da Vizinhança Solar

Autor:

Felipe de Almeida Fernandes

Banca Examinadora:

Helio Jaques Rocha-Pinto (Orientador/Presidente – OV/UFRJ)

Gustavo F. Porto de Mello (OV/UFRJ)

Maria Teresa Aparicio Villegas (ON/MCTI)

Gustavo de Almeida Bragança (ON/MCTI)

**Projeto de Conclusão de Curso**  
**para a obtenção do título de Astrônomo**

Defendido em:

31 de Março de 2015



*Dedicado aos meus pais*

*“If life is going to exist in a Universe of this size, then the one thing it cannot afford to have is a sense of proportion.”*

*The Restaurant at the End of the Universe – Douglas Adams*

## *Resumo*

### **Idades Cinemáticas para Anãs Tardias da Vizinhança Solar**

por Felipe de Almeida Fernandes

**Objetivo:** Desenvolvemos um método para estimar uma função de densidade de probabilidade (fdp) para a idade de uma estrela com base em suas velocidades peculiares  $U_*$ ,  $V_*$  e  $W_*$  e sua excentricidade orbital. Da fdp obtida, estimamos uma idade individual para a estrela usando a idade mais provável e a idade esperada.

**Amostra:** A amostra utilizada neste trabalho é o levantamento Geneva-Copenhagen (GCS; Nordström et al., 2004), que contém não só velocidades espaciais e excentricidades orbitais para cerca de 14 000 estrelas, mas também idades isocronais.

**Método:** Utilizando as estrelas do GCS, ajustamos os parâmetros que descrevem as distribuições cinemáticas de estrelas de diferentes idades. Em seguida, invertemos a relação entre os parâmetros das distribuições cinemáticas e a idade utilizando a forma multivariacional do Teorema de Bayes.

**Resultados:** Reafirmamos que a distribuição das velocidades  $U_*$ ,  $V_*$  e  $W_*$ , e das componentes principais do elipsoide de velocidades  $v_1$  e  $v_2$  são bem ajustadas por Gaussianas para uma dada idade. A relação entre as dispersões de velocidades e a idade é bem ajustada pela relação  $\sigma_i(t) = b_i t^{a_i}$ . Como um subproduto, encontramos a velocidade peculiar do Sol:  $U_\odot = 9.8 \pm 0.3 \text{ km s}^{-1}$ ,  $V_\odot = 12.5 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1}$  e  $W_\odot = 7.2 \pm 0.2 \text{ km s}^{-1}$  em ótimo acordo com os resultados obtidos por diferentes autores. Obtemos a fdp para a idade de 9 102 estrelas do GCS e mostramos que a distribuição das idades individuais construídas da fdp está em bom acordo com a distribuição das idades isocronais. Observamos também um declínio da metalicidade média em relação as idades obtidas para estrelas mais jovens que 8 Ga.

## *Abstract*

### **Kinematical Ages for Late-Type Dwarfs in the Solar Neighborhood**

by Felipe de Almeida Fernandes

**Objective:** We develop a method to estimate a probability density function (pdf) for the age of a star based on its peculiar velocities  $U_*$ ,  $V_*$  and  $W_*$  and its orbital eccentricity. From this age pdf, we estimate an individual age for the star using the most likely age and the expected age.

**Sample:** The sample used in this work comes from the Geneva-Copenhagen Survey (GCS; Nordström et al., 2004), which contains not only the spatial velocity and orbital eccentricity for about 14 000 stars, but also isochronal ages.

**Method:** Using the GCS stars, we fitted the parameters that describe the kinematical distributions of stars for different ages. Then, we inverted the relation between the parameters of the kinematical distributions and age using the multivariate form of the Bayes Theorem.

**Results:** We reassert that the distributions of the velocities  $U_*$ ,  $V_*$  and  $W_*$ , and the main components of the velocity ellipsoid  $v_1$  and  $v_2$  are well described by Gaussians for a given age. The relation between the velocities dispersions and the age is well fitted by the relation  $\sigma_i(t) = b_i t^{a_i}$ . As a by-product, we found the peculiar velocity of the Sun to be  $U_\odot = 9.8 \pm 0.3 \text{ km s}^{-1}$ ,  $V_\odot = 12.5 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1}$  and  $W_\odot = 7.2 \pm 0.2 \text{ km s}^{-1}$  in good agreement with the results obtained by different authors. We have obtained the pdf for the age of 9 102 stars from the GCS and have shown that the distribution of individual ages constructed from the pdf is in good agreement with the distribution of isochronal ages. We also observe a decline in the mean metallicity with our ages for stars younger than 8 Gy.

# *Agradecimentos*

Desde que comecei a pensar seriamente na carreira que pretendia seguir, a ideia de me tornar pesquisador em astrofísica mostrou-se uma das mais cativantes. Também pensei em ser biólogo, mas na hora de escolher, a física e o cálculo falaram mais alto. Assim, aos 17 anos, mudei-me para o Rio de Janeiro para iniciar minha graduação. Certamente, isso não seria possível sem a ajuda de meus pais, que, apesar de receosos de início, me deram todo o apoio que eu precisava para concluir minha graduação.

Agradeço também aos meus amigos de Juiz de Fora, com os quais fico muito feliz por manter contato mesmo com a distância. Diego principalmente, por ter me perguntado mais vezes que qualquer outra pessoa se eu já ‘tinha terminado o TCC’, mesmo que uma ‘pequena’ parcela da causa desse interesse seja o churrasco prometido após a apresentação.

Aos meus colegas de curso, fica o agradecimento por tornarem a graduação um ambiente acolhedor e cheio de monopoly, UNO e Smash (principalmente Smash, valeu Eduardo). Ao Albert e ao Elisson, que foram minha ‘turma’ ao longo da graduação, com os quais cursei a maior parte das disciplinas (inclusive as eletivas) e cuja ajuda mútua às vésperas das provas foi fundamental.

Aos bons professores que tive por servirem de espelho e inspiração, fazendo-me reafirmar meu desejo de me tornar um professor-pesquisador. Em especial à professora Heloísa e ao professor Gustavo por todo o conhecimento passado dentro e fora de aula, além do apoio oferecido em meu ingresso na pós-graduação.

Agradeço principalmente ao meu orientador, Helio, por ter me apresentado uma área da Astronomia até então por mim ingenuamente desconhecida e que hoje escolhi dedicar minha carreira. Agradeço pela paciência e compreensão quando tive que deixar de lado os assuntos da IC por causa das disciplinas; e também pela cobrança nos momentos que o restante das atividades acadêmicas me permitiram dedicar ao projeto.

Por fim, agradeço à minha namorada, Yanna, que tornou os últimos quatro anos os melhores de minha vida. E que provavelmente leu isso tudo pensando que ia ficar de fora dos agradecimentos, mas no fundo sabe que é a pessoa mais importante pra mim e merece um livro inteiro de agradecimentos só pra ela.

# Sumário

Resumo	iii
Abstract	iv
Agradecimentos	v
Sumário	vi
Lista de figuras	ix
Lista de tabelas	xi
Abreviações	xii
Símbolos	xiii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Idades estelares</b>	<b>4</b>
2.1 Principais métodos . . . . .	6
2.1.1 Idade fundamental . . . . .	7
2.1.2 Idades semifundamentais . . . . .	7
2.1.2.1 Nucleocosmocronologia . . . . .	8
2.1.2.2 Idade de expansão . . . . .	10
2.1.3 Idades dependentes de modelo . . . . .	11
2.1.3.1 Isócronas evolutivas . . . . .	12
O Diagrama HR e a Evolução Estelar: . . . . .	12
Isócronas no Diagrama HR: . . . . .	15
Fontes de erros no método das isócronas: . . . . .	16
Vantagens e desvantagens do método das isócronas: . . . . .	17
Aplicações na literatura: . . . . .	18
2.1.3.2 Astrossismologia . . . . .	18
2.1.4 Idades empíricas . . . . .	19
2.1.4.1 Girocronologia . . . . .	20
2.1.4.2 Declínio de atividade cromosférica . . . . .	23

2.1.4.3	Depleção de lítio . . . . .	25
2.1.5	Idades estatísticas . . . . .	26
2.2	O caso das anãs M . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Cinemática da Vizinhança Solar</b>	<b>30</b>
3.1	Estrutura da Galáxia e o disco . . . . .	31
3.1.1	Disco da Galáxia . . . . .	31
3.2	Sistemas de coordenadas . . . . .	32
3.2.1	Sistema Fundamental de Repouso . . . . .	32
3.2.2	Sistema Local de Repouso . . . . .	34
3.3	U, V e W a partir de dados observacionais . . . . .	35
3.3.1	Distância . . . . .	35
3.3.1.1	Paralaxe trigonométrica . . . . .	36
3.3.1.2	Paralaxe fotométrica . . . . .	37
3.3.1.3	Distância dinâmica . . . . .	39
3.3.2	Movimento próprio e velocidade tangencial . . . . .	40
3.3.3	Velocidade radial . . . . .	41
3.3.4	Cálculo das componentes de velocidade U, V e W . . . . .	43
3.4	O movimento do Sol . . . . .	45
3.5	O elipsoide de velocidades . . . . .	48
3.5.1	Desvio do vértice . . . . .	49
3.5.1.1	Causa do desvio do vértice . . . . .	53
3.5.2	Deriva assimétrica . . . . .	55
3.6	Aquecimento dinâmico do disco . . . . .	59
3.7	Excentricidade . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Amostra</b>	<b>65</b>
4.1	Introdução . . . . .	65
4.2	Levantamento Geneva-Copenhagen . . . . .	66
4.2.1	Distribuição espacial de estrelas do catálogo . . . . .	67
4.2.2	Velocidades radiais . . . . .	67
4.2.3	Distâncias e movimentos próprios . . . . .	68
4.2.4	Parâmetros astrofísicos . . . . .	69
4.2.4.1	Avermelhamento e magnitude absoluta . . . . .	69
4.2.4.2	Temperatura efetiva . . . . .	70
4.2.4.3	Metalicidade . . . . .	70
4.2.4.4	Idades . . . . .	71
4.3	Subamostra do GCS (Amostra A) . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Desenvolvimento do método</b>	<b>76</b>
5.1	Introdução . . . . .	76
5.2	Aplicação do Teorema de Bayes . . . . .	77
5.2.1	Teorema de Bayes multivariacional . . . . .	80
5.3	Método 1: $p(t U, V, W)$ . . . . .	80
5.3.1	Teorema de Bayes para o Método 1 . . . . .	82
5.3.2	Ajustes de $\sigma_i(t)$ e $\ell_v(t)$ . . . . .	83
5.3.3	Obtendo a velocidade peculiar do Sol e o ajuste de $V_a(t)$ . . . . .	87

5.3.4	Aplicando o Método 1 . . . . .	89
5.4	Método 2: $p(t e, U, W)$ . . . . .	91
5.4.1	Teorema de Bayes para o Método 2 . . . . .	91
5.4.2	Relação entre a excentricidade e as componentes $U$ e $V$ . . . . .	93
5.4.3	Distribuição de estrelas no plano $eU$ . . . . .	95
5.4.3.1	Exemplo: distribuição no plano $eU$ para $t = 2$ Ga . . . . .	96
5.4.4	Corte do mapa de densidade em um dado valor de $U$ . . . . .	98
5.4.5	Mapas de densidade . . . . .	100
5.4.6	Aplicando o Método 2 . . . . .	100
5.5	Método 3: $p(t e, V, W)$ . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>105</b>
6.1	Idades cinemáticas das estrelas da Amostra A . . . . .	105
6.2	Caracterização das incertezas individuais . . . . .	107
6.3	Comparação com as idades isocronais . . . . .	108
6.4	Comparação entre as idades cinemáticas . . . . .	109
6.5	Distribuição de idades . . . . .	111
6.6	Relação Idade–Metalicidade . . . . .	112
<b>7</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>115</b>
7.1	Perspectivas futuras . . . . .	117
<b>A</b>	<b>Demonstrações do elipsoide de velocidades</b>	<b>119</b>
A.1	Variâncias . . . . .	119
A.2	Desvio do vértice . . . . .	121
<b>B</b>	<b>Tempos de livre caminho na Galáxia</b>	<b>123</b>
B.1	Tempo de livre caminho para colisões entre estrelas . . . . .	123
B.2	Colisões entre uma estrela e uma nuvem interestelar . . . . .	125
<b>C</b>	<b>Relação entre excentricidade e componentes <math>U</math> e <math>V</math></b>	<b>128</b>
C.1	Aplicação do Formalismo de Lagrange . . . . .	128
C.1.1	Equação de movimento na coordenada $\phi$ . . . . .	129
C.1.2	Equação de movimento na coordenada $r$ . . . . .	130
C.2	Obtendo a excentricidade . . . . .	132
C.3	Obtendo as componentes $U_*(\phi)$ e $V_*(\phi)$ . . . . .	133
C.3.1	Calculando $U_*$ . . . . .	134
C.3.2	Calculando $V_*$ . . . . .	134
C.4	Relação $e(U, V)$ . . . . .	136
C.5	Utilização do Eureka . . . . .	138
<b>D</b>	<b>Tabelas</b>	<b>140</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>143</b>

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama HR esquematizado . . . . .	13
2.2	Exemplo de conjunto de isócronas . . . . .	15
3.1	Definição do FSR . . . . .	33
3.2	Definição do LSR . . . . .	35
3.3	Esquema simplificado da paralaxe trigonométrica . . . . .	36
3.4	Esquema simplificado da distância dinâmica . . . . .	39
3.5	Distribuições $U$ , $V$ e $W$ de grupos de estrelas de diferentes idades . . . . .	49
3.6	Definição do desvio do vértice . . . . .	50
3.7	Desvio do vértice para estrelas de diferentes tipos espectrais do catálogo CRVAD-2 . . . . .	52
3.8	Análise da presença de grupos co-moventes em uma amostra de cerca de 1500 estrelas com idade entre 0.5 e 1.5 Ga . . . . .	54
3.9	Representação de três órbitas distintas que passam pelo mesmo ponto $(R_0, \theta)$ . . . . .	56
3.10	Distribuição da componente de velocidade $V$ das estrelas do CRVAD-2 . . . . .	58
3.11	Distribuições da componente de velocidade $V$ para grupos de estrelas de diferentes idades do GCS . . . . .	58
3.12	Distribuição de estrelas do GCS nos planos $UV$ , $UW$ e $VW$ para grupos de diferentes idades . . . . .	61
4.1	Distribuição espacial das estrelas do GCS . . . . .	67
4.2	Diagrama HR das estrelas do GCS para grupos de diferentes idades . . . . .	71
4.3	Distribuição das idades, temperaturas efetivas e metalicidades no GCS . . . . .	72
4.4	Distribuição espacial e distribuições dos principais parâmetros astrofísicos das estrelas da Amostra A . . . . .	74
5.1	Distribuição das componentes de velocidade e excentricidade das estrelas da Amostra A com relação à idade . . . . .	77
5.2	Exemplo de como obter a função de densidade de probabilidade aplicando o Teorema de Bayes . . . . .	79
5.3	Dispersões das componentes de velocidade $U$ , $V$ e $W$ , $v_1$ , $v_2$ das estrelas da Amostra A em função da idade . . . . .	85
5.4	Desvio do vértice das estrelas da Amostra A em função da idade . . . . .	86
5.5	Valores de $V'$ em função de $\sigma_U^2$ para estrelas da Amostra A . . . . .	88
5.6	Valores de $V'$ em função da idade para estrelas da Amostra A . . . . .	89
5.7	Distribuição de estrelas com idade igual a 2 Ga simuladas nos planos $v_1v_2$ , $UV$ e $eU$ . . . . .	97
5.8	Mapa de densidade de estrelas com idade igual a 2 Ga no plano $eU$ . . . . .	98

5.9	Exemplos de funções $p(e U, t) \sim e$ obtidas para diferentes valores de $U$ e $t = 2$ Ga . . . . .	99
5.10	Exemplos de mapas de densidade de estrelas no plano $eU$ para diferentes idades . . . . .	101
5.11	Exemplos de mapas de densidade de estrelas no plano $eV$ para diferentes idades . . . . .	103
6.1	Funções de densidade de probabilidade de idade obtidas para as seis primeiras estrelas da Amostra A . . . . .	106
6.2	Distribuição das incertezas individuais das idades das estrelas da Amostra A obtidas com os métodos cinemáticos . . . . .	107
6.3	Distribuição da diferença entre a idade obtida pelos métodos cinemáticos e a idade isocronal das estrelas da Amostra A . . . . .	109
6.4	Distribuição das diferenças entre as idades obtidas pelos três métodos cinemáticos . . . . .	110
6.5	Comparação entre a distribuição das idades cinemáticas e isocronais das estrelas da Amostra A . . . . .	111
6.6	Metalicidade média em função das idades isocronal e cinemáticas . . . . .	113
B.1	Esquema simplificado do processo de colisões entre duas estrelas . . . . .	124
C.1	Exemplo de órbita descrita pela Equação C.16 . . . . .	133
C.2	Comparação entre o valor exato do termo $\sqrt{1 + e \cos(\phi - \delta)}$ e o valor aproximado pela Equação C.29 . . . . .	135
C.3	Comparação entre a excentricidade calculada através da expressão teórica obtida e a calculada através de integração numérica das órbitas por Nordström et al. (2004) . . . . .	137
C.4	Comparação entre a excentricidade calculada pela expressão obtida e a presente no GCS . . . . .	139

# Lista de Tabelas

3.1	Componentes de velocidade peculiar do Sol de diferentes autores . . . . .	47
3.2	Variância das componentes $U$ , $V$ e $W$ , covariância entre as componentes $U$ e $V$ e o desvio do vértice para estrelas de diferentes tipos espectrais do CRVAD-2 . . . . .	53
5.1	Parâmetros do ajuste $\sigma_i(t) = b_i t^{a_i}$ obtidos para cada componente ( $U$ , $V$ , $W$ , $v_1$ e $v_2$ ) utilizando os dados da Amostra A . . . . .	86
6.1	Valores de $U$ , $V$ , $W$ e $e$ usados na aplicação dos métodos cinemáticos e idades mais provável ( $t_{MP}$ ) e esperada ( $t_E$ ) obtidas por cada método. . . . .	106
D.1	Idades obtidas para as 50 primeiras estrelas da Amostra A usando os três métodos cinemáticos desenvolvidos neste estudo . . . . .	141

# Abreviações

BaSTI	<i>A Bag for Stellar Tracks and Isochrones</i>
CCD	Dispositivo de carga acoplada ( <i>Charge-Coupled Device</i> )
CfA	<i>Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics</i>
CORAVEL	<i>CORrelation RAadial VELocities</i>
CoRoT	<i>Convection Rotation et Transits planétaires</i>
CRVAD	<i>Catalogue of Radial Velocities with Astrometric Data</i>
FSR	Sistema Fundamental de Repouso ( <i>Fundamental Standard of Rest</i> )
fdp	função de densidade de probabilidade
Ga	Giga-anos ( $10^9$ anos)
GCS	Levantamento Geneva-Copenhaga ( <i>Geneva-Copenhagen Survey</i> )
HIPPARCOS	<i>High Precision Parallax Collecting Satellite</i>
LSR	Sistema Local de Repouso ( <i>Local Standard of Rest</i> )
Ma	Mega-anos ( $10^6$ anos)
mas	Milissegundo de arco ( <i>milliarcsecond</i> )
PCRV	<i>Pulkovo Compilation of Radial Velocities</i>
RAVE	<i>RAdial Velocity Experiment</i>
ZAMS	Sequência Principal de Idade Zero ( <i>Zero Age Main Sequence</i> )

# Símbolos

Símbolo	Grandeza	Unidade <sup>1</sup>
$t$	Idade	Ga
$P$	Período	anos
$\Pi$	Velocidade radial no FSR	$\text{km s}^{-1}$
$\Theta$	Velocidade tangencial no FSR	$\text{km s}^{-1}$
$Z$	Velocidade vertical no FSR	$\text{km s}^{-1}$
$\Theta_0$	Velocidade tangencial do LSR no FSR	$\text{km s}^{-1}$
$U_\star$	Velocidade peculiar radial	$\text{km s}^{-1}$
$V_\star$	Velocidade peculiar tangencial	$\text{km s}^{-1}$
$W_\star$	Velocidade peculiar vertical	$\text{km s}^{-1}$
$U_\odot$	Velocidade peculiar radial do Sol	$\text{km s}^{-1}$
$V_\odot$	Velocidade peculiar tangencial do Sol	$\text{km s}^{-1}$
$W_\odot$	Velocidade peculiar vertical do Sol	$\text{km s}^{-1}$
$U$	Velocidade heliocêntrica radial	$\text{km s}^{-1}$
$V$	Velocidade heliocêntrica tangencial	$\text{km s}^{-1}$
$W$	Velocidade heliocêntrica vertical	$\text{km s}^{-1}$
$\vec{v}_t$	Velocidade heliocêntrica perpendicular à linha de visada (velocidade tangencial)	$\text{km s}^{-1}$
$\vec{v}_r$	Velocidade heliocêntrica paralela à linha de visada (velocidade radial)	$\text{km s}^{-1}$
$v_1$	Velocidade no eixo 1 do elipsoide de velocidade	$\text{km s}^{-1}$
$v_2$	Velocidade no eixo 2 do elipsoide de velocidade	$\text{km s}^{-1}$
$v_3$	Velocidade no eixo 3 do elipsoide de velocidade	$\text{km s}^{-1}$

---

<sup>1</sup>As unidades aqui apresentadas podem diferir das utilizadas em certas partes do texto. Sempre que for este o caso, as unidades em questão serão especificadas no texto.

---

$V_a$	Deriva assimétrica da distribuição da componente de velocidade $V$	$\text{km s}^{-1}$
$\ell_v$	Desvio do vértice (ângulo entre os eixos principais de um elipsoide de velocidade)	graus
$e$	Excentricidade orbital	adimensional
$d$	Distância heliocêntrica	pc
$\pi$	Paralaxe trigonométrica	arcsec
$\vec{\mu}$	Movimento próprio	arcsec ano <sup>-1</sup>
$m$	Magnitude aparente	adimensional
$M$	Magnitude absoluta	adimensional
$\mathcal{F}$	Fluxo	$\text{ergs s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$
$L$	Luminosidade	$\text{ergs s}^{-1}$
$\mathcal{M}$	Massa	$\mathcal{M}_\odot$

# Capítulo 1

## Introdução

Uma das grandes dificuldades enfrentadas pelo astrônomo é o fato de que a duração de diversos processos, como a formação e evolução de estrelas, é extremamente maior do que o que pode ser observado ao longo de uma vida humana (na realidade, muitos processos são centenas de milhões de vezes mais longos que isso). Por causa disso, somente somos capazes de estudar a evolução de sistemas, de um ponto de vista observacional, se formos capazes de identificar diferentes objetos em diferentes etapas de um mesmo processo evolutivo.

As idades das estrelas são importantes em uma série de problemas astrofísicos, que vão desde estudos relacionados à estrutura e evolução estelar à estudos acerca da evolução da Galáxia como um todo (como investigações da evolução química da Galáxia, através da relação idade–metalidade, e da evolução dinâmica da Galáxia, através da relação entre a idade e os parâmetros cinemáticos das estrelas).

Diversos métodos para determinar idades estelares podem ser encontrados na literatura, porém, nenhum deles pode ser considerado ideal para todos os tipos de estrelas, já que algumas estrelas apresentam características que impedem que suas idades sejam calculadas por algum desses métodos. Por causa disso, esforços devem ser feitos no sentido de desenvolver novos métodos aplicáveis também a estas estrelas não abarcadas pelos métodos tradicionais. Além disso, o desenvolvimento de métodos independentes permite validar as idades obtidas pelos métodos que já se encontram em uso na literatura.

No Capítulo 2, descrevemos com mais detalhes a importância das idades estelares em diferentes investigações astrofísicas e apresentamos os principais métodos disponíveis na literatura. Mostramos que mesmo quando consideramos todos os principais métodos desenvolvidos, ainda existem estrelas para as quais não é possível determinar as idades, como é o caso das anãs M, o que nos motivou a buscar o desenvolvimento de um novo método capaz de inferir idades.

Para a compreensão do método, é necessário conhecer alguns conceitos da cinemática das estrelas da vizinhança Solar, como os sistemas fundamental e local de repouso, as velocidades peculiares, a velocidade peculiar do Sol, o aquecimento dinâmico do disco, o formalismo do elipsoide de velocidade, o desvio do vértice e a deriva assimétrica. Dedicamos o Capítulo 3 deste trabalho à apresentação destes conceitos.

Neste estudo, desenvolvemos três métodos capazes de determinar uma função de densidade de probabilidade para a idade de estrelas individuais com base em seus movimentos espaciais e na excentricidade de suas órbitas. Este método se baseia no aquecimento dinâmico do disco: estrelas mais velhas apresentam maior probabilidade de apresentarem componentes de velocidade maior, pois a dispersão das componentes de velocidade é maior para grupos de estrelas mais velhas.

Para quantificar a probabilidade de que uma estrela de idade  $t$  possua determinadas componentes de velocidade e excentricidade é necessário conhecer as formas das distribuições destas grandezas para um conjunto de estrelas de idade  $t$ . Para construir um modelo das distribuições utilizamos as estrelas do catálogo Geneva-Copenhagen (Casagrande et al., 2011), que corresponde a um extenso levantamento de anãs F e G, contendo dados cinemáticos e idades para mais de 16 000 estrelas. No Capítulo 4 descrevemos com detalhes o levantamento Geneva-Copenhagen e definimos a subamostra (que chamamos de Amostra A) utilizada neste estudo.

Parametrizamos as distribuições das componentes de velocidade de acordo com o formalismo do elipsoide de velocidades (Schwarzschild, 1907). Neste caso, os parâmetros que descrevem a distribuição são os desvios padrões das componentes de velocidade, o desvio do vértice e a deriva assimétrica. Utilizamos os dados da Amostra A para obter os ajustes dos parâmetros em função da idade. Para obter as distribuições de excentricidade foi necessário encontrar inicialmente uma relação entre a excentricidade

e as componentes de velocidade espacial da estrela, o que foi feito através do formalismo de Lagrange. Os detalhes destes procedimentos são apresentados no Capítulo 5.

Conhecendo as distribuições das componentes de velocidade espacial e excentricidade para uma dada idade  $t$ , somos capazes de calcular a probabilidade de que uma estrela desta idade possua determinados valores observados para estas grandezas. Através da aplicação do teorema de Bayes, podemos inverter esta relação de probabilidade para obter a probabilidade de que uma estrela possua uma determinada idade dadas as componentes de sua velocidade espacial e/ou a excentricidade de sua órbita. Obtendo as probabilidades para diferentes idades, construímos a função de densidade de probabilidade para a idade da estrela. O desenvolvimento deste método também é apresentado no Capítulo 5.

Esta função de densidade de probabilidade nos permite caracterizar idades individuais a partir da idade mais provável, idade esperada e idade mediana. Ela também nos permite estimar as incertezas na determinação das idades individuais com base nas idades correspondentes aos diferentes percentis. Utilizamos o método para determinar as idades cinemáticas das estrelas da Amostra A. Com estas idades (que chamamos *idades cinemáticas*), obtivemos a distribuição das idades das estrelas da Amostra A e estudamos a relação idade–metalicidade. Apresentamos os resultados, juntamente com a comparação com os resultados obtidos utilizando as idades isocronais, no Capítulo 6.

Por fim, o Capítulo 7 apresenta nossas conclusões e as perspectivas futuras que temos quanto a este projeto.

## Capítulo 2

# Idades estelares

De acordo com o “teorema” de Vogt-Russell, a trajetória evolutiva de uma estrela (as diferentes estruturas internas que a estrela possui ao longo de diferentes épocas) em equilíbrio térmico e hidrostático é determinada principalmente por sua massa inicial e sua composição química. A idade da estrela, por sua vez, especifica em qual etapa de sua trajetória evolutiva a estrela se encontra. Dessa forma, a idade, juntamente com a massa e a composição química, define a estrutura interna da estrela: seus gradientes de temperatura, pressão, luminosidade e seu perfil radial de densidade. Este fato, em si, já torna o conhecimento das idades estelares extremamente importante para uma série de problemas astrofísicos relacionados à estrutura e evolução estelar, mas as idades são ainda importantes em uma grande quantidade de outros estudos, como por exemplo:

- As idades individuais de estrelas muito jovens são importantes para estudos de sistemas planetários, pois ajudam a compreender o processo de formação e migração planetária e a evolução da poeira circunstelar.
- A distribuição de idades de estrelas de longa vida reflete o histórico de formação estelar e pode ajudar a compreender aspectos da estrutura e evolução da Galáxia.
- As abundâncias médias de elementos químicos de grupos de estrelas de longa vida de diferentes idades são extremamente importantes em estudos da evolução química da Galáxia.
- A identificação de estrelas com idade suficientemente avançada para que vida como a da Terra tenha evoluído o suficiente para ser detectada pode direcionar nossas

buscas por formas de vida extraterrestre para sistemas para os quais a possibilidade de sucesso é maior.

- A determinação das idades de estrelas de tipo solar permite-nos compreender o comportamento do Sol em diferentes etapas de sua evolução. Dessa forma, podemos saber como era o comportamento do Sol no passado e como será no futuro.

Entretanto, determinar as idades não é uma tarefa simples. Enquanto as massas podem ser medidas diretamente em sistemas múltiplos, para os quais as órbitas são conhecidas, e as abundâncias químicas podem ser obtidas por espectroscopia, não existe nenhuma forma direta de medir as idades. Para inferir as idades, é preciso identificar propriedades das estrelas, internas ou externas, que variam com o tempo e determinar a relação que estas propriedades possuem com a idade.

De acordo com Barnes (2007), para ser considerado ideal, o método utilizado para datar as idades deve utilizar um observável que seja uma propriedade individual das estrelas, sensível apenas à idade, e que varie monotonicamente com a idade. A relação deve ser calibrada utilizando determinações independentes, como a idade fundamental do Sol. A função que descreve o observável em relação à idade deve ser identificada e invertida de forma a fornecer a idade a partir do observável. E ainda, é necessário que as incertezas possam ser estimadas.

De todos os métodos já desenvolvidos, nenhum pode ser considerado ideal. No geral os observáveis utilizados possuem relação com outras grandezas (nem sempre identificadas), faltam dados fundamentais independentes para as calibrações e em alguns casos a determinação das incertezas é uma tarefa bastante complexa, e quando possível, é comum encontrar incertezas da ordem de 50% ou superior. Entretanto, mesmo que os métodos não sejam universalmente ideais, eles podem se aproximar de um método ideal quando considerado um tipo específico de estrelas.

Neste capítulo, descrevemos os principais métodos tradicionais. O método cinemático, que desenvolvemos neste estudo, será apenas brevemente apresentado neste capítulo, sendo discutido com detalhes no Capítulo 5. Uma das vantagens do método que desenvolvemos é o fato de ele não possuir nenhuma restrição quanto a sua aplicação para estrelas anãs M individuais, para as quais nenhum dos demais métodos pode ser aplicado. Atualmente, somente é possível determinar a idade destas estrelas quando elas

fazem parte de um aglomerado ou de um sistema binário, no caso em que a idade da companheira pode ser inferida através de alguma das técnicas desenvolvidas.

## 2.1 Principais métodos

Na literatura podemos encontrar vários métodos desenvolvidos para estimar idades para as estrelas; entretanto, nenhum deles satisfaz todas as condições necessárias para que seja considerado um método ideal e universal. Na prática, o método mais adequado para datar a idade de uma estrela depende das características da própria estrela. Portanto, faz-se necessário o conhecimento abrangente dos diversos métodos desenvolvidos para que se possa determinar qual o método mais adequado para o objeto de interesse.

Sempre que possível, deve-se buscar aplicar mais de um método independente para datar a idade de uma estrela. Mesmo que um método forneça uma idade pouco precisa, e outros métodos só possam fornecer limites superiores e/ou inferiores, juntos eles podem permitir a obtenção de uma idade mais precisa e acurada. Como exemplo desta abordagem, podemos citar Lachaume et al. (1999) que aplica cinco métodos distintos (e nem sempre independentes) com o objetivo de comparar os resultados e combiná-los para obter melhores estimativas.

No entanto, veremos que as limitações para determinados tipos de estrelas, como o caso das estrelas de populações II, são tamanhas, que apenas um método é viável e as idades obtidas nem sempre estão de acordo com o esperado pelo modelo cosmológico (Ludwig et al., 2010). No caso das estrelas frias evoluídas de baixa massa (anãs M) isoladas, nenhum dos métodos principais pode ser aplicado. O método cinemático aqui desenvolvido busca preencher esta lacuna, permitindo que idades possam ser determinadas para membros dessa classe de estrelas. As idades derivadas pelo nosso método para as estrelas de longa vida abrem caminho para o estudo da evolução química da Galáxia, do histórico de formação estelar na vizinhança Solar e de diversas relações para estrelas de baixa massa, como a idade–período de rotação e idade–atividade cromosférica.

Nesta seção serão apresentados os principais métodos. Todos eles contêm peculiaridades e complexidades cuja discussão foge aos objetivos deste trabalho. Sempre que possível, serão apresentadas referências nas quais uma descrição mais detalhada de cada método pode ser encontrada. Neste texto, o objetivo será destacar a aplicabilidade de

cada abordagem, suas vantagens e desvantagens frente às demais, enfatizando as razões pelas quais tais métodos não podem ser aplicados para estrelas anãs M.

Para simplificar a descrição dos métodos, seguiremos a classificação utilizada por Soderblom (2010). Nesta classificação, os métodos se dividem em: fundamentais, semi-fundamentais, dependentes de modelo, empíricos e estatísticos.

### 2.1.1 Idade fundamental

Para um método ser considerado fundamental, a física por trás da relação entre a grandeza observada e a idade precisa ser bem conhecida. Entre todos os métodos já desenvolvidos, apenas um pode ser considerado fundamental: a datação radiativa de material meteorítico.

Como não temos acesso a este tipo de material em nenhum outro sistema estelar além do nosso, este método só pode ser aplicado para o Sol. Ele aponta uma idade de  $4.567 \pm 0.001 \pm 0.005$  Ga para o Sistema Solar (Chaussidon, 2007), sendo a incerteza de 1 milhão de anos relacionada às precisões nas medidas e a de 5 milhões de anos relacionada a incertezas na sequência exata dos eventos nos primeiros anos desse sistema.

Mesmo não sendo aplicável para outras estrelas, este método é extremamente importante por fornecer, ao mesmo tempo, uma idade precisa e acurada para o Sol. Esta idade pode então ser usada como calibração ou como validação dos demais métodos.

### 2.1.2 Idades semifundamentais

Os métodos semifundamentais são assim chamados porque, a despeito de a física por trás dos processos envolvidos ser bem compreendida, suas aplicações dependem de suposições de relações e parâmetros nem sempre bem conhecidos.

Os principais métodos semifundamentais são a nucleocosmocronologia (cuja aplicação só é possível supondo abundâncias iniciais relativas entre diferentes elementos) e o método de idade de expansão de aglomerados (que necessita da adoção de uma expressão para o potencial gravitacional da Galáxia). Apresentamos a seguir uma visão geral destes métodos.

### 2.1.2.1 Nucleocosmocronologia

Um dos métodos semifundamentais desenvolvidos para estimar a idade das estrelas é o método da nucleocosmocronologia. Este baseia-se na presença de elementos radioativamente instáveis de longa vida na atmosfera das estrelas. Para aplicá-lo, é preciso identificar isótopos que possuam um tempo de meia-vida comparável à idade do objeto de estudo. O método está então limitado por nossa capacidade de detectar as linhas de absorção destes isótopos no espectro da estrela.

Soderblom (2010) apresenta uma descrição sucinta do método e uma revisão mais detalhada pode ser encontrada no paper de Cowan et al. (1991). Uma análise mais atual dessa abordagem e das incertezas associadas foi apresentada por Ludwig et al. (2010). Neste trabalho, será apresentada apenas uma visão geral.

Os dois isótopos mais viáveis para uso são o  $^{238}\text{U}$  que possui tempo de meia vida igual a 4.47 bilhões de anos, e o  $^{232}\text{Th}$ , que apresenta um tempo de meia vida de 14.05 bilhões de anos. Dentre estes, o Th é mais facilmente observado, apresentando uma linha de absorção em 4019 Å.

O princípio no qual este método se baseia é bastante simples: deve-se medir a abundância relativa entre um elemento instável e outro estável e, então, se as abundâncias relativas iniciais e o tempo de meia-vida do elemento instável são conhecidos, pode-se calcular o tempo necessário para que ocorra o decaimento observado do elemento instável (a idade da estrela) através da conhecida relação de decaimento:

$$t_{\text{nucl}} = \frac{1}{\ln 2} \tau_{1/2} \ln \frac{N_{X0}}{N_X} , \quad (2.1)$$

onde  $t$  corresponde à idade da estrela e  $\tau_{1/2}$  ao tempo de meia-vida do elemento;  $N_{X0}$  e  $N_X$  são, respectivamente, as abundâncias inicial e observada para o elemento em questão.

A abundância inicial do elemento instável  $N_{X0}$  pode ser obtida através da abundância de um elemento estável de referência  $N_R$ , se a taxa de produção relativa entre estes dois elementos ( $\beta$ ) for conhecida.

$$N_{X0} = \beta N_R \quad (2.2)$$

Entretanto, na prática, a aplicação do método não é tão simples e está sujeita a diversas fontes de incerteza.

O fato de as linhas de absorção de urânio e tório serem muito fracas em relação aos demais elementos faz com que a observação das linhas desses isótopos somente seja possível para estrelas que apresentam metalicidade muito inferior à do Sol.

É também preciso adotar uma determinada taxa de formação relativa entre o elemento instável e um elemento estável de referência, razão pela qual este método é semifundamental. Apesar de o decaimento de elementos instáveis ser bem compreendido, as abundâncias relativas iniciais entre os elementos são ainda pouco conhecidas e as incertezas acerca das abundâncias iniciais são tão maiores quanto mais recentemente se deu a formação das estrelas em questão.

Os dois fatores supracitados dificultam muito a aplicação do método para estrelas mais jovens e ricas em metais. A formação destas estrelas iniciou-se em uma época para a qual as incertezas nas abundâncias iniciais já são muito elevadas e a metalicidade delas já é alta o suficiente para que as linhas de absorção do urânio e do tório sejam ofuscadas pelas linhas dos demais elementos. No entanto, o método é ideal para as estrelas de população II, que se formaram nos primórdios da Galáxia e apresentam baixa metalicidade.

Talvez a principal vantagem do método de nucleocosmocronologia é o fato de não exigir o conhecimento da distância da estrela. Veremos que no método das isócronas, e no método cinemático aqui apresentado, a distância é fundamental. Como as estrelas de população II encontram-se, no geral, em distâncias maiores que as que podemos medir, os demais métodos não são aplicáveis e a nucleocosmocronologia se configura no principal método através do qual a idade dessas estrelas é determinada. A nucleocosmocronologia é, então, fundamental para o estudo da evolução de estruturas muito antigas como o halo e o disco espesso.

Entre os trabalhos que aplicam este método temos Ludwig et al. (2010) e del Peloso et al. (2005a,b,c). A partir dos resultados de Ludwig et al. (2010) fica claro que o método é extremamente dependente do valor suposto para taxa de produção relativa entre o elemento instável e o elemento estável de referência. Utilizando as taxas de produção relativa obtidas por diferentes autores, Ludwig et al. (2010) encontram diferenças que chegam a 6 bilhões de anos. Além disso, encontram idades bastante superiores ao tempo de Hubble (por ex. 37.2 Ga), idades com incertezas superiores ao tempo de Hubble (por ex. 18.5 Ga), e até mesmo idades formalmente negativas (por ex. -1.5 Ga). É evidente

que avanços no conhecimento das abundâncias relativas iniciais dos elementos nos sítios onde se formaram as estrelas em estudo são fundamentais para tornar o método viável.

O trabalho de del Peloso et al. (2005a,b,c) apresenta uma abordagem ligeiramente diferente que merece ser comentada. Ao incluir na análise modelos de evolução química da Galáxia, del Peloso et al. (2005a,b,c) aplicaram o método de nucleocosmocronologia para estrelas do disco fino. Neste caso, o método não foi aplicado para determinar a idade de estrelas individuais, mas sim da formação do disco fino. O valor que eles obtiveram, de  $(8.8 \pm 1.7)$  Ga, está de acordo com os valores obtidos através da aplicação de diferentes métodos (Knox et al., 1999; Leggett et al., 1998).

### 2.1.2.2 Idade de expansão

Outro método semifundamental é o que se baseia na dissolução de aglomerados. Sabemos que as estrelas se formam em conjunto a partir de nuvens moleculares gigantes. As várias estrelas que se formam simultaneamente mantêm-se ligadas por atração gravitacional mútua, formando os aglomerados, mas se dispersam rapidamente: apenas cerca de 4% dos aglomerados chegam a 100 milhões de anos, e mais de 90% dissolvem-se antes de completar 10 milhões de anos (Lada & Lada, 2003).

Conhecendo os dados cinemáticos de estrelas de aglomerados que ainda não se dissolveram completamente, é possível traçar suas órbitas até o instante em que as estrelas se encontravam espacialmente mais próximas e, assim, estimar a idade das estrelas do aglomerado. Contudo, é necessário fazer suposições a respeito do potencial da Galáxia, e, por causa disso, o método é semifundamental. Por definição, este método não pode ser aplicado para estrelas individuais, fornecendo apenas idades para os aglomerados como um todo.

Grande parte dos demais métodos desenvolvidos para determinar idades estelares exige a aplicação de determinados modelos, o que adiciona incertezas aos resultados obtidos. Uma das principais vantagens do método de expansão de aglomerados é que este se baseia em princípios simples e exige apenas o conhecimento do movimento espacial das estrelas. É então necessário conhecer as distâncias, movimentos próprios e velocidades radiais das estrelas que constituem o aglomerado. A incerteza na determinação dessas medidas leva a incertezas nas posições calculadas para as estrelas tão maiores

quanto mais remotamente no passado essa posição for calculada. Por causa disso, calcular posições em que as estrelas estavam há mais de 20-30 milhões de anos torna-se problemático (Soderblom, 2010). Isso faz com que o método só seja viável para estrelas muito jovens (de poucos milhões de anos), sendo, em muitos casos, o único método viável para estas estrelas.

Exemplos da aplicação deste método podem ser encontrados em de la Reza et al. (2006), Makarov (2007) e Ortega et al. (2002). Outros exemplos podem ser encontrados referendados Fernández et al. (2008) (no qual o método é denominado ‘idades dinâmicas’). de la Reza et al. (2006) aplicam o método para derivar a idade da associação de estrelas TW Hya, obtendo uma idade de  $8.3 \pm 0.8$  Ma. Makarov (2007) apresenta idades para as associações de Tucana-Horologium (27 Ma), Beta Pictoris ( $22 \pm 12$  Ma) e AB Dor (38 Ma). Ortega et al. (2002) também obtiveram uma idade para Beta Pictoris através da aplicação deste método, obtendo uma idade de 11.5 Ma.

Considerando os exemplos citados, fica claro que o método de expansão só pode ser aplicado para grupos estelares muito jovens ( $< 100$  Ma) e supera em acurácia outras tentativas de determinar idades para estes grupos. Para estudo de processos que se dão no início da vida das estrelas, como a formação planetária e posterior migração dos planetas, a aplicação do método de expansão de aglomerados é extremamente importante.

Em suma, dos métodos semifundamentais, a nucleocosmocronologia é o método mais ideal para estrelas velhas ( $> 10$  Ga) e distantes, enquanto o método de expansão de aglomerados é o mais ideal para estrelas muito jovens ( $< 100$  Ma) e próximas.

### 2.1.3 Idades dependentes de modelo

Os métodos dependentes de modelo são assim chamados por envolver, em alguma etapa do processo, o uso de modelos de estrutura e evolução estelar. Os principais métodos nesta categoria são o método das isócronas evolutivas no diagrama HR e a astrossismologia.

O método das isócronas evolutivas utiliza modelos de estrutura estelar e trajetórias evolutivas, calculadas para estrelas de diferentes massas e composições químicas, para construir linhas isocronais no diagrama HR. Já a astrossismologia utiliza modelos individuais para ajustar os modos de vibração da estrela previstos para um conjunto de

parâmetros astrofísicos (incluindo a idade) aos modos de vibração observados em seu espectro.

Nesta seção serão apresentados ambos os métodos. Porém, mais ênfase será dada ao método das isócronas, por ter sido este o método usado por Casagrande et al. (2011) para obter as idades que utilizamos nos ajustes das relações entre as propriedades cinemáticas e a idade no Capítulo 5.

### 2.1.3.1 Isócronas evolutivas

O método das isócronas evolutivas é um dos mais utilizados na literatura. Sua aplicação é quase universal e pode ser aplicado tanto para estrelas individuais como para aglomerados. O método é classificado como dependente de modelo, pois exige a construção de isócronas a partir das trajetórias evolutivas calculadas para estrelas de diferentes massas e composições químicas (exigindo, então, o uso de modelos de evolução estelar).

Como o método se baseia na posição de uma estrela no diagrama HR e nas trajetórias evolutivas de estrelas de diferentes massas, descreverei brevemente estes temas. Em seguida apresentarei o método propriamente dito com suas vantagens e desvantagens e também os casos em que pode ser aplicado.

**O Diagrama HR e a Evolução Estelar:** No início do Século XX, Ejnar Hertzsprung e Henry Norris Russel chegaram independentemente à conclusão de que a posição das estrelas em um diagrama de magnitude absoluta *vs.* índice de cor (ou tipo espectral, no caso de Russel) não é aleatória. Eles perceberam que as estrelas se aglomeravam em determinadas regiões do diagrama, mostradas na Figura 2.1.

Sabemos hoje que cada região do diagrama corresponde a estrelas em diferentes estágios evolutivos, sendo a principal diferença o processo de produção de energia entre elas. As estrelas que se encontram na chamada Sequência Principal queimam hidrogênio no núcleo. As subgigantes queimam hidrogênio em camada circundante ao núcleo. Das estrelas gigantes em diante inicia-se a queima de elementos mais pesados, começando com o hélio. No caso das protoestrelas e das anãs brancas, a fonte principal de energia não é nuclear, mas sim gerada por contração gravitacional.

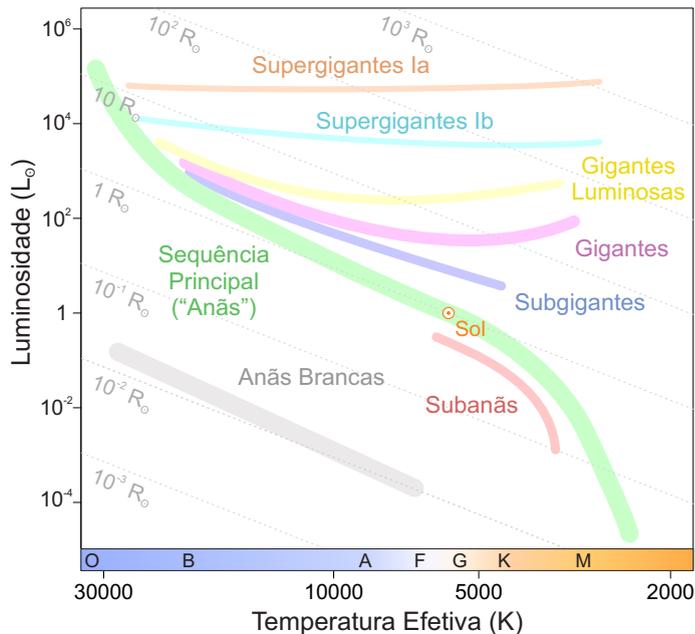


FIGURA 2.1: Diagrama HR esquematizado mostrando as diferentes regiões povoadas por estrelas. As linhas tracejadas representam o raio das estrelas.

Este diagrama é de grande importância para a astronomia moderna, já que muitas das propriedades físicas de uma estrela podem ser inferidas apenas através de sua posição no diagrama HR. Os principais parâmetros responsáveis pela posição de uma estrela no diagrama HR são sua massa, sua metalicidade e sua idade.

Quando uma estrela começa a queima de hidrogênio, ela entra na chamada Sequência Principal de Idade Zero (ZAMS, do inglês “Zero Age Main Sequence”). A ZAMS depende da metalicidade das estrelas em questão e a posição ocupada por uma estrela na ZAMS é determinada por sua massa. Durante sua evolução na Sequência Principal, a estrela geralmente torna-se mais quente e mais luminosa e o tempo que ela passa nesta fase é também determinado por sua massa. No geral, estrelas de maior massa esgotam seu combustível mais rapidamente que as de menor massa e, portanto, passam menos tempo na sequência principal.

As estrelas passam a maior parte de suas vidas na Sequência Principal. O tempo de vida médio das estrelas de alta massa ( $\sim 30 M_{\odot}$ ) é da ordem de 10 milhões de anos, enquanto para estrelas do tipo solar o tempo de vida médio é da ordem de 10 bilhões de anos. Para estrelas menos massivas que o Sol, o tempo de vida médio é ainda maior: 1 trilhão de anos para estrelas com massa igual a  $0.1 M_{\odot}$  (como as anãs M), o que corresponde a um tempo muito maior que a idade do universo. Isso significa que estas

estrelas evoluíram muito pouco com relação a sua posição na ZAMS. Veremos adiante que isso impossibilita o uso do método das isócronas para estas estrelas.

A evolução das estrelas de média massa ( $\approx 0.5-8 M_{\odot}$ ), como o Sol, ocorre da seguinte maneira: quando o hidrogênio no núcleo da estrela se esgota, ela sai da Sequência Principal e entra no chamado ramo das gigantes vermelhas, no qual ocorre queima de hidrogênio apenas em camada circundante ao núcleo. O núcleo da estrela se contrai e sua temperatura aumenta até o ponto no qual se torna possível a fusão de hélio. Durante esta fase de sua vida, a estrela encontra-se no chamado ramo horizontal. Quando o hélio no núcleo se esgota, deixando a estrela com um núcleo de carbono, a estrela entra no Ramo Assintótico das Gigantes. A queima de hidrogênio e hélio continua em camadas circundantes ao núcleo até que praticamente todo este combustível seja consumido ou perdido pela estrela na forma de vento estelar. No fim de sua vida, o material expelido pela estrela devido ao vento estelar forma a chamada nebulosa planetária. A estrela central, remanescente deste processo, não possui massa suficiente para atingir as condições necessárias para a queima de carbono, tornando-se então uma anã branca.

A situação é diferente no caso de estrelas mais massivas. Quando o hidrogênio do núcleo se esgota, elas atingem as condições necessárias para a queima de hélio muito mais rapidamente, não passando pela fase de gigantes. Além disso, estas estrelas atingem as condições necessárias para a queima do carbono e de metais mais pesados. Forma-se uma estrutura em forma de “cebola”, com a queima de diferentes metais em diferentes camadas da estrela, sendo que os mais pesados encontram-se mais próximos do núcleo. A estrela evolui dessa forma até que seu núcleo seja constituído de ferro. A queima de ferro não ocorre, pois, ao invés de liberar, consome energia. O núcleo então colapsa e a estrela explode em supernova. O remanescente da explosão pode ser tanto uma estrela de nêutrons, quanto um buraco negro, dependendo da massa do núcleo da estrela que explodiu.

Já para as estrelas menos massivas, o tempo gasto na Sequência Principal é muito superior à idade do universo, então não esperamos observar nenhuma estrela deste tipo em fases posteriores de sua evolução. Os modelos físicos indicam que estas estrelas não irão atingir as condições necessárias para a queima de hélio e tornam-se anãs brancas alguns bilhões de anos após saírem da Sequência Principal, sem passar pela fase de gigante vermelha (Adams et al., 2005).

**Isócronas no Diagrama HR:** A teoria da Evolução Estelar é bem conhecida e somos capazes de construir modelos evolutivos que fornecem a trajetória evolutiva de uma estrela no Diagrama HR a partir de sua massa e composição química. Com isso, para uma dada metalicidade, podemos saber a posição ocupada por estrelas de diferentes massas, porém com a mesma idade. As isócronas são as linhas que contêm as estrelas coetâneas de diferentes massas e mesma metalicidade, no Diagrama HR. A Figura 2.2 mostra um conjunto de isócronas para estrelas com metalicidade  $[Me/H] = -0.253$ . Os dados foram obtidos do conjunto de isócronas BaSTI (Pietrinferni et al., 2004), disponíveis no domínio <http://ia2.oats.inaf.it/archives/basti-a-bag-for-stellar-tracks-and-isochrones>.

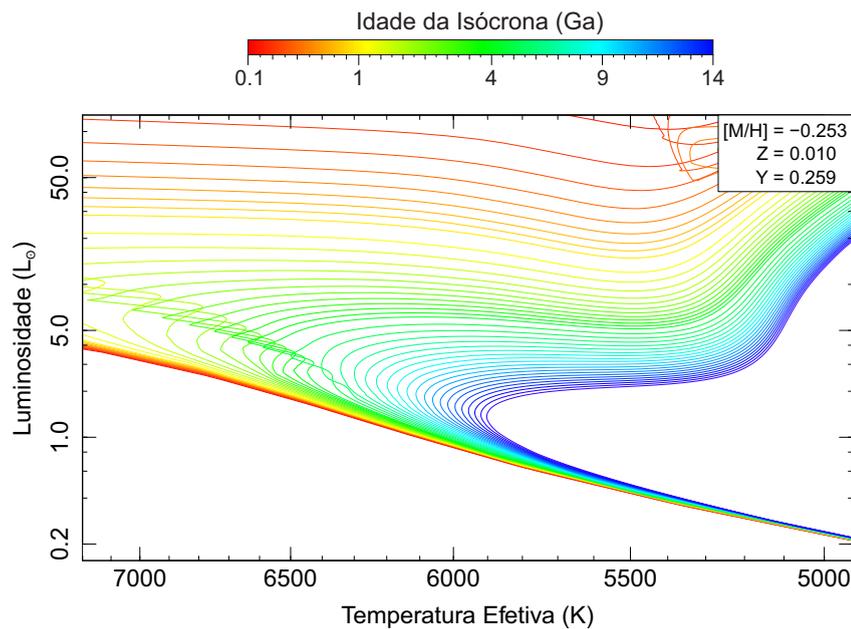


FIGURA 2.2: Conjunto de isócronas para estrelas com metalicidade  $[Me/H] = -0.253$ . As isócronas representadas foram obtidas do conjunto BaSTI (Pietrinferni et al., 2004).

As isócronas podem ser utilizadas para determinar a idade de aglomerados ou de estrelas individuais. Basta que a posição das estrelas no diagrama HR e suas composições químicas sejam conhecidas. Para isso, é necessário conhecer a metalicidade, a temperatura efetiva e a luminosidade das estrelas. A luminosidade é obtida através da magnitude aparente e distância. Assim, o método só pode ser aplicado para estrelas cuja distância possa ser determinada. Uma das formas de se obter a temperatura efetiva é através de calibrações com os índices de cor. Como a relação entre essas grandezas ainda não é conhecida com exatidão, a conversão entre os índices de cor e a temperatura efetiva é uma das principais fontes de incerteza na determinação das idades.

No caso de aglomerados, as estrelas se formam simultaneamente a partir da mesma nuvem molecular, portanto representam uma amostra coetânea e de mesma composição química; assim, a determinação de idade se resume em ajustar uma isócrona para a distribuição das estrelas no Diagrama HR. Desse modo, todas as estrelas do aglomerado são utilizadas no ajuste da isócrona, minimizando as incertezas. Esta abordagem não pode ser feita para estrelas individuais.

Para as estrelas individuais, a idade é determinada por meio da interpolação das isócronas obtidas através dos modelos. Apesar de parecer simples, o método é bastante complexo, na prática, principalmente no tratamento das incertezas.

**Fontes de erros no método das isócronas:** A escolha do conjunto de isócronas a ser adotado para determinar a idade de uma estrela ou aglomerado depende de sua metalicidade. Isso leva a complicações na determinação da influência da incerteza na metalicidade na idade inferida.

Outra fonte de erro é o fato de que diferentes isócronas podem passar pelo mesmo ponto, impossibilitando a atribuição de uma idade única para estrelas nestas regiões. Para um ponto no qual passem mais de uma isócrona, é comum que a fase evolutiva representada por este em uma isócrona seja diferente da representada na outra. Neste caso, quando o interesse é obter idades individuais, é mais adequado atribuir à estrela a idade da isócrona que representa a fase evolutiva mais duradoura neste ponto, já que a probabilidade de a estrela se encontrar nessa posição do diagrama HR por estar nesta fase evolutiva é maior. Por outro lado, quando o interesse é obter médias de idade não enviesadas para grupos estelares, a abordagem adotada por Asiain et al. (1997) é a mais adequada: ao invés de utilizar a idade de uma das isócronas utiliza-se uma média ponderada pelo tempo de duração da fase evolutiva relativa a cada isócrona no ponto onde elas se cruzam.

Além das fontes de erro já citadas, existe outra complicação no método das isócronas: as incertezas não podem ser determinadas de forma simples, mesmo que se admita erros gaussianos para a luminosidade e a temperatura efetiva. Isso ocorre devido ao fato de que o espaçamento entre as isócronas varia conforme a posição no diagrama HR. Para contornar este problema, Pont & Eyer (2004) e Jørgensen & Lindegren (2005) apresentam um método bayesiano para estimar as idades. Entretanto, tratando

o problema dessa forma não se obtém uma idade individual única para as estrelas, mas sim uma distribuição de probabilidade, da qual se estima uma idade mais provável e sua incerteza (semelhante ao que calculamos neste trabalho para a idade cinemática).

**Vantagens e desvantagens do método das isócronas:** Entre as principais vantagens do método está o fato de que os modelos necessários de evolução estelar se baseiam em uma física bem conhecida, especialmente para estrelas do tipo solar. Dessa forma, espera-se que as idades determinadas por isócronas sejam bastante acuradas.

Além disso, o método pode ser aplicado para estrelas massivas ou estrelas velhas, para as quais existem poucos métodos capazes de determinar idades. Outra característica positiva dessa abordagem é que ela pode ser aplicada para um grande número de estrelas com bases nos mesmos modelos evolutivos, tornando-a adequada para determinar a idade das estrelas em amostras com muitas estrelas (como o levantamento Geneva-Copenhague, com mais de 10 000 estrelas), o que nem sempre é possível nos outros casos. Veremos adiante, por exemplo, que a astrossismologia não pode ser aplicada para um número grande de estrelas, pois requer a construção de modelos individuais para cada estrela em questão.

A primeira desvantagem que surge na aplicação do método é na determinação da temperatura efetiva a partir dos índices de cor observados, pois a escala de conversão não é bem compreendida. Além disso, o método só pode ser aplicado para estrelas com metalicidade conhecida, para que seja feita a escolha adequada do conjunto de isócronas a ser utilizado.

A determinação das incertezas requer uma análise bastante complexa e em alguns casos não é possível determinar uma idade única, pois as isócronas se cruzam em determinados pontos. Mesmo nos casos com boas determinações de metalicidade, luminosidade e temperatura efetiva, as incertezas chegam a 20-30% e é comum encontrar idades estimadas com incertezas superiores a 50%.

Uma das principais limitações do método é o fato de que o espaçamento das isócronas em determinadas regiões do diagrama HR é muito pequeno em comparação com as incertezas na posição das estrelas. Podemos ver na Figura 2.2 que as isócronas se aproximam na região da Sequência Principal de baixa massa (onde se encontram as

anãs M). Neste caso, o método das isócronas não pode ser aplicado, nem se estivermos dispostos a aceitar grandes incertezas.

**Aplicações na literatura:** Devido a sua grande universalidade em termos de aplicação, existem diversos exemplos do uso do método das isócronas na literatura. Entre estes podemos citar Edvardsson et al. (1993) que utilizam essa abordagem para uma amostra de 189 anãs F e G da vizinhança Solar, Casagrande et al. (2011); Holmberg et al. (2007, 2009); Nordström et al. (2004) que empregam essa técnica para as estrelas do levantamento Geneva-Copenhagen (descrito no Capítulo 4) e também Silaj & Landstreet (2014), que aplicam o método para obter as idades de sete aglomerados estelares abertos. Entre os conjuntos de isócronas disponíveis na literatura podemos citar o conjunto Padova (Bertelli et al., 2008, 2009) e o conjunto BaSTI (Pietrinferni et al., 2004).

### 2.1.3.2 Astrossismologia

Assim como o método das isócronas no diagrama HR, a astrossismologia faz uso de modelos evolutivos para estimar a idade de determinada estrela. A principal diferença é que o indicativo da estrutura atual da estrela utilizado no método da astrossismologia são suas diferentes frequências de pulsação, e não sua posição no diagrama HR, como no caso das isócronas. Uma descrição detalhada do método foi apresentada por Cunha et al. (2007) e aqui será apresentada apenas uma visão geral, enfatizando as vantagens e desvantagens da aplicação do método.

A informação obtida através dos modos vibracionais da estrela revela ainda mais sobre sua estrutura interna que sua posição no diagrama HR. O método da astrossismologia consiste em confrontar os dados observacionais dos modos com os resultados esperados obtidos a partir de modelos que utilizam diferentes parâmetros incluindo massa, raio, gravidade estelar, temperatura efetiva e idade. Em muitos casos, principalmente para estrelas evoluídas de maior massa, apenas um pequeno conjunto de valores para os parâmetros pode resultar nos modos observados. Em alguns casos, a aplicação do método permitiu obter a idade com uma precisão de 5%.

Uma das principais desvantagens do método da astrossismologia frente ao das isócronas é o fato de que este exige que modelos sejam construídos para cada estrela em especial, o que impossibilita seu uso em grandes amostras. A outra desvantagem, que se

caracteriza como sua maior limitação, é a grande dificuldade apresentada pelas medidas dos modos de oscilação.

Como as estrelas não podem ser espacialmente resolvidas, apenas os modos de menor ordem podem ser observados (poucas dezenas). Mesmo estes modos de menor ordem requerem campanhas de observações de longo período (da ordem de uma semana) em grandes telescópios. Segundo Soderblom (2014), apenas meia dúzia de estrelas tinham idades determinadas através da aplicação deste método até o lançamento dos primeiros resultados das missões Kepler (Borucki et al.) e CoRoT (Baglin). Os resultados das missões espaciais têm permitido a identificação de modos vibracionais em diversas estrelas, abrindo caminho para maiores estudos visando obter idades através destes métodos. Tem-se, contudo, a restrição de não poder escolher os objetos de estudo, estando limitado a utilizar as estrelas observadas pelas missões Kepler e CoRoT.

Como o método não pode ser aplicado em grande escala, não é possível utilizá-lo para estudos que exigem o conhecimento de idades de um grande número de estrelas, como estudos da evolução química da Galáxia e do histórico de formação estelar na vizinhança Solar. Mesmo que ele possa ser aplicado para determinar idades de anãs M individuais, é, tal como os métodos aqui descritos anteriormente, inviável para a obtenção de idades para grandes amostras de estrelas anãs M.

Como exemplo da aplicação dessa abordagem, citamos Vauclair (2009), que aplica o método para duas estrelas:  $\mu$  Arae e  $\iota$  Horologii. Para  $\mu$  Arae o método indica uma idade entre 6 e 8 bilhões de anos. Esta idade apresenta ligeira diferença em relação ao valor obtido por Rocha-Pinto & Maciel (1998) de 5.4 bilhões de anos (com incerteza que pode chegar a 3 bilhões de anos) utilizando o método de atividade cromosférica (descrito na Seção 2.1.4.2) e está em concordância com o valor obtido por Donahue (1998) de 6.4 bilhões de anos (também utilizando a atividade cromosférica). Já para  $\iota$  Horologii a idade obtida foi de  $625 \pm 5$  milhões de anos, mostrando que o método é de fato capaz de resultar em idades extremamente precisas.

#### 2.1.4 Idades empíricas

Os métodos empíricos são assim chamados devido ao fato de a relação entre a propriedade física utilizada e a idade não ser bem compreendida a ponto de que se possa construir

modelos. Para que a aplicação dos métodos empíricos seja possível, é preciso inicialmente calibrá-los utilizando as idades obtidas através de algum dos métodos discutidos aqui anteriormente.

Os métodos estatísticos, que veremos na Seção 2.1.5, também fazem uso da calibração da relação entre alguma propriedade física da estrela e a idade. A principal diferença entre os métodos empíricos e estatísticos está no fato de que a relação com a idade é determinística no caso do método empírico, e probabilística no caso dos métodos estatísticos.

Skumanich (1972) foi um dos primeiros a propor as relações de idade–período de rotação, idade–emissão cromosférica e idade–abundância de lítio. Estes são os principais métodos empíricos utilizados na literatura. Cada um destes métodos será brevemente discutido nas próximas sessões.

#### **2.1.4.1 Girocronologia**

Observando o período de rotação das estrelas de aglomerados, cuja idade havia sido determinada a partir de outros métodos, Skumanich (1972) verificou que a rotação decresce proporcionalmente ao inverso da raiz da idade das estrelas. Esta relação ajustava bem a idade e o período de rotação não apenas das estrelas dos aglomerados Híades, Plêiades e Ursa Maior, mas também do Sol, o que despertou ainda mais interesse no desenvolvimento deste método. Novamente, como nosso objetivo é apenas contrastar os diferentes métodos e as situações nas quais são aplicáveis, será apresentada apenas uma pequena descrição da girocronologia. Uma revisão detalhada do método, contendo exemplos de aplicação pode ser encontrada em Barnes (2003, 2007).

A relação encontrada entre o período de rotação e a idade é determinística, o que sugere a ocorrência de um fenômeno físico intrínseco à estrutura e evolução de todas as estrelas para as quais esta relação é observada. Apesar dos esforços feitos nos últimos anos, os processos físicos que levam à relação observada ainda não são perfeitamente compreendidos.

De acordo com Soderblom (2010), o decaimento no período de rotação, a emissão cromosférica e a abundância de lítio estão relacionados ao mecanismo de dínamo. Este mecanismo é encontrado nas estrelas de massa próxima à do Sol devido à presença de

zonas convectivas próximas à superfície e, por causa disso, os métodos relacionados a tal mecanismo só são aplicáveis para estas estrelas. Além disso, é justamente nas estrelas de massa próxima à do Sol que o período de rotação pode ser observado com maior facilidade, devido à presença de manchas na superfície.

Além da dependência com a idade, verifica-se que o período de rotação também é relacionado à massa das estrelas. De acordo com Barnes (2007), a relação com a idade e a massa é separável. Além disso, para evitar erros devido a conversões e utilizar grandezas observáveis, supõe-se que a relação entre o período de rotação e a massa se traduz diretamente em uma relação entre período de rotação e índice de cor. Dessa forma, a expressão para o período de rotação da estrela ( $P$ ) toma a forma:

$$P(t, M) = g(t) \cdot f(B - V) \quad (2.3)$$

A calibração de  $f(B-V)$  é obtida através de aglomerados e a calibração de  $g(t)$  é feita a partir da idade e período de rotação observados no Sol. De acordo com Barnes (2007) as relações são:  $f(B-V) = (0.7725 \pm 0.011) \cdot (B-V-0.4)^{0.601 \pm 0.024}$  e  $g(t) = t^{0.5189 \pm 0.0070}$ . De forma que a expressão para a idade é fornecida através da relação:

$$\log(t_{\text{giro}}) = \frac{1}{n} [\log(P) - \log(a) - b \cdot \log(B-V-0.4)] , \quad (2.4)$$

onde  $n = 0.5189 \pm 0.007$ ,  $a = 0.7725 \pm 0.011$  e  $b = 0.601 \pm 0.024$ . A idade  $t_{\text{giro}}$  nesta expressão é dada em milhões de anos.

Assim como os demais métodos, este não está livre de dificuldades. Observa-se que, mesmo nos aglomerados utilizados para calibrar a função  $f(B-V)$ , existe uma grande dispersão de períodos de rotação. Isso ocorre devido às estrelas nascerem com uma distribuição de momentos angulares que não necessariamente obedece à relação encontrada para a idade. Entretanto, quando a rotação é elevada, o efeito dínamo (que se acredita ser o causador da diminuição da rotação) é também mais elevado e agrava a perda de momento angular. Com isso, as estrelas convergem para um período de rotação que obedece a relação com a idade. De acordo com Collier Cameron et al. (2009) esta convergência leva cerca de 600 milhões de anos para se completar. Isso torna o método inadequado para ser aplicado para estrelas de campo com rotação elevada, pois não é

possível saber se a rotação já convergiu para a relação calibrada e as idades obtidas seriam subestimadas.

Outra dificuldade é que em muitos casos não se observa diretamente o período de rotação, mas sim um indicativo deste período (através de  $v \sin i$ ). Como a inclinação das órbitas é, em muitos casos, desconhecida, o método torna-se impraticável para estrelas individuais. Neste caso, o método é mais adequado para determinar a idade de aglomerados, pois se espera que o termo senoidal desapareça na obtenção do período de rotação médio de estrelas de mesma massa.

O método é também inadequado para a determinação da idade de um grande número de estrelas velhas. Para aplicá-lo, é necessário observar o período de rotação da estrela, o que exige seu acompanhamento durante um período de tempo da ordem de seu período de rotação. Para uma estrela como o Sol, de cerca de 4.5 bilhões de anos, o período de rotação é de cerca de um mês. Sendo assim, este método não é adequado para a determinação de idades para uma grande amostra de estrela que contenha muitas estrelas velhas.

As estrelas de menor massa (anãs M) também não podem ter sua idade determinada através da girocronologia. A relação entre massa e período de rotação não é bem determinada para estrelas de baixa massa. A relação entre período e idade também não possui calibração para estas estrelas, existindo inclusive dúvidas acerca do tempo que os períodos de rotação levam para convergir para uma relação como a aplicada para as demais estrelas (McQuillan et al., 2013).

Entre as principais vantagens do método podemos citar que, após calibrado, dispensa o uso de modelos na determinação da idade. Além disso, a idade pode ser obtida diretamente a partir de dados observados através de uma relação simples, em contraste com a complexa análise de modelo que deve ser feita no caso da astrossismologia. Outra vantagem é que não é necessário conhecer a distância das estrelas. Segundo Barnes (2007), a acurácia do método é estimada em 15%.

Atualmente, os resultados obtidos com as missões Kepler e CoRoT vêm permitindo a determinação dos períodos de rotação para diversas estrelas. Utilizando os dados da missão Kepler, McQuillan et al. (2013) foram capazes de detectar períodos de rotação em 1570 de 2483 estrelas examinadas com massas entre 0.3 e 0.55  $M_{\odot}$ . Contudo, estas

estrelas não possuem idades determinadas de forma independente para permitir a calibração da relação entre a idade e o período de rotação, tendo sido uma das motivações para o desenvolvimento de nosso método cinemático. A relação idade-período de rotação para estas estrelas certamente irá revelar muito a respeito de sua estrutura e evolução, podendo elucidar a queda observada na relação período de rotação-massa, identificada por McQuillan et al. (2013), que contradiz o esperado pelos modelos.

#### 2.1.4.2 Declínio de atividade cromosférica

Para estrelas frias com camada externa convectiva (como o Sol), a atividade cromosférica encontra-se atrelada ao mecanismo de dínamo da estrela, tal qual o período de rotação. Como no caso da relação idade-período de rotação, a atividade cromosférica decresce com a idade de forma determinística, razão pela qual este método é classificado como empírico.

A atividade cromosférica é medida através da emissão cromosférica, sempre de origem não térmica. Devido a essa natureza, a emissão cromosférica é melhor observada nas regiões do espectro nas quais a emissão térmica da estrela é proporcionalmente menor, como nas regiões de raios-X, ultravioleta e rádio, ou nos núcleos de linhas de absorção fortes.

Um dos indicadores mais utilizados para inferir a atividade cromosférica emprega as emissões cromosféricas de Ca II H e K. Neste caso, a grandeza física utilizada para parametrizar a idade é  $R'_{HK}$ , que corresponde à razão entre o fluxo das linhas de emissão H e K e a luminosidade bolométrica da estrela.

Soderblom et al. (1991) ajustam uma lei de potências para a relação idade-atividade cromosférica utilizando como referência as idades do Sol, das Híades, do grupo de Ursa Maior e idades isocronais calculadas para outras 49 estrelas. A relação obtida por eles, considerando a amostra completa, foi:

$$\log t_{AC} = (-1.50 \pm 0.03) \log R'_{HK} + (2.25 \pm 0.12) \quad (2.5)$$

A metalicidade da estrela também influencia os valores observados para a atividade cromosférica. Diferentes metalicidades podem afetar o mecanismo de dínamo que leva

à emissão cromosférica. Além disso, menores valores de  $[\text{Fe}/\text{H}]$  levam a menores valores de  $[\text{Ca}/\text{H}]$ , alterando as condições nas quais se formam as linhas usadas na determinação do índice  $R'_{\text{HK}}$  (Soderblom, 2010).

Rocha-Pinto & Maciel (1998) observam que existe uma dependência na metalicidade entre a diferença da idade cromosférica (calculada pela Equação 2.5) e a idade isocronal. Por causa disso, foi proposta uma correção na idade obtida pela Equação 2.5 na forma  $\log t_{\text{AC}} (\text{corrigida}) = \log t_{\text{AC}} + \Delta(\log t)$ , onde:

$$\Delta(\log t) = -0.193 - 1.382 [\text{Fe}/\text{H}] - 0.213 [\text{Fe}/\text{H}]^2 + 0.270 [\text{Fe}/\text{H}]^3 \quad (2.6)$$

A principal vantagem do método é que ele pode ser aplicado com facilidade para um grande número de estrelas, sendo necessário apenas o uso de espectroscopia com resolução média para a determinação do índice  $R'_{\text{HK}}$ . Porém, existe uma série de complicações que podem tornar as idades obtidas não confiáveis. Lyra & Porto de Mello (2005), utilizando um outro estimador para a emissão cromosférica (linha de  $\text{H}\alpha$ ), observam que a atividade cromosférica já decai para os níveis da solar nas estrelas com idades por volta de 2 bilhões de anos, inviabilizando o uso do método para estrelas mais velhas.

Uma outra complicação surge devido à emissão cromosférica estar atrelada à atividade magnética da estrela, que apresenta ciclos periódicos (como o ciclo de 11 anos do Sol) e variações da ordem de horas (devido a *flares*) e de anos (como o mínimo de Maunder). Caso a idade do Sol fosse calculada utilizando o índice  $R'_{\text{HK}}$  obtido durante um período de atividade máxima, o valor obtido seria de cerca de 2.5 bilhões de anos. No caso de um índice  $R'_{\text{HK}}$  obtido em um período de mínima atividade, a idade prevista para o Sol pode chegar a 8 bilhões de anos (Rocha-Pinto, 2000). Por causa disso, faz-se necessário diversas observações de uma mesma estrela, em diferentes épocas, para que se possa obter um valor médio de  $R'_{\text{HK}}$  capaz de fornecer uma idade confiável.

Assim com os demais métodos que descrevemos, o declínio de atividade cromosférica não pode ser utilizado para estimar a idade de estrelas anãs M. Como a atividade cromosférica esta intimamente relacionada ao processo de convecção no interior da estrela, e o processo de convecção nas estrelas anãs M é diferente do que se

observa nas estrelas como o Sol, a relação entre a idade e a atividade cromosférica obtida para as estrelas como o Sol não pode ser utilizada para as anãs M. Para utilizar a atividade cromosférica para determinar a idade de anãs M, seria necessário calibrar a relação a partir de idades já conhecidas para um grande número de anãs M, o que não é possível devido ao fato de que os demais métodos também não são aplicáveis para estas estrelas.

### 2.1.4.3 Depleção de lítio

A quantidade de lítio observada na superfície do Sol é 200 vezes mais baixa que a observada em materiais do Sistema Solar, e também tende a ser menor em aglomerados abertos jovens do que em estrelas de campo da sequência principal (Soderblom, 2010). Este fato sugere que o lítio na superfície da estrela vai sendo gradativamente depletado com o passar do tempo.

Diversas causas foram propostas para explicar este efeito, entre elas: perda de massa, mistura direcionada por ondas gravitacionais, mistura induzida por rotação, mistura turbulenta devido à microdifusão e mistura por *overshooting* (Xiong & Deng, 2008), entretanto, o processo ainda não é bem compreendido.

A abundância de lítio na superfície é obtida através da linha de absorção em 6708 Å. Esta linha pode ser facilmente observada para estrelas jovens, sendo inclusive utilizada para a identificação de estrelas tipo T Tauri (Soderblom, 2010).

Utilizando os dados disponíveis na literatura para anãs F, G e K em aglomerados abertos, Sestito & Randich (2005) estudam a dependência da abundância de lítio na superfície com a idade. Estes autores verificam que a depleção de lítio não é contínua ao longo da evolução da estrela e corresponde a uma pequena depleção na fase pré-Sequência Principal, seguida por um período sem depleção durante os primeiros estágios na sequência principal. A depleção recomeça por volta de 150-200 milhões de anos e cessa novamente por volta de 1-2 bilhões de anos. Devido a este caráter, não é possível ajustar uma expressão simples, como uma lei de potência, para descrever a abundância de lítio em função da idade. Além disso, o método só pode ser aplicado nos intervalos de idade nos quais ocorre a depleção.

### 2.1.5 Idades estatísticas

Os métodos estatísticos são assim chamados pois a relação entre a propriedade em questão e a idade da estrela não é determinística, mas sim estatística. Devido a este caráter, estes métodos não são capazes de fornecer valores exatos para a idade de estrelas individuais. No geral, os métodos estatísticos fornecem limites inferiores e superiores para as idades, bem como idades mais prováveis, idades médias e funções de densidade de probabilidade para as idades das estrelas.

Os principais métodos estatísticos são a relação idade–metalicidade e a relação idade–cinemática. O método que desenvolvemos neste estudo (Capítulo 5) faz uso da relação entre a idade e os parâmetros cinemáticos das estrelas para obter uma função de densidade de probabilidade para a idade de estrelas individuais com base em suas velocidades espaciais heliocêntricas e nas excentricidades de suas órbitas galácticas. Como o método será discutido com detalhes no Capítulo 5, apresentaremos nesta seção apenas uma breve descrição dele.

Observa-se que a dispersão nas componentes da velocidade peculiar ( $U_*$ ,  $V_*$ ,  $W_*$ ; discutidas na Seção 3.2) aumenta com a idade das populações de estrelas. Uma das interpretações deste fenômeno é conhecida como aquecimento dinâmico do disco e será discutido com detalhes na Seção 3.6. Por causa disso, estrelas que apresentam maior velocidade peculiar tem maior probabilidade de serem mais velhas. Neste estudo, desenvolvemos um método para quantificar esta relação e obter uma função de densidade de probabilidade para a idade das estrelas com base apenas em seu movimento espacial. O desenvolvimento do método é apresentado no Capítulo 5, e os resultados obtidos são apresentados no Capítulo 6.

Já a relação idade–metalicidade se baseia no fato observacional de que estrelas mais velhas tendem a apresentar, em média, metalicidades mais baixas. Esta relação foi observada por diversos autores, como, por exemplo, Rocha-Pinto et al. (2000) e Nordström et al. (2004). Apesar do declínio na metalicidade média, as dispersões das metalicidades são altas para estrelas de qualquer idade, sendo comum encontrar estrelas velhas com metalicidades altas e estrelas jovens com metalicidades baixas. Alguns autores, como Feltzing et al. (2002), inclusive contestam a existência da relação idade–metalicidade. É possível que a relação observada seja não apenas um efeito da evolução química da Galáxia, mas também da mistura de diferentes populações estelares (ex.

disco fino e disco espesso) e da migração de estrelas de diferentes partes da Galáxia (parte interna mais enriquecida e externa mais pobre). Devido a estes fatores, a relação idade–metallicidade não se mostra útil na determinação das idades das estrelas a partir das metalicidades observadas.

Mesmo que a relação idade–metallicidade não possa ser usada para determinar a idade das estrelas, ela continua sendo importante pois carrega consigo informação a respeito da evolução química na Galáxia. No Capítulo 6, analisamos a relação idade–metallicidade obtida utilizando as idades isocronais calculadas por Casagrande et al. (2011) para as estrelas do levantamento Geneva-Copenhagem e comparamos com a relação obtida utilizando as idades cinemáticas que inferimos para estas mesmas estrelas. Em ambos os casos observamos um declínio na metalicidade média com o aumento da idade (mais acentuado no caso das idades isocronais).

## 2.2 O caso das anãs M

Vimos que a aplicação de cada método é mais adequada para determinados tipos de estrelas e, portanto, a abordagem escolhida para o cálculo das idades deve depender do objeto de estudo em questão e da disponibilidade de dados referentes a este objeto. Nota-se, entretanto, que nenhum dos métodos tradicionais aqui discutidos são aplicáveis para estrelas anãs de baixa massa (anãs M) do disco, pelo menos não no caso em que estas estrelas encontram-se isoladas.

A nucleocosmocronologia não é adequada, pois só é idealmente aplicada para estrelas de população II muito velhas (com idades próximas de 10 bilhões de anos). O método de expansão de aglomerados pode até fornecer idades para anãs M caso alguma delas se encontre entre as estrelas em questão. Porém, como vimos na Seção 2.1.2.2, este procedimento só é adequado para estrelas muito jovens, com idades inferiores a 100 milhões de anos, o que desperdiçaria todo o potencial das anãs M de revelar, através de suas idades, as propriedades do gás do disco em diferentes etapas evolutivas da Galáxia.

O método das isócronas também não pode ser utilizado para determinar as idades destas estrelas. Como vimos na Figura 2.2 as isócronas se aproximam na região das estrelas de baixa massa da Sequência Principal, de forma que na região das anãs M o espaçamento entre isócronas representativas de idades muito diferentes já é menor

que os erros observacionais de temperatura efetiva e magnitude absoluta, sem contar as incertezas na metalicidade. Já no caso da astrossismologia, mesmo que os avanços na área permitam a construção de modelos capazes de prever as idades das anãs M, o custo observacional empregado na obtenção dos dados necessários para a determinação da idade de cada estrela faz com que sua aplicação seja impossível em grandes amostras, limitando os estudos a estrelas individuais.

No caso dos métodos empíricos, mesmo que existam as relações entre idade–período de rotação, idade–atividade cromosférica e idade–depleção de lítio, estas relações precisam ser inicialmente calibradas a partir de idades independentes determinadas por outros métodos. Como nenhum dos outros métodos é capaz de fornecer estas idades, não é possível calibrar as relações.

Esforços devem ser feitos no sentido de desenvolver uma metodologia capaz de determinar a idade dessas estrelas, pois, devido ao longo tempo de vida (da ordem de centenas de bilhões de anos), elas podem atuar como registros do estado da Galáxia em todas as etapas evolutivas desde a constituição do disco aos dias atuais. Anãs M que se formaram no período em que o disco fino se constituiu na Galáxia podem ser observadas até hoje, não tendo passado ainda nem 10% do tempo total que essas estrelas permanecerão na Sequência Principal. Sua composição química registra a composição química do gás interestelar no momento de sua formação, a distribuição de idades dessas estrelas é um registro do histórico de formação estelar na Galáxia, e os parâmetros cinemáticos de estrelas de diferentes idades refletem a evolução dinâmica dela.

Apesar de não ser possível aplicar os métodos tradicionais para determinar diretamente a idade de anãs M, a determinação da idade dessas estrelas é possível em alguns casos específicos de forma indireta, como no caso de sistemas binários para os quais é possível datar a idade da companheira. Um exemplo desta abordagem pode ser encontrado em Rebassa-Mansergas et al. (2013). Estes autores selecionam pares binários de anãs M com anãs brancas e determinam a idade das anãs brancas através dos tempos de vida de suas estrelas progenitoras na Sequência Principal e de seus tempos de resfriamento. Entretanto, essa abordagem só é viável em casos bastante isolados, não sendo possível a construção de extensas amostras com idades de anãs M.

Como o método que desenvolvemos se baseia apenas em propriedades externas da estrela (sua velocidade peculiar e a excentricidade de sua órbita na Galáxia), ele não é

---

afetado pela lenta evolução das propriedades internas das anãs M e pode, em tese, ser aplicado para estas estrelas. Como neste estudo nosso objetivo é apenas desenvolver o método de idades cinemáticas e comprovar sua validade, não aplicamos ainda o método para o cálculo das idades de estrelas anãs M, porém pretendemos realizar estes estudos em trabalhos futuros.

## Capítulo 3

# Cinemática da Vizinhança Solar

No capítulo anterior, vimos a importância da determinação de idades de estrelas e a carência de métodos adequados para a obtenção de idade para anãs M. O método que propomos neste trabalho poderá preencher lacunas deixadas pelos métodos mais usuais e também atuar como um indicador independente capaz de corroborar as idades determinadas de outras formas. Antes de apresentarmos o desenvolvimento do método no Capítulo 5, é preciso conhecer alguns aspectos da teoria de cinemática estelar, como o aquecimento dinâmico do disco, o desvio do vértice e a deriva assimétrica.

Neste capítulo, apresentamos uma breve descrição das estruturas da Galáxia, seguida pela definição dos parâmetros cinemáticos que usaremos em nossa análise (deve-se prestar atenção a certas definições, que variam de autor para autor). Na Seção 3.3 mostramos quais dados observacionais são necessários para se obter os parâmetros cinemáticos em questão. Veremos que muitas das limitações da aplicação do método de idades cinemáticas (aqui desenvolvido) estão atreladas à precisão e facilidade de obtenção destes dados observacionais. Em seguida, apresentamos de forma sucinta alguns dos temas recorrentes à cinemática estelar e que são importantes para este trabalho: o movimento do Sol (Seção 3.4), o elipsoide de velocidades (Seção 3.5), o desvio do vértice (Seção 3.5.1), a deriva assimétrica (Seção 3.5.2) e o aquecimento dinâmico do disco (Seção 3.6).

## 3.1 Estrutura da Galáxia e o disco

Galáxias espirais como a Via Láctea são compostas por diversas estruturas, que possuem formação e evolução possivelmente distintas. As principais estruturas da Via Láctea são o disco fino, o disco espesso, o bojo e a barra, os braços espirais e o halo.

Nossa posição na Galáxia nos traz vantagens e desvantagens no estudo de sua estrutura. Estamos próximos o bastante para estudar individualmente estrelas de diferentes populações estelares, e estamos próximos demais para poder estudar com clareza as estruturas em larga escala. Uma analogia que pode ser feita neste caso é a de que mapear as estruturas da Galáxia a partir de nossa posição é tão difícil quanto mapear uma floresta inteira a partir de uma única clareira.

As muitas dificuldades impostas por nossa posição na Galáxia tornam o tema de estrutura da Galáxia bastante complexo. A compreensão das estruturas da Galáxia vem desafiando os astrônomos a mais de 60 anos e mesmo atualmente estamos longe de descrever com exatidão suas componentes (Carraro, 2014).

Uma descrição mais detalhada acerca da formação e evolução das estruturas da Via Láctea pode ser encontrada em Freeman (2012). Para os fins deste trabalho, basta conhecermos alguns detalhes sobre o disco fino.

### 3.1.1 Disco da Galáxia

Uma das estruturas mais conspícuas das galáxias espirais, como a Via Láctea, é o disco. No caso da Via Láctea, acredita-se existirem duas estruturas distintas em forma de disco: o disco fino e o disco espesso. Estas duas estruturas se diferem com respeito às populações estelares presentes em cada uma, à quantidade de matéria bariônica, à cinemática das estrelas e às suas escalas de tamanho.

No disco fino estão presentes diferentes populações estelares, desde estrelas muito jovens (alguns milhões de anos) a estrelas muito velhas (cerca de 10 bilhões de anos). Isto se deve ao fato de ainda ocorrer formação estelar nessa estrutura.

Entre as principais questões levantadas a respeito do disco fino estão o aquecimento dinâmico do disco, a relação idade–metalidade e as distribuições de idades estelares,

cujas importâncias para a astrofísica galáctica foram apresentadas na Seção 2.2. Estas questões são também objetos de estudo deste trabalho.

O disco espesso é composto apenas por estrelas velhas (cerca de 10 bilhões de anos) e pobres em metais. Isso indica que a formação do disco espesso deve ter-se dado logo no início da formação da Galáxia. Como as estrelas do disco espesso formam uma população estelar distinta das estrelas do disco fino, é preciso ter cuidado com a contaminação de estrelas do disco espesso nas amostras que visam estudar relações como o aquecimento cinemático do disco e a relação idade–metallicidade.

É importante ressaltar que a distinção entre essas duas estruturas não é consenso entre todos os autores. Bovy et al. (2012b) mostram que subpopulações definidas no espaço de  $[\alpha/\text{Fe}]$ – $[\text{Fe}/\text{H}]$  são bem descritas por um perfil de densidade exponencial único, tanto radialmente quanto verticalmente ao disco, e concluem que este pode ser descrito por uma única estrutura. Estes autores sugerem que os indícios do disco espesso observados quase universalmente nas demais galáxias espirais são, na verdade, um indicativo de que o disco é mais espesso do que se acredita, e não de que existam duas estruturas distintas.

## 3.2 Sistemas de coordenadas

Para que possamos estudar a cinemática, é preciso definir um sistema de coordenadas adequado para representar as componentes de velocidade espacial das estrelas. Os sistemas que se mostraram mais adequados para este fim são o Sistema Fundamental de Repouso (*Fundamental Standard of Rest*; FSR) e o Sistema Local de Repouso (*Local Standard of Rest*; LSR).

Na literatura, não existe consenso quanto à disposição dos eixos que definem estes sistemas. Por causa disso, torna-se importante apresentar aqui a definição que usaremos neste trabalho. A definição aqui apresentada é aquela que acredito ser a mais didática.

### 3.2.1 Sistema Fundamental de Repouso

O Sistema Fundamental de Repouso é definido como sendo um sistema de referência inercial no qual a origem é dada pelo centro de massa da Galáxia.

Neste sistema, as componentes de velocidade de uma estrela ( $\Pi$ ,  $\Theta$  e  $Z$ ) são definidas de acordo com a orientação do disco galáctico (como mostra a Figura 3.1). Por definição:

- $\Pi$  Encontra-se no plano do disco e aponta para o centro Galáctico. Na posição do Sol, este eixo encontra-se orientado na direção correspondente a  $\ell = 0^\circ$  e  $b = 0^\circ$  (onde  $\ell$  e  $b$  são, respectivamente, a longitude galáctica e a latitude galáctica).
- $\Theta$  Também encontra-se no plano Galáctico, sendo perpendicular a  $\Pi$ . Seu sentido é dado pelo sentido de rotação da Galáxia. Na posição do Sol, este eixo encontra-se orientado na direção correspondente a  $\ell = 90^\circ$  e  $b = 0^\circ$ .
- $Z$  Corresponde à componente de velocidade perpendicular ao disco, com sentido definido em direção ao pólo norte galáctico. Na posição do Sol, este eixo encontra-se orientado na direção correspondente a  $b = 90^\circ$ .

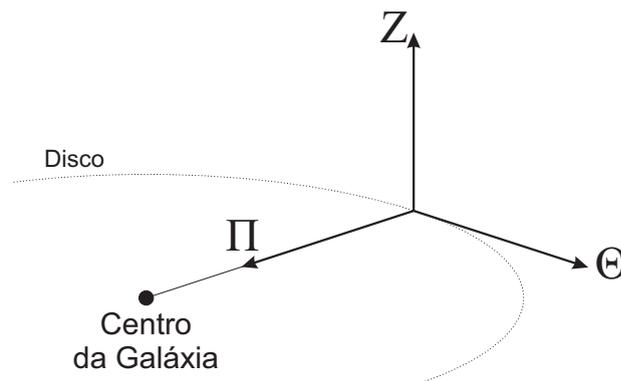


FIGURA 3.1: Definição das componentes de velocidade espacial no Sistema Fundamental de Repouso (FSR). O eixo  $\Pi$  aponta em direção ao centro da Galáxia; o eixo  $\Theta$  ao sentido de rotação da Galáxia e o eixo  $Z$  ao pólo norte da Galáxia.

A fonte de discórdia na literatura quanto à definição destes eixos é o sentido do eixo radial ( $\Pi$ ). Muitos autores (como Mihalas & Binney, 1981) definem o eixo  $\Pi$  radialmente para fora, ou seja, em direção ao antcentro da Galáxia. Como os demais eixos são mantidos como na definição acima, o sistema não é dextrógiro (não obedece à regra da mão direita), o que cria pequenas complicações na aplicação de transformações e rotações de outros sistemas para este. Para resolver este pequeno problema, a solução proposta por diversos autores foi inverter o sentido do eixo  $\Pi$ . É esta a definição que iremos utilizar neste trabalho.

### 3.2.2 Sistema Local de Repouso

Vamos supor que a distribuição de massa na Galáxia possua simetria axial e se encontre em um estado estacionário. Deve então existir, para cada distância  $R$  do centro, uma velocidade  $\Theta_0(R)$  tal que uma estrela com componentes de velocidades  $(0, \Theta_0(R), 0)$  apresenta uma órbita perfeitamente circular.

Um ponto imaginário, movendo-se com esta velocidade  $\Theta_0$  com relação ao Sistema Fundamental de Repouso constitui o Sistema Local de Repouso (*Local Standard of Rest*, LSR). Desta forma, a velocidade do LSR com relação ao FSR é dada por  $\vec{S}_{LSR} = (0, \Theta_0, 0)$

A velocidade de uma estrela com relação ao LSR,  $\vec{S}_\star^{(LSR)}$ , que é conhecida como velocidade peculiar da estrela, é então dada por:

$$\vec{S}_\star^{(LSR)} = \vec{S}_\star^{(FSR)} - \vec{S}_{LSR}, \quad (3.1)$$

onde  $\vec{S}_\star^{(FSR)}$  é a velocidade da estrela no FSR.

Denotando as componentes da velocidade peculiar da estrela como  $U_\star$ ,  $V_\star$  e  $W_\star$ , nas direções e sentidos de  $\Pi$ ,  $\Theta$  e  $Z$ , respectivamente, podemos reescrever a Equação 3.1 na forma:

$$U_\star = \Pi \quad (3.2a)$$

$$V_\star = \Theta - \Theta_0 \quad (3.2b)$$

$$W_\star = Z \quad (3.2c)$$

A Figura 3.2 mostra a relação entre a velocidade peculiar,  $\vec{S}_{LSR} = (U_\star, V_\star, W_\star)$ , e as componentes de velocidade  $\Pi$ ,  $\Theta$  e  $Z$  de uma estrela na Vizinhança Solar.

Na prática, o que observamos é a velocidade da estrela com relação à velocidade peculiar do Sistema Solar (velocidade heliocêntrica). Definindo  $U_\odot$ ,  $V_\odot$  e  $W_\odot$  como as componentes de velocidade do Sistema Solar com respeito ao LSR, temos que as

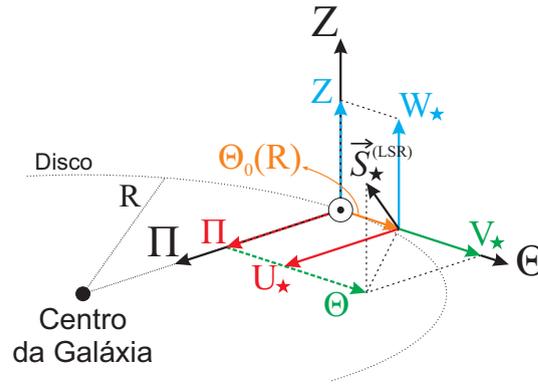


FIGURA 3.2: Definição do Sistema Local de Repouso (LSR) e sua relação com o FSR para uma estrela da Vizinhança Solar.  $U_*$ ,  $V_*$  e  $W_*$  correspondem às componentes da velocidade da estrela no LSR;  $\Pi$ ,  $\Theta$  e  $Z$  às componentes no FSR; e  $\Theta_0$  à velocidade do LSR no FSR na Vizinhança Solar.

componentes da velocidade heliocêntrica da estrela ( $U$ ,  $V$  e  $W$ ) são dadas por:

$$U = U_* - U_{\odot} \quad (3.3a)$$

$$V = V_* - V_{\odot} \quad (3.3b)$$

$$W = W_* - W_{\odot} \quad (3.3c)$$

### 3.3 U, V e W a partir de dados observacionais

Para calcular as velocidades  $U$ ,  $V$  e  $W$  de uma estrela é preciso conhecer seu movimento próprio, sua distância ao Sol e sua velocidade radial.

#### 3.3.1 Distância

Obter a distância de uma estrela não é uma tarefa trivial. Os métodos disponíveis nem sempre são aplicáveis para qualquer estrela e, no geral, apenas estrelas próximas podem ter suas distâncias determinadas com boa precisão. Entre os métodos disponíveis para a determinação de distâncias, os principais são: paralaxe trigonométrica, paralaxe fotométrica e distâncias dinâmicas.

### 3.3.1.1 Paralaxe trigonométrica

A órbita da Terra em torno do Sol faz com que em cada época do ano observemos as estrelas a partir de posições ligeiramente alteradas. Isso faz com que a separação angular, projetada no céu, na posição de estrelas situadas a diferentes distâncias varie ao longo do ano.

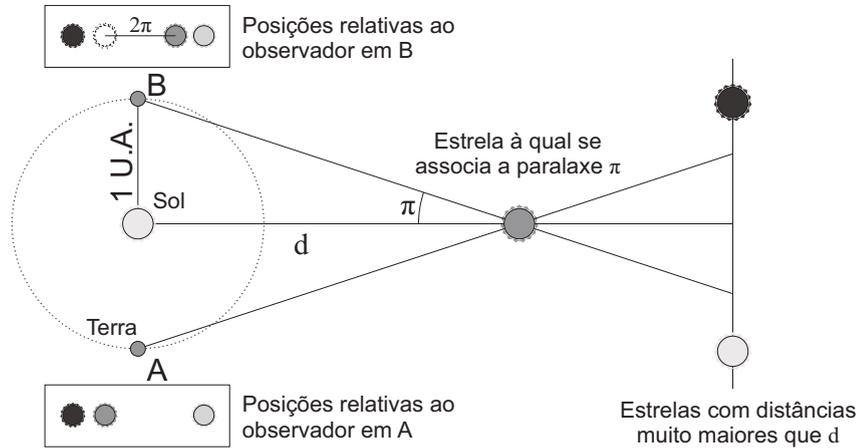


FIGURA 3.3: Esquema simplificado das grandezas envolvidas na paralaxe trigonométrica. Distâncias e tamanhos não representados em escala.

A Figura 3.3 apresenta um esquema bastante simplificado deste fenômeno. Usando as estrelas de fundo como referência, podemos medir o ângulo entre duas posições observadas para uma dada estrela com intervalo de meio ano entre as medidas. Conhecendo o ângulo e a linha de base, que neste caso é uma unidade astronômica, podemos medir a distância até a estrela através da relação:

$$\text{sen } \pi'' = \frac{1\text{UA}}{d} \quad (3.4)$$

Como as paralaxes são ângulos sempre muito pequenos, podemos fazer a aproximação de que  $\text{sen}(\pi) \approx \pi$ . Além disso, definimos a unidade de distância “parsec” que equivale à distância que uma estrela deve ter para que possua paralaxe igual a  $1''$ . Assim, a Equação 3.4 pode ser reescrita na forma:

$$d(\text{pc}) = \frac{1}{\pi(\text{arcsec})}, \quad (3.5)$$

onde  $d$  é dado em parsecs e  $\pi$  em segundos de arco (também representado como  $\pi''$ ).

Analisando a Figura 3.3, fica claro que quanto maior a distância  $d$  entre o Sistema Solar e a estrela, menor será a paralaxe desta. Paralaxes menores são mais difíceis de medir, desfavorecendo a determinação de distâncias para estrelas mais distantes.

Atualmente, as paralaxes mais precisas disponíveis são as obtidas pelo satélite HIPPARCOS entre 1989 e 1993, que contém medidas para cerca de 120 000 estrelas com precisão melhor que 1 milissegundo de arco (Perryman et al., 1997). Os dados do HIPPARCOS foram re-reduzidos em 2007 após estudos mais elaborados da dinâmica do satélite, aprimorando a acurácia dos dados anteriores (van Leeuwen, 2007).

Com o uso dos CCDs, tornou-se possível obter paralaxes tão precisas quanto as do HIPPARCOS sem a necessidade de telescópios espaciais (Harris et al., 1997). Espera-se que o satélite Gaia, que entrou em operação em 2013, colete dados até 2018 e obtenha paralaxes para cerca de 1 bilhão de estrelas, atingindo uma precisão de  $24 \mu\text{as}$  (Perryman et al., 2001).

### 3.3.1.2 Paralaxe fotométrica

A paralaxe fotométrica é um método que se baseia no fluxo observado da estrela e no fluxo que esta teria a uma dada distância conhecida, que é determinado em primeira ordem pelo seu tipo espectral.

O formalismo utilizado pelos astrônomos neste tipo de problema envolve o conceito de magnitude. A magnitude de uma estrela é definida como:

$$m \equiv -2.5 \log \mathcal{F} + C \quad (3.6)$$

onde  $\mathcal{F}$  é o fluxo observado da estrela e  $C$  é uma constante que define o zero da escala de magnitudes.

A equação 3.6 pode ser reescrita em termos da luminosidade da estrela ( $L$ ) e da distância entre a estrela e o Sistema Solar ( $d$ ):

$$m = -2.5 \log \left( \frac{L}{4\pi d^2} \right) + C \quad (3.7)$$

Definimos também a magnitude absoluta de uma estrela como a magnitude que a estrela teria caso estivesse a uma distância de 10 pc do Sistema Solar:

$$M \equiv -2.5 \log (\mathcal{F}(10 \text{ pc})) + C = -2.5 \log \left( \frac{L}{4\pi 10^2} \right) + C \quad (3.8)$$

A grandeza  $m - M$  corresponde ao chamado módulo de distância. De acordo com as Equações 3.7 e 3.8, o módulo de distância é dado por:

$$m - M = -2.5 \log \left( \frac{L}{4\pi d^2} \right) + C + 2.5 \log \left( \frac{L}{4\pi 10^2} \right) - C = 5 \log d - 5, \quad (3.9)$$

onde  $d$  deve ser dado em parsecs.

Como a magnitude absoluta depende, em primeira ordem, apenas do tipo espectral da estrela, a Equação 3.9 pode ser usada para determinar a distância  $d$ . O tipo espectral pode ser obtido a partir de calibrações de índices de cor (diferenças entre magnitudes em diferentes bandas) e, portanto, pode ser obtido através de fotometria. Como o método envolve o conhecimento apenas das magnitudes, ele é denominado paralaxe fotométrica.

Conhecendo as magnitudes observada ( $m$ ) e absoluta ( $M$ ), a distância ( $d$ ), em parsecs, pode ser calculada através da equação:

$$d(\text{pc}) = 10^{\frac{m-M+5}{5}} \quad (3.10)$$

As distâncias assim determinadas não são fundamentais pois se baseiam na hipótese de que as estrelas são “normais” com respeito ao seu tipo espectral, de forma que podemos associar a magnitude absoluta intrínseca do tipo espectral à estrela.

Este método também é limitado a estrelas próximas pois, como indica a Equação 3.7, a magnitude observada de uma estrela cresce com a distância dessa estrela. Outro fator que complica a determinação da distância através deste método é que a extinção interestelar deve ser levada em conta na determinação da magnitude para estrelas muito distantes, gerando mais uma fonte de incertezas.

Em muitos casos, as distâncias determinadas através de paralaxe fotométrica superam em precisão as determinadas através de paralaxe trigonométrica. Entretanto,

essa situação deve mudar após a publicação dos primeiros dados do satélite Gaia, que irá fornecer paralaxes trigonométricas muito mais precisas.

### 3.3.1.3 Distância dinâmica

O método de distância dinâmica se baseia na aplicação da terceira lei de Kepler em binárias. Quando as massas  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  são dadas em unidades de massa solar, o período  $P$ , em anos, e o semieixo maior da órbita  $a$  é dado em unidades astronômicas, a terceira lei de Kepler toma a forma:

$$a^3 = (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) P^2 \quad (3.11)$$

O semieixo maior da órbita subtende um ângulo  $\theta$  no céu, como mostra a Figura 3.4.

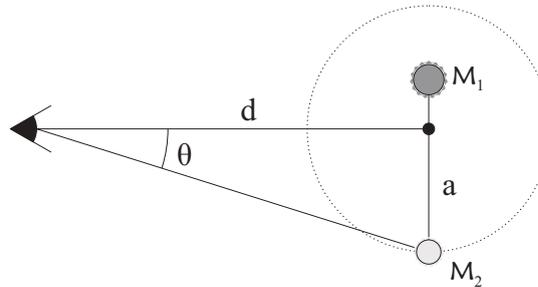


FIGURA 3.4: Esquema simplificado do método de distâncias dinâmicas. Distâncias não representadas em escala.

Como o ângulo  $\theta$  é sempre muito pequeno, podemos aproximar que  $\sin(\theta) \approx \theta$  (com  $\theta$  dado em radianos). Assim  $d = a/\theta$  e:

$$d(\text{UA}) = \frac{(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)^{\frac{1}{3}} P^{\frac{2}{3}}}{\theta} \quad (3.12)$$

O período  $P$  e o ângulo  $\theta$  são obtidos a partir das observações. Deve-se fazer um chute inicial para as massas  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$ , o que torna este método não fundamental. Como a Equação 3.12 depende apenas da raiz cúbica das massas, é possível obter boas distâncias mesmo sem boas estimativas para as massas.

Com a distância obtida, pode-se calcular as luminosidades através das Equações 3.9 e 3.8. As luminosidades permitem, através da relação massa–luminosidade, que se

obtenha uma melhor estimativa para as massas. As massas obtidas podem ser reutilizadas na Equação 3.12, e estes passos podem ser aplicados iterativamente até que a distância e as massas convirjam para os valores reais.

Apesar de possuir a limitação de só ser aplicável para o caso de estrelas binárias, o formalismo é bastante útil por permitir que os valores obtidos pelos demais métodos sejam conferidos através de uma estimativa independente. Outra limitação do método é que ele só é aplicável quando o período e o semieixo maior do sistema podem ser observados, limitando a aplicação a sistemas mais próximos.

### 3.3.2 Movimento próprio e velocidade tangencial

Movimento próprio ( $\vec{\mu}$ ) é o nome designado ao aparente deslocamento das estrelas na esfera celeste (após corrigidos os efeitos causados pelo movimento da Terra em torno do Sol). O movimento próprio é proporcional à componente da velocidade estelar que tangencia a esfera celeste, e é inversamente proporcional à distância da estrela. Sendo assim, conhecendo a distância e observando o movimento próprio da estrela, podemos determinar sua componente de velocidade tangencial à esfera celeste através da expressão:

$$\vec{v}_t = \vec{\mu} d = \frac{\vec{\mu}}{\pi''} , \quad (3.13)$$

onde  $\vec{v}_t$  é dado em UA ano<sup>-1</sup>,  $\pi''$  é dada em segundos de arco e  $\vec{\mu}$  é dado em segundos de arco por ano.

Usualmente o movimento próprio é decomposto nas componentes  $\mu_\alpha$ , paralela ao equador celeste, e  $\mu_\delta$ , perpendicular ao equador celeste. Da mesma forma, podemos decompor a velocidade tangencial da estrela, nas componentes:

$$v_{t\alpha} = \frac{k\mu_\alpha}{\pi''} \cos \delta \quad (3.14a)$$

$$v_{t\delta} = \frac{k\mu_\delta}{\pi''} , \quad (3.14b)$$

onde  $\mu_\alpha$  e  $\mu_\delta$  são dados em segundos de arco por ano,  $\pi''$  é dado em segundos de arco.  $k = 4.74057$  é o equivalente em km s<sup>-1</sup> de uma unidade astronômica por ano. As velocidades  $v_{t\alpha}$  e  $v_{t\delta}$  nas Equações 3.14 são, então, dadas em km s<sup>-1</sup>.

Como os movimentos próprios são em geral pequenos (alguns milissegundos de arco por ano) e o efeito de *seeing* causa um espalhamento da luz proveniente das estrelas em alguns décimos de segundo de arco, é preciso obter medidas separadas por um grande intervalo de tempo para que o movimento próprio possa ser observado com precisão. Os quatro anos de funcionamento do satélite HIPPARCOS não são suficientes para esta tarefa. Por causa disso, faz-se necessário o uso, juntamente com os dados do HIPPARCOS, de dados de catálogos anteriores menos precisos, como o *Astrographic Catalogue* (Turner, 1912), que contém a posição de milhões de estrelas observadas no final do século XIX.

Atualmente, o catálogo com movimentos próprios mais precisos disponível é o UCAC4 (*USNO CCD Astrograph Catalog*; Zacharias et al., 2013). As observações deste projeto foram feitas no *Naval Observatory's Flagstaff Station* entre Fevereiro de 1998 e Maio de 2004. Em sua quarta publicação, o catálogo apresenta movimentos próprios para mais de 105 milhões de estrelas, com precisão de 1 a 10 mas ano<sup>-1</sup>, mais erros sistemáticos entre 1 a 4 mas ano<sup>-1</sup>.

Outro catálogo importante é o Tycho2, no qual os movimentos próprios foram obtidos a partir da comparação entre as posições obtidas pelo satélite HIPPARCOS e as posições obtidas pelo catálogo *Astrographic Catalogue* e outros 143 catálogos com observações feitas de telescópios em solo (Høg et al., 2000).

### 3.3.3 Velocidade radial

A última grandeza que precisa ser obtida para que se possa calcular as componentes de velocidade espacial ( $U$ ,  $V$  e  $W$ ) de uma estrela é sua velocidade na direção da linha de visada, que é denominada velocidade radial da estrela ( $v_r$ ).

O método utilizado para determinar as velocidades radiais baseia-se no Efeito Doppler observado na frequência dos fótons emitidos pela estrela, causado por sua aproximação ou afastamento.

Sabemos que quando uma onda (neste caso os fótons) é emitida com frequência  $\nu_0$  por uma fonte que se afasta do observador com uma velocidade  $v_r$ , a frequência  $\nu$  que o

observador mede é dada pela expressão

$$\nu = (1 - \beta)\gamma\nu_0, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \beta \equiv \frac{v_r}{c} \\ \gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.15)$$

Como, nos casos em que estamos interessados,  $v_r$  é sempre muito menor que  $c$ , podemos aproximar como zero o termo  $\beta^2$ , de forma que  $\gamma \approx 1$ . Assim, a diferença entre a frequência observada e a frequência emitida ( $\Delta\nu$ ) é dada por:

$$\Delta\nu = -\beta\nu_0 . \quad (3.16)$$

Ou seja:

$$v_r = -\frac{\Delta\nu}{\nu_0}c . \quad (3.17)$$

Para observar os desvios nos comprimentos de onda causados pelo movimento radial da estrela, precisamos obter seu espectro. Observando o espectro, podemos identificar linhas de absorção características de certos elementos químicos. As frequências de absorção destes elementos químicos em repouso podem ser obtidas nos laboratórios terrestres. Assim, comparando essa frequência de absorção em repouso com a observada na estrela, podemos determinar sua velocidade radial.

Como a medida da velocidade radial exige o uso de espectroscopia, ela é, de todas as grandezas necessárias para se obter a velocidade espacial da estrela, a de maior custo observacional. Enquanto conhecemos as posições e movimentos próprios para milhões de estrelas, e distâncias precisas para centenas de milhares, as velocidades radiais são conhecidas apenas para uma quantidade da ordem de dezenas de milhares de estrelas (o que felizmente está mudando com as publicações do catálogo RAVE, Kordopatis et al., 2013). Com isso, são as medidas de velocidade radial que mais limitam estudos de velocidades espaciais atualmente.

Outra complicação ligada à determinação da componente de velocidade radial da estrela é o fato de ela não ser afetada apenas pelo movimento espacial da estrela. No caso de estrelas binárias não resolvidas, parte da velocidade radial observada deve-se às velocidades com que as estrelas orbitam o centro de massa do sistema. Assim, no caso

de sistemas múltiplos, várias medidas de velocidade radial devem ser realizadas para que se possa determinar a componente de velocidade espacial da estrela paralela à linha de visada.

Entre as principais fontes de velocidades radiais presentes na literatura estão o Geneva-Copenhagem Survey (GCS; Nordström et al. (2004)), o *Catalogue of Radial Velocities with Astrometric Data* (CRVAD; Kharchenko et al., 2007) e o *Radial Velocity Experiment* (RAVE; Kordopatis et al., 2013).

### 3.3.4 Cálculo das componentes de velocidade U, V e W

Conhecendo as componentes de velocidade  $v_{t\alpha}$ ,  $v_{t\delta}$  e  $v_r$ , conhecemos por completo a velocidade tridimensional da estrela. Porém, essas componentes expressam a velocidade espacial da estrela de acordo com o sistema de coordenadas equatorial, não muito útil para o estudo da cinemática galáctica.

Para obter as velocidades tal como as definimos na Seção 3.2.2, precisamos fazer a rotação de eixos que leva do sistema equatorial ao sistema de coordenadas galácticas. A descrição de como é feita esta transformação pode ser encontrada em Johnson & Soderblom (1987).

De acordo com Johnson & Soderblom (1987), a transformação entre as posições no sistema de coordenadas equatoriais e galácticas é feita através da expressão matricial:

$$\begin{pmatrix} \cos b \cos \ell \\ \cos b \sin \ell \\ \sin b \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

e a transformação entre as velocidades é feita através da expressão:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} v_r \\ v_{t\alpha} \\ v_{t\delta} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

A matriz  $\mathbf{T}$  é a chamada matriz de transformação, e pode ser representada em termos das coordenadas do polo norte galáctico (NGP) no sistema equatorial ( $\alpha_{NGP}$  ,

$\delta_{NGP}$ ) e  $\theta_0$ , que corresponde ao ângulo de posição do polo norte celeste com relação ao semicírculo principal que passa pelo NGP e o zero de longitude galáctica:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & -\cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \delta_{NGP} & 0 & \cos \delta_{NGP} \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \delta_{NGP} & 0 & \sin \delta_{NGP} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_{NGP} & \sin \alpha_{NGP} & 0 \\ \sin \alpha_{NGP} & -\cos \alpha_{NGP} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é denominada matriz de coordenadas, e pode ser escrita em termos da posição da estrela no sistema equatorial ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) na forma:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta & -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \delta \\ \sin \alpha \cos \delta & \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \delta \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Os valores de  $\theta_0$ ,  $\alpha_{NGP}$  e  $\delta_{NGP}$  devem estar de acordo com a época relativa à qual as posições  $\alpha$  e  $\delta$  são determinadas. De acordo com Liu et al. (2011), as coordenadas relativas à época J2000.0 são:

$$\alpha_{NGP}^{(J2000)} = 12^{\text{h}} 51^{\text{m}} 26^{\text{s}}.27549 \quad (3.22a)$$

$$\delta_{NGP}^{(J2000)} = +27^{\circ} 07' 41''.7043 \quad (3.22b)$$

$$\theta_0^{(J2000)} = 122^{\circ} 93191857 \quad (3.22c)$$

Utilizando estes valores na equação 3.20 obtemos a matriz de transformação referente à época J2000.0:

$$\mathbf{T}^{(J2000)} = \begin{pmatrix} -0.05487554 & -0.8734371 & -0.4838350 \\ 0.49410945 & -0.4448296 & 0.7469822 \\ -0.86766614 & -0.1980764 & 0.4559838 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Com esta matriz de transformação, a matriz de coordenadas  $\mathbf{A}$  calculada para a posição da estrela ( $\alpha, \delta$ ) pela Equação 3.21, a velocidade radial  $v_r$ , obtida através do desvio Doppler pela Equação 3.17, e as velocidades tangenciais  $v_{t\alpha}$  e  $v_{t\delta}$ , calculadas a

partir da distância  $d$  e das componentes do movimento próprio  $\mu_\alpha$  e  $\mu_\delta$  com o uso das Equações 3.14, podemos calcular as velocidades  $U$ ,  $V$  e  $W$  utilizando a Equação 3.19.

Escrevendo em termos das velocidades no sistema equatorial, temos:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.05487554 & -0.8734371 & -0.4838350 \\ 0.49410945 & -0.4448296 & 0.7469822 \\ -0.86766614 & -0.1980764 & 0.4559838 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta & -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \delta \\ \sin \alpha \cos \delta & \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \delta \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_r \\ v_{t_\alpha} \\ v_{t_\delta} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

As componentes de velocidade são dadas em  $\text{km s}^{-1}$  para o caso em que as velocidades  $v_r$ ,  $v_{t_\alpha}$  e  $v_{t_\delta}$  são dadas em  $\text{km s}^{-1}$ .

### 3.4 O movimento do Sol

As equações 3.3 nos mostram que para conhecer a velocidade espacial de uma estrela com respeito ao Sistema Local de Repouso é preciso conhecer, além das componentes  $U$ ,  $V$  e  $W$ , as componentes da velocidade do Sistema Solar com respeito ao LSR ( $U_\odot$ ,  $V_\odot$  e  $W_\odot$ ).

Supondo que a distribuição de massa na galáxia seja axissimétrica, e encontra-se em um estado estacionário, espera-se que, no geral, existam tanto estrelas se movendo radialmente para dentro quanto para fora, e também tanto estrelas se movendo perpendicularmente ao disco para cima quanto para baixo (Mihalas & Binney, 1981).

Assim, para uma amostra suficientemente grande, com um número  $N$  de estrelas, espera-se que:

$$\langle U_\star \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_{\star i} = 0 \quad (3.25a)$$

$$\langle W_\star \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_{\star i} = 0 \quad (3.25b)$$

Tomando o valor esperado das Equações 3.3a e 3.3c

$$\langle U \rangle = \langle U_{\star} \rangle - \langle U_{\odot} \rangle , \quad (3.26a)$$

$$\langle W \rangle = \langle W_{\star} \rangle - \langle W_{\odot} \rangle ; \quad (3.26b)$$

ou seja:

$$U_{\odot} = -\langle U \rangle = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i \quad (3.27a)$$

$$W_{\odot} = -\langle W \rangle = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i \quad (3.27b)$$

O cálculo de  $V_{\odot}$  não é tão simples pois a média da componente  $V_{\star}$  da velocidade peculiar das estrelas da amostra não é necessariamente igual a zero. Na prática, ocorre o fenômeno conhecido como deriva assimétrica (que veremos com mais detalhes na Seção 3.5.2): a média das velocidades  $V_{\star}$  tende a ser menor que a do Sistema Local de Repouso quanto maior for a dispersão das velocidades radiais das estrelas na amostra ( $\sigma_U^2$ ):

$$\langle V_{\star} \rangle = V_a = -C \sigma_U^2 . \quad (3.28)$$

Demonstrar este resultado foge aos objetivos deste trabalho, aos interessados, a demonstração pode ser encontrada em Mihalas & Binney (1981). Tomando o valor esperado da equação 3.3b, temos:

$$\langle V \rangle = \langle V_{\star} \rangle - \langle V_{\odot} \rangle . \quad (3.29)$$

Definindo:

$$V' \equiv -\langle V \rangle = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i , \quad (3.30)$$

obtemos:

$$V' = C \sigma_U^2 + V_{\odot} \quad (3.31)$$

Dessa forma, obtendo os valores de  $V'$  e  $\sigma_U^2$  para diferentes amostras, podemos estimar  $V_{\odot}$  através de um ajuste linear na forma  $V' = a \sigma_U^2 + b$ , onde  $V_{\odot} = b$ .

TABELA 3.1: Comparação entre as componentes de velocidade Solar obtidas por diferentes autores

Autores	$U_{\odot}$ (km s <sup>-1</sup> )	$V_{\odot}$ (km s <sup>-1</sup> )	$W_{\odot}$ (km s <sup>-1</sup> )
Francis & Anderson (2014)	14.1 ± 1.1	14.6 ± 0.4	6.9 ± 0.1
Bobylev & Bajkova (2014)	6.0 ± 0.5	10.6 ± 0.8	6.5 ± 0.3
Coşkunoğlu et al. (2011)	8.83 ± 0.24	14.19 ± 0.34	6.57 ± 0.21
Schönrich et al. (2010)	11.1 <sup>+0.69</sup> <sub>-0.75</sub>	12.24 <sup>+0.47</sup> <sub>-0.47</sub>	7.25 <sup>+0.37</sup> <sub>-0.36</sub>
Koval' et al. (2009)	5.1 ± 0.4	7.9 ± 0.5	7.7 ± 0.2
Francis & Anderson (2009)	7.5 ± 1.0	13.5 ± 0.3	6.8 ± 0.1
Bobylev & Bajkova (2007)	8.7 ± 0.5	6.2 ± 2.2	7.2 ± 0.8
Fehrenbach et al. (2001)	7.56	11.45	3.72
Dehnen & Binney (1998)	10.00 ± 0.36	5.25 ± 0.62	7.17 ± 0.38
Mayor (1974)	10.3 ± 1.0	6.3 ± 0.9	5.9 ± 0.4

A Tabela 3.1 apresenta uma comparação entre as componentes de velocidade obtidas para o Sol por diferentes autores, utilizando diferentes amostras. Vemos que ainda não existe consenso na literatura quanto aos valores exatos da velocidade peculiar do Sol. É comum que amostras de diferentes tipos espectrais forneçam diferentes valores para a velocidade do Sol. Entretanto, todos os autores concordam que o Sol está se movendo radialmente para dentro da Galáxia, com uma velocidade tangencial maior que a do sistema local de referência, e que sua componente de velocidade perpendicular ao disco possui sentido do polo norte galáctico.

Uma das principais complicações na aplicação do método aqui descrito se deve a que as Equações 3.25 e 3.28 são obtidas supondo que a distribuição de velocidades entre as estrelas da amostra é não correlacionada. Na realidade, observamos que muitas estrelas fazem parte de correntes (*streams*) ou grupos co-moventes (*moving groups*), que correspondem a concentrações estelares relativamente densas em determinadas regiões nos planos  $UV$ ,  $UW$  e  $VW$ .

A presença de estrelas destes grupos na amostra faz com que a média total amostral em  $U$ ,  $V$  e  $W$  se aproxime da respectiva média dos grupos e se afaste da média que seria apresentada apenas por estrelas independentes. Famaey et al. (2008) observam que em certas regiões do plano  $UV$  a quantidade de estrelas pertencentes a grupos co-moventes pode corresponder a mais de 50% do total de estrelas na região, o que inviabiliza o uso das Equações 3.25 e 3.28 sem que sejam feitos esforços para corrigir as discrepâncias causadas pela presença destas estrelas.

### 3.5 O elipsoide de velocidades

Em diversos casos no estudo da cinemática da Galáxia, estamos interessados mais na distribuição de velocidades encontrada em um grupo de estrelas do que nas velocidades individuais de cada uma. A descrição dessa distribuição é feita em termos do elipsoide de velocidades.

A Figura 3.5, obtida utilizando os dados da amostra Geneva-Copenhagen (Casagrande et al., 2011; descrita no Capítulo 4), mostra as distribuições de cada componente de velocidade para grupos de estrelas de diferentes idades. As estrelas que constituem as distribuições de cada linha da Figura 3.5 foram separadas em diferentes grupos de idade ( $t$ ):  $t < 1.5$  Ga,  $1.5$  Ga  $< t < 3$  Ga,  $3$  Ga  $< t < 5$  Ga,  $5$  Ga  $< t < 7$  Ga e  $7$  Ga  $< t < 9$  Ga.

A primeira característica que observamos é que, em todos os casos, estas distribuições são aproximadamente gaussianas, com dispersões diferentes em cada um dos eixos. Outras características importantes são o aumento da dispersão com as idades e a assimetria observada nas distribuições da componente  $V$ , ambas as quais serão discutidas nas seções 3.6 e 3.5.2, respectivamente.

O elipsoide de velocidades corresponde a uma distribuição que reúne as principais características descritas acima. Os eixos principais do elipsoide de velocidade são os eixos ortogonais da distribuição (as componentes principais) e não necessariamente coincidem com os eixos  $\Pi$ ,  $\Theta$  e  $Z$  definidos na seção 3.2.1.

Chamaremos as componentes de velocidade em cada eixo de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ , e, suas respectivas dispersões de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , onde o índice 1 corresponde ao eixo de maior dispersão e 3, ao eixo de menor dispersão.

A distribuição descrita em termos do elipsoide de velocidades corresponde a uma normal multivariacional nas variáveis  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ :

$$N(v_1, v_2, v_3) d\vec{v} = \frac{n}{(8\pi^3 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ - \left[ \frac{v_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{v_2^2}{2\sigma_2^2} + \frac{v_3^2}{2\sigma_3^2} \right] \right\} d\vec{v}, \quad (3.32)$$

onde  $N$  é o número de estrelas, de um dado grupo em estudo, contido num dado volume com velocidades entre  $v_1$  e  $v_1 + dv_1$ ,  $v_2$  e  $v_2 + dv_2$  e entre  $v_3$  e  $v_3 + dv_3$ . Já  $n$ , corresponde à densidade espacial de estrelas desse grupo (com qualquer velocidade).

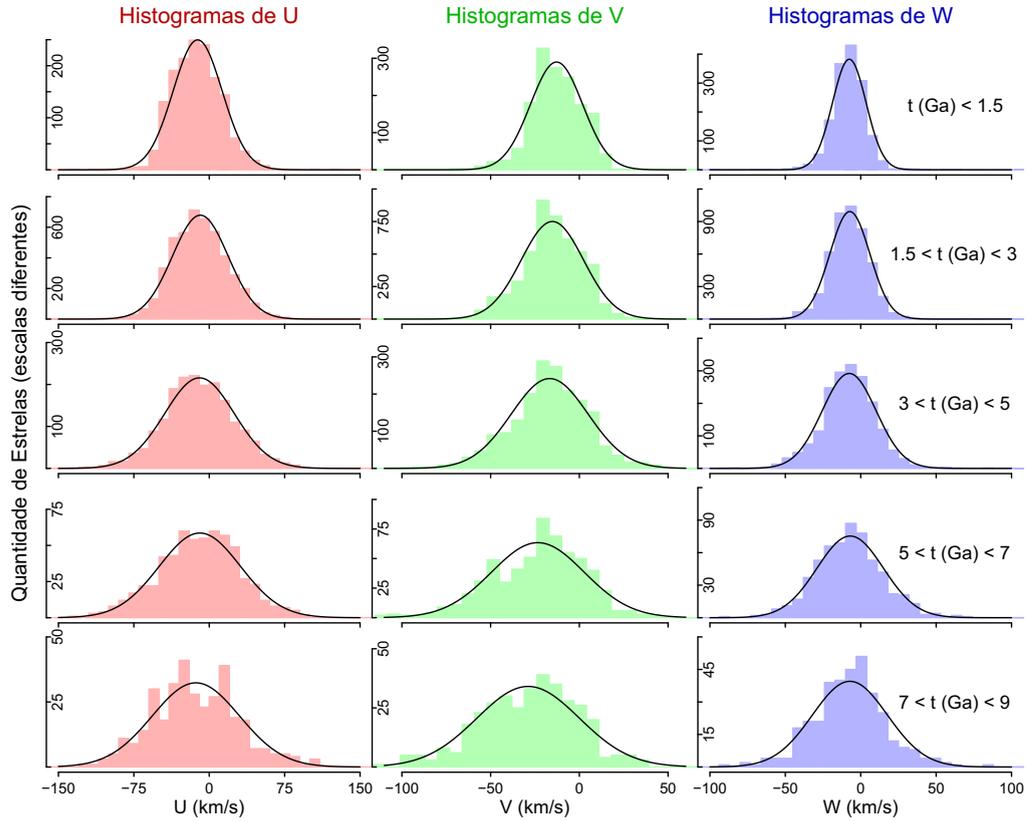


FIGURA 3.5: As distribuições das componentes  $U$ ,  $V$  e  $W$  para uma dada idade são aproximadamente gaussianas. Estas distribuições são descritas em termos do elipsoide de velocidades.

As componentes  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  e as componentes  $U_*$ ,  $V_*$  e  $W_*$  estão relacionadas através de uma transformação de translação (que garante que  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  possuam valor médio nulo) e outra de rotação (que garante que as componentes  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  sejam independentes):

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R} \cdot \left[ \begin{pmatrix} U_* \\ V_* \\ W_* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \langle U_* \rangle \\ \langle V_* \rangle \\ \langle W_* \rangle \end{pmatrix} \right] \quad (3.33)$$

Neste caso,  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação que leva das coordenadas  $U_*$ ,  $V_*$  e  $W_*$  às coordenadas  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  (ver na próxima subseção).

### 3.5.1 Desvio do vértice

Um fato observacional que simplifica bastante a análise do elipsoide de velocidades é que um dos eixos do elipsoide sempre possui direção perpendicular ao plano do disco. Assim,  $v_3$  e  $W_* - \langle W_* \rangle$  são equivalentes. Além disso, podemos admitir as hipóteses

representadas pelas Equações 3.25a e 3.25b. O problema então resume-se a encontrar o ângulo de rotação, no plano do disco, entre os eixos  $v_1$  e  $v_2$  e os eixos  $U_\star$  e  $V_\star$ .

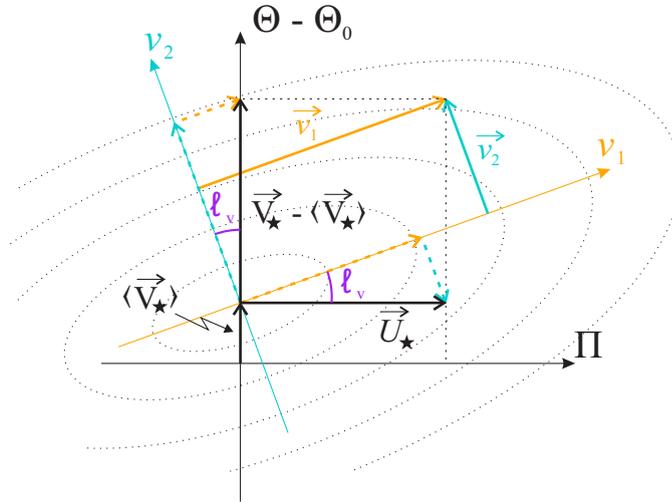


FIGURA 3.6: Definição do desvio do vértice  $l_v$  e relação entre os eixos  $U_\star$  e  $V_\star$  e os eixos  $v_1$  e  $v_2$

Este ângulo representa a longitude galáctica para a qual aponta o eixo principal do elipsoide de velocidades e é conhecido como o desvio do vértice ( $l_v$ ). A relação entre as componentes  $U_\star$  e  $V_\star$  e as componentes  $v_1$  e  $v_2$  é facilmente encontrada em termos do ângulo  $l_v$  (Figura 3.6). Neste caso, a matriz de rotação da Equação 3.33 será simplesmente:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos l_v & \sin l_v & 0 \\ -\sin l_v & \cos l_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad (3.34)$$

ou seja:

$$v_1 = U_\star \cos l_v + (V_\star - \langle V_\star \rangle) \sin l_v , \quad (3.35a)$$

$$v_2 = -U_\star \sin l_v + (V_\star - \langle V_\star \rangle) \cos l_v , \quad (3.35b)$$

$$v_3 = W_\star \quad (3.35c)$$

Podemos reescrever as Equações 3.35 em termos das velocidades heliocêntricas  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , das componentes da velocidade do Sol  $U_\odot$ ,  $V_\odot$  e  $W_\odot$  e em termos da variância em  $U$ , substituindo as Equações 3.3 e 3.28 em 3.35:

$$v_1 = (U + U_\odot) \cos \ell_v + (V + V_\odot - V_a) \operatorname{sen} \ell_v \quad (3.36a)$$

$$v_2 = -(U + U_\odot) \operatorname{sen} \ell_v + (V + V_\odot - V_a) \cos \ell_v \quad (3.36b)$$

$$v_3 = (W + W_\odot) \quad (3.36c)$$

Já a transformação inversa é dada por:

$$U = v_1 \cos \ell_v - v_2 \operatorname{sen} \ell_v - U_\odot \quad (3.37a)$$

$$V = v_1 \operatorname{sen} \ell_v + v_2 \cos \ell_v - V_\odot + V_a \quad (3.37b)$$

$$W = v_3 - W_\odot \quad (3.37c)$$

Também é possível escrever as variâncias  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$  e  $\sigma_3^2$  em termos das variâncias  $\sigma_U^2$ ,  $\sigma_V^2$  e  $\sigma_W^2$  e da covariância  $\sigma_{UV}$ . A demonstração encontra-se no Apêndice A.

$$\sigma_1^2 = \sigma_U^2 \cos^2 \ell_v + \sigma_V^2 \operatorname{sen}^2 \ell_v + \sigma_{UV} \operatorname{sen} (2 \ell_v) \quad (3.38a)$$

$$\sigma_2^2 = \sigma_U^2 \operatorname{sen}^2 \ell_v + \sigma_V^2 \cos^2 \ell_v - \sigma_{UV} \operatorname{sen} (2 \ell_v) \quad (3.38b)$$

$$\sigma_3^2 = \sigma_W^2 \quad (3.38c)$$

Novamente utilizando as variâncias  $\sigma_U^2$  e  $\sigma_V^2$  e a covariância  $\sigma_{UV}$ , podemos obter o desvio do vértice através da expressão (a demonstração também encontra-se no Apêndice A):

$$\ell_v = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 \sigma_{UV}}{\sigma_U^2 - \sigma_V^2} \right) \quad (3.39)$$

Amostras de estrelas de diferentes tipos espectrais ou idades apresentam diferentes dispersões de velocidades e diferentes correlações entre as componentes  $U$  e  $V$ . A Figura 3.7 apresenta as distribuições  $U$  e  $V$  e o desvio do vértice para estrelas de diferentes tipos espectrais. As variâncias, a covariância e o desvio do vértice são dados na Tabela 3.2. A componente principal do elipsoide de velocidades ( $v_1$ ) é representada pela linha tracejada

vermelha. Os dados foram calculados a partir da amostra CRVAD-2<sup>1</sup> (Kharchenko et al., 2007) utilizando as equações que descrevemos anteriormente.

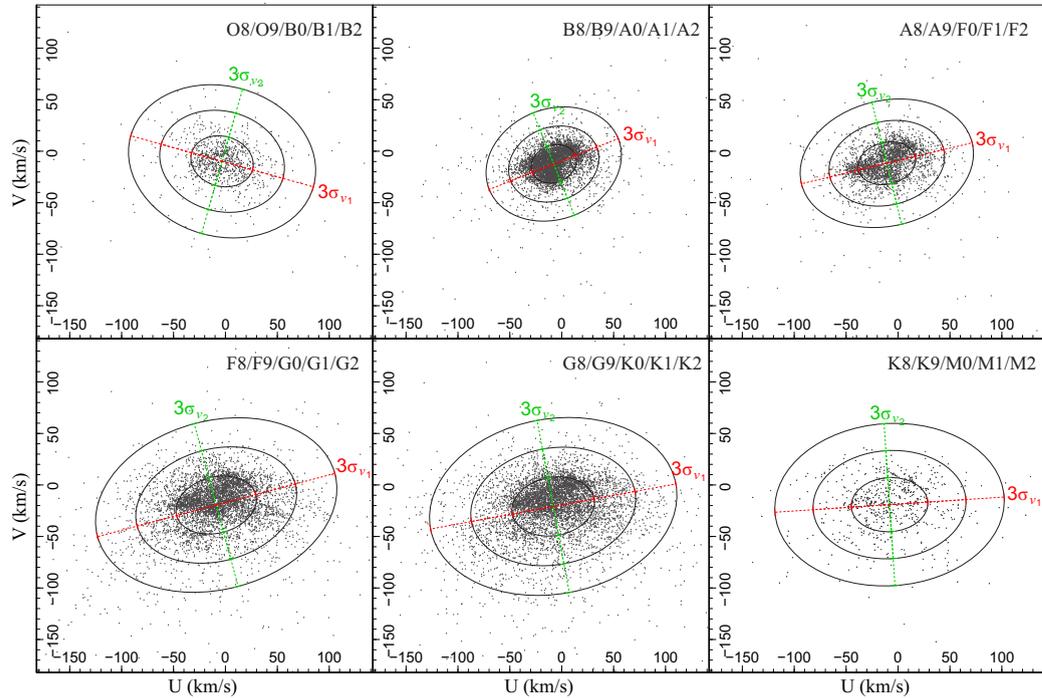


FIGURA 3.7: Desvio do vértice para estrelas de diferentes tipos espectrais. As velocidades  $U$  e  $V$  e o desvio do vértice foram computados a partir dos dados observacionais obtidos através do catálogo CRVAD-2 (Kharchenko et al., 2007).

Vemos que o desvio do vértice tende a ser menor para amostras de estrelas de baixa massa. Esta dependência sugere que o desvio do vértice esteja relacionado à idade das estrelas na amostra: quando analisamos uma amostra com estrelas de alta massa, estamos analisando apenas estrelas jovens; já no caso de uma amostra de estrela de baixa massa, temos uma mistura de estrelas jovens e velhas. Na Seção 5.3.2, utilizando as estrelas da amostra Geneva-Copenhague, obtemos uma relação entre o desvio do vértice e a idade, comprovando esta hipótese.

Outra característica que observamos é o aumento na dispersão quando consideramos estrelas de baixa massa. Este fenômeno é também relacionado à idade das estrelas na amostra e é conhecido como aquecimento dinâmico do disco, veremos mais sobre este fenômeno na Seção 3.6.

<sup>1</sup>O CRVAD-2 (Kharchenko et al., 2007) é uma compilação de diversos catálogos de velocidade radial: o *Geneva-Copenhagen Survey* (GCS; Nordström et al., 2004), o catálogo de Famaey et al. (2005), o *General Catalogue of Radial Velocities* (GCRV; Barbier-Brossat & Figon, 2000) e o *Pulkovo Compilation of Radial Velocities* (PCRV; Gontcharov, 2006). Além disso, o CRVAD-2 apresenta paralaxes do *Hipparcos* (Perryman et al., 1997) e movimentos próprios do catálogo Tycho-2 (Høg et al., 2000). Ainda, o catálogo apresenta tipos espectrais retirados do *All-Sky Compiled Catalogue* (ASCC-2.5; Kharchenko, 2001).

TABELA 3.2: Variância das componentes  $U$ ,  $V$  e  $W$ , covariância entre as componentes  $U$  e  $V$  e o desvio do vértice para estrelas de diferentes tipos espectrais. Valores calculados a partir dos dados da amostra CRVAD-2.

Tipo Espectral	$\sigma_U^2$	$\sigma_V^2$	$\sigma_{UV}$	$\sigma_W^2$	$\ell_v$
O8–B2 V	902.81	613.96	-88.49	409.73	-15.75
B3–B7 V	639.95	395.18	-133.64	279.79	-23.76
B8–A2 V	472.21	341.80	61.46	183.71	21.65
A3–A7 V	597.69	325.47	141.85	189.37	23.09
A8–F2 V	773.84	432.57	87.50	248.82	13.57
F3–F7 V	1001.14	441.97	123.12	277.52	11.88
F8–G2 V	1501.20	797.25	203.83	468.05	15.04
G3–G7 V	1663.34	874.00	124.79	574.20	8.77
G8–K2 V	1577.17	828.15	143.68	501.70	10.49
K3–K7 V	1902.50	966.22	204.47	642.00	11.80
K8–M2 V	1356.35	691.44	44.69	426.12	3.83
M3–M7 V	1687.67	941.53	212.17	539.84	14.81

### 3.5.1.1 Causa do desvio do vértice

Em uma galáxia na qual a distribuição de matéria possui simetria axial, é natural, apenas por argumentos de simetria, que uma das componentes do elipsoide de velocidades apresente direção radial. Espera-se então que o desvio do vértice seja nulo.

Contudo, observa-se que o desvio do vértice é considerável para estrelas de diversos tipos espectrais (Tabela 3.2), principalmente no caso de amostras contendo apenas estrelas jovens.

Uma das possíveis causas para o desvio do vértice é a presença de grupos de estrelas que compartilham componentes de velocidades parecidas, mesmo não se encontrando espacialmente próximas. São os chamados grupos co-moventes (“*moving groups*”). Sendo assim, as estrelas não fazem parte apenas de uma distribuição estritamente aleatória. Em certas regiões do espaço de velocidades mais de 50% das estrelas estão associadas a um determinado grupo co-movente (Dehnen, 1998; Famaey et al., 2008).

Na Figura 3.8 vemos claramente a presença destes grupos. No painel A, apresentamos a distribuição de velocidades para estrelas com idades entre 0.5 e 1.5 Ga da amostra Geneva-Copenhagen. Através de um estimador de densidade por kernel, obtemos a função de densidade de probabilidade correspondente à amostra (painel B). Em seguida, construímos um modelo do que seria esperado caso o desvio do vértice da

amostra fosse nulo: normal bivariacional de variáveis independentes com a média e o desvio padrão calculadas para a amostra (painel C).

No painel D da figura 3.8, apresentamos o resíduo entre a densidade observada e o modelo. As sobredensidades observadas estão intimamente relacionadas aos principais grupos co-moventes conhecidos (marcados como quadrados tracejados coloridos) e são elas as principais responsáveis pelo desvio do vértice calculado para esta distribuição ( $l_v = 16.5^\circ$ ).

Apesar de o modelo do elipsoide de velocidades ser bastante simplificado, a discrepância entre o modelo e o que é observado é reduzida quando levamos em conta o desvio do vértice, compensando a presença de grupos co-moventes.

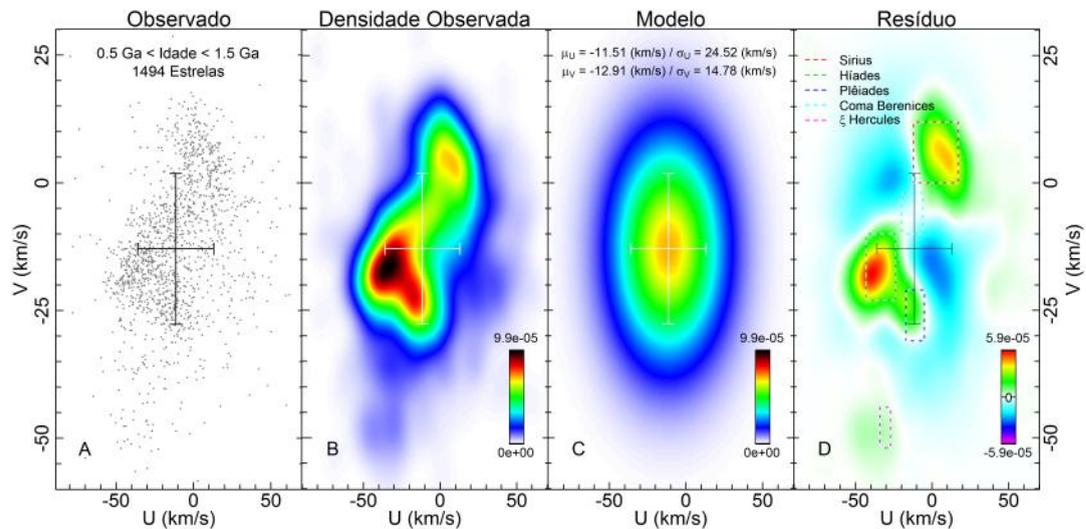


FIGURA 3.8: Análise da presença de grupos co-moventes em uma amostra de cerca de 1500 estrelas com idade entre 0.5 e 1.5 Ga. O modelo representa uma normal bivariacional de variáveis independentes com média e desvio padrão obtidos da amostra. As sobredensidades estão claramente relacionadas aos grupos co-moventes conhecidos.

A origem destes grupos é ainda bastante discutida na literatura, e diferentes mecanismos parecem estar envolvidos para diferentes grupos.

Inicialmente, propôs-se que a origem destes grupos estivesse relacionada à dissolução de aglomerados, cujas estrelas mantiveram traços da velocidade do grupo (Binney & Merrifield, 1998). Esta parece ser a hipótese mais provável para a formação de grupos como HR 1614, que é formado por estrelas coetâneas e homogêneas em metalicidade (De Silva et al., 2007).

Dehnen (1998) propõe que os grupos se formam a partir de ressonâncias com componentes não axissimétricas da Galáxia, como a barra. Famaey et al. (2008) verifica que as estrelas que constituem os grupos de Híades, Plêiades e Sírius constituem uma população não coetânea, o que favorece a hipótese dessa origem dinâmica.

Helmi et al. (2006) estudam sobredensidades presentes na amostra GCS (Nordström et al., 2004) e comparam os resultados com simulações numéricas de acreções de galáxias satélites. Os autores concluem que a origem de alguns grupos, principalmente os que mais se diferenciam do restante da amostra em metalicidade, pode ser explicada a partir de fusões de galáxias satélites.

Uma revisão mais detalhada a respeito de grupos co-moventes pode ser encontrada em Antoja et al. (2008).

### 3.5.2 Deriva assimétrica

Outra importante característica observada na distribuição de velocidades é a cauda alongada que se observa na distribuição da componente  $V$  na direção dos valores negativos. Este efeito é causado devido a um fenômeno conhecido como deriva assimétrica.

A deriva assimétrica ( $V_a$ ), de uma dada população estelar, é definida como a diferença entre a velocidade tangencial média dessas estrelas (com respeito ao FSR), e a velocidade circular no raio Galáctico onde se encontram estas estrelas:

$$V_a \equiv \langle \Theta \rangle - \Theta_0(R) \quad (3.40)$$

Uma deriva assimétrica negativa significa que as estrelas movem-se mais lentamente que o Sistema Local de Repouso (que possui velocidade tangencial  $\Theta_0(R)$ ). Quando a deriva assimétrica é positiva, as estrelas estão ultrapassando o sistema local de referência.

Quando uma estrela, proveniente das regiões mais internas da Galáxia, se encontra em uma dada distância galactocêntrica  $R$ , esta estrela irá apresentar uma velocidade tangencial menor do que a velocidade circular em  $R$ , pois está mais próxima de seu apogaláctico. Já as estrelas provenientes das regiões mais externas da Galáxia se encontram

mais próximas de seu perigaláctico quando apresentam distância galactocêntrica  $R$  e, portanto, apresentam velocidades tangenciais maiores que a velocidade circular em  $R$ .

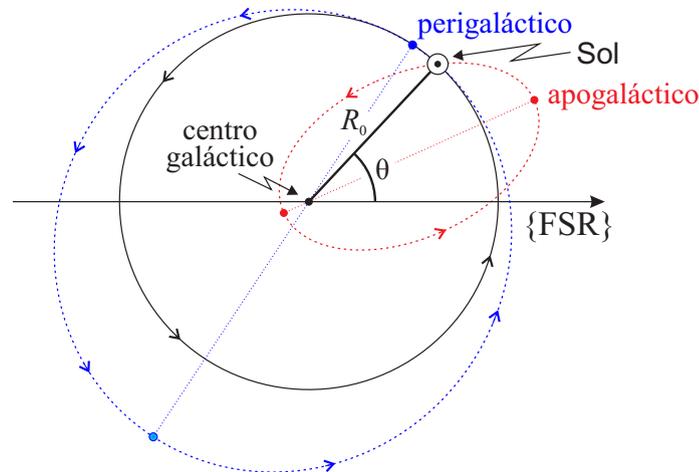


FIGURA 3.9: Representação de três órbitas distintas que passam pelo mesmo ponto  $(R_0, \theta)$ . As linhas tracejadas azul e vermelha representam a órbita de estrelas que se encontram, em  $R_0$ , mais próximas de seus perigaláctico e apogaláctico respectivamente. Já a linha preta representa uma órbita circular com raio  $R_0$ .

A Figura 3.9 apresenta três órbitas distintas que passam pelo mesmo ponto  $(R_0, \theta)$ . Quando a estrela que possui órbita representada pela linha tracejada vermelha está passando por este ponto, ela se encontra mais próxima de seu apogaláctico e, assim, sua velocidade tangencial será menor que a velocidade do Sistema Local de Repouso ( $V_\star < \Theta_0(R_0)$ ).

A estrela que possui órbita representada pela linha tracejada azul se encontra mais próxima de seu perigaláctico quando está passando pelo ponto  $(R_0, \theta)$  de forma que sua velocidade tangencial neste ponto é maior que a velocidade do Sistema Local de Repouso ( $V_\star > \Theta_0(R_0)$ ).

No caso da estrela que apresenta órbita circular de raio  $R_0$ , sua velocidade tangencial será sempre igual à velocidade do Sistema Local de Repouso ( $V_\star = \Theta_0(R_0)$ ). As estrelas da Vizinhança Solar são uma mistura destes três casos possíveis.

Observa-se que a deriva assimétrica na Vizinhança Solar apresenta sempre um valor negativo (as estrelas ficam para trás do LSR), de forma que a Vizinhança Solar é dominada por estrelas provenientes das partes mais internas da Galáxia. Isso ocorre por dois motivos: as estrelas provenientes das regiões mais internas possuem velocidade tangencial menor que as das regiões mais externas quando observadas na Vizinhança Solar, isso faz com que a probabilidade de observar as estrelas das regiões mais internas

na vizinhança Solar seja maior que a de observar as estrelas das regiões mais externas. Além disso, existe um gradiente de densidade estelar no disco que faz com que as regiões mais internas sejam mais povoadas que as regiões mais externas.

Binney & Tremaine (2008) mostram que, para um disco em equilíbrio que apresenta simetria em relação ao seu equador, a deriva assimétrica pode ser escrita como:

$$V_a = \frac{\sigma_U^2}{2\Theta_0} \left[ \frac{\sigma_V^2}{\sigma_U^2} - 1 - \frac{\partial \log(\nu\sigma_U^2)}{\partial \log R} - \frac{R}{\sigma_U^2} \frac{\partial \sigma_{UW}}{\partial z} \right], \quad (3.41)$$

onde  $\Theta_0$  corresponde à velocidade circular,  $\nu$  à densidade espacial de estrelas e  $\sigma_{UW}$  à correlação entre as componentes de velocidade  $U_*$  e  $W_*$ .

Para populações que apresentam distribuição de densidade  $\nu(R, z)$  similares e elipsoides de velocidade de mesma forma e orientação, o termo entre as chaves na Equação 3.41 reduz-se a uma constante (Binney & Tremaine, 2008). Dessa forma, a Equação 3.41 se torna:

$$V_a = -C \sigma_U^2. \quad (3.42)$$

Neste caso,  $C$  é uma constante que pode ser ajustada com auxílio da Equação 3.31. Dehnen & Binney (1998) encontram um valor empírico para  $C$  de  $(80 \pm 5 \text{ km s}^{-1})^{-1}$  utilizando dados do catálogo *Hipparcos*. Binney & Tremaine (2008) encontram um valor teórico para  $C$  igual a  $(82 \pm 6 \text{ km s}^{-1})^{-1}$  estimando os valores referentes a cada termo entre as chaves na Equação 3.41.

A distribuição de velocidades  $V$  para uma amostra que reúne estrelas de diferentes tipos espectrais e idades apresenta sempre uma cauda alongada em direção aos valores negativos de  $V$ . A causa para isso está relacionada à deriva assimétrica.

A Figura 3.10 apresenta a distribuição de velocidades  $V$  que calculamos para as estrelas da amostra CRVAD-2 (Kharchenko et al., 2007). É possível ver claramente a assimetria na distribuição, correspondente à presença de uma cauda mais alongada na direção dos valores negativos.

A existência dessa cauda pode ser explicada pelo fato de que essa amostra reúne estrelas de diferentes idades. Veremos na seção 5.3.2 que a dispersão das velocidades  $U$  ( $\sigma_U^2$ ) segue uma lei de potências em relação à idade das estrelas de forma que entre estrelas mais velhas a dispersão é maior.

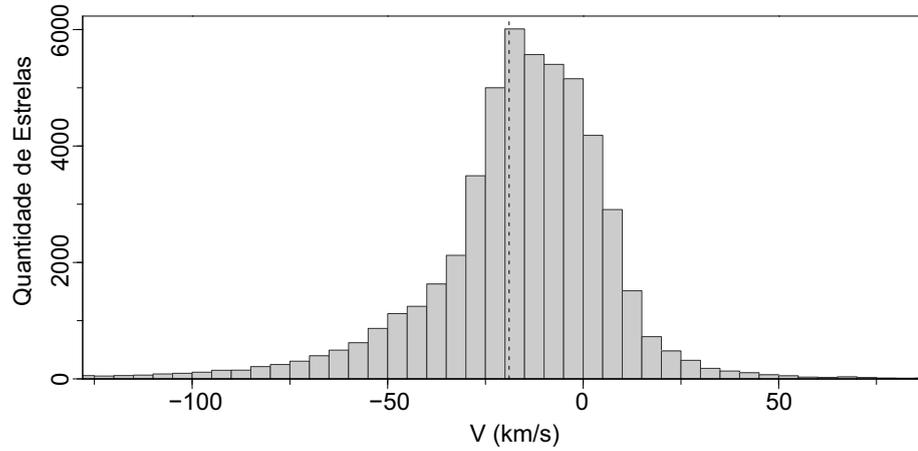


FIGURA 3.10: Distribuição da componente de velocidade  $V$  das estrelas do catálogo CRVAD-2.

A distribuição de velocidades apresentada na Figura 3.10 pode ser pensada como uma composição de distribuições de estrelas de diferentes idades, cada uma com sua média  $\mu_V(t)$ . As estrelas mais velhas apresentam dispersões maiores e, portanto, de acordo com a Equação 3.42, apresentam uma menor deriva assimétrica. Sendo assim, a média da distribuição de estrelas de uma dada idade é mais negativa quanto maior for a idade das estrelas da distribuição. A distribuição da Figura 3.10 é, então, uma mistura de diferentes gaussianas (cada qual com uma diferente média).

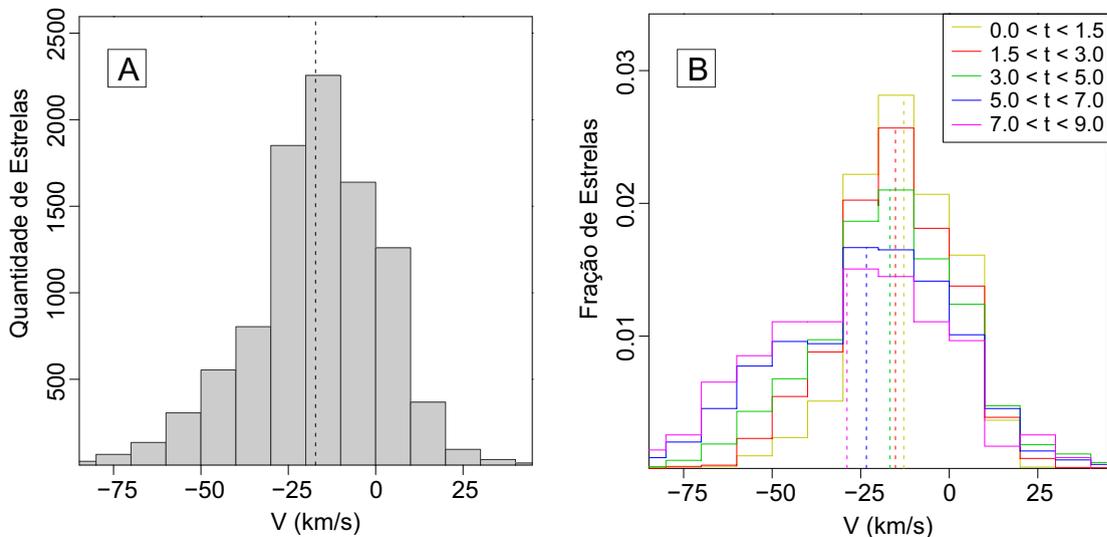


FIGURA 3.11: Painel A: Distribuição da componente de velocidade  $V$  para estrelas do catálogo Geneva-Copenhagen (Casagrande et al., 2011). Painel B: Distribuições (normalizadas) da componente  $V$  para grupos de diferentes idades. O histograma amarelo corresponde a estrelas com idade entre 0 e 1.5 Ga, vermelho entre 1.5 e 3 Ga, verde entre 3 e 5 Ga, azul entre 5 e 7 Ga e roxo entre 7 e 9 Ga. As linhas tracejadas representam as médias das distribuições.

Podemos observar este efeito mais claramente na Figura 3.11 que apresenta a distribuição da componente de velocidade  $V$  para estrelas do catálogo Geneva-Copenhagen. O painel A apresenta a distribuição em  $V$  da amostra completa. Podemos ver a presença da cauda alongada, característica dessa distribuição. O painel B apresenta a distribuição para cada grupo de idade indicado na legenda. Vemos claramente que a média da distribuição é mais negativa para grupos de maiores idades, como prevê a Equação 3.42.

Esta explicação parte do princípio de que as dispersões na componente  $U$  são maiores para estrelas mais velhas. Este fenômeno é conhecido como aquecimento dinâmico do disco e será discutido na próxima sessão.

### 3.6 Aquecimento dinâmico do disco

Entre as primeiras tentativas de classificar as estrelas com respeito às suas propriedades cinemáticas destaca-se a classificação de Oort (Oort, 1926). Oort classificou as estrelas como de “baixa” ou “alta” velocidade, sendo a divisão entre os dois grupos a velocidade de  $63 \text{ km s}^{-1}$ .

Estudos subsequentes mostraram que essa classificação era simples demais para descrever as propriedades cinemáticas da Galáxia. A ideia de uma classificação de velocidades contínua foi apresentada inicialmente por Vyssotsky & Williams (1948) e posteriormente por Schwarzschild (1952).

Sabemos hoje que, não só a classificação das velocidades de um grupo de estrelas é contínua, como também que a dispersão depende da idade das estrelas na distribuição (Casagrande et al., 2011; Gomez et al., 1997; Gontcharov, 2012; Koval’ et al., 2009; Nordström et al., 2004; Quillen & Garnett, 2001).

Quillen & Garnett (2001) utilizam os dados da amostra de Edvardsson et al. (1993) e concluem que ocorre saturação na dependência entre idade e dispersão de velocidades para estrelas com idade superior a 2 Ga. Gomez et al. (1997) também concluem que existe saturação na relação entre idade e dispersão de velocidades para estrelas com idade superior a 5 Ga. Ressaltamos, porém, que estes autores eliminaram previamente de sua amostra as estrelas com velocidade superior a  $65 \text{ km s}^{-1}$  para evitar a contaminação de

estrelas do disco espesso, o que sem dúvida criou um viés na amostra por retirar também estrelas velhas do disco fino que possuem altas velocidades.

Os demais autores, utilizando amostras mais extensas e completas, encontram que a dispersão das velocidades em cada componente,  $\sigma_i$  (onde  $i$  corresponde a  $U$ ,  $V$  e  $W$ ), aumenta com a idade ao longo de todo o intervalo de idades de estrelas presentes no disco. A relação ajustada por esses autores segue a forma  $\sigma_i \propto t^\alpha$  e, no geral, apresenta índice de correlação com os dados observacionais superior a 97% (Gontcharov, 2012). Atualmente este é considerado o cenário que melhor descreve a relação entre a idade e a dispersão de velocidades no disco.

Na Seção 5.3.2, utilizamos os dados do levantamento Geneva-Copenhagen (Casagrande et al., 2011) para ajustar as relações que descrevem o aumento, com a idade, da dispersão das componentes de velocidade peculiar das estrelas e das componentes de velocidade nas direções das componentes principais do elipsoide de velocidades.

Para exemplificar a relação entre a distribuição das velocidades e a idade das estrelas, dividimos as estrelas do levantamento GCS em 5 grupos: estrelas com idade menor que 1.5 Ga, com idade entre 1.5 e 3 Ga, entre 3 e 5 Ga, entre 5 e 7 Ga e com idade superior a 7 Ga. As distribuições das componentes de velocidades nos plano  $UV$ ,  $UW$  e  $VW$  para cada um dos grupos de idade estão representadas na Figura 3.12.

É possível ver claramente que as dispersões das componentes de velocidade são maiores para os grupos de estrelas mais velhas. Outra característica notável é que a média da distribuição de velocidades  $V$  é menor para os grupos de estrelas mais velhas. Este resultado é esperado pelo que foi discutido na Seção 3.5.2, já que  $\langle V \rangle = V_a - V_\odot$  e vimos que  $V_a \propto -\sigma_V^2$  (que é maior para estrelas mais velhas).

A dependência da distribuição de velocidades com a idade pode ser explicada de duas formas: i) as estrelas mantêm suas propriedades cinemáticas aproximadamente inalteradas ao longo de suas vidas, e as diferentes propriedades observadas para diferentes idades refletem diferenças nas propriedades cinemáticas do gás do qual as estrelas se originaram em diferentes épocas; ii) as propriedades cinemáticas do gás que origina as estrelas são as mesmas em diferentes épocas e, ao longo da vida da estrela, esta sofre perturbações que gradativamente alteram suas propriedades cinemáticas.

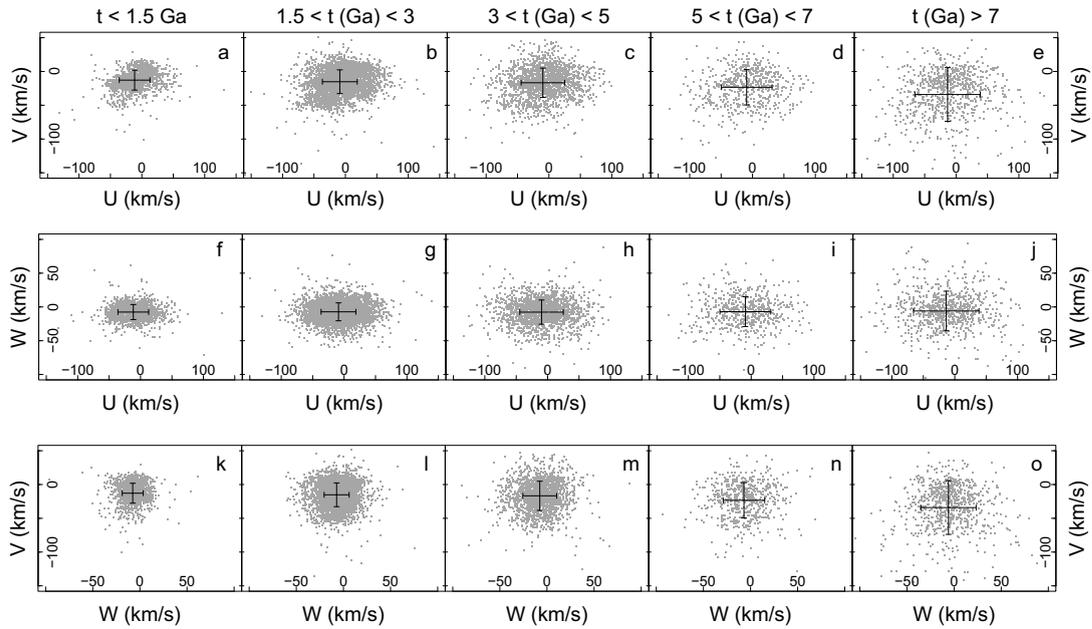


FIGURA 3.12: Representação das distribuições das componentes de velocidades nos planos  $UV$ ,  $UW$  e  $VW$  para estrelas do catálogo GCS. Em cada coluna estão representadas estrelas cuja idade encontra-se nos intervalos:  $t < 1.5$  Ga,  $1.5 \text{ Ga} < t < 3$  Ga,  $3 \text{ Ga} < t < 5$  Ga,  $5 \text{ Ga} < t < 7$  Ga e  $t > 7$  Ga. Em cada painel, a cruz representa a média e o desvio padrão.

Inicialmente, a primeira interpretação foi defendida por diversos autores, que argumentavam que o tempo necessário para que as estrelas trocassem momento e energia em colisões entre si de forma significativa é muito maior que a idade da Galáxia (Eggen et al., 1962). Estes autores não consideravam a influência das colisões entre as estrelas e o gás interestelar por pensarem que o gás se encontrava uniformemente distribuído no disco (e, portanto, não contribuiria para flutuações no potencial galáctico).

Hoje sabemos que a matéria interestelar não se encontra distribuída uniformemente no disco, mas sim em nuvens interestelares com massas da ordem de  $10^2 - 10^5 M_{\odot}$  (Spitzer & Schwarzschild, 1951). O tempo necessário para que ocorra uma colisão dessas nuvens com uma estrela é menor que o tempo de vida da Galáxia, de forma que as colisões causam perturbações gradativas significativas nas órbitas estelares, favorecendo a segunda interpretação para a dependência entre as propriedades cinemáticas e a idade.

No Apêndice B, calculamos (de forma aproximada) a ordem de grandeza do tempo de livre caminho médio de uma estrela com relação a colisões com outras estrelas ( $t_m \approx 3 \cdot 10^{13}$  anos) e com nuvens moleculares ( $t_m \approx 2 \cdot 10^8$  anos), em acordo com o que foi discutido nos parágrafos anteriores.

Apesar de ser reconhecido como um importante mecanismo causador do aquecimento dinâmico no disco, as colisões com nuvens interestelares não são a única causa deste efeito. Hänninen & Flynn (2002) mostram, através de simulações, que o aquecimento causado apenas por nuvens interestelares é insuficiente para explicar o aquecimento observado. Os autores propõem que uma combinação de colisões com nuvens moleculares e buracos negros do halo sejam a causa do aquecimento dinâmico.

A estrutura espiral da Galáxia também pode atuar no aquecimento dinâmico do disco, desde que as colisões das estrelas com os braços espirais sejam transientes e estocásticas (Carlberg & Sellwood, 1985) ou que múltiplas ondas de densidade coexistam (Minchev & Quillen).

Ainda, House et al. (2011) realizam uma série de simulações cosmológicas visando estudar a influência de fusões com galáxias satélites no aquecimento dinâmico do disco e observam que existe uma clara relação entre as fusões e o aquecimento dinâmico.

Outro mecanismo que pode influenciar no aquecimento dinâmico do disco é a migração radial de estrelas causadas por perturbações das componentes não axissimétricas da Galáxia (Minchev & Famaey, 2010; Minchev & Quillen; Sellwood & Binney, 2002).

Apesar dos esforços, não há consenso na literatura a respeito da influência de cada um desses mecanismos no aquecimento dinâmico do disco. Neste estudo, não estamos preocupados com a causa do aquecimento dinâmico do disco mas sim com o ajuste de um modelo capaz de descrever o aquecimento dinâmico observado. Uma discussão mais detalhada a respeito das causas do aquecimento dinâmico do disco pode ser encontrado em Martig et al. (2014).

### 3.7 Excentricidade

A excentricidade, a distância máxima ao plano do disco ( $z_{\max}$ ) e as distâncias máxima ( $R_a$ ) e mínima ( $R_p$ ) entre a estrela e o eixo de simetria da Galáxia são parâmetros importantes na descrição da órbita da estrela.

Uma das órbitas possíveis em um sistema estacionário e axissimétrico é a circular. Muita informação sobre a órbita de uma estrela pode ser conhecida sabendo o quão próxima de uma órbita circular ela se encontra. Por causa disso, a caracterização de um

parâmetro adimensional capaz de determinar o quanto a órbita se desvia de uma órbita circular possui bastante importância no estudo da dinâmica estelar (Ninkovic, 2009).

Para um potencial axissimétrico, as órbitas são tridimensionais, e a excentricidade, a princípio, não pode ser definida de forma geométrica como no caso do movimento kepleriano no qual as órbitas são secções cônicas.

Na literatura, podemos encontrar diferentes definições para a excentricidade de uma estrela. Em todos os casos, a excentricidade é definida como uma grandeza adimensional, com valores entre 0 e 1, sendo 0 a excentricidade de uma órbita circular. Algumas dessas definições são apresentadas abaixo.

No caso de um potencial estacionário, com simetria esférica, as distâncias máxima ( $r_a$ ; estrela no apogaláctico) e mínima ( $r_p$ ; estrela no perigaláctico) entre a estrela e o centro de massa da Galáxia são bem definidas para órbitas ligadas (Ninkovic & Jovanovic, 2008). A excentricidade ( $e_g$ ) da órbita é então definida em termos destas distâncias máxima e mínima na forma:

$$e_g \equiv \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} . \quad (3.43)$$

Definida dessa forma, a excentricidade coincide com a excentricidade geométrica de uma elipse no movimento kepleriano.

Kuzmin & Malasidze (1970) apresentam uma definição de excentricidade ( $e_c$ ) em função do raio ( $A$ ) de uma órbita circular que possui mesma energia da órbita em questão e do raio ( $p$ ) de uma órbita circular que possui o mesmo momento angular:

$$e_c \equiv \left(1 - \frac{p}{A}\right)^{\frac{1}{2}} . \quad (3.44)$$

No caso do movimento kepleriano a excentricidade  $e_c$  coincide com a excentricidade  $e_g$  (Ninkovic, 2009).

Uma outra forma, introduzida por Lynden-Bell (1963) define a excentricidade ( $e_f$ ) em termos da ação específica em  $r$  ( $W_r = \oint \dot{r} dr$ ) e do módulo do momento angular específico por unidade de massa ( $J$ ):

$$1 - e_f \equiv \left(1 + \left| \frac{W}{2\pi J} \right| \right)^{-\frac{1}{2}} . \quad (3.45)$$

Esta definição também está em acordo com a excentricidade obtida para o movimento kepleriano (Lynden-Bell, 1963).

Estas definições são adequadas para órbitas próximas ao plano da Galáxia, para as quais o movimento vertical pode ser considerado independente. Ninkovic (2009) apresenta uma definição mais generalizada para a excentricidade ( $e_s$ ) de órbitas tridimensionais em termos das componentes de velocidade  $\Pi$ ,  $\Theta$  e  $Z$  (definidos na Seção 3.2.1) e do módulo da velocidade ( $S = \sqrt{\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2}$ ):

$$e_s^2 \equiv e_r^2 + e_z^2 \quad , \quad (3.46)$$

onde  $e_r$  e  $e_z$  são definidos como:

$$e_r \equiv \frac{\langle \Pi^2 \rangle}{\langle S^2 \rangle} \quad (3.47a)$$

$$e_z \equiv \frac{\langle Z^2 \rangle}{\langle S^2 \rangle} \quad (3.47b)$$

Neste estudo, iremos utilizar a mesma definição utilizada por Nordström et al. (2004) que corresponde à Equação 3.43. Como neste caso estamos tratando de um sistema axial, as distâncias  $r_a$  e  $r_p$  são substituídas pelas distâncias máxima ( $R_a$ ) e mínima ( $R_p$ ) ao eixo de simetria do sistema:

$$e \equiv \frac{R_a - R_p}{R_a + R_p} \quad . \quad (3.48)$$

# Capítulo 4

## Amostra

### 4.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a amostra que utilizamos em nosso estudo. Como vimos na Seção 3.3.4, para calcular as componentes da velocidade peculiar de uma estrela é preciso conhecer sua distância, seu movimento próprio e sua velocidade radial. Além disso, precisamos de uma amostra de estrelas com idades conhecidas para calibrar a relação idade–dispersão de velocidades.

Na Seção 3.3.1 vimos alguns exemplos de como as distâncias podem ser obtidas e que esta medida pode ser encontrada para um grande número de estrelas. O catálogo Hipparcos (Perryman et al., 1997; van Leeuwen, 2007), por exemplo, apresenta paralaxes trigonométricas com precisão melhor que 1 milissegundo de arco para cerca de 120 000 estrelas.

Vimos que os movimentos próprios também podem ser encontrados para um grande número de estrelas (Seção 3.3.2). A maior fonte de dados de movimentos próprios é o catálogo UCAC4 (Zacharias et al., 2013), que apresenta movimentos próprios para mais de 105 milhões de estrelas.

Mostramos na Seção 3.3 que a distância e o movimento próprio são suficientes para obtermos a velocidade tangencial da estrela, mas que, para obtermos seu movimento tridimensional completo, precisamos conhecer também sua velocidade radial. Estas são muito mais difíceis de obter, pois exigem o uso de espectroscopia. Por conta disso, a

velocidade radial constitui a maior limitação nos estudos cinemáticos. Até a publicação do catálogo Geneva-Copenhagen em 2004 (Nordström et al., 2004) não havia nenhum catálogo que apresentasse um grande volume de dados homogêneos, não enviesados, que cobrissem de maneira uniforme toda a esfera celeste. Atualmente o levantamento RAVE (Steinmetz et al., 2006) é o que apresenta velocidades radiais para a maior quantidade de estrelas (425 561).

O catálogo Geneva-Copenhagen apresenta todos os dados necessários para o cálculo do movimento espacial da estrela e ainda apresenta idades isocronais que podem ser utilizadas para calibrar a relação idade–dispersão de velocidades. Por conta disso, escolhemos utilizar este catálogo em nosso estudo.

## 4.2 Levantamento Geneva-Copenhagen

O levantamento Geneva-Copenhagen (GCS) foi o primeiro a apresentar uma grande quantidade de dados (16 682) cinemáticos homogêneos e não enviesados para estrelas anãs F e G distribuídas sobre toda a esfera celeste.

As velocidades radiais observadas, juntamente com paralaxes, movimentos próprios e calibrações fotométricas para determinação de temperaturas efetivas e metalicidades permitiram a construção de uma extensa amostra contendo tanto a informação cinemática tridimensional completa das estrelas quanto idades isocronais bem determinadas.

O catálogo GCS inicialmente publicado por Nordström et al. (2004) e passou por três revisões desde então: Holmberg et al. (2007) aprimoram as calibrações fotométricas; Holmberg et al. (2009) tiram proveito das distâncias mais acuradas obtidas da re-redução do catálogo Hipparcos por van Leeuwen (2007); e, por fim, Casagrande et al. (2011) obtêm temperaturas efetivas mais acuradas com a aplicação do método de fluxo no infravermelho e aprimoram as calibrações de metalicidade.

Nesta seção, apresentamos alguns detalhes sobre a composição deste catálogo: as origens dos principais dados observacionais e os modelos de calibração utilizados na obtenção dos parâmetros físicos de nosso interesse neste estudo.

### 4.2.1 Distribuição espacial de estrelas do catálogo

Com o objetivo de obter uma amostra sem vieses cinemáticos para anãs F e G, Nordström et al. (2004) aplicaram, como critério inicial de seleção, um limite de magnitude para o qual a amostra de anãs F e G pudesse ser considerada completa até  $\sim 40$  pc. Estrelas que atendiam aos limites de magnitudes e classificação espectral impostos foram selecionadas do catálogo HD (Cannon & Pickering, 1924). cerca de 30 000 destas estrelas haviam sido observadas em levantamentos fotométricos  $uvby\beta$  e formaram uma amostra inicial.

Após a aplicação de novos critérios de seleção fotométricos para assegurar que a amostra contivesse apenas anãs de tipo espectral F e G e posterior remoção de supergigantes conhecidas, Nordström et al. (2004) obtêm uma amostra com 16 682 estrelas.

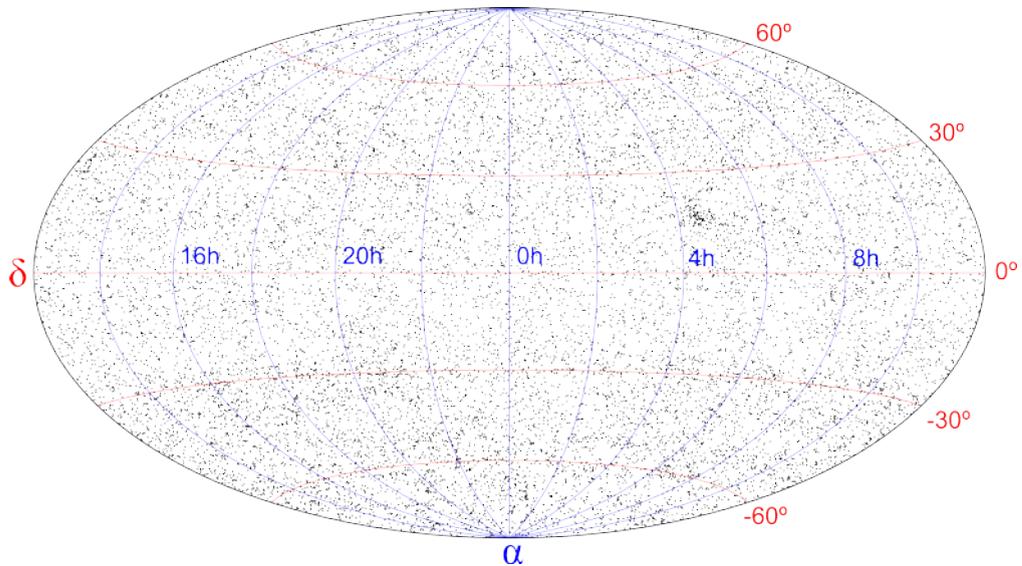


FIGURA 4.1: Distribuição espacial das estrelas do GCS. A distribuição das estrelas cobre todo o céu e é bastante uniforme, exceto por algumas poucas sobredensidades, como as Plêiades e as Híades.

A distribuição espacial dessas 16 682 estrelas está apresentada na Figura 4.1. A distribuição das estrelas é bastante uniforme, exceto por algumas poucas sobredensidades, como as Plêiades.

### 4.2.2 Velocidades radiais

Nordström et al. (2004) realizaram 62 993 medições de velocidades radiais, sendo 60 476 observações realizadas com os espectrômetros CORAVEL (Baranne et al., 1979) e 2 517

com espectrômetros digitais do *Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics* (CfA; Latham, 1985).

As observações no CfA foram necessárias devido ao fato de os espectrômetros CORAVEL não serem capazes de observar com boa acurácia os espectros de estrelas com alta rotação (40-50 km s<sup>-1</sup>). Como vimos na Seção 2.1.4.1, as estrelas com alta rotação são, em geral, estrelas mais jovens; sendo assim, a exclusão destas estrelas da amostra criaria um viés em idades.

As observações foram combinadas com outras observações obtidas na literatura, sendo então possível obter velocidades radiais para 14 139 estrelas da amostra. Grande parte destas estrelas foi observada mais de uma vez, permitindo discernir as estrelas binárias. As incertezas são próximas de  $\sim 0.25$  km s<sup>-1</sup> e raramente excedem 1 km s<sup>-1</sup>.

### 4.2.3 Distâncias e movimentos próprios

Para obter o movimento espacial tridimensional completo, é necessário ainda obter as distâncias e os movimentos próprios das estrelas.

Nordström et al. (2004) usaram os movimentos próprios do catálogo Tycho-2 (Høg et al., 2000) com erros de cerca de 0.7 km s<sup>-1</sup>, quando propagados para a velocidade espacial.

As distâncias foram obtidas através das paralaxes (Seção 3.3.1.1) do catálogo Hipparcos (Perryman et al., 1997). Para estrelas cuja paralaxe não se encontra disponível no catálogo Hipparcos ou excede uma incerteza de 13%, foi utilizado o método de paralaxe fotométrica (Seção 3.3.1.2) utilizando as calibrações para anãs F de Crawford (1975) e para anãs G de Olsen (1984).

Posteriormente, Holmberg et al. (2009) aprimoraram as distâncias do catálogo GCS utilizando as paralaxes mais acuradas obtidas por van Leeuwen (2007) através da rerredução dos dados do HIPPARCOS.

## 4.2.4 Parâmetros astrofísicos

### 4.2.4.1 Avermelhamento e magnitude absoluta

A extinção do fluxo estelar devido ao meio interestelar causa um avermelhamento na luz proveniente das estrelas, pois a absorção e o espalhamento dos comprimentos de onda mais azuis é maior.

Por causa disso, antes de obter qualquer parâmetro astrofísico através de calibrações fotométricas, é preciso corrigir os fluxos observados dos efeitos da extinção. Como a absorção e o avermelhamento aumentam com a distância, e as estrelas do GCS estão todas relativamente próximas, o avermelhamento é irrelevante para cerca de 75% das estrelas da amostra.

Casagrande et al. (2011) aplicam as mesmas correções de avermelhamento aplicadas por Nordström et al. (2004), utilizando as calibrações fotométricas de Olsen (1988) para estrelas com distâncias maiores que 40 pc e adotando avermelhamento nulo para estrelas com distâncias menores que esta.

As magnitudes absolutas são um importante parâmetro astrofísico, pois, juntamente com as temperaturas efetivas e metalicidades, permitem a aplicação do método das isócronas evolutivas (descrito na Seção 2.1.3.1) para a determinação das idades de estrelas individuais (nos casos em que o método é aplicável).

Em sua versão original, a magnitude absoluta das estrelas do catálogo foram obtidas por Nordström et al. (2004) através das distâncias (trigonométricas ou fotométricas) e da magnitude observada na banda  $V$  (corrigida de avermelhamento).

Na primeira revisão, feita por Holmberg et al. (2007), as magnitudes absolutas foram aprimoradas através da construção de uma calibração  $uvby\beta$  adequada para as estrelas do catálogo. As magnitudes foram novamente revistas por Holmberg et al. (2009), aproveitando-se as distâncias mais acuradas disponíveis devido à redução dos dados do HIPPARCOS (van Leeuwen, 2007). Ainda, Casagrande et al. (2011) apresentam uma nova revisão, na qual fazem uso de fotometria  $B_T V_T$  do catálogo Tycho2 (Høg et al., 2000) e fotometria 2MASS (Skrutskie et al., 2006), derivando parâmetros astrofísicos com melhor acurácia que os determinados anteriormente.

#### 4.2.4.2 Temperatura efetiva

As temperaturas efetivas são também importantes na determinação de idades pelo método das isócronas.

Originalmente as temperaturas efetivas das estrelas do GCS foram obtidas por Nordström et al. (2004) utilizando as calibrações fotométricas de Alonso et al. (1996).

Holmberg et al. (2007) obtêm novas temperaturas efetivas para as estrelas do GCS baseando-se em uma nova calibração fotométrica  $wby\beta$  construída a partir das temperaturas efetivas através das calibrações fotométricas  $V-K$  de di Benedetto (1998). A fotometria na banda  $K$  para as estrelas do GCS foram obtidas do 2MASS (Skrutskie et al., 2006).

Casagrande et al. (2011) aplicam as calibrações fotométricas de Casagrande et al. (2010) para obter medidas aprimoradas de temperatura efetiva. As calibrações fotométricas de Casagrande et al. (2010) utilizam fotometria nas bandas  $JHK_s$  e  $B_T V_T$  obtidas para as estrelas do GCS do levantamento 2MASS (Skrutskie et al., 2006) e do catálogo Tycho-2 (Høg et al., 2000), respectivamente. Casagrande et al. (2011) observaram que as calibrações originais do GCS apresentam temperaturas mais frias em cerca de 100 K.

#### 4.2.4.3 Metalicidade

As metalicidades são importantes não só por permitirem estudos das abundâncias e evolução química da Galáxia, mas também por serem necessárias na determinação das idades isocronais, já que conjuntos diferentes de isócronas devem ser utilizados para cada metalicidade.

Na primeira publicação do GCS, Nordström et al. (2004) aplicaram as calibrações fotométricas  $wby\beta$  de Schuster & Nissen (1989) e, para os casos em que essa calibração não é válida, derivaram novas calibrações empíricas para o cálculo da metalicidade estelar.

Holmberg et al. (2007) aprimoram essa calibração, derivando uma nova relação que considera todos as combinações dos índices fotométricos  $b-y$ ,  $m_1$  e  $c_1$  até a terceira ordem.

Com a nova escala de temperatura definida por Casagrande et al. (2010), Casagrande et al. (2011) obtiveram uma nova calibração empírica para as estrelas do GCS utilizando dados espectroscópicos de alta resolução para cerca de 1 500 estrelas.

Casagrande et al. (2011) apresentam ainda uma calibração pioneira que permite obter uma estimativa de  $[\alpha/\text{Fe}]$  através de fotometria Strömngren. É importante notar que a relação obtida por eles parece saturar para  $[\text{Fe}/\text{H}] < -1$  e não deve ser aplicada nestes casos.

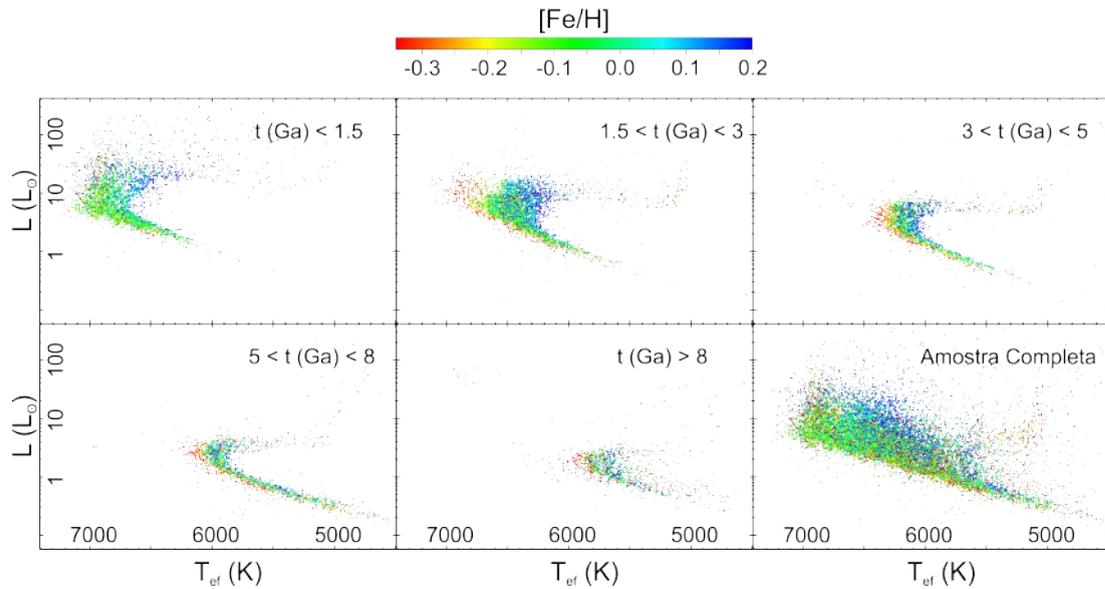


FIGURA 4.2: Diagramas HR das estrelas do GCS para grupos de diferentes idades. A cor dos pontos representa  $[\text{Fe}/\text{H}]$  conforme a barra de cor.

A Figura 4.2 apresenta o diagrama HR com os dados do GCS. Em cada painel, encontram-se estrelas de diferentes grupos de idades (obtidas por Casagrande et al., 2011 utilizando o conjunto de isócronas de BaSTI). Por construção, a amostra é formada apenas por estrelas anãs tardias. Pelo diagrama HR é possível perceber que a amostra contém estrelas jovens e velhas em diferentes etapas evolutivas.

#### 4.2.4.4 Idades

Escolhemos utilizar o GCS em nosso estudo pois, além de apresentar dados cinemáticos completos para um grande número de estrelas de longa vida, ele apresenta, também, as idades individuais destas estrelas, o que nos permite estudar a relação idade–dispersão de velocidades a partir de uma amostra extensa e homogênea.

Nordström et al. (2004) calcularam as idades das estrelas do catálogo através da aplicação do método das isócronas evolutivas, que descrevemos na Seção 2.1.3.1. Uma abordagem bayesiana, desenvolvida por Pont & Eyer (2004) e Jørgensen & Lindegren (2005), para tratamento das incertezas foi utilizada por estes autores. Nesta abordagem, os autores determinam a função de densidade de probabilidade de que uma estrela com determinados valores de metalicidade, temperatura efetiva e magnitude absoluta, com respectivas incertezas, possua determinadas idades.

Em cada revisão subsequente do catálogo (Casagrande et al., 2011; Holmberg et al., 2007, 2009) as idades foram recalculadas de acordo com os parâmetros astrofísicos aprimorados.

Nordström et al. (2004) e (Holmberg et al., 2007, 2009) utilizam o conjunto de isócronas de PADOVA (Bertelli et al., 2008, 2009) enquanto Casagrande et al. (2011) obtêm idades utilizando também o conjunto de isócronas de BaSTI (Pietrinferni et al., 2004). Para ambos os conjuntos de isócronas são assinaladas três estimativas de idade individual para cada estrela: idade de máxima verossimilhança, idade mais provável e idade mediana.

Casagrande et al. (2011) aplicam ainda uma distribuição uniforme (*a priori*) para as idades, considerando nula a probabilidade de que a estrela possua idade superior a 14 Ga.

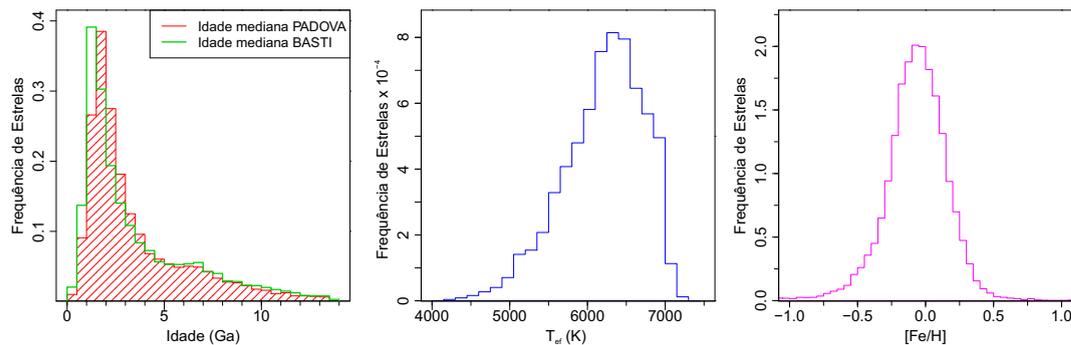


FIGURA 4.3: Distribuição das idades, temperaturas efetivas e metalicidades no GCS (após as revisões de Casagrande et al., 2011).

A distribuição das idades, temperaturas efetivas e metalicidades no GCS (após as revisões de Casagrande et al., 2011) está representada na Figura 4.3. Vemos que as distribuições de idades obtidas pelas isócronas de PADOVA e BaSTI são bastante semelhantes. Esta distribuição não representa a distribuição real de idades das estrelas

na Vizinhança Solar e deve ser interpretada com cautela. Os vieses em idades gerados pela seleção inicial das estrelas da amostra são discutidos por Nordström et al. (2004) e Casagrande et al. (2011).

### 4.3 Subamostra do GCS (Amostra A)

Para calibrar o método das idades cinemáticas (desenvolvido no Capítulo 5) precisamos de uma amostra de estrelas com cinemática conhecida e idades individuais determinadas. Além disso, precisamos de idades distribuídas em um extenso intervalo.

Escolhemos utilizar o Levantamento Geneva-Copenhague pois ele contém todos estes dados necessários. Entretanto, nem todas as estrelas do catálogo atendem a estes e outros critérios que estipulamos e, por causa disso, separamos uma subamostra de estrelas que denominamos Amostra A.

Inicialmente retiramos do catálogo as estrelas que não possuem informação completa de sua velocidade espacial. Estas estrelas correspondem às estrelas para as quais distância, movimento próprio ou velocidade radial não são conhecidos. Este critério de seleção excluiu 3 162 estrelas da amostra, restando um total de 13 520 estrelas.

Em seguida, para evitar a contaminação de binárias não resolvidas, retiramos as estrelas para as quais foi realizada apenas uma observação de velocidade radial. Este passo é importante pois as calibrações fotométricas utilizadas no Geneva-Copenhague são desenvolvidas apenas para anãs F e G individuais. Para as binárias, o uso indevido das calibrações leva a determinações errôneas de metalicidades, temperaturas efetivas e distâncias (para as quais o método utilizado foi o de paralaxe fotométrica, que descrevemos na Seção 3.3.1.2) e conseqüentemente de magnitude absoluta e movimento espacial. Como as magnitudes absolutas, temperaturas efetivas e metalicidades são usadas diretamente na determinação de idades, estas também seriam inacuradas para estas estrelas. Neste passo foram eliminadas mais 867 estrelas.

Somente as estrelas que possuem idades individuais determinadas são de nosso interesse para a calibração do método de idades cinemáticas. Por causa disso, retiramos todas as estrelas que não apresentam idades determinadas através de pelo menos um dos conjuntos de isócronas (1 110), restando 11 543 estrelas.

Além de apresentar as idades médias e medianas, o GCS apresenta também as idades correspondentes aos percentis de 5%, 16%, 84% e 95% das funções de densidade de probabilidade (ver Nordström et al., 2004 para mais detalhes) para ambos os conjuntos de isócronas (PADOVA e BaSTI) utilizados. Essas idades permitem uma estimativa das incertezas individuais para a idade de cada estrela.

Sendo  $t_{16}$  e  $t_{84}$  as idades correspondentes aos percentis de 16% e 84% da função de densidade de probabilidade de idade, e  $t_{50}$  a idade mediana, temos que a probabilidade de a idade das estrelas estar entre  $t_{16}$  e  $t_{84}$  é de 68%. Para trabalhar apenas com estrelas cuja idade possa ser considerada bem determinada, selecionamos apenas estrelas cuja diferença entre  $t_{16}$  e  $t_{50}$  e entre  $t_{84}$  e  $t_{50}$  não exceda 3 Ga. Das 11 543 que restavam, 9 500 apresentam idades bem determinadas pelo conjunto de isócronas de PADOVA e 9 448 pelo conjunto de BASTI. Ao todo 9 414 estrelas atendem aos critérios para ambos os conjuntos de isócronas.

Por fim, selecionamos apenas estrelas cuja diferença entre a idade mediana obtida pelas isócronas de PADOVA e de BASTI não exceda 1 Ga, sendo retiradas mais 312 estrelas.

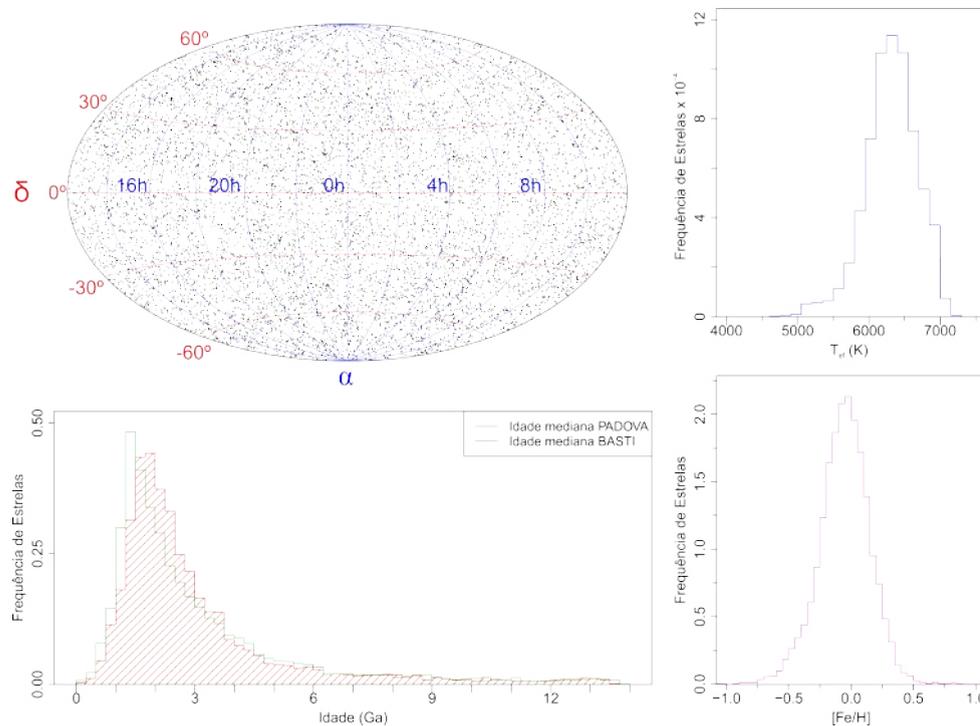


FIGURA 4.4: Distribuição espacial das estrelas da Amostra A na esfera celeste e distribuição dos principais parâmetros astrofísicos destas estrelas.

---

Construímos assim a Amostra A, que contém 9 102 estrelas com velocidades espaciais conhecidas e idades bem determinadas através do método das isócronas. As distribuições das idades, temperatura efetiva e metalicidade, assim como a distribuição destas estrelas na esfera celeste, encontram-se representadas na Figura 4.4.

## Capítulo 5

# Desenvolvimento do método

### 5.1 Introdução

Neste capítulo, desenvolvemos o método que denominamos “método das idades cinemáticas”, ou apenas “método cinemático”. Este método permite obter uma função de densidade de probabilidade (f.d.p.) para a idade de uma estrela com base apenas em suas componentes cinemáticas.

Este método é embasado em um importante fato observacional: o aquecimento dinâmico do disco (que discutimos na Seção 3.6). Sabemos que estrelas com componentes de velocidade mais altas e/ou órbitas mais excêntricas têm maior probabilidade de serem mais velhas, como mostra a Figura 5.1.

Utilizando o Teorema de Bayes, podemos inverter esta relação para obter a probabilidade de a estrela ter uma determinada idade conhecendo suas componentes de velocidade e sua excentricidade.

Para isso, precisamos conhecer a distribuição das componentes de velocidade e da excentricidade para grupos de estrelas de diferentes idades, além da probabilidade de que a estrela possua cada idade (que corresponde à chamada probabilidade *a priori*).

Apresentamos aqui três métodos bastante semelhantes. O que chamamos daqui em diante de “Método 1” utiliza a informação das componentes de velocidade heliocêntrica  $U$ ,  $V$  e  $W$ . O “Método 2” utiliza as componentes  $U$  e  $W$  e inclui a excentricidade da

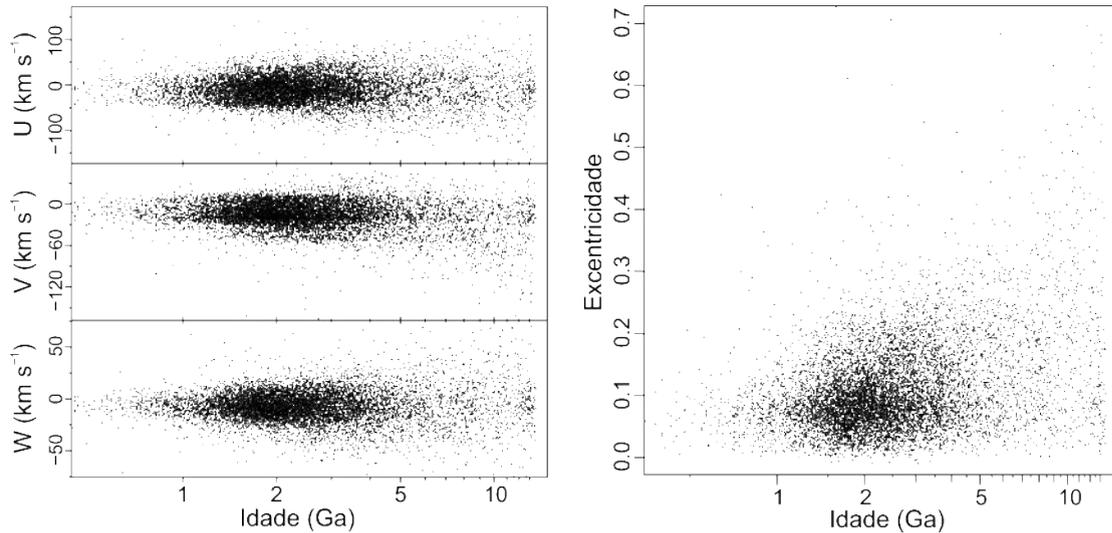


FIGURA 5.1: Distribuição das componentes de velocidade (esquerda) e excentricidade (direita) das estrelas da Amostra A com relação à idade das estrelas. Em todos os casos, as dispersões aumentam com a idade.

órbita da estrela (definida na Seção 3.7) para a determinação da f.d.p. para as idades. O outro método (“Método 3”) utiliza as componentes  $V$  e  $W$  e a excentricidade.

A função de densidade de probabilidade para a idade de uma determinada estrela nos permite caracterizar, para esta estrela, uma idade individual tanto através da idade mais provável quanto através da idade média (ou de uma combinação entre elas). Com isso, podemos utilizar o método para estimar idades para estrelas individuais.

Como este método se baseia apenas no movimento espacial da estrela, ele pode ser aplicado para qualquer estrela que possa ter sua velocidade espacial determinada. Como vimos na Seção 3.3 é necessário para isso conhecer a posição da estrela na esfera celeste, sua distância, seu movimento próprio e sua velocidade radial.

Na próxima seção, obtemos a expressão do teorema de Bayes multivariacional para os três métodos descritos acima. Em seguida, apresentamos o desenvolvimento do Método 1 (Seção 5.3) e do Método 2 (Seção 5.4). O Método 3 é bastante similar ao Método 2 e será apenas discutido brevemente na Seção 5.5.

## 5.2 Aplicação do Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes nos permite obter a probabilidade posterior de um determinado evento ( $\theta$ ) com base em sua probabilidade *a priori* e com base em nosso conhecimento

de um conjunto de parâmetros ( $\mathbf{d}$ ) observados (que possuem relação com este evento  $\theta$ ).

No caso aqui apresentado, o evento corresponde a “ter uma determinada idade”, enquanto o conjunto de parâmetros conhecidos são as componentes de velocidade e a excentricidade.

A relação entre os parâmetros e o evento se traduz na probabilidade de que estes parâmetros sejam observados dada a ocorrência do evento. No caso da excentricidade, por exemplo, esta relação se quantifica através da probabilidade de que a excentricidade  $e_0$  seja a observada dado que a idade da estrela é a idade  $t_0$ . Conhecendo a distribuição das excentricidades em função da idade, podemos obter a probabilidade de observar  $e_0$  qualquer que seja a idade  $t$  da estrela.

É preciso ainda levar em consideração que a distribuição de um dado parâmetro pode depender não só da idade, mas também dos demais parâmetros observados. Por exemplo, a probabilidade de que a estrela tenha um determinado valor da componente  $U$  depende não só da idade, mas também do valor da componente  $V$  (existe correlação entre os parâmetros  $U$  e  $V$ ).

O Teorema de Bayes, em sua forma mais simples, é dado por:

$$p(\theta|d) = \frac{p(d|\theta) p(\theta)}{p(d)} \quad (5.1)$$

Ou simplesmente:

$$p(\theta|d) \propto p(d|\theta) p(\theta) \quad (5.2)$$

Neste caso,  $\theta$  é o evento cuja probabilidade de ocorrência  $p(\theta|d)$ , dado o conhecimento do parâmetro  $d$ , queremos obter. A probabilidade  $p(\theta)$  é a chamada probabilidade *a priori* e corresponde à probabilidade de ocorrência do evento  $\theta$  quando não conhecemos o valor do parâmetro  $d$ .

Se a função que descreve a probabilidade de obter o parâmetro  $d$  para um dado valor de  $\theta$ ,  $p(d|\theta)$ , e a probabilidade  $p(\theta)$  forem conhecidas para qualquer valor de  $\theta$ , a Equação 5.2 em função de  $\theta$ , normalizada, corresponde à função de densidade de probabilidade de  $\theta$  dado o parâmetro  $d$ .

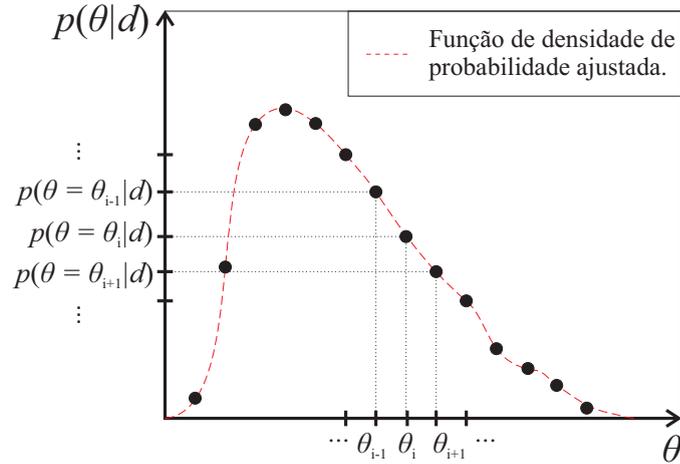


FIGURA 5.2: Exemplo de como obter a função de densidade de probabilidade aplicando o Teorema de Bayes. A probabilidade é calculada para diferentes valores de  $\theta$  através do Teorema de Bayes. Em seguida, a função de densidade de probabilidade é construída por meio da interpolação dos valores obtidos e posterior normalização.

A Figura 5.2 mostra um exemplo de função de densidade de probabilidade obtida através da interpolação da probabilidade calculada para diferentes valores de  $\theta$  por meio do Teorema de Bayes. O parâmetro  $d$  é conhecido e as probabilidades  $p(\theta_{i-1}|d)$ ,  $p(\theta_i|d)$ ,  $p(\theta_{i+1}|d)$ , etc, são obtidas através de sucessivas aplicações do Teorema de Bayes (com a condição de que  $p(d|\theta)$  e  $p(\theta)$  sejam conhecidos para todos os valores de  $\theta$ ):

$$\vdots$$

$$p(\theta_{i-1}|d) \propto p(d|\theta_{i-1}) p(\theta_{i-1}) \tag{5.3a}$$

$$p(\theta_i|d) \propto p(d|\theta_i) p(\theta_i) \tag{5.3b}$$

$$p(\theta_{i+1}|d) \propto p(d|\theta_{i+1}) p(\theta_{i+1}) \tag{5.3c}$$

$\vdots$

Para satisfazer a propriedade de que a probabilidade de todo o espaço amostral deve ser 1, devemos normalizar a função obtida. Dessa forma, obtemos a função de densidade de probabilidade  $f(\theta|d)$ :

$$f(\theta|d) = \frac{p(\theta|d)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\theta|d) d\theta}, \tag{5.4}$$

onde  $\int_{-\infty}^{\infty} p(\theta|d) d\theta$  corresponde à área sob  $p(\theta|d)$ .

### 5.2.1 Teorema de Bayes multivariacional

O método que desenvolvemos utiliza mais de um parâmetro, e precisamos aplicar uma forma mais geral do Teorema de Bayes. Para obter a expressão considerando todos os parâmetros é preciso aplicar sucessivamente o Teorema de Bayes acrescentando um novo parâmetro a cada passo (d'Agostini, 2003).

Assim, no caso de 3 parâmetros ( $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ ), obtemos  $p(\theta|d_1, d_2, d_3)$  seguindo os seguintes passos:

$$p(\theta|d_1) \propto p(d_1|\theta) p(\theta) \quad (5.5a)$$

$$\begin{aligned} p(\theta|d_1, d_2) &\propto p(d_2|\theta, d_1) p(\theta|d_1) \\ &\propto p(d_2|\theta, d_1) p(d_1|\theta) p(\theta) \end{aligned} \quad (5.5b)$$

$$\begin{aligned} p(\theta|d_1, d_2, d_3) &\propto p(d_3|\theta, d_1, d_2) p(\theta|d_1, d_2) \\ &\propto p(d_3|\theta, d_1, d_2) p(d_2|\theta, d_1) p(d_1|\theta) p(\theta) \end{aligned} \quad (5.5c)$$

Um resultado que facilita bastante os cálculos ocorre quando dois parâmetros são independentes. Por exemplo, se  $d_1$  e  $d_2$  são independentes, é válido que:

$$p(d_2|\theta, d_1) = p(d_2|\theta) \quad (5.6)$$

## 5.3 Método 1: $p(t|U, V, W)$

Neste método, assim como nos demais, o evento  $\theta$  no qual estamos interessados em obter a probabilidade é a estrela possuir idade  $t$ . No Método 1, o conjunto de parâmetros que utilizamos para obter a f.d.p. são as componentes de velocidade heliocêntricas da estrela  $U$ ,  $V$  e  $W$ .

Sabemos que as componentes  $U$  e  $V$  possuem significativa correlação, o que inclusive leva ao formalismo do desvio do vértice (Seção 3.5.1). Para aplicar diretamente o Teorema de Bayes utilizando estes parâmetros, precisaríamos conhecer a probabilidade  $p(U|V, t)$  ou  $p(V|U, t)$ . Para evitar este problema, escolhemos abordar a questão de maneira diferente.

Ao invés de obter a probabilidade  $p(t|U, V, W)$  para um conjunto de idades, obtemos a probabilidade  $p(t|v_1, v_2, W)$ . Conhecendo a relação entre  $v_1$  e  $v_2$  e  $U$  e  $V$  para uma dada idade  $t$ , podemos obter  $p(t|U, V, W)$ . Para isso, vamos considerar a seguinte igualdade:

$$p(t) = \iiint p(t|U, V, W) dU dV dW = \iiint p(t|v_1, v_2, W) dv_1 dv_2 dW \quad (5.7)$$

Neste tipo de igualdade, a relação entre  $p(t|U, V, W)$  e  $p(t|v_1, v_2, W)$  é dada através da matriz Jacobiana da transformação entre as variáveis:

$$p(t|U, V, W) = p(t|v_1, v_2, W) \left| \frac{\partial(v_1, v_2, W)}{\partial(U, V, W)} \right|, \quad (5.8)$$

onde:

$$\left| \frac{\partial(v_1, v_2, W)}{\partial(U, V, W)} \right| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial U} & \frac{\partial v_1}{\partial V} & \frac{\partial v_1}{\partial W} \\ \frac{\partial v_2}{\partial U} & \frac{\partial v_2}{\partial V} & \frac{\partial v_2}{\partial W} \\ \frac{\partial W}{\partial U} & \frac{\partial W}{\partial V} & \frac{\partial W}{\partial W} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Como  $v_1$  e  $v_2$  são independentes de  $W$ , e  $W$  é independente de  $U$  e  $V$ , as derivadas de  $v_1$  e  $v_2$  em relação a  $W$  e de  $W$  em relação a  $U$  e  $V$  são nulas. As demais derivadas são obtidas derivando as Equações 3.35a e 3.35b. Substituindo as derivadas na Equação 5.9:

$$\left| \frac{\partial(v_1, v_2, W)}{\partial(U, V, W)} \right| = \det \begin{pmatrix} \cos \ell_v & \text{sen} \ell_v & 0 \\ -\text{sen} \ell_v & \cos \ell_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (5.10)$$

Tendo em vista que a transformação das coordenadas  $U, V, W$  para  $v_1, v_2$  e  $W$  corresponde simplesmente a transformações de translação e rotação, o resultado encontrado para o Jacobiano é o esperado.

Sendo assim:

$$p(t|U, V, W) = p(t|v_1, v_2, W) \quad (5.11)$$

Na próxima seção, mostramos como obter  $p(t|v_1, v_2, W)$  através da aplicação do Teorema de Bayes.

### 5.3.1 Teorema de Bayes para o Método 1

Para obter  $p(t|v_1, v_2, W)$  seguimos os passos que descrevemos na Seção 5.2.1. Primeiro, obtemos a probabilidade  $p(t|W)$ :

$$p(t|W) \propto p(W|t) p(t) \quad (5.12)$$

Em seguida, acrescentamos uma nova variável conhecida ( $v_2$ ):

$$p(t|v_2, W) \propto p(v_2|W, t) p(t|W) \quad (5.13)$$

Utilizando o fato de que  $v_2$  e  $W$  são independentes e substituindo a Equação 5.12 em 5.13, obtemos:

$$p(t|v_2, W) \propto p(v_2|t) p(W|t) p(t) \quad (5.14)$$

Adicionando então a última variável conhecida ( $v_1$ ):

$$p(t|v_1, v_2, W) \propto p(v_1|v_2, W, t) p(t|v_2, W) \quad (5.15)$$

Novamente utilizando o fato de que as variáveis  $v_1$ ,  $v_2$  e  $W$  são independentes e substituindo a equação 5.14 em 5.15, obtemos a expressão:

$$p(t|U, V, W) = p(t|v_1, v_2, W) \propto p(v_1|t) p(v_2|t) p(W|t) p(t) \quad (5.16)$$

Consideramos inicialmente *a priori* que todas as idades possuem igual probabilidade de ocorrência:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq 14 \text{ Ga} \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases} ; \quad (5.17)$$

isto é, admitimos que não há elementos *a priori* para privilegiar uma idade em detrimento de outras.

Como vimos na Seção 3.5, as distribuições de cada componente são bem aproximadas por gaussianas, com parâmetros  $\mu_i$  e  $\sigma_i$  que podem depender da idade das estrelas

da distribuição:

$$p(v_1|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(t)}} \exp\left[-\frac{(v_1 - \mu_1(t))^2}{2\sigma_1^2(t)}\right] \quad (5.18a)$$

$$p(v_2|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(t)}} \exp\left[-\frac{(v_2 - \mu_2(t))^2}{2\sigma_2^2(t)}\right] \quad (5.18b)$$

$$p(W|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_W^2(t)}} \exp\left[-\frac{(W - \mu_W(t))^2}{2\sigma_W^2(t)}\right] \quad (5.18c)$$

Por construção, a média das distribuições das componentes  $v_1$  e  $v_2$  (respectivamente  $\mu_1$  e  $\mu_2$ ) é igual a zero. Já a média da componente  $W$  ( $\mu_W$ ), sob a hipótese de que a amostra é completamente aleatória, equivale ao oposto da componente  $W$  da velocidade peculiar do Sol ( $W_\odot$ ; Seção 3.4). Assim, temos:

$$\mu_1 = 0 \quad (5.19a)$$

$$\mu_2 = 0 \quad (5.19b)$$

$$\mu_W = -W_\odot \quad (5.19c)$$

Para calcular  $v_1$  e  $v_2$  é preciso conhecer, juntamente com as componentes de velocidade  $U$  e  $V$ , as componentes de velocidade peculiar do Sol e as expressões que descrevem a deriva assimétrica ( $V_a(t)$ ) e o desvio do vértice ( $\ell_v(t)$ ) em função da idade.

### 5.3.2 Ajustes de $\sigma_i(t)$ e $\ell_v(t)$

Os desvios padrões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são dados em função de  $\sigma_U$ ,  $\sigma_V$  e da correlação entre eles, expressa através de  $\sigma_{UV}$  e do desvio do vértice  $\ell_v$ . Como demonstrado no Apêndice A, temos:

$$\sigma_1^2 = \sigma_U^2 \cos^2 \ell_v + \sigma_V^2 \sin^2 \ell_v + \sigma_{UV} \sin(2\ell_v) \quad (5.20a)$$

$$\sigma_2^2 = \sigma_U^2 \sin^2 \ell_v + \sigma_V^2 \cos^2 \ell_v - \sigma_{UV} \sin(2\ell_v) \quad (5.20b)$$

Para obter as expressões que descrevem  $\sigma_U(t)$ ,  $\sigma_V(t)$ ,  $\sigma_W(t)$  e  $\sigma_1(t)$ ,  $\sigma_2(t)$  e  $\ell_v(t)$  utilizamos as estrelas da Amostra A. Escolhemos utilizar esta amostra para ajustar

essas expressões pois ela contém as componentes de velocidades  $U$ ,  $V$  e  $W$  e as idades individuais (determinadas por Casagrande et al., 2011 utilizando o método das isócronas evolutivas) para um grande número de estrelas.

Dividimos a amostra em 30 grupos ordenados por idade, de forma que cada grupo contivesse aproximadamente 300 estrelas. Em seguida, designamos à idade do grupo a idade média das estrelas desse grupo.

Para obter os parâmetros  $\sigma_i$  e suas respectivas incertezas para qualquer idade  $t$ , seguimos os seguintes passos:

- Utilizamos a técnica de reamostragem conhecida como técnica de *bootstrap*<sup>1</sup>. Para cada um dos 30 grupos, realizamos 1 000 reamostragens, com reposição, mantendo sempre o número original de estrelas ( $\sim 300$  estrelas) em cada reamostragem.
- Para cada uma das 1 000 reamostragens, calculamos os desvios padrões das componentes  $U$ ,  $V$  e  $W$  e a correlação entre as componentes  $U$  e  $V$ .
- Utilizamos a Equação 3.39 para obter o desvio do vértice ( $\ell_v$ ) e as Equações 3.38a e 3.38b para obter os valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  para cada uma das 1 000 reamostragens de um dado grupo.
- Os valores de  $\sigma_U$ ,  $\sigma_V$ ,  $\sigma_W$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\ell_v$  obtidos para cada grupo correspondem ao valor médio dos valores obtidos nas 1 000 reamostragens. A incerteza de cada uma dessas medidas foi considerada como o desvio padrão dos valores obtidos nas 1 000 reamostragens.
- Verificamos que a escolha de diversos autores (ex. Gontcharov, 2012; Koval' et al., 2009; Nordström et al., 2004) de ajustar uma função na forma  $\sigma_i(t) = b_i t^{a_i}$  é adequada e obtivemos os valores de  $b_i$  e  $a_i$  para as componentes  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $v_1$  e  $v_2$ .
- Ajustamos uma função simples para descrever  $\ell_v(t)$ . Testamos uma relação na forma  $\ell_v(t) = C \exp(kt)$  e verificamos que o ajuste é satisfatório.

Os últimos dois passos serão discutidos com mais detalhes abaixo.

---

<sup>1</sup>Esta técnica consiste em escolher aleatoriamente, com reposição,  $N$  dados de uma amostra de  $N$  dados  $R$  vezes. O parâmetro da amostra que queremos estimar é calculado para cada uma das  $R$  reamostragens. A incerteza do parâmetro é estimada através do desvio padrão dos valores obtidos nas  $R$  reamostragens.

A expressão  $\sigma_i(t) = b_i t^{a_i}$  pode ser escrita de uma outra forma, que facilita o ajuste dos parâmetros  $a_i$  e  $b_i$ :

$$\begin{aligned} \ln [\sigma_i(t)] &= \ln (b_i t^{a_i}) \\ \ln [\sigma_i(t)] &= \ln (b_i) + \ln (t^{a_i}) \\ \ln [\sigma_i(t)] &= \ln (b_i) + a_i \ln (t) \end{aligned} \quad (5.21a)$$

Com os valores dos desvios padrões de cada componente obtidos para cada um dos 30 grupos e as idades médias das estrelas de cada grupo, calculamos  $\ln [\sigma_i(t)]$  e  $\ln (t)$ . Em seguida, obtivemos  $a_i$  e  $\ln (b_i)$  através de um ajuste linear de mínimos quadrados.

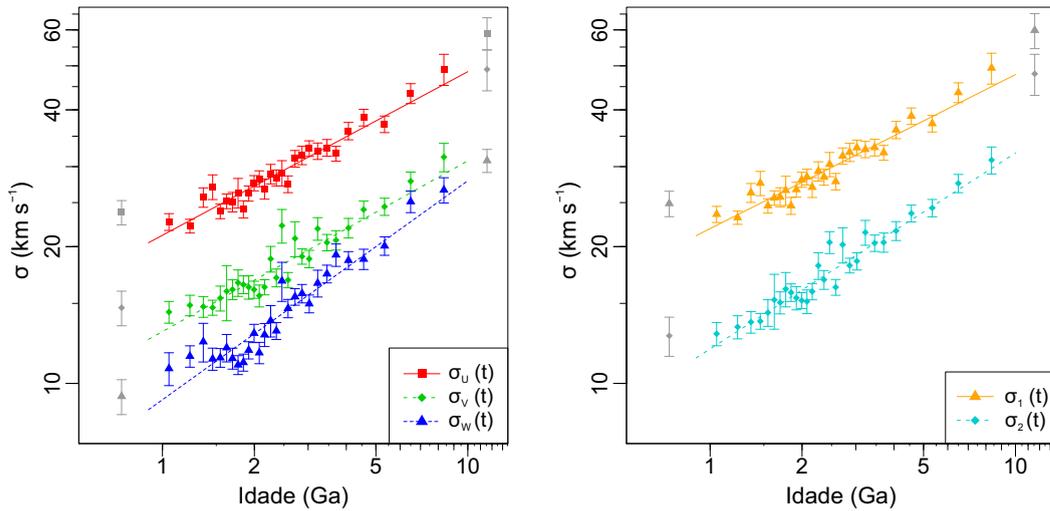


FIGURA 5.3: Dispersões das componentes de velocidade  $U$ ,  $V$  e  $W$  (direita) e  $v_1$  e  $v_2$  (esquerda) obtidas para os 30 grupos da Amostra A. As linhas correspondem às funções ajustadas através destes dados. O primeiro e último grupos foram excluídos dos ajustes.

Os valores dos desvios padrões de cada grupo e os ajustes estão representados na Figura 5.3. A tabela 5.1 apresenta os valores dos parâmetros  $a_i$  e  $b_i$  de cada componente.

O primeiro e o último grupos foram excluídos do ajuste (tal como foi feito por Nordström et al., 2004). O primeiro grupo foi excluído devido a que as estrelas desse grupo são muito jovens e terem realizado poucas órbitas completas na Galáxia. As propriedades da distribuição de velocidades dessas estrelas são mais um reflexo das propriedades de seu local de nascimento do que do disco como um todo. Já as estrelas do último grupo foram excluídas do ajuste por serem estrelas muito velhas, de forma que a amostra pode estar contaminada por estrelas do halo e do disco espesso, para as quais a dispersão de velocidades é muito maior.

TABELA 5.1: Parâmetros do ajuste  $\sigma_i(t) = b_i t^{a_i}$  obtidos para cada componente ( $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $v_1$  e  $v_2$ ) utilizando os dados da Amostra A

Componente	$a_i$	$b_i$	Componente	$a_i$	$b_i$
$U$	$0.35 \pm 0.02$	$21.2 \pm 1.0$	$v_1$	$0.33 \pm 0.02$	$22.0 \pm 1.0$
$V$	$0.36 \pm 0.02$	$13.0 \pm 1.0$	$v_2$	$0.42 \pm 0.02$	$11.9 \pm 1.0$
$W$	$0.48 \pm 0.04$	$9.1 \pm 1.0$			

Os valores obtidos para  $a_U$ ,  $a_V$  e  $a_W$  são levemente menores do que os obtidos por Holmberg et al. (2009) (respectivamente 0.39, 0.40 e 0.53) para as estrelas do GCS anteriormente às revisões nos parâmetros astrofísicos feitas por Casagrande et al. (2011).

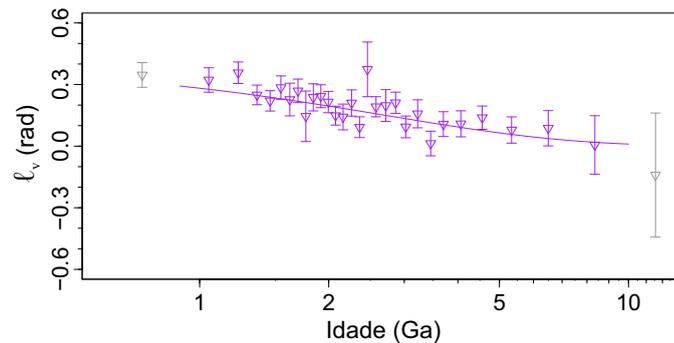
Para obter  $\ell_v(t)$  utilizamos os valores obtidos para  $\ell_v$  dos 30 grupos e ajustamos uma função na forma:

$$\ell_v(t) = C \exp(kt) \quad (5.22)$$

Para fazer os ajustes, linearizamos a expressão de forma semelhante ao que foi feito para  $\sigma_i(t)$ :

$$\ln[\ell_v(t)] = \ln[C \exp(kt)]$$

$$\ln[\ell_v(t)] = \ln(C) + kt \quad (5.23a)$$


 FIGURA 5.4: Desvio do vértice para os 30 grupos de diferentes idades das estrelas da Amostra A. O ajuste representado é na forma  $\ell_v(t) = C \exp(kt)$ .

Obtivemos os valores para os parâmetros através de ajuste linear de mínimos quadrados (novamente excluindo o primeiro e último grupos pelas mesmas razões anteriores). Os parâmetros obtidos no ajuste são:  $C = 0.41 \pm 0.10$  e  $k = -0.37 \pm 0.08$ . A figura 5.4 mostra o valor de  $\ell_v$  obtido para cada grupo e a função que ajustamos a estes

dados. A expressão ajustada para a deriva assimétrica em função da idade é então:

$$\ell_v(t) = 0.41 \exp(-0.37 t) \quad (5.24)$$

### 5.3.3 Obtendo a velocidade peculiar do Sol e o ajuste de $V_a(t)$

Como vimos na Seção 3.4, as componentes da velocidade peculiar  $U_\odot$  e  $W_\odot$  podem ser obtidas através das médias das componentes  $U$  e  $W$  das velocidades heliocêntricas de um grande número de estrelas:

$$U_\odot = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i \quad (5.25a)$$

$$W_\odot = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i \quad (5.25b)$$

Obtivemos os valores de  $U_\odot$  e  $W_\odot$  utilizando as estrelas da Amostra A. Novamente utilizamos a técnica de reamostragem de *bootstrap* (1 000 reamostragens) para estimar a incerteza. Os valores obtidos são:

$$U_\odot = 9.8 \pm 0.3 \text{ km s}^{-1} \quad (5.26a)$$

$$W_\odot = 7.2 \pm 0.2 \text{ km s}^{-1} \quad (5.26b)$$

Este resultado é bem próximo do obtido por outros autores, apresentados na Tabela 3.1.

Inicialmente, tentamos obter um ajuste para  $V_\odot$  e  $V_a(t)$  seguindo o procedimento descrito na Seção 3.4. Calculamos  $V' = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i$  para os 30 grupos da Amostra A, novamente utilizando a técnica de reamostragem de *bootstrap*. Em seguida, calculamos a variância em  $U$  relativa a idade média de cada grupo usando o ajuste obtido na seção anterior:  $\sigma_U(t) = 21.2 t^{0.35}$ .

Fizemos o ajuste de mínimos quadrados para obter a reta que melhor descreve  $V'$  em função da variância em  $U$ . A Figura 5.5 mostra os valores de  $V'$  em função dos valores de  $\sigma_U^2$  obtidos para cada grupo e o ajuste da reta  $V' = a \sigma_U^2 + b$ .

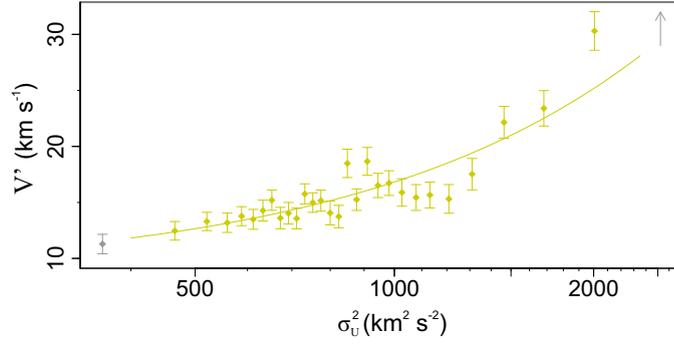


FIGURA 5.5: Valores de  $V'$  em função de  $\sigma_U^2$  obtidos para os 30 grupos da amostra A. O primeiro e último grupos foram excluídos do ajuste da reta.

Como vimos na Seção 3.5.2, o coeficiente linear dessa reta corresponde à componente  $V_\odot$  da velocidade peculiar do Sol. Já o coeficiente angular, corresponde à constante  $C$  que é usada para obter a deriva assimétrica em função da variância em  $U$  ( $V_a = C \sigma_U^2$ ). Os valores obtidos são:  $a = (8.3 \pm 1.0) \cdot 10^{-3} (\text{km s}^{-1})^{-1}$  e  $b = (8.5 \pm 0.8) \text{ km s}^{-1}$ . De forma que:

$$V_\odot = 8.5 \pm 0.8 \text{ km s}^{-1} \quad (5.27)$$

Este valor de  $V_\odot$  é mais baixo do que os obtidos recentemente por diferentes autores (tabela 3.1).

A expressão para  $V_a(t)$  é obtida substituindo  $C$  e  $\sigma_U(t)$  em  $V_a = C \sigma_U^2$ :

$$V_a(t) = 3.7 t^{0.71} \quad (5.28)$$

Percebemos, entretanto, que esta expressão não ajusta muito bem os dados observados (principalmente para variâncias acima de  $1000 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ , que correspondem a idades acima de  $\sim 3 \text{ Ga}$ ). É bastante provável que o fato de a expressão propagar as incertezas já contidas na determinação de  $\sigma_U(t)$  seja um dos principais responsáveis para que o ajuste não seja satisfatório.

Nossa abordagem do problema nos permite tratá-lo de maneira ligeiramente diferente: ao invés de obter um ajuste linear para  $V'$  em função da variância em  $U$ , obtivemos um ajuste de  $V'$  diretamente em função da idade. A expressão que utilizamos para ajustar  $V'(t)$  foi  $V'(t) = at^2 + bt + c$ . O ajuste obtido através de uma regressão

de mínimos quadrados foi:

$$V'(t) = 0.17t^2 + 0.63t + 12.5 \quad (5.29)$$

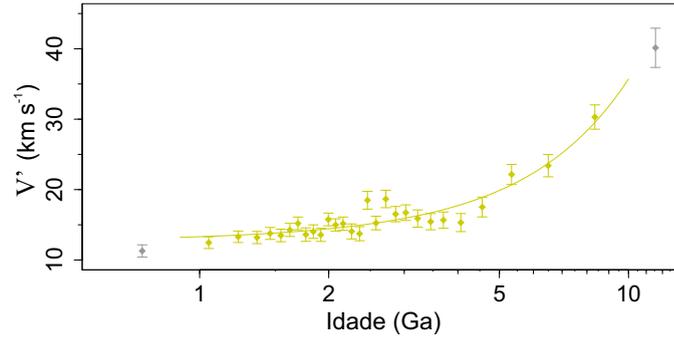


FIGURA 5.6:  $V' = -\langle V \rangle$  em função da idade obtido para os 30 grupos da Amostra A. O ajuste representado é feito sem considerar o primeiro e o último grupos.

A Figura 5.6 mostra os valores de  $V'$  obtido para cada um dos 30 grupos em função da idade. O ajuste obtido, também representado, foi feito excluindo o primeiro e o último grupos.

Um resultado importante que podemos tirar dessa expressão é que a média da distribuição da componente de velocidade heliocêntrica  $V$  prevista para estrelas com idade zero é de  $-12.5 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1}$ . Isso significa que a velocidade peculiar do Sol, realizada por uma distribuição hipotética de estrelas com idade zero, é:

$$V_{\odot} = 12.5 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1} \quad (5.30)$$

Este resultado apresenta concordância muito boa com o obtido por diversos autores em trabalhos publicados recentemente (ver Tabela 3.1). Devido a isto, e ao fato de que o ajuste da expressão para  $V'(t)$  é melhor que o ajuste para  $V_a(\sigma_U^2)$ , utilizamos diretamente a expressão obtida para  $V'(t)$  no cálculo de  $v_1$  e  $v_2$ .

### 5.3.4 Aplicando o Método 1

Para obtermos a função de densidade de probabilidade para a idade de uma estrela com base nas componentes de velocidade heliocêntrica da estrela ( $U$ ,  $V$  e  $W$ ) deve-se seguir os seguintes passos:

- Definir um conjunto de idades no intervalo de 0 a 14 Ga para os quais será calculado  $p(t|U, V, W)$ . Neste estudo utilizamos os valores de 0.1 a 14 Ga com intervalo de 0.1 Ga.
- Para cada idade  $t = t_0$ , obter os valores de  $\ell_v(t_0)$  e  $V'(t_0)$  utilizando as Equações 5.24 e 5.29.
- Utilizar os valores de  $\ell_v(t_0)$  e  $V'(t_0)$ , juntamente com o valor obtido para  $U_\odot$  ( $U_\odot = 9.8 \text{ km s}^{-1}$ ), para obter as componentes  $v_1$  e  $v_2$ , relativas a esta idade  $t_0$ , através das Equações 3.36a e 3.36b.
- Calcular os valores de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_W$  para cada idade  $t_0$  através das expressões:

$$\sigma_1(t_0) = 22.0 t_0^{0.33} \quad (5.31a)$$

$$\sigma_2(t_0) = 11.9 t_0^{0.42} \quad (5.31b)$$

$$\sigma_W(t_0) = 9.1 t_0^{0.48} \quad (5.31c)$$

- Obter a probabilidade  $p(t_0|U, V, W)$  para cada idade  $t = t_0$  através da expressão:

$$p(t_0|U, V, W) = [2 \pi \sigma_1^2(t_0) \sigma_2^2(t_0) \sigma_W^2(t_0)]^{-\frac{3}{2}} \cdot \exp \left\{ - \left[ \frac{v_1^2}{2 \sigma_1^2(t_0)} + \frac{v_2^2}{2 \sigma_2^2(t_0)} + \frac{(W + W_\odot)^2}{2 \sigma_W^2(t_0)} \right] \right\} \quad (5.32)$$

- Depois de calculados os valores de  $p(t|U, V, W)$  para todos os valores de  $t$  escolhidos no primeiro passo, obter a função de densidade de probabilidade a partir da normalização da função obtida  $p(t|U, V, W) \sim t$ :

$$f(t|U, V, W) = \frac{p(t|U, V, W)}{\sum_{i=1}^n p(t_i|U, V, W) \Delta t}, \quad (5.33)$$

onde  $\Delta t$  corresponde à diferença entre duas idades consecutivas no conjunto de idades escolhido no primeiro passo.

- A caracterização de uma idade individual pode ser feita tanto através da idade mais provável ( $t_{\text{MP}}$ ) quanto através da idade média ( $t_{\text{E}}$ ):

$$t_{\text{MP}}(U, V, W) = t_0 \quad \text{dado que} \quad (5.34)$$

$$f(t_0|U, V, W) = \max(f(t|U, V, W))$$

$$t_E(U, V, W) = \sum_{i=1}^n t_i f(t_i|U, V, W) \quad (5.35)$$

- Neste estudo, utilizaremos como estimativa de idade individual uma média ponderada entre a idade mais provável e a idade média, com peso 2 para a idade mais provável e 1 para a idade média. Veremos adiante no Capítulo 6 que as idades definidas dessa forma são adequadas quando comparadas às idades isocronais. Denominamos  $t^{(1)}$  as idades determinadas pelo Método 1.

$$t^{(1)} = \frac{2t_{MP}^{(1)} + t_E^{(1)}}{3} \quad (5.36)$$

## 5.4 Método 2: $p(t|e, U, W)$

Como vimos na Figura 5.1, a distribuição de excentricidades também varia com a idade estelar. Entre as estrelas mais velhas existe probabilidade maior de observarmos estrelas com maiores excentricidades. No método 1, invertemos essa relação de probabilidade para o caso das distribuições das componentes de velocidade. Neste método e no Método 3, fazemos o mesmo para a relação entre a distribuição das excentricidades e a idade.

No Método 2, utilizamos como variáveis conhecidas, no Teorema de Bayes, a excentricidade da órbita ( $e$ ) e as componentes de velocidade  $U$  e  $W$ . Não podemos utilizar as três componentes de velocidade pois a excentricidade é totalmente determinada pelas componentes  $U$ ,  $V$  e  $W$ , de forma que o termo da excentricidade que entraria na aplicação do Teorema de Bayes não acrescentaria nenhuma informação nova.

### 5.4.1 Teorema de Bayes para o Método 2

Vamos novamente aplicar sucessivamente o Teorema de Bayes considerando as variáveis conhecidas neste caso:  $e$ ,  $U$  e  $W$ . Começamos com:

$$p(t|W) \propto p(W|t) p(t) \quad (5.37)$$

Incluindo a componente de velocidade  $U$ , temos:

$$p(t|U, W) \propto p(U|W, t) p(t|W) \quad (5.38)$$

Considerando que as variáveis  $U$  e  $W$  são independentes e substituindo 5.37 em 5.38:

$$p(t|U, W) \propto p(U|t) p(W|t) p(t) \quad (5.39)$$

Incluindo também a excentricidade obtemos:

$$p(t|e, U, W) \propto p(e|U, W, t) p(t|U, W) \quad (5.40)$$

Como estamos interessados a princípio apenas em estrelas do disco, a excentricidade das órbitas depende em primeira ordem apenas das componentes  $U$  e  $V$ . Podemos então aproximar que a excentricidade é independente da componente  $W$ :  $p(e|U, W, t) = p(e|U, t)$ . Além disso, substituindo o valor obtido para  $p(t|U, W)$ , chegamos na expressão:

$$p(t|e, U, W) \propto p(e|U, t) p(U|t) p(W|t) p(t) \quad (5.41)$$

Novamente, consideramos uma distribuição uniforme para  $p(t)$  na forma:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq 14 \text{ Ga} \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (5.42)$$

As probabilidades  $p(U|t)$  e  $p(W|t)$  podem ser obtidas facilmente. Sabemos que podemos aproximar ambas as distribuições por gaussianas com parâmetros  $\mu_U = -U_\odot$  e  $\mu_W = -W_\odot$  e conhecemos as expressões que descrevem os desvios padrões em função da idade ( $\sigma_U(t)$  e  $\sigma_W(t)$ ). Utilizando os valores obtidos para estes parâmetros na Seção 5.3, temos:

$$p(U|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_U^2(t)}} \exp\left[-\frac{(U + U_\odot)^2}{2\sigma_U^2(t)}\right] \quad (5.43a)$$

$$p(W|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_W^2(t)}} \exp\left[-\frac{(W + W_\odot)^2}{2\sigma_W^2(t)}\right] \quad (5.43b)$$

onde:  $U_\odot = 9.8 \text{ km s}^{-1}$ ,  $W_\odot = 7.2 \text{ km s}^{-1}$ ,  $\sigma_U(t) = 21.2 t^{0.35} \text{ km s}^{-1}$  e  $\sigma_W(t) = 9.1 t^{0.48} \text{ km s}^{-1}$ .

O termo  $p(e|U, t)$  é muito mais difícil de obter. Para estimá-lo, precisamos conhecer a distribuição de excentricidades para um dado valor de  $U$  e uma dada idade  $t$ . Para obter este termo, começamos obtendo uma expressão para a excentricidade em função das componentes  $U$  e  $V$ .

Sabendo a relação  $e(U, V)$ , as relações  $U(v_1, v_2)$  e  $V(v_1, v_2)$  e as distribuições de  $v_1$  e  $v_2$  para uma dada idade, poderíamos em tese aplicar o Método do Jacobiano (que aplicamos anteriormente no Método 1) para obter a distribuição de excentricidades para esta dada idade. Entretanto, a abordagem não pode ser feita dessa forma, pois o Método do Jacobiano só pode ser aplicado para transformações bijetivas.

No caso do Método 1 a transformação de  $v_1$  e  $v_2$  para  $U$  e  $V$  é bijetiva: um dado par  $U$  e  $V$  corresponde sempre a um, e somente um, dado par  $v_1$  e  $v_2$ , e vice-versa. O mesmo não pode ser dito da transformação entre as componentes  $U$  e  $V$  e a excentricidade. Um dado par  $U$  e  $V$  leva a um, e somente um, valor de excentricidade, porém, um mesmo valor de excentricidade pode ser originado por diferentes valores de  $U$  e  $V$ . Dessa forma, mesmo conhecendo a distribuição em  $U$  e  $V$  não somos capazes de obter uma expressão analítica simples para a distribuição de excentricidade. Nas próximas seções, descrevemos os passos que seguimos para obter  $p(e|U, t)$ .

#### 5.4.2 Relação entre a excentricidade e as componentes $U$ e $V$

Para obter  $e(U, V)$ , encontramos primeiro a relação entre a excentricidade e as componentes  $U$  e  $V$  no caso de um potencial gravitacional  $\Phi$  na forma:

$$\Phi(r) = -\frac{\gamma}{r} \quad (5.44)$$

Este potencial é uma aproximação para o potencial da Galáxia e considera que a massa da Galáxia, interna ao raio orbital da estrela, encontra-se toda concentrada no centro de massa da Galáxia.

No Apêndice C, aplicamos o formalismo de Lagrange para obter a equação de movimento de uma estrela sujeita a este potencial. Descrevemos a posição da estrela em termos da distância  $r$  ao centro de massa da Galáxia e do ângulo  $\phi$  entre a posição da

estrela e o eixo principal de sua órbita. Provamos no Apêndice C que:

$$r(\phi) = \frac{L^2}{G \mathcal{M}_*^2 \mathcal{M}_G} \frac{1}{1 + e \cos(\phi - \delta)}, \text{ e} \quad (5.45a)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{m_* r^2} \quad (5.45b)$$

Neste caso,  $\mathcal{M}_*$  corresponde à massa da estrela,  $\mathcal{M}_G$  à massa total da Galáxia interna à órbita da estrela,  $L$  ao seu momento angular e  $\delta$  ao ângulo entre o eixo principal da órbita e um eixo de referência.

Nesse sistema de coordenadas, a componente de velocidade  $U_*$  corresponde ao oposto da velocidade radial da estrela. Já  $V_*$  é equivalente à diferença entre a velocidade tangencial da estrela e a velocidade tangencial que ela teria caso sua órbita fosse perfeitamente circular:

$$U_* = -\dot{r}(\phi) \quad (5.46a)$$

$$V_* = r \dot{\phi} - r \dot{\phi}_0, \quad (5.46b)$$

onde  $\dot{\phi}_0$  corresponde à velocidade angular que a estrela teria caso sua órbita fosse perfeitamente circular, com raio  $r$ .

Provamos, também no Apêndice C, que, seguindo essa definição, as componentes  $U_*$  e  $V_*$  são dadas por:

$$U_* = -\frac{G \mathcal{M}_* \mathcal{M}_G}{L} e \sin(\phi - \delta) \quad (5.47a)$$

$$V_* = \frac{G \mathcal{M}_* \mathcal{M}_G}{L} \left[ 1 + e \cos(\phi - \delta) - \sqrt{1 + e \cos(\phi - \delta)} \right] \quad (5.47b)$$

Também provamos que a expressão 5.47b, para  $e \cos(\phi - \delta) \ll 1$ , pode ser aproximada por:

$$V_* = \frac{G \mathcal{M}_* \mathcal{M}_G}{2L} e \cos(\phi - \delta) \quad (5.48)$$

Dessa forma, encontramos uma expressão para a excentricidade em função das componentes  $U$  e  $V$  substituindo  $L = \mathcal{M}_* R (V_* + \Theta_0)$ ,  $U_* = U + U_\odot$  e  $V_* = V + V_\odot$  na

expressão  $U_\star^2 + (2V_\star)^2$ :

$$e \propto (V + V_\odot + \Theta_0) \sqrt{(U + U_\odot)^2 + [2(V + V_\odot)]^2} \quad (5.49)$$

Como descrevemos com mais detalhes no apêndice C, utilizamos um software (Eureqa) que parte desta solução e busca, através de sucessivas tentativas (acrescentando constantes e combinações de potências de  $U$  e  $V$ ), a melhor solução para descrever a excentricidade em termos de  $U$  e  $V$  para os dados da Amostra A. A expressão obtida foi:

$$e = 2.98 \cdot 10^{-3} \sqrt{155 + 20.0U + 19.6V + U^2 + 1.95V^2} - 7.23 \cdot 10^{-4} \quad (5.50)$$

Esta expressão mostrou-se bastante adequada para determinar a excentricidade das estrelas da Amostra A, fornecendo resultados com diferença menor que 0.01, com relação à excentricidade presente no catálogo, em 98% dos casos.

### 5.4.3 Distribuição de estrelas no plano $eU$

Conhecendo a distribuição de estrelas no plano  $eU$  para uma dada idade ( $t_0$ ), podemos estimar a distribuição de excentricidades para um dado valor de  $U$  ( $U_0$ ) e idade  $t_0$ . A partir da distribuição de excentricidades para estes dados valores de  $U_0$  e  $t_0$  obtemos a probabilidade de que a excentricidade seja igual a um dado valor  $e_0$ :  $p(e_0|U_0, t_0)$ .

Para obter uma estimativa para a distribuição de estrelas no plano  $eU$  para uma dada idade  $t_0$ , simulamos uma amostra com grande número de estrelas no plano  $v_1v_2$ . Utilizando as relações conhecidas, calculamos os valores de  $e$  e  $U$  referentes a estas estrelas. Em seguida, utilizamos a distribuição em  $e$  e  $U$  simuladas para estimar o mapa de densidade de estrelas no plano  $eU$ . Os passos que seguimos para obter o mapa de densidade são:

- Conhecemos a expressão que descreve a distribuição das componentes  $v_1$  e  $v_2$  para qualquer idade  $t$ : distribuição normal multivariacional, com correlação nula entre as variáveis, centrada na origem e com desvios padrões  $\sigma_1(t)$  e  $\sigma_2(t)$  obtidos na

Seção 5.3.2. Para uma dada idade  $t_0$ , calculamos  $\sigma_1(t_0)$  e  $\sigma_2(t_0)$ . Em seguida, geramos uma amostra com 250 000 estrelas seguindo essa distribuição multivariacional com os desvios padrões calculados.

- Calculamos o desvio do vértice e o valor de  $V'$  para a idade  $t_0$  por meio das Equações 5.24 e 5.29 (obtidas na Seção 5.3):
- Calculamos as componentes  $U$  e  $V$  referentes aos valores de  $v_1$  e  $v_2$  de cada estrela (no caso desta idade  $t_0$ ) através das Equações 3.37a e 3.37b (obtidas na Seção 3.5.1):
- Calculamos a excentricidade destas 250 000 estrelas através da expressão obtida para a excentricidade em termos das componentes  $U$  e  $V$  (Equação 5.50)
- Utilizamos a distribuição destas 250 000 estrelas (que seguem a distribuição de  $v_1$  e  $v_2$  para a idade  $t_0$ ) no plano  $eU$  para obter um mapa de densidade de estrelas em função de  $e$  e  $U$  para esta idade  $t_0$ . Para isso, utilizamos o método de estimativa de densidade por kernel bidimensional<sup>2</sup>. Utilizamos a função `kde2d` da biblioteca MASS (Venables & Ripley, 2002) da ferramenta de análise estatística **R** (R Core Team, 2014).
- Um corte neste mapa de densidade em um dado valor de  $U = U_0$  nos dá a distribuição de excentricidades para estrelas com idade  $t_0$  e componente de velocidade  $U_0$ . Normalizando esta distribuição, obtemos a função de densidade de probabilidade da excentricidade,  $p(e|U, t)$ , para dados valores de  $U$  e  $t$ . O valor de  $p(e_0|U_0, t_0)$  corresponde então à probabilidade de que uma estrela com componente de velocidade  $U = U_0$  e idade  $t = t_0$  possua excentricidade  $e = e_0$ , que é justamente o termo que faltava obter  $p(t = t_0|e = e_0, U = U_0, W = W_0)$  na aplicação do teorema de Bayes.

#### 5.4.3.1 Exemplo: distribuição no plano $eU$ para $t = 2$ Ga

Como exemplo, vamos obter mapa de densidade de estrelas no plano  $eU$  para estrelas com idade igual a 2 bilhões de anos.

<sup>2</sup>O método de estimativa de densidade por kernel é um método não paramétrico para estimar a função de densidade de probabilidade de uma dada distribuição a partir de uma amostra finita. Cada ponto é substituído por uma distribuição normal contínua (neste caso, bidimensional).

Primeiro calculamos os valores de  $\ell_v$ ,  $V'$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  para estrelas com idade igual a 2 bilhões de anos:  $\ell_v(2) = 11.2^\circ$ ,  $V'(2) = 14.44 \text{ km s}^{-1}$ ,  $\sigma_1(2) = 27.65 \text{ km s}^{-1}$  e  $\sigma_2(2) = 15.92 \text{ km s}^{-1}$ .

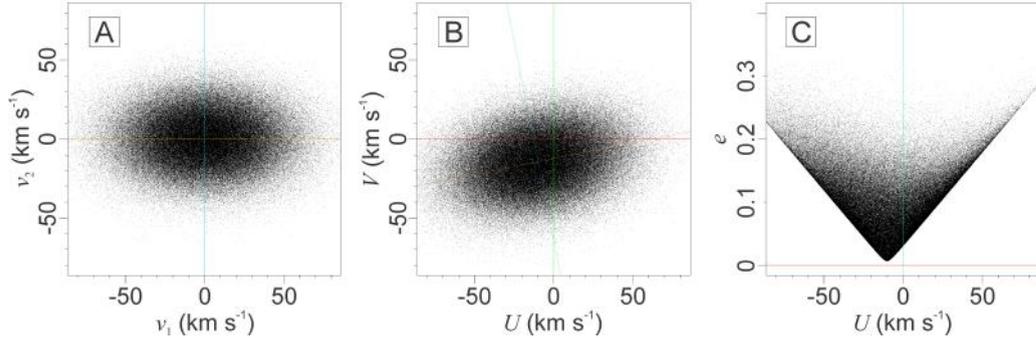


FIGURA 5.7: Distribuição das 250 000 estrelas simuladas de acordo com os parâmetros referentes às distribuições de  $v_1$  e  $v_2$  para estrelas com idade igual a 2 bilhões de anos. Painel A: distribuição das estrelas no plano  $v_1v_2$ , Painel B: distribuição das estrelas no plano  $UV$  e Painel C: distribuição das estrelas no plano  $eU$

Como descrito anteriormente, simulamos uma amostra de 250 000 estrelas. A distribuição destas estrelas se encontra representada no Painel A da Figura 5.7. Esta distribuição corresponde à que esperaríamos obter caso pudéssemos observar um grande número de estrelas na Vizinhança Solar com idade igual a 2 bilhões de anos.

Utilizamos as Equações 3.37a e 3.37b para obter a distribuição das estrelas da amostra simulada no plano  $UV$ , representada no Painel B da Figura 5.7.

Calculamos as excentricidades das 250 000 estrelas da amostra simulada a partir da Equação 5.50. A distribuição das estrelas no plano  $eU$  encontra-se representada no Painel C da Figura 5.7.

Utilizando o estimador de densidade por kernel bidimensional (função `kde2d` da biblioteca `MASS` do software de análise estatística `R`) para os dados obtidos para  $e$  e  $U$ , obtemos o mapa de densidade de estrelas no plano  $eU$  para a idade de 2 bilhões de anos.

A Figura 5.8 mostra o resultado obtido para o mapa de densidade no plano  $eU$  para uma distribuição de estrelas com idade igual a 2 bilhões de anos. Entre as principais características dessa distribuição, temos o fato de que algumas regiões do plano  $eU$  não podem ser povoadas por estrelas. Isso ocorre devido a que valores baixos de excentricidade não podem existir para valores altos de  $U$  (por definição, se  $U_* \neq 0$  a excentricidade não pode ser nula, já que a órbita não é circular). Outra característica importante é que a distribuição não é perfeitamente simétrica em torno de  $\langle U \rangle$ . Isso ocorre devido

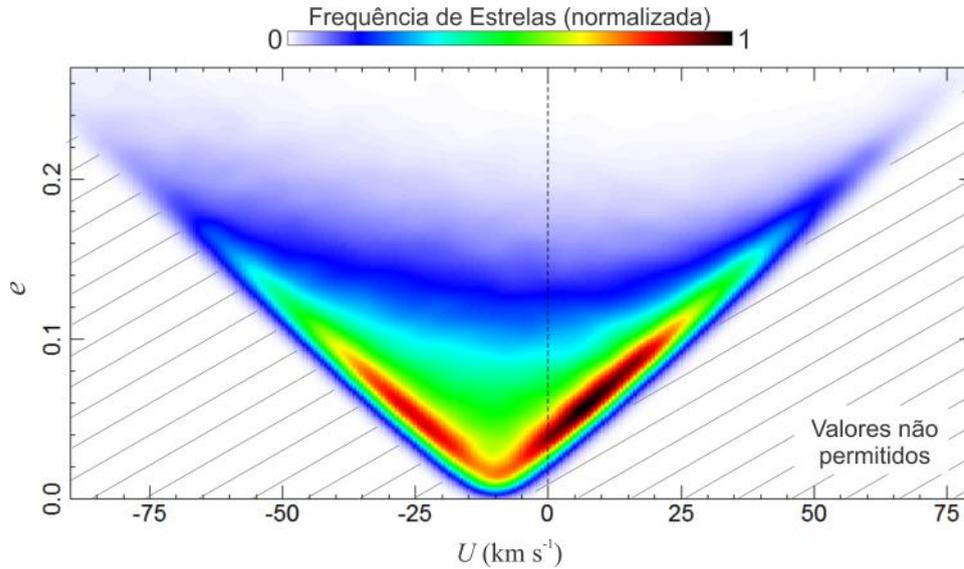


FIGURA 5.8: Mapa de densidade de estrelas no plano  $eU$  obtido para uma distribuição de estrelas com idade igual a 2 bilhões de anos. Os valores foram normalizados pelo valor máximo.

ao desvio do vértice, que leva a uma distribuição não simétrica das componentes  $U$  e  $V$  com respeito aos eixos  $\Pi$  e  $\Theta$ .

Na próxima seção veremos com detalhes como obtemos um corte do mapa de densidade obtido para um valor qualquer de  $U$ .

#### 5.4.4 Corte do mapa de densidade em um dado valor de $U$

Ao construirmos o mapa de densidade no plano  $eU$  através da aplicação da função `kde2d`, obtemos uma matriz  $300 \times 300$  (que chamaremos matriz  $\mathbf{F}$ , na qual os elementos correspondem ao valor da densidade de estrelas para valores de  $U$  (linhas  $i$  da matriz) uniformemente distribuídos entre  $-300$  e  $300$  e valores de  $e$  (colunas  $j$  da matriz) uniformemente distribuídos entre  $0$  e  $0.8$ . Por exemplo, o elemento  $F_{156,30}$  corresponde à densidade de estrelas com velocidade  $U = +12$  (linha  $i = 156$ ) e excentricidade  $e = 0.08$  (coluna  $j = 30$ ).

Para obter a densidade de estrelas para um valor de  $U = U_0$  qualquer, seguimos o seguinte procedimento: Denominamos “linha  $m$ ” aquela correspondente ao valor de  $U$  mais próximo de  $U_0$ . Assim, a densidade de estrelas com excentricidade  $e_j$  (referentes aos valores da coluna  $j$  da matriz  $\mathbf{F}$ ) para os 5 valores de  $U$  mais próximos de  $U_0$  correspondem aos elementos:  $\mathbf{F}_{(m-2),j}$ ,  $\mathbf{F}_{(m-1),j}$ ,  $\mathbf{F}_{m,j}$ ,  $\mathbf{F}_{(m+1),j}$  e  $\mathbf{F}_{(m+2),j}$ . Interpolando

estes valores (através do ajuste de uma spline cúbica), obtemos a densidade de estrelas com excentricidade  $e_j$  e componente de velocidade  $U_0$ .

Repetimos o passo anterior para todas as colunas da matriz de forma a obter a densidade de estrelas com componente de velocidade  $U_0$  para cada um dos 300 valores de excentricidade entre 0 e 0.8. A função de densidade de probabilidade da excentricidade para este dado valor de  $U_0$  (e idade  $t_0$  usada na construção do mapa de densidade no plano  $eU$ ) é obtida a partir do ajuste de uma spline cúbica utilizando a densidade obtida para cada valor de  $e_j$  e, posteriormente, normalizando a função obtida.

O valor da função, para um dado valor de  $e = e_0$  corresponde, então, à probabilidade de que uma estrela possua excentricidade  $e_0$ , dado que sua componente de velocidade  $U$  é  $U_0$  e sua idade é  $t_0$ .

Como exemplo, obtivemos os cortes em  $U = -80 \text{ km s}^{-1}$ ,  $U = -60 \text{ km s}^{-1}$ ,  $U = -30 \text{ km s}^{-1}$ ,  $U = 0 \text{ km s}^{-1}$ ,  $U = 30 \text{ km s}^{-1}$  e  $U = 60 \text{ km s}^{-1}$  no mapa de densidade obtido para a idade de 2 bilhões de anos. As funções de densidade de probabilidade para a excentricidade referentes a cada um destes valores de  $U$  estão representadas na Figura 5.9.

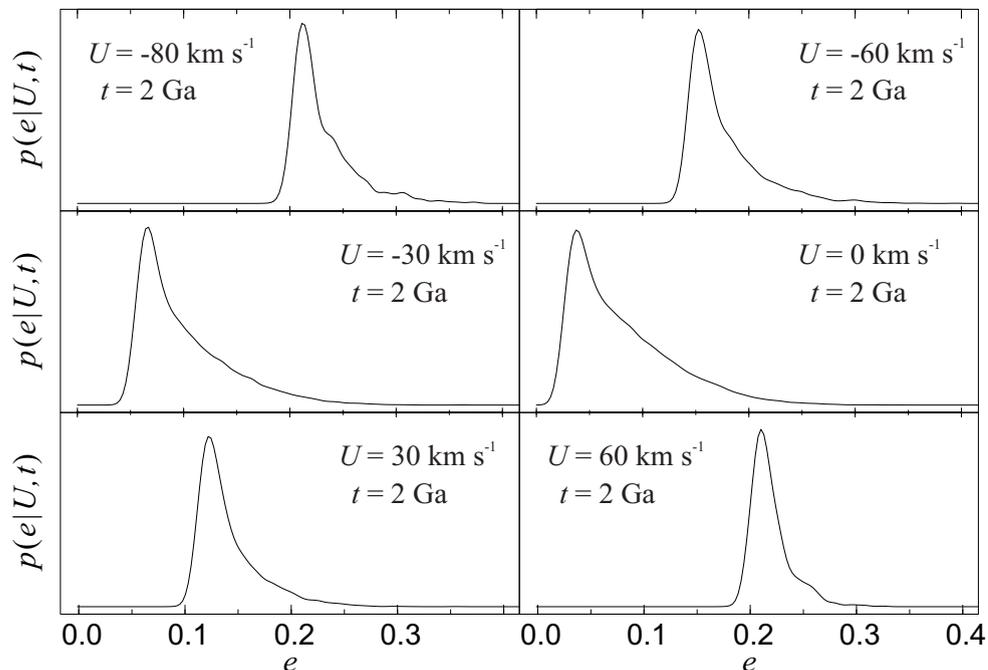


FIGURA 5.9: Funções de densidade normalizadas obtidas para a excentricidade, para diferentes valores de  $U$  e idade igual a 2 bilhões de anos.

Analisando as funções obtidas vemos que, neste caso, estrelas com velocidade  $U$  mais próximas da média da distribuição de  $U$  (que corresponde a  $U_{\star} = 0$ ) tem probabilidade maior de terem excentricidades mais baixas. Usamos a função de densidade obtida para uma dada idade para obter a probabilidade de que uma estrela tenha excentricidade  $e = e_0$  dados os valores de  $U$  e  $t$ .

### 5.4.5 Mapas de densidade

Como o custo computacional para produzir um mapa de densidade é muito elevado (cada mapa envolve a simulação de uma distribuição com 250 000 estrelas), não geramos os mapas de densidade cada vez que queremos obter uma idade.

Para tornar o método viável, produzimos inicialmente os mapas de densidade para um conjunto de idades previamente estabelecidos, seguindo os passos descritos acima. Depois, para obter a função de densidade de probabilidade  $p(t|e, U, W) \sim t$ , estimamos o valor de  $p(t = t_0|e, U, W)$  para todas as idades  $t_0$  para as quais produzimos os mapas de densidade.

Neste estudo, produzimos mapas de densidade para a idade  $t = 0.1$  Ga e para as idades  $t = \{0.5, 1, 1.5, 2, \dots, 13.5, 14\}$  Ga.

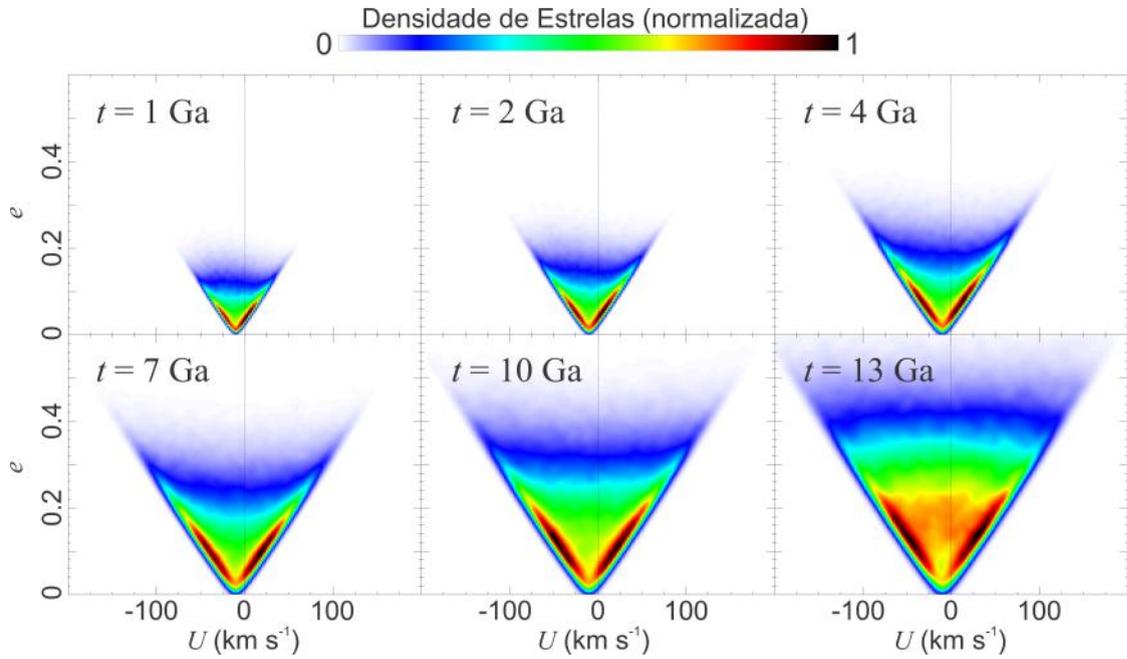
A Figura 5.10 apresenta alguns exemplos dos mapas de densidade obtidos. Salvamos estes mapas e os carregamos sempre que aplicamos o Método 2, não sendo necessário gerá-los novamente.

### 5.4.6 Aplicando o Método 2

Vamos agora sumarizar os passos que descrevemos nesta seção e mostrar como o Método 2 é aplicado para determinar a função de densidade de probabilidade para a idade de uma estrela e como é feita a caracterização de uma idade individual. Os passos que devem ser seguidos são:

- Primeiramente, devemos determinar o conjunto de idades  $t$  para os quais iremos obter  $p(t|e = e_0, U = U_0, W = W_0)$ . Como neste método precisamos utilizar os mapas de densidade no plano  $eU$  previamente gerados, só podemos utilizar as

FIGURA 5.10: Mapas de densidade de estrelas no plano  $eU$  para estrelas com idades de 1 Ga, 2 Ga, 4 Ga, 7 Ga, 10 Ga e 13 Ga.



idades para as quais possuímos estes mapas. Neste estudo, utilizamos as idades  $t = \{0.5, 1, 1.5, 2, \dots, 13.5, 14\}$  Ga e a idade  $t = 0.1$  Ga.

- Para cada idade  $t_0$  escolhida no passo anterior, obtemos os valores de  $\sigma_U(t_0)$  e  $\sigma_W(t_0)$  através das expressões obtidas na Seção 5.3.2:

$$\sigma_U(t_0) = 21.2 t_0^{0.35} \quad (5.51a)$$

$$\sigma_W(t_0) = 9.1 t_0^{0.48} \quad (5.51b)$$

- Utilizamos os valores de  $\sigma_U(t_0)$  e  $\sigma_W(t_0)$ , juntamente com os valores obtidos para  $U_\odot$  e  $W_\odot$  na Seção 5.3.3, para obter  $p(U_0|t_0)$  e  $p(W_0|t_0)$  através das Equações 5.43a e 5.43b.
- Carregamos o mapa de densidade de estrelas no plano  $eU$  para a idade  $t_0$ . Obtemos a distribuição de excentricidades para a componente  $U = U_0$  e idade  $t = t_0$  através de um corte no mapa no valor de  $U = U_0$  (como descrito na Seção 5.4.4).
- Obtemos a probabilidade de que a estrela possua a excentricidade conhecida ( $e_0$ ) dado o valor conhecido da componente  $U$  ( $U_0$ ) e a idade  $t_0$  através da interpolação dos valores obtidos para  $p(e|U_0, t_0)$ . Assim obtemos  $p(e = e_0|U = U_0, t = t_0)$ .

- Calculamos  $p(t = t_0|e = e_0, U = U_0, W = W_0) \propto p(e_0|U_0, t_0) p(U_0|t_0) p(W_0|t_0) p(t_0)$  para todas as idades  $t_0$  escolhidas no passo 1. Ajustamos uma spline e normalizamos o resultado obtido para obter a função de densidade de probabilidade  $f(t|e = e_0, U = U_0, W = W_0)$ .
- Assim como no Método 1, obtemos a idade mais provável e a idade esperada a partir da função de densidade de probabilidade:

$$t_{\text{MP}}(e, U, W) = t_0 \quad \text{dado que} \quad (5.52)$$

$$f(t_0|e, U, W) = \max(f(t|e, U, W))$$

$$t_{\text{E}}(e, U, W) = \sum_{i=1}^n t_i f(t_i|e, U, W) \quad (5.53)$$

- Novamente caracterizamos a idade individual como uma média ponderada das idades mais provável e esperada obtidas:

$$t^{(2)} = \frac{2t_{\text{MP}}^{(2)} + t_{\text{E}}^{(2)}}{3} \quad (5.54)$$

Mesmo utilizando os mapas de densidade previamente obtidos, este método é muito mais custoso computacionalmente do que o Método 1. Isso deve-se às diversas interpolações por splines cúbicas.

## 5.5 Método 3: $p(t|e, V, W)$

O Método 3 é bastante similar ao Método 2. A única diferença, é que utilizamos a componente de velocidade  $V$  no lugar da componente  $U$ .

A expressão que obtemos para a aplicação do Teorema de Bayes neste caso é:

$$p(t|e, V, W) \propto p(e|V, t) p(V|t) p(W|t) p(t) \quad (5.55)$$

Novamente, as probabilidades  $p(V|t)$  e  $p(W|t)$  são determinadas pela aproximação das distribuições de  $V$  e  $W$  como gaussianas. A expressão que descreve os desvios padrões em função da idade, a média de  $V$  em função da idade e a componente  $W$  da

velocidade do Sol foram obtidas na Seção 5.3. Para uma dada idade  $t$ , as probabilidades  $p(V|t)$  e  $p(W|t)$  são dadas por:

$$p(V|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_V^2(t)}} \exp\left[-\frac{(V + V'(t))^2}{2\sigma_V^2(t)}\right] \quad (5.56a)$$

$$p(W|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_W^2(t)}} \exp\left[-\frac{(W + W_\odot)^2}{2\sigma_W^2(t)}\right] \quad (5.56b)$$

Consideramos a probabilidade *a priori*,  $p(t)$ , como:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq 14 \text{ Ga} \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (5.57)$$

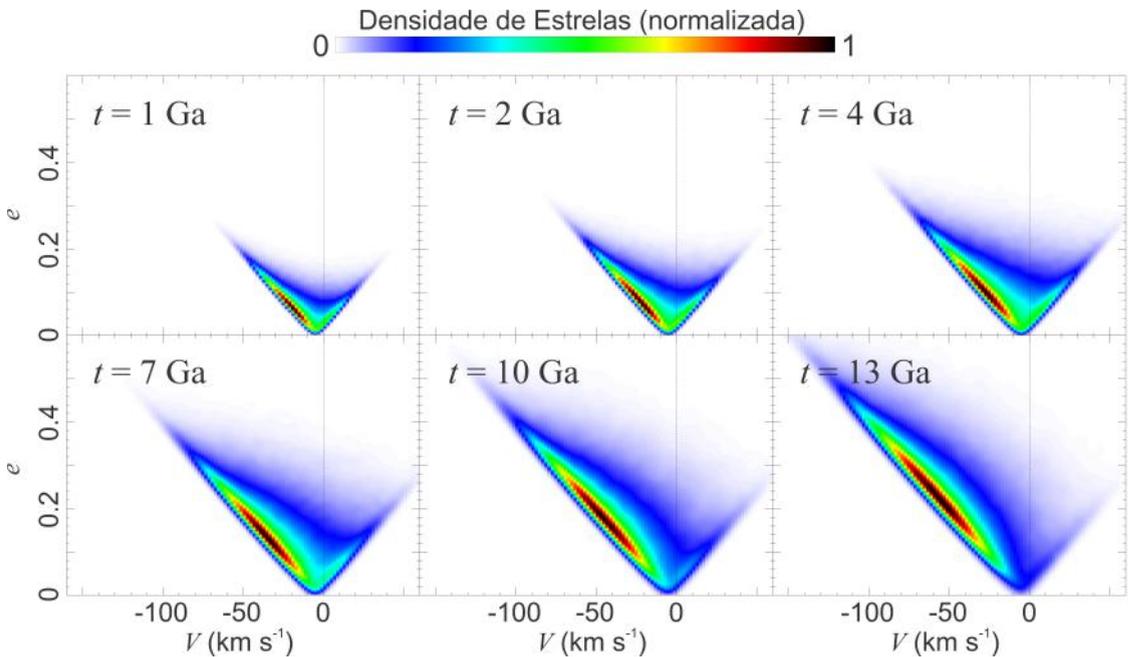


FIGURA 5.11: Mapas de densidade no plano  $eV$  para estrelas com idades de 1 Ga, 2 Ga, 4 Ga, 7 Ga, 10 Ga e 13 Ga. Nestes casos existe uma assimetria muito mais acentuada que a observada na distribuição no plano  $eU$  (Figura 5.10), que é causada pela deriva assimétrica.

Obtemos  $p(e|V, t)$  de forma similar a  $p(e|U, t)$ , porém com os mapas de densidade obtidos para o plano  $eV$ . Construimos os mapas de densidade no plano  $eV$  seguindo os mesmos passos estabelecidos para construir os mapas de densidade no plano  $eU$ . Obtivemos os mapas para a idade  $t = 0.1$  Ga e para as idades  $t = \{0.5, 1, 1.5, 2, \dots, 13.5, 14\}$  Ga. A Figura 5.11 mostra alguns exemplos dos mapas de densidade obtidos.

Neste caso, a distribuição apresenta uma assimetria mais acentuada que a observada na distribuição no plano  $eU$ . Isso ocorre devido a deriva assimétrica: em média, as estrelas tendem a ter uma velocidade  $V$  menor que a velocidade tangencial de uma órbita circular.

Como nos métodos anteriores, caracterizamos as idades individuais a partir da idade mais provável e da idade esperada obtidas:

$$t_{\text{MP}}^{(3)}(e, V, W) = t_0 \quad \text{dado que} \quad (5.58)$$

$$f(t_0|e, V, W) = \max(f(t|e, V, W))$$

$$t_{\text{E}}^{(3)}(e, V, W) = \sum_{i=1}^n t_i f(t_i|e, V, W) \quad (5.59)$$

E definimos a idade individual da estrela através da expressão:

$$t^{(3)} = \frac{2t_{\text{MP}}^{(3)} + t_{\text{E}}^{(3)}}{3} \quad (5.60)$$

## Capítulo 6

# Resultados

No capítulo anterior, desenvolvemos três métodos capazes de inferir a função de densidade de probabilidade de idade para estrelas do disco, com base apenas em suas velocidades heliocêntricas  $U$ ,  $V$  e  $W$  e na excentricidade de suas órbitas.

A função de densidade de probabilidade nos permite caracterizar idades individuais através da idade mais provável, idade mediana e idade esperada. Veremos que definindo a idade como uma média ponderada entre a idade mais provável (peso 2) e a idade esperada (peso 1) somos capazes de obter uma distribuição de idades para estrelas da Amostra A em ótimo acordo com as idades obtidas pelo método das isócronas.

Na próxima seção, determinamos as idades das estrelas da Amostra A utilizando os três métodos cinemáticos que desenvolvemos no Capítulo 5. Utilizamos as idades isocronais destas estrelas, determinadas por Casagrande et al. (2011), para comparar a distribuição das idades das estrelas na amostra com as distribuições obtidas através dos métodos aqui desenvolvido. Analisamos também a relação idade–metalicidade utilizando tanto as idades isocronais quanto as idades cinemáticas e comparamos os resultados.

### 6.1 Idades cinemáticas das estrelas da Amostra A

Aplicamos os três métodos cinemáticos para determinar as idades das estrelas da Amostra A. A Figura 6.1 mostra as funções de densidade de probabilidade obtidas para as 6 primeiras estrelas da Amostra A. Os valores de  $U$ ,  $V$ ,  $W$  e  $e$  utilizados na aplicação dos

TABELA 6.1: Valores de  $U$ ,  $V$ ,  $W$  e  $e$  usados na aplicação dos métodos cinemáticos e idades mais provável ( $t_{MP}$ ) e esperada ( $t_E$ ) obtidas por cada método para as seis primeiras estrelas da Amostra A.

Designação	$U$	$V$	$W$	$e$	$t_{MP}^{(1)}$	$t_E^{(1)}$	$t_{MP}^{(2)}$	$t_E^{(2)}$	$t_{MP}^{(3)}$	$t_E^{(3)}$
HIP 420	40	-22	-16	0.16	3.5	6.49	2.74	5.74	3.57	6.27
HIP 490	-10	-21	-1	0.06	0.3	3.09	0.29	3.24	0.59	3.31
HIP 530	-22	-46	3	0.17	4.4	7.12	2.54	6.6	3.32	6.76
HIP 529	-9	-1	-15	0.02	0.5	3.28	0.5	3.16	0.59	2.77
HIP 547	37	-31	-7	0.17	4.3	6.94	2.14	6.24	3.49	6.43
HIP 556	-4	-50	-23	0.18	7.6	8.12	5.21	7.44	6.77	7.84

métodos e as idades obtidas (idade mais provável  $t_{MP}$  e idade esperada  $t_E$ ) são dados na Tabela 6.1

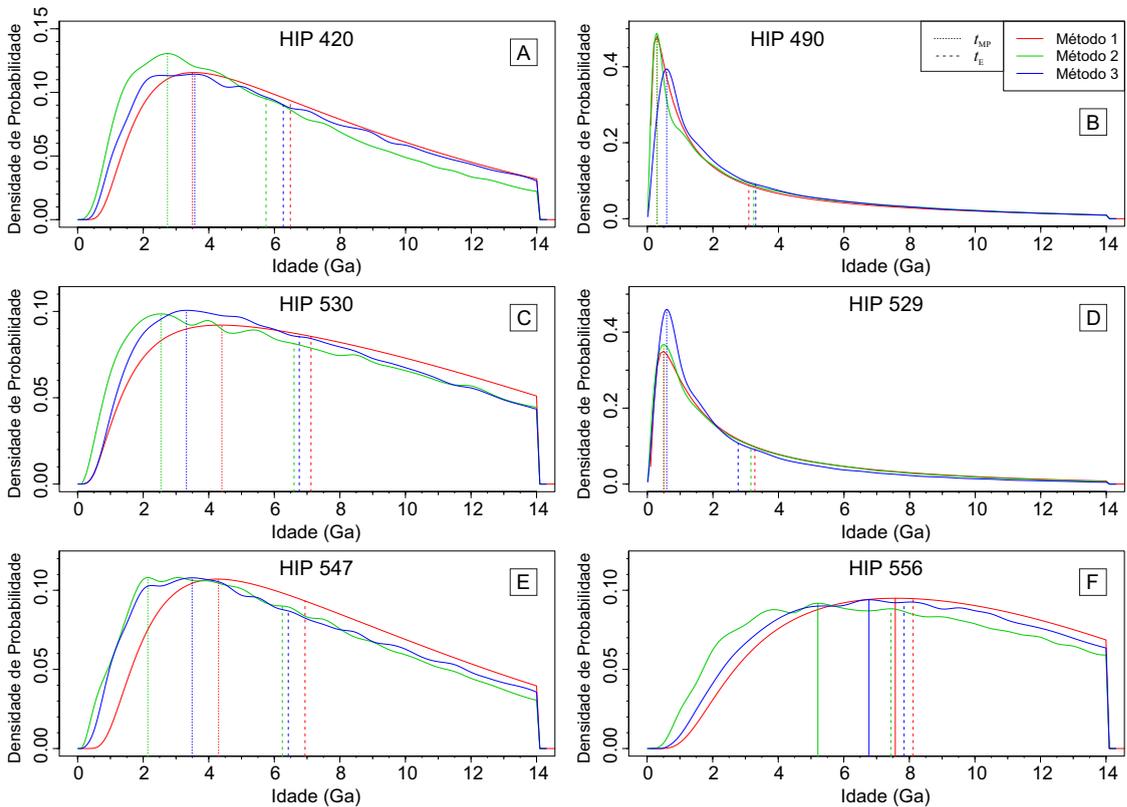


FIGURA 6.1: Funções de densidade de probabilidade de idade obtidas para as seis primeiras estrelas da Amostra A, utilizando os três métodos desenvolvidos neste estudo.

Vemos que os três métodos que apresentamos no Capítulo 5 fornecem funções de densidade de probabilidade muito semelhantes em todos os casos. Também fica claro que nem sempre existe uma idade mais provável claramente destacada, fazendo com que as idades obtidas apresentem grandes incertezas.

Obtivemos as funções de densidade de probabilidade para as 9102 estrelas da Amostra A. A Tabela D.1, no Apêndice D contém os resultados obtidos para as 50 primeiras estrelas da Amostra A. A tabela completa somente se encontrará disponível eletronicamente em endereço a ser definido num momento oportuno.  $t_{MP}$  e  $t_E$  correspondem às idades mais provável e esperada, respectivamente.  $t_5$ ,  $t_{16}$ ,  $t_{50}$ ,  $t_{84}$  e  $t_{95}$  são os percentis de 5%, 16%, 50%, 84% e 95%, respectivamente. Os índices (1), (2) e (3) indicam o método utilizado para determinar a idade.

## 6.2 Caracterização das incertezas individuais

Utilizaremos os valores obtidos de  $t_5$ ,  $t_{16}$ ,  $t_{84}$  e  $t_{95}$  para estimar a incerteza na determinação de cada idade. Caso a função de densidade de probabilidade correspondesse a uma gaussiana, a diferença  $t_{84} - t_{16}$  corresponderia a aproximadamente  $1\sigma$  e a diferença  $t_{95} - t_5$  corresponderia a  $2\sigma$ .

Escolhemos uma expressão para a incerteza de uma idade individual ( $\delta_t$ ) que satisfaz  $\delta_t = 1\sigma$  no caso de uma função de densidade de probabilidade gaussiana. Definimos  $\delta_t$  como:

$$\delta_t = \frac{1}{2} \left[ (t_{84} - t_{16}) + \frac{(t_{95} - t_5)}{2} \right] \quad (6.1)$$

Calculamos os valores de  $\delta_t$  para todas as estrelas da Amostra A utilizando os valores de  $t_5$ ,  $t_{16}$ ,  $t_{84}$  e  $t_{95}$  obtidos a partir dos três métodos cinemáticos. As distribuições das incertezas individuais obtidas utilizando cada um dos três métodos encontra-se representada na Figura 6.2.

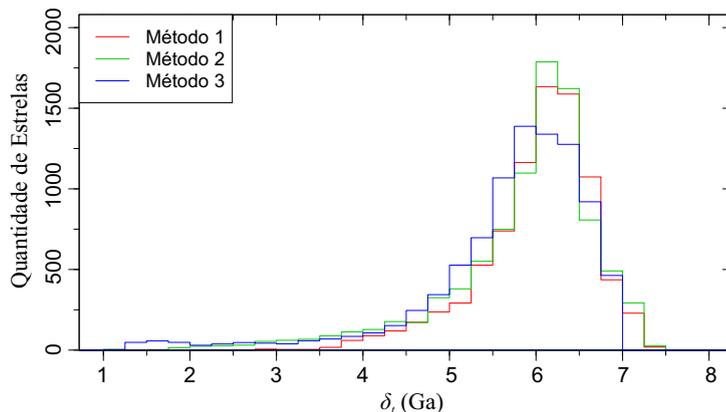


FIGURA 6.2: Distribuição das incertezas individuais das idades das estrelas da Amostra A obtidas utilizando os três métodos de idades cinemáticas.

No caso do Método 1, a média das incertezas individuais obtidas foi de cerca de 6.0 Ga. No caso do Método 2 a média foi de aproximadamente 5.8 Ga e no caso do Método 3 de aproximadamente 5.7 Ga.

Estes valores de incerteza são mais altos que os obtidos pelos métodos tradicionalmente aplicados. Entretanto, o método cinemático possui a vantagem de poder ser aplicado para qualquer estrela do disco que possa ter sua velocidade espacial determinada, permitindo a determinação de idades de estrelas para as quais os outros métodos não são aplicáveis (como o caso das estrelas anãs de baixa massa).

Como as incertezas são muito altas, consideramos que não é adequado utilizar as idades cinemáticas para estudar as estrelas individualmente. Porém, as idades obtidas podem ser utilizadas em estudos estatísticos, como, por exemplo, para determinar a distribuição das idades das estrelas de uma dada amostra, ou determinar a relação idade–metalicidade.

### 6.3 Comparação com as idades isocronais

A idade individual foi inferida a partir das funções de densidade de probabilidade obtidas conforme descrito no Capítulo 5 (Equações 5.36, 5.54 e 5.60).

Calculamos a idade cinemática das 9102 estrelas da Amostra A utilizando os três métodos que descrevemos. A Amostra A contém também as idades das estrelas determinadas pelo método das isócronas por Casagrande et al. (2011), o que nos permite testar a confiabilidade do método cinemático.

O método aplicado por Casagrande et al. (2011) também obtém a idade isocronal através da caracterização de uma idade individual com base em uma função de densidade de probabilidade. Para podermos comparar as idades obtidas pelo método cinemático com as idades isocronais, definimos a idade isocronal ( $t_{iso}$ ) da estrela da mesma forma como definimos a idade cinemática. Para isso, utilizamos as idades mais provável e esperada da função de densidade de probabilidade obtida por Casagrande et al. (2011) utilizando o conjunto de isócronas de BaSTI (respectivamente  $t_{MP}^B$  e  $t_E^B$ ):

$$t_{iso} = \frac{2t_{MP}^B + t_E^B}{3} \quad (6.2)$$

A Figura 6.3 apresenta as distribuições das diferenças entre as idades isocronais e as idades cinemáticas obtidas através de cada um dos três métodos cinemáticos.

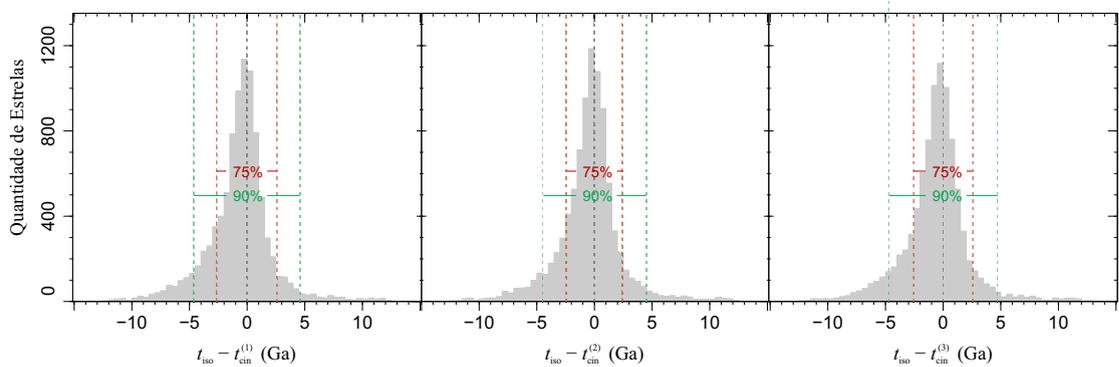


FIGURA 6.3: Distribuição da diferença entre a idade obtida pelo método cinemático (para cada um dos três métodos) e a idade isocronal das estrelas da Amostra A. 75% das estrelas encontram-se entre as barras tracejadas vermelhas e 90% entre as verdes.

Vemos que, em todos os casos, o pico da distribuição da diferença entre as idades encontra-se bem próximo de zero. Isso significa que, em média, as idades obtidas estão em acordo com as idades isocronais. A quantidade de estrelas à esquerda da origem é ligeiramente superior à quantidade de estrelas à direita, indicando que é possível que o método cinemático esteja superestimando a idade de algumas estrelas.

No caso do Método 1, 75% das estrelas apresentam uma diferença entre as idades menor que 2.6 Ga e em 90% dos casos a diferença é menor que 4.7 Ga. Com relação às idades cinemáticas obtidas pelo Método 2, 75% apresentam diferença menor que 2.45 Ga em relação às idades isocronais e 90% apresentam diferença menor que 4.5 Ga. Já no caso do Método 3, as diferenças são menores que 2.55 Ga em 75% dos casos e menores que 4.7 Ga em 90% dos casos.

Considerando que as incertezas do método cinemático para idades individuais são bastante altas (por volta de 6 Ga) e que as incertezas individuais do método das isocronas frequentemente ultrapassam  $\pm 1$  Ga, as diferenças observadas já eram esperadas.

## 6.4 Comparação entre as idades cinemáticas

Para verificar se os 3 métodos cinemáticos são coerentes entre si, comparamos as idades obtidas pelos três métodos. A Figura 6.4 mostra a distribuição das diferenças entre as idades obtidas pelos dois métodos.

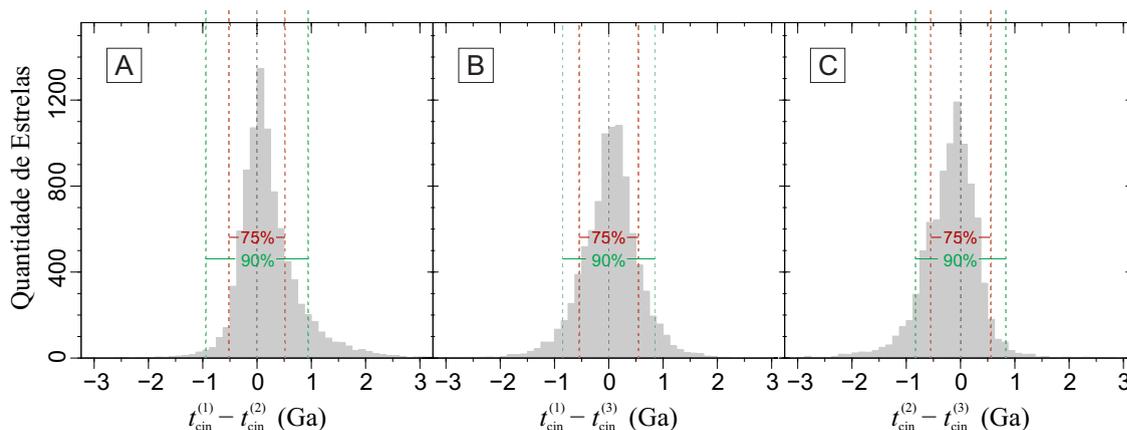


FIGURA 6.4: Distribuição das diferenças entre as idades obtidas pelos três métodos cinemáticos. 75% das estrelas encontram-se entre as barras tracejadas vermelhas e 90% entre as verdes.

No painel A encontra-se representada a distribuição das diferenças entre as idades  $t_{\text{cin}}^{(1)}$  e  $t_{\text{cin}}^{(2)}$ . A média das diferenças é bastante próxima de zero (0.21 Ga) e as diferenças são em geral menores que 1.5 Ga. Para 75% das idades obtidas, a diferenças entre as idades obtidas pelo Método 1 e pelo Método 2 são menores que 0.52 Ga e para 90% são menores que 0.95 Ga. É possível perceber uma assimetria na distribuição, mostrando que o Método 1 fornece idades ligeiramente maiores que as determinadas pelo Método 2.

A distribuição das diferenças entre as idades obtidas pelos Métodos 1 e 3 encontra-se representada no painel B. Novamente a média é bastante próxima de zero, correspondendo a 0.03 Ga. Neste caso, 75% das diferenças são menores que 0.55 Ga e 90% são menores que 0.85 Ga.

Por fim, o painel C apresenta a distribuição das diferenças entre as idades cinemáticas obtidas pelos Métodos 2 e 3. A média das diferenças é de  $-0.19$  Ga, sendo novamente bastante próxima de zero. As diferenças são menores que 0.55 Ga para 75% das estrelas e menores que 0.83 Ga para 90% das estrelas. Novamente é possível perceber uma assimetria na distribuição, causada pelo fato de o Método 2 fornecer idades pouco menores que as fornecidas pelo Método 3.

Como as diferenças observadas são muito baixas, sendo menores que as incertezas individuais estimadas, podemos concluir que as idades obtidas através dos três métodos cinemáticos que desenvolvemos são bastante coerentes entre si.

## 6.5 Distribuição de idades

A Figura 6.5 mostra a distribuição de idades cinemáticas obtidas utilizando cada um dos três métodos apresentados. Também representada em cada painel se encontra a distribuição de idades isocronais das estrelas da Amostra A. O painel inferior direito utiliza as médias das idades cinemáticas determinadas pelos três métodos.

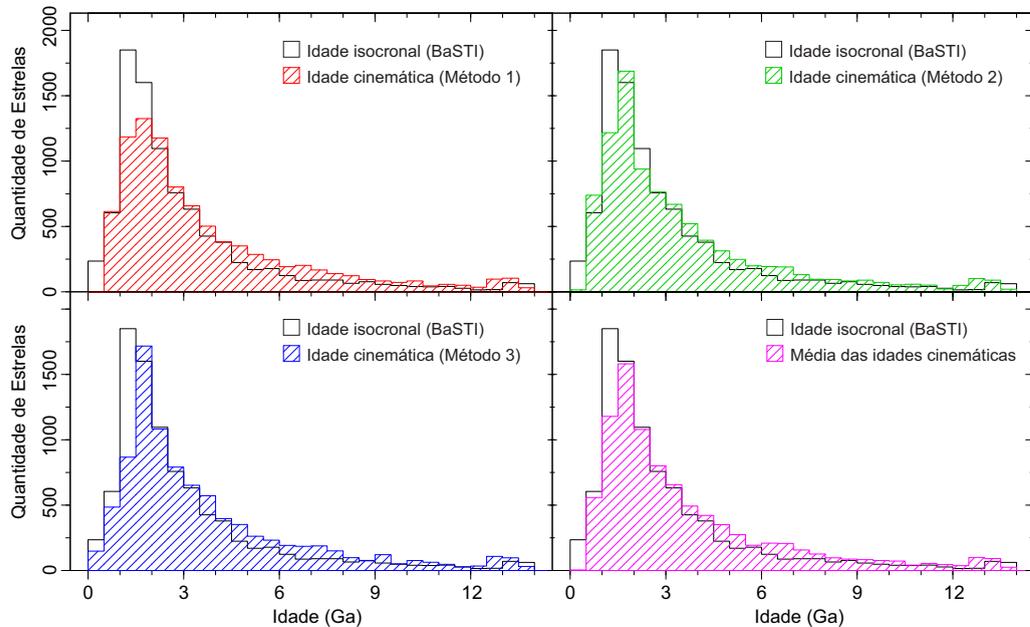


FIGURA 6.5: Comparação da distribuição de idades obtidas para as estrelas da Amostra A através dos três métodos cinemáticos com a distribuição das idades isocronais.

Vemos que as distribuições obtidas são bastante semelhantes. O pico das distribuições ocorre sempre por volta de 1.5 Ga, em acordo com o pico da distribuição de idades isocronais. Além disso, todas as distribuições apresentam uma cauda alongada em direção às estrelas mais velhas. As distribuições obtidas com o método cinemático apresentam uma quantidade de estrelas velhas ligeiramente maior que o método isocronal. Além disso, os Métodos 1 e 2 fornecem idades inferiores a 0.25 Ga em quantidade muito menor que o método das isócronas. Já a distribuição de idades obtidas pelo Método 3 apresenta uma quantidade de estrelas com idade inferior a 0.25 Ga comparável à quantidade obtida pelo método das isócronas.

Podemos concluir que, exceto pelas pequenas diferenças citadas acima, a distribuição das idades obtidas pelo método cinemático é bastante semelhante à obtida utilizando o método das isócronas. Sendo assim, consideramos que o método cinemático

é adequado para a determinação da distribuição de idades das estrelas de uma dada amostra.

A interpretação das distribuições obtidas foge aos objetivos deste estudo. Sabemos que a amostra contém uma série de vieses causados pela seleção inicial das estrelas. A seleção fotométrica aplicada por Nordström et al. (2004) na construção do catálogo GCS excluiu diversas estrelas jovens de vida curta e também as estrelas gigantes evoluídas, o que explicaria a ausência de estrelas muito jovens e de estrelas muito velhas na amostra.

## 6.6 Relação Idade–Metalicidade

As estrelas da Amostra A também tiveram suas abundâncias de ferro ( $[\text{Fe}/\text{H}]$ ) determinadas por Casagrande et al. (2011). Juntamente com as idades que obtivemos pelos métodos cinemáticos, as abundâncias de ferro permitem-nos estudar a relação idade–metalidade das estrelas da Amostra A. Obtivemos também a relação idade–metalidade utilizando as idades isocronais, para compararmos com o resultado obtido através das idades cinemáticas e verificar a validade do método.

Dividimos a amostra em 28 grupos, cada um contendo estrelas com idades em um intervalo de 0.5 Ga. Dessa forma, o grupo 1 contém apenas estrelas com idades entre 0 e 0.5 Ga, o grupo 2 apenas estrelas com idades entre 0.5 Ga e 1 Ga e assim por diante. Em seguida, utilizamos a abundância de ferro conhecida para cada estrela para calcular a média da abundância de ferro para cada grupo:

$$\langle [\text{Fe}/\text{H}] \rangle_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} [\text{Fe}/\text{H}]_j, \quad (6.3)$$

onde  $N_i$  corresponde à quantidade de estrelas no grupo  $i$ .

Calculamos também a idade média das estrelas em cada grupo:

$$\langle t \rangle_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} t_j \quad (6.4)$$

Estes dois últimos passos foram feitos utilizando a idade isocronal (para comparação) e utilizando todas idades cinemáticas que temos disponíveis ( $t_{\text{MP}}$ ,  $t_{\text{E}}$ ,  $t_{\text{cin}}$  e

$t_{50}$  obtidas para cada um dos Métodos 1, 2 e 3) para verificarmos qual delas se adequa melhor ao estudo da relação idade–metallicidade.

Verificamos que a melhor idade cinemática para este estudo é a idade mais provável da função de densidade de probabilidade ( $t_{MP}$ ) e apresentaremos daqui em diante apenas os resultados obtidos utilizando esta idade. Além disso, os grupos de estrelas mais velhas que 8 Ga apresentam uma quantidade muito baixa de estrelas quando comparada à quantidade de estrelas nos outros grupos. Dessa forma, restringimos nossa análise às estrelas com idades entre 0 e 8 Ga.

A Figura 6.6 mostra os valores de  $\langle [Fe/H] \rangle$  obtidos em função da idade média das estrelas de cada grupo. À esquerda encontra-se representada a relação obtida utilizando as idades isocronais e, à direita, as relações obtidas utilizando as idades mais prováveis inferidas através dos três métodos cinemáticos.

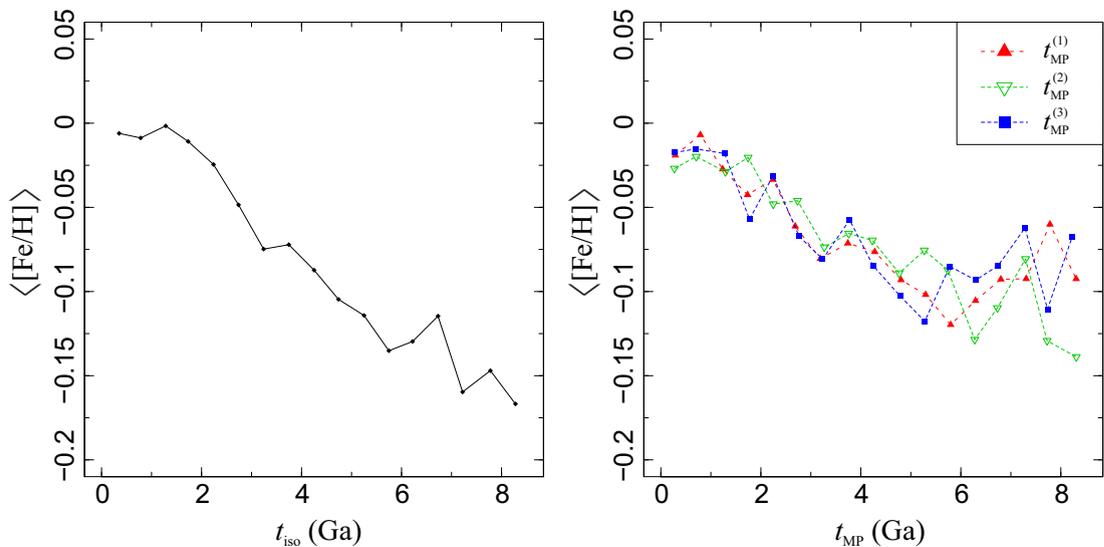


FIGURA 6.6: Metallicidade média em função da idade obtida utilizando as idades isocronais (esquerda) e idades cinemáticas mais prováveis dos três métodos (direita).

Vemos que existe um claro declínio na abundância de ferro com a idade. Isso ocorre pois as estrelas de vida curta enriquecem o meio interestelar no fim de suas vidas, de forma que a cada geração de estrelas o meio interestelar do qual elas se formam é mais rico. A relação observada, entretanto, não é apenas um efeito do enriquecimento local, mas também devido à migração de estrelas provenientes de regiões mais ricas em metais (proximidades do centro da Galáxia) e de estrelas de regiões mais pobres (mais afastadas do centro da Galáxia). A interpretação da relação idade–metallicidade torna-se então uma tarefa complexa, que foge dos objetivos deste estudo. Nosso interesse é

apenas comparar o resultado obtido utilizando as idades cinemáticas com o obtido a partir das idades isocronais.

As relações obtidas com base em idades cinemáticas de cada um dos três métodos são bastante coerentes entre si. Entretanto, apresentam algumas diferenças quando comparadas à relação obtida através das idades isocronais: as três relações obtidas através dos métodos cinemáticos são mais aplainadas que a obtida utilizando as idades isocronais (uma possível explicação para esta discrepância é a alta incerteza nas idades cinemáticas), além disso, o declínio da abundância média de ferro termina por volta de 5 Ga no caso das relações obtidas a partir de idades cinemáticas.

## Capítulo 7

# Conclusões e perspectivas

Desenvolvemos três métodos para obter uma função de densidade de probabilidade de idade para estrelas individuais com base em sua velocidade heliocêntrica e na excentricidade de suas órbitas.

Os métodos se baseiam no aquecimento dinâmico do disco, que faz com que estrelas com maiores componentes de velocidade  $U$ ,  $V$  e  $W$  e maiores excentricidades orbitais tenham maior probabilidade de serem mais velhas (Gontcharov, 2012; Koval' et al., 2009; Nordström et al., 2004). Utilizando o Teorema de Bayes, invertemos esta relação de probabilidade para obter a probabilidade de a estrela ter determinada idade. Calculando as probabilidades de diferentes idades, construímos a função de densidade de probabilidade de idade para a estrela.

O Método 1 utiliza apenas as componentes de velocidade heliocêntricas para obter as probabilidades de idade  $p(t|U, V, W)$ . Os Métodos 2 e 3 incluem a excentricidade orbital na aplicação do Teorema de Bayes. O Método 2 utiliza, além da excentricidade, as componentes de velocidade  $U$  e  $W$  e o Método 3 considera as componentes de velocidade  $V$  e  $W$ .

Utilizamos as estrelas do catálogo Geneva-Copenhagen (GCS; Casagrande et al., 2011) para obter os parâmetros que descrevem as distribuições das componentes  $U$ ,  $V$  e  $W$  em função da idade. Obtivemos os valores para a velocidade peculiar do Sol:  $U_{\odot} = 9.8 \pm 0.3 \text{ km s}^{-1}$ ,  $V_{\odot} = 12.5 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1}$  e  $W_{\odot} = 7.2 \pm 0.2 \text{ km s}^{-1}$ . Ajustamos leis de potência para descrever o aumento da dispersão de cada componente de velocidade ( $U$ ,  $V$  e  $W$ ) e das duas componentes principais do elipsoide de velocidades ( $v_1$  e  $v_2$ )

em função da idade e obtivemos:  $\sigma_U(t) = (21.2 \pm 1.0) t^{(0.35 \pm 0.02)}$ ,  $\sigma_V(t) = (13.0 \pm 1.0) t^{(0.36 \pm 0.02)}$ ,  $\sigma_W(t) = (9.1 \pm 1.0) t^{(0.48 \pm 0.04)}$ ,  $\sigma_1(t) = (22.0 \pm 1.0) t^{(0.33 \pm 0.02)}$  e  $\sigma_2(t) = (11.9 \pm 1.0) t^{(0.42 \pm 0.02)}$ . Obtivemos também ajustes de relações para o desvio do vértice ( $\ell_v$ ) e da média da componente  $V$  ( $-V'$ ) em função da idade e obtivemos as expressões:  $\ell_v(t) = 0.41 \exp(-0.37t)$  e  $V'(t) = 0.17t^2 + 0.63t + 12.5$ .

Utilizando uma aproximação simples para o potencial gravitacional da Galáxia, obtivemos uma expressão para a excentricidade em função das componentes  $U$  e  $V$ . Utilizamos o resultado obtido como aproximação inicial no software **Eureqa** (Schmidt & Lipson, 2009)), juntamente com os dados de  $U$ ,  $V$  e  $e$  do catálogo GCS e obtivemos a relação:  $e(U, V) = 2.98 \cdot 10^{-3} \sqrt{155 + 20.0U + 19.6V + U^2 + 1.95V^2} - 7.23 \cdot 10^{-4}$ .

Mostramos como os valores obtidos através destes ajustes e a relação  $e(U, V)$  podem ser utilizados para os cálculos de  $p(t|U, V, W)$ ,  $p(t|e, U, W)$  e  $p(t|e, V, W)$  e como obter a função de densidade de probabilidade de idade a partir destes resultados.

Utilizamos os três métodos para obter funções de densidade de probabilidade para a idade das 9 102 estrelas da Amostra A e caracterizamos idades individuais cinemáticas para todas essas estrelas.

A função de densidade de probabilidade obtida nos permite caracterizar idades individuais para a estrela a partir da idade mais provável ( $t_{MP}$ ), da idade esperada ( $t_E$ ) e da idade mediana ( $t_{50}$ ). Definimos a idade cinemática como a média ponderada entre a idade mais provável e a idade esperada, com peso 2 para a idade mais provável, e mostramos que a distribuição de idades obtidas dessa forma é consistente com a distribuição de idades isocronais.

Utilizamos as idades dos percentis de 5%, 16%, 84% e 95% para caracterizar incertezas individuais para as idades das estrelas. Definimos a incerteza da idade individual como:  $\delta_t = \frac{1}{2} \left[ (t_{84} - t_{16}) + \frac{(t_{95} - t_5)}{2} \right]$ , que no caso de uma distribuição gaussiana, corresponderia a  $\delta_t = 1 \sigma$ . Verificamos que em média os três métodos fornecem  $\delta_t$  por volta de 6 Ga.

Mostramos que para 75% dos casos as idades obtidas pelo método cinemático diferem das obtidas pelo método isocronal por menos de 2.5 Ga e que a média da distribuição das diferenças entre as idades obtidas por estes dois métodos é bastante próxima de zero. Mostramos também que os três métodos cinemáticos fornecem idades

bastante coerentes, sendo que em mais de 90% dos casos a diferença entre as idades obtidas pelos três métodos difere por menos de 1 Ga.

Comparamos a distribuição das idades obtidas pelo método cinemático com a distribuição das idades isocronais das estrelas do GCS e mostramos que as distribuições obtidas apresentam um bom acordo entre si. Além disso, comparamos a relação idade–metallicidade obtida através das idades isocronais com as relações obtidas através das idades cinemáticas. Devido às grandes incertezas nas idades individuais, o declínio da metalicidade média em função da idade é menos acentuado no caso das idades cinemáticas e satura por volta de 6 Ga, limitando a aplicação do método cinemático para estudos da relação idade–metallicidade apenas para estrelas mais jovens que isso.

## 7.1 Perspectivas futuras

O método das idades cinemáticas pode ser utilizado para todas as estrelas do disco que possam ter sua velocidade espacial determinada. Amostras como o levantamento RAVE (Kordopatis et al., 2013) e a compilação de catálogos de velocidades radiais CRVAD-2 (Kharchenko et al., 2007) apresentam todos os dados necessários para os cálculos do movimento espacial. Vamos aplicar o método cinemático para as estrelas destas amostras com o objetivo de obter as distribuições das idades e a relação idade–metallicidade.

Determinando também as idades para as estrelas dessas amostras através dos demais métodos disponíveis para elas, poderemos comparar as idades cinemáticas com idades independentes e continuar estudando a validade do método.

O método pode ainda ser aplicado para estrelas anãs M individuais, para as quais nenhum dos métodos tradicionais é adequado para fornecer idades. O tempo de vida destas estrelas é da ordem de centenas de bilhões de anos, de forma que entre as anãs M observadas hoje existem estrelas com idades próximas da idade da própria Galáxia. A determinação da distribuição de idades de estrelas anãs M permitirá o estudo do histórico de formação estelar ao longo de todos os períodos desde à formação do disco da Galáxia.

Nosso modelo da distribuição das componentes de velocidade  $U$ ,  $V$  e  $W$  e da excentricidade em função da idade pode ainda ser aprimorado se considerarmos a presença

---

de grupos co-moventes na distribuição. Atualmente só consideramos a influência da presença destes grupos na distribuição de maneira indireta através do desvio do vértice. Identificando estes grupos e determinando as distribuições das componentes de velocidade em função da idade para estes grupos, podemos construir um modelo de distribuição que considera, ao invés de uma única distribuição normal multivariacional, uma soma de distribuições normais referentes a cada grupo, juntamente com uma distribuição normal multivariacional referente às estrelas de campo.

## Apêndice A

# Demonstrações do elipsoide de velocidades

### A.1 Variâncias

Vamos demonstrar que:

$$\sigma_1^2 = \sigma_U^2 \cos^2 \ell_v + \sigma_V^2 \sin^2 \ell_v + \sigma_{UV} \sin(2\ell_v) \quad (\text{A.1a})$$

$$\sigma_2^2 = \sigma_U^2 \sin^2 \ell_v + \sigma_V^2 \cos^2 \ell_v - \sigma_{UV} \sin(2\ell_v) \quad (\text{A.1b})$$

$$\sigma_3^2 = \sigma_W^2 \quad (\text{A.1c})$$

Pela definição de variância, temos que:

$$\sigma_1^2 = \langle v_1^2 \rangle - \langle v_1 \rangle^2 \quad (\text{A.2a})$$

$$\sigma_2^2 = \langle v_2^2 \rangle - \langle v_2 \rangle^2 \quad (\text{A.2b})$$

$$\sigma_3^2 = \langle v_3^2 \rangle - \langle v_3 \rangle^2 \quad (\text{A.2c})$$

$$(\text{A.2d})$$

Por construção, temos que:

$$\langle v_1 \rangle = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$\langle v_2 \rangle = 0 \quad (\text{A.3b})$$

$$\langle v_3 \rangle = 0 \quad (\text{A.3c})$$

Partindo das Equações 3.35, temos:

$$v_1^2 = U_\star^2 \cos^2 \ell_v + (V_\star - \langle V_\star \rangle)^2 \sin^2 \ell_v + 2 U_\star (V_\star - \langle V_\star \rangle) \cos \ell_v \sin \ell_v \quad (\text{A.4a})$$

$$v_2^2 = U_\star^2 \sin^2 \ell_v + (V_\star - \langle V_\star \rangle)^2 \cos^2 \ell_v - 2 U_\star (V_\star - \langle V_\star \rangle) \cos \ell_v \sin \ell_v \quad (\text{A.4b})$$

$$v_3^2 = W_\star^2 \quad (\text{A.4c})$$

Substituindo as Equações A.4 e A.3 nas equações A.2, obtemos:

$$\sigma_1^2 = \langle U_\star^2 \rangle \cos^2 \ell_v + \langle (V_\star - \langle V_\star \rangle)^2 \rangle \sin^2 \ell_v + \langle U_\star (V_\star - \langle V_\star \rangle) \rangle 2 \cos \ell_v \sin \ell_v \quad (\text{A.5a})$$

$$\sigma_2^2 = \langle U_\star^2 \rangle \sin^2 \ell_v + \langle (V_\star - \langle V_\star \rangle)^2 \rangle \cos^2 \ell_v - \langle U_\star (V_\star - \langle V_\star \rangle) \rangle 2 \cos \ell_v \sin \ell_v \quad (\text{A.5b})$$

$$\sigma_3^2 = \langle W_\star^2 \rangle \quad (\text{A.5c})$$

Pelas definições de variância e utilizando as Equações 3.25, temos que:

$$\langle U_\star^2 \rangle = \sigma_{U_\star}^2 = \sigma_U^2 \quad (\text{A.6a})$$

$$\langle (V_\star - \langle V_\star \rangle)^2 \rangle = \sigma_{V_\star}^2 = \sigma_V^2 \quad (\text{A.6b})$$

$$\langle W_\star^2 \rangle = \sigma_{W_\star}^2 = \sigma_W^2 \quad (\text{A.6c})$$

$$\langle U_\star (V_\star - \langle V_\star \rangle) \rangle = \sigma_{U_\star V_\star} = \sigma_{UV} \quad (\text{A.6d})$$

Substituindo as Equações A.6 em A.5, fica provado que:

$$\sigma_1^2 = \sigma_U^2 \cos^2 \ell_v + \sigma_V^2 \sin^2 \ell_v + \sigma_{UV} \sin(2\ell_v) \quad (\text{A.7a})$$

$$\sigma_2^2 = \sigma_U^2 \sin^2 \ell_v + \sigma_V^2 \cos^2 \ell_v - \sigma_{UV} \sin(2\ell_v) \quad (\text{A.7b})$$

$$\sigma_3^2 = \sigma_W^2 \quad (\text{A.7c})$$

## A.2 Desvio do vértice

Nesta seção, vamos demonstrar que:

$$\ell_v = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\sigma_{UV}}{\sigma_U^2 - \sigma_V^2} \right) \quad (\text{A.8})$$

Partiremos das definições das velocidades  $v_1$  e  $v_2$  (ver Seção 3.5.1) e da condição de que  $v_1$  e  $v_2$  são independentes:

$$v_1 = U_\star \cos \ell_v + (V_\star - \langle V_\star \rangle) \sin \ell_v \quad (\text{A.9a})$$

$$v_2 = -U_\star \sin \ell_v + (V_\star - \langle V_\star \rangle) \cos \ell_v \quad (\text{A.9b})$$

onde  $U_\star$  e  $V_\star$  são as componentes da velocidade peculiar da estrela, definidas na Seção 3.2.

A condição de que  $v_1$  e  $v_2$  são independentes implica que:

$$\text{cov}(v_1, v_2) = \langle v_1 v_2 \rangle - \langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle = 0 \quad (\text{A.10})$$

Das Equações A.9, temos que:

$$\begin{aligned} v_1 v_2 &= \left[ (V_\star - \langle V_\star \rangle)^2 - U_\star^2 \right] \cos \ell_v \sin \ell_v + U_\star (V_\star - \langle V_\star \rangle) (\cos^2 \ell_v - \sin^2 \ell_v) \\ v_1 v_2 &= \frac{1}{2} \left[ (V_\star - \langle V_\star \rangle)^2 - U_\star^2 \right] \sin(2\ell_v) + U_\star (V_\star - \langle V_\star \rangle) \cos(2\ell_v) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Logo,  $\langle v_1 v_2 \rangle$  é dado por:

$$\langle v_1 v_2 \rangle = \frac{1}{2} \left( \left\langle (V_\star - \langle V_\star \rangle)^2 \right\rangle - \langle U_\star^2 \rangle \right) \sin(2\ell_v) + \langle U_\star (V_\star - \langle V_\star \rangle) \rangle \cos(2\ell_v) \quad (\text{A.12})$$

Por construção, temos:

$$\langle v_1 \rangle = 0 \quad (\text{A.13a})$$

$$\langle v_2 \rangle = 0 \quad (\text{A.13b})$$

Ou seja:

$$\langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle = 0 \quad (\text{A.14})$$

Substituindo as Equações A.12 e A.14 na Equação A.10, obtemos:

$$\frac{1}{2} \left[ \left\langle (V_\star - \langle V_\star \rangle)^2 \right\rangle - \langle U_\star^2 \rangle \right] \sin 2\ell_v + \langle U_\star (V_\star - \langle V_\star \rangle) \rangle \cos 2\ell_v = 0 \quad (\text{A.15})$$

Pelas definições de variância e covariância:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\sigma_{V_\star}^2 - \sigma_{U_\star}^2) \sin 2\ell_v + \sigma_{U_\star V_\star} \cos 2\ell_v &= 0 \\ \frac{1}{2} (\sigma_V^2 - \sigma_U^2) \sin 2\ell_v + \sigma_{UV} \cos 2\ell_v &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Para isolar  $\ell_v$ , dividimos ambos os lados da equação por  $\cos 2\ell_v$ . Rearranjando os termos, fica provado que:

$$\ell_v = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\sigma_{UV}}{\sigma_U^2 - \sigma_V^2} \right) \quad (\text{A.17})$$

## Apêndice B

# Tempos de livre caminho na Galáxia

Neste apêndice vamos mostrar que o tempo de livre caminho para colisões entre duas estrelas é muito maior que a idade da Galáxia, enquanto que o tempo de livre caminho para colisões entre estrelas e nuvens de gás interestelar é menor que a idade da Galáxia.

Estes resultados possuem grandes implicações no mecanismo de aquecimento dinâmico do disco, como visto na sessão 3.6.

### B.1 Tempo de livre caminho para colisões entre estrelas

Consideramos que a condição para que uma colisão entre duas estrelas altere significativamente suas órbitas é que a energia potencial gravitacional do par seja maior que a energia cinética do movimento relativo entre as estrelas.

Para um referencial centrado em uma das estrelas essa condição se traduz em:

$$\frac{G \mathcal{M}_*^2}{r} > \frac{\mathcal{M}_* v^2}{2}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $G$  corresponde à constante gravitacional,  $r$  à separação entre as estrelas e  $v$  à velocidade relativa entre elas.

Além disso, como estamos interessados apenas na ordem de grandeza do tempo de livre caminho, vamos considerar que a massa de ambas as estrelas pode ser aproximada por uma massa representativa  $\mathcal{M}_*$ .

A Equação B.1 implica em que a separação mínima entre as estrelas para que ocorra uma colisão seja dada por:

$$r_{\min} = \frac{2G\mathcal{M}_*}{v^2} \quad (\text{B.2})$$

Dessa forma, uma estrela (que chamaremos estrela A) com velocidade  $v$  em relação ao centro de massa das demais estrelas irá colidir com as estrelas que se encontram dentro de um cilindro cujo eixo possui a direção da velocidade da estrela e o raio é igual a  $r_{\min}$  (como mostra a Figura B.1).

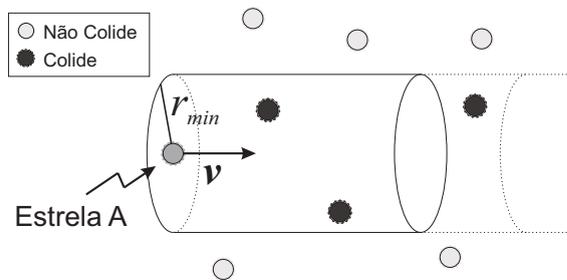


FIGURA B.1: Esquema simplificado do processo de colisões entre duas estrelas.

Para um dado comprimento  $L$ , o volume deste cilindro é dado por:

$$V = \pi r_{\min}^2 L = \frac{4\pi G^2 \mathcal{M}_*^2}{v^4} L \quad (\text{B.3})$$

Sendo  $n$  a densidade numérica de estrelas, a quantidade de estrelas que se encontram no cilindro com comprimento  $L$  (e conseqüentemente colidem com a estrela A) é dada por:

$$N = nV = \frac{4\pi n G^2 \mathcal{M}_*^2}{v^4} L \quad (\text{B.4})$$

O comprimento médio do cilindro para o qual a estrela sofre apenas uma colisão ( $N = 1$ ) é o chamado livre caminho médio ( $l$ ).

Podemos obter a equação para o livre caminho médio substituindo  $N = 1$  e  $L = l$  na Equação B.4:

$$l = \frac{v^4}{4\pi n G^2 \mathcal{M}_*^2} \quad (\text{B.5})$$

Definimos o tempo de livre percurso  $\tau_l$  como o tempo que a estrela A leva para percorrer o caminho  $l$  dada sua velocidade  $v$ . Este tempo corresponde ao intervalo médio entre as colisões e é dado por:

$$\tau_l \equiv \frac{l}{v} \quad (\text{B.6})$$

Substituindo a Equação B.5 em B.6, obtemos:

$$\tau_l = \frac{v^3}{4\pi n G^2 \mathcal{M}_*^2} \quad (\text{B.7})$$

Para obter o livre caminho médio típico, devemos estimar os valores típicos de  $v$ ,  $n$ ,  $m$ . Vamos considerar o caso em que  $v = 20 \text{ km s}^{-1}$ ,  $m = 1 \mathcal{M}_\odot$  e  $n = 1 \text{ estrela pc}^{-3}$ . Substituindo estes valores na Equação B.7, encontramos:

$$\tau_l \approx 3 \times 10^{13} \text{ anos} \quad (\text{B.8})$$

Este tempo, correspondente ao intervalo médio das colisões entre duas estrelas, é muito maior que a idade do disco da Galáxia (da ordem de  $10^{10}$  anos). Com isso, concluímos que as colisões entre as estrelas não podem ser a causa das variações observadas nas propriedades cinemáticas de estrelas de diferentes idades.

## B.2 Colisões entre uma estrela e uma nuvem interestelar

Ao longo de suas vidas, as estrelas também estão sujeitas a colisões com objetos mais massivos, como nuvens de gás interestelar cuja massa ( $\mathcal{M}_n$ ) pode chegar a centenas de milhares de massas solares.

Neste caso, repetindo o raciocínio anterior, a condição de colisão é dada por:

$$\frac{G \mathcal{M}_* \mathcal{M}_n}{r} > \frac{\mathcal{M}_* v^2}{2} \quad (\text{B.9})$$

A separação mínima entre uma estrela e uma nuvem interestelar para que ocorra uma colisão é então dada por:

$$r'_{\min} = \frac{2G\mathcal{M}_n}{v^2} \quad (\text{B.10})$$

E o livre caminho médio será então:

$$l' = \frac{v^4}{4\pi n' G^2 \mathcal{M}_n^2}, \quad (\text{B.11})$$

onde  $n'$  corresponde à densidade numérica de nuvens interestelares.

Consequentemente, o tempo de livre caminho será:

$$\tau'_l = \frac{v^3}{4\pi n' G^2 \mathcal{M}_n^2} \quad (\text{B.12})$$

Para estimar o valor de  $n'$ , vamos considerar que o disco da Galáxia possa ser aproximado por um cilindro de raio igual a 10 kpc e espessura igual a 0.1 kpc contendo uma massa de  $500 \times 10^9 \mathcal{M}_\odot$ . Supondo que 10% dessa massa se encontra em nuvens interestelares, temos que a massa total das nuvens interestelares ( $\mathcal{M}_T$ ) é aproximadamente:

$$\mathcal{M}_T \approx 50 \times 10^9 \mathcal{M}_\odot \quad (\text{B.13})$$

Sendo  $\mathcal{M}_n = 10^5 \mathcal{M}_\odot$  uma massa representativa das nuvens interestelares, a quantidade de nuvens interestelares no disco é estimada em:

$$N' = \frac{\mathcal{M}_T}{\mathcal{M}_n} \approx 5 \times 10^5 \text{nuvens} \quad (\text{B.14})$$

Dessa forma, estimamos a densidade  $n'$  de nuvens interestelares no disco:

$$n' \approx 1.6 \times 10^{-5} \text{nuvens pc}^{-3} \quad (\text{B.15})$$

Substituindo os valores estimados para  $n'$  e  $\mathcal{M}_n$  em B.12 e, novamente, considerando  $v = 20 \text{ km s}^{-1}$ , obtemos uma aproximação para o tempo de livre caminho em colisões entre estrelas e nuvens interestelares:

$$\tau'_l = 2 \times 10^8 \text{anos} \quad (\text{B.16})$$

Isso significa que uma estrela de longa vida, cujo tempo de vida é da ordem de  $10^8 - 10^9$  anos, pode sofrer dezenas de colisões com nuvens de gás interestelar ao longo de sua vida. Podemos então concluir que as colisões entre estrelas e nuvens interestelares atuam gradativamente na perturbação das órbitas estelares, podendo ser uma das causas do aquecimento dinâmico do disco.

## Apêndice C

# Relação entre excentricidade e componentes $U$ e $V$

Neste apêndice vamos obter uma expressão para a excentricidade da órbita em função das componentes  $U$  e  $V$ . Vamos inicialmente supor uma expressão simples para o potencial gravitacional e obter, através do formalismo de Lagrange, uma expressão analítica para  $e(U, V)$ .

Em seguida, utilizamos o software **Eureqa** (que descreveremos mais adiante), para o qual fornecemos a expressão obtida como *seed* da expressão real que descreve  $e(U, V)$  na Vizinhança Solar. Fornecendo os valores de  $e$ ,  $U$  e  $V$  das estrelas da Amostra A (descrita na Seção 4.3) este software encontra, por tentativas, a melhor expressão que descreve a relação entre estes parâmetros.

Na próxima seção, vamos obter as equações de Lagrange para a descrição do movimento da estrela.

### C.1 Aplicação do Formalismo de Lagrange

Como estamos tratando apenas de estrelas do disco, vamos aproximar que possamos tratar o problema em apenas duas dimensões. Escolhemos como coordenadas genéricas do problema a distância entre a estrela e o centro de massa da Galáxia ( $r$ ) e o ângulo

entre a posição da estrela e o semieixo maior de sua órbita ( $\phi$ ). Denominamos a massa da estrela de  $\mathcal{M}_\star$  e a massa total da Galáxia interna à órbita da estrela de  $\mathcal{M}_G$ .

Neste sistema de coordenadas, a energia cinética da estrela é dada por:

$$K = \frac{\mathcal{M}_\star \dot{r}^2}{2} + \frac{\mathcal{M}_\star r^2 \dot{\phi}^2}{2} \quad (\text{C.1})$$

A expressão para o potencial gravitacional da Galáxia é extremamente complexa. Para obter a expressão exata, teríamos que considerar além das componentes axisimétricas (disco, bojo, halo), componentes não axisimétricas, como a barra e os braços espirais. Como nesta etapa estamos interessados apenas em uma expressão aproximada, resolvemos utilizar uma expressão simples para o potencial:

$$\Phi(r) = -\frac{G \mathcal{M}_\star \mathcal{M}_G}{r} \quad (\text{C.2})$$

Esta expressão corresponde a considerar que a massa total da Galáxia, interna à órbita da estrela, é radialmente distribuída ou concentrada no centro. Veremos que mesmo com essa expressão simples obtemos um valor para a excentricidade bastante próximo do real.

A lagrangeana ( $\mathcal{L}$ ) deste sistema é, então, dada por:

$$\mathcal{L} = K - \Phi = \frac{\mathcal{M}_\star \dot{r}^2}{2} + \frac{\mathcal{M}_\star r^2 \dot{\phi}^2}{2} + \frac{G \mathcal{M}_\star \mathcal{M}_G}{r} \quad (\text{C.3})$$

### C.1.1 Equação de movimento na coordenada $\phi$

A equação de movimento na coordenada  $\phi$  fornece-nos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \left( \mathcal{M}_\star r^2 \dot{\phi} \right) = 0 \quad (\text{C.4})$$

Ou seja, o termo  $\mathcal{M}_\star r^2 \dot{\phi}$  é constante. Este termo corresponde justamente ao momento angular da estrela ( $L$ ). Assim, temos:

$$\dot{\phi} = \frac{L}{\mathcal{M}_\star r^2} \quad (\text{C.5})$$

### C.1.2 Equação de movimento na coordenada $r$

A equação de movimento na coordenada  $r$  é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= 0 \\ \mathcal{M}_\star \ddot{r} - \mathcal{M}_\star r \dot{\phi}^2 + \frac{G \mathcal{M}_\star \mathcal{M}_G}{r^2} &= 0 \\ \ddot{r} &= r \dot{\phi}^2 - \frac{G \mathcal{M}_G}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{C.6a})$$

Substituindo a Equação C.5 em C.6a, obtemos a equação de movimento na coordenada  $r$ :

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{\mathcal{M}_\star^2 r^3} - \frac{G \mathcal{M}_G}{r^2} \quad (\text{C.7})$$

Para encontrar uma solução para  $r(\phi)$ , fazemos a substituição  $u \equiv r^{-1}$  e reescrevemos o operador de derivada temporal como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} \\ \frac{d}{dt} &= \dot{\phi} \frac{d}{d\phi} \\ \frac{d}{dt} &= \frac{L}{\mathcal{M}_\star r^2} \frac{d}{d\phi} \end{aligned} \quad (\text{C.8a})$$

Com estas substituições, a derivada  $\dot{r}$  equivale a:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{L}{\mathcal{M}_\star r^2} \frac{dr}{d\phi} \\ \dot{r} &= \frac{L u^2}{\mathcal{M}_\star} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{u} \right) \\ \dot{r} &= -\frac{L}{\mathcal{M}_\star} \frac{du}{d\phi} \end{aligned} \quad (\text{C.9a})$$

e a derivada temporal segunda  $\ddot{r}$  é dada por:

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{L}{\mathcal{M}_* r^2} \frac{d\dot{r}}{d\phi} \\ \ddot{r} &= \frac{L u^2}{\mathcal{M}_*} \frac{d}{d\phi} \left( -\frac{L}{\mathcal{M}_*} \frac{du}{d\phi} \right) \\ \ddot{r} &= -\frac{L^2 u^2}{\mathcal{M}_*} \frac{d^2 u}{d\phi^2}\end{aligned}\tag{C.10a}$$

Substituindo esta expressão para  $\ddot{r}$  e fazendo a substituição  $r = u^{-1}$  em C.7, obtemos:

$$\begin{aligned}-\frac{L^2 u^2}{\mathcal{M}_*} \frac{d^2 u}{d\phi^2} &= \frac{L^2 u^3}{\mathcal{M}_*} - G \mathcal{M}_* \mathcal{M}_G u^2 \\ \frac{d^2 u}{d\phi^2} &= -u(\phi) + \frac{G \mathcal{M}_*^2 \mathcal{M}_G}{L^2}\end{aligned}\tag{C.11a}$$

Para resolver esta equação diferencial ordinária, fazemos uma nova substituição:

$$w(\phi) = u(\phi) - \frac{G \mathcal{M}_*^2 \mathcal{M}_G}{L^2}\tag{C.12a}$$

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} = \frac{d^2 u}{d\phi^2}\tag{C.12b}$$

Dessa forma, a equação de movimento se resume a:

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} = -w(\phi)\tag{C.13}$$

Esta E.D.O. tem como solução geral a expressão:

$$w(\phi) = A \cos(\phi - \delta),\tag{C.14}$$

onde  $A$  e  $\delta$  são constantes.

Substituindo esta expressão em C.12a:

$$u(\phi) = \frac{G \mathcal{M}_*^2 \mathcal{M}_G}{L^2} [1 + \epsilon \cos(\phi - \delta)],\tag{C.15}$$

onde redefinimos  $\epsilon \equiv \frac{L^2}{G \mathcal{M}_*^2 \mathcal{M}_G} A$ .

Substituímos  $u = r^{-1}$  e, para simplificar, definimos  $c = \frac{L^2}{G \mathcal{M}_*^2 \mathcal{M}_G}$ :

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos(\phi - \delta)} \quad (\text{C.16})$$

## C.2 Obtendo a excentricidade

Na Seção 3.7, definimos a excentricidade de uma órbita como:

$$e \equiv \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \quad (\text{C.17})$$

Analisando a Equação C.16, é simples perceber que o valor máximo de  $r$  ocorre quando o termo do cosseno é mínimo ( $\cos(\phi - \delta) = -1$ ) e o valor mínimo de  $r$  ocorre quando o termo do cosseno é máximo ( $\cos(\phi - \delta) = 1$ ). Dessa forma:

$$r_{\max} = \frac{c}{1 - \epsilon} \quad (\text{C.18a})$$

$$r_{\min} = \frac{c}{1 + \epsilon} \quad (\text{C.18b})$$

Substituindo estes valores em nossa definição de excentricidade, temos:

$$\begin{aligned} e &= \frac{\frac{c}{1-\epsilon} - \frac{c}{1+\epsilon}}{\frac{c}{1-\epsilon} + \frac{c}{1+\epsilon}} \\ e &= \frac{\frac{1+\epsilon-1+\epsilon}{(1+\epsilon)(1-\epsilon)}}{\frac{1+\epsilon+1-\epsilon}{(1+\epsilon)(1-\epsilon)}} \\ e &= \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned} \quad (\text{C.19a})$$

Ou seja, a constante  $\epsilon$  na Equação C.16 corresponde justamente à excentricidade  $e$  da órbita da estrela. Assim:

$$r(\phi) = \frac{L^2}{G \mathcal{M}_*^2 \mathcal{M}_G} \frac{1}{1 + e \cos(\phi - \delta)} \quad (\text{C.20})$$

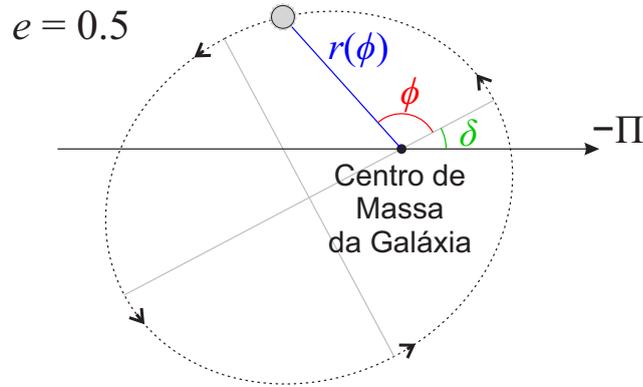


FIGURA C.1: Exemplo de órbita descrita pela Equação C.16. O ângulo  $\delta$  é ajustado de forma a corresponder ao ângulo entre o semi-eixo maior e a direção do eixo  $\Pi$  na posição atual do Sol.  $r$  corresponde à distância da estrela ao centro de massa da Galáxia e  $\phi$  ao ângulo entre a posição da estrela e o semi-eixo maior da órbita.

Esta equação corresponde à equação de uma elipse, com um dos focos centrados no centro de massa da Galáxia (como era esperado devido ao potencial que consideramos). A Figura C.1 mostra o exemplo de uma órbita com excentricidade  $e = 0.5$ . O ângulo  $\delta$  é ajustado de forma a corresponder ao ângulo entre o semi-eixo maior e a direção do eixo  $\Pi$  na posição atual do Sol.

### C.3 Obtendo as componentes $U_{\star}(\phi)$ e $V_{\star}(\phi)$

Na Seção 3.2.2, definimos a componente de velocidade  $U_{\star}$  como a componente de velocidade com direção radial e sentido do centro de massa da Galáxia. Já a componente de velocidade  $V_{\star}$  foi definida como a diferença entre a velocidade tangencial ( $r\dot{\phi}$ ) que a estrela possui, em uma dada distância  $r$  do centro, em um referencial inercial com origem no centro de massa da Galáxia, e a velocidade tangencial ( $r\dot{\phi}_0$ ) de uma órbita circular com raio  $r$ . Em termos de  $r$  e  $\phi$ , estas velocidades são dadas por:

$$U_{\star} = -\dot{r} \quad (\text{C.21a})$$

$$V_{\star} = r\dot{\phi} - r\dot{\phi}_0 \quad (\text{C.21b})$$

### C.3.1 Calculando $U_\star$

Substituindo a derivada temporal pela derivada em  $\phi$  e utilizando o resultado obtido para  $\dot{\phi}$ , obtemos:

$$U_\star = -\frac{dr}{dt} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi}$$

$$U_\star = \frac{L}{\mathcal{M}_\star r^2} \frac{dr}{d\phi} \quad (\text{C.22a})$$

Substituindo o resultado obtido para  $r$  e calculando a derivada, obtemos a expressão para  $U_\star$  em função de  $\phi$ :

$$U_\star = \frac{G\mathcal{M}_\star\mathcal{M}_G}{L} e \sin(\phi - \delta) \quad (\text{C.23})$$

### C.3.2 Calculando $V_\star$

Para obter a expressão para  $V_\star$  em função de  $\phi$  devemos obter a velocidade tangencial real da estrela a uma dada distância  $r$  e a velocidade tangencial de uma órbita circular com raio  $r$ . O desenvolvimento é o seguinte:

$$V_\star = v_\phi(r, e) - v_\phi(r, e = 0) \quad (\text{C.24a})$$

$$V_\star = r \dot{\phi} - r \dot{\phi}_0$$

$$V_\star = \frac{L}{\mathcal{M}_\star r(\phi)} - \frac{L_0}{\mathcal{M}_\star r(\phi)}$$

$$V_\star = \frac{L - L_0}{\mathcal{M}_\star r(\phi)} \quad (\text{C.24b})$$

Devemos considerar que o momento angular da estrela difere do momento angular ( $L_0$ ) que ela deveria ter para que sua órbita fosse circular. Podemos encontrar a relação entre  $L$  e  $L_0$  considerando que, em ambos os casos, a órbita deve passar pelo ponto  $(r, \phi)$  no qual estamos calculando as velocidades e que a excentricidade da órbita circular é nula. Assim, substituindo ambos os casos na equação de movimento  $r(\phi)$  e igualando-as,

obtemos:

$$\frac{L^2}{G M_*^2 M_G} \frac{1}{1 + e \cos(\phi - \delta)} = \frac{L_0^2}{G M_*^2 M_G}$$

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 + e \cos(\phi - \delta)}} \quad (\text{C.25a})$$

Substituindo C.25a e C.16 em C.24b:

$$V_* = \frac{G M_* M_G}{L} \left[ 1 + e \cos(\phi - \delta) - \sqrt{1 + e \cos(\phi - \delta)} \right] \quad (\text{C.26})$$

Para simplificar a expressão e facilitar o isolamento da excentricidade, vamos aplicar uma expansão em série de Taylor no termo  $\sqrt{1 + e \cos(\phi - \delta)}$  em torno de  $e \cos(\phi - \delta) = 0$ . Uma expansão em série de Taylor é dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^n}{n!} \quad (\text{C.27})$$

Neste caso, a expansão é dada por:

$$\sqrt{1 + e \cos(\phi - \delta)} = 1 + \frac{1}{2} e \cos(\phi - \delta) - \frac{1}{4} \frac{[e \cos(\phi - \delta)]^2}{2} + \dots \quad (\text{C.28})$$

Para os casos em que  $e \cos(\phi - \delta) \ll 1$ , podemos desprezar todos os termos de ordem maior ou igual a 2. Assim:

$$\sqrt{1 + e \cos(\phi - \delta)} \approx 1 + \frac{1}{2} e \cos(\phi - \delta) \quad (\text{C.29})$$

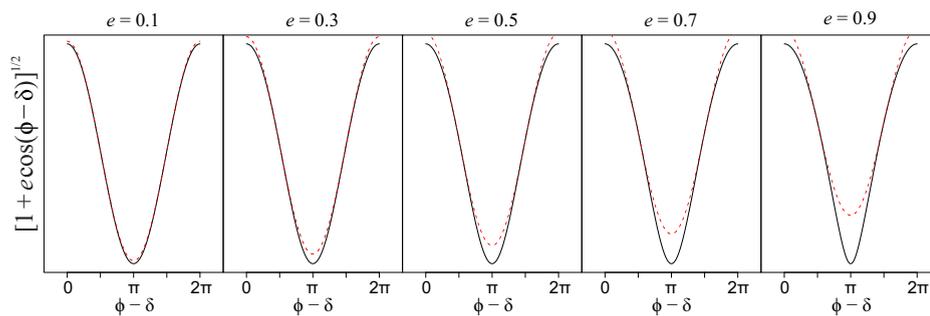


FIGURA C.2: Comparação entre o valor exato (linha sólida preta) e o valor aproximado pela Equação C.29 (linha tracejada vermelha) do termo  $\sqrt{1 + e \cos(\phi - \delta)}$  para diferentes excentricidades.

A Figura C.2 mostra uma comparação entre o valor exato de  $\sqrt{1 + e \cos(\phi - \delta)}$  (linha sólida preta) e o valor aproximado  $1 + \frac{1}{2} e \cos(\phi - \delta)$  (linha tracejada vermelha) para diferentes excentricidades.

Vemos que a aproximação é muito boa para estrelas com excentricidade baixa ( $< 0.3$ ), mas diferenças consideráveis aparecem para excentricidades altas, principalmente próximas dos ângulos  $(\phi - \delta) \sim n\pi$  (que correspondem à posição no meio do caminho entre o apogaláctico e o perigaláctico da órbita). A maior parte das estrelas em nosso estudo apresentam excentricidades baixas (97.5% das estrelas da Amostra A apresentam excentricidade menor ou igual a 0.3). Assim, consideramos a aproximação válida para o nosso estudo.

Substituindo a aproximação C.29 na Equação C.26, obtemos:

$$V_{\star} = \frac{G\mathcal{M}_{\star}\mathcal{M}_G}{2L} e \cos(\phi - \delta) \quad (\text{C.30})$$

#### C.4 Relação $e(U, V)$

Para obter uma expressão para a excentricidade em função dos valores obtidos para  $U(e, \phi)$  e  $V(e, \phi)$  fazemos  $U_{\star}^2 + (2V_{\star})^2$ :

$$U_{\star}^2 + (2V_{\star})^2 = \left( \frac{G\mathcal{M}_{\star}\mathcal{M}_G e}{L} \right)^2 [\sin^2(\phi - \delta) + \cos^2(\phi - \delta)] \quad (\text{C.31})$$

Usando a propriedade  $\sin^2(\phi - \delta) + \cos^2(\phi - \delta) = 1$  e isolando  $e$ :

$$e = \frac{L}{G\mathcal{M}_{\star}\mathcal{M}_G} \sqrt{U_{\star}^2 + (2V_{\star})^2} \quad (\text{C.32})$$

Na Vizinhança Solar, o momento angular é dado por:

$$L = \mathcal{M}_{\star} R \Theta, \quad (\text{C.33})$$

onde  $R$  é a distância do Sol ao centro de massa da Galáxia e  $\Theta$  a velocidade angular da estrela. Como vimos no Capítulo 3, podemos escrever a velocidade angular da estrela

em termos de sua velocidade peculiar e da velocidade do sistema local de referência ( $\Theta_0$ ):

$$\Theta = V_\star + \Theta_0 \quad (\text{C.34})$$

Assim:

$$L = \mathcal{M}_\star R (V_\star + \Theta_0) \quad (\text{C.35})$$

Substituindo a Equação C.35 e substituindo também as componentes de velocidade peculiar  $U_\star$  e  $V_\star$  pelas velocidades heliocêntricas ( $U_\star = U + U_\odot$  e  $V_\star = V + V_\odot$ ) na Equação C.32:

$$e \propto (V + V_\odot + \Theta_0) \sqrt{(U + U_\odot)^2 + [2(V + V_\odot)]^2} \quad (\text{C.36})$$

Para comparar o resultado obtido por essa expressão com a excentricidade presente no GCS (calculada por integração numérica da órbita por Nordström et al., 2004) foi feito um ajuste grosseiro para a constante de proporcionalidade ( $k = 1.25 \cdot 10^{-5}$ ) para melhor ajustar os dados.

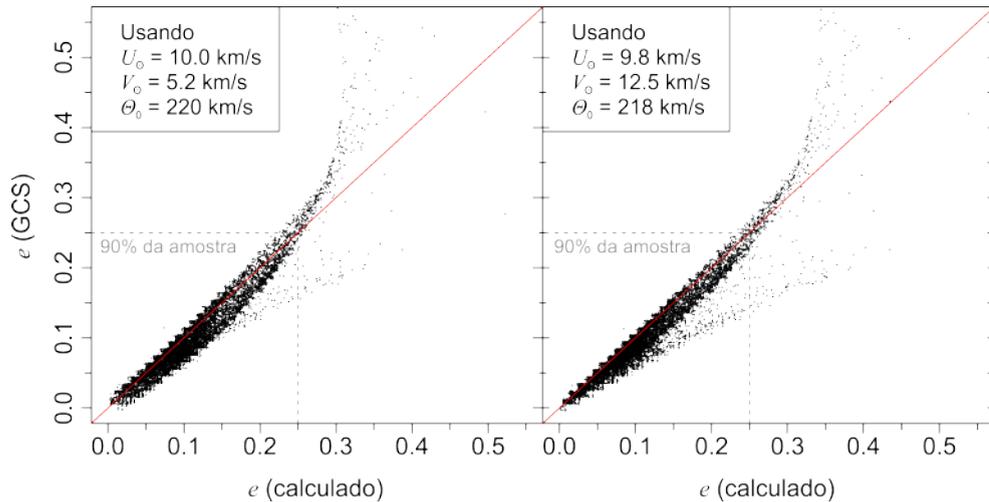


FIGURA C.3: Comparação entre a excentricidade calculada através da expressão teórica obtida e a calculada através de integração numérica das órbitas por Nordström et al. (2004). Em cada um dos casos foram usados valores diferentes para  $U_\odot$ ,  $V_\odot$  e  $\Theta_0$  (indicados na legenda).

Mostramos a comparação na Figura C.3. À esquerda, utilizamos os valores para a velocidade peculiar do Sol e para a velocidade circular de rotação utilizados por Nordström et al. (2004):  $U_\odot = 10.0 \text{ km s}^{-1}$ ,  $V_\odot = 5.2 \text{ km s}^{-1}$  e  $\Theta_0 = 220 \text{ km s}^{-1}$ . Na figura da direita, utilizamos os valores que obtivemos para a velocidade peculiar do Sol

no Capítulo 5 e a velocidade circular de rotação de Bovy et al. (2012a):  $U_{\odot} = 9.8 \text{ km s}^{-1}$ ,  $V_{\odot} = 12.5 \text{ km s}^{-1}$  e  $\Theta_0 = 218 \text{ km s}^{-1}$ .

Em ambos os casos, as excentricidades estão em acordo até cerca de 0.15, quando começam a destoar. Este fato era esperado já que utilizamos nos cálculos uma aproximação que só é válida para excentricidades baixas. Para de  $e > 0.3$ , a concordância piora consideravelmente, indicando que a Equação C.36 não é aplicável nestes casos.

## C.5 Utilização do Eureka

O Eureka é um software desenvolvido por Schmidt, M. & Lipson, H. que busca relações entre variáveis a partir de um conjunto de dados fornecido através de sucessivas tentativas (se baseia no algoritmo desenvolvido por Schmidt & Lipson, 2009). O software (Eureka; versão 0.98 beta) encontra-se disponível no domínio <http://www.nutonian.com>.

Fornecemos a este software os dados de  $U$ ,  $V$  e  $e$  da Amostra A, juntamente com a relação obtida de forma analítica para  $e(U, V)$  (Equação C.36) como aproximação inicial.

Partindo destes dados, o software busca encontrar a relação que melhor descreve a excentricidade em função das componentes de velocidade heliocêntrica  $U$  e  $V$ . Além da aproximação inicial o software inclui, na solução constantes e combinações de potências de  $U$  e  $V$ . Cada solução é penalizada de acordo com sua complexidade, e o software fornece o resultado que apresenta melhor ajuste para expressões de diferentes complexidades.

Finalizamos o software após ele convergir para uma expressão satisfatória para  $e(U, V)$  não muito mais complexa que a expressão obtida anteriormente através da aplicação do formalismo de Lagrange. A expressão obtida foi:

$$e = 2.98 \cdot 10^{-3} \sqrt{155 + 20.0U + 19.6V + U^2 + 1.95V^2} - 7.23 \cdot 10^{-4} \quad (\text{C.37})$$

A Figura C.4 mostra a comparação entre a excentricidade calculada através desta fórmula e o valor da excentricidade presente no GCS (calculado por integração numérica das órbitas). Vemos que a concordância entre os valores é bem melhor que a obtida

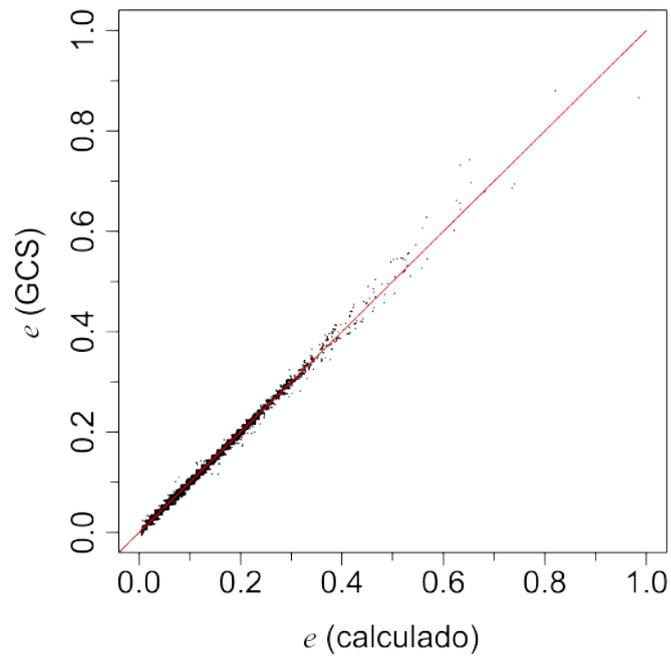


FIGURA C.4: Comparação entre a excentricidade calculada pela expressão obtida através do uso do software **Eureka** e a excentricidade presente no GCS.

apenas através da aplicação da equação que obtivemos aplicando o Formalismo de Lagrange.

Em 85% dos casos, a diferença entre o valor da excentricidade obtido no cálculo e o valor presente no catálogo a diferença foi menor que 0.005. Como as excentricidades no GCS são dadas com precisão de centésimo, isso significa que a excentricidade obtida para estas estrelas pode ser considerada exata. Apenas para 2% das estrelas na Amostra A o valor calculado difere do valor presente no catálogo por mais de 0.01.

# Apêndice D

## Tabelas

Neste apêndice apresentamos a tabela com as idades obtidas para as 50 primeiras estrelas da Amostra A. Como a amostra é muito extensa (9 102 estrelas), a tabela completa apenas se encontrará disponível eletronicamente em um local a ser definido num momento oportuno.

Na tabela, as velocidades  $U$ ,  $V$  e  $W$  e a excentricidade  $e$  foram retiradas do Geneva-Copenhagen (Casagrande et al., 2011). As idades foram calculadas utilizando os três métodos cinemáticos desenvolvidos neste trabalho. Os índices (1), (2) e (3) indicam quais dos métodos correspondentes a cada idade.

A idade  $t_{\text{MP}}$  corresponde à idade mais provável da função de densidade de probabilidade.  $t_{\text{E}}$  corresponde à idade esperada. Já as idades  $t_5$ ,  $t_{16}$ ,  $t_{50}$ ,  $t_{84}$  e  $t_{95}$  correspondem às idades referentes aos quantis de 0.05, 0.16, 0.5, 0.84 e 0.95 da função de densidade de probabilidade.

TABELA D.1: Idades obtidas para as 50 primeiras estrelas da Amostra A usando os três métodos cinemáticos desenvolvidos neste estudo. A tabela apresenta a idade mais provável ( $t_{MP}$ ), idade esperada ( $t_E$ ) e as idades correspondentes aos percentis de 5%, 16%, 50%, 84% e 95% (respectivamente  $t_5, t_{16}, t_{50}, t_{84}, t_{95}$ ). Os índices (1), (2) e (3) correspondem ao método utilizado em cada caso. A tabela completa apenas se encontrará disponível eletronicamente.

Designação	$U$	$V$	$W$	$e$	$t_{MP}^{(1)}$	$t_E^{(1)}$	$t_5^{(1)}$	$t_{16}^{(1)}$	$t_{50}^{(1)}$	$t_{84}^{(1)}$	$t_{95}^{(1)}$	$t_{MP}^{(2)}$	$t_E^{(2)}$	$t_5^{(2)}$	$t_{16}^{(2)}$	$t_{50}^{(2)}$	$t_{84}^{(2)}$	$t_{95}^{(2)}$	$t_{MP}^{(3)}$	$t_E^{(3)}$	$t_5^{(3)}$	$t_{16}^{(3)}$	$t_{50}^{(3)}$	$t_{84}^{(3)}$	$t_{95}^{(3)}$
HIP 420	40	-22	-16	0.16	3.5	6.5	1.8	2.9	6.0	10.4	12.6	2.7	5.7	1.3	2.3	5.1	9.6	12.2	3.6	6.3	1.6	2.6	5.8	10.3	12.6
HIP 490	-10	-21	-1	0.06	0.3	3.1	0.2	0.4	1.7	6.3	10.4	0.3	3.2	0.2	0.4	2.0	6.7	10.5	0.6	3.3	0.3	0.6	2.1	6.6	10.4
HIP 530	-22	-46	3	0.17	4.4	7.1	1.7	3.1	6.8	11.3	13.1	2.5	6.6	1.3	2.5	6.2	11.0	12.9	3.3	6.8	1.6	2.9	6.4	10.9	12.9
HIP 529	-9	-1	-15	0.02	0.5	3.3	0.3	0.6	2.1	6.3	10.1	0.5	3.2	0.3	0.6	2.0	6.2	9.9	0.6	2.8	0.3	0.6	1.7	5.3	9.1
HIP 547	37	-31	-7	0.17	4.3	6.9	2.0	3.2	6.5	10.8	12.8	2.1	6.2	1.4	2.5	5.8	10.3	12.6	3.5	6.4	1.5	2.6	6.0	10.6	12.7
HIP 556	-4	-50	-23	0.18	7.6	8.1	2.7	4.3	8.1	11.9	13.3	5.2	7.4	2.0	3.5	7.3	11.6	13.2	6.8	7.8	2.5	4.0	7.8	11.7	13.2
HIP 560	-11	-15	-10	0.04	0.1	1.7	NA	NA	NA	NA	NA	0.2	1.9	0.1	0.2	0.4	4.0	8.5	0.2	0.9	0.1	0.1	0.3	1.3	4.6
HIP 606	-28	-50	-18	0.19	6.5	7.7	2.1	3.7	7.6	11.7	13.2	5.5	7.2	1.6	3.0	7.0	11.4	13.1	5.2	7.4	2.1	3.5	7.2	11.4	13.1
HIP 596	-15	-29	-18	0.1	1.0	4.9	0.6	1.3	3.9	9.0	12.0	0.8	4.8	0.7	1.3	3.9	8.9	11.9	0.8	4.4	0.6	1.1	3.3	8.2	11.5
HIP 612	-50	-10	-15	0.12	1.9	5.3	1.1	1.9	4.5	9.2	12.0	1.4	4.8	0.8	1.5	3.9	8.5	11.5	1.9	5.1	1.0	1.8	4.3	8.9	11.8
HIP 630	46	-7	-14	0.17	2.7	5.8	1.4	2.3	5.1	9.6	12.2	2.9	5.7	1.3	2.3	5.1	9.5	12.1	3.1	6.3	1.7	2.8	5.8	10.0	12.4
HIP 624	12	-59	0	0.23	10.4	9.0	3.7	5.5	9.1	12.4	13.5	10.0	8.3	2.6	4.5	8.5	12.2	13.4	8.6	8.4	2.9	4.6	8.5	12.1	13.4
HIP 656	-7	-57	-32	0.21	11.0	9.2	4.0	5.8	9.4	12.5	13.5	10.0	8.8	3.3	5.2	9.0	12.4	13.5	10.6	9.0	3.8	5.6	9.2	12.4	13.5
HIP 649	5	5	30	0.07	6.0	7.6	NA	NA	NA	NA	NA	7.5	7.9	3.1	4.5	7.7	11.4	13.0	6.3	7.6	3.0	4.3	7.3	11.0	12.8
HIP 691	-25	-18	5	0.07	0.8	4.3	0.5	1.0	3.1	8.0	11.4	0.9	4.7	0.7	1.3	3.8	8.4	11.5	0.9	4.2	0.6	1.1	3.2	7.8	11.1
HIP 688	-26	-9	-1	0.05	0.5	3.4	0.3	0.7	2.2	6.7	10.5	0.4	2.8	0.2	0.5	1.6	5.6	9.4	0.6	3.2	0.4	0.7	2.0	6.3	10.1
HIP 706	-11	3	19	0.04	3.6	6.3	1.8	2.9	5.7	10.0	12.4	4.3	6.5	1.9	3.0	6.0	10.3	12.5	3.0	5.8	1.7	2.6	5.2	9.3	12.0
HIP 709	-44	-57	-7	0.23	9.9	8.4	2.6	4.4	8.5	12.2	13.4	9.0	7.8	1.9	3.6	7.8	11.9	13.3	8.6	8.3	2.9	4.6	8.5	12.1	13.4
HIP 740	-12	11	-1	0.06	1.4	4.5	0.8	1.4	3.6	7.9	11.1	0.3	3.3	0.2	0.4	2.0	6.7	10.5	1.3	4.2	0.7	1.3	3.3	7.4	10.6
HIP 726	-31	-17	14	0.07	2.6	5.9	1.3	2.3	5.2	9.9	12.4	2.2	5.5	1.4	2.2	4.9	9.2	11.9	2.6	5.7	1.4	2.3	5.1	9.6	12.2
HIP 732	-21	-18	13	0.06	2.1	5.6	1.1	2.0	4.8	9.5	12.2	2.5	5.8	1.3	2.3	5.1	9.6	12.2	2.0	5.1	1.1	1.8	4.3	8.8	11.7
HIP 791	-22	-63	-12	0.24	11.3	9.0	3.4	5.3	9.2	12.4	13.5	11.6	8.3	2.5	4.3	8.5	12.2	13.4	10.4	8.7	3.2	5.1	8.9	12.3	13.5
HIP 801	27	4	-4	0.11	0.8	4.0	0.5	1.0	3.0	7.4	10.8	0.7	4.0	0.6	1.0	2.9	7.4	10.8	1.8	4.7	0.9	1.6	3.8	8.2	11.3

HIP 815	26	-3	18	0.11	3.8	6.4	1.9	3.0	5.9	10.2	12.5	4.0	6.4	1.9	3.0	5.9	10.1	12.4	4.3	6.6	2.1	3.2	6.2	10.3	12.5
HIP 851	-18	-38	-15	0.13	1.7	5.8	0.9	1.9	5.1	10.1	12.6	0.8	5.2	0.7	1.5	4.4	9.5	12.3	1.9	5.7	1.0	1.9	5.0	10.0	12.5
HIP 819	1	-11	-6	0.04	0.1	2.0	0.0	0.1	0.7	4.0	8.4	0.2	1.6	0.1	0.2	0.4	3.3	7.3	0.2	1.7	0.1	0.2	0.4	3.5	7.6
HIP 856	34	-5	-8	0.13	1.3	4.6	0.8	1.4	3.7	8.3	11.4	1.3	4.5	0.7	1.3	3.6	8.2	11.4	2.5	5.2	1.1	1.9	4.4	8.9	11.8
HIP 867	-14	11	-30	0.07	3.6	6.2	1.8	2.8	5.6	9.8	12.3	3.3	6.2	1.6	2.6	5.7	10.1	12.4	3.0	5.6	1.6	2.5	5.0	9.0	11.7
HIP 870	-1	13	-12	0.08	1.2	4.3	0.6	1.2	3.3	7.7	10.9	0.3	3.5	0.2	0.5	2.3	7.1	10.8	1.1	3.9	0.7	1.2	3.0	6.9	10.2
HIP 920	3	11	5	0.08	1.6	4.7	0.8	1.5	3.8	8.2	11.3	1.3	4.8	0.7	1.4	3.9	8.7	11.7	1.9	4.6	1.0	1.7	3.9	7.9	10.9
HIP 937	-26	-14	-2	0.06	0.3	3.1	0.2	0.4	1.7	6.1	10.2	0.3	3.1	0.2	0.5	2.0	6.2	10.0	0.6	3.2	0.3	0.6	1.9	6.3	10.1
HIP 996	-33	-63	20	0.24	13.1	9.7	4.5	6.5	10.0	12.8	13.6	14.0	9.3	3.9	5.9	9.7	12.6	13.6	12.2	9.5	4.4	6.3	9.8	12.7	13.6
HIP 1038	-29	-17	-6	0.07	0.3	2.9	0.1	0.3	1.5	5.9	10.1	0.3	3.0	0.2	0.4	1.8	6.0	9.9	0.5	3.0	0.3	0.5	1.8	6.1	10.0
HIP 1071	-8	-3	-19	0.01	0.8	3.8	0.5	0.9	2.7	7.2	10.7	0.7	3.4	0.5	0.8	2.3	6.4	10.0	0.7	3.4	0.5	0.8	2.3	6.3	9.9
HIP 1058	-22	-9	7	0.04	1.2	4.5	0.7	1.3	3.4	8.1	11.4	1.1	4.1	0.6	1.2	3.1	7.5	10.8	1.2	4.3	0.7	1.2	3.3	7.8	11.1
HIP 1105	-38	-10	-1	0.08	1.0	4.3	0.6	1.1	3.2	8.0	11.3	0.7	3.9	0.5	0.9	2.9	7.3	10.8	0.7	3.9	0.5	0.9	2.8	7.3	10.8
HIP 1125	-32	-12	4	0.07	1.1	4.4	0.6	1.2	3.3	8.1	11.4	0.8	4.0	0.6	1.1	3.0	7.4	10.8	0.9	4.3	0.6	1.1	3.3	7.9	11.2
HIP 1137	-4	3	1	0.04	0.6	3.6	0.4	0.7	2.4	6.7	10.4	0.6	3.5	0.3	0.7	2.4	6.8	10.5	0.7	3.2	0.5	0.8	2.2	6.0	9.6
HIP 1134	-13	-24	-6	0.08	0.1	2.7	0.0	0.2	1.2	5.7	10.0	0.2	3.0	0.1	0.3	1.6	6.3	10.3	0.2	2.2	0.1	0.2	1.0	4.6	9.0
HIP 1147	46	-46	10	0.23	9.5	9.0	NA	NA	NA	NA	NA	8.8	8.5	3.2	4.9	8.6	12.1	13.4	9.5	8.7	3.4	5.2	8.8	12.2	13.4
HIP 1140	9	-11	-12	0.06	0.4	3.1	0.2	0.5	1.8	6.1	10.1	0.3	2.6	0.2	0.4	1.5	5.2	9.2	0.6	3.2	0.4	0.6	2.0	6.4	10.2
HIP 1161	46	-24	-8	0.18	4.1	6.8	2.0	3.2	6.3	10.6	12.7	3.5	6.1	1.5	2.5	5.5	9.9	12.4	3.6	6.6	1.7	2.9	6.2	10.6	12.7
HIP 1188	0	11	0	0.07	1.1	4.2	0.6	1.1	3.2	7.6	10.9	0.6	3.8	0.4	0.7	2.6	7.4	11.0	1.0	3.8	0.6	1.1	2.9	6.8	10.1
HIP 1234	-13	-15	-44	0.03	6.1	7.7	3.0	4.2	7.5	11.3	13.0	6.0	7.6	2.9	4.3	7.4	11.1	12.9	6.6	7.9	3.1	4.5	7.7	11.4	13.1
HIP 1231	-12	-23	-6	0.07	0.1	2.5	0.0	0.2	1.1	5.4	9.8	0.2	2.4	0.1	0.2	1.1	5.4	9.6	0.2	2.5	0.1	0.3	1.2	5.2	9.4
HIP 1258	42	-17	-41	0.16	7.2	8.2	NA	NA	NA	NA	NA	6.4	7.9	3.1	4.5	7.7	11.4	13.0	7.5	8.2	3.4	4.9	8.2	11.7	13.2
HIP 1304	35	-42	-23	0.2	7.6	8.3	3.1	4.7	8.2	11.9	13.3	6.9	7.8	2.5	4.0	7.7	11.6	13.2	7.5	8.0	2.7	4.3	8.1	11.8	13.3
HIP 1320	-24	-12	3	0.05	0.7	3.8	0.4	0.8	2.6	7.3	10.9	0.7	3.6	0.5	0.9	2.6	6.8	10.4	0.7	3.7	0.5	0.8	2.6	7.0	10.6
HIP 1341	-45	-53	38	0.21	13.6	10.2	5.0	7.2	10.5	12.9	13.7	11.9	9.9	5.1	7.0	10.3	12.8	13.6	12.0	10.0	5.2	7.1	10.3	12.8	13.6
HIP 1402	-4	-3	3	0.02	0.6	3.5	0.3	0.7	2.3	6.7	10.4	0.6	3.2	0.4	0.7	2.1	6.2	9.9	0.7	3.3	0.5	0.8	2.2	6.2	9.8

# Referências Bibliográficas

- F. C. Adams, P. Bodenheimer, & G. Laughlin. M dwarfs: planet formation and long term evolution. *Astronomische Nachrichten*, 326:913–919, December 2005. doi: 10.1002/asna.200510440.
- A. Alonso, S. Arribas, & C. Martinez-Roger. The empirical scale of temperatures of the low main sequence (F0V-K5V). *A&A*, 313:873–890, September 1996.
- T. Antoja, F. Figueras, D. Fernández, & J. Torra. Origin and evolution of moving groups. I. Characterization in the observational kinematic-age-metallicity space. *A&A*, 490:135–150, October 2008. doi: 10.1051/0004-6361:200809519.
- R. Asiain, J. Torra, & F. Figueras. Age and mass of main sequence A-Type stars. *A&A*, 322:147–154, June 1997.
- A. Baglin. Highlights of the CoRoT Mission: Extrasolar Planets, Stellar Structure and Activity.
- A. Baranne, M. Mayor, & J. L. Poncet. CORAVEL - A new tool for radial velocity measurements. *Vistas in Astronomy*, 23:279–316, 1979. doi: 10.1016/0083-6656(79)90016-3.
- M. Barbier-Brossat & P. Figon. Catalogue général de vitesses radiales moyennes pour les étoiles galactiques. Mean radial velocities catalog of galactic stars. *A&AS*, 142:217–223, March 2000. doi: 10.1051/aas:2000149.
- S. A. Barnes. A Connection between the Morphology of the X-Ray Emission and Rotation for Solar-Type Stars in Open Clusters. *ApJ*, 586:L145–L147, April 2003. doi: 10.1086/374681.
- S. A. Barnes. Ages for Illustrative Field Stars Using Gyrochronology: Viability, Limitations, and Errors. *ApJ*, 669:1167–1189, November 2007. doi: 10.1086/519295.

- G. Bertelli, L. Girardi, P. Marigo, & E. Nasi. Scaled solar tracks and isochrones in a large region of the Z-Y plane. I. From the ZAMS to the TP-AGB end for 0.15-2.5  $M_{\odot}$  stars. *A&A*, 484:815–830, June 2008. doi: 10.1051/0004-6361:20079165.
- G. Bertelli, E. Nasi, L. Girardi, & P. Marigo. Scaled solar tracks and isochrones in a large region of the Z-Y plane. II. From 2.5 to 20  $M_{\odot}$  stars. *A&A*, 508:355–369, December 2009. doi: 10.1051/0004-6361/200912093.
- J. Binney & M. Merrifield. *Galactic Astronomy*. 1998.
- J. Binney & S. Tremaine. *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton University Press, 2008.
- V. V. Bobylev & A. T. Bajkova. Analysis of the velocity field of F and G dwarfs in the solar neighborhood as a function of age. *Astronomy Reports*, 51:372–381, May 2007. doi: 10.1134/S1063772907050034.
- V. V. Bobylev & A. T. Bajkova. A new estimate of the Local Standard of Rest from data on young Galactic objects. *ArXiv e-prints*, November 2014.
- W. J. Borucki, D. G. Koch, T. N. Gautier, III, E. W. Dunham, & Kepler Science Team. Kepler Mission Overview.
- J. Bovy, C. Allende Prieto, T. C. Beers, D. Bizyaev, L. N. da Costa, K. Cunha, G. L. Ebelke, D. J. Eisenstein, P. M. Frinchaboy, A. E. García Pérez, L. Girardi, F. R. Hearty, D. W. Hogg, J. Holtzman, M. A. G. Maia, S. R. Majewski, E. Malanushenko, V. Malanushenko, S. Mészáros, D. L. Nidever, R. W. O’Connell, C. O’Donnell, A. Oravetz, K. Pan, H. J. Rocha-Pinto, R. P. Schiavon, D. P. Schneider, M. Schultheis, M. Skrutskie, V. V. Smith, D. H. Weinberg, J. C. Wilson, & G. Zasowski. The Milky Way’s Circular-velocity Curve between 4 and 14 kpc from APOGEE data. *ApJ*, 759:131, November 2012a. doi: 10.1088/0004-637X/759/2/131.
- J. Bovy, H.-W. Rix, & D. W. Hogg. The Milky Way Has No Distinct Thick Disk. *ApJ*, 751:131, June 2012b. doi: 10.1088/0004-637X/751/2/131.
- A. J. Cannon & E. C. Pickering. *Henry Draper (HD) catalog and HD extension*. 1924.
- R. G. Carlberg & J. A. Sellwood. Dynamical evolution in galactic disks. *ApJ*, 292:79–89, May 1985. doi: 10.1086/163134.

- G. Carraro. The Milky Way thin disk structure as revealed by stars and young open clusters. In S. Feltzing, G. Zhao, N. A. Walton, & P. Whitelock, editors, *IAU Symposium*, volume 298 of *IAU Symposium*, pages 7–16, January 2014. doi: 10.1017/S1743921313006157.
- L. Casagrande, I. Ramírez, J. Meléndez, M. Bessell, & M. Asplund. An absolutely calibrated  $T_{eff}$  scale from the infrared flux method. Dwarfs and subgiants. *A&A*, 512:A54, March 2010. doi: 10.1051/0004-6361/200913204.
- L. Casagrande, R. Schönrich, M. Asplund, S. Cassisi, I. Ramírez, J. Meléndez, T. Bensby, & S. Feltzing. New constraints on the chemical evolution of the solar neighbourhood and Galactic disc(s). Improved astrophysical parameters for the Geneva-Copenhagen Survey. *A&A*, 530:A138, June 2011. doi: 10.1051/0004-6361/201016276.
- M. Chaussidon. *Formation of the Solar System: a Chronology Based on Meteorites*, page 45. 2007. doi: 10.1007/978-3-540-33693-8\_2.
- B. Coşkunoğlu, S. Ak, S. Bilir, S. Karaali, E. Yaz, G. Gilmore, G. M. Seabroke, O. Bienaymé, J. Bland-Hawthorn, R. Campbell, K. C. Freeman, B. Gibson, E. K. Grebel, U. Munari, J. F. Navarro, Q. A. Parker, A. Siebert, A. Siviero, M. Steinmetz, F. G. Watson, R. F. G. Wyse, & T. Zwitter. Local stellar kinematics from RAVE data - I. Local standard of rest. *MNRAS*, 412:1237–1245, April 2011. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.17983.x.
- A. Collier Cameron, V. A. Davidson, L. Hebb, G. Skinner, D. R. Anderson, D. J. Christian, W. I. Clarkson, B. Enoch, J. Irwin, Y. Joshi, C. A. Haswell, C. Hellier, K. D. Horne, S. R. Kane, T. A. Lister, P. F. L. Maxted, A. J. Norton, N. Parley, D. Pollacco, R. Ryans, A. Scholz, I. Skillen, B. Smalley, R. A. Street, R. G. West, D. M. Wilson, & P. J. Wheatley. The main-sequence rotation-colour relation in the Coma Berenices open cluster. *MNRAS*, 400:451–462, November 2009. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15476.x.
- J. J. Cowan, F.-K. Thielemann, & J. W. Truran. Radioactive dating of the elements. *ARA&A*, 29:447–497, 1991. doi: 10.1146/annurev.aa.29.090191.002311.
- D. L. Crawford. Empirical calibration of the ubvy,beta systems. I. The F-type stars. *AJ*, 80:955–971, November 1975. doi: 10.1086/111828.

- M. S. Cunha, C. Aerts, J. Christensen-Dalsgaard, A. Baglin, L. Bigot, T. M. Brown, C. Catala, O. L. Creevey, A. Domiciano de Souza, P. Eggenberger, P. J. V. Garcia, F. Grundahl, P. Kervella, D. W. Kurtz, P. Mathias, A. Miglio, M. J. P. F. G. Monteiro, G. Perrin, F. P. Pijpers, D. Pourbaix, A. Quirrenbach, K. Rousset-Perraut, T. C. Teixeira, F. Thévenin, & M. J. Thompson. Asteroseismology and interferometry. *A&A Rev.*, 14:217–360, November 2007. doi: 10.1007/s00159-007-0007-0.
- G. d’Agostini. Bayesian inference in processing experimental data: principles and basic applications. *Rept.Prog.Phys.*, 66:1383–1420, 2003. doi: 10.1088/0034-4885/66/9/201.
- R. de la Reza, E. Jilinski, & V. G. Ortega. Dynamical Evolution of the TW Hydrae Association. *AJ*, 131:2609–2614, May 2006. doi: 10.1086/501525.
- G. M. De Silva, K. C. Freeman, J. Bland-Hawthorn, M. Asplund, & M. S. Bessell. Chemically Tagging the HR 1614 Moving Group. *AJ*, 133:694–704, February 2007. doi: 10.1086/510131.
- W. Dehnen. The Distribution of Nearby Stars in Velocity Space Inferred from HIPPARCOS Data. *AJ*, 115:2384–2396, June 1998. doi: 10.1086/300364.
- W. Dehnen & J. J. Binney. Local stellar kinematics from HIPPARCOS data. *MNRAS*, 298:387–394, August 1998. doi: 10.1046/j.1365-8711.1998.01600.x.
- E. F. del Peloso, L. da Silva, & L. I. Arany-Prado. The age of the Galactic thin disk from Th/Eu nucleocosmochronology. II. Chronological analysis. *A&A*, 434:301–308, April 2005a. doi: 10.1051/0004-6361:20042438.
- E. F. del Peloso, L. da Silva, & G. F. Porto de Mello. The age of the Galactic thin disk from Th/Eu nucleocosmochronology. I. Determination of [Th/Eu] abundance ratios. *A&A*, 434:275–300, April 2005b. doi: 10.1051/0004-6361:20047060.
- E. F. del Peloso, L. da Silva, G. F. Porto de Mello, & L. I. Arany-Prado. The age of the Galactic thin disk from Th/Eu nucleocosmochronology. III. Extended sample. *A&A*, 440:1153–1159, September 2005c. doi: 10.1051/0004-6361:20053307.
- G. P. di Benedetto. VizieR Online Data Catalog: Calibration of stellar parameters (Di Benedetto 1998). *VizieR Online Data Catalog*, 333:90858, November 1998.
- R. A. Donahue. Stellar Ages Using the Chromospheric Activity of Field Binary Stars. In R. A. Donahue & J. A. Bookbinder, editors, *Cool Stars, Stellar Systems, and the*

- Sun*, volume 154 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 1235, 1998.
- B. Edvardsson, J. Andersen, B. Gustafsson, D. L. Lambert, P. E. Nissen, & J. Tomkin. The Chemical Evolution of the Galactic Disk - Part One - Analysis and Results. *A&A*, 275:101, August 1993.
- O. J. Eggen, D. Lynden-Bell, & A. R. Sandage. Evidence from the motions of old stars that the Galaxy collapsed. *ApJ*, 136:748, November 1962. doi: 10.1086/147433.
- B. Famaey, A. Jorissen, X. Luri, M. Mayor, S. Udry, H. Dejonghe, & C. Turon. Local kinematics of K and M giants from CORAVEL/Hipparcos/Tycho-2 data. Revisiting the concept of superclusters. *A&A*, 430:165–186, January 2005. doi: 10.1051/0004-6361:20041272.
- B. Famaey, A. Siebert, & A. Jorissen. On the age heterogeneity of the Pleiades, Hyades, and Sirius moving groups. *A&A*, 483:453–459, May 2008. doi: 10.1051/0004-6361:20078979.
- C. Fehrenbach, M. Duflot, & R. Burnage. New determination of the solar apex. *A&A*, 369:65–73, April 2001. doi: 10.1051/0004-6361:20010100.
- S. Feltzing, J. Holmberg, & J. Hurley. The Solar Neighborhood Age-Metallicity Relation - Does It Exist? In E. K. Grebel & W. Brandner, editors, *Modes of Star Formation and the Origin of Field Populations*, volume 285 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 243, 2002.
- D. Fernández, F. Figueras, & J. Torra. On the kinematic evolution of young local associations and the Scorpius-Centaurus complex. *A&A*, 480:735–751, March 2008. doi: 10.1051/0004-6361:20077720.
- C. Francis & E. Anderson. Calculation of the local standard of rest from 20 574 local stars in the New Hipparcos Reduction with known radial velocities. *New A*, 14:615–629, October 2009. doi: 10.1016/j.newast.2009.03.004.
- C. Francis & E. Anderson. The local standard of rest and the well in the velocity distribution. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 118:399–413, April 2014. doi: 10.1007/s10569-014-9541-z.

- K. Freeman. *Structure and Evolution of the Milky Way*, page 137. 2012. doi: 10.1007/978-3-642-18418-5\_14.
- A. E. Gomez, S. Grenier, S. Udry, M. Haywood, L. Meillon, V. Sabas, A. Sellier, & D. Morin. Kinematics of Disk Stars in the Solar Neighbourhood. In R. M. Bonnet, E. Høg, P. L. Bernacca, L. Emiliani, A. Blaauw, C. Turon, J. Kovalevsky, L. Lindegren, H. Hassan, M. Bouffard, B. Strim, D. Heger, M. A. C. Perryman, & L. Woltjer, editors, *Hipparcos - Venice '97*, volume 402 of *ESA Special Publication*, pages 621–624, August 1997.
- G. A. Gontcharov. Pulkovo Compilation of Radial Velocities for 35 495 Hipparcos stars in a common system. *Astronomy Letters*, 32:759–771, November 2006. doi: 10.1134/S1063773706110065.
- G. A. Gontcharov. Dependence of kinematics on the age of stars in the solar neighborhood. *Astronomy Letters*, 38:771–782, December 2012. doi: 10.1134/S1063773712120031.
- J. Hänninen & C. Flynn. Simulations of the heating of the Galactic stellar disc. *MNRAS*, 337:731–742, December 2002. doi: 10.1046/j.1365-8711.2002.05956.x.
- H. C. Harris, C. C. Dahn, & D. G. Monet. Accurate Ground-Based Parallaxes to Compare with HIPPARCOS. In R. M. Bonnet, E. Høg, P. L. Bernacca, L. Emiliani, A. Blaauw, C. Turon, J. Kovalevsky, L. Lindegren, H. Hassan, M. Bouffard, B. Strim, D. Heger, M. A. C. Perryman, & L. Woltjer, editors, *Hipparcos - Venice '97*, volume 402 of *ESA Special Publication*, pages 105–108, August 1997.
- A. Helmi, J. F. Navarro, B. Nordström, J. Holmberg, M. G. Abadi, & M. Steinmetz. Pieces of the puzzle: ancient substructure in the Galactic disc. *MNRAS*, 365:1309–1323, February 2006. doi: 10.1111/j.1365-2966.2005.09818.x.
- E. Høg, C. Fabricius, V. V. Makarov, S. Urban, T. Corbin, G. Wycoff, U. Bastian, P. Schwekendiek, & A. Wicenec. The Tycho-2 catalogue of the 2.5 million brightest stars. *A&A*, 355:L27–L30, March 2000.
- J. Holmberg, B. Nordström, & J. Andersen. The Geneva-Copenhagen survey of the Solar neighbourhood II. New uvby calibrations and rediscussion of stellar ages, the G dwarf problem, age-metallicity diagram, and heating mechanisms of the disk. *A&A*, 475:519–537, November 2007. doi: 10.1051/0004-6361:20077221.

- J. Holmberg, B. Nordström, & J. Andersen. The Geneva-Copenhagen survey of the solar neighbourhood. III. Improved distances, ages, and kinematics. *A&A*, 501:941–947, July 2009. doi: 10.1051/0004-6361/200811191.
- E. L. House, C. B. Brook, B. K. Gibson, P. Sánchez-Blázquez, S. Courty, C. G. Few, F. Governato, D. Kawata, R. Roškar, M. Steinmetz, G. S. Stinson, & R. Teyssier. Disc heating: comparing the Milky Way with cosmological simulations. *MNRAS*, 415:2652–2664, August 2011. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.18891.x.
- D. R. H. Johnson & D. R. Soderblom. Calculating galactic space velocities and their uncertainties, with an application to the Ursa Major group. *AJ*, 93:864–867, April 1987. doi: 10.1086/114370.
- B. R. Jørgensen & L. Lindegren. Determination of stellar ages from isochrones: Bayesian estimation versus isochrone fitting. *A&A*, 436:127–143, June 2005. doi: 10.1051/0004-6361:20042185.
- N. V. Kharchenko. All-sky compiled catalogue of 2.5 million stars. *Kinematika i Fizika Nebesnykh Tel*, 17:409–423, October 2001.
- N. V. Kharchenko, R.-D. Scholz, A. E. Piskunov, S. Roeser, & E. Schilbach. VizieR Online Data Catalog: 2nd Cat. of Radial Velocities with Astrometric Data (Kharchenko+, 2007). *VizieR Online Data Catalog*, 3254:0, June 2007.
- R. A. Knox, M. R. S. Hawkins, & N. C. Hambly. A survey for cool white dwarfs and the age of the Galactic disc. *MNRAS*, 306:736–752, July 1999. doi: 10.1046/j.1365-8711.1999.02625.x.
- G. Kordopatis, G. Gilmore, M. Steinmetz, C. Boeche, G. M. Seabroke, A. Siebert, T. Zwitter, J. Binney, P. de Laverny, A. Recio-Blanco, M. E. K. Williams, T. Piffl, H. Enke, S. Roeser, A. Bijaoui, R. F. G. Wyse, K. Freeman, U. Munari, I. Carrillo, B. Anguiano, D. Burton, R. Campbell, C. J. P. Cass, K. Fiegert, M. Hartley, Q. A. Parker, W. Reid, A. Ritter, K. S. Russell, M. Stupar, F. G. Watson, O. Bienaymé, J. Bland-Hawthorn, O. Gerhard, B. K. Gibson, E. K. Grebel, A. Helmi, J. F. Navarro, C. Conrad, B. Famaey, C. Faure, A. Just, J. Kos, G. Matijević, P. J. McMillan, I. Minchev, R. Scholz, S. Sharma, A. Siviero, E. W. de Boer, & M. Žerjal. The Radial Velocity Experiment (RAVE): Fourth Data Release. *AJ*, 146:134, November 2013. doi: 10.1088/0004-6256/146/5/134.

- V. V. Koval', V. A. Marsakov, & T. V. Borkova. Relationship between the velocity ellipsoids of galactic-disk stars and their ages and metallicities. *Astronomy Reports*, 53:785–800, September 2009. doi: 10.1134/S1063772909090029.
- G. G. Kuzmin & G. A. Malasidze. On a form of the gravitational potential allowing to solve the problem of plane stellar orbits in elliptic integrals. *Publications of the Tartu Astrofizica Observatory*, 38:181–250, 1970.
- R. Lachaume, C. Dominik, T. Lanz, & H. J. Habing. Age determinations of main-sequence stars: combining different methods. *A&A*, 348:897–909, August 1999.
- C. J. Lada & E. A. Lada. Embedded Clusters in Molecular Clouds. *ARA&A*, 41:57–115, 2003. doi: 10.1146/annurev.astro.41.011802.094844.
- D. W. Latham. Digital stellar speedometry. In A. G. D. Philip & D. W. Latham, editors, *Stellar Radial Velocities*, pages 21–34, 1985.
- S. K. Leggett, M. T. Ruiz, & P. Bergeron. The Cool White Dwarf Luminosity Function and the Age of the Galactic Disk. *ApJ*, 497:294–302, April 1998. doi: 10.1086/305463.
- J.-C. Liu, Z. Zhu, & H. Zhang. Reconsidering the Galactic coordinate system. *A&A*, 526:A16, February 2011. doi: 10.1051/0004-6361/201014961.
- H.-G. Ludwig, E. Caffau, M. Steffen, P. Bonifacio, & L. Sbordone. Accuracy of spectroscopy-based radioactive dating of stars. *A&A*, 509:A84, January 2010. doi: 10.1051/0004-6361/200810780.
- D. Lynden-Bell. The invariant eccentricity of galactic orbits. *The Observatory*, 83:23–25, February 1963.
- W. Lyra & G. F. Porto de Mello. Fine structure of the chromospheric activity in Solar-type stars - The H $\alpha$  line. *A&A*, 431:329–338, February 2005. doi: 10.1051/0004-6361:20040249.
- V. V. Makarov. Unraveling the Origins of Nearby Young Stars. *ApJS*, 169:105–119, March 2007. doi: 10.1086/509887.
- M. Martig, I. Minchev, & C. Flynn. Dissecting simulated disc galaxies - II. The age-velocity relation. *MNRAS*, 443:2452–2462, September 2014. doi: 10.1093/mnras/stu1322.

- M. Mayor. Kinematics and Age of Stars. *A&A*, 32:321, May 1974.
- A. McQuillan, S. Aigrain, & T. Mazeh. Measuring the rotation period distribution of field M dwarfs with Kepler. *MNRAS*, 432:1203–1216, June 2013. doi: 10.1093/mnras/stt536.
- D. Mihalas & J. Binney. *Galactic astronomy: Structure and kinematics /2nd edition/*. 1981.
- I. Minchev & B. Famaey. A New Mechanism for Radial Migration in Galactic Disks: Spiral-Bar Resonance Overlap. *ApJ*, 722:112–121, October 2010. doi: 10.1088/0004-637X/722/1/112.
- I. Minchev & A. Quillen. Radial Heating of a Galactic Disk by Multiple Spiral Density Waves.
- S. Ninkovic. A New Kinematical Definition of Orbital Eccentricity. *Serbian Astronomical Journal*, 179:49–53, December 2009. doi: 10.2298/SAJ0979049N.
- S. Ninkovic & B. Jovanovic. On the Orbital Periods for a Particular Case of Spherical Symmetry. *Serbian Astronomical Journal*, 176:45–49, June 2008. doi: 10.2298/SAJ0876045N.
- B. Nordström, M. Mayor, J. Andersen, J. Holmberg, F. Pont, B. R. Jørgensen, E. H. Olsen, S. Udry, & N. Mowlavi. The Geneva-Copenhagen survey of the Solar neighbourhood. Ages, metallicities, and kinematic properties of  $\sim 14\,000$  F and G dwarfs. *A&A*, 418:989–1019, May 2004. doi: 10.1051/0004-6361:20035959.
- E. H. Olsen. Preliminary UVBY calibrations for G and K type dwarf stars. *A&AS*, 57: 443–466, September 1984.
- E. H. Olsen. The intrinsic colour calibration of Stromgren photometry for F-type stars. *A&A*, 189:173–178, January 1988.
- J. H. Oort. *The Stars of High Velocity*. PhD thesis, Publications of the Kapteyn Astronomical Laboratory Groningen, vol. 40, pp.1-75, 1926.
- V. G. Ortega, R. de la Reza, E. Jilinski, & B. Bazzanella. The Origin of the  $\beta$  Pictoris Moving Group. *ApJ*, 575:L75–L78, August 2002. doi: 10.1086/342742.

- M. A. C. Perryman, L. Lindegren, J. Kovalevsky, E. Hoeg, U. Bastian, P. L. Bernacca, M. Cr ez e, F. Donati, M. Grenon, M. Grewing, F. van Leeuwen, H. van der Marel, F. Mignard, C. A. Murray, R. S. Le Poole, H. Schrijver, C. Turon, F. Arenou, M. Froeschl e, & C. S. Petersen. The HIPPARCOS Catalogue. *A&A*, 323:L49–L52, July 1997.
- M. A. C. Perryman, K. S. de Boer, G. Gilmore, E. H og, M. G. Lattanzi, L. Lindegren, X. Luri, F. Mignard, O. Pace, & P. T. de Zeeuw. GAIA: Composition, formation and evolution of the Galaxy. *A&A*, 369:339–363, April 2001. doi: 10.1051/0004-6361:20010085.
- A. Pietrinferni, S. Cassisi, M. Salaris, & F. Castelli. A Large Stellar Evolution Database for Population Synthesis Studies. I. Scaled Solar Models and Isochrones. *ApJ*, 612: 168–190, September 2004. doi: 10.1086/422498.
- F. Pont & L. Eyer. Isochrone ages for field dwarfs: method and application to the age-metallicity relation. *MNRAS*, 351:487–504, June 2004. doi: 10.1111/j.1365-2966.2004.07780.x.
- A. C. Quillen & D. R. Garnett. The Saturation of Disk Heating in the Solar Neighborhood and Evidence for a Merger 9 Gyr Ago. In J. G. Funes & E. M. Corsini, editors, *Galaxy Disks and Disk Galaxies*, volume 230 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 87–88, 2001.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2014. URL <http://www.R-project.org/>.
- A. Rebassa-Mansergas, M. R. Schreiber, & B. T. G ansicke. M dwarf companions to white dwarfs - I. Relating magnetic activity, rotation and age. *MNRAS*, 429:3570–3577, March 2013. doi: 10.1093/mnras/sts630.
- H. J. Rocha-Pinto. *A Evolu  o do Disco Gal ctico Segundo as Propriedades de Suas An s Tardias*. PhD thesis, Universidade de S o Paulo, Instituto Astron mico e Geof sico, 2000.
- H. J. Rocha-Pinto & W. J. Maciel. Metallicity effects on the chromospheric activity-age relation for late-type dwarfs. *MNRAS*, 298:332–346, August 1998. doi: 10.1046/j.1365-8711.1998.01597.x.

- H. J. Rocha-Pinto, W. J. Maciel, J. Scalo, & C. Flynn. Chemical enrichment and star formation in the Milky Way disk. I. Sample description and chromospheric age-metallicity relation. *A&A*, 358:850–868, June 2000.
- M. Schmidt & H. Lipson. Distilling Free-Form Natural Laws from Experimental Data. 324:81–85, 2009. doi: 10.1126/science.1165893.
- R. Schönrich, J. Binney, & W. Dehnen. Local kinematics and the local standard of rest. *MNRAS*, 403:1829–1833, April 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16253.x.
- W. J. Schuster & P. E. Nissen. Uvby-beta photometry of high-velocity and metal-poor stars. II - Intrinsic color and metallicity calibrations. *A&A*, 221:65–77, August 1989.
- K. Schwarzschild. *Göttingen Nachr.*, 614, 1907.
- M. Schwarzschild. Perigalactic and apogalactic distances of high-velocity stars. *AJ*, 57: 57, May 1952. doi: 10.1086/106710.
- J. A. Sellwood & J. J. Binney. Radial mixing in galactic discs. *MNRAS*, 336:785–796, November 2002. doi: 10.1046/j.1365-8711.2002.05806.x.
- P. Sestito & S. Randich. Time scales of Li evolution: a homogeneous analysis of open clusters from ZAMS to late-MS. *A&A*, 442:615–627, November 2005. doi: 10.1051/0004-6361:20053482.
- J. Silaj & J. D. Landstreet. Accurate age determinations of several nearby open clusters containing magnetic Ap stars. *A&A*, 566:A132, June 2014. doi: 10.1051/0004-6361/201321468.
- M. F. Skrutskie, R. M. Cutri, R. Stiening, M. D. Weinberg, S. Schneider, J. M. Carpenter, C. Beichman, R. Capps, T. Chester, J. Elias, J. Huchra, J. Liebert, C. Lonsdale, D. G. Monet, S. Price, P. Seitzer, T. Jarrett, J. D. Kirkpatrick, J. E. Gizis, E. Howard, T. Evans, J. Fowler, L. Fullmer, R. Hurt, R. Light, E. L. Kopan, K. A. Marsh, H. L. McCallon, R. Tam, S. Van Dyk, & S. Wheelock. The Two Micron All Sky Survey (2MASS). *AJ*, 131:1163–1183, February 2006. doi: 10.1086/498708.
- A. Skumanich. Time Scales for CA II Emission Decay, Rotational Braking, and Lithium Depletion. *ApJ*, 171:565, February 1972. doi: 10.1086/151310.

- D. R. Soderblom. The Ages of Stars. *ARA&A*, 48:581–629, September 2010. doi: 10.1146/annurev-astro-081309-130806.
- D. R. Soderblom. Ages of stars: Methods and uncertainties. *ArXiv e-prints*, September 2014.
- D. R. Soderblom, D. K. Duncan, & D. R. H. Johnson. The chromospheric emission-age relation for stars of the lower main sequence and its implications for the star formation rate. *ApJ*, 375:722–739, July 1991. doi: 10.1086/170238.
- L. Spitzer, Jr. & M. Schwarzschild. The Possible Influence of Interstellar Clouds on Stellar Velocities. *ApJ*, 114:385, November 1951. doi: 10.1086/145478.
- M. Steinmetz, T. Zwitter, A. Siebert, F. G. Watson, K. C. Freeman, U. Munari, R. Campbell, M. Williams, G. M. Seabroke, R. F. G. Wyse, Q. A. Parker, O. Bienaymé, S. Roeser, B. K. Gibson, G. Gilmore, E. K. Grebel, A. Helmi, J. F. Navarro, D. Burton, C. J. P. Cass, J. A. Dawe, K. Fiegert, M. Hartley, K. S. Russell, W. Saunders, H. Enke, J. Bailin, J. Binney, J. Bland-Hawthorn, C. Boeche, W. Dehnen, D. J. Eisenstein, N. W. Evans, M. Fiorucci, J. P. Fulbright, O. Gerhard, U. Jauregi, A. Kelz, L. Mijović, I. Minchev, G. Parmentier, J. Peñarrubia, A. C. Quillen, M. A. Read, G. Ruchti, R.-D. Scholz, A. Siviero, M. C. Smith, R. Sordo, L. Veltz, S. Vindrih, R. von Berlepsch, B. J. Boyle, & E. Schilbach. The Radial Velocity Experiment (RAVE): First Data Release. *AJ*, 132:1645–1668, October 2006. doi: 10.1086/506564.
- H.H. Turner. *The Great Star Map, Being a Brief General Account of the International Project Known As the Astrographic Chart*. General Books LLC, 1912. ISBN 9781154941791. URL <http://books.google.com.br/books?id=WHLFbwAACAAJ>.
- F. van Leeuwen, editor. *Hipparcos, the New Reduction of the Raw Data*, volume 350 of *Astrophysics and Space Science Library*, 2007.
- S. Vauclair. Stellar ages from asteroseismology: a few examples. In E. E. Mamajek, D. R. Soderblom, & R. F. G. Wyse, editors, *IAU Symposium*, volume 258 of *IAU Symposium*, pages 443–448, June 2009. doi: 10.1017/S1743921309032098.
- W. N. Venables & B. D. Ripley. *Modern Applied Statistics with S*. Springer, New York, fourth edition, 2002. URL <http://www.stats.ox.ac.uk/pub/MASS4>. ISBN 0-387-95457-0.

- 
- A. N. Vyssotsky & E. T. R. Williams. An investigation of stellar motions: I. The McCormick proper motion catalogues. *AJ*, 53:49, January 1948. doi: 10.1086/106048.
- D. R. Xiong & L. Deng. Lithium Depletions in Late-type Dwarfs. In L. Deng & K. L. Chan, editors, *IAU Symposium*, volume 252 of *IAU Symposium*, pages 61–65, October 2008. doi: 10.1017/S1743921308022448.
- N. Zacharias, C. T. Finch, T. M. Girard, A. Henden, J. L. Bartlett, D. G. Monet, & M. I. Zacharias. The Fourth US Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC4). *AJ*, 145:44, February 2013. doi: 10.1088/0004-6256/145/2/44.