



ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS ESPESAS ATRAVÉS DE MÉTODOS  
SEM MALHAS COM A UTILIZAÇÃO DE UMA TÉCNICA EFICIENTE DE  
INTEGRAÇÃO

Danilo Hiroshi Konda

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: José Antônio Fontes Santiago  
José Claudio de Faria Telles

Rio de Janeiro  
Setembro de 2018

ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS ESPESSAS ATRAVÉS DE MÉTODOS  
SEM MALHAS COM A UTILIZAÇÃO DE UMA TÉCNICA EFICIENTE DE  
INTEGRAÇÃO

Danilo Hiroshi Konda

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

---

Prof. José Antônio Fontes Santiago, D.Sc.

---

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.

---

Dr<sup>a</sup>. Solange Guimarães, D.Sc.

---

Prof. Edivaldo Figueiredo Fontes Júnior, D.Sc.

---

Dr. Edmundo Guimarães de Araújo Costa, D.Sc.

---

Prof<sup>a</sup>. Gabriela Rezende Fernandes, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
SETEMBRO DE 2018

Konda, Danilo Hiroshi

Análise de Flexão de Placas Espessas Através de Métodos Sem Malhas com a Utilização de uma Técnica Eficiente de Integração/Danilo Hiroshi Konda. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XXII, 107 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: José Antônio Fontes Santiago

José Claudio de Faria Telles

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 101 – 105.

1. Flexão de Placas. 2. Meshless Local Petrov-Galerkin. 3. Local Radial Point Interpolation Method. I. Santiago, José Antônio Fontes *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*Aos meus pais, Armando e  
Luzia, aos meus irmãos, Fabrício,  
Lujan e Audrey, e à minha  
esposa Paula.*

# Agradecimentos

A Deus, que tudo criou, Grande Arquiteto do Universo.

Agradeço a minha esposa Paula, a melhor desse mundo, por toda paciência e incentivo. Sem ela nada seria possível.

Especial agradecimento aos orientadores, Prof. Dr. José Antônio Fontes Santiago e Prof. Ph.D. José Claudio de Faria Telles, por toda a paciência e dedicação em prol de meu aprendizado. Da mesma forma agradeço ao prof. Dr. Edivaldo Figueiredo Fontes Júnior e ao prof. Dr. Wilian Santos.

Ao amigo Marco Aurélio e a sua esposa Fabieli, agradeço pela acolhida.

Aos amigos João, Kathleen, Igor, Waldez e Patrícia pelas contribuições diárias.

Ao amigos Nilton, Paulo, Tiago, Leonardo e Isaque por continuarem semeando nossa amizade durante este trabalho tão árduo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Aos amigos do Lamec, Marlucio, Samuel, Paulo e André.

De maneira igual, agradeço aos servidores da Universidade Federal do Rio de Janeiro e da Universidade Federal de Mato Grosso, todos meus familiares e amigos, que de alguma forma contribuíram positivamente para o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS ESPESSAS ATRAVÉS DE MÉTODOS SEM MALHAS COM A UTILIZAÇÃO DE UMA TÉCNICA EFICIENTE DE INTEGRAÇÃO

Danilo Hiroshi Konda

Setembro/2018

Orientadores: José Antônio Fontes Santiago  
José Claudio de Faria Telles

Programa: Engenharia Civil

Apresenta-se, nesta tese, a utilização de métodos sem malhas para análise do problema de flexão de placas espessas com consideração das hipóteses de Reissner. Uma proposta inovadora para a avaliação das integrais que descrevem o problema é utilizada visando reduzir o custo computacional do método. A formulação desenvolvida é testada para avaliar a ocorrência do fenômeno de *shear locking* quando da utilização do processo de integração proposto. A utilização de bases monomiais de diferentes ordens também é objeto de estudo para análise do comportamento do efeito de *shear locking*. Diferentes processos de obtenção de funções de aproximação são utilizados para avaliar o comportamento do método *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) na solução do problema de flexão de placas. O comportamento da formulação também é analisado para a utilização de diferentes processos de imposição das condições de contorno essenciais. Os resultados obtidos com o MLPG considerando o processo de integração proposto são comparados com os resultados obtidos com o MLPG considerando o processo de integração tradicional e também com resultados obtidos a partir de formulações que utilizam o método dos elementos finitos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

A MESHLESS THICK PLATE BENDING PROCEDURE USING AN  
EFFICIENT INTEGRATION SCHEME

Danilo Hiroshi Konda

September/2018

Advisors: José Antônio Fontes Santiago  
José Claudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

In this work, we present the use of meshless methods for the analysis of the thick plate bending problem under consideration of Reissner's hypotheses. A new procedure for the evaluation of integrals that describe the problem is used to reduce the computational cost. The developed formulation is tested to evaluate the occurrence of the shear locking effect when using the proposed integration scheme. Monomial bases of different orders are used to analyze the shear locking effect. Different shape functions are used to evaluate the MLPG method performance in the solution of plate bending problem. The formulation is also analyzed when using different processes of imposing essential boundary conditions. The results obtained with the MLPG considering the proposed integration scheme are compared with the results obtained with the MLPG considering the traditional integration process and also with results obtained from formulations that use the finite element method.

# Sumário

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Lista de Figuras</b>   | <b>x</b>    |
| <b>Lista de Tabelas</b>   | <b>xiii</b> |
| <b>Lista de Símbolos</b>  | <b>xiv</b>  |
| <b>Lista de Abreviaturas</b>  | <b>xxii</b> |
| <b>1 Introdução</b>   | <b>1</b>    |
| 1.1 Revisão Bibliográfica . . . . .                                       | 1           |
| 1.2 Objetivos . . . . .   | 5           |
| 1.3 Conteúdo . . . . .  | 6           |
| <b>2 Problema de Flexão de Placas Espessas</b>                            | <b>7</b>    |
| 2.1 Hipóteses Básicas . . . . .   | 7           |
| 2.2 Relações Básicas de Equilíbrio da Elasticidade . . . . .              | 9           |
| 2.3 Tensões, Esforços Solicitantes e Equações de Equilíbrio para Placas . | 11          |
| 2.4 Relação entre Deslocamentos Generalizados e Deformações . . . . .     | 14          |
| 2.5 Relação entre Esforços e Deslocamentos Generalizados . . . . .        | 15          |
| 2.6 Condições de Contorno . . . . .                                       | 24          |
| <b>3 Aproximação de Funções</b>   | <b>26</b>   |
| 3.1 Interpolação Usando Funções de Base Radial . . . . .                  | 26          |
| 3.2 Interpolação Usando Funções de Base Radial com Termos Polinomiais     | 29          |
| 3.3 Aproximação com o Método dos Mínimos Quadrados Móveis . . . . .       | 32          |
| <b>4 Método Local Sem Malha Petrov-Galerkin</b>                           | <b>39</b>   |
| 4.1 Forma Fraca Local . . . . .   | 41          |
| 4.2 Sistema de Equações Discretizado . . . . .                            | 44          |
| 4.3 Imposição das Condições de Contorno Essenciais . . . . .              | 49          |
| 4.3.1 Método da Interpolação Direta . . . . .                             | 49          |
| 4.3.2 Método das Penalidades . . . . .                                    | 51          |
| 4.4 Integração Numérica . . . . .   | 53          |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.4.1    | Geometria de Integração . . . . .  | 53         |
| 4.4.2    | Aproximação das Variáveis no Ponto de Quadratura . . . . .                             | 59         |
| 4.4.3    | Proposta de Aproximação Simplificada das Variáveis no Ponto<br>de Quadratura . . . . . | 61         |
| 4.5      | Descontinuidade na Geometria do Contorno . . . . .                                     | 63         |
| 4.6      | Implementação Numérica . . . . .   | 65         |
| <b>5</b> | <b>Resultados e Discussões</b>   | <b>67</b>  |
| 5.1      | Placa Quadrada Totalmente Engastada . . . . .  | 68         |
| 5.1.1    | Análise utilizando função de base radial . . . . .                                     | 68         |
| 5.1.2    | Análise utilizando o método dos mínimos quadrados móveis . . . . .                     | 73         |
| 5.1.3    | Imposição das condições de contorno essenciais . . . . .                               | 76         |
| 5.2      | Placa Quadrada Biapoiada . . . . .   | 77         |
| 5.3      | Placa em Balanço . . . . .   | 83         |
| 5.4      | Placa Esconsa . . . . .  | 87         |
| <b>6</b> | <b>Considerações Finais</b>  | <b>96</b>  |
| 6.1      | Conclusões . . . . .   | 96         |
| 6.2      | Sugestões para desenvolvimentos futuros . . . . .                                      | 99         |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>  | <b>101</b> |
| <b>A</b> | <b>Placa Quadrada Biapoiada - Apoio <i>Soft</i> e <i>Hard</i></b>                      | <b>106</b> |

# Lista de Figuras

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1  | Sistema de coordenadas e orientação dos deslocamentos da placa . . .   | 8  |
| 2.2  | Representação da deformação por cisalhamento transversal . . . . .   | 9  |
| 2.3  | Tensões e forças de volume em um volume infinitesimal . . . . .  | 10 |
| 2.4  | Elemento sujeito a forças de superfície . . . . .  | 11 |
| 2.5  | Componentes de tensão em um elemento de placa sujeito à flexão<br>simples . . . . .  | 12 |
| 2.6  | Esforços resultantes em um elemento de placa . . . . .   | 13 |
| 3.1  | Triângulo de Pascal para obtenção dos monômios - caso bidimensional  | 30 |
| 3.2  | Interpretação geométrica do MLS . . . . .  | 33 |
| 3.3  | Função de ponderação - Spline de quarta ordem . . . . .  | 37 |
| 3.4  | Derivada da função de ponderação - Spline de quarta ordem . . . . .  | 38 |
| 4.1  | Composição de cada tipo de contorno para integração . . . . .  | 42 |
| 4.2  | Posições possíveis para o domínio de integração . . . . .  | 54 |
| 4.3  | Padronização da região triangular . . . . .  | 55 |
| 4.4  | Orientação do contorno na geometria triangular . . . . .   | 56 |
| 4.5  | Disposição geométrica das abscissas de Gauss-Legendre em $\Omega_s$ circular   | 59 |
| 4.6  | Disposição geométrica das abscissas de Gauss-Legendre em $\Omega_s$ trian-<br>gular . . . . .  | 59 |
| 4.7  | Aproximação tradicional no ponto de quadratura . . . . .   | 60 |
| 4.8  | Aproximação no ponto de Gauss com o uso do subdomínio de influência  | 61 |
| 4.9  | Proposta de aproximação simplificada no ponto de Gauss . . . . .   | 62 |
| 4.10 | Direção normal ao contorno - Geometria irregular . . . . .   | 63 |
| 4.11 | (a) Exemplo de forma geométrica permitida - (b) Exemplo de forma<br>não permitida, com projeção da aresta adentrando o domínio $\Omega$ . . .                                    | 64 |
| 4.12 | (a) Nó de canto com duas direções normais ao contorno - (b) Nó de<br>canto com escolha aleatória da direção normal ao contorno - (c) Canto<br>com nó duplo recalculado . . . . . | 64 |
| 5.1  | Placa engastada - Eixo de análise $a - a'$ . . . . .   | 68 |
| 5.2  | Nuvem de pontos - 289 nós . . . . .  | 69 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 5.3  | Placa engastada - Eixo de análise $a - a'$ . . . . .   | 69 |
| 5.4  | Convergência de resultados - Eixo de análise $a - a'$ . . . . .  | 70 |
| 5.5  | Comparação entre os modelos de integração - Deslocamento transversal máximo . . . . .                                    | 70 |
| 5.6  | Influência dos nós campo no ponto de interesse - Nuvem com 25 nós .  | 71 |
| 5.7  | Custo computacional - placa engastada . . . . .  | 71 |
| 5.8  | Efeito de <i>shear locking</i> - placa engastada . . . . .   | 73 |
| 5.9  | Placa engastada - Eixo de análise $a - a'$ . . . . .   | 74 |
| 5.10 | Comparação entre os modelos de integração utilizando MLS e FBR - Deslocamento transversal máximo . . . . .               | 74 |
| 5.11 | Custo computacional entre os diferentes métodos de integração - FBR e MLS . . . . .                                      | 75 |
| 5.12 | Efeito de <i>shear locking</i> . . . . .   | 75 |
| 5.13 | Rotações da placa engastada - Integração proposta . . . . .  | 76 |
| 5.14 | Deslocamento transversal da placa engastada - Integração proposta .  | 76 |
| 5.15 | Placa biapoiada - Dimensões e eixos de análise . . . . .   | 77 |
| 5.16 | Deslocamentos no eixo $a - a'$ . . . . .   | 78 |
| 5.17 | Deslocamentos no eixo $b - b'$ . . . . .   | 78 |
| 5.18 | Posicionamento em detalhes dos nós duplos - distribuição de pontos no eixo $c - c'$ . . . . .                            | 79 |
| 5.19 | Deslocamentos no eixo $c - c'$ . . . . .   | 79 |
| 5.20 | Convergência e comparação entre os modelos de integração - Deslocamento transversal máximo . . . . .                     | 80 |
| 5.21 | Custo computacional - placa biapoiada . . . . .  | 80 |
| 5.22 | Efeito de <i>shear locking</i> - placa biapoiada . . . . .   | 81 |
| 5.23 | Efeito de <i>shear locking</i> em função da quantidade de pontos do suporte local - aproximação quadrática . . . . .     | 82 |
| 5.24 | Efeito de <i>shear locking</i> em função da quantidade de pontos do suporte local - aproximação cúbica . . . . .         | 82 |
| 5.25 | Efeito de <i>shear locking</i> em função da quantidade de pontos do suporte local - aproximação quártica . . . . .       | 82 |
| 5.26 | Placa em balanço - Dimensões e eixo de análise . . . . .   | 83 |
| 5.27 | Deslocamentos no eixo $a - a'$ . . . . .   | 84 |
| 5.28 | Convergência e comparação entre os modelos de integração - Deslocamento transversal máximo da placa em balanço . . . . . | 84 |
| 5.29 | Custo computacional - placa balanço . . . . .  | 85 |
| 5.30 | Efeito de <i>shear locking</i> - placa em balanço . . . . .  | 86 |
| 5.31 | Rotação na direção $X_1$ - Placa em balanço . . . . .  | 86 |
| 5.32 | Rotação na direção $X_2$ - Placa em balanço . . . . .  | 87 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.33 | Deslocamento transversal - Placa em balanço . . . . .   | 87  |
| 5.34 | Placa esconsa . . . . .   | 88  |
| 5.35 | Deslocamentos no eixo $a - a'$ - Placa esconsa . . . . .  | 88  |
| 5.36 | Erro relativo no ponto central da placa - Comparação entre modelos<br>de integração . . . . .                               | 89  |
| 5.37 | Custo computacional - placa esconsa . . . . .   | 89  |
| 5.38 | Influência da quantidade de pontos utilizados no subdomínio do ponto<br>de interesse - Aproximação linear . . . . .         | 90  |
| 5.39 | Influência da quantidade de pontos utilizados no subdomínio do ponto<br>de interesse - Aproximação quadrática . . . . .     | 91  |
| 5.40 | Influência da quantidade de pontos utilizados no subdomínio do ponto<br>de interesse - Aproximação cúbica . . . . .         | 91  |
| 5.41 | Influência da quantidade de pontos utilizados no subdomínio do ponto<br>de interesse - Aproximação quártica . . . . .       | 92  |
| 5.42 | Influência da quantidade de pontos utilizados no subdomínio do ponto<br>de interesse - Aproximação quártica . . . . .       | 92  |
| 5.43 | Efeito de <i>shear locking</i> com aproximação quadrática - Deslocamento<br>transversal no ponto central da placa . . . . . | 93  |
| 5.44 | Efeito de <i>shear locking</i> - Placa esconsa . . . . .  | 93  |
| 5.45 | Influência do número de termos da base monomial no efeito de <i>shear<br/>locking</i> - Placa esconsa . . . . .             | 94  |
| 5.46 | Rotação na direção $X_1$ - placa esconsa . . . . .  | 94  |
| 5.47 | Rotação na direção $X_2$ - placa esconsa . . . . .  | 94  |
| 5.48 | Deslocamento transversal da placa esconsa . . . . .   | 95  |
| A.1  | Deslocamento tranversal - (a) placa com apoio <i>soft</i> e (b) placa com<br>apoio <i>hard</i> . . . . .                    | 106 |
| A.2  | Rotação na direção $X_1$ - (a) placa com apoio <i>soft</i> e (b) placa com<br>apoio <i>hard</i> . . . . .                   | 107 |
| A.3  | Rotação na direção $X_2$ - (a) placa com apoio <i>soft</i> e (b) placa com<br>apoio <i>hard</i> . . . . .                   | 107 |

# Lista de Tabelas

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.1 | Coefficientes e abscissas de Gauss para $N_\xi = 4$ . . . . .   | 59 |
| 5.1 | Número de nós utilizados na obtenção da função de aproximação -<br>placa totalmente engastada . . . . . | 72 |
| 5.2 | Número de nós utilizados na obtenção da função de aproximação -<br>placa biapoiada . . . . .            | 81 |
| 5.3 | Número de nós utilizados na obtenção da função de aproximação -<br>placa em balanço . . . . .           | 85 |
| 5.4 | Número de nós utilizados na obtenção da função de aproximação -<br>placa esconsa . . . . .              | 89 |

# Lista de Símbolos

|                 |  |
|-----------------|--|
| $A_t$           | Superfície de contorno com força prescrita, p. 15  |
| $A_u$           | Superfície de contorno com deslocamento prescrito, p. 16   |
| $D$             | Módulo de rigidez à flexão, p. 23  |
| $E$             | Módulo de elasticidade longitudinal, p. 17   |
| $G$             | Módulo de elasticidade transversal, p. 17  |
| $I$             | Momento de inércia, p. 12  |
| $J(x_i)$        | Função resíduo quadrático ponderado acumulado do ponto $x_i$ , p. 33   |
| $M$             | Quantidade de termos que compõem a base monomial, p. 32  |
| $M_n$           | Momento que produz tendência de rotação em torno da direção $\mathbf{s}$ , p. 22   |
| $M_{ij}$        | Momento solicitante no plano $X_1X_2$ , atuando na face com normal na direção $X_i$ e perpendicular a $X_j$ , p. 12      |
| $M_{ns}$        | Momento que produz tendência de rotação em torno da direção $\mathbf{n}$ , p. 24   |
| $N$             | Quantidade de pontos utilizados para dar suporte ao processo de aproximação, p. 33                                       |
| $N_T$           | Número total de pontos utilizados para discretizar o problema, p. 49   |
| $P_1, P_2, P_3$ | Generalização dos esforços resultantes provenientes das forças de superfície $p_1, p_2$ e $p_3$ , respectivamente, p. 22 |
| $Q_i$           | Esforço cortante em uma face com normal na direção $X_i$ , p. 12   |

|                         |   |
|-------------------------|---|
| $Q_n$                   | Esforço cortante que atua em uma face do contorno da placa com normal $n$ , p. 22           |
| $R(x_i, x_j)$           | Distância euclidiana entre o ponto $x_i$ e o ponto $x_j$ , p. 27                            |
| $U_0$                   | Energia de deformação específica, p. 15   |
| $U_1, U_2, U_3$         | Generalização dos deslocamentos na superfície média da placa, p. 23                         |
| $U_{EE}$                | Energia potencial dos esforços externos, p. 15  |
| $U_{EI}$                | Energia potencial dos esforços internos, p. 15  |
| $U_{EI}^*$              | Energia de deformação complementar, p. 16   |
| $V$                     | Volume, p. 9  |
| $W_I$                   | Função de ponderação centrada no nó $I$ , p. 41   |
| $X_1, X_2, X_3$         | Identificação dos eixos cartesianos (Sistema destro adotado), p. 8                          |
| $\Gamma$                | Contorno do domínio $\Omega$ , p. 18  |
| $\Gamma_q$              | Contorno de $\Omega_q$ , p. 42  |
| $\Gamma_t$              | Trecho de $\Gamma$ com prescrição de forças, p. 18  |
| $\Gamma_u$              | Trecho de $\Gamma$ com prescrição de deslocamentos, p. 18                                   |
| $\Gamma_{qi}$           | Trecho de $\Gamma_q$ que não coincide com o contorno da placa, p. 42                        |
| $\Gamma_{qt}$           | Trecho de $\Gamma_q$ que coincide com o contorno da placa com força prescrita, p. 42        |
| $\Gamma_{qu}$           | Trecho de $\Gamma_q$ que coincide com o contorno da placa com deslocamento prescrito, p. 42 |
| $\Omega$                | Domínio da placa, pode ser representado pela superfície média da placa, p. 17               |
| $\Omega_q$              | Subdomínio de integração, p. 41   |
| $\alpha, \beta, \gamma$ | Cossenos diretores do versor $\hat{\mathbf{n}}$ , normal ao contorno, p. 10                 |
| $\alpha_j$              | $j$ -ésimo parâmetro a ser determinado no processo de aproximação, p. 27                    |

|                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| $\alpha_p$                        | Parâmetro de penalidade, p. 52  |
| $\bar{M}_{ij}$                    | $M_{ij}$ com valor prescrito, p. 18   |
| $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ | Valores prescritos de $P_1, P_2$ e $P_3$ , respectivamente, p. 22   |
| $\bar{Q}_i$                       | $Q_i$ com valor prescrito, p. 18  |
| $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3$ | Valores prescritos de $\bar{U}_1, \bar{U}_2$ e $\bar{U}_3$ , respectivamente, p. 23                                   |
| $\bar{\phi}_1$                    | $\phi_1$ com valor prescrito, p. 19   |
| $\bar{\phi}_2$                    | $\phi_2$ com valor prescrito, p. 19   |
| $\bar{\mathbf{f}}_{x_i}$          | Vetor que contém os valores prescritos de $f$ , de todos os pontos contido no subdomínio local do ponto $x_i$ , p. 28 |
| $\bar{\mathbf{u}}(x_q)$           | Vetor que contém os deslocamentos prescritos do ponto $x_q$ , p. 51   |
| $\bar{b}_i$                       | Força de volume prescrita na direção $X_i$ , p. 15  |
| $\bar{f}(x_i)$                    | Valor prescrito de $f$ no ponto $x_i$ , p. 27   |
| $\bar{f}(x_i^j)$                  | Valor prescrito da variável $f$ no $j$ -ésimo ponto do subdomínio local do ponto $x_i$ , p. 28                        |
| $\bar{p}_i$                       | Força de superfície prescrita na direção $X_i$ , p. 15  |
| $\bar{u}_i$                       | Deslocamento prescrito na direção $X_i$ , p. 16   |
| $\bar{w}$                         | $w$ com valor prescrito, p. 19  |
| $\beta_i^u$                       | Deformação cisalhante devido à consideração do esforço cisalhante na direção $X_i$ , p. 9                             |
| $\beta_j$                         | $j$ -ésimo parâmetro a ser determinado no processo de aproximação, p. 29  |
| $\delta$                          | Operador que indica variação, p. 19   |
| $\delta_{ij}$                     | Delta de Kronecker, p. 17   |
| $\epsilon_{ij}$                   | Deformação específica na direção $X_j$ que ocorre em uma faceta com normal na direção $X_i$ , p. 17                   |
| $\frac{\partial}{\partial x_i}$   | derivada parcial em relação ao argumento $x_i$ , p. 9   |

|                           |  |
|---------------------------|--|
| $\gamma_{i3}$             | Deformação cisalhante na direção $X_3$ em uma face com normal na direção $X_i$ , p. 9  |
| $\hat{\phi}_1(x_q^j)$     | Valor fictício de $\phi_1$ no $j$ -ésimo ponto do subdomínio local do ponto $x_q$ , p. 45  |
| $\hat{\phi}_2(x_q^j)$     | Valor fictício de $\phi_2$ no $j$ -ésimo ponto do subdomínio local do ponto $x_q$ , p. 45  |
| $\hat{\mathbf{U}}$        | Vetor que contém todas as incógnitas do problema, p. 49  |
| $\hat{\mathbf{n}}$        | Versor normal à superfície do contorno, com cossenos diretores $(\alpha, \beta, \gamma)$ , p. 10   |
| $\hat{\mathbf{u}}_{x_q}$  | Vetor que contém o valor fictício da variável $\mathbf{u}$ em todos os pontos do subdomínio do ponto $x_q$ , p. 45                           |
| $\hat{w}(x_q^j)$          | Valor fictício de $w$ no $j$ -ésimo ponto do subdomínio local do ponto $x_q$ , p. 45   |
| $\lambda$                 | Constante característica da teoria de Reissner, p. 23  |
| $\mathbf{D}_f$            | Matriz correlacionada com a rigidez à flexão da placa, p. 46   |
| $\mathbf{D}_s$            | Matriz correlacionada com a rigidez ao cisalhamento da placa, p. 46  |
| $\mathbf{P}$              | Matriz de momento polinomial, p. 30  |
| $\mathbf{R}_0$            | Matriz de momento da função de base radial, p. 28  |
| $\mathbf{W}_{(x_i)}$      | Matriz diagonal que contém todos os termos da função peso centrada no ponto $x_i$ e avaliada nos pontos do subdomínio local de $x_i$ , p. 34 |
| $\mathbf{f}_I^{\alpha p}$ | Matriz de rigidez local do nó $I$ correlacionada ao método das penalidades, p. 53  |
| $\mathbf{k}_I^{\alpha p}$ | Vetor de forças nodais local do nó $I$ correlacionado ao método das penalidades, p. 53   |
| $\mathfrak{B}_f$          | Matriz de operadores diferenciais, correlacionada aos momentos, p. 46  |
| $\mathfrak{B}_s$          | Matriz de operadores diferenciais, correlacionada aos esforços cortantes, p. 46  |

|                   |   |
|-------------------|---|
| $\alpha$          | Vetor que contém os parâmetros $\alpha$ , p. 28   |
| $\beta$           | Vetor que contém os parâmetros $\beta$ , p. 30  |
| $\epsilon_f(x_q)$ | Vetor que contém as curvaturas da superfície média fletida no ponto $x_q$ , p. 46                                     |
| $\epsilon_s(x_q)$ | Vetor que contém as deformações de cisalhamento no ponto $x_q$ , p. 46  |
| $\sigma_f(x_q)$   | Vetor que contém os momentos no ponto $x_q$ , p. 44   |
| $\sigma_s(x_q)$   | Vetor que contém os esforços cortantes no ponto $x_q$ , p. 44   |
| $\varphi_\beta$   | Função de interpolação correlacionada aos parâmetros $\beta$ , p. 31  |
| $\varphi_\alpha$  | Função de interpolação correlacionada aos parâmetros $\alpha$ , p. 31   |
| $\varphi_{x_i}$   | Vetor ou matriz que contém todos os componentes da funções de aproximação do ponto $x_i$ , p. 28                      |
| $\nu$             | Coefficiente de Poisson, p. 17  |
| $\phi_1$          | Rotação em torno do eixo $X_2$ , p. 8   |
| $\phi_2$          | Rotação em torno do eixo $X_1$ , p. 8   |
| $\phi_n$          | Rotação em torno da direção $\mathbf{s}$ , p. 24  |
| $\phi_s$          | Rotação em torno da direção $\mathbf{n}$ , p. 24  |
| $\pi$             | Funcional da energia potencial total, p. 15   |
| $\pi_R$           | Funcional híbrido do princípio de Hellinger-Reissner, p. 16   |
| $\pi_c$           | Funcional da energia potencial complementar, p. 16  |
| $\sigma_{ij}$     | Índices iguais indicam tensão normal na direção do índice, caso contrário tem-se tensão cisalhante $\tau_{ij}$ , p. 8 |
| $\tau_{ij}$       | Tensão de cisalhamento na direção $j$ que ocorre em uma face de normal $i$ , p. 8                                     |
| $\mathbf{A}(x_i)$ | Matriz correlacionada subdomínio local do ponto $x_i$ , formada no processo de aproximação, p. 34                     |
| $\mathbf{B}(x_i)$ | Matriz correlacionada subdomínio local do ponto $x_i$ , formada no processo de aproximação, p. 34                     |

|   |   |
|---|---|
| <b>F</b>                                | Vetor de forças nodais global da placa, p. 49   |
| <b>K</b>                                | Matriz de rigidez global da placa, p. 49  |
| <b>R</b>                                | Vetor correlacionado aos momentos fletores, exclusivo da teoria de Reissner, p. 46  |
| <b>V<sub>fI</sub></b>                   | Matriz correlacionada aos esforços de flexão, contendo informações da função de ponderação centrada no nó $I$ , p. 43       |
| <b>V<sub>sI</sub></b>                   | Matriz correlacionada aos esforços cisalhantes, contendo informações da função de ponderação centrada no nó $I$ , p. 43     |
| <b>W<sub>I</sub></b>                    | Matriz diagonal da função de ponderação centrada no nó $I$ , p. 44  |
| <b>a(x<sub>i</sub>)</b>                 | Vetor que contém todos os parâmetros a serem determinados, correlacionados ao ponto $x_i$ , p. 33                           |
| <b>c(x<sub>i</sub>)</b>                 | Vetor associado ao ponto $x_i$ e seu subdomínio local, utilizado para evitar a inversão da matriz <b>A</b> ( $x_i$ ), p. 36 |
| <b>f<sub>I</sub></b>                    | Vetor de forças nodais local do nó $I$ , p. 48  |
| <b>g</b>                                | Vetor que contém o valor do carregamento distribuído sobre a placa, p. 44   |
| <b>k<sub>I</sub></b>                    | Matriz de rigidez local do nó $I$ , p. 48   |
| <b>n</b>                                | Direção normal ao contorno da placa, p. 24  |
| <b>n<sub>f</sub></b>                    | Matriz que contém as informações da direção normal ao contorno com momentos prescritos, p. 43                               |
| <b>n<sub>s</sub></b>                    | Matriz que contém as informações da direção normal ao contorno com esforço transversal prescrito, p. 44                     |
| <b>p(x<sub>i</sub>)</b>                 | Vetor que contém os termos da base monomial do ponto $x_i$ , p. 30  |
| <b>r(x<sub>i</sub>)</b>                 | Vetor que contém as componentes da função de base radial do ponto $x_i$ , p. 28   |
| <b>s</b>                                | Direção tangencial ao contorno da placa, p. 24  |
| <b><math>\tilde{\phi}_1(x_q)</math></b> | Valor aproximado de $\phi_1$ no ponto $x_q$ , p. 45   |

|                           |   |
|---------------------------|---|
| $\tilde{\phi}_2(x_q)$     | Valor aproximado de $\phi_2$ no ponto $x_q$ , p. 45   |
| $\tilde{\mathbf{u}}(x_q)$ | Vetor que contém os deslocamentos aproximados do ponto $x_q$ , p. 45                                |
| $\tilde{f}(x_i)$          | Função definida suficientemente próxima de $f$ no ponto $x_i$ , p. 26                               |
| $\tilde{f}(x_i^j)$        | Valor aproximado da variável $f$ no $j$ -ésimo ponto do subdomínio do ponto $x_i$ , p. 30           |
| $\tilde{w}(x_q)$          | Valor aproximado de $w$ no ponto $x_q$ , p. 45  |
| $\varphi_j(x_i)$          | $j$ -ésimo termo da função de aproximação do ponto $x_i$ , p. 28                                    |
| $a_c$                     | Parâmetro de forma da função de base radial, p. 27  |
| $a_j(x_i)$                | $j$ -ésimo parâmetro a ser determinado, correlacionado ao nó $x_i$ , p. 32                          |
| $b_i$                     | Forças de volume na direção $X_i$ , p. 10   |
| $dA$                      | Elemento diferencial de área, p. 11   |
| $dF$                      | Força elementar, p. 12  |
| $dV$                      | Elemento diferencial de volume, p. 9  |
| $dX_1, dX_2, dX_3$        | Elemento diferencial de comprimento segundo as direções $X_1, X_2$ e $X_3$ , respectivamente, p. 10 |
| $d\Omega$                 | Diferencial do domínio da placa, p. 17  |
| $d_c$                     | Comprimento característico correlacionado com o espaçamento nodal de um subdomínio local, p. 27     |
| $d_{x_i}$                 | Raio do subdomínio local do ponto $x_i$ , p. 37   |
| $f(x_i)$                  | Função $f$ qualquer avaliada no ponto $x_i$ , p. 26   |
| $g$                       | Carregamento transversal distribuído sobre a placa, p. 8  |
| $l_m$                     | Ordem do maior termo monomial, p. 32  |
| $n_j$                     | Componente, na direção $X_j$ , do versor normal ao contorno $\hat{\mathbf{n}}$ , p. 11              |
| $p_1, p_2, p_3$           | Forças de superfície segundo as direções $X_1, X_2$ e $X_3$ , respectivamente, p. 10                |

|                 |   |
|-----------------|---|
| $p_j(x_i)$      | $j$ -ésimo termo monomial do ponto $x_i$ , p. 29  |
| $p_k(x_i^j)$    | $k$ -ésimo termo da base monomial do $j$ -ésimo ponto do subdomínio local do ponto $x_i$ , p. 33            |
| $q$             | Parâmetro de forma da função de base radial, p. 27  |
| $r(x_i, x_j)$   | Coefficiente produzido pela função de base radial centrada no ponto $x_i$ e avaliada no ponto $x_j$ , p. 27 |
| $t$             | Espessura da placa, p. 8  |
| $u_1, u_2, u_3$ | Deslocamentos nas direções $X_1, X_2$ e $X_3$ , respectivamente, p. 9                                       |
| $w$             | Deslocamento transversal na direção $X_3$ , p. 8  |
| $w_p(x_i, x_j)$ | Função peso, centrada no ponto $x_i$ e avaliada no ponto $x_j$ , p. 33                                      |
| $z_m$           | Dimensão do problema abordado, p. 32  |

# Lista de Abreviaturas

|       |   |
|-------|---|
| CNPq  | Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, p. v |
| DEM   | <i>Diffuse Element Method</i> , p. 1                                |
| EFGM  | <i>Element-Free Galerkin Methods</i> , p. 2                         |
| FBR   | Função de Base Radial, p. 2   |
| LBIE  | <i>Local Boundary Integral Equation</i> , p. 40                     |
| LRPIM | <i>Local Radial Point Interpolation Method</i> , p. 5               |
| MEC   | Método dos Elementos de Contorno, p. 5                              |
| MEF   | Método dos Elementos Finitos, p. 1                                  |
| MLPG  | <i>Meshless Local Petrov-Galerkin</i> , p. vi                       |
| MLS   | <i>Moving Least Squares</i> , p. 2                                  |
| MSM   | Métodos Sem Malha, p. 2   |
| RPIM  | <i>Radial Point Interpolation Method</i> , p. 5                     |
| SPH   | <i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i> , p. 1                       |

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Revisão Bibliográfica

Os métodos sem malha tem sido objeto de diversos estudos nos últimos anos, tendo em vista sua capacidade de possibilitar a resolução de problemas de valores de contorno sem o uso de malhas ou células.

Apesar dos métodos baseados em malhas já estarem consolidados, muitas dificuldades ainda persistem, principalmente na abordagem de problemas com grandes deformações, propagação de trincas e descontinuidades que prejudicam a análise através da malha definida inicialmente. Em geral, a solução adotada para este problema é a criação de uma nova malha, adequada a nova condição do problema, e no caso da condição avaliada ser evolutiva, o processo de geração de novas malhas se torna iterativo.

O processo iterativo de geração de malhas, apesar de resolver o problema de representatividade da malha, acarreta no aumento considerável do custo computacional. Mesmo apresentando nível elevado de robustez, a simplicidade dos métodos baseados em malhas se torna seu ponto fraco, exigindo o uso de estratégias adaptativas rebuscadas para discretização do domínio para a geração de novas malhas. Atualmente, as dificuldades para a geração de malha de forma iterativa ainda não foram vencidas, sendo que, uma alternativa na solução deste problema vem sendo trabalhada em métodos que não utilizam a estrutura de malhas.

Dentre os métodos que não dependem de malha, o primeiro que se tem registro foi o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) [1, 2], proposto em 1977, para análise de problemas de astrofísica. A ideia inovadora de um método baseado em partículas despertou pouco interesse de pesquisadores, sendo que, somente em 1992 um conceito semelhante ao SPH é apresentado por NAYROLES *et al.* [3], denominado *Diffuse Element Method* (DEM). O DEM é apresentado pelos autores como uma generalização do Método dos Elementos Finitos (MEF) com vantagens relacionadas

à regularidade das funções aproximadas e aos requisitos de geração de malha. Em 1994, o DEM é modificado por BELYTSCHKO *et al.* [4] dando origem ao *Element-Free Galerkin Methods* (EFGM). Inicialmente o EFGM é aplicado à problemas de elasticidade e condução de calor, utilizando a técnica de mínimos quadrados móveis (*Moving Least Squares* (MLS)) para construir a função de forma e a função de teste para a forma fraca do problema.

Todos os métodos citados até agora, apesar de serem classificados de Métodos Sem Malha (MSM), necessitam de elementos para possibilitar a avaliação das integrais de domínio (relativas à energia) sobre todo o domínio do problema. Em 1998 surge o primeiro método, classificado de “verdadeiramente sem malha” por não necessitar nenhum tipo de elemento, seja no processo de interpolação ou de resolução das integrais, apresentado por ZHU *et al.* [5]. Contudo, o método proposto por ZHU *et al.* [5] apresentava dificuldades com o tratamento de integrais singulares. No mesmo ano, parte dos autores, apresentaram em [6] uma nova formulação baseada na forma fraca simétrica local da equação diferencial, chamada de Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), onde as condições de contorno do problema foram impostas utilizando-se o método das penalidades.

Em 2002, SHEN [7] apresenta um estudo comparativo da eficiência e precisão do MLPG considerando diferentes funções de forma e funções de teste. Neste trabalho, para cada função de teste é definido um tipo de MLPG, sendo que, devido à velocidade, precisão e robustez, os autores afirmaram que o método seria capaz de substituir o MEF em um futuro próximo.

Com o desenvolvimento dos métodos sem malhas, já em 2001, LEITÃO [8] apresenta uma solução sem malha para o problema de flexão de placa de Kirchhoff [9] utilizando Funções de Base Radial (FBR) através do método de colocação de Hermite. Apesar do autor conseguir bons resultados com a técnica aplicada, o mesmo ressalta a necessidade de critérios para definir a quantidade e a posição do centro das FBR e dos pontos de colocação. No ano seguinte, LONG e ZHANG [10] também apresentam uma formulação sem malha para o problema de flexão de Kirchhoff utilizando o método local da equação integral de contorno. A técnica utilizada pelo autor é verdadeiramente sem malha, sendo que, as integrais sobre o contorno são trabalhadas sobre o contorno local centrado no ponto em questão e não através de elementos.

Com o avanço das técnicas verdadeiramente sem malhas, em especial o MLPG, e também os bons resultados obtidos com as técnicas sem malhas nos primeiros estudos considerando análise de placas, em 2004 diversos trabalhos são publicados envolvendo a análise de placas através de formulações do MLPG. Dentre elas, cabe destacar o trabalho de SORIC *et al.* [11], onde uma formulação do MLPG foi desenvolvida para análise de placas com deformação cisalhante considerando o

conjunto completo de equações constitutivas tridimensionais e o trabalho de YUAN-BO e SHU-YAO [12] onde o MLPG é utilizado para solução de placas finas, com interpolação via MLS e imposição das condições de contorno através do método da penalidade.

Após o MLPG produzir resultados satisfatórios para o teoria de placas de Kirchhoff, SLADEK *et al.* [13] aplicam o método para análise estática e dinâmica de placas espessas considerando ortotropia, fundação elástica e variação de espessura, com a obtenção de bons resultados. Em 2008, os mesmos autores apresentam um novo trabalho, [14], estendendo a aplicação do MLPG para placas espessas com a consideração de viscoelasticidade.

Recentemente, em [15], o MLPG foi aplicado em flexão de placas com deformação cisalhante na análise elastoplástica, no qual os autores utilizam como função de forma uma composição de FBR com função de base polinomial, mantendo a propriedade do delta de Kronecker e conseqüentemente, não necessitando de tratamentos adicionais para imposição das condições de contorno. Posteriormente, parte dos autores estenderam a formulação em [16] para abordar o problema de fratura em placas com comportamento elastoplástico.

MIERS [17] apresentou formulações não-convencionais de métodos sem malhas baseadas na equação integral de contorno para análise de problemas elastoplásticos, de mecânica da fratura elástica e em meios heterogêneos. Uma formulação do método dos elementos de contorno é apresentada por SILVA [18], na qual as integrais de domínio associadas aos termos inelásticos e inerciais, são trabalhadas com o auxílio de funções de aproximação obtidas com o método dos mínimos quadrados móveis ortogonais, evitando-se assim a discretização do domínio do problema. O esforço para solução de problemas reduzindo ou eliminando o uso de elementos também pode ser visto no trabalho de DE ARAÚJO COSTA [19], onde o método das soluções fundamentais é aplicado para obtenção de uma solução alternativa em problemas de propagação de ondas. O método das soluções fundamentais também é utilizado por FONTES JR *et al.* [20] na solução de problemas da mecânica da fratura linear elástica.

Apesar de apresentar muitas vantagens, os métodos sem malha ainda enfrentam algumas adversidades exigindo maior aprofundamento de estudo, pesquisa e desenvolvimento a fim de torná-los competitivos com os métodos já disponíveis para aplicações comerciais. Podemos citar como adversidades o alto custo computacional no mapeamento e na busca por pontos de proximidade. Tem-se ainda a dificuldade na determinação da função de forma e de ponderação ideal para o problema em análise.

Em geral, na aplicação dos MSM, exige-se a varredura por pontos no domínio do problema contribuindo muito para elevar o custo computacional. Contudo, com a

possibilidade do uso de processamento paralelo nos métodos sem malha, tal problema é suavizado. No trabalho de SILVA [21] o uso de um algoritmo paralelizado para a busca de pontos próximos ao suporte local apresentou um ganho de 15 vezes no tempo de processamento em relação ao processamento em série.

Com a ausência de conectividade dos nós distribuídos pelo domínio do problema, FONSECA [22] apresenta um estudo da aplicação de um algoritmo otimizado para a busca de pontos de vizinhança, denominado árvore de busca *kd-tree*. Ainda em [22] é apresentada uma formulação mista do MLPG, sendo que, diferentes funções de forma são utilizadas ao mesmo tempo dependendo da localização do ponto em análise.

A possibilidade de se utilizar diferentes funções de forma, funções de teste e ainda o uso de subdomínios de qualquer forma ou tamanho, mantém evidente a flexibilidade oferecida pelo MLPG, tornando-o um método muito atrativo para o estudo de diversos problemas, dentre eles, o problema de flexão de placas.

Muitas teorias para o estudo de flexão de placas já foram propostas, sendo que três se destacam: Teoria de Kirchhoff, Teoria de Mindlin [23] e Teoria de Von Kármán [24].

A teoria de Kirchhoff, também conhecida como Teoria Clássica é direcionada para placas esbeltas e pequenas deformações. Nesta teoria apenas as deformações provocadas pelo efeito da flexão são consideradas na composição do deslocamento transversal e as forças paralelas à superfície média podem ser analisadas separadamente apenas no caso dessas forças serem consideravelmente inferiores à resistência crítica compressiva.

A teoria de Mindlin, também chamada de Teoria de Deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem, é voltada para placas finas e moderadamente espessas em regime de pequenas deformações. A principal diferença desta teoria com relação à teoria Clássica está na composição do deslocamento transversal, uma vez que, na teoria de Mindlin o deslocamento transversal é composto por deformações oriundas do esforço de flexão e também do esforço de cisalhamento. Com relação às forças paralelas à superfície média, a teoria de Mindlin se assemelha à teoria de Kirchhoff.

A teoria de Von Kármán atende placas esbeltas e com grandes deformações. Neste caso, a análise da placa deve considerar o efeito de não linearidade geométrica, e neste caso, o efeito das forças paralelas à superfície média não pode ser estudado isoladamente. Assim, nesta teoria o deslocamento transversal é composto das deformações por flexão e das cargas axiais normais que atuam no interior da peça. Cabe ressaltar que na teoria de Von Kármán não há consideração das deformações devido aos efeitos dos esforços cisalhantes.

Com grande frequência a teoria de Mindlin é chamada de teoria de Reissner-Mindlin, uma vez que, a teoria proposta por Reissner[25, 26] conduz à resultados

similares aos obtidos com a teoria de Mindlin e as relações entre esforços e deslocamentos se assemelham muito. Apesar da similaridade nos resultados e equacionamento, essas teorias foram propostas de forma independente e são essencialmente diferentes [27]. A teoria de Reissner é obtida a partir do princípio variacional da energia de deformação complementar com a hipótese de distribuição linear das tensões devido a flexão e distribuição quadrática das tensões cisalhantes, ambas ao longo da espessura. Já a teoria de Mindlin é desenvolvida com a consideração da variação linear dos deslocamentos ao longo da espessura da placa, tendo como consequência a inexistência de deformação na direção da espessura da placa.

As hipóteses assumidas por Reissner produzem, obrigatoriamente, uma variação não linear dos deslocamentos ao longo da espessura e com isto, a formulação faz consideração de deformações que ocorrem na direção da espessura.

## 1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivos gerais:

- Analisar o problema de flexão de placas moderadamente espessas com consideração das hipóteses de Reissner, através do MLPG. Para isto, objetiva-se implementar um código computacional, em linguagem FORTRAN, da formulação do MLPG com obtenção das funções de aproximação a partir do *Radial Point Interpolation Method* (RPIM), dando origem ao método também denominado de *Local Radial Point Interpolation Method* (LRPIM) em sua forma tradicional, na qual, cada ponto de quadratura possui um subdomínio próprio para construção da função de aproximação.
- Desenvolver e implementar uma formulação do MLPG com a aplicação de um processo de aproximação alternativo, utilizando o LRPIM para efetuar as aproximações no ponto de quadratura de forma generalizada, objetivando reduzir o custo computacional do método.

Especificamente, tem-se como objetivos:

- Realizar o estudo comparativo entre os resultados obtidos à partir da formulação alternativa, formulação tradicional e também os obtidos com o MEF.
- Analisar os efeitos do *shear locking* na formulação alternativa e seu comportamento em função do uso de bases monomiais de diferentes ordens na obtenção das funções de aproximação e outros parâmetros.
- Introduzir na formulação a técnica de nós descontínuos, muito utilizada no Método dos Elementos de Contorno (MEC), para representação das descontinuidades que ocorrem no contorno do problema.

## 1.3 Conteúdo

Este trabalho tem início com a revisão do estudo do estado da arte e apresentação dos objetivos no capítulo 1.

No capítulo 2, são apresentadas as hipóteses básicas da teoria de Reissner para flexão de placas espessas e as relações básicas de equilíbrio da teoria da elasticidade. Neste capítulo é apresentado todo o desenvolvimento das equações diferenciais envolvidas no problema em foco.

No capítulo 3, são exploradas as funções de aproximação, nas quais o MLPG se baseia para possibilitar a solução do conjunto de equações diferenciais sem a utilização de nenhum tipo de malha ou elemento.

No capítulo 4, a formulação do MLPG é desenvolvida detalhadamente. O enfraquecimento das equações diferenciais de equilíbrio é apresentado e a partir das funções de aproximação, o sistema de equações discretizado é obtido. O método de colocação pontual e o método da penalidade são apresentados para realizar a imposição das condições de contorno essenciais. O processo de integração numérica tradicionalmente utilizado no MLPG é apresentado em detalhes e a proposta de um procedimento alternativo é descrita, visando melhorar a eficiência computacional do método. Por fim, as questões de descontinuidades do contorno do problema são abordadas e consideração da técnica de nós geométricos descontínuos é sugerida.

No capítulo 5, são apresentadas as análises numéricas com a aplicação do MLPG utilizando o procedimento alternativo de integração e os resultados obtidos são comparados com os resultados oriundos do programa computacional ANSYS. A análise da eficiência do MLPG em função do processo de integração utilizada também é apresentada neste capítulo.

No capítulo 6, são apresentadas as conclusões e algumas propostas para desenvolvimento futuro em continuação a este trabalho.

## Capítulo 2

# Problema de Flexão de Placas Espessas

O comportamento de uma placa sujeita a flexão depende essencialmente da relação entre a espessura e as demais dimensões. Segundo TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER [28], as placas podem ser classificadas em três tipos: placas finas com pequenas deformações, placas finas com grandes deformações, placas espessas.

A grandeza da deformação determina a abordagem matemática adequada na mecânica do contínuo. Grandes deformações acarretam diferenças significativas entre a configuração deformada e indeformada da estrutura, tornando-se necessário reavaliar, após a deformação, a geometria e as propriedades físicas do material que compõem a peça em análise. Com relação a espessura da placa, esta determinará a relevância dos efeitos das deformações por esforço cortante e também das tensões perpendiculares a superfície média.

A formulação de placas considerando as hipóteses de Reissner [29] permite avaliar satisfatoriamente placas espessas e delgadas, enquanto a teoria clássica de Kirchhoff produz resultados satisfatórios apenas para placas delgadas. Na teoria de Reissner é gerado um sistema de equações de sexta ordem, possibilitando o atendimento de três condições de contorno existentes nos problemas de placas, enquanto na teoria clássica apenas duas condições de contorno são atendidas.

### 2.1 Hipóteses Básicas

A teoria de Reissner tem por hipóteses:

- Espessura da placa é pequena quando comparada as demais dimensões;
- O material que constitui a placa é homogêneo, apresenta isotropia e comportamento elástico linear;

- Uma reta perpendicular à superfície média da placa, permanece reta após a deformação. Todavia, tal reta não será necessariamente perpendicular à superfície média da placa deformada, devido a consideração das deformações por cisalhamento transversal;
- As componentes do tensor de tensões nas faces da placa, ou seja, para a coordenada  $X_3 = \pm \frac{t}{2}$ , sendo  $t$  a espessura da placa, são  $\tau_{31} = \tau_{32} = 0$  e  $\sigma_{33} = \pm \frac{g}{2}$ , sendo  $g$  o carregamento transversal aplicado na placa.
- Os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados com a espessura.

A diferença entre a teoria de Reissner e a teoria clássica de Kirchhoff vai além da consideração das deformações por cisalhamento, pois na teoria elaborada por Reissner pode-se notar que as tensões normais à superfície média da placa são consideradas como hipóteses básicas na formulação.

Na Figura 2.1 são apresentados o sistema de eixos coordenados juntamente com a orientação dos deslocamentos generalizados e ainda a superfície média da placa, que são utilizados para a obtenção do equacionamento do problema de flexão de placas espessas.

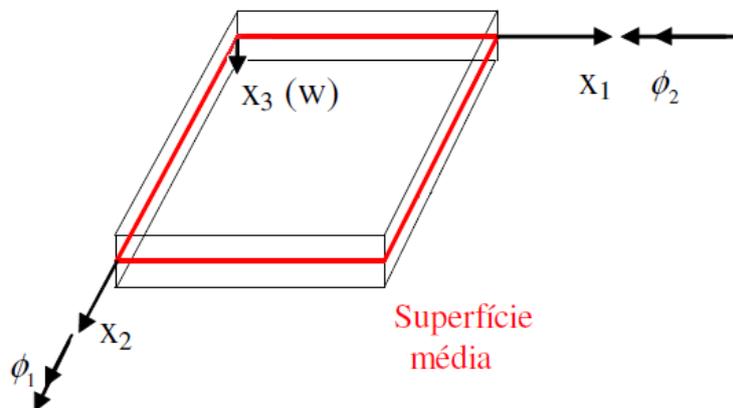


Figura 2.1: Sistema de coordenadas e orientação dos deslocamentos da placa

A rotação  $\phi_2$  ocorre no plano  $X_2X_3$ , ou seja, é a rotação em torno de  $X_1$ ; a rotação  $\phi_1$  ocorre no plano  $X_1X_2$ , ou seja, é a rotação em torno de  $X_3$ ; e  $w$  é o deslocamento transversal.

O principal efeito da consideração das deformações por cisalhamento transversal é que, na placa deformada, o módulo da rotação da seção transversal deixa de ser igual ao módulo da inclinação da superfície média, conforme observa-se na Figura 2.2. Algebricamente, a rotação  $\phi_2$  é dada por:

$$\phi_2 = \frac{\partial u_2}{\partial X_3} = -w_{,2} + \beta_2^u \quad (2.1)$$

onde  $\beta_2^u$  é a deformação devido a consideração do esforço cisalhante na direção  $X_2$ ,  $u_2$  é o deslocamento na direção de  $X_2$  e  $w$  é o deslocamento transversal da placa.

Logo, a deformação cisalhante  $\gamma_{i3}$  pode ser escrita:

$$\gamma_{i3} = \frac{\partial u_i}{\partial X_3} + \frac{\partial w}{\partial X_i} = \beta_i^u \quad i = 1, 2, \quad (2.2)$$

ou ainda:

$$\beta_i^u = \phi_i + \frac{\partial w}{\partial X_i} \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

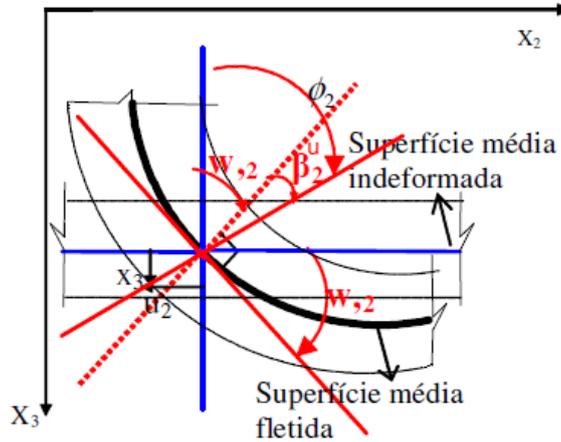


Figura 2.2: Representação da deformação por cisalhamento transversal

A Equação (2.3) é fundamental para entendimento da importância da consideração das deformações devido ao esforço cisalhante em placas espessas, mas não se faz necessária para desenvolvimento das equações da teoria de Reissner. Diferentemente da teoria de Mindlin, as relações entre os esforços e deslocamentos manifestam-se naturalmente na formulação à partir da imposição da condição de equilíbrio para um funcional definido para a placa.

## 2.2 Relações Básicas de Equilíbrio da Elasticidade

Para obter-se as relações de equilíbrio, considere o elemento de volume infinitesimal  $dV$ , apresentado na Figura 2.3. As tensões que atuam nas faces do corpo são apresentadas, sendo que, o operador  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_i}$  representa a variação da componente de tensão  $\sigma_{ij}$  com o incremento segundo o eixo  $X_i$ .

Considerando-se o equilíbrio de momentos nas direções  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , e desprezando-se os termos infinitesimais de quarta ordem, obtém-se a seguinte relação para as tensões cisalhantes:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

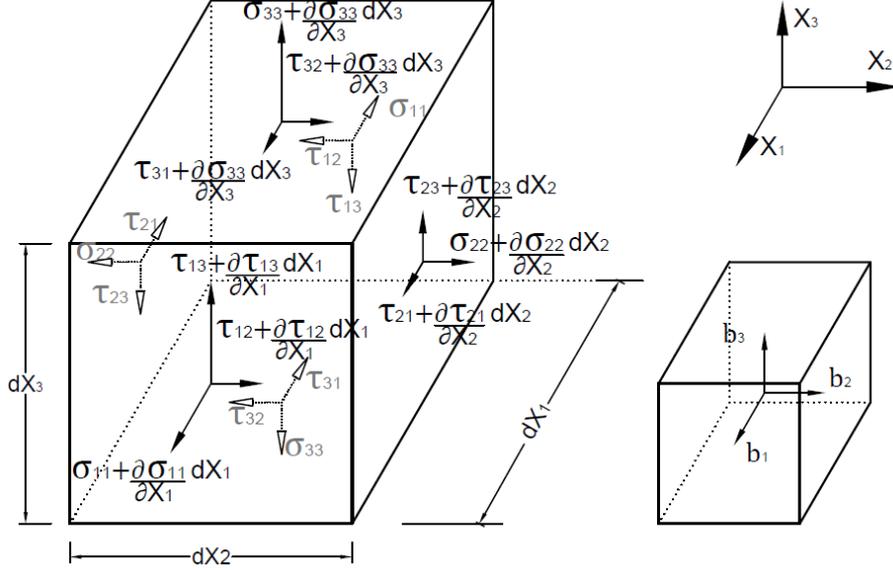


Figura 2.3: Tensões e forças de volume em um volume infinitesimal

A partir do equilíbrio de forças nas direções  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , chega-se à:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

onde  $b_i$  são forças de volume na direção  $X_i$  e  $\sigma_{ij}$  representa tensões normais para  $i = j$  e tensões cisalhantes para  $i \neq j$ .

O conjunto de equações definido em (2.5) é denominado de equações de equilíbrio ou equações diferenciais de equilíbrio [30], e devem ser satisfeitas em qualquer ponto do interior do corpo.

Para os pontos do contorno, as forças de superfície devem ser consideradas. Desta forma, seja o corpo apresentado na Figura 2.4, no qual  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  são forças de superfície por unidade de área segundo as direções  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , respectivamente. O versor normal à superfície de contorno é representado por  $\hat{n}$ , sendo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os cossenos diretores de  $\hat{n}$ .

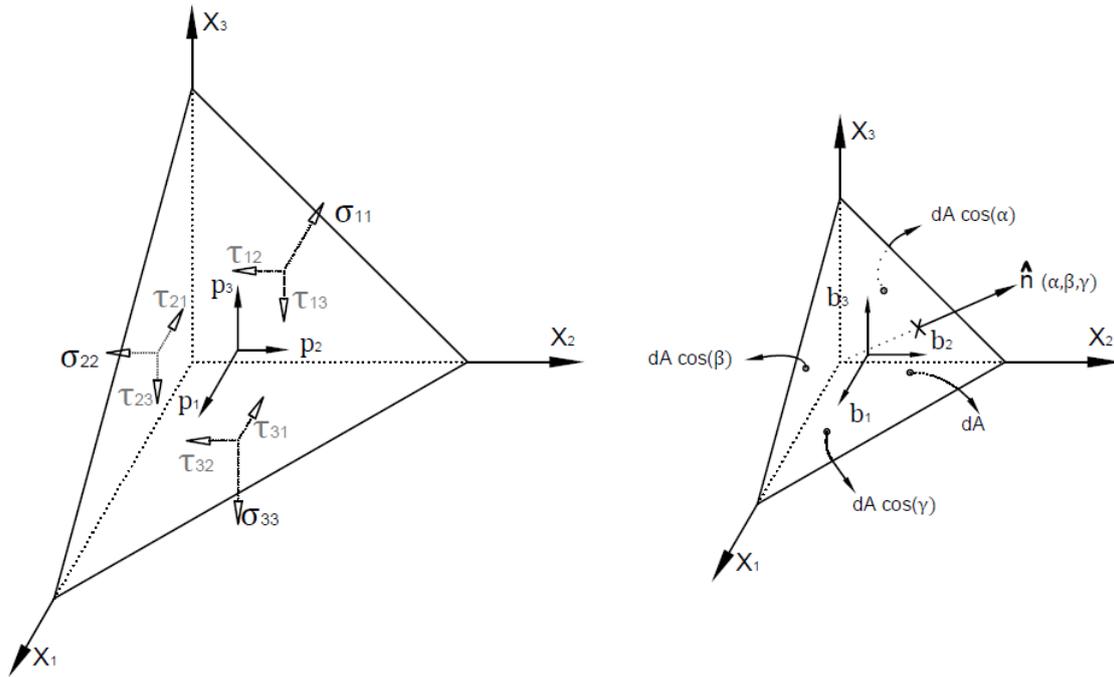


Figura 2.4: Elemento sujeito a forças de superfície

As equações de equilíbrio, segundo as direções  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , para o elemento apresentado na Figura 2.4, quando a altura do tetraedro se aproxima de zero ( $dh \rightarrow 0$ ), são dadas por:

$$\sigma_{ij}n_j = p_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

onde  $n_j$  são as componentes da normal ao contorno, dirigida para fora do domínio.

A Equação (2.6) é conhecida como equação de Cauchy e deve ser satisfeita em todos os pontos do contorno do corpo.

O conjunto de Equações (2.5) e (2.6) determinam completamente o estado de tensão de um corpo. Desta forma, conhecidas as componentes de tensão em um ponto, pode-se determinar a tensão em qualquer elemento de superfície neste ponto, em qualquer orientação.

## 2.3 Tensões, Esforços Solicitantes e Equações de Equilíbrio para Placas

Para determinação das tensões no problema de flexão de placas, considere o elemento apresentado na Figura 2.5. Na ausência de esforços tangenciais externos nas faces da placa e também de forças normais nos bordos, a superfície neutra se torna coincidente com a superfície média da placa.

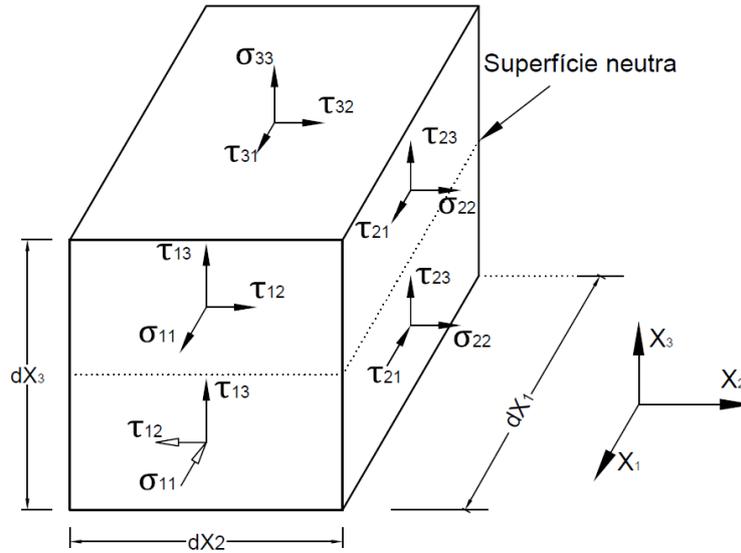


Figura 2.5: Componentes de tensão em um elemento de placa sujeito à flexão simples

Nesta situação, as componentes de tensão  $\sigma_{ij}$  variam linearmente ao longo da espessura e são dadas por:

$$\sigma_{ij} = \frac{M_{ij}}{I} X_3 \quad i, j = 1, 2 \quad (2.7)$$

onde  $I$  é o momento de inércia da seção transversão solicitada e  $M_{ij}$  é o momento solicitante na seção em análise..

No caso de placas, é conveniente expressar os esforços por unidade de comprimento. Desta forma, a Equação (2.7) assume:

$$\sigma_{ij} = \frac{12}{t^3} M_{ij} X_3 \quad i, j = 1, 2. \quad (2.8)$$

Para obtenção das equações de equilíbrio do problema de flexão de placas, as tensões apresentadas na Figura 2.5 devem ser representadas por suas resultantes, dadas pelos momentos e forças cisalhantes na superfície média. Os momentos resultantes são obtidos fazendo-se a integração ao longo da espessura, da força elementar ( $dF = \sigma dA$ ) correspondente a uma área elementar de largura unitária na direção normal ( $dA = 1 \cdot dX_3$ ), multiplicada pelo braço do momento, ou seja:

$$M_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{ij} \cdot 1 \cdot X_3 dX_3 \quad i, j = 1, 2. \quad (2.9)$$

Analogamente para os esforços cortantes  $Q_i$ :

$$Q_i = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{ij} \cdot 1 dX_3 \quad i, j = 1, 2. \quad (2.10)$$

Da Figura 2.5, pode-se então representar o elemento de placa sujeito aos esforços resultantes em sua superfície média, Figura 2.6.

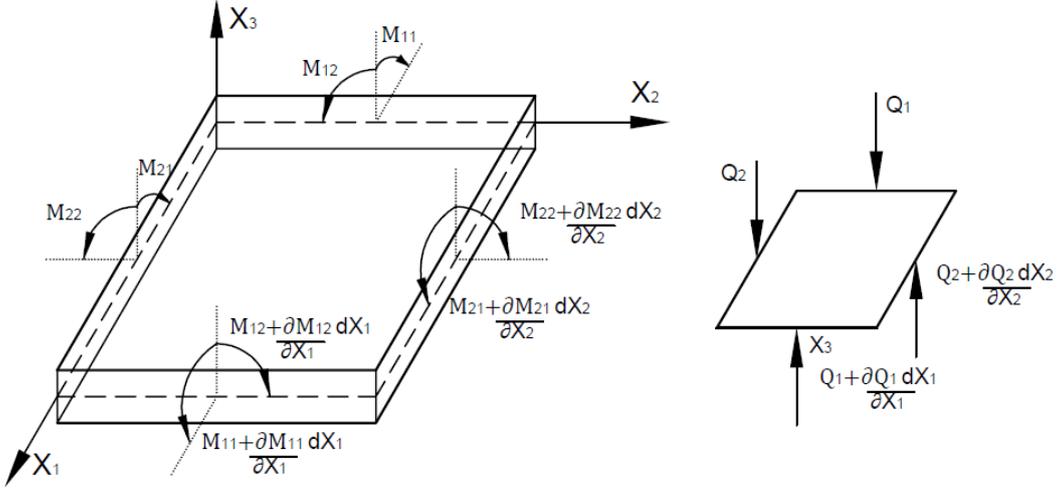


Figura 2.6: Esforços resultantes em um elemento de placa

Considerando um carregamento distribuído  $g$  sobre a placa, impondo-se a condição de equilíbrio de forças verticais e dos momentos em torno das direções  $X_1$  e  $X_2$ , chega-se a duas relações de equilíbrio para o elemento que representa o problema de flexão de placas, dadas por:

$$Q_{i,i} + g = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2.11)$$

e

$$M_{ij,i} - Q_j = 0 \quad i, j = 1, 2. \quad (2.12)$$

As Equações (2.11) e (2.12) devem ser atendidas em cada ponto ou conjunto de pontos da placa e estas equações são o ponto de partida para o desenvolvimento da formulação através do MLPG.

As tensões nas direções  $X_1$  e  $X_2$ , com comportamento linear, já foram definidas na Equação (2.8). Resta agora determinar as tensões na direção  $X_3$ . Para isto, substituindo a Equação (2.8) na Equação (2.5) (para  $i, j = 1, 2$ ), desprezando-se as forças de volume e, considerando-se a Equação (2.12), chega-se à:

$$\frac{12}{t^3} Q_i X_3 + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial X_3} = 0 \quad i = 1, 2. \quad (2.13)$$

As componentes de tensão  $\sigma_{i3}$  podem ser determinadas através da integração da Equação (2.13) na direção  $X_3$ . Assim:

$$\sigma_{i3} = \frac{3Q_i}{2t} \left[ 1 - \left( \frac{2X_3}{t} \right)^2 \right] \quad i = 1, 2. \quad (2.14)$$

Por fim, substituindo a Equação (2.14) na Equação (2.5) para ( $i = 3$ ) e considerando-se a Equação (2.11), determina-se a expressão para a componente  $\sigma_{33}$ :

$$\sigma_{33} = \frac{gX_3}{2t} \left[ 3 - \left( \frac{2X_3}{t} \right)^2 \right]. \quad (2.15)$$

Das Equações (2.14) e (2.15) pode-se notar que a distribuição das tensões na direção  $X_3$  possuem comportamento de segundo e terceiro grau. Com isto, a variação das deformações ao longo da espessura da placa é obrigatoriamente não linear, sendo portanto, não compatível com as hipóteses da teoria de Mindlin.

## 2.4 Relação entre Deslocamentos Generalizados e Deformações

Os deslocamentos generalizados  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $w$  são definidos na superfície média da placa. Já os deslocamentos, são definidas ao longo da espessura da placa e são representadas por  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , respectivamente segundo as direções  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ .

A partir do princípio de conservação da energia, no qual, o trabalho realizado por uma componente de tensão deve ser igual ao trabalho realizado pela resultante desta tensão, escreve-se:

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{ij} u_j dX_3 = M_{ij} \phi_j \quad i, j = 1, 2 \quad (2.16)$$

e

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{i3} u_3 dX_3 = Q_i w \quad i = 1, 2. \quad (2.17)$$

A correlação entre os deslocamentos generalizados e as deformações é obtida pela substituição das Equações (2.8) e (2.14) nas Equações (2.16) e (2.17), respectivamente:

$$\phi_i = \frac{12}{t^3} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} u_i X_3 dX_3 \quad i = 1, 2 \quad (2.18)$$

e

$$w = \frac{3}{2t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} u_3 \left[ 1 - \left( \frac{2X_3}{t} \right)^2 \right] dX_3. \quad (2.19)$$

## 2.5 Relação entre Esforços e Deslocamentos Generalizados

Na teoria de Reissner, a condição de equilíbrio da placa advém da imposição de sua energia potencial total ser estacionária, ou seja, dentre todos os campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis, aquele que satisfaz à condição de equilíbrio extremiza o funcional da energia potencial total.

A energia potencial total de uma estrutura pode ser definida como sendo o trabalho realizado pelos esforços atuantes na estrutura, de sua configuração deformada até a situação sem carregamento. Cabe destacar que os esforços atuantes compreendem solicitações externas, tanto quanto solicitações internas.

A energia potencial dos esforços internos, definida como energia de deformação ( $U_{EI}$ ) é dada por:

$$U_{EI} = \int_V U_0 dV \quad (2.20)$$

onde  $U_0$  é a energia de deformação específica e  $V$  é o volume.

Para o caso de material isotrópico e em regime de pequenas deformações, elástico linear,  $U_0$  é dado por:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{33}\epsilon_{33} + \tau_{12}\epsilon_{12} + \tau_{13}\epsilon_{13} + \tau_{23}\epsilon_{23}). \quad (2.21)$$

A energia potencial das solicitações externas  $U_{EE}$  é o trabalho realizado pelos esforços externos, da configuração deformada até a situação sem carregamento. Assim:

$$U_{EE} = - \int_V b_i u_i dV - \int_A p_i u_i dA \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.22)$$

onde  $u_i$  são deslocamentos correspondentes a cada uma das forças  $p_i$ .

O funcional da energia potencial total,  $\pi$ , é dado por:

$$\pi = U_{EI} + U_{EE}. \quad (2.23)$$

Na Equação (2.23) os parâmetros  $U_{EI}$  e  $U_{EE}$  foram apresentados em termos de deslocamentos, produzindo assim o funcional do princípio da energia potencial mínima:

$$\pi = U_{EI} - \int_V \bar{b}_i u_i dV - \int_{A_t} \bar{p}_i u_i dA \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.24)$$

onde  $A_t$  representa a superfície do contorno da estrutura com força prescrita.

Por outro lado, o funcional do princípio da energia complementar mínima,  $\pi_c$

pode ser obtido caso os parâmetros  $U_{EI}$  e  $U_{EE}$  sejam apresentados em termos de tensões. Assim:

$$\pi_c = U_{EI}^* - \int_{A_u} p_i \bar{u}_i dA \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.25)$$

onde  $S_u$  representa a parcela do contorno da estrutura com deslocamento prescrito e  $U_{EI}^*$  é a energia de deformação complementar.

Um princípio de energia híbrido pode ser utilizado a partir de um funcional escrito em termos de tensões e deformações, conhecido como princípio de Hellinger-Reissner [31]. Este princípio é obtido a partir do princípio da energia potencial ou do princípio da energia potencial complementar com aplicação de algumas restrições, sendo que, maiores detalhes podem ser encontrados em WASHIZU [32]. De acordo com HE [33] o funcional é dado por:

$$\pi_R = -U_{EI}^* - \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV - \int_V b_i u_i dV + \int_{A_t} (p_i - \bar{p}_i) u_i dA + \int_{A_u} p_i \bar{u}_i dA \quad (2.26)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

onde as tensões  $\sigma_{ij}$ , os deslocamentos  $u_i$ , as forças de superfície  $p_i$  e as forças de volume  $b_i$  são grandezas livres para assumirem valores quaisquer, inclusive com a possibilidade de variação simultânea. As relações tensão-deformação são as restrições variacionais.

O princípio de Hellinger-Reissner, apesar de ser obtido a partir de um princípio de mínimo, não apresenta tal característica, sendo somente um princípio estacionário, uma vez que, o valor estacionário não pode ser demonstrado como um valor de mínimo.

Na ausência de forças de volume, a Equação (2.26) fica:

$$\pi_R = -U_{EI}^* - \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV + \int_{A_t} (p_i - \bar{p}_i) u_i dA + \int_{A_u} p_i \bar{u}_i dA \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.27)$$

A energia de deformação complementar  $U_{EI}^*$  é igual à energia de deformação  $U_{EI}$  no caso de material isotrópico, regime elástico linear e de pequenas deformações, com aplicação lenta e gradual das solicitações. Desta forma, a fim de se escrever  $U_{EI}^*$  apenas em função das componentes de tensão, as seguintes relações entre tensão e deformação, válidas para material elástico linear, são utilizadas,

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \epsilon_{ll} \delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij} \quad i, j, l = 1, 2, 3 \quad (2.28)$$

e

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{ll} \delta_{ij} \right) \quad i, j, l = 1, 2, 3 \quad (2.29)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal definido por,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.30)$$

A partir das Equações (2.20), (2.21), (2.29) e (2.30), a energia de deformação complementar assume a forma:

$$U_{EI}^* = \frac{1}{2E} \int_V [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + 2(1+\nu)(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)] dV. \quad (2.31)$$

O funcional  $\pi_R$  deve ser escrito apenas em função dos esforços e deslocamentos generalizados para obtenção das relações desejadas. Sendo assim, as Equações (2.8) e (2.14) são substituídas na Equação (2.31) e, após realizar a integração ao longo da espessura da placa ( $dV = dX_3 d\Omega$ ), chega-se à:

$$U_{EI}^* = \frac{1}{2E} \int_{\Omega} \frac{12}{t^3} [(M_{11} + M_{22})^2 + 2(1+\nu)(M_{12}^2 + M_{11}\sigma_{22}) + \frac{(1+\nu)}{5} t^2 (Q_1^2 + Q_2^2) - \frac{\nu t^2}{5} g (M_{11} + M_{22}) + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{33}^2 dX_3] d\Omega. \quad (2.32)$$

O segundo termo do lado direito da Equação (2.27) pode ser escrito em função dos esforços usando as Equações (2.8), (2.14) e (2.15). Logo:

$$\int_V \sigma_{ij,j} u_i dV = \int_V \left[ \frac{12}{t^3} (M_{ij,j} - Q_i) u_i X_3 + \frac{3}{2t} (Q_{i,i} + g) u_3 \left( 1 - \frac{4X_3^2}{t^2} \right) \right] dV \quad (2.33)$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

O terceiro e quarto termo do lado direito da Equação (2.27) são escritos em função dos esforços através da substituição das equações de equilíbrio do corpo, (2.6). Assim, para o terceiro termo:

$$\int_{A_t} (p_i - \bar{p}_i) u_i dA = \int_{A_t} \left[ \frac{12}{t^3} (M_{ij}n_j - \bar{M}_{ij}n_j) u_i X_3 + \frac{3}{2t} (Q_i n_i - \bar{Q}_i n_i) u_3 \left( 1 - \frac{4X_3^2}{t^2} \right) \right] dA \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.34)$$

e, para o quarto termo:

$$\int_{A_u} p_i \bar{u}_i dA = \int_{A_u} \left[ \frac{12}{t^3} (M_{ij}n_j) \bar{u}_i X_3 + \frac{3}{2t} (Q_i n_i) \bar{u}_3 \left( 1 - \frac{4X_3^2}{t^2} \right) \right] dA \quad (2.35)$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Considerando ainda que,

$$dV = dX_3 d\Omega \quad (2.36)$$

e que,

$$dA = dX_3 d\Gamma \quad (2.37)$$

a Equação (2.27) agora pode ser escrita em função dos esforços na superfície média, pela simples substituição das Equações (2.32), (2.33), (2.34) e (2.35). Logo:

$$\begin{aligned} \pi_R = & -\frac{1}{2E} \int_{\Omega} \frac{12}{t^3} \left[ (M_{11} + M_{22})^2 + 2(1 + \nu) (M_{12}^2 + M_{11}\sigma_{22}) + \right. \\ & \left. + \frac{(1 + \nu)}{5} t^2 (Q_1^2 + Q_2^2) - \frac{\nu t^2}{5} g (M_{11} + M_{22}) + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{33}^2 dX_3 \right] d\Omega + \\ & - \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \frac{12}{t^3} (M_{ij,j} - Q_i) u_i X_3 + \frac{3}{2t} (Q_{i,i} + g) u_3 \left( 1 - \frac{4X_3^2}{t^2} \right) \right] dX_3 d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \frac{12}{t^3} (M_{ij}n_j - \bar{M}_{ij}n_j) u_i X_3 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2t} (Q_i n_i - \bar{Q}_i n_i) u_3 \left( 1 - \frac{4X_3^2}{t^2} \right) \right] dX_3 d\Gamma_t + \\ & + \int_{\Gamma_u} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[ \frac{12}{t^3} (M_{ij}n_j) \bar{u}_i X_3 + \frac{3}{2t} (Q_i n_i) \bar{u}_3 \left( 1 - \frac{4X_3^2}{t^2} \right) \right] dX_3 d\Gamma_u \\ & i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Resta agora, substituir as deformações pelos deslocamentos generalizados na superfície média da placa. Para isto, utiliza-se diretamente as Equações (2.18) e (2.19) na Equação (2.38), obtendo-se:

$$\begin{aligned}
\pi_R = & -\frac{1}{2E} \int_{\Omega} \frac{12}{t^3} [(M_{11} + M_{22})^2 + 2(1 + \nu)(M_{12}^2 + M_{11}\sigma_{22}) + \\
& + \frac{(1 + \nu)}{5} t^2 (Q_1^2 + Q_2^2) - \frac{\nu t^2}{5} g(M_{11} + M_{22}) + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{33}^2 dX_3] d\Omega + \\
& - \int_{\Omega} [(M_{ij,j} - Q_i) \phi_i + (Q_{i,i} + g) w] d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_t} [(M_{ij}n_j - \bar{M}_{ij}n_j) \phi_i + (Q_i n_i - \bar{Q}_i n_i) w] d\Gamma_t + \\
& + \int_{\Gamma_u} (M_{ij}n_j \bar{\phi}_i + Q_i n_i \bar{w}) d\Gamma_u \quad i, j = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Tem-se então o funcional  $\pi_R$ , apresentado na Equação (2.39), escrito apenas em função dos esforços  $M_{ij}$  e  $Q_i$  e dos deslocamentos generalizados  $\phi_i$  e  $w$ . Lembrando que para o problema de flexão de placas, os índices  $i$  e  $j$  na Equação (2.39) variam de 1 a 2, tomando-se a primeira variação do funcional e igualando-o a zero, chega-se à:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left\{ \frac{12}{Et^3} [(M_{11} + M_{22}) \delta(M_{11} + M_{22}) + 2(1 + \nu) M_{12} \delta M_{12} + \right. \\
& \left. - (1 + \nu) \delta(M_{11} M_{22}) + \frac{(1 + \nu) t^2}{5} (Q_1 \delta Q_1 + Q_2 \delta Q_2) - \frac{\nu t^2}{10} g \delta(M_{11} + M_{22}) \right] + \\
& + \phi_1 \delta(M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) + \phi_2 \delta(M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) + \\
& + w \delta(Q_{1,1} + Q_{2,2} + g) + (M_{11,1} + M_{12,1} - Q_1) \delta Q_1 + (M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) \delta \phi_2 + \\
& + (Q_{1,1} + Q_{2,2} + g) \delta w \} d\Omega + \int_{\Gamma_t} [(M_{11}n_1 + M_{12}n_2 - \bar{M}_{11}n_1 - \bar{M}_{12}n_2) \delta \phi_1 + \\
& + (M_{12}n_1 + M_{22}n_2 - \bar{M}_{21}n_1 - \bar{M}_{22}n_2) \delta \phi_2 + (Q_1 n_1 + Q_2 n_2 - \bar{Q}_1 n_1 + \\
& - \bar{Q}_2 n_2) \delta w] d\Gamma_t + \int_{\Gamma_u} [(\delta M_{11}n_1 + \delta M_{12}n_2) \bar{\phi}_1 + (\delta M_{12}n_1 + \delta M_{22}n_2) \bar{\phi}_2 + \\
& + (\delta Q_1 n_1 + \delta Q_2 n_2) \bar{w}] d\Gamma_u = 0.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Colocando os termos que sofrem variação em evidência na Equação (2.40):

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left\{ \frac{12}{Et^3} \left\{ \left[ (M_{11} + M_{22}) - (1 + \nu) M_{22} - \frac{\nu t^2}{10} g \right] \delta M_{11} + [(M_{22} + M_{11}) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (1 + \nu) M_{11} - \frac{\nu t^2}{10} g \right] \delta M_{22} + [2(1 + \nu) M_{12}] \delta M_{12} + \frac{(1 + \nu)}{5} t^2 (Q_1 \delta Q_1 + \right. \\
& \quad \left. + Q_2 \delta Q_2) \right\} + \{ \phi_1 \delta (M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) + \phi_2 \delta (M_{12,1} + M_{22,2} - Q_2) + \\
& + w \delta (Q_{1,1} + Q_{2,2} + g) + (M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) \delta \phi_1 + (M_{12,1} + M_{22,2} - Q_2) \delta \phi_2 + \\
& + (Q_{1,1} + Q_{2,2} + g) \delta w \} \} d\Omega + \int_{\Gamma_t} [(M_{11} n_1 + M_{12} n_2 - \bar{M}_{11} n_1 - \bar{M}_{12} n_2) \delta \phi_1 + \\
& \quad + (M_{12} n_1 + M_{22} n_2 - \bar{M}_{21} n_1 - \bar{M}_{22} n_2) \delta \phi_2 + (Q_1 n_1 + Q_2 n_2 - \bar{Q}_1 n_1 + \\
& \quad - \bar{Q}_2 n_2) \delta w] d\Gamma_t + \int_{\Gamma_u} [(\delta M_{11} n_1 + \delta M_{12} n_2) \bar{\phi}_1 + (\delta M_{12} n_1 + \delta M_{22} n_2) \bar{\phi}_2 + \\
& \quad + (\delta Q_1 n_1 + \delta Q_2 n_2) \bar{w}] d\Gamma_u = 0.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Na Equação (2.41), os termos que envolvem as variações das derivadas dos esforços, podem ser reescritos utilizando o teorema de Green:

$$\int_{\Omega} \phi_i \delta M_{ij,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \phi_i n_j \delta M_{ij} d\Gamma - \int_{\Omega} \phi_{i,j} \delta M_{ij} d\Omega \quad i, j = 1, 2, \tag{2.42}$$

$$\int_{\Omega} w \delta Q_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} w n_i \delta Q_i d\Gamma - \int_{\Omega} w_{,i} \delta Q_i d\Omega \quad i = 1, 2 \tag{2.43}$$

onde os índices repetidos, neste caso, não indicam soma.

Substituindo as Equações (2.42) e (2.43) na Equação (2.41) chega-se à:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left\{ \left\{ \frac{12}{Et^3} \left[ (M_{11} + M_{22}) - (1 + \nu) M_{22} - \frac{\nu t^2}{10} g \right] - \phi_{1,1} \right\} \delta M_{11} + \right. \\
& \quad + \left\{ \frac{12}{Et^3} \left[ (M_{11} + M_{22}) - (1 + \nu) M_{11} - \frac{\nu t^2}{10} g \right] - \phi_{2,2} \right\} \delta M_{22} + \\
& \quad + \left\{ \frac{12}{Et^3} [2(1 + \nu) M_{12}] - \phi_{1,2} - \phi_{2,1} \right\} \delta M_{12} + \\
& \quad + \left\{ \frac{12}{Et^3} \left[ \frac{(1 + \nu) t^2}{5} Q_1 \right] - \phi_1 - w_{,1} \right\} \delta Q_1 + \\
& + \left\{ \frac{12}{Et^3} \left[ \frac{(1 + \nu) t^2}{5} Q_2 \right] - \phi_2 - w_{,2} \right\} \delta Q_2 + (M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) \delta \phi_1 + \\
& \quad + (M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) \delta \phi_2 + (Q_{1,1} + Q_{2,2} + g) \delta w \} d\Omega \\
& \quad + \int_{\Gamma_t} [(M_{11}n_1 + M_{12}n_2 - \bar{M}_{11}n_1 - \bar{M}_{12}n_2) \delta \phi_1 + \\
& \quad + (M_{12}n_1 + M_{22}n_2 - \bar{M}_{21}n_1 - \bar{M}_{22}n_2) \delta \phi_2 + \\
& \quad + (Q_1n_1 + Q_2n_2 - \bar{Q}_1n_1 - \bar{Q}_2n_2) \delta w] d\Gamma_t + \\
& \quad + \int_{\Gamma_u} [(\bar{\phi}_1n_1 - \phi_1n_1) \delta M_{11} + (\bar{\phi}_2n_2 - \phi_2n_2) \delta M_{22} + \\
& \quad + (\bar{\phi}_1n_2 + \bar{\phi}_2n_1 - \phi_1n_2 - \phi_2n_1) \delta M_{12} + (\bar{w}n_1 - wn_1) \delta Q_1 + \\
& \quad + (\bar{w}n_2 - wn_2) \delta Q_2] d\Gamma_u = 0.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Na Equação (2.44), as variáveis  $\delta M_{ij}$ ,  $\delta Q_i$ ,  $\delta \phi_i$  e  $\delta w$  podem assumir valores quaisquer, devendo portanto, para que a condição de extremização ( $\delta \pi_R = 0$ ) seja atendida:

- No domínio  $\Omega$ :

Podendo  $\delta \phi_1$ ,  $\delta \phi_2$  e  $\delta w$  assumirem valores diferentes de zero, conclui-se que:

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} + g = 0; \tag{2.45}$$

$$M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1 = 0; \tag{2.46}$$

$$M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2 = 0. \tag{2.47}$$

As quais, são exatamente as mesmas relações apresentadas nas Equações (2.11) e (2.12).

Da mesma forma, para  $\delta M_{11}$ ,  $\delta M_{12}$ ,  $\delta M_{22}$ ,  $\delta Q_1$  e  $\delta Q_2$ , conclui-se que:

$$\frac{12}{Et^3} \left[ (M_{11} + M_{22}) - (1 + \nu) M_{22} - \frac{\nu t^2}{10} g \right] - \phi_{1,1} = 0; \tag{2.48}$$

$$\frac{12}{Et^3} \left[ (M_{11} + M_{22}) - (1 + \nu) M_{11} - \frac{\nu t^2}{10} g \right] - \phi_{2,2} = 0; \quad (2.49)$$

$$\frac{12}{Et^3} [2(1 + \nu) M_{12}] - \phi_{1,2} - \phi_{2,1} = 0; \quad (2.50)$$

$$\frac{12}{Et^3} \left[ \frac{(1 + \nu) t^2}{5} Q_1 \right] - \phi_1 - w_{,1} = 0; \quad (2.51)$$

$$\frac{12}{Et^3} \left[ \frac{(1 + \nu) t^2}{5} Q_2 \right] - \phi_2 - w_{,2} = 0. \quad (2.52)$$

- No contorno  $\Gamma_t$ :

Como a variação dos deslocamentos pode assumir valores quaisquer, as seguintes relações devem ser obrigatoriamente atendidas:

$$M_{11}n_1 + M_{12}n_2 = \bar{M}_{11}n_1 + \bar{M}_{12}n_2; \quad (2.53)$$

$$M_{21}n_1 + M_{22}n_2 = \bar{M}_{21}n_1 + \bar{M}_{22}n_2; \quad (2.54)$$

$$Q_1n_1 + Q_2n_2 = \bar{Q}_1n_1 + \bar{Q}_2n_2. \quad (2.55)$$

Reescrevendo as equações de equilíbrio (Equação (2.6)) em termos de esforços resultantes ( $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ ), obtém-se:

$$P_i = M_{ij}n_j = M_n \quad i, j = 1, 2 \quad (2.56)$$

e

$$P_3 = Q_i n_i = Q_n \quad i = 1, 2 \quad (2.57)$$

onde  $M_n$  e  $Q_n$  são, o momento fletor e o esforço cortante, atuantes no contorno da placa com direção normal  $n$ .

Considerando as Equações (2.56) e (2.57), as Equações (2.53), (2.54) e (2.55) assumem a forma:

$$P_i = \bar{P}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.58)$$

- No contorno  $\Gamma_u$ :

Em  $\Gamma_u$  as variáveis  $\delta M_{11}$ ,  $\delta M_{22}$ ,  $\delta M_{12}$ ,  $\delta Q_1$  e  $\delta Q_2$  podem assumir valor não nulo, consequentemente:

$$\phi_1 = \bar{\phi}_1; \quad (2.59)$$

$$\phi_2 = \bar{\phi}_2; \quad (2.60)$$

$$w = \bar{w}. \quad (2.61)$$

Generalizando os deslocamentos:

$$U_1 = \phi_1; \quad (2.62)$$

$$U_2 = \phi_2; \quad (2.63)$$

$$U_3 = w. \quad (2.64)$$

Das Equações (2.59) à (2.64), simplifica-se:

$$U_i = \bar{U}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.65)$$

Os momentos e esforços cortantes podem ser explicitados das Equações (2.48) à (2.52), de onde se obtém:

$$M_{ij} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \phi_{i,j} + \phi_{j,i} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{k,k} \delta_{ij} \right) + \frac{\nu g}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{ij} \quad i, j, k = 1, 2 \quad (2.66)$$

e

$$Q_i = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\phi_i + w_{,i}) \quad i = 1, 2 \quad (2.67)$$

onde  $D$  é o módulo de rigidez à flexão da placa e  $\lambda$  é uma constante característica da teoria de Reissner para o problema de flexão de placas, sendo dados por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.68)$$

e por,

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{t}. \quad (2.69)$$

As equações de equilíbrio (2.11) e (2.12), e as relações entre os esforços e deslocamentos generalizados dadas pelas Equações (2.66) e (2.67), constituem a base da teoria de Reissner para o problema de flexão de placas com pequenos deslocamentos, podendo este sistema de equações ser condensado em um novo sistema de equações diferenciais de ordem superior, conforme apresentado por KONDA [34].

## 2.6 Condições de Contorno

Na teoria de Reissner, cada ponto do contorno está associado a um conjunto de seis variáveis segundo a direção normal ( $\mathbf{n}$ ) e tangencial ( $\mathbf{s}$ ), sendo elas  $\phi_n$ ,  $\phi_s$ ,  $w$ ,  $M_n$ ,  $M_{ns}$  e  $Q_n$ . Generalizando as variáveis para o contorno:

$$U_1 = \phi_n; \quad (2.70)$$

$$U_2 = \phi_s; \quad (2.71)$$

$$U_3 = w; \quad (2.72)$$

$$P_1 = M_n; \quad (2.73)$$

$$P_2 = M_{ns}; \quad (2.74)$$

$$P_3 = Q_n. \quad (2.75)$$

Em geral, quando o valor de um deslocamento  $U_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) é conhecido em um ponto do contorno, o esforço correspondente  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) é considerado incógnita do problema, e vice-versa. Conforme apresentado em [35], as restrições para o problema de flexão de placas podem ser:

- Borda Livre

Todos os esforços no contorno livre assumem valor nulo e os deslocamentos são incógnitas do problema.

$$M_n = M_{ns} = Q_n = 0. \quad (2.76)$$

- Borda Engastada

É a situação oposta à de borda livre. Neste caso, todos os deslocamentos assumem valor nulo e os esforços se apresentam como incógnitas do problema.

$$\phi_n = \phi_s = w = 0. \quad (2.77)$$

- Borda Simplesmente Apoiada

Para o caso de borda simplesmente apoiada, a condição de contorno pode assumir duas configurações:

- *Hard condition*

Esta condição de contorno é também chamada de condição restritiva, sendo que, o deslocamento  $w$ , a rotação  $\phi_s$  e o momento  $M_n$  são variáveis

com valores conhecidos. É a condição normalmente utilizada na teoria de Kirchhoff. Em geral:

$$M_n = \phi_s = w = 0. \quad (2.78)$$

– *Soft condition*

Também conhecida como condição não restritiva, configura-se por ter as variáveis  $w$ ,  $M_n$  e  $M_{ns}$  com valores conhecidos. Em geral:

$$M_n = M_{ns} = w = 0. \quad (2.79)$$

Vale dizer que, apesar das condições de contorno terem sido apresentadas de forma específica, onde os valores prescritos foram considerados iguais a zero, o caso geral, no qual valores diferentes de zero são impostos às variáveis com valores conhecidos, não descaracteriza as condições de contorno apresentadas.

# Capítulo 3

## Aproximação de Funções

O desenvolvimento de um método sem malha tem início na escolha do processo de aproximação das variáveis do problema. Tal processo deve possibilitar a aproximação satisfatória da variável de interesse em um ponto, a partir de um conjunto de pontos desconexos nos quais a variável é, a princípio, previamente conhecida. O processo de aproximação pode exigir que a função aproximadora interpole a função dada nos pontos previamente conhecidos, sendo que, neste caso, o processo de aproximação se torna um processo de interpolação.

A função de aproximação deve ser estável, objetivando a produção de soluções estáveis. Caso um conjunto de funções aproximadoras seja utilizado simultaneamente, tais funções devem ser linearmente independentes para formação de uma base nodal consistente [36].

### 3.1 Interpolação Usando Funções de Base Radial

Este processo de interpolação utiliza funções positivas, onde a variável independente é a distância Euclidiana entre o ponto de interesse e os demais pontos onde a variável é conhecida. O ponto de interesse também é denominado de ponto base e os pontos nos quais a variável é conhecida são denominados pontos campo.

A quantidade de FBR disponíveis para a aplicação do processo de interpolação é vasta, sendo comum o uso das funções multiquádrica, gaussiana, *thin-plate spline*, quadrática inversa, cúbica e muitas outras [37, 38].

Seja  $\tilde{f}(x_i)$  a solução proposta, supostamente próxima da solução exata de um problema qualquer  $f(x_i)$ . A solução propositiva deve ser escrita em função da distância Euclidiana e de, no mínimo, um parâmetro para ajuste da solução. Desta forma,

$$\tilde{f}(x_i) = \sum_{j=1}^N r(x_i, x_j) \alpha_j \quad (3.1)$$

onde  $r(x_i, x_j)$  é uma FBR conhecida,  $x_i$  é o ponto base e  $x_j$  é o ponto campo,  $\alpha_j$  são parâmetros a determinar e  $N$  é a quantidade de pontos desconexos utilizados para aproximar a variável  $f$  no ponto  $x_i$ .

Apesar de existirem diversas FBR, de acordo com LIU e GU [39], apenas quatro são amplamente empregadas no processo de interpolação, sendo elas: a função multi-quádrica; a função Gaussiana; a função *thin plate spline* e a função de base radial logarítmica. De maneira geral, uma FBR está associada a um ou mais parâmetros de forma, os quais precisam ser previamente determinados a fim de obter funções de interpolação com desempenho satisfatório.

As características das FBR foram objetos de estudos em vários trabalhos, cabendo destacar [40–42]. XIA *et al.* [15] utilizaram a função multi-quádrica na obtenção das funções de interpolação para aplicação do MLPG, produzindo bons resultados. Desta forma, neste trabalho utiliza-se a função multi-quádrica dada por:

$$r(x_i, x_j) = (R^2(x_i, x_j) + (a_c d_c)^2)^q \quad (3.2)$$

onde  $q$  e  $a_c$  são parâmetros de forma,  $d_c$  é um comprimento característico correlacionado com o espaçamento nodal dentro do subdomínio local do ponto de interesse e  $R$  é a distância euclidiana entre o ponto base e o ponto campo.

De acordo com WANG e LIU [43, 44], o parâmetro  $q = 0.98$  ou  $q = 1.03$  produz bons resultados para análise de problemas bidimensionais em mecânica dos sólidos ou fluidos.

Para determinação dos coeficientes  $\alpha$  é necessário um total de, no mínimo,  $N$  equações linearmente independentes para montagem do sistema. Desta forma, impondo como condição de interpolação que o valor de  $\tilde{f}(x_i)$  seja igual ao valor da variável conhecida em  $x_i$ , tem-se:

$$\bar{f}(x_i) = \tilde{f}(x_i) = \sum_{j=1}^N r(x_i, x_j) \alpha_j \quad (3.3)$$

onde  $\bar{f}(x_i)$  representa o valor previamente conhecido de  $f$  no ponto  $x_i$ .

Escrevendo a Equação (3.3) para todos os  $N$  pontos campo, obtém-se um sistema de equações lineares que possibilita a determinação de todos parâmetros  $\alpha$ . Assim:

$$\begin{bmatrix} r(x_1, x_1) & r(x_1, x_2) & \cdots & r(x_1, x_N) \\ r(x_2, x_1) & r(x_2, x_2) & \cdots & r(x_2, x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(x_N, x_1) & r(x_N, x_2) & \cdots & r(x_N, x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}(x_1^1) \\ \bar{f}(x_1^2) \\ \vdots \\ \bar{f}(x_1^N) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde  $\bar{f}(x_i^j)$  representa o valor prescrito da variável  $f$  no  $j$ -ésimo ponto do subdomínio

do ponto  $x_i$ .

A Equação (3.4) pode ser apresentada na forma compacta:

$$\mathbf{R}_0 \boldsymbol{\alpha} = \bar{\mathbf{f}}_{x_i} \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{R}_0$  é a matriz de momento da FBR,  $\boldsymbol{\alpha}$  é o vetor que contém os parâmetros a se determinar e  $\bar{\mathbf{f}}_{x_i}$  é o vetor que contém o valor da variável  $f$  prescrita em todos os pontos que pertencem ao subdomínio do ponto  $x_i$ .

O vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  é determinado pré-multiplicando ambos os lados da Equação (3.5) por  $\mathbf{R}_0^{-1}$ , logo:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}_0^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{x_i}. \quad (3.6)$$

A determinação do parâmetro  $\boldsymbol{\alpha}$  permite a obtenção da variável  $f$  em um ponto qualquer  $x_q$ , a partir do vetor  $\mathbf{r}(x_q)$  escrito a partir dos pontos  $x_j$ , onde  $j = 1, \dots, N$ .

Para utilização do processo de interpolação em um método sem malha, é conveniente escrever a variável interpolada em função dos valores nodais da própria variável. Assim, substituindo a Equação (3.6) na Equação (3.1), obtém-se:

$$\tilde{f}(x_i) = \mathbf{r}^T(x_i) (\mathbf{R}_0^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{x_i}) \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{r}(x_i)$  é o vetor que contém os coeficientes da função de base radial do ponto  $x_i$ .

A Equação (3.7) pode ser reescrita na forma:

$$\tilde{f}(x_i) = \boldsymbol{\varphi}_{x_i}^T \bar{\mathbf{f}}_{x_i} \quad (3.8)$$

ou ainda,

$$\tilde{f}(x_i) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x_i) \bar{f}(x_i^j) \quad (3.9)$$

onde  $\varphi_j(x_i)$  é o  $j$ -ésimo termo da função de aproximação do ponto  $x_i$  e  $\boldsymbol{\varphi}_{x_i}$  é definida como sendo a função de aproximação da variável de interesse no ponto  $x_i$  e é dada por:

$$\boldsymbol{\varphi}_{x_i}^T = \mathbf{r}^T(x_i) \mathbf{R}_0^{-1}. \quad (3.10)$$

Uma característica interessante deste método é a possibilidade da aplicação de forma local, ou seja, este processo pode ser utilizado satisfatoriamente para interpolar funções que apresentem características locais acentuadas. Para tanto, a Equação (3.9) deve ser utilizada em um subdomínio local contendo os pontos campo que representem adequadamente as características locais do problema.

Devido ao fato de a FBR escolhida neste método ser sempre positiva definida, a matriz  $\mathbf{R}_0$  é consequentemente não singular e as funções de aproximação obtidas são linearmente independentes. Por outro lado, este tipo de interpolação não possui consistência, ou seja, ainda que o método apresente convergência com aumento do número de pontos, ele não é capaz de reproduzir uma função constante.

As derivadas parciais da variável  $u$  são obtidas da seguinte forma:

$$\frac{\partial f}{\partial X_k}(x_i) \cong \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X_k}(x_i) = \frac{\partial \varphi_{x_i}^T}{\partial X_k} \bar{\mathbf{f}}_{x_i}. \quad (3.11)$$

## 3.2 Interpolação Usando Funções de Base Radial com Termos Polinomiais

Para dar consistência ao processo de interpolação com FBR, termos polinomiais podem ser adicionados à base de modo a se obter a consistência desejada. Desta forma, a expressão para interpolar a variável  $f$  no ponto  $x_i$  pode ser escrita como:

$$\tilde{f}(x_i) = \sum_{j=1}^N r(x_i, x_j) \alpha_j + \sum_{j=1}^M p_j(x_i) \beta_j \quad i = 1, \dots, N \quad (3.12)$$

onde  $p_j(x_i)$  representa uma base polinomial completa com  $M$  termos correlacionados ao ponto  $x_i$  e  $\beta_j$  são parâmetros a serem determinados em decorrência da consideração da base polinomial.

Em geral, a base polinomial é constituída de monômios e, para o caso bidimensional é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Base linear:} & \quad \mathbf{p}^T = (1, X_1, X_2) \\ \text{Base quadrática:} & \quad \mathbf{p}^T = (1, X_1, X_2, X_1^2, X_1X_2, X_2^2) \\ \text{Base cúbica:} & \quad \mathbf{p}^T = (1, X_1, X_2, X_1^2, X_1X_2, X_2^2, X_1^3, X_1^2X_2, X_1X_2^2, X_2^3) \end{aligned}$$

De acordo com [39], a base monomial pode ser obtida de maneira genérica através do triângulo de Pascal, conforme apresentado na Figura 3.1.

Devido à inclusão dos parâmetros  $\beta_j$ , torna-se necessário a definição de  $M$  novas equações para possibilitar a solução do problema. Uma alternativa é utilizar a base monomial para impor a obtenção de um sistema linearmente independente, garantindo a unicidade da solução. Para isto, deve-se ter:

$$\sum_{k=1}^N p_j(x_i) \alpha_k = 0 \quad j = 1, \dots, M \quad (3.13)$$

ou ainda, matricialmente:

$$\mathbf{P}^T \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad (3.14)$$

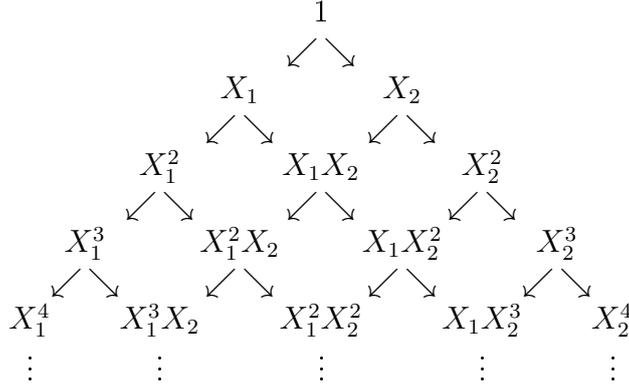


Figura 3.1: Triângulo de Pascal para obtenção dos monômios - caso bidimensional

onde  $\mathbf{P}$  é matriz de momento polinomial.

As Equações (3.12) e (3.14) podem ser agrupadas em uma única expressão:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{x_i} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.15)$$

Ainda que, novas equações tenham sido consideradas na formação do sistema de equações, é importante ressaltar que a solução do sistema só é possível para o caso em que  $N \geq M$ .

Resta agora a imposição do processo de interpolação. Para isto, são utilizados  $N$  pontos nos quais a variável  $f$  é conhecida, ou seja:

$$\tilde{f}(x_i^j) = \bar{f}(x_i^j) \quad j = 1, \dots, N \quad (3.16)$$

onde  $\tilde{f}(x_i^j)$  é o valor aproximado da variável  $f$  no  $j$ -ésimo ponto do subdomínio do ponto  $x_i$ .

A equação 3.15 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_{x_i} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.17)$$

Definido o sistema de Equações (3.17), os parâmetros  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\beta}$  podem ser determinados. Uma vez determinado o valor de  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\beta}$ , pode-se obter o valor aproximado da variável  $f$  em um ponto  $x_q$  qualquer através da Equação (3.12) apenas utilizando-se dos valores  $\mathbf{r}(x_q)$  e  $\mathbf{p}(x_q)$ .

Conforme já mencionado, para aplicação do processo de aproximação em um método sem malha, é conveniente utilizar tal processo escrevendo a variável de interesse em função dos valores nodais da própria variável. Para isto, o parâmetro  $\boldsymbol{\alpha}$  é isolado na primeira equação do sistema de Equações (3.17) e substituído na segunda equação do mesmo sistema (3.17), produzindo:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{R}_0^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{x_i} - \mathbf{P}^T \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} = 0. \quad (3.18)$$

A partir da Equação (3.18), pode-se escrever  $\boldsymbol{\beta}$  em função dos valores nodais da variável interpolada. Assim:

$$\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{P}^T \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{R}_0^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{x_i} \quad (3.19)$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varphi}_\beta \bar{\mathbf{f}}_{x_i} \quad (3.20)$$

onde:

$$\boldsymbol{\varphi}_\beta = [\mathbf{P}^T \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{R}_0^{-1}. \quad (3.21)$$

Para obtenção do parâmetro  $\boldsymbol{\alpha}$  em função dos valores nodais da variável interpolada, substitui-se o parâmetro  $\boldsymbol{\beta}$  obtido na Equação (3.20) na Equação (3.17). Assim:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}_0^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{x_i} - \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P} \boldsymbol{\varphi}_\beta \bar{\mathbf{f}}_{x_i} \quad (3.22)$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varphi}_\alpha \bar{\mathbf{f}}_{x_i} \quad (3.23)$$

onde:

$$\boldsymbol{\varphi}_\alpha = \mathbf{R}_0^{-1} - \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P} \boldsymbol{\varphi}_\beta. \quad (3.24)$$

Por fim, substituindo as Equações (3.20) e (3.23) na Equação (3.12), tem-se a variável aproximada escrita em função de seus valores nodais:

$$\tilde{f}(x_i) = [\mathbf{r}^T(x_i) \boldsymbol{\varphi}_\alpha + \mathbf{p}^T(x_i) \boldsymbol{\varphi}_\beta] \bar{\mathbf{f}}_{x_i}. \quad (3.25)$$

A Equação (3.25), apresentada para o ponto  $x_i$ , pode ser aplicada a um ponto  $x_q$  qualquer, contido no domínio de  $x_i$ , representado pelos  $N$  pontos utilizados para obtenção de  $\mathbf{R}_0$  e  $\mathbf{P}$ . Desta forma, a Equação (3.25) pode ser reescrita na forma:

$$\tilde{f}(x_q) = \boldsymbol{\varphi}_{x_q} \bar{\mathbf{f}}_{x_i} \quad (3.26)$$

onde  $\boldsymbol{\varphi}_{x_q}$  é a função de aproximação do ponto  $x_q$  e é dada por,

$$\boldsymbol{\varphi}_{x_q} = \mathbf{r}^T(x_q) \boldsymbol{\varphi}_\alpha + \mathbf{p}^T(x_q) \boldsymbol{\varphi}_\beta \quad (3.27)$$

e o vetor  $\mathbf{r}^T(x_q)$  é obtido considerando-se os mesmos  $N$  pontos contidos no subdo-

mínio do ponto  $x_i$ .

Este processo de interpolação, que adiciona termos polinomiais às funções de base radial, apresenta as mesmas características da interpolação utilizando apenas FBR, ou seja, também pode ser aplicado para aproximar funções com características locais acentuadas. A diferença entre os métodos está na consistência dada pela utilização da base monomial, sendo que, ao se utilizar uma base monomial de ordem  $k$ , a consistência das funções de interpolação obtidas será  $C^k$ , ou seja, a  $k$ -ésima derivada das funções de interpolação serão contínuas.

As derivadas parciais da variável aproximada são obtidas pela diferenciação direta da Equação (3.26), sendo dadas por:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X_k}(x_i) = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial X_k}(x_i) \boldsymbol{\varphi}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial X_k}(x_i) \boldsymbol{\varphi}_\beta \right] \bar{\mathbf{f}}_{x_i}. \quad (3.28)$$

### 3.3 Aproximação com o Método dos Mínimos Quadrados Móveis

O método dos Mínimos Quadrados Móveis aproxima a variável de interesse considerando um subdomínio local, contido no domínio do problema. O método consiste em minimizar o resíduo quadrático ponderado gerado pela função aproximada em cada subdomínio local, justificando assim sua denominação.

Seja uma função  $f(x)$  válida no domínio  $\Omega$ , representado por uma nuvem de pontos. A partir de um ponto  $x_i$  pode-se constituir um subdomínio local  $\Omega_s$  contendo  $N$  pontos, no qual a função  $\tilde{f}(x)$  é válida e definida suficientemente próxima de  $f(x)$ , dada por:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^M p_j(x) a_j(x) \quad (3.29)$$

onde  $p_j(x)$  é uma base polinomial contendo  $M$  termos e  $a_j(x)$  são parâmetros à determinar válidos no subdomínio local  $\Omega_s$  do ponto  $x_i$  para aproximação da variável no ponto  $x$ . Em geral, a base polinomial é a mesma utilizada na Equação (3.12) e a quantidade de termos que compõem a base é dada por:

$$M = \frac{(l_m + 1)(l_m + 2) \dots (l_m + z_m)}{z_m!} \quad (3.30)$$

onde  $z_m$  é a dimensão do problema abordado e  $l_m$  é a ordem do maior termo monomial, desde que  $l_m > 0$ .

Para aproximação da variável no ponto  $x_i$ , o resíduo quadrático ponderado acumulado  $J$ , no subdomínio local de  $x_i$ , proveniente da solução aproximada é dado

por:

$$J(x_i) = \sum_{j=1}^N w_p(x_i, x_j) [\tilde{f}(x_i^j) - \bar{f}(x_i^j)]^2 \quad (3.31)$$

onde  $w_p(x_i, x_j)$  é a função peso do erro quadrático, centrada no ponto de interesse  $x_i$  e avaliada em  $x_j$ ,  $N$  é a quantidade de pontos que pertencem ao subdomínio local do ponto  $x_i$  e  $f(x_i^j)$  representa a variável  $f$  no  $j$ -ésimo ponto do subdomínio local do ponto  $x_i$ . Os símbolos  $\tilde{\phantom{f}}$  e  $\bar{\phantom{f}}$ , sobre uma variável, indicam valores aproximados e valores prescritos, respectivamente. A interpretação geométrica do método é apresentada na Figura 3.2.

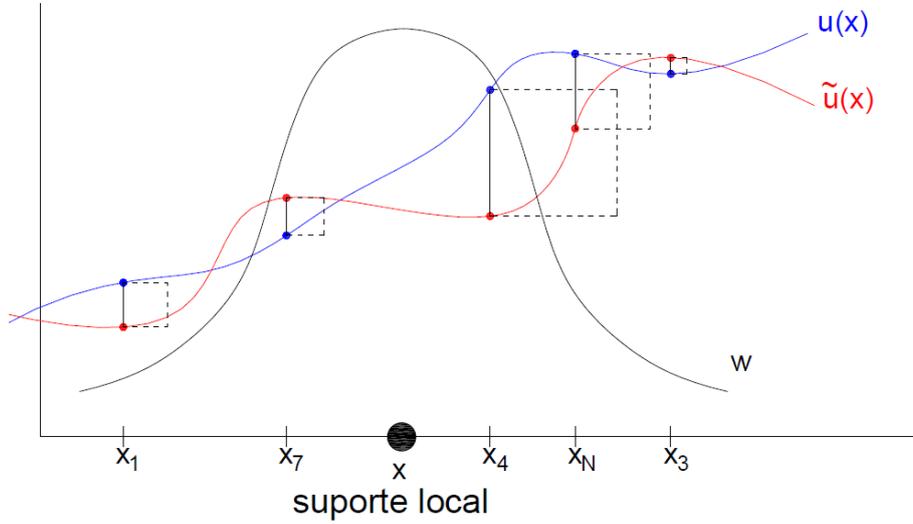


Figura 3.2: Interpretação geométrica do MLS

Substituindo a Equação (3.29) na Equação (3.31), obtém-se:

$$J(x_i) = \sum_{j=1}^N w_p(x_i, x_j) \left[ \sum_{k=1}^M p_k(x_i^j) a_k(x_i) - \bar{f}(x_i^j) \right]^2 \quad (3.32)$$

onde  $p_k(x_i^j)$  é o  $k$ -ésimo termo da base monomial do  $j$ -ésimo ponto do subdomínio local do ponto  $x_i$ .

A Equação (3.32) pode ser escrita matricialmente da seguinte forma:

$$J(x_i) = \left[ (\mathbf{P}\mathbf{a}(x_i) - \bar{\mathbf{f}}_{x_i})^T \mathbf{W}_{(x_i)} (\mathbf{P}\mathbf{a}(x_i) - \bar{\mathbf{f}}_{x_i}) \right] \quad (3.33)$$

onde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(x_i^1) & p_2(x_i^1) & \cdots & p_M(x_i^1) \\ p_1(x_i^2) & p_2(x_i^2) & \cdots & p_M(x_i^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_i^N) & p_2(x_i^N) & \cdots & p_M(x_i^N) \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{W}_{(x_i)} = \begin{bmatrix} w(x_i, x_i^1) & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & w(x_i, x_i^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(x_i, x_i^N) \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{x_i}^T = \left( \bar{f}(x_i^1) \quad \bar{f}(x_i^2) \quad \cdots \quad \bar{f}(x_i^N) \right) \quad (3.36)$$

e

$$\mathbf{a}^T(x_i) = \left( a_1(x_i) \quad a_2(x_i) \quad \cdots \quad a_N(x_i) \right). \quad (3.37)$$

Na Equação (3.32) o parâmetro  $a_i(x)$  é livre para assumir qualquer valor. Desta forma, o resíduo é minimizado em relação à tal parâmetro a fim de garantir que a solução  $\tilde{f}(x)$  seja próxima de  $f(x)$ . Assim,

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}}(x_i) = 2\mathbf{P}^T \mathbf{W}_{(x_i)} \mathbf{P} \mathbf{a}(x_i) - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W}_{(x_i)} \bar{\mathbf{f}}_{x_i}. \quad (3.38)$$

Logo:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{W}_{(x_i)} \mathbf{P} \mathbf{a}(x_i) - \mathbf{P}^T \mathbf{W}_{(x_i)} \bar{\mathbf{f}}_{x_i} = 0. \quad (3.39)$$

A Equação (3.39) pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{A}(x_i) \mathbf{a}(x_i) - \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{f}}_{x_i} = 0 \quad (3.40)$$

onde as matrizes  $\mathbf{A}(x)$  e  $\mathbf{B}(x)$  são escritas como:

$$\mathbf{A}(x_i) = \mathbf{B}(x_i) \mathbf{P} \quad (3.41)$$

e

$$\mathbf{B}(x_i) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}_{(x_i)} \quad (3.42)$$

sendo a matriz  $\mathbf{A}(x_i)$  simétrica ( $M \times M$ ) e  $\mathbf{B}(x_i)$  uma matriz ( $M \times N$ ). Cabe ressaltar que o sistema formado pela Equação (3.40) exige que  $N \geq M$  para que a matriz  $\mathbf{A}(x_i)$  não seja singular.

Pré-multiplicando a Equação (3.40) por  $\mathbf{A}^{-1}(x_i)$ , pode-se obter o parâmetro  $\mathbf{a}(x_i)$ :

$$\mathbf{a}(x_i) = \mathbf{A}^{-1}(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{f}}_{x_i}. \quad (3.43)$$

Com a intenção de escrever a variável aproximada  $\tilde{f}(x_i)$  em função dos valores nodais de  $\bar{f}$ , substitui-se a Equação (3.43) na Equação (3.29), produzindo:

$$\tilde{f}(x_i) = \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{A}^{-1}(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{f}}_{x_i} \quad (3.44)$$

ou ainda:

$$\tilde{f}(x_i) = \boldsymbol{\varphi}_{x_i} \bar{\mathbf{f}}_{x_i} \quad (3.45)$$

onde:

$$\boldsymbol{\varphi}_{x_i} = \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{A}^{-1}(x_i) \mathbf{B}(x_i). \quad (3.46)$$

A função  $\boldsymbol{\varphi}_{x_i}$  é uma matriz coluna ( $N \times 1$ ) e é definida como sendo a função de aproximação do ponto  $x_i$ .

As derivadas parciais da função de aproximação são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{x_i}}{\partial X_k} &= \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial X_k}(x_i) \mathbf{A}^{-1}(x_i) \mathbf{B}(x_i) + \mathbf{p}^T(x_i) \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial X_k}(x_i) \mathbf{B}(x_i) + \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial X_k}(x_i) \\ &k = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

As derivadas parciais de  $\mathbf{p}(x_i)$  são obtidas diretamente da base polinomial adotada. Já as derivadas parciais de  $\mathbf{B}$  são dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial X_k}(x_i) = \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial X_k} \mathbf{W}(x_i) + \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{W}(x_i)}{\partial X_k} \quad k = 1, 2. \quad (3.48)$$

No entanto, cabe observar que a matriz  $\mathbf{P}$  é construída em função das coordenadas dos pontos que compõem o subdomínio local, ou seja, uma vez definido o subdomínio local, a matriz  $\mathbf{P}$  permanece invariável. Assim:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X_k} = 0 \quad k = 1, 2. \quad (3.49)$$

Logo:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial X_k}(x_i) = \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{W}(x_i)}{\partial X_k} \quad k = 1, 2. \quad (3.50)$$

A função peso  $w(x_i, x_j)$ , apesar de ser avaliada sempre nos mesmos pontos ( $x_j$ ), pode ter o seu centro  $x_i$  variando, caso se queira aproximar a variável  $f$  em um ponto  $x_q$  qualquer, sendo  $x_q$  um ponto válido para o subdomínio  $\Omega_S$ . Desta forma, as derivadas parciais da matriz  $\mathbf{W}(x_i)$  são escritas:

$$\frac{\partial \mathbf{W}(x_i)}{\partial X_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial X_k}(x_i, x_i^1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial X_k}(x_i, x_i^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial w}{\partial X_k}(x_i, x_i^N) \end{bmatrix} \quad k = 1, 2. \quad (3.51)$$

As derivadas parciais da matriz  $\mathbf{A}^{-1}(x_i)$  pode ser obtida a partir da seguinte

equação:

$$\frac{\partial}{\partial X_k}(\mathbf{A}(x_i)\mathbf{A}^{-1}(x_i)) = 0 \quad k = 1, 2. \quad (3.52)$$

Logo:

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial X_k}(x_i) = -\mathbf{A}^{-1}(x_i)\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial X_k}(x_i)\mathbf{A}^{-1}(x_i) \quad k = 1, 2. \quad (3.53)$$

As derivadas da matriz  $\mathbf{A}(x_i)$  são obtidas diretamente da Equação (3.41):

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial X_k}(x_i) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial X_k}(x_i)\mathbf{P} \quad k = 1, 2 \quad (3.54)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial X_k}(x_i) = \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{W}(x_i)}{\partial X_k} \mathbf{P} \quad k = 1, 2. \quad (3.55)$$

A função de aproximação pode ser obtida sem a inversão direta da matriz  $\mathbf{A}(x_i)$ . Para isto, considerando a Equação (3.46), a função de aproximação é escrita na forma:

$$\varphi_{x_i} = \mathbf{c}(x_i)\mathbf{B}(x_i) \quad (3.56)$$

onde

$$\mathbf{c}(x_i) = \mathbf{p}^T(x_i)\mathbf{A}^{-1}(x_i). \quad (3.57)$$

Pós-multiplicando a Equação (3.57) pela matriz simétrica  $\mathbf{A}(x_i)$ , obtém-se:

$$\mathbf{c}(x_i)\mathbf{A}(x_i) = \mathbf{p}^T(x_i). \quad (3.58)$$

Aplicando a transposta na Equação (3.58), chega-se ao seguinte sistema de equações lineares:

$$\mathbf{A}(x_i)\mathbf{c}(x_i) = \mathbf{p}(x_i). \quad (3.59)$$

Uma vez determinada a variável  $\mathbf{c}(x_i)$ , basta multiplicá-la pela matriz  $\mathbf{B}(x_i)$  para obtenção da função de aproximação  $\varphi_{x_i}$ , conforme Equação (3.56).

A escolha da função peso é arbitrária, desde que respeitadas alguns requisitos, conforme apresentado em [45]. Em geral, no MSL utiliza-se a função Gaussiana ou spline, sendo que, de acordo com [39], o uso da função spline no MLS conduz à melhores resultados na formulação do MLPG. Desta forma, neste trabalho utiliza-se a spline de quarta ordem, apresentada na Figura 3.3 e dada por:

$$w(x_i, x_j) = 1 - 6 \left[ \frac{R(x_i, x_j)}{d_{x_i}} \right]^2 + 8 \left[ \frac{R(x_i, x_j)}{d_{x_i}} \right]^3 - 3 \left[ \frac{R(x_i, x_j)}{d_{x_i}} \right]^4 \quad (3.60)$$

onde  $d_{x_i}$  é o raio do subdomínio local e:

$$R(x_i, x_j) = \sqrt{(X_1(x_i) - X_1(x_j))^2 + (X_2(x_i) - x_2(x_j))^2}. \quad (3.61)$$

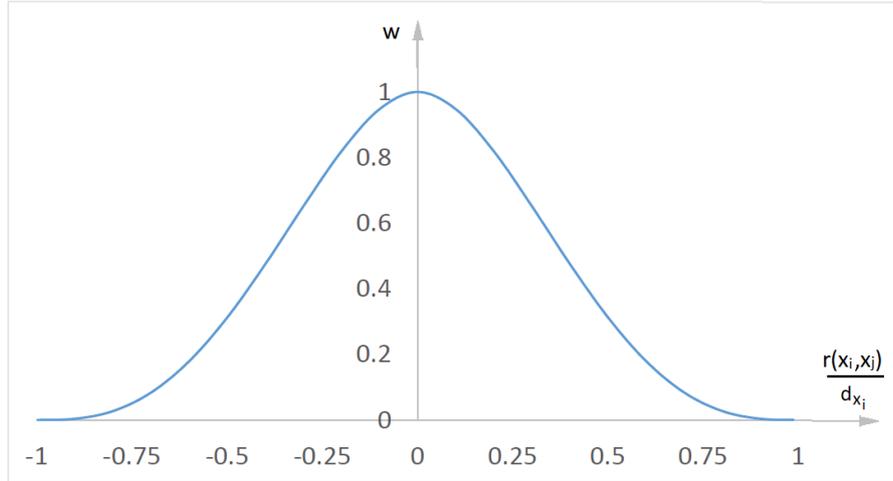


Figura 3.3: Função de ponderação - Spline de quarta ordem

A derivada da spline de quarta ordem é apresentada na Figura 3.4 e dada por:

$$\frac{\partial w}{\partial X_k}(x_i, x_j) = \frac{12(X_k(x_i) - X_k(x_j))}{d_{x_i}^2} \left\{ -1 + 2 \frac{R(x_i, x_j)}{d_{x_i}} - \left[ \frac{R(x_i, x_j)}{d_{x_i}} \right]^2 \right\} \quad k = 1, 2. \quad (3.62)$$

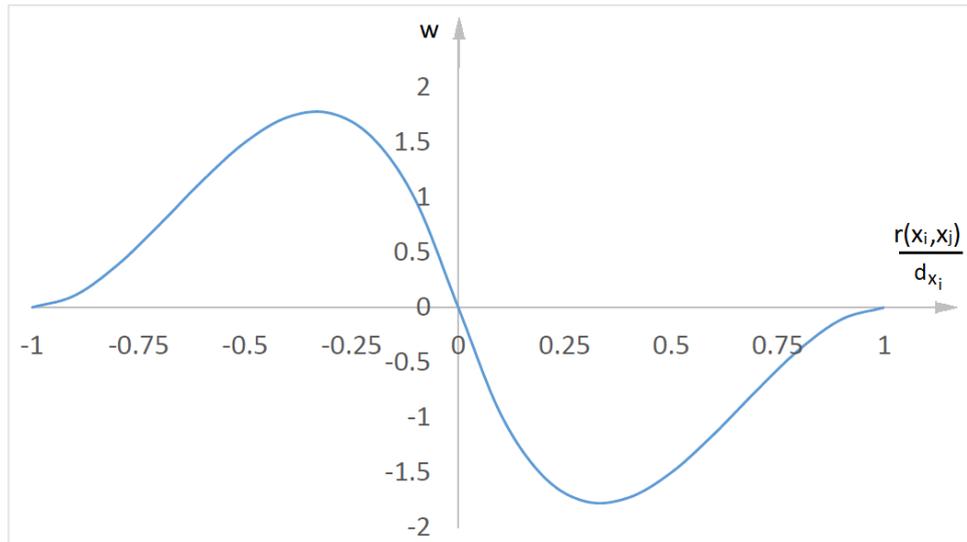


Figura 3.4: Derivada da função de ponderação - Spline de quarta ordem

# Capítulo 4

## Método Local Sem Malha Petrov-Galerkin

O MLPG é desenvolvido sobre a forma fraca das equações diferenciais de equilíbrio do problema de flexão de placas. Para obtenção da forma fraca das equações diferenciais utiliza-se o método dos resíduos ponderados, ou seja, uma função é utilizada para ponderar o resíduo oriundo da solução propositiva aproximada da equação diferencial sobre o domínio considerado.

Em alguns processos de aproximação discreta da variável de interesse utiliza-se o critério de minimização de resíduo, ou seja, uma função peso também precisa ser considerada no processo de obtenção das funções de aproximação. Para facilitar a compreensão, neste trabalho emprega-se as seguintes definições para as funções utilizadas:

- Função de Aproximação

Função usada para aproximar uma variável de maneira discreta. Pode ser obtida à partir do RPIM, RPIM acoplado com polinômios, MLS e outros.

- Função Peso

Função que pondera resíduo no processo de obtenção das funções de aproximação.

- Função de Ponderação

Função utilizada no método dos resíduos ponderados sobre as equações de equilíbrio do problema. É a função que pondera, sobre um domínio ou contorno definido, o resíduo produzido pela solução aproximada do problema.

O conceito geral do MLPG foi apresentado por SHEN [7], no qual cinco funções de aproximação e seis funções de ponderação são trabalhadas para analisar o método.

Os autores definem diferentes tipos de MLPG de acordo com a função de ponderação utilizada, ou seja, seis variantes do MLPG são apresentadas, sendo elas:

- MLPG-1

A função de aproximação é obtida através do método dos mínimos quadrados móveis e a função de ponderação é igual a função peso.

- MLPG-2

A função de ponderação é a função delta de Dirac, resultando em um método de colocação direta. Nesta variante, a forma enfraquecida da equação diferencial exige a derivada segunda da função de aproximação.

- MLPG-3

Esta variante é na verdade um método de mínimo quadrado discreto, ou seja, a solução do problema é obtida através da minimização do erro quadrático da equação de governo em cada ponto utilizado para representar o problema. Explicitamente, a função de ponderação é o próprio resíduo da equação de governo.

- MLPG-4

A solução fundamental da equação diferencial é utilizada como função de ponderação. Tal solução é modificada com o objetivo de anular todo e qualquer contorno que não apresente valor prescrito. Este método também é conhecido como método local da equação integral de contorno ou *Local Boundary Integral Equation* (LBIE).

- MLPG-5

A função de Heaviside é utilizada como função de ponderação, isto é, constante sobre todo o domínio no qual o erro é ponderado. De acordo com SHEN [7], pelo fato de não se trabalhar com integrais de domínio e não se ter integrais singulares na montagem da matriz de rigidez, a solução é estável, rápida e precisa, sendo assim, uma alternativa simples e de menor custo computacional frente ao MEF e ao MEC.

- MLPG-6

A função de ponderação pertence ao mesmo espaço de funções da função de aproximação, ou seja, é análogo ao método de Galerkin. Este MLPG é pouco explorado, pois segundo SHEN [7], esta variante produz um integrando muito mais complexo que as demais.

O MLPG é um método local devido ao fato de a forma fraca da equação de governo ser aplicada à um subdomínio local  $\Omega_q$ , sendo  $\Omega_q$  inteiramente contido no domínio  $\Omega$  do problema.

Apesar das características apresentadas para se definir o MLPG, muitas variações podem ser obtidas sem fugir da ideia geral do método. De acordo com ATLURI e SHEN [46], se existirem  $N$  esquemas de aproximação,  $M$  diferentes funções de ponderação,  $L$  diferentes formatos para o domínio da função de ponderação,  $I$  diferentes formatos para o domínio da função de aproximação e  $J$  diferentes formatos para o subdomínio local, então  $(N \times M \times L \times I \times J)$  é o total de variações do MLPG que podem ser desenvolvidas.

## 4.1 Forma Fraca Local

O problema de flexão de placas de Reissner consiste em encontrar uma solução para o sistema formado pelas Equações (2.45) a (2.52), respeitando as condições de contorno naturais e essenciais, dadas respectivamente pelas Equações (2.58) e (2.65). O referido sistema é formado pela forma forte das equações diferenciais, ou seja, a solução do problema deve satisfazer tais equações e forçar as condições de continuidade para qualquer ponto da placa. Por outro lado, as equações que governam o problema podem ser trabalhadas em sua forma fraca, o que significa constituir novas equações integrais sobre o domínio e contorno da placa, de tal modo que, a solução satisfaça estas equações com alguma tolerância. Pode-se dizer que a forma fraca força as condições de continuidade em um sentido médio, ou seja, a solução da forma forte também é solução da forma fraca, porém a afirmação contrária nem sempre é correta. A solução da forma fraca também é chamada de solução generalizada [47].

O desenvolvimento algébrico apresentado neste trabalho é análogo ao apresentado em [15], no qual os autores desenvolvem a forma fraca para o problema de flexão de placas considerando a teoria de Mindlin.

Aplicando o método dos resíduos ponderados na Equação (2.12) em um subdomínio local  $\Omega_q$  obtém-se:

$$\int_{\Omega_q} W_I (M_{ij,j} - Q_i) d\Omega = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (4.1)$$

onde  $W_I$  é a função de ponderação do nó  $I$  e o domínio  $\Omega$  deve ser totalmente coberto pelos subdomínios  $\Omega_q$ , permitindo-se sobreposição.

Cabe observar que, uma vez determinado o campo de esforços que satisfaça a Equação (2.12), tem-se a Equação (4.1) atendida simultaneamente. Do mesmo modo, independentemente do valor da função  $w$ , caso se determine um campo de

esforços que satisfaça a Equação (4.1), então o campo determinado é solução da Equação (2.12).

Aplicando a integração por partes na Equação (4.1), obtém-se:

$$\int_{\Omega_q} W_{I,j} M_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_q} W_I M_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Omega_q} W_I Q_i d\Omega = 0 \quad i, j = 1, 2. \quad (4.2)$$

De maneira análoga, a Equação (2.11) produz:

$$\int_{\Omega_q} W_I (Q_{i,i} + g) d\Omega = 0 \quad i = 1, 2. \quad (4.3)$$

Aplicando a integração por partes na Equação (4.3):

$$\int_{\Omega_q} W_{I,i} Q_i d\Omega - \int_{\Gamma_q} W_I Q_i n_i - \int_{\Omega_q} W_I g d\Omega = 0 \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

Nas Equações (4.2) e (4.4), o contorno do subdomínio  $\Omega_q$  é composto por contorno interno  $\Gamma_{qi}$ , contorno externo com deslocamentos generalizados prescritos  $\Gamma_{qu}$  e contorno externo com esforços generalizados prescritos  $\Gamma_{qt}$ . Equacionando tem-se:

$$\begin{aligned} \Gamma_q &= \Gamma_{qi} \cup \Gamma_{qu} \cup \Gamma_{qt} \\ \Gamma_{qu} &= \Gamma_q \cap \Gamma_u \\ \Gamma_{qt} &= \Gamma_q \cap \Gamma_t \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde  $\Gamma_u$  representa o contorno da placa com deslocamento prescrito e  $\Gamma_t$  representa o contorno da placa com força prescrita. Para facilitar a compreensão, a composição dos diferentes tipos de contorno é apresentada na Figura 4.1.

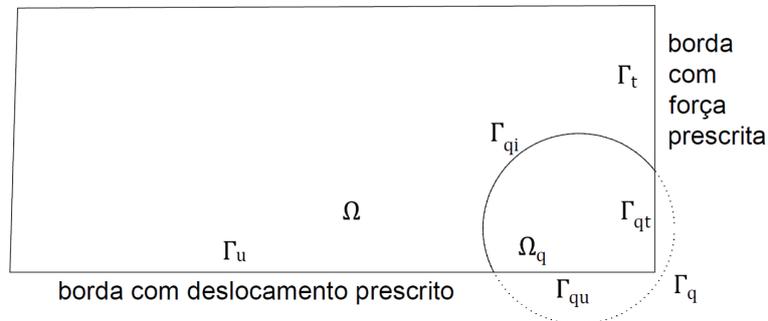


Figura 4.1: Composição de cada tipo de contorno para integração

A consideração de subdomínios nos quais não são conhecidas as condições de contorno em  $\Gamma_{qi}$  dificulta muito o uso das Equações (4.2) e (4.4). Sendo assim, no

sentido de viabilizar o uso de tais equações, a função de ponderação  $W_I$  deve ser deliberadamente escolhida de forma a apresentar valor nulo em  $\Gamma_{qi}$ , fazendo a integral sobre o contorno  $\Gamma_{qi}$  desaparecer. Logo, expandindo o contorno  $\Gamma_q$  as Equações (4.2) e (4.4) assumem a forma:

$$\int_{\Omega_q} W_{I,j} M_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} W_I M_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{qt}} W_I \bar{M}_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Omega_q} W_I Q_i d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

$$\int_{\Omega_q} W_{I,i} Q_i d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} W_I Q_i n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{qt}} W_I \bar{Q}_i n_i d\Gamma - \int_{\Omega_q} W_I g d\Omega = 0. \quad (4.7)$$

Vale destacar que diversas funções de ponderação podem ser escolhidas com a característica de possuir valor nulo em  $\Gamma_{qi}$ , contudo a função definida para  $W_I$  também deve ser avaliada através da distância euclidiana entre o ponto de integração e o ponto que da origem a  $\Omega_q$ .

As Equações (4.6) e (4.7) são avaliadas em todos os pontos utilizados para representar o problema e, convenientemente é apresentada em sua forma matricial:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{fI}^T \boldsymbol{\sigma}_f d\Omega + \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{sI}^T \boldsymbol{\sigma}_s d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \boldsymbol{\sigma}_f d\Gamma - \int_{\Gamma_{qt}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f d\Gamma + \\ - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_s \boldsymbol{\sigma}_s d\Gamma - \int_{\Gamma_{qt}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_s \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s d\Gamma - \int_{\Omega_q} \mathbf{W}_I^T \mathbf{g} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde

$$\mathbf{V}_{fI} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_I}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial W_I}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial W_I}{\partial x_2} & \frac{\partial W_I}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{V}_{sI} = \begin{bmatrix} W_I & 0 & \frac{\partial W_I}{\partial x_1} \\ 0 & W_I & \frac{\partial W_I}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{n}_f = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{n}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{W}_I = \begin{bmatrix} W_I & 0 & 0 \\ 0 & W_I & 0 \\ 0 & 0 & W_I \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f^T = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{22} & M_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s^T = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

e

$$\mathbf{g}^T = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

A Equação (4.8) é denominada de forma fraca das equações diferenciais de equilíbrio (2.11) e (2.12).

## 4.2 Sistema de Equações Discretizado

Para se obter o sistema de equações discretizado, o domínio  $\Omega$  e o contorno  $\Gamma$  do problema são representados por uma nuvem de pontos desconexos. A distribuição dos pontos deve ser feita objetivando uma descrição detalhada do problema, ou seja, regiões com uma quantidade maior de detalhes devem possuir mais pontos de discretização.

Para cada ponto utilizado para representar o problema, tem-se associado um subdomínio  $\Omega_q$  e uma determinada quantidade de pontos de vizinhança, que também devem ser capazes de reproduzir as características do problema, porém de forma local.

A discretização do problema implica em representar os deslocamentos generalizados através de valores nodais, tornando-se necessária a aproximação destas variáveis. Contudo, no desenvolvimento do processo de aproximação os valores nodais são supostamente conhecidos, o que não condiz com o problema em análise no momento. Desta forma, o valor propositivo supostamente próximo da resposta que se deseja atingir, será escrito em função de valores fictícios. Assim, para um ponto  $x_q$  qualquer, pode-se escrever:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x_q) = \boldsymbol{\varphi}_{x_q} \hat{\mathbf{u}}_{x_q} \quad (4.17)$$

ou ainda:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x_q) = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\phi}_1(x_q) \\ \tilde{\phi}_2(x_q) \\ \tilde{w}(x_q) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccccccc} \varphi_1(x_q) & 0 & 0 & \cdots & \varphi_N(x_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(x_q) & 0 & \cdots & 0 & \varphi_N(x_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(x_q) & \cdots & 0 & 0 & \varphi_N(x_q) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \hat{\phi}_1(x_q^1) \\ \hat{\phi}_2(x_q^1) \\ \hat{w}(x_q^1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1(x_q^N) \\ \hat{\phi}_2(x_q^N) \\ \hat{w}(x_q^N) \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

onde  $\tilde{\mathbf{u}}(x_q)$  é o valor aproximado da variável  $\mathbf{u}$  no ponto  $x_q$ ,  $\varphi_i(x_q)$  é o  $i$ -ésimo termo da função de aproximação do ponto  $x_q$ ,  $N$  é o número de pontos que compõem o subdomínio local de  $x_q$  e  $\hat{\phi}_1(x_q^j)$ ,  $\hat{\phi}_2(x_q^j)$  e  $\hat{w}(x_q^j)$  são os deslocamentos generalizados fictícios no  $j$ -ésimo ponto do subdomínio local de  $x_q$ .

Caso a função de aproximação utilizada na Equação (4.17) seja uma função interpoladora, os valores fictícios se confundem com os valores aproximados do próprio nó, devido a propriedade do delta de Kronecker da função interpoladora.

A forma fraca das equações de equilíbrio deve ser escrita de modo que os deslocamentos generalizados sejam as únicas incógnitas envolvidas. Para isto, as relações entre esforços e deslocamentos, dadas pelas Equações (2.66) e (2.67), são rerepresentadas na forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \mathbf{D}_f \boldsymbol{\epsilon}_f + \mathbf{R} \quad (4.19)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\epsilon}_s \quad (4.20)$$

sendo:

$$\mathbf{D}_f = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{D}_s = D \begin{bmatrix} \frac{5Et}{12(1+\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{5Et}{12(1+\nu)} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{R} = q \begin{Bmatrix} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \\ \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.23)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \end{Bmatrix}, \quad (4.24)$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = \begin{Bmatrix} \phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \phi_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{Bmatrix}. \quad (4.25)$$

Definindo-se os operadores matriciais  $\mathfrak{B}_f$  e  $\mathfrak{B}_s$ , dados respectivamente por:

$$\mathfrak{B}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

e

$$\mathfrak{B}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

As Equações (4.24) e (4.25) são reescritas:

$$\boldsymbol{\epsilon}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ w \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ w \end{Bmatrix}. \quad (4.29)$$

Deve-se destacar que os deslocamentos nas Equações (4.28) e (4.29), são na verdade os deslocamentos aproximados que se deseja determinar com a solução do problema. Sendo assim, tais deslocamentos também precisam ser escritos em função dos valores nodais fictícios da própria variável, ou seja, para um ponto  $x_q$  qualquer:

$$\boldsymbol{\epsilon}_f(x_q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(x_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(x_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(x_q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_N(x_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_N(x_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_N(x_q) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1(x_q^1) \\ \hat{\phi}_2(x_q^1) \\ \hat{w}(x_q^1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1(x_q^N) \\ \hat{\phi}_2(x_q^N) \\ \hat{w}(x_q^N) \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_s(x_q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(x_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(x_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(x_q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_N(x_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_N(x_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_N(x_q) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1(x_q^1) \\ \hat{\phi}_2(x_q^1) \\ \hat{w}(x_q^1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1(x_q^N) \\ \hat{\phi}_2(x_q^N) \\ \hat{w}(x_q^N) \end{Bmatrix}. \quad (4.31)$$

Ou simplesmente:

$$\boldsymbol{\epsilon}_f(x_q) = \mathfrak{B}_f \boldsymbol{\varphi}_{x_q} \hat{\mathbf{u}}_{x_q} \quad (4.32)$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_s(x_q) = \mathfrak{B}_s \boldsymbol{\varphi}_{x_q} \hat{\mathbf{u}}_{x_q}. \quad (4.33)$$

Substituindo as deformações específicas dadas pelas Equações (4.32) e (4.33) nas Equações (4.19) e (4.20) obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma}_f(x_q) = \mathbf{D}_f \boldsymbol{\mathfrak{B}}_f \boldsymbol{\varphi}_{x_q} \hat{\mathbf{u}}_{x_q} + \mathbf{R} \quad (4.34)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}_s(x_q) = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\mathfrak{B}}_s \boldsymbol{\varphi}_{x_q} \hat{\mathbf{u}}_{x_q}. \quad (4.35)$$

Com a substituição das Equações (4.34) e (4.35) na Equação (4.8), chega-se a forma fraca discretizada das equações diferenciais de equilíbrio:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{fI}^T \mathbf{D}_f \boldsymbol{\mathfrak{B}}_f \boldsymbol{\varphi} \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{fI}^T \mathbf{R} d\Omega + \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{sI}^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\mathfrak{B}}_s \boldsymbol{\varphi} \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \\ & - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \mathbf{D}_f \boldsymbol{\mathfrak{B}}_f \boldsymbol{\varphi} \hat{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \mathbf{R} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qt}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_s \mathbf{D}_s \boldsymbol{\mathfrak{B}}_s \boldsymbol{\varphi} \hat{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qt}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_s \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s d\Gamma - \int_{\Omega_q} \mathbf{W}_I^T \mathbf{g} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde o matriz  $\boldsymbol{\varphi}$  e o vetor  $\mathbf{u}$  estão escritos de forma generalizada.

Com o objetivo de se obter um sistema de equações lineares, a Equação (4.36) pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{k}_I \hat{\mathbf{u}}_I = \mathbf{f}_I \quad (4.37)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}_I$  é um vetor que contém os deslocamentos nodais de todos os nós que foram utilizados para aproximar as variáveis no subdomínio de integração do nó  $I$ ,  $\mathbf{k}_I$  é a matriz de rigidez nodal relacionada ao campo do nó  $I$ , dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_I = & \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{fI}^T \mathbf{D}_f \boldsymbol{\mathfrak{B}}_f \boldsymbol{\varphi} d\Omega + \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{sI}^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\mathfrak{B}}_s \boldsymbol{\varphi} d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \mathbf{D}_f \boldsymbol{\mathfrak{B}}_f \boldsymbol{\varphi} d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_s \mathbf{D}_s \boldsymbol{\mathfrak{B}}_s \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.38)$$

e  $\mathbf{f}_I$  é o vetor de cargas nodal relacionado ao campo do nó  $I$ , dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_I = & \int_{\Omega_q} \mathbf{V}_{fI}^T \mathbf{R} d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \mathbf{R} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qt}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_f \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma_{qt}} \mathbf{W}_I^T \mathbf{n}_s \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s d\Gamma - \int_{\Omega_q} \mathbf{W}_I^T \mathbf{g} d\Omega \end{aligned} \quad (4.39)$$

Escrevendo-se a Equação (4.36) para todos os pontos que compõem o domínio e contorno do problema, forma-se um novo sistema de equações envolvendo os deslocamentos de todos os pontos. Este sistema pode ser apresentado, de forma análoga à Equação (4.37), ou seja:

$$\mathbf{K}_{(3N_T \times 3N_T)} \hat{\mathbf{U}}_{(3N_T \times 1)} = \mathbf{F}_{(3N_T \times 1)} \quad (4.40)$$

onde  $N_T$  representa o número total de pontos utilizados para discretizar o problema.

A Equação (4.40) representa o sistema global de equações do MLPG para o problema de flexão de placas de Reissner. A solução deste sistema permite a obtenção de  $\hat{\mathbf{U}}$  e, conseqüentemente de  $\hat{\mathbf{u}}$  de qualquer ponto, possibilitando a determinação aproximada dos deslocamentos  $\tilde{\mathbf{u}}$  em qualquer ponto do domínio ou contorno do problema através da aplicação da Equação (4.17).

### 4.3 Imposição das Condições de Contorno Essenciais

No processo de obtenção da forma fraca das equações de equilíbrio, as condições de contorno de Neumann surgem naturalmente na formulação e desta forma, tais condições são chamadas de condições de contorno naturais. Por outro lado, as condições de contorno de Dirichlet permanecem ausentes no desenvolvimento da forma fraca, necessitando assim, de tratamento adicional. As condições de contorno de Dirichlet também são conhecidas por condições de contorno essenciais.

#### 4.3.1 Método da Interpolação Direta

No MLPG o sistema de equações é construído nó por nó, ou seja, para o problema de placas, cada conjunto de três linhas da matriz global de rigidez representa a contribuição de apenas um nó, sendo uma linha relativa a cada deslocamento. Esta característica do MLPG permite que a função de aproximação seja utilizada diretamente na matriz de rigidez global, e que o vetor de forças nodais seja modificado para atender ao valor prescrito. Este método é conhecido como método da interpolação direta.

Para impor as condições de contorno essenciais, considere o nó  $x_i$  com as três condições de contorno essenciais prescritas, ou seja:

$$\mathbf{u}(x_i) = \bar{\mathbf{u}}(x_i) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\phi}_1(x_i) \\ \bar{\phi}_2(x_i) \\ \bar{w}(x_i) \end{array} \right\}. \quad (4.41)$$

Sendo a variável  $\mathbf{u}$  previamente conhecida no nó  $x_i$ , deseja-se agora que a solução propositiva aproximada seja igual ao valor de  $\bar{\mathbf{u}}(x_i)$ , de modo que os valores prescritos sejam escritos através da Equação (4.2) em função de valores nodais fictícios da

própria variável dos pontos de vizinhança que pertencem ao subdomínio do ponto  $x_i$ . Logo,

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1(x_i) \\ \bar{\phi}_2(x_i) \\ \bar{w}(x_i) \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_i) & 0 & 0 & \cdots & \varphi_{NP}(x_i) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(x_i) & 0 & \cdots & 0 & \varphi_{NP}(x_i) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(x_i) & \cdots & 0 & 0 & \varphi_{NP}(x_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1(x_i^1) \\ \hat{\phi}_2(x_i^1) \\ \hat{w}(x_i^1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1(x_i^{NP}) \\ \hat{\phi}_2(x_i^{NP}) \\ \hat{w}(x_i^{NP}) \end{Bmatrix} \\
& \hspace{20em} (4.42)
\end{aligned}$$

ou simplesmente:

$$\varphi_{x_i} \hat{\mathbf{u}}_{x_i} = \bar{\mathbf{f}}_{x_i}. \quad (4.43)$$

A Equação (4.43) possui exatamente a mesma forma e, oportunamente pode ser utilizada para substituir a Equação (4.37) na montagem do sistema global de equações lineares, impondo-se assim as condições de contorno de Dirichlet.

Generalizando, caso o nó  $x_i$  tenha apenas uma ou duas condições de contorno essenciais prescritas, a Equação (4.43) é utilizada de forma associada com a Equação (4.37). Assim, a Equação (4.43) é utilizada parcialmente, substituindo na Equação (4.37) uma quantidade de equações equivalente ao número de prescrições de Dirichlet.

Conforme já apresentado, a Equação (4.37) é composta por um conjunto de três equações, sendo a primeira relativa ao equilíbrio de momentos na direção  $X_1$ , a segunda relativa ao equilíbrio de momentos na direção  $X_2$  e a terceira relativa ao equilíbrio de forças na direção  $X_3$ . No caso da Equação (4.43), também composta por um conjunto de três equações, a primeira equação é relativa a prescrição da rotação  $\phi_1$ , a segunda equação é relativa a prescrição da rotação  $\phi_2$  e a terceira equação relativa a prescrição do deslocamento transversal  $w$ . Apesar de não haver limitações para associação entre as Equações (4.37) e (4.43), o critério de associação de tais equações deve ser único para todo o problema.

Neste trabalho, quando a rotação  $\phi_1$  for prescrita, a primeira equação do conjunto de Equações (4.43) é utilizada em substituição a primeira equação do conjunto de Equações (4.37). Caso a rotação  $\phi_2$  seja prescrita, a segunda equação do conjunto de Equações (4.43) é utilizada em substituição a segunda equação do conjunto de

Equações (4.37). Por fim, caso o deslocamento transversal  $w$  seja prescrito, a terceira equação do conjunto de Equações (4.43) é utilizada para substituir a terceira equação do conjunto de Equações (4.37).

Este processo de imposição das condições de contorno essenciais não afeta a montagem da matriz de rigidez global e, caso  $\varphi$  seja uma função de interpolação, ou seja, possua a propriedade da função delta de Kronecker, o processo de imposição das condições de contorno essenciais se torna equivalente à técnica de zero e um.

### 4.3.2 Método das Penalidades

A imposição das condições de contorno essenciais pode ser feita através da aplicação do método dos resíduos ponderados e incorporada à formulação após a obtenção da forma fraca das equações diferenciais de equilíbrio.

Considere a solução propositiva  $\tilde{\mathbf{u}}$  suficientemente próxima dos valores prescritos  $\bar{\mathbf{u}}$  para o nó  $I$ . Assim:

$$\tilde{\mathbf{u}}(I) = \bar{\mathbf{u}}(I). \quad (4.44)$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados na Equação (4.44):

$$\int_{\Gamma_{qu}} (\tilde{\mathbf{u}}(I) - \bar{\mathbf{u}}(I)) W_I d\Gamma = 0 \quad (4.45)$$

ou ainda:

$$\int_{\Gamma_{qu}} (\tilde{\phi}_i(I) - \bar{\phi}_i(I)) W_I d\Gamma = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.46)$$

e

$$\int_{\Gamma_{qu}} (\tilde{w}(I) - \bar{w}(I)) W_I d\Gamma = 0 \quad (4.47)$$

onde  $W_I$  é a função de ponderação centrada no nó  $I$  e  $\Gamma_{qu}$  é o trecho do contorno com deslocamento prescrito.

As Equações (4.46) e (4.47) podem ser somadas na Equação (4.36) produzindo um novo conjunto de equações, no qual as condições de contorno de Dirichlet estão impostas. Contudo, esta operação pode acarretar em violação das restrições individuais das Equações (4.46), (4.47), (4.1) e (4.3). A fim de contornar este problema, um número muito grande, denominado parâmetro de penalidade, é inserido na Equação (4.45) para limitar a violação das restrições. Assim as Equações (4.46) e (4.47) são reescritas:

$$\alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} (\tilde{\phi}_i - \bar{\phi}_i) W_I d\Gamma = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.48)$$

e

$$\alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} (\tilde{w} - \bar{w}) W_I d\Gamma = 0 \quad (4.49)$$

sendo  $\alpha_p$  o parâmetro de penalidade.

Costumeiramente, o parâmetro de penalidade é adotado entre  $\alpha_p = 10^8$  e  $\alpha_p = 10^{20}$ . Se o parâmetro de penalidade for muito pequeno, as restrições das equações utilizadas no método dos resíduos ponderados podem ser violadas e, se o parâmetro de penalidade for demasiadamente grande ocorre a degradação dos resultados.

Para utilização das Equações (4.48) e (4.49) no MLPG deve-se escrever os deslocamentos  $\tilde{\phi}_i$  e  $\tilde{w}$  em função dos valores fictícios nodais dos pontos do subdomínio local do nó  $I$ . Assim, agrupando as Equações (4.48) e (4.49), obtém-se:

$$\alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} \begin{bmatrix} W_I & 0 & 0 \\ 0 & W_I & 0 \\ 0 & 0 & W_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(I) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(I) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(I) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_N(I) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_N(I) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_N(I) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_1(I^1) \\ \hat{\phi}_2(I^1) \\ \hat{w}(I^1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1(I^N) \\ \hat{\phi}_2(I^N) \\ \hat{w}(I^N) \end{array} \right\} d\Gamma + \quad (4.50)$$

$$-\alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} \begin{bmatrix} W_I & 0 & 0 \\ 0 & W_I & 0 \\ 0 & 0 & W_I \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\phi}_1(I) \\ \bar{\phi}_2(I) \\ \bar{w}(I) \end{array} \right\} d\Gamma = 0.$$

A Equação (4.50) encontra-se na forma discretizada e pode ser adicionada a Equação (4.36) para montagem do sistema local de equações, resultando na formulação do MLPG para o problema de flexão de placas com consideração do método das penalidades para imposição das condições de contorno essenciais. Com a inclusão do método da penalidade, dois termos novos passam a compor o sistema local de equações, sendo dados por:

$$\mathbf{k}_I^{\alpha_p} = \alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} \begin{bmatrix} W_I & 0 & 0 \\ 0 & W_I & 0 \\ 0 & 0 & W_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(I) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(I) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(I) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_N(I) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_N(I) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_N(I) \end{bmatrix}^T d\Gamma \quad (4.51)$$

e

$$\mathbf{f}_I^{\alpha p} = -\alpha_p \int_{\Gamma_{qu}} \begin{bmatrix} W_I & 0 & 0 \\ 0 & W_I & 0 \\ 0 & 0 & W_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1(I) \\ \bar{\phi}_2(I) \\ \bar{w}(I) \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (4.52)$$

onde  $\mathbf{k}_I^{\alpha p}$  é a contribuição na matriz de rigidez local e  $\mathbf{f}_I^{\alpha p}$  é a contribuição no vetor de forças nodais local, ambos devido à consideração do método das penalidades.

## 4.4 Integração Numérica

A avaliação das integrais que compõem a formulação do MLPG para o problema de flexão de placas pode ser feita através da quadratura de Gauss-Legendre, na qual:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (4.53)$$

onde  $n$  é o número de pontos de quadratura utilizados para avaliar a integral de  $f(x)$ ,  $x_i$  é a abscissa do ponto de quadratura e  $w_i$  é a ponderação correlacionada ao ponto de quadratura.

Vale destacar que, para utilizar o processo de quadratura de Gauss-Legendre, o intervalo de integração deve estar definido entre  $-1$  e  $1$  e, para isto, pode-se utilizar facilmente uma ou mais transformações de coordenadas sobre as integrais que compõem as Equações (4.36) e (4.50), dependendo da geometria do elemento de integração.

### 4.4.1 Geometria de Integração

Para cada ponto utilizado na representação do problema, deve-se definir um domínio de integração a fim de avaliar as Equações (4.36) e (4.50). Na aplicação do MLPG não há restrição quanto à forma do domínio de integração, devendo apenas ocorrer a cobertura de todo o domínio do problema, inclusive podendo haver sobreposição dos domínios de integração. Com relação ao tamanho, apesar de não haver restrições explícitas, o domínio de integração não deve ser demasiadamente grande, objetivando preservar e valorizar a representação das características locais do problema. A definição do tamanho do domínio de integração, em geral é feita em função do espaçamento nodal. Desta forma, a medida que problema é melhor representado com o aumento da quantidade de pontos de discretização, o subdomínio de integração diminui, mantendo a ênfase do caráter local do método.

Seja um problema com domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ , representado por uma nuvem de pontos qualquer. Por razões de simplicidade, para cada ponto da nuvem é definido um domínio de integração circular centrado no próprio ponto. Considere ainda

o ponto  $q$  com coordenadas  $(X_{1(q)}, X_{2(q)})$ , pertencente à nuvem de pontos, com domínio de integração  $\Omega_{Iq}$  e raio  $R_q$ , centrado em  $(X_{1(q)}, X_{2(q)})$ . De maneira geral, o domínio  $\Omega_{Iq}$  pode ocupar quatro posições distintas em  $\Omega$  e ser subdividido em setores circulares e triangulares conforme apresentado na Figura 4.2.

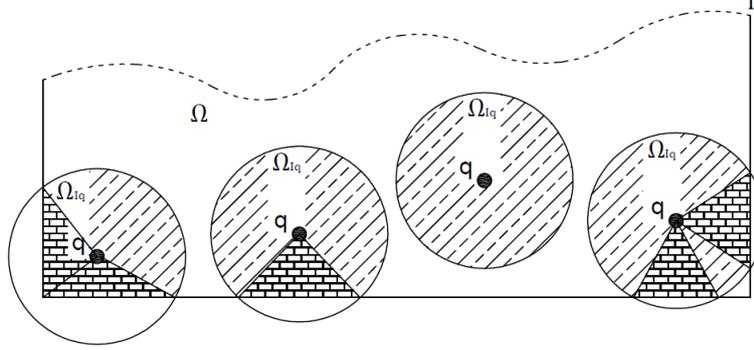


Figura 4.2: Posições possíveis para o domínio de integração

A parcela de  $\Omega_{Iq}$  que possui forma geométrica circular é tratada utilizando uma transformação de coordenadas polares, sendo que, as coordenadas  $(X_1, X_2)$  de qualquer ponto dentro de  $\Omega_{Iq}$  pode ser escrito em função de  $r$  e  $\theta$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{1(q)} + r \cos \theta \\ X_2 &= X_{2(q)} + r \sin \theta \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde  $0 \leq r \leq R_q$  e  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ .

O determinante da matriz jacobiana de transformação é dado por:

$$|\mathbf{J}_{r,\theta}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial r} & \frac{\partial X_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial X_2}{\partial r} & \frac{\partial X_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r. \quad (4.55)$$

A transformação para coordenadas homogêneas  $(\xi, \eta)$ , na qual as variáveis são limitadas ao intervalo  $[-1, 1]$ , é dada por:

$$\begin{aligned} r &= \frac{R_q}{2}(\xi + 1) \\ \theta &= \frac{\theta_1}{2}(1 - \eta) + \frac{\theta_2}{2}(1 + \eta). \end{aligned} \quad (4.56)$$

O determinante da matriz jacobiana de transformação é dado por:

$$|\mathbf{J}_{\xi,\eta}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{R_q}{4} |(\theta_2 - \theta_1)|. \quad (4.57)$$

No caso das regiões triangulares, a transformação de coordenadas é baseada nas coordenadas dos vértices do triângulo. Tendo em vista que no domínio  $\Omega$  as regiões triangulares encontram-se dispostas de forma aleatória, torna-se necessária

a utilização de uma transformação de coordenadas  $T_1$  com o objetivo de se trabalhar com uma região triangular padrão, conforme apresentado na Figura 4.3.

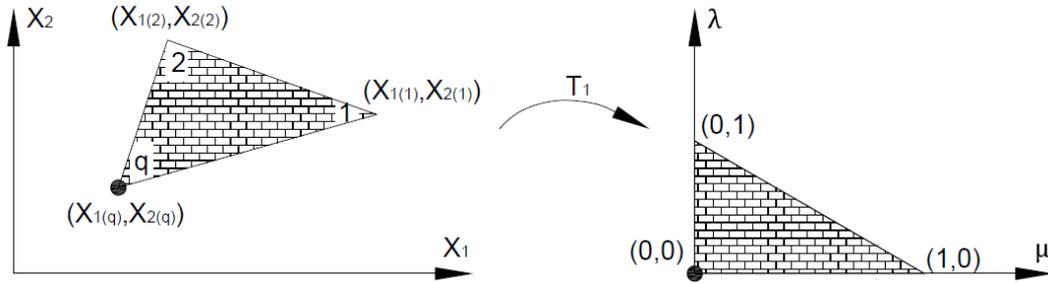


Figura 4.3: Padronização da região triangular

Para regularização da região triangular, considere as seguinte funções de forma nodais:

$$\begin{aligned} N_1(\mu, \lambda) &= 1 - \mu - \lambda \\ N_2(\mu, \lambda) &= \mu \\ N_3(\mu, \lambda) &= \lambda \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde  $0 \leq \mu \leq 1$  e  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

A partir da Equação (4.58), as coordenadas  $(X_1, X_2)$  de um ponto qualquer dentro da região triangular podem ser escritas em função de  $\mu$  e  $\lambda$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{1(1)}N_1 + X_{1(2)}N_2 + X_{1(q)}N_3 \\ X_2 &= X_{2(1)}N_1 + X_{2(2)}N_2 + X_{2(q)}N_3. \end{aligned} \quad (4.59)$$

O determinante da matriz jacobiana de transformação é dado por:

$$|\mathbf{J}_{\mu, \lambda}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \mu} & \frac{\partial X_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \mu} & \frac{\partial X_2}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 2A \quad (4.60)$$

sendo  $A$  a área do triângulo.

A transformação para coordenadas homogêneas é dada por:

$$\begin{aligned} \mu &= \left(1 - \frac{1 + \eta}{4}\right) \left(\frac{1 + \xi}{2}\right) \\ \lambda &= \left(1 - \frac{1 + \xi}{4}\right) \left(\frac{1 + \eta}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

onde  $-1 \leq \xi \leq 1$  e  $-1 \leq \eta \leq 1$ .

O determinante da matriz jacobiana de transformação é:

$$|\mathbf{J}_{\xi,\eta}| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} & \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} & \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \end{array} \right| = \frac{1}{4} \left| 1 - \left( \frac{1+\xi}{4} \right) - \left( \frac{1+\eta}{4} \right) \right|. \quad (4.62)$$

A avaliação das integrais de contorno é feita aproveitando-se a geometria triangular já definida para as integrais de domínio. O contorno do problema é orientado do nó 1 para o nó 2, conforme apresentado na Figura 4.4. Em outras palavras, o contorno é orientado de forma que, ao percorrê-lo, o domínio do problema permaneça sempre à esquerda do contorno e a normal ao contorno fique orientada para fora do domínio. De forma geral, as integrais de contorno podem ser representadas na forma:

$$I = \int_{P_1}^{P_2} f(X_1, X_2) dS \quad (4.63)$$

onde  $P_1$  e  $P_2$  representam, respectivamente o ponto inicial e final do contorno que se deseja integrar e  $dS$  é um elemento infinitesimal do contorno, dado por:

$$dS = \sqrt{dX_1^2 + dX_2^2}. \quad (4.64)$$

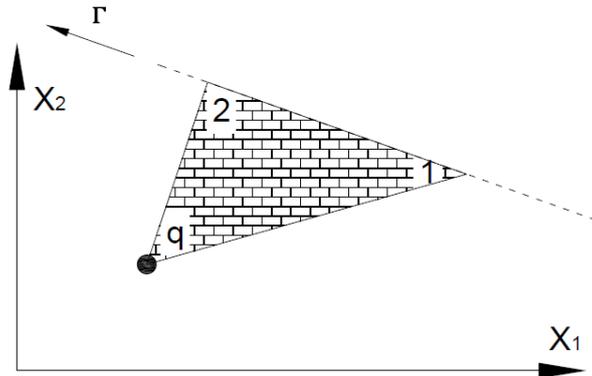


Figura 4.4: Orientação do contorno na geometria triangular

Utilizando a transformação de coordenadas dada pela Equação (4.59) e representada pela Figura 4.3, o contorno a ser integrado passa a ser representado pela aresta do triângulo que está sobre o eixo  $\mu$ , orientado da origem  $(0,0)$  para o ponto  $(1,0)$ . Nesta situação tem-se  $\lambda = d\lambda = 0$  e as componentes  $dX_1$  e  $dX_2$  passam a ser expressas por:

$$\begin{aligned} dX_1 &= \frac{\partial X_1}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial X_1}{\partial \lambda} d\lambda = (X_{1(2)} - X_{1(1)}) d\mu \\ dX_2 &= \frac{\partial X_2}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial X_2}{\partial \lambda} d\lambda = (X_{2(2)} - X_{2(1)}) d\mu. \end{aligned} \quad (4.65)$$

A transformação de coordenadas é resumida à:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{1(1)}(1 - \mu) + X_{1(2)}\mu \\ X_2 &= X_{2(1)}(1 - \mu) + X_{2(2)}\mu. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Substituindo a Equação (4.65) na Equação (4.64), obtém-se o jacobiano da transformação:

$$dS = \sqrt{(X_{1(2)} - X_{1(1)})^2 + (X_{2(2)} - X_{2(1)})^2} d\mu. \quad (4.67)$$

A mudança para coordenadas homogêneas é dada por:

$$\mu = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.68)$$

onde  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

O jacobiano da transformação é obtido derivando-se a Equação (4.68):

$$d\mu = \frac{1}{2}d\xi. \quad (4.69)$$

Definidas todas as mudanças de coordenadas, a quadratura de Gauss-Legendre pode ser escrita para cada região que compõe o domínio  $\Omega_{Iq}$ :

- Integrais de Domínio

$$\int_{\Omega_s} f(X_1, X_2) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f [K_1(\xi, \eta), K_2(\xi, \eta)] |J_{\xi, \eta}| d\xi d\eta \quad (4.70)$$

onde:

- Para setores circulares:

$$\begin{aligned} K_1(\xi, \eta) &= X_{1(q)} + \frac{R_q}{2} (1 + \xi) \cos \left( \frac{\theta_1}{2} (1 - \eta) + \frac{\theta_2}{2} (1 + \eta) \right) \\ K_2(\xi, \eta) &= X_{2(q)} + \frac{R_q}{2} (1 + \xi) \operatorname{sen} \left( \frac{\theta_1}{2} (1 - \eta) + \frac{\theta_2}{2} (1 + \eta) \right) \\ |J_{\xi, \eta}| &= \frac{R_q^2}{8} (1 + \xi) |\theta_2 - \theta_1|. \end{aligned} \quad (4.71)$$

– Para regiões triangulares:

$$\begin{aligned}
K_1(\xi, \eta) &= X_{1(1)} + (X_{1(2)} - X_{1(1)}) \left( \frac{3 + 3\xi - \eta - \eta\xi}{8} \right) + \\
&\quad + (X_{1(q)} - X_{1(1)}) \left( \frac{3 + 3\eta - \xi - \eta\xi}{8} \right) \\
K_2(\xi, \eta) &= X_{2(1)} + (X_{2(2)} - X_{2(1)}) \left( \frac{3 + 3\xi - \eta - \eta\xi}{8} \right) + \\
&\quad + (X_{2(q)} - X_{2(1)}) \left( \frac{3 + 3\eta - \xi - \eta\xi}{8} \right) \\
|J_{(\xi, \eta)}| &= \frac{A}{2} \left| 1 - \frac{2 + \xi + \eta}{4} \right|.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

• Integrais de Contorno

$$\int_{\Gamma} f(X_1, X_2) d\Gamma = \int_{-1}^1 f[K_1(\xi), K_2(\xi)] |J_{\xi}| d\xi \tag{4.73}$$

onde:

$$\begin{aligned}
K_1(\xi) &= \frac{1}{2} (X_{1(1)} + X_{1(2)} + \xi (X_{1(2)} - X_{1(1)})) \\
K_2(\xi) &= \frac{1}{2} (X_{2(1)} + X_{2(2)} + \xi (X_{2(2)} - X_{2(1)})) \\
|J_{\xi}| &= \frac{1}{2} \sqrt{(X_{1(2)} - X_{1(1)})^2 + (X_{2(2)} - X_{2(1)})^2}.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Objetivando a implementação computacional, a Equação (4.70) pode ser escrita na forma da Equação (4.53). Assim chega-se a:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f [K_1(\xi, \eta), K_2(\xi, \eta)] |J_{\xi, \eta}| d\xi d\eta \cong \\
&\cong \sum_{i=1}^{N_{\xi}} \sum_{j=1}^{N_{\eta}} w_i w_j f [K_1(\xi_i, \eta_j), K_2(\xi_i, \eta_j)] |J_{\xi_i, \eta_j}| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{4.75}$$

onde  $N_{\xi}$  e  $N_{\eta}$  são os números de abscissas de Gauss;  $\xi_i$  e  $\eta_j$  são as abscissas de Gauss-Legendre, respectivamente com os seus pesos correspondentes  $w_i$  e  $w_j$ .

Analogamente para a Equação (4.73), tem-se:

$$\int_{-1}^1 f [K_1(\xi), K_2(\xi)] |J_{\xi}| d\xi \cong \sum_{i=1}^{N_{\xi}} w_i f [K_1(\xi_i), K_2(\xi_i)] |J_{\xi_i}| d\xi. \tag{4.76}$$

Na tabela 4.1 são apresentados os pesos e abscissas de Gauss para um total de 4 pontos de quadratura. A disposição geométrica dos pontos de quadratura para a região circular é a mesma apresentada em [48], Figura 4.5.

Tabela 4.1: Coeficientes e abscissas de Gauss para  $N_\xi = 4$

| $N_\xi$ | $w_i$              | $\xi_i$             |
|---------|--------------------|---------------------|
| 1       | 0.6521451548625461 | -0.3399810435848563 |
| 2       | 0.6521451548625461 | 0.3399810435848563  |
| 3       | 0.3478548451374538 | -0.8611363115940526 |
| 4       | 0.3478548451374538 | 0.8611363115940526  |

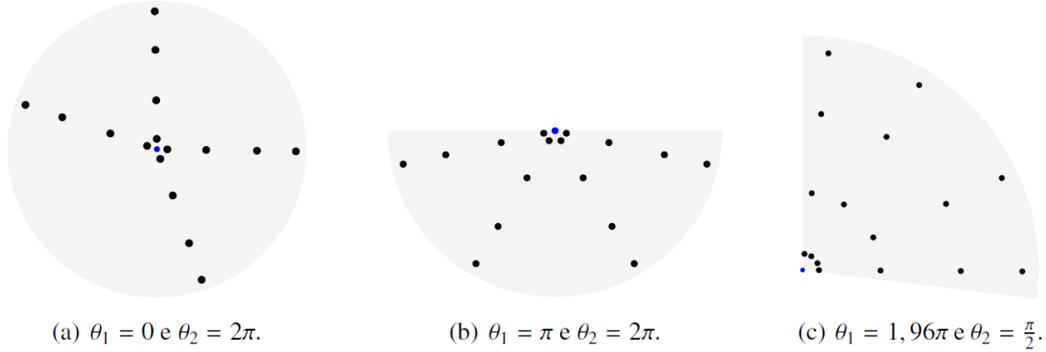


Figura 4.5: Disposição geométrica das abscissas de Gauss-Legendre em  $\Omega_s$  circular, FONTES JUNIOR [48].

A disposição dos pontos de quadratura no domínio de integração triangular é mostrada na Figura 4.6.

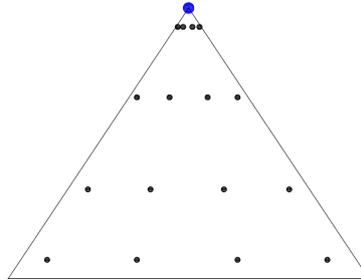


Figura 4.6: Disposição geométrica das abscissas de Gauss-Legendre em  $\Omega_s$  triangular

A utilização da quadratura de Gauss-Legendre implica na avaliação de todas as variáveis da Equação (4.36) em cada ponto de quadratura, inclusive dos deslocamentos. Como os deslocamentos são as variáveis desconhecidas do problema, torna-se necessário utilizar um processo de aproximação para escrever os deslocamentos no ponto de quadratura em função dos deslocamentos nodais de pontos de vizinhança.

#### 4.4.2 Aproximação das Variáveis no Ponto de Quadratura

Tradicionalmente, conforme apresentado na Figura 4.7, a implementação do MLPG envolve a criação de três subdomínios para cada nó  $x_q$ : (a) o subdomínio de in-

tegração  $\Omega_{Iq}$ , no qual os pontos de quadratura são distribuídos para avaliação das integrais que compõem as Equações (4.38) e (4.39); (b) o subdomínio local da função de ponderação  $\Omega_I^w$ , onde  $W_q \neq 0$ . Este subdomínio é utilizado para ponderar o resíduo das equações diferenciais de equilíbrio dentro do subdomínio de integração; e, (c) o subdomínio  $\Omega_{qG}$  centrado no ponto de quadratura  $x_G$  e utilizado para construção da função de aproximação de  $x_G$ , ou seja, é o subdomínio que será utilizado para avaliar as variáveis no ponto de quadratura  $x_G$ . Em geral, as formulações derivadas do MLPG consideram o subdomínio de integração coincidente com o subdomínio da função de ponderação, eliminando as integrais sobre o contorno do domínio de integração que não seja coincidente com o contorno da placa.

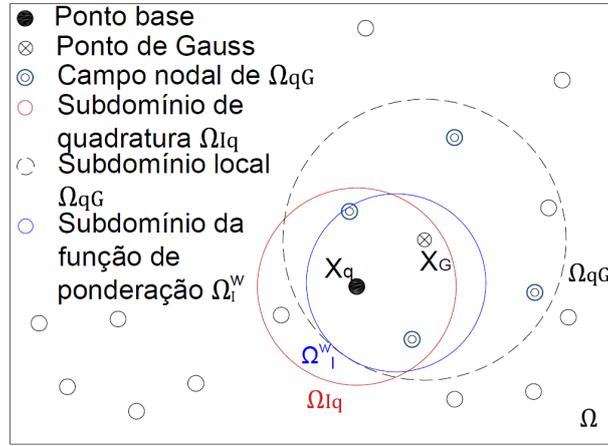


Figura 4.7: Aproximação tradicional no ponto de quadratura

O subdomínio local do ponto de quadratura é utilizado para selecionar pontos campo com o objetivo de construir a função de aproximação de  $x_G$ . O tamanho deste subdomínio está correlacionado com a quantidade de pontos que se deseja selecionar e a quantidade de pontos é determinada pelo método utilizado na obtenção da função de aproximação. Em geral, os pontos que compõem o subdomínio local do ponto de quadratura, são selecionados utilizando-se um critério de proximidade, ou seja, o subdomínio local do ponto de quadratura é formado pelos pontos campo que estão mais próximos do ponto de quadratura. Apesar de não haver dificuldades neste processo, a busca pelos pontos que pertencem ao subdomínio  $\Omega_{qG}$  é computacionalmente pouco eficiente, exigindo o uso de algoritmos de busca mais complexos.

Uma maneira alternativa de obtenção dos nós de vizinhança para construção da função de aproximação de  $x_G$  é a utilização de uma nova região, denominada subdomínio de influência. Cada ponto campo possui um subdomínio de influência próprio e este subdomínio é utilizado para buscar pontos de Gauss de qualquer subdomínio de quadratura. Desta forma, a construção da função de aproximação de  $x_G$  é feita utilizando todos os pontos cujos subdomínios de influência contenham o ponto  $x_G$ , conforme mostrado na Figura 4.8.

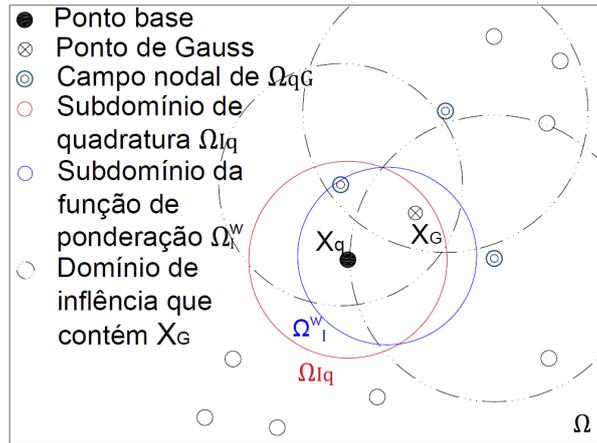


Figura 4.8: Aproximação no ponto de Gauss com o uso do subdomínio de influência

Como a quantidade de pontos campo é muito menor do que a quantidade total de pontos de quadratura utilizados na solução do problema, na implementação computacional as características de cada subdomínio de influência são processadas e armazenadas previamente, e então são utilizadas para analisar o posicionamento do ponto  $x_G$ . Observe que a utilização do subdomínio de influência dispensa completamente o uso de um subdomínio local para o ponto de quadratura, uma vez que ambos os subdomínios possuem a função exclusiva de seleção de pontos campo para construção das funções de aproximação.

É interessante ressaltar que, caso o subdomínio de influência não seja utilizado, a posição de cada ponto campo é analisada para cada ponto de Gauss a fim de se determinar quais pontos campo serão utilizados na obtenção da função de aproximação de  $x_G$ . Em outras palavras, é um processo de cálculo massivo de distâncias e de intensas comparações, onerando em muito o custo computacional.

#### 4.4.3 Proposta de Aproximação Simplificada das Variáveis no Ponto de Quadratura

O processo de integração é fundamental para a eficiência de um método verdadeiramente sem malha. Desta forma, muitas formulações alternativas são propostas visando explorar a eficiência no processo de quadratura. No trabalho de DUFLOT e NGUYEN-DANG [49], o método de Galerkin é utilizado para o desenvolvimento de um método verdadeiramente sem malha, no qual, as funções que compõem as integrais do problema são modificadas utilizando-se as funções de aproximação obtidas a partir do MLS para definir um processo de quadratura denominado de *moving least square quadrature*. Outra abordagem interessante é apresentada por KHOSRAVIFARD e HEMATIYAN [50], na qual as integrais de domínio são transformadas em integrais de dimensões menores através de um processo de transformação de coordena-

nadas, objetivando aplicação em métodos sem malhas baseados na forma fraca global. CARPINTERI *et al.* [51] apresentam um processo de quadratura denominado de quadratura da partição da unidade, no qual, as integrais sobre todo o domínio do problema são subdivididas e escritas em forma de soma, sem a necessidade de nenhum tipo de malha ou célula. Diferentemente dos processos apresentados, ROSCA e LEITÃO [52] utilizam a integração de Quase-Monte Carlo, onde a abordagem da técnica de quadratura é feita através de métodos probabilísticos.

Por mais que o uso do subdomínio de influência melhore a eficiência computacional do MLPG, a maior parte do custo computacional decorre nas operações matriciais no processo de obtenção das funções de aproximação. No RPIM, a função de aproximação para o ponto  $x_q$  é obtida a partir de um subdomínio local  $\Omega_S$ , que contém os pontos campo de vizinhança. O mesmo suporte  $\Omega_S$  pode ser utilizado para construir a função de aproximação de qualquer outro ponto próximo<sup>1</sup> a  $x_q$ , produzindo os mesmos parâmetros  $\mathbf{R}_0$  e  $\mathbf{P}$ . Nesta situação, ocorre alteração somente nos vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$ , que são as variáveis que carregam as informações do ponto que se deseja obter a função de aproximação.

Diante do exposto, pode-se utilizar um único subdomínio, centrado em  $x_q$ , para obtenção de parâmetros  $\mathbf{R}_0$  e  $\mathbf{P}$  únicos, para todos os pontos de Gauss pertencentes ao subdomínio de integração do ponto  $x_q$ , conforme Figura 4.9.

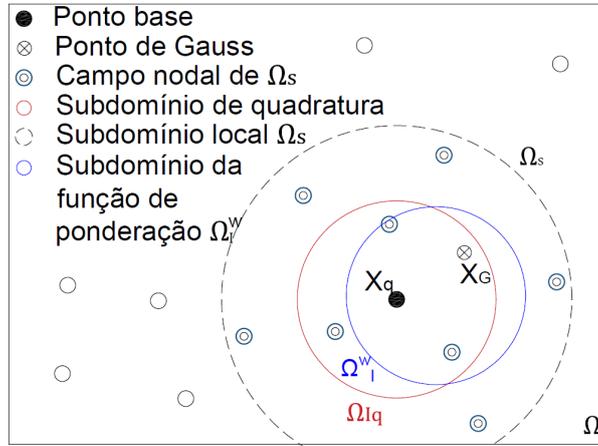


Figura 4.9: Proposta de aproximação simplificada no ponto de Gauss

Alguns cuidados devem ser tomados para a consideração de um único suporte para todos os pontos de quadratura, pois os parâmetros  $\mathbf{R}_0$  e  $\mathbf{P}$  tendem a produzir funções de aproximação insatisfatórias para pontos próximo ao contorno de  $\Omega_S$ . Deste modo, o domínio de integração  $\Omega_{Iq}$  deve ser pequeno quando comparado a

<sup>1</sup>Dentro do domínio de validade dos parâmetros  $\mathbf{R}_0$  e  $\mathbf{P}$  obtidos para o ponto  $x_q$ . O domínio de validade de tais parâmetros pode ser considerado como sendo o próprio subdomínio  $\Omega_S$ . Como o ponto  $x_q$  encontra-se centrado em  $\Omega_S$ , os parâmetros  $\mathbf{R}_0$  e  $\mathbf{P}$  são ótimos para o ponto  $x_q$  e perdem capacidade de aproximação à medida que se afasta de  $x_q$ .

$\Omega_S$  e  $\Omega_S$  não deve ser demasiadamente grande para preservar o caráter local do método.

Esta proposta alternativa para obtenção das funções de aproximação provocará uma menor precisão na avaliação das variáveis nos pontos de quadratura. Por outro lado, grande parte do custo computacional na aplicação do MLPG é eliminado. Tendo em vista que o MLPG é extremamente flexível por possibilitar o ajuste de diversos parâmetros intrínsecos ao método, uma menor precisão das funções de aproximação podem não representar uma perda significativa de precisão nos resultados finais.

Caso a função de aproximação não possua a propriedade do delta de Kronecker, a proposta de aproximação simplificada se torna ainda mais vantajosa, uma vez que, as matrizes  $\mathbf{R}_0$  e  $\mathbf{P}$  não precisam ser recalculadas na fase de pós processamento.

## 4.5 Descontinuidade na Geometria do Contorno

Em um método verdadeiramente sem malha não há o uso de células, elementos ou qualquer tipo de conectividade para representação e solução do problema. Estas restrições causam grande dificuldade na implementação do método quando se necessita utilizar informações a respeito da direção do contorno do problema.

No MLPG a direção normal ao contorno é requerida. O problema é totalmente representado por uma nuvem de pontos desconexos e, para o caso de problemas com contorno irregular, a normal ao contorno precisa ser fornecida ponto por ponto, pois a direção normal ao contorno  $\hat{n}_i$  varia em cada nó  $i$  de  $\Gamma$ , ver Figura 4.10.

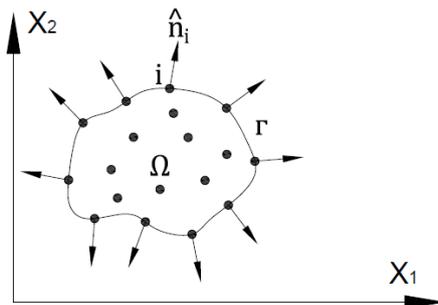


Figura 4.10: Direção normal ao contorno - Geometria irregular

A implementação computacional desenvolvida neste trabalho, considera apenas o caso de placas com geometria de polígono convexo, ou seja, excluindo-se os casos no qual a projeção de uma ou mais arestas adentrem a placa. Na Figura 4.11 (a) apresenta-se um exemplo de geometria passível de análise e em (b) um exemplo de geometria não permitida. As direções das arestas da placa são previamente fornecidas, possibilitando a determinação da direção normal de qualquer ponto que

esteja sobre o contorno do problema.

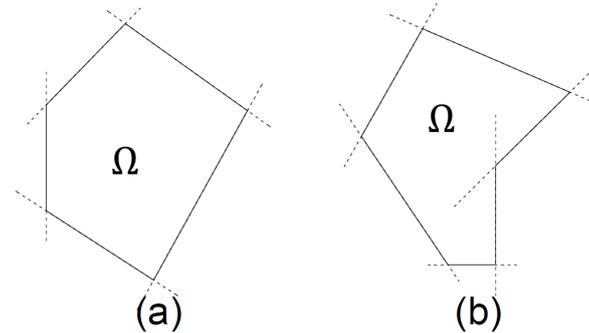


Figura 4.11: (a) Exemplo de forma geométrica permitida - (b) Exemplo de forma não permitida, com projeção da aresta adentrando o domínio  $\Omega$

Atenção especial deve ser dada aos pontos coincidentes com os vértices da placa. Tais pontos pertencem simultaneamente à duas arestas e duas direções normais diferentes poderiam ser atribuídas devido a descontinuidade geométrica no ponto, Figura 4.12 (a). Contudo, na formulação do MLPG não é possível atribuir a um único nó duas diferentes direções normais ao contorno .

Uma solução simples para este problema seria a escolha aleatória de qualquer uma das duas direções normais das arestas que contém o ponto de vértice, Figura 4.12 (b). Contudo, esta solução incorre em diversos erros de representatividade do problema. Uma alternativa mais eficiente é apresentada na Figura 4.12 (c), que é a consideração de nós duplos descontínuos, análoga a técnica de elementos descontínuos utilizada no MEC. Nesta técnica, dois pontos são lançados na mesma coordenada sendo que, cada um possui suas próprias características, ou seja, direção normal e condições de contorno.

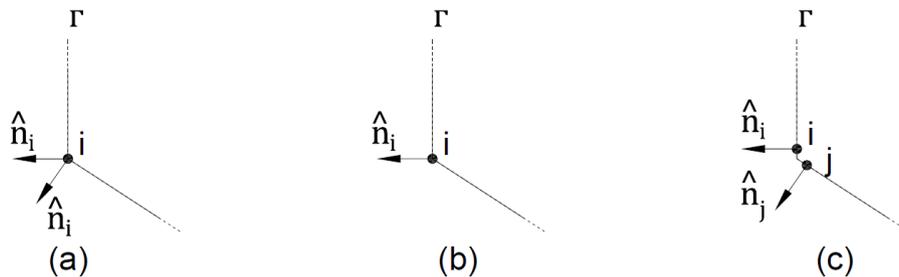


Figura 4.12: (a) Nó de canto com duas direções normais ao contorno - (b) Nó de canto com escolha aleatória da direção normal ao contorno - (c) Canto com nó duplo recalculado

Para tornar possível a representação da descontinuidade nos vértices da placa, deve-se escrever equações independentes para cada nó duplo. Desta forma, as coordenadas dos nós duplos são recalculadas para que o nó se torne interno a aresta. Na

Figura 4.12 (c), os nós  $i$  e  $j$  podem ser deslocados individualmente, inclusive com o deslocamento de apenas um dos nós.

## 4.6 Implementação Numérica

A implementação numérica da formulação do MLPG para o problema de flexão de placas espessas é feita em Fortran 90, através do *Microsoft Visual Studio Community 2017*.

Os dados de entrada são:

- Coordenadas dos pontos de domínio e contorno
- Coordenadas dos cantos e direção das arestas da placa
- Ordem da base polinomial utilizada na obtenção das funções de aproximação
- Propriedades físicas do material
- Quantidade de pontos de quadratura
- Espessura da placa
- Carregamento transversal
- Condições de contorno

Após a leitura dos dados de entrada, a direção normal de cada ponto do contorno é determinada e os nós de canto são reposicionados.

As abscissas e pesos de Gauss são calculadas.

Para cada ponto utilizado para representar o problema:

- O raio do subdomínio de integração é determinado
- O subdomínio de integração é analisado e a forma geométrica a ser integrada é identificada.
- Se alguma parte do contorno  $\Gamma$  do problema estiver contido no subdomínio de integração, faz-se a identificação das condições de contorno do trecho a ser integrado.
- Determina-se o subdomínio local para obtenção das funções de forma. Os parâmetros utilizados para obtenção das funções de forma são obtidos.
- As funções que compõem a forma fraca discretizada são avaliadas em cada ponto de quadratura e, após a consideração do jacobiano da matriz de transformação, os resultados são acumulados para montagem da matriz  $\mathbf{K}$  e do vetor  $\mathbf{F}$ , formando assim o sistema global de equações.

- Caso o ponto possua algum deslocamento prescrito, a matriz  $\mathbf{K}$  e o vetor  $\mathbf{F}$  são alterados para imposição das condições de contorno de Dirichlet.

Após a aplicação da quadratura de Gauss-Legendre e imposição das condições de contorno essenciais, o sistema de equações é resolvido através do processo de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

Se a função de aproximação possuir a propriedade do delta de Kronecker, os deslocamentos finais são obtidos diretamente da solução do sistema de equações. Caso contrário, a solução do sistema de equações fornece os deslocamentos fictícios nodais e a função de aproximação deve ser utilizada novamente para determinação dos deslocamentos finais.

# Capítulo 5

## Resultados e Discussões

Para fins de simplificação, a integração numérica que utilizar o modelo de aproximação apresentado em 4.4.2 será denominada de “integração tradicional” ou “regra 1” e caso a integração numérica seja realizada utilizando o modelo de aproximação apresentado em 4.4.3, a denominação “integração proposta” ou “regra 2” será utilizada.

Os resultados numéricos obtidos pelo MLPG com a utilização da integração proposta são comparados com os resultados obtidos através da integração tradicional e também com os resultados obtidos através do MEF, com a utilização do programa computacional ANSYS (elemento *shell181*).

A solução analítica para o problema de flexão de placas espessas é limitada a casos muito particulares de geometria, vinculação e carregamento. Desta forma, a precisão dos resultados obtidos com a formulação proposta neste trabalho é determinada utilizando-se como referência os resultados obtidos com o ANSYS.

Quanto a avaliação do custo computacional, cabe informar que as análises são realizadas em ambiente *Windows* versão 10, processador Intel(R) Core(TM) i7-4700MQ CPU @ 2.4GHz e 16.0GB de memória RAM. O custo computacional é medido a partir do início da leitura dos dados de entrada até a gravação dos resultados finais no arquivo de saída.

Nas análises numéricas, a spline de quarta ordem é utilizada para ponderar o resíduo das equações diferenciais de equilíbrio na formulação do MLPG.

A avaliação das integrais de domínio é feita utilizando-se  $8 \times 8$  pontos de quadratura. No caso das integrais de contorno, apenas 8 pontos são utilizados. A quantidade de pontos de quadratura foi definida observando-se a convergência dos resultados. Vale destacar que, em todos os exemplos analisados neste trabalho, a convergência foi atingida com a referida quantidade de pontos de quadratura.

Caso o RPIM seja utilizado para obtenção das funções de aproximação, são utilizados os parâmetros de forma  $q = 1.03$  e  $a_c = 1.42$  para a função multi-quádrica. O comprimento característico  $d_c$  é adotado como sendo o espaçamento nodal médio

dos pontos utilizado na discretização de todo o domínio e contorno do problema.

## 5.1 Placa Quadrada Totalmente Engastada

Neste exemplo tem-se uma placa engastada ( $\phi_n = 0, \phi_s = 0$  e  $w = 0$ ) em todos os lados, apresentada na Figura 5.1 juntamente com seu eixo de análise. A placa possui espessura  $t = 1m$  e está sob ação de um carregamento uniformemente distribuído de  $g = -0.64 \frac{KN}{m^2}$ . Foi considerado módulo de elasticidade  $E = 2 \times 10^6 \frac{KN}{m^2}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ .

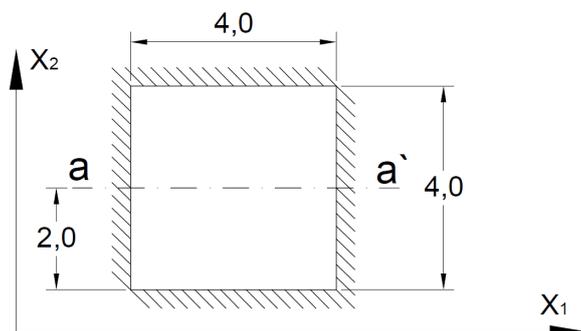


Figura 5.1: Placa engastada - Eixo de análise  $a - a'$

Devido à simetria do problema, os resultados são analisados em apenas um eixo.

### 5.1.1 Análise utilizando função de base radial

Uma nuvem contendo 289 pontos, distribuídos de forma homogênea no domínio e contorno da placa, é utilizada na análise do problema e está apresentada na Figura 5.2. Na Figura 5.3 os deslocamentos obtidos com a utilização da integração proposta são comparados com os resultados provenientes da aplicação do MEF. As funções de aproximação foram obtidas com a consideração de uma base monomial de segunda ordem.

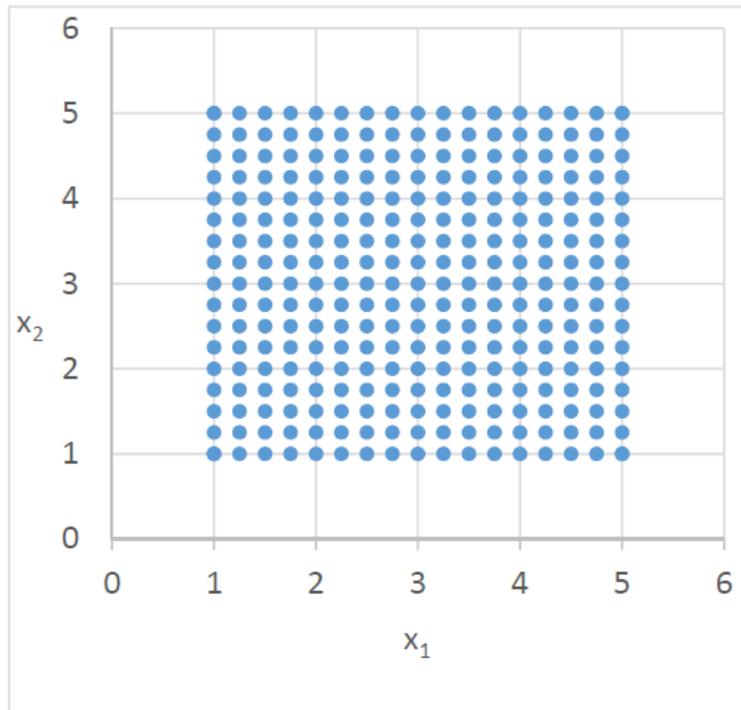


Figura 5.2: Nuvem de pontos - 289 nós

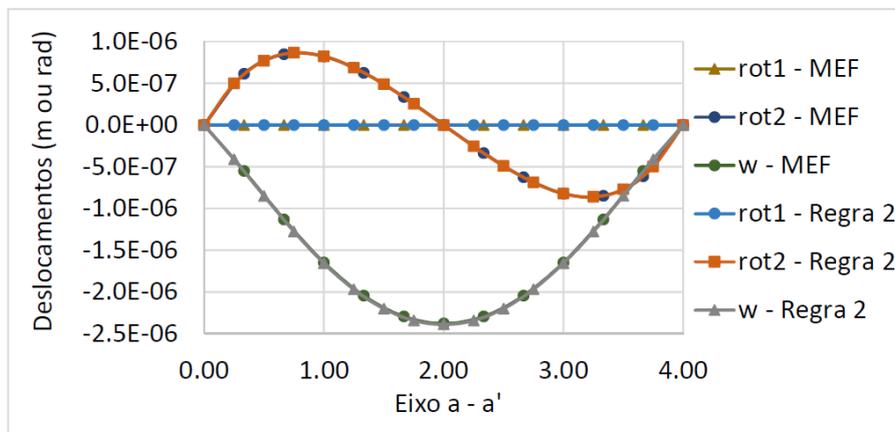


Figura 5.3: Placa engastada - Eixo de análise  $a - a'$

O estudo da convergência, realizado com a utilização de nuvens contendo 25, 81 e 289 pontos, é apresentado na Figura 5.4 e Figura 5.5. Observe que o modelo proposto apresenta bons resultados até na discretização mais pobre e que a convergência de resultados já pode ser identificada na nuvem de 81 pontos.

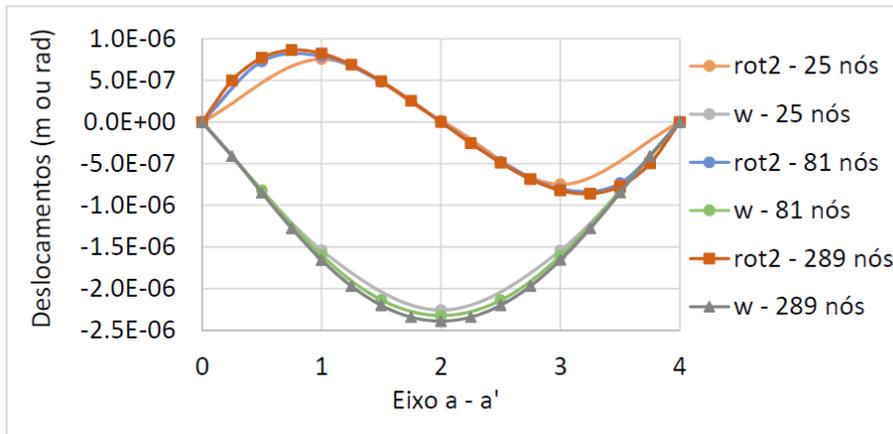


Figura 5.4: Convergência de resultados - Eixo de análise  $a - a'$

Na Figura 5.5, a convergência do deslocamento transversal do ponto central da placa é analisada com as três nuvens de pontos citadas anteriormente. Conforme pode ser observado, o modelo proposto necessitou de uma quantidade menor de pontos para ser representado satisfatoriamente. Tal fato pode ser explicado pela utilização de um único subdomínio para todos os pontos de quadratura do nó de interesse, valorizando as características locais deste nó (Figura 5.6).

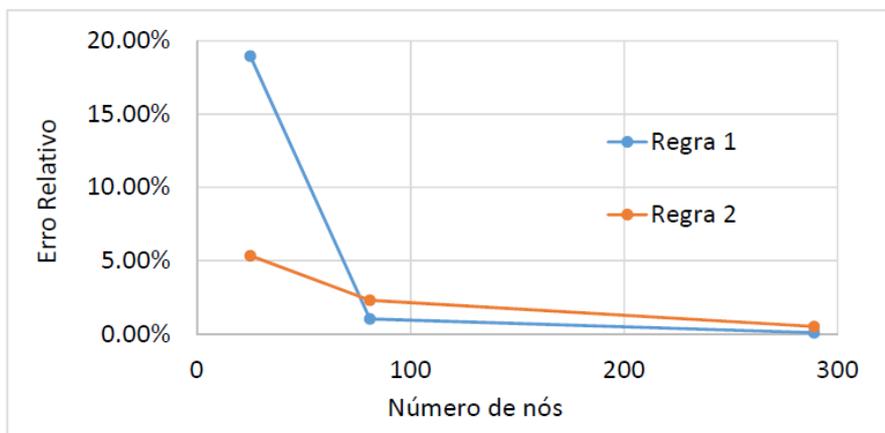


Figura 5.5: Comparação entre os modelos de integração - Deslocamento transversal máximo

Na Figura 5.6 pode-se observar que a quantidade de nós campo que influenciam no ponto de interesse é significativamente menor na integração proposta, ainda que cada subdomínio local seja formado pelo mesmo número de nós.

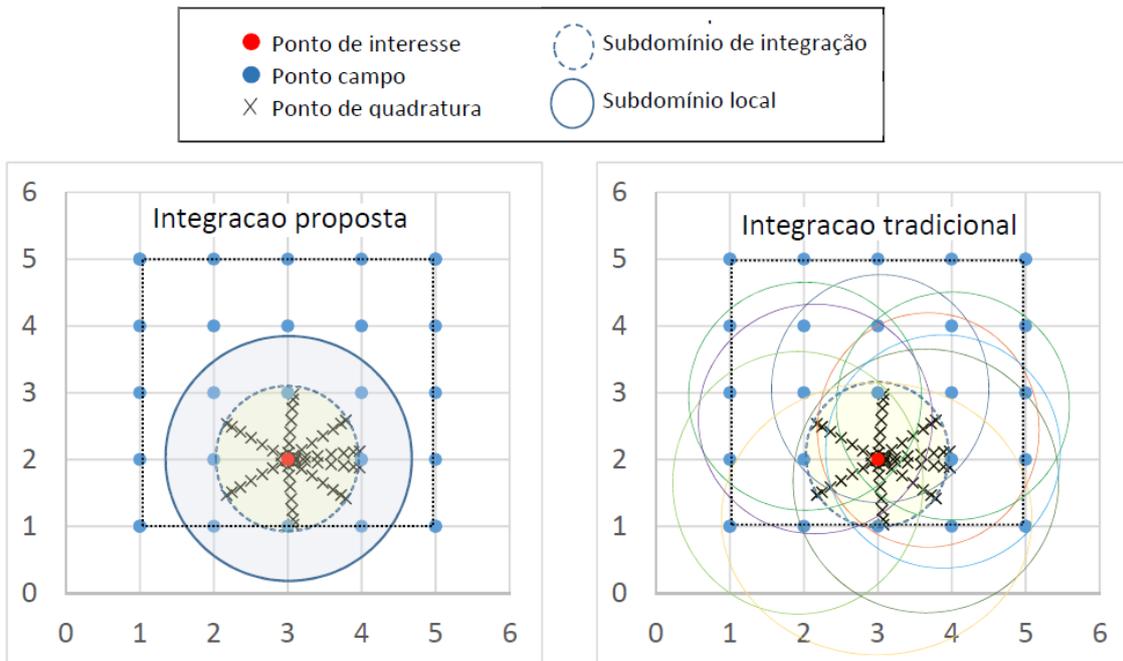


Figura 5.6: Influência dos nós campo no ponto de interesse - Nuvem com 25 nós

A comparação do custo computacional entre o MLPG utilizando a integração tradicional e o MLPG utilizando a integração proposta é apresentada na Figura 5.7.

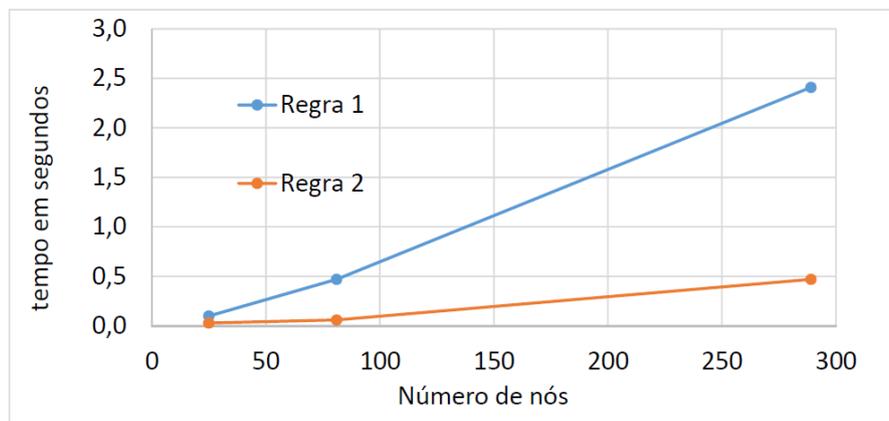


Figura 5.7: Custo computacional - placa engastada

A integração proposta foi, em média, 79% computacionalmente mais eficiente que a integração tradicional.

Cabe ressaltar que a comparação entre as duas propostas de integração não é totalmente adequada, pois as diferenças entre elas não permitem uma comparação direta. Desta forma, na tabela 5.1 é apresentado o total de nós utilizado em cada modelo de integração para obtenção das funções de aproximação, onde  $NDG$  é o número de nós utilizado na obtenção das funções de aproximação em cada ponto de quadratura e  $NDL$  é o número de nós que pertencem ao subdomínio do ponto base. A determinação de  $NDG$  e  $NDL$  é feita a partir da adoção de um critério, no

qual a estabilidade dos resultados é considerada. Para tanto, considera-se atingida a estabilidade dos resultados quando o incremento de um ponto no subdomínio do ponto de interesse produza uma variação máxima de 5% nos resultados.

Tabela 5.1: Número de nós utilizados na obtenção da função de aproximação - placa totalmente engastada

|     | Integração tradicional | Integração proposta |
|-----|------------------------|---------------------|
| Nós | NDG                    | NDL                 |
| 25  | 10                     | 10                  |
| 81  | 14                     | 10                  |
| 289 | 15                     | 11                  |

O coeficiente de rigidez à flexão e o coeficiente de rigidez ao cisalhamento contribuem simultaneamente na composição da matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$ . Nesta situação, a teoria de flexão de placas de Reissner frequentemente incorre em um fenômeno denominado *shear locking*. A medida que a espessura da placa diminui, a rigidez à flexão diminui com comportamento cúbico e a rigidez ao cisalhamento diminui com comportamento linear. Quando a espessura da placa tende a zero, as deformações cisalhantes devem ser inexistentes, ou seja, a rigidez ao cisalhamento deve ser infinita. Contudo, na formulação de placas espessas, quando a espessura da placa se torna demasiadamente pequena, a rigidez ao cisalhamento se torna grande perante à rigidez à flexão produzindo soluções espúrias devido à influência excessiva dos termos correlacionados aos esforços cisalhantes.

De acordo com [53], o efeito de *shear locking* pode ser evitado no MLPG através da utilização de uma base polinomial de alta ordem na obtenção das funções de aproximação. Assim sendo, na Figura 5.8 são apresentados os resultados da análise do efeito de *shear locking* na integração proposta em função da ordem da base monomial utilizada.

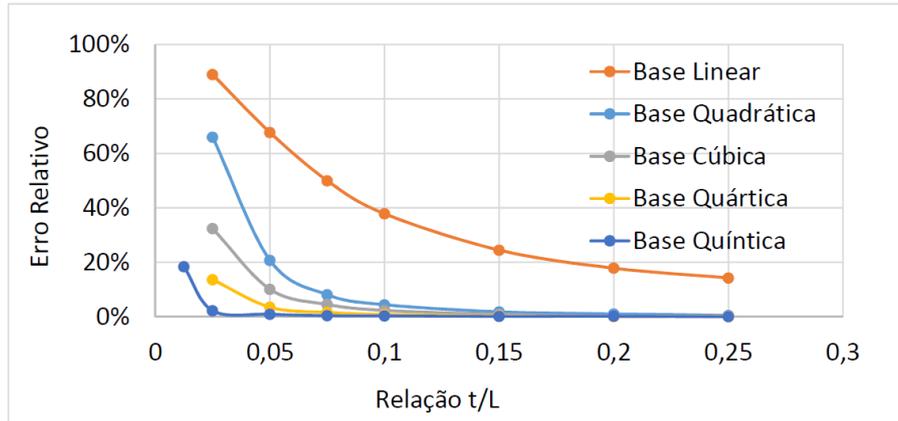


Figura 5.8: Efeito de *shear locking* - placa engastada

A utilização de uma base monomial de quinta ordem permitiu a obtenção de bons resultados para um relação  $\frac{t}{L} = 0,025$ , indicando que o efeito de *shear locking* pode ser facilmente evitado no processo de integração proposto.

### 5.1.2 Análise utilizando o método dos mínimos quadrados móveis

O comportamento da integração proposta é analisado agora, com a utilização de funções de aproximação obtidas a partir do MLS. A quantidade de pontos de quadratura, bem como o tamanho do subdomínio local de cada ponto permanecem inalterados. As análises são realizadas utilizando-se as mesmas discretizações apresentadas anteriormente, ou seja, nuvens de 25, 81 e 289 pontos, distribuídos de forma homogênea no domínio e contorno da placa.

A imposição das condições de contorno essenciais é feita utilizando-se o método da interpolação direta, sendo que, no MLS a função de aproximação não apresenta a propriedade do delta de Kronecker e, desta forma, o método da interpolação direta se resume ao método de colocação pontual.

Na Figura 5.9 os deslocamentos obtidos com a integração proposta a partir da nuvem com 289 pontos são comparados com os deslocamentos obtidos através do MEF.

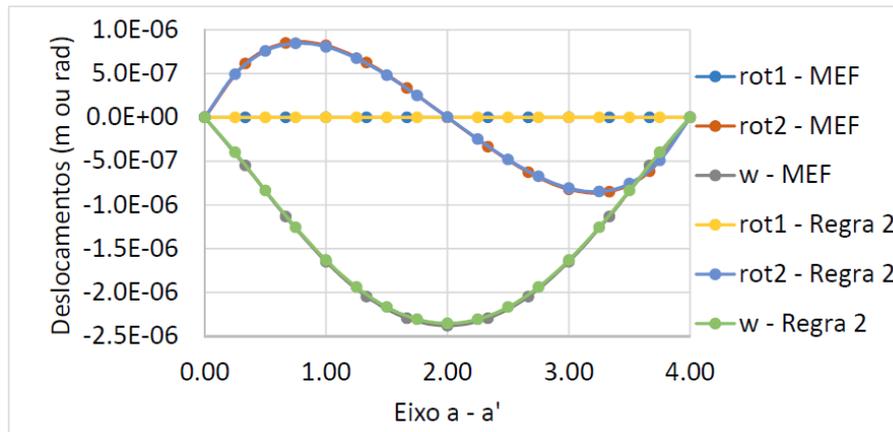


Figura 5.9: Placa engastada - Eixo de análise  $a - a'$

Assim como na análise utilizando FBR, não há diferenças significativas nos resultados do MLPG frente ao MEF, quando utilizado 289 pontos de discretização. Na Figura 5.10 tem-se o erro relativo dos deslocamentos obtidos com a utilização da integração proposta e da integração tradicional para as nuvens com 25, 81 e 289 nós. Na mesma Figura é realizada uma comparação direta entre os resultados obtidos com o MLS e FBR. No processo de integração tradicional não há diferença nos resultados em função do método de obtenção da função de aproximação. Por outro lado, no processo de integração proposto, a utilização do MLS tornou a placa mais rígida nas discretizações mais pobres, aumentando o erro relativo.

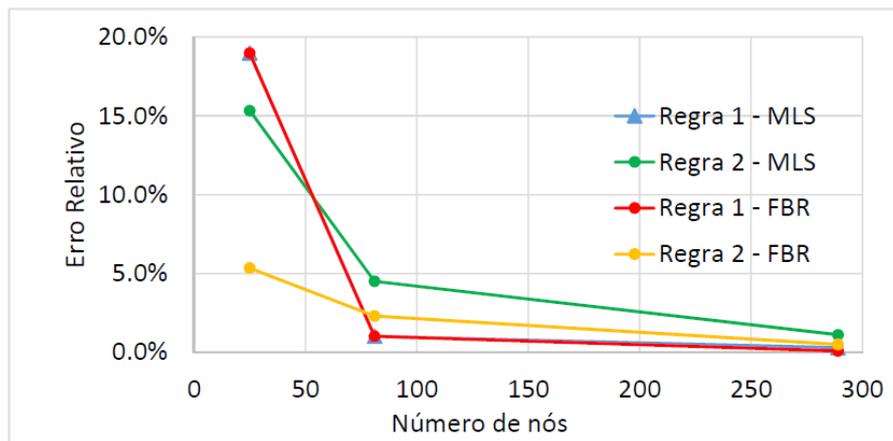


Figura 5.10: Comparação entre os modelos de integração utilizando MLS e FBR - Deslocamento transversal máximo

Com relação ao custo computacional, apresentado na Figura 5.11, a diferença entre o tempo de processamento do MLS e FBR para a integração tradicional foi muito pequena. No caso da integração proposta, pode-se perceber um pequeno aumento no tempo de processamento quando utilizado o MLS.

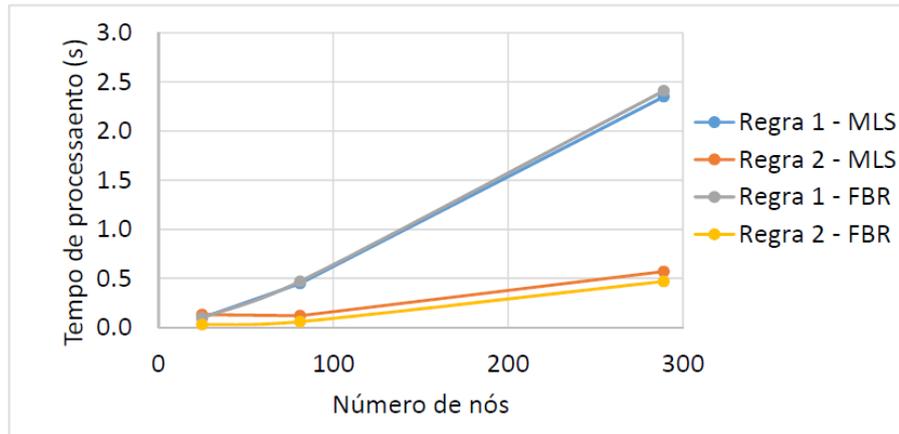


Figura 5.11: Custo computacional entre os diferentes métodos de integração - FBR e MLS

Na Figura 5.12 tem-se o erro em função da relação  $\frac{t}{L}$ , na qual observa-se o desempenho insatisfatório da utilização da base linear até para o caso de placas espessas, ou seja, sem a influência de *shear locking*. Ainda que as bases quadrática e cúbica tenham produzido bons resultados para o caso de placa espessa, a obtenção de resultados razoáveis com a utilização de bases superiores não foi possível devido a ocorrência recorrente de matrizes singulares durante a aplicação do MLS ou ainda, devido a falta de estabilidade dos resultados. No MLS, a ocorrência de matrizes singulares diminui à medida que uma quantidade maior de pontos são utilizados para construção das funções de aproximação. Contudo, a utilização de um grande número de pontos para obtenção das funções de aproximação requer uma quantidade ainda maior de pontos de discretização, acarretando o aumento do custo computacional e consequentemente, indo na contramão da proposta deste trabalho.

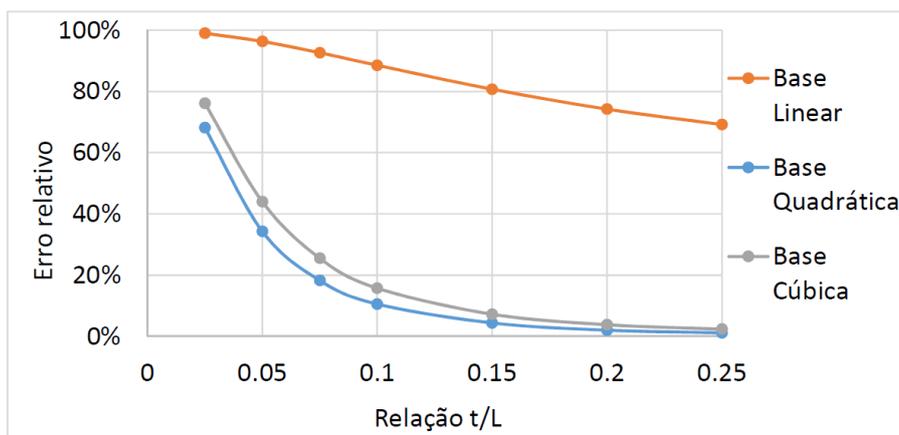


Figura 5.12: Efeito de *shear locking*

As rotações em toda a placa podem ser encontradas na Figura 5.13 e o deslocamento transversal na Figura 5.14.

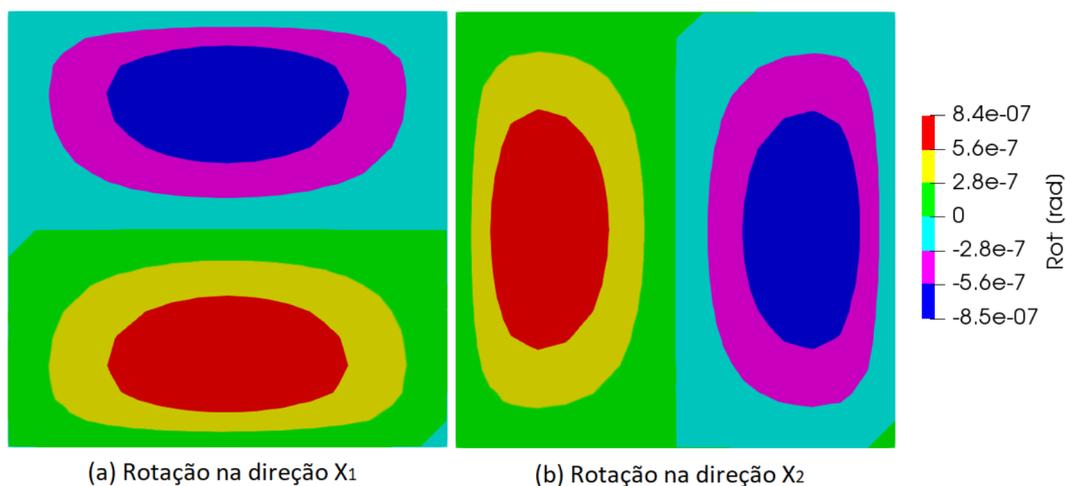


Figura 5.13: Rotações da placa engastada - Integração proposta

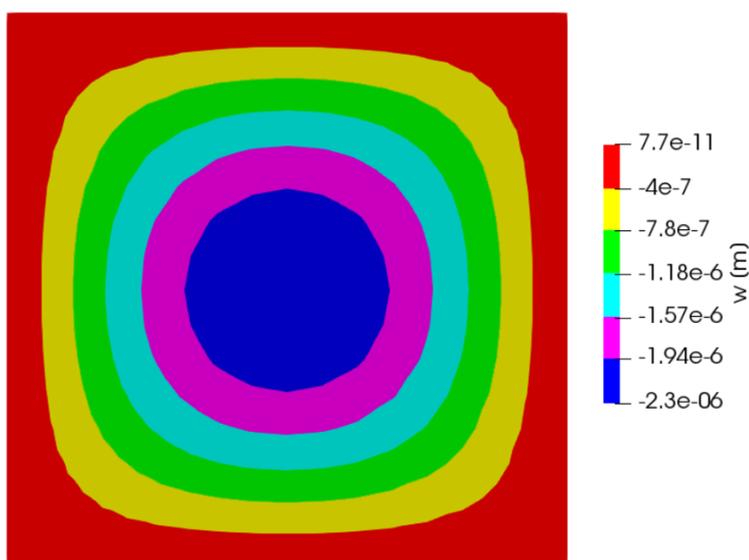


Figura 5.14: Deslocamento transversal da placa engastada - Integração proposta

Na Figura 5.13 é observada uma pequena perturbação na anti-simetria das rotações nas duas direções. Tendo em vista que tais perturbações ocorrem somente em regiões onde os valores são muito próximos de zero, pode-se afirmar que tal fato é devido ao erro de arredondamento, ou seja, o erro produzido pela máquina ao efetuar cálculos com números reais.

### 5.1.3 Imposição das condições de contorno essenciais

Todos os resultados apresentados foram obtidos com a imposição das condições de contorno essenciais através do método da interpolação direta. A utilização do método das penalidades produziu resultados muito semelhantes ao método da interpolação direta quando o parâmetro de penalidade obedecia a relação  $\alpha_p \geq 10^5$ .

No método das penalidades, o condicionamento da matriz de rigidez global piorou na medida que o coeficiente de penalidade foi aumentado. Contudo, por mais que o número de condicionamento indicasse a formação de um sistema mal condicionado, cabe destacar que os resultados permaneceram estáveis.

O comportamento da placa se mostrou independente do processo de imposição das condições de contorno essenciais para a análise do efeito de *shear locking* e também do método utilizado para obtenção das funções de aproximação.

## 5.2 Placa Quadrada Biapoiada

Seja agora uma placa quadrada, com dois lados opostos apoiados ( $w = 0$ ,  $M_n = 0$ ,  $M_{ns} = 0$ ) e os outros dois lados livres, conforme apresentado na Figura 5.15. A espessura da placa é definida em  $1m$ , gerando uma relação  $\frac{t}{L} = 0.25$ , ou seja, caso de placa espessa. O módulo de elasticidade é  $E = 2 \times 10^6 \frac{KN}{m^2}$  e o coeficiente de Poisson é  $\nu = 0.3$ . A placa está sob solicitação de um carregamento uniformemente distribuído de  $g = -0.64 \frac{KN}{m^2}$ .

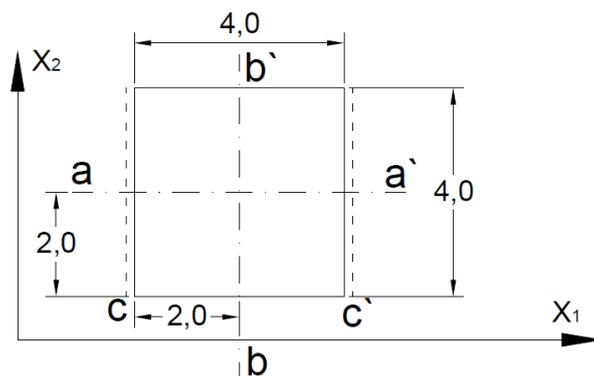


Figura 5.15: Placa biapoiada - Dimensões e eixos de análise

Nuvens de 25, 81 e 289 pontos distribuídos de forma homogênea sobre o domínio e contorno da placa são utilizadas para discretizar o problema, da mesma forma que no exemplo 5.1. A imposição das condições de contorno essenciais é feita através do método da interpolação direta e as funções de aproximação são obtidas com o uso de função de base radial com termos polinomiais.

Nas Figuras 5.16 e 5.17 os deslocamentos obtidos através da integração proposta, com 289 pontos de discretização, são comparados com os deslocamentos obtidos através do ANSYS. Observe que a formulação do MLPG com o processo de integração proposto produz resultados que se confundem aos obtidos com o MEF, indicando que o método pode ser uma alternativa real aos métodos numéricos tradicionais.

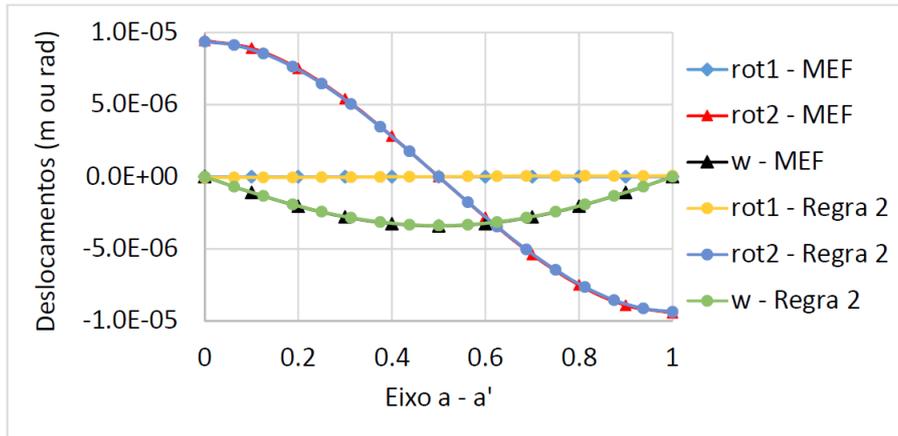


Figura 5.16: Deslocamentos no eixo  $a - a'$

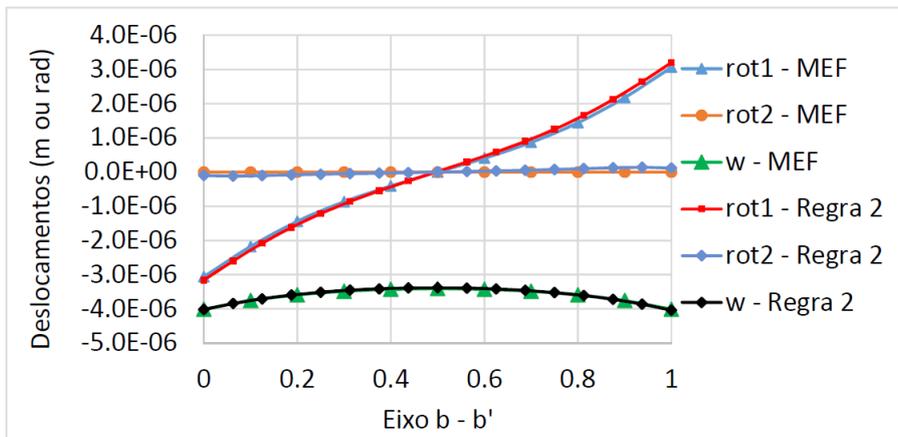


Figura 5.17: Deslocamentos no eixo  $b - b'$

Ainda que no exemplo 5.1 tenha sido utilizado a implementação dos nós duplos nas descontinuidades do contorno da placa, naquele exemplo não havia ocorrência de descontinuidade das condições de contorno, facilitando a análise. Já neste exemplo, além da descontinuidade geométrica nos cantos da placa, tem-se a descontinuidade das condições de contorno. Diante dos resultados apresentados nas Figuras 5.16 e 5.17 pode-se afirmar que a técnica de nós geométricos descontínuos é uma ferramenta adequada ao MLPG.

Na Figura 5.18 tem-se a distribuição de pontos sobre o eixo  $c - c'$  e o posicionamento em detalhes dos nós duplos. Apesar do par de nós duplos poderem ser deslocados simultaneamente, apenas um dos nós foi deslocado. O deslocamento adotado foi de 10% do valor do espaçamento nodal, sendo que, problemas de singularidade na matriz de rigidez global surgiram quando adotado um valor inferior a 5%.

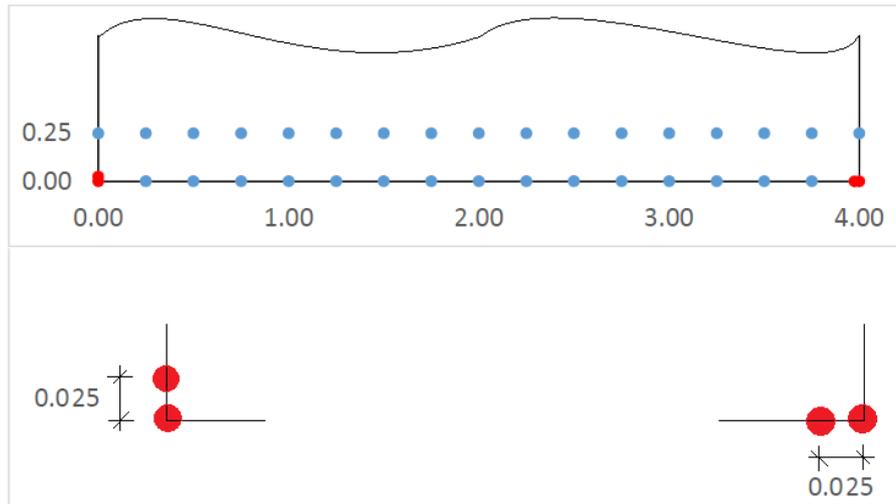


Figura 5.18: Posicionamento em detalhes dos nós duplos - distribuição de pontos no eixo  $c - c'$

Ao deslocar apenas um dos nós duplos, tem-se a vantagem de manter um nó sobre o canto da placa. Por outro lado, perde-se a distribuição simétrica dos pontos e a representação do problema deixa de ser simétrica, ainda que o problema possua dois eixos de simetria. Neste ponto é importante observar que, por ser um método sem malha, a distribuição de pontos pode ser qualquer, desde que represente adequadamente o problema. Na Figura 5.19 são apresentados os deslocamentos sobre o eixo  $c - c'$ , de onde pode-se notar que o posicionamento assimétrico dos nós duplos causam uma pequena perda de simetria nos resultados.

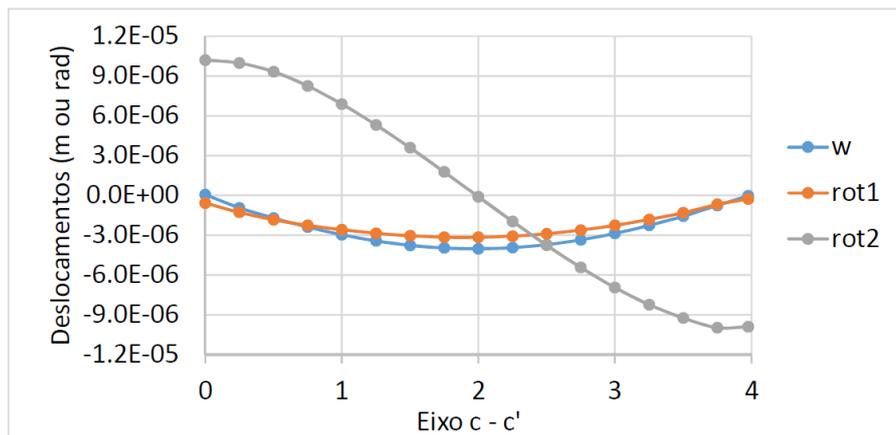


Figura 5.19: Deslocamentos no eixo  $c - c'$

Neste exemplo, a rotação na direção  $X_1$  é o deslocamento de menor relevância na análise, tendo em vista que sua causa é exclusivamente o efeito Poisson. Desta forma, como esperado, a rotação na direção  $X_1$  é de menor magnitude e pequenas variações se tornam mais perceptíveis.

Na Figura 5.20 o deslocamento transversal no ponto central da placa é utilizado

para análise da convergência e ainda, para comparação de resultados entre o MLPG tradicional e o MLPG com o processo de integração proposto, de onde pode se observar que as duas soluções apresentaram o mesmo comportamento.

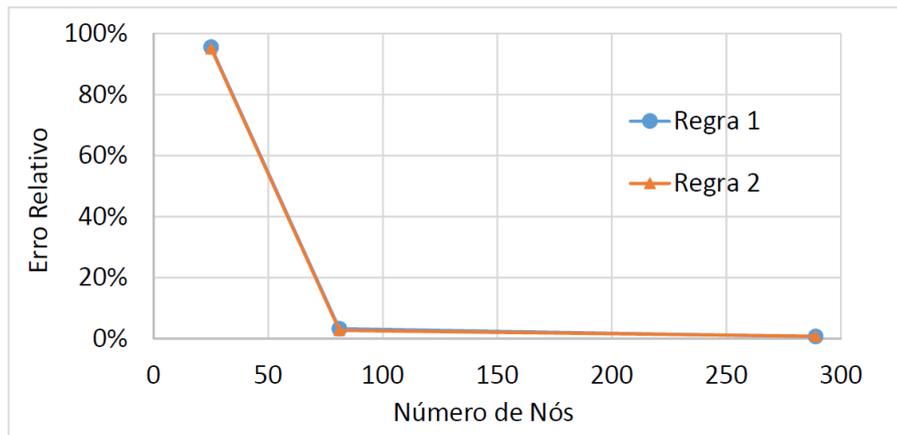


Figura 5.20: Convergência e comparação entre os modelos de integração - Deslocamento transversal máximo

O custo computacional (Figura 5.21) da integração proposta é consideravelmente menor do que da integração tradicional, sendo ainda mais vantajosa quando uma quantidade maior de pontos de discretização é utilizado. O número de pontos utilizado na formação do suporte local para obtenção das funções de aproximação de cada processo de integração é apresentado na tabela 5.2.

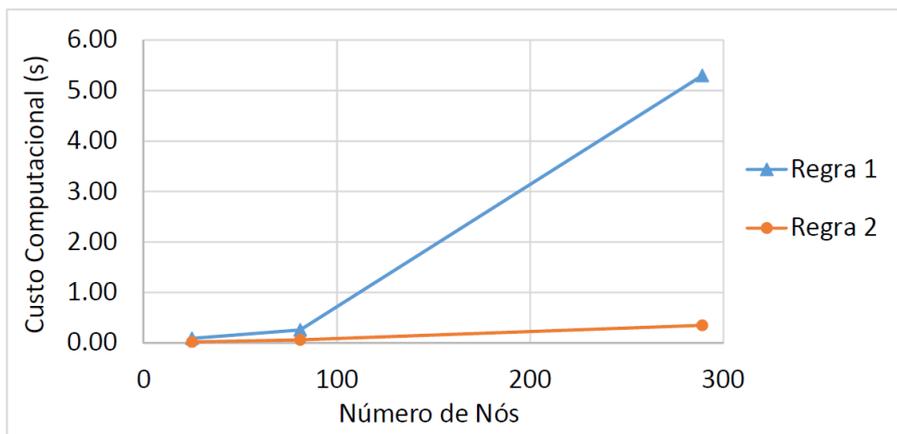


Figura 5.21: Custo computacional - placa biapoiada

Na nuvem com 289 pontos, a integração tradicional teve sua precisão melhorada com a consideração de mais pontos no suporte do ponto de quadratura. Desta forma, optou-se por comparar os resultados entre os dois modelos de integração levando em conta o mesmo erro relativo.

Tabela 5.2: Número de nós utilizados na obtenção da função de aproximação - placa biapoiada

|     | Integração tradicional | Integração proposta |
|-----|------------------------|---------------------|
| Nós | NDG                    | NDL                 |
| 25  | 10                     | 10                  |
| 81  | 10                     | 11                  |
| 289 | 23                     | 10                  |

Cabe elucidar que, para a integração tradicional na nuvem de 289 pontos, caso o suporte do ponto de quadratura fosse constituído por 10 pontos, o erro relativo aumentaria para 2.81% e o custo computacional cairia para 1.52 segundos.

A utilização de uma base monomial de ordem quártica na formulação proposta permitiu avaliar uma placa com relação  $\frac{t}{L} = 0.025$  satisfatoriamente, conforme pode ser observado na Figura 5.22.

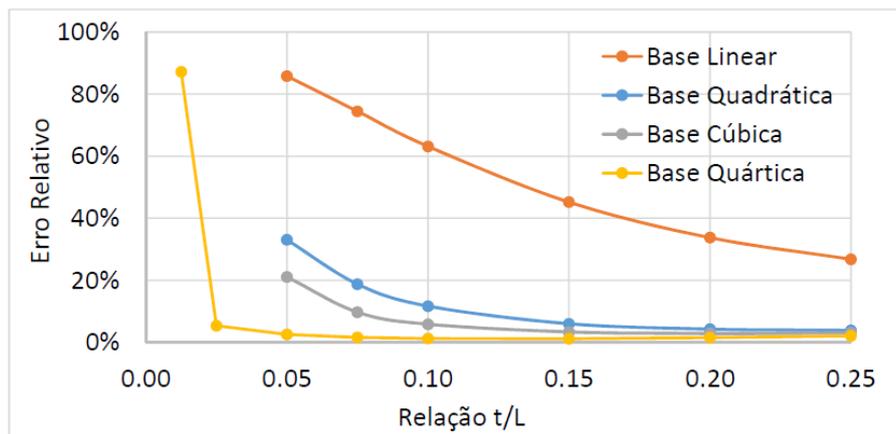


Figura 5.22: Efeito de *shear locking* - placa biapoiada

É interessante observar que a quantidade de pontos utilizados na obtenção das funções de aproximação dependem da ordem da base monomial considerada e afetam diretamente os resultados. Sendo assim, nas Figuras 5.23, 5.24 e 5.25 são apresentados o comportamento do erro relativo do deslocamento transversal no ponto central da placa considerando a integração proposta, para diferentes espessuras e quantidades de pontos no subdomínio local do ponto de interesse, considerando a utilização de bases monomiais de diferentes ordens.

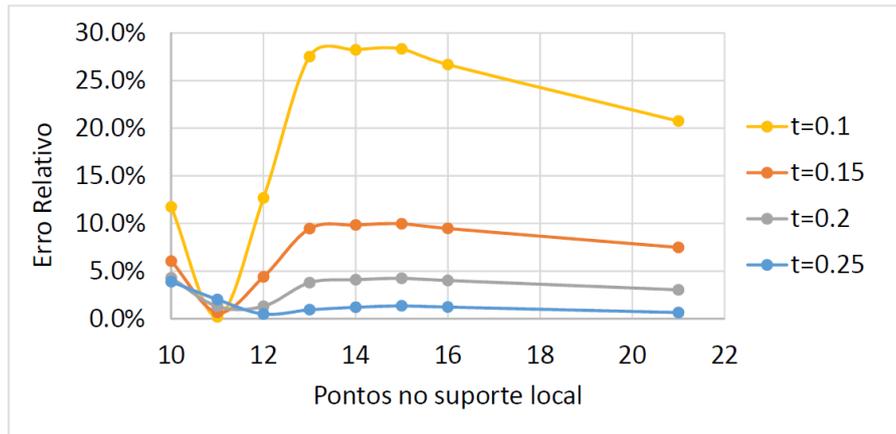


Figura 5.23: Efeito de *shear locking* em função da quantidade de pontos do suporte local - aproximação quadrática

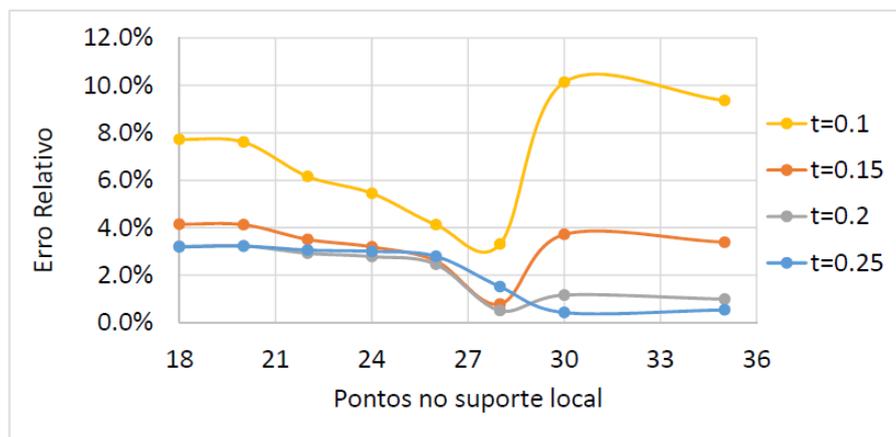


Figura 5.24: Efeito de *shear locking* em função da quantidade de pontos do suporte local - aproximação cúbica

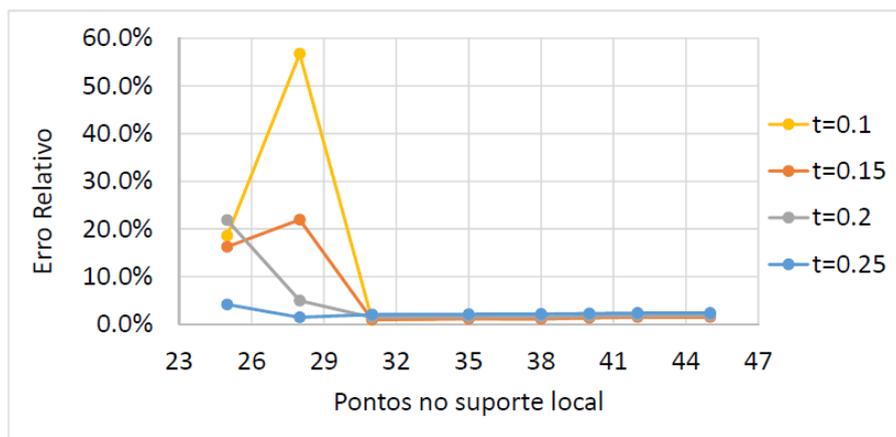


Figura 5.25: Efeito de *shear locking* em função da quantidade de pontos do suporte local - aproximação quártica

Por mais que o efeito de *shear locking* promova um aumento do erro relativo à

medida que a espessura da placa diminua, é possível observar que a quantidade de pontos utilizados na obtenção das funções de aproximação pode ser otimizada em função da ordem da base monomial adotada.

Por fim, o mesmo exemplo foi analisado considerando-se o apoio do tipo *hard* ( $w = 0, M_n = 0, \phi_s = 0$ ), sendo que não foram constatadas diferenças significativas nos deslocamentos obtidos ou no comportamento do efeito de *shear locking*. Os deslocamentos ( $\phi_1, \phi_2$  e  $w$ ) em toda a placa podem ser encontrados no Apêndice A, com a consideração de apoio *soft* e *hard*.

### 5.3 Placa em Balanço

A placa apresentada na Figura 5.26 está submetida à um carregamento uniformemente distribuído de  $g = -0.64 \frac{KN}{m^2}$  e é composta de material com módulo de elasticidade  $E = 2 \times 10^6 \frac{KN}{m^2}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . A espessura da placa é de  $t = 1m$ , ou seja, 25% do menor vão.

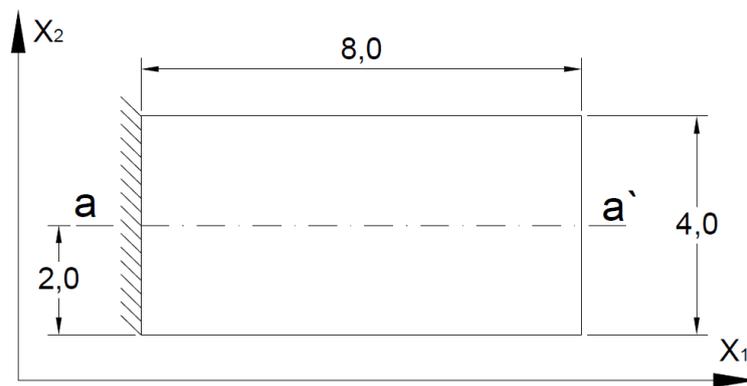


Figura 5.26: Placa em balanço - Dimensões e eixo de análise

Nuvens de 25, 81, 289 e 1089 pontos distribuídos de forma homogênea são utilizadas para análise. Diferentemente dos exemplos já estudados, nesta análise tem-se apenas um eixo de simetria e devido à geometria do problema, o espaçamento entre os pontos na direção  $X_1$  possui o dobro do valor do espaçamento na direção  $X_2$ . Nesta análise, as funções de aproximação são obtidas utilizando-se função de base radial com termos polinomiais.

Os deslocamentos no eixo  $a - a'$ , obtidos através da integração proposta com a nuvem de 1089 pontos, são comparados com os deslocamentos obtidos a partir do MEF na Figura 5.27. Pontos mais distantes do engaste apresentaram maior erro, sendo que na borda oposta ao engaste o erro foi de aproximadamente 3%.

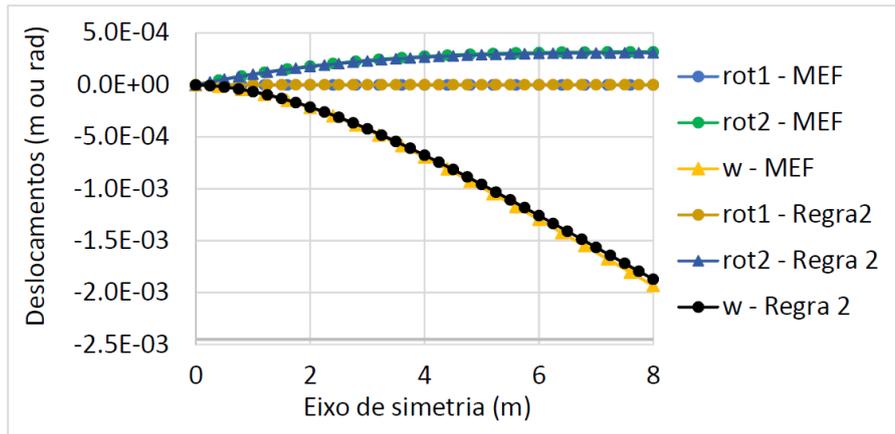


Figura 5.27: Deslocamentos no eixo  $a - a'$

Na Figura 5.28 é apresentado o estudo de convergência do deslocamento transversal de um ponto situado na borda oposta ao engaste, tanto para o processo de integração tradicional quanto para o processo de integração proposto. Nas nuvens com 25 e 81 pontos, necessitou-se utilizar uma quantidade maior de pontos para obtenção das funções de aproximação devido à ocorrência frequente de matrizes singulares em ambos os processos de integração. A quantidade de pontos utilizada em cada análise foi determinada com o mesmo critério utilizado no exemplo 5.1 e é apresentada na tabela 5.3.

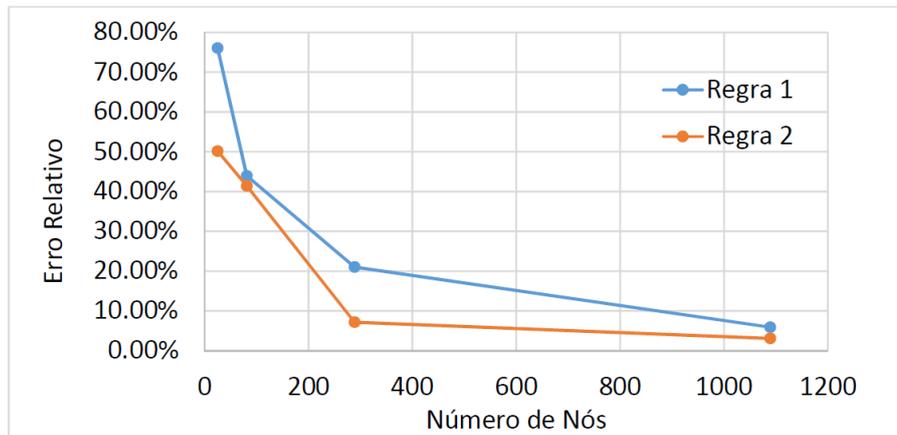


Figura 5.28: Convergência e comparação entre os modelos de integração - Deslocamento transversal máximo da placa em balanço

Tabela 5.3: Número de nós utilizados na obtenção da função de aproximação - placa em balanço

|      | Integração tradicional | Integração proposta |
|------|------------------------|---------------------|
| Nós  | NDG                    | NDL                 |
| 25   | 14                     | 13                  |
| 81   | 14                     | 9                   |
| 289  | 17                     | 20                  |
| 1089 | 17                     | 11                  |

O custo computacional do MLPG em função do modelo de integração utilizado é apresentado na Figura 5.29. A princípio, a diferença entre o processo de integração tradicional e o processo de integração proposto parece pequena, tendo em vista a grande quantidade de pontos utilizada. Cabe destacar que o tempo de processamento é medido desde a leitura da entrada de dados até a gravação dos resultados no arquivo de saída, ou seja, o tempo gasto na solução do sistema de equações também é computado. Neste trabalho, a solução do sistema de equação é feita através do método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial, que se demonstrou extremamente oneroso para a nuvem mais densa. Caso o tempo de solução do sistema de equações não fosse computado, na nuvem com 1089 pontos, o tempo da integração proposta cairia para aproximadamente 2 segundos e o tempo da integração tradicional cairia para aproximadamente 42 segundos, ou seja, o custo computacional da integração proposta seria aproximadamente 5% do custo da integração tradicional.

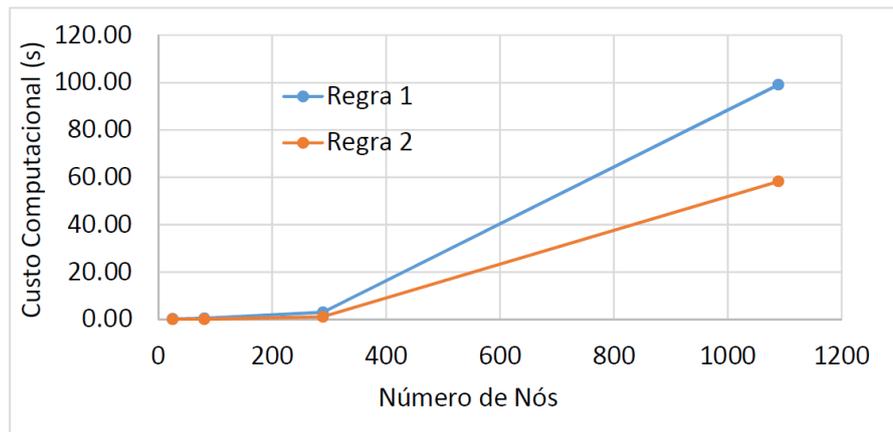


Figura 5.29: Custo computacional - placa balanço

Por mais que a utilização de uma base monomial de ordem superior elimine o efeito de *shear locking*, conforme apresentado na Figura 5.30, a determinação da quantidade de pontos para obtenção das funções de aproximação torna-se um problema. No caso da base linear, não foi possível determinar um suporte local que

permitisse a obtenção de resultados estáveis. Para a base quadrática foram utilizados 20 pontos no subdomínio local do ponto de interesse e o efeito de *shear locking* manteve uma relação estável com os resultados obtidos. Já para as bases cúbica, quártica e quántica, foram utilizados respectivamente 30, 45 e 75 pontos no subdomínio local do ponto de interesse, sendo que, quando a relação  $\frac{t}{L}$  atinge determinado limite, o efeito de travamento por força cisalhante promove instabilidade nos resultados.

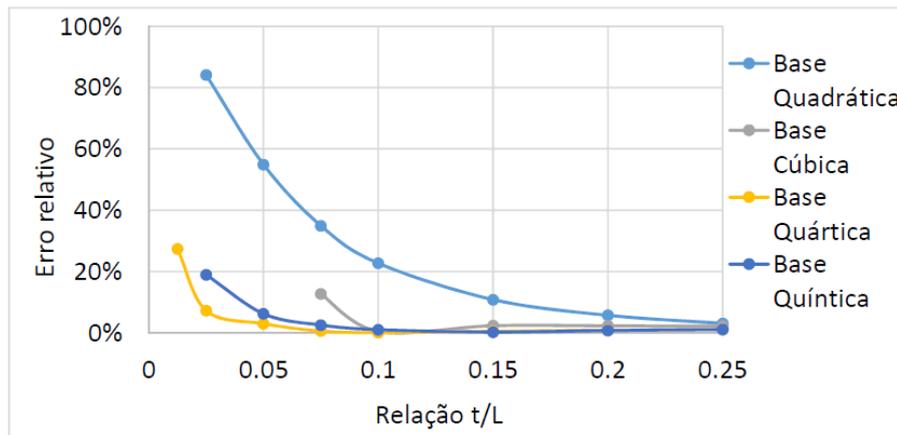


Figura 5.30: Efeito de *shear locking* - placa em balanço

Por fim, nas Figuras 5.31, 5.32 e 5.33 são apresentados os deslocamentos obtidos com a integração proposta em toda a placa por meio de um diagrama de escala de cores.



Figura 5.31: Rotação na direção  $X_1$  - Placa em balanço

Na Figura 5.33 pode-se notar a existência de erros de arredondamento de  $2.1e^{-6}$  na solução do problema. Este erro é representativo quando se considera as rotações na direção  $X_1$ , pois estas possuem valores máximos absolutos de até  $3.3e^{-5}$ . Com isto, a distribuição anti-simétrica das rotações na direção  $X_1$  é afetada consideravelmente.



Figura 5.32: Rotação na direção  $X_2$  - Placa em balanço

O erro de arredondamento também prejudica a distribuição simétrica das rotações na direção  $X_2$ , conforme pode ser observado na região representada pela cor azul escuro da Figura 5.32. Devido a magnitude das rotações na direção  $X_2$ , o erro de arredondamento é percebido somente nas regiões em que tal deslocamento está próximo de zero.

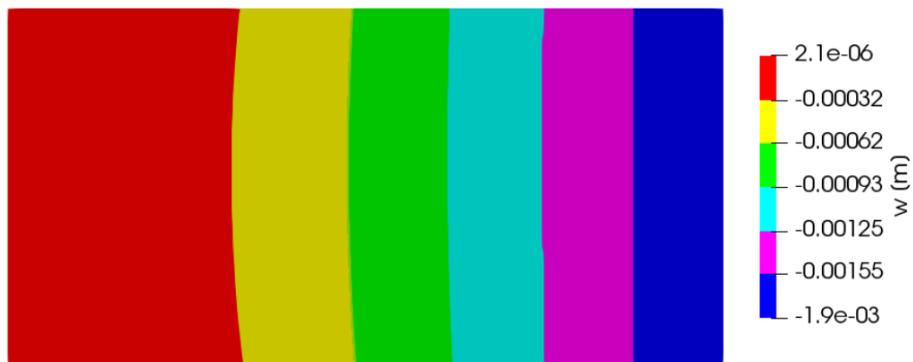


Figura 5.33: Deslocamento transversal - Placa em balanço

Quanto aos deslocamentos transversais (Figura 5.33), o enrijecimento causado pelo engaste gera uma região em que os deslocamentos aumentam lentamente e assim o erro de arredondamento não é percebido na representação por cores.

## 5.4 Placa Esconsa

Neste exemplo, o desempenho do método é analisado em uma placa de formato esconso com a consideração de engaste em todo o contorno. Os dados da placa em análise são apresentados na Figura 5.34. As funções de aproximação são obtidas com o uso de função de base radial com termos polinomiais.

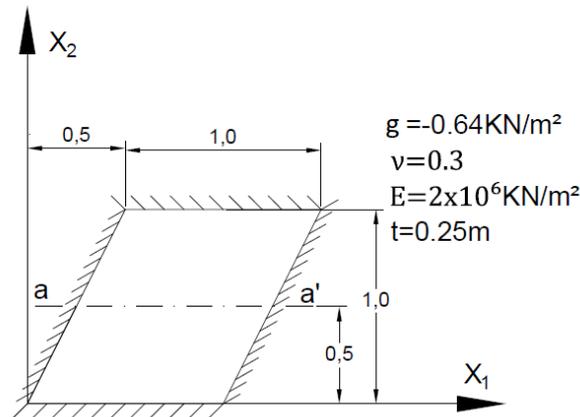


Figura 5.34: Placa esconsa

Apesar deste exemplo ser muito semelhante ao exemplo 5.1, o formato esconso está propenso a produzir funções de aproximação deturpadas em pontos próximos aos cantos com ângulo agudo devido a distribuição dos pontos no suporte local do ponto de interesse.

Na Figura 5.35 os resultados obtidos com a integração proposta são comparados com os resultados obtidos com o programa computacional ANSYS. Para aplicação do MLPG foi considerada a nuvem de 289 nós, base monomial de segunda ordem e um total de 11 nós na obtenção das funções de aproximação do ponto de interesse. Conforme pode ser observado, não há diferença significativa entre os resultados obtidos com o MEF e o MLPG com aplicação do processo de integração proposto.

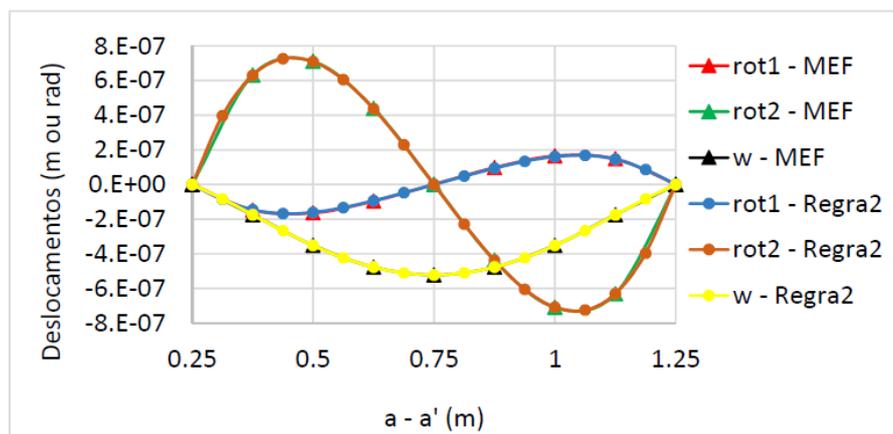


Figura 5.35: Deslocamentos no eixo  $a - a'$  - Placa esconsa

Ainda com a utilização da base monomial de segunda ordem, a placa em estudo também foi analisada a partir de representações contendo 25 e 81 pontos, distribuídos de forma homogênea sobre o contorno e domínio do problema. O comparativo entre a integração tradicional e a integração proposta é apresentado na Figura 5.36.

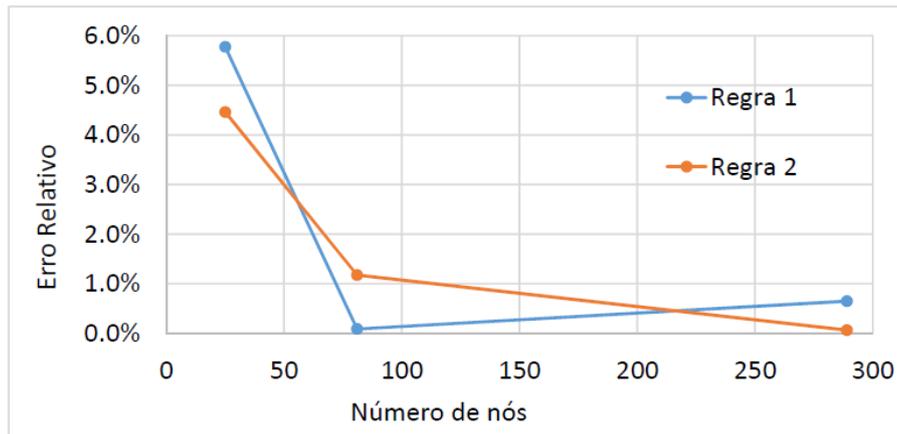


Figura 5.36: Erro relativo no ponto central da placa - Comparação entre modelos de integração

Se comparado com o exemplo 5.1, a forma esconsa da placa exigiu a utilização de subdomínios com uma quantidade muito maior de pontos para a obtenção de bons resultados. A quantidade de pontos utilizados para a construção dos gráficos na Figura 5.36 é apresentada na tabela 5.4 e a comparação entre o custo computacional da integração tradicional e da integração proposta é apresentada na Figura 5.37.

Tabela 5.4: Número de nós utilizados na obtenção da função de aproximação - placa esconsa

|     | Integração tradicional | Integração proposta |
|-----|------------------------|---------------------|
| Nós | NDG                    | NDL                 |
| 25  | 17                     | 18                  |
| 81  | 17                     | 13                  |
| 289 | 20                     | 11                  |

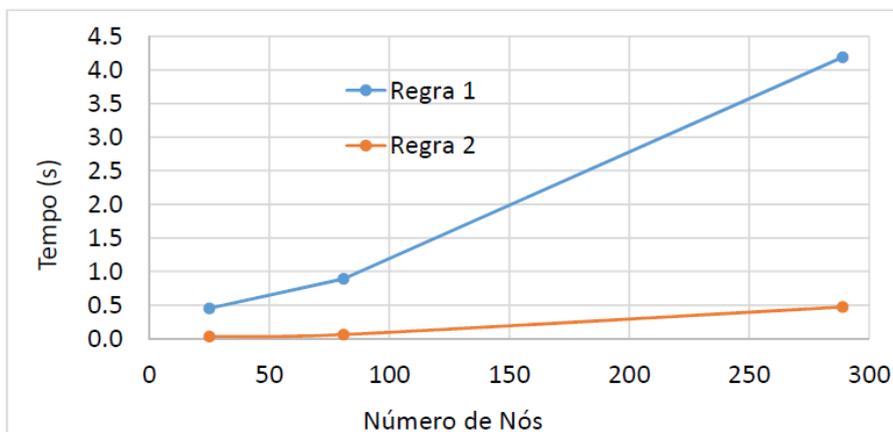


Figura 5.37: Custo computacional - placa esconsa

O comportamento do deslocamento transversal no ponto central da placa é analisado minuciosamente em função da quantidade de pontos no subdomínio local do ponto de interesse. Neste estudo, tal deslocamento é analisado para 97 diferentes composições do subdomínio local, considerando-se bases monomiais de até quinta ordem. Para possibilitar uma melhor visualização do comportamento dos resultados, apresenta-se um gráfico para cada ordem monomial. Na Figura 5.38 tem-se os resultados obtidos com a utilização de uma base monomial linear.

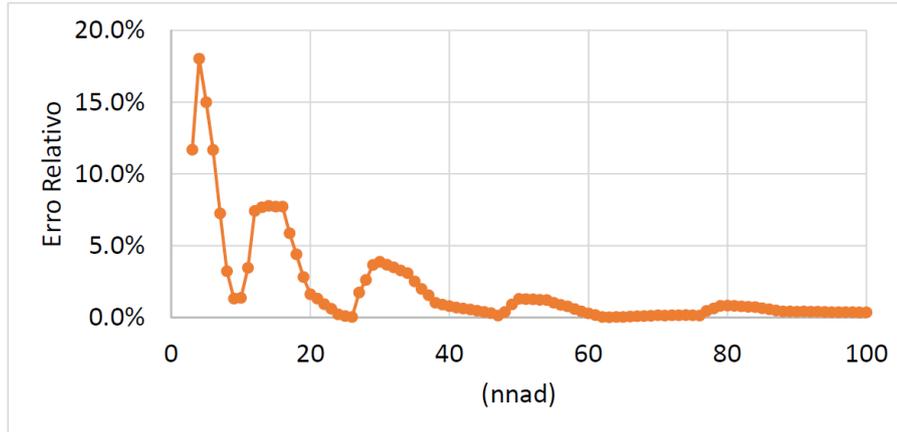


Figura 5.38: Influência da quantidade de pontos utilizados no subdomínio do ponto de interesse - Aproximação linear

sendo que:

$$nnad = NTNS - NTBM \quad (5.1)$$

onde  $NTNS$  é o número total de nós que compõem o subdomínio do ponto de interesse e  $NTBM$  é o número de termos da base monomial utilizada, que para o caso da base monomial linear é igual a 3.

A Figura 5.38 sugere que a utilização de um subdomínio local relativamente pequeno não é adequado para funções de aproximação obtidas com a base monomial linear. Quando  $nnad$  é menor que 38 pode se observar grande variação nos resultados e alguns intervalos com certa estabilidade. Já para  $nnad$  maior que 38 os resultados se tornam bastante estáveis. Na Figura 5.39 apresenta-se o comportamento da solução com a utilização de uma base monomial de segunda ordem.

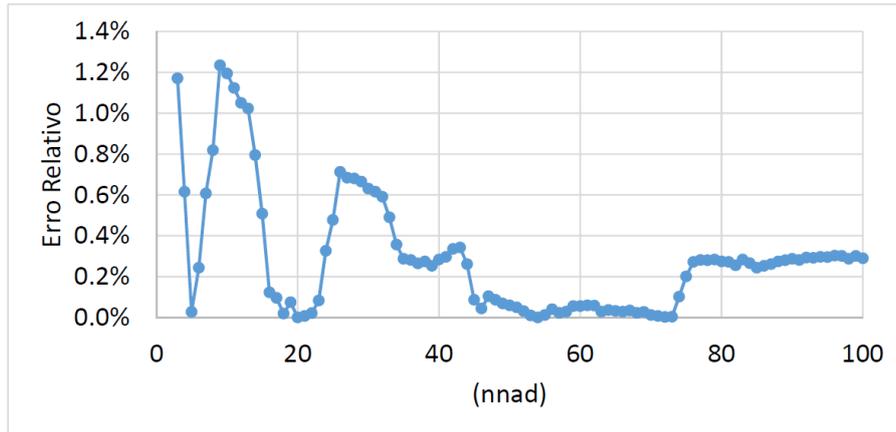


Figura 5.39: Influência da quantidade de pontos utilizados no subdomínio do ponto de interesse - Aproximação quadrática

Ainda que a Figura 5.39 apresente uma curva com muitas oscilações, o erro relativo já se encontra muito próximo de zero, indicando apenas pequenas variações no deslocamento.

Na Figura 5.40 tem-se a análise com a utilização de uma base monomial de terceira ordem. Pode-se concluir que a utilização de bases monomiais de ordens superiores tendem a produzir resultados mais precisos e mais estáveis. Os resultados para as bases monomiais de quarta e quinta ordens estão apresentados nas Figuras 5.41 e 5.42, respectivamente.

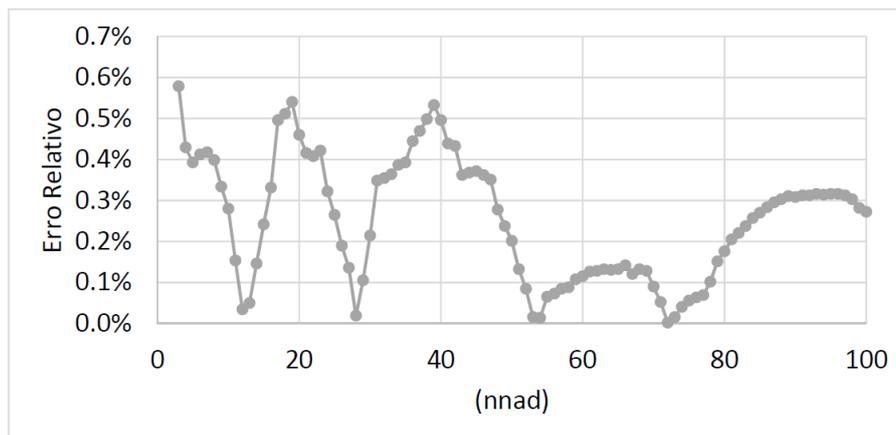


Figura 5.40: Influência da quantidade de pontos utilizados no subdomínio do ponto de interesse - Aproximação cúbica

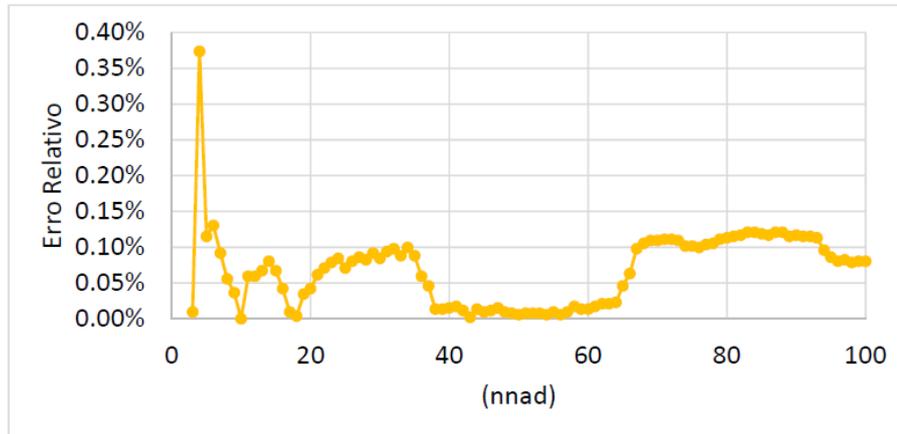


Figura 5.41: Influência da quantidade de pontos utilizados no subdomínio do ponto de interesse - Aproximação quártica

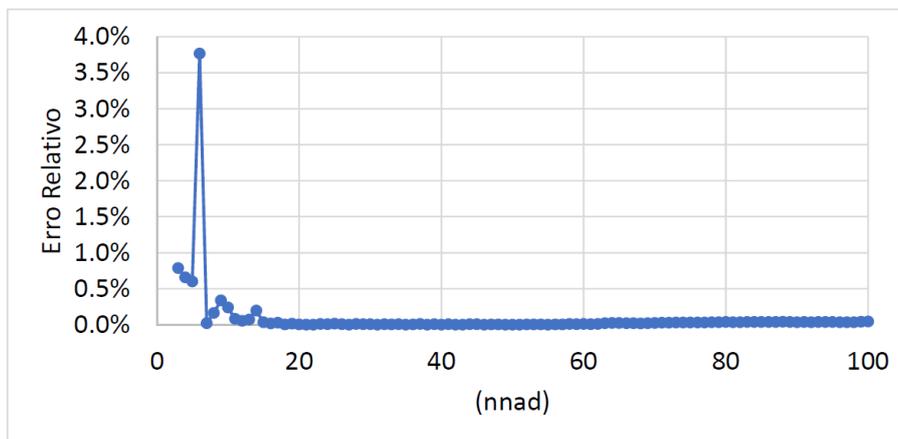


Figura 5.42: Influência da quantidade de pontos utilizados no subdomínio do ponto de interesse - Aproximação quártica

Todas as 97 composições do subdomínio local do ponto de interesse são utilizadas para avaliar o comportamento do efeito de *shear locking* para o deslocamento transversal do ponto central da placa, com a utilização de uma base monomial de segunda ordem. Os resultados são apresentados na Figura 5.43.

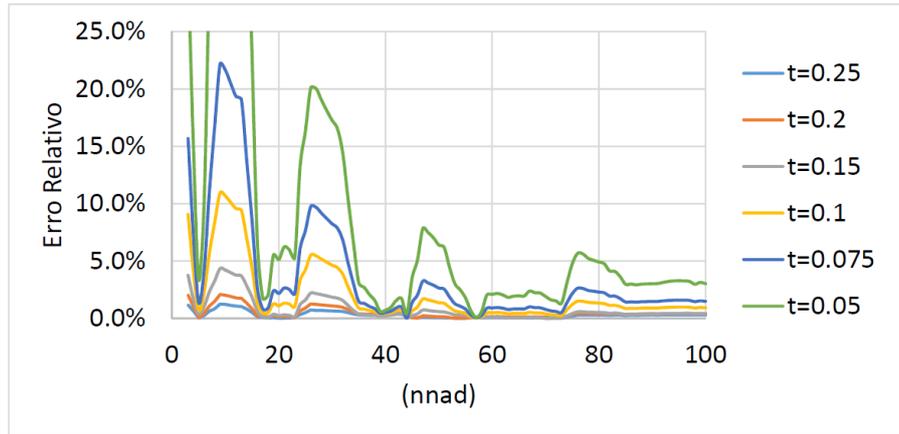


Figura 5.43: Efeito de *shear locking* com aproximação quadrática - Deslocamento transversal no ponto central da placa

Como esperado, na Figura 5.43 pode-se observar que o efeito de *shear locking* é intensificado a medida que a relação  $\frac{t}{L}$  diminui. Contudo, os subdomínios locais que produziram resultados com baixo erro relativo para as espessuras maiores, mantiveram a precisão do resultado até para as placas consideradas muito finas, indicando que a formação do subdomínio local pode suprimir completamente o efeito de *shear locking* independentemente da base monomial utilizada.

A partir do critério definido no exemplo 5.1, no qual a quantidade de pontos utilizados para obtenção das funções de aproximação é definida através da estabilidade dos resultados obtidos com o incremento do subdomínio local do ponto de interesse, é apresentado na Figura 5.44 o erro relativo em função da relação  $\frac{t}{L}$  para bases monomiais de diferentes ordens.

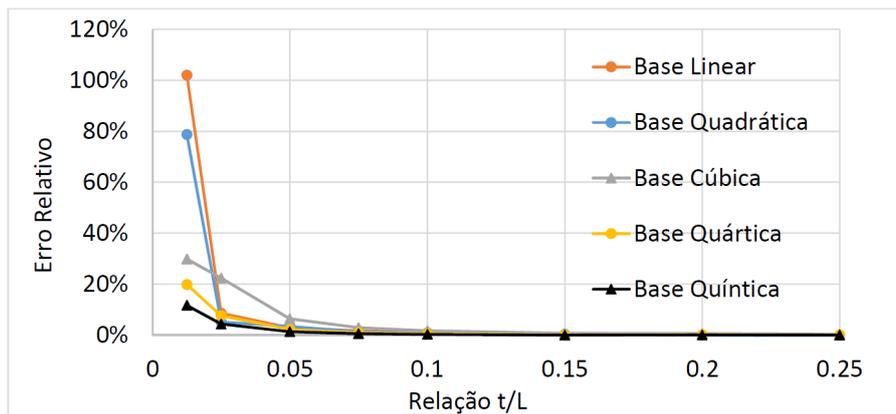


Figura 5.44: Efeito de *shear locking* - Placa esbelta

A integração proposta apresentou bons resultados para uma relação  $\frac{t}{L}$  maior que 0.05, independentemente da base monomial utilizada. A consideração de uma base monomial de sexta ordem permitiu a obtenção de resultados precisos para  $\frac{t}{L} = 0.0125$ , conforme pode ser visto na Figura 5.45.

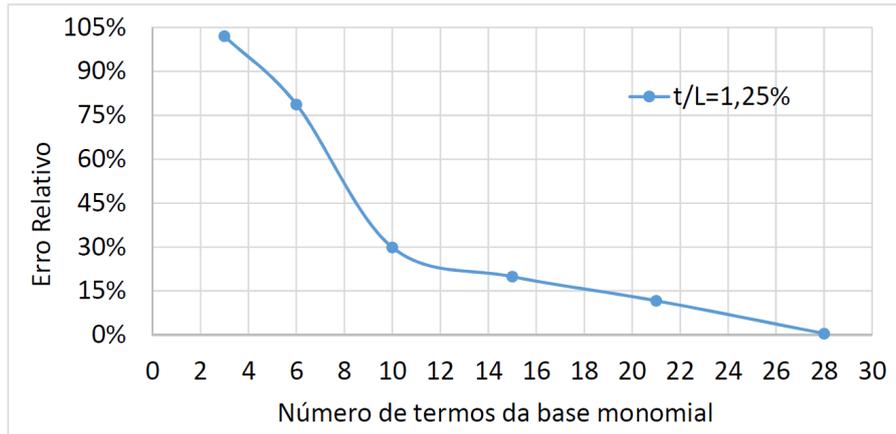


Figura 5.45: Influência do número de termos da base monomial no efeito de *shear locking*- Placa esconsa

Por fim, a rotação na direção  $X_1$ ,  $X_2$  e o deslocamento transversal obtidos com a integração proposta, em toda a placa, são apresentados nas Figuras 5.46, 5.47 e 5.48, respectivamente.

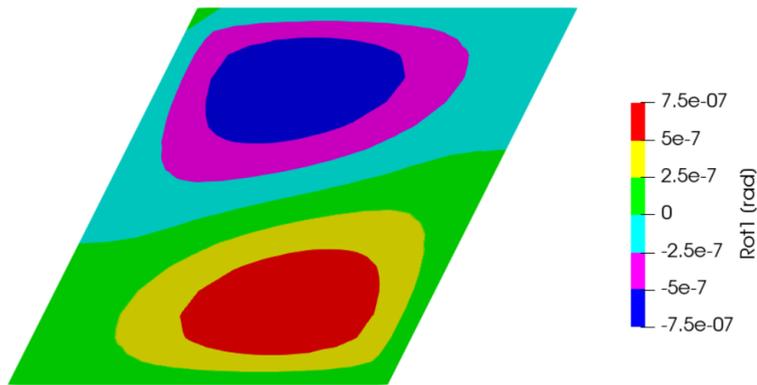


Figura 5.46: Rotação na direção  $X_1$  - placa esconsa



Figura 5.47: Rotação na direção  $X_2$  - placa esconsa

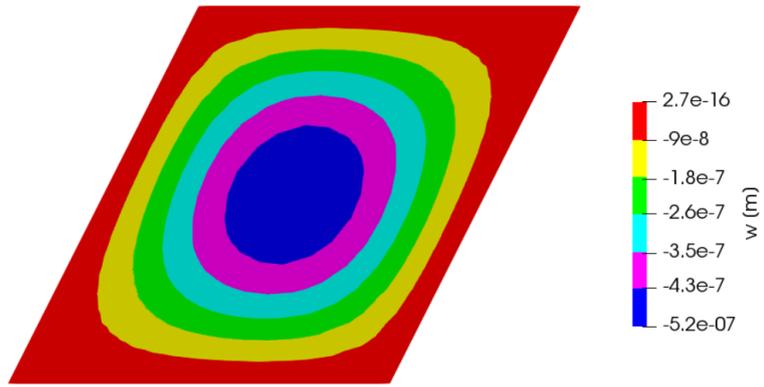


Figura 5.48: Deslocamento transversal da placa esconsa

# Capítulo 6

## Considerações Finais

### 6.1 Conclusões

A formulação do MLPG para o problema de flexão de placas espessas considerando as hipóteses de Reissner é bastante semelhante a formulação que utiliza as hipóteses de Mindlin, e desta forma não houveram dificuldades no seu desenvolvimento. Por outro lado, muitas adversidades surgiram durante a implementação computacional, principalmente com relação a delimitação dos domínios de integração e também para consideração das condições de contorno do problema, que são discutidas a seguir.

A implementação realizada neste trabalho já permite a consideração de subdomínios de integração com raio de qualquer comprimento. Contudo, o algoritmo implementado não permite que as condições de contorno variem em trechos do contorno contidos em um subdomínio de integração qualquer, limitando parcialmente a utilização de um raio qualquer para o subdomínio de integração.

É interessante destacar que, as formulações tradicionais do MLPG consideram subdomínios de integração com geometria em forma de retângulos, facilitando muito a implementação computacional, inclusive para consideração das condições de contorno. Quando a forma circular é considerada, para se evitar problemas com as condições de contorno, o raio do subdomínio de integração é limitado de forma a não permitir que o contorno do problema esteja contido nos subdomínio de integração dos pontos internos.

As análises iniciais do MLPG com a integração proposta se deram com a utilização de um único subdomínio, ou seja, o subdomínio utilizado para obtenção das funções de aproximação era utilizado como subdomínio de integração. Ainda que, em algumas situações, esta abordagem tenha produzido resultados aceitáveis, a ocorrência de instabilidades foi frequente. Verificações permitiram constatar que o desempenho da função de aproximação é variável dentro do domínio de validade de tal função, sendo que, quanto mais próximo do limite do domínio de validade, menor

é a eficiência da função de aproximação obtida. A solução que produziu melhores resultados foi a limitação do uso das funções de aproximação nas regiões onde seu desempenho foi mais efetivo, reduzindo o subdomínio de integração e aumentando a quantidade de pontos utilizados na obtenção das funções de aproximação.

A formulação obtida com a aplicação do MLPG apresenta muitos parâmetros abertos que afetam diretamente o comportamento dos resultados, como por exemplo o método utilizado para obtenção das funções de aproximação, a base monomial utilizada na obtenção das funções de aproximação, a função de ponderação, os parâmetros de forma da função de ponderação, geometria do subdomínio de integração, dimensão do subdomínio de integração, quantidade de pontos utilizados para obtenção das funções de aproximação e outros. Quanto maior a quantidade de parâmetros abertos, maior se torna o esforço e tempo despendido para analisar o comportamento da formulação apresentada e desta forma mais estudos visando a eficiência do método precisam ser realizados para se verificar a interação entre os diversos parâmetros que podem ser escolhidos livremente.

A utilização do MLS não se mostrou uma alternativa viável e mais estudos se fazem necessários para uma conclusão definitiva. Por mais que a implementação computacional tenha considerado uma verificação do número de condicionamento para identificar a produção de matrizes singulares, não foi possível o ajuste de um número de condicionamento que permitisse o uso do MLS. Quando o ajuste do número de condicionamento foi pouco rigoroso, matrizes singulares inviabilizavam a aplicação do método e, caso contrário, para um ajuste rigoroso no número de condicionamento das matrizes, se tornava mandatório a utilização de um número demasiado de pontos para obtenção das funções de aproximação.

Uma questão muito relevante e não encontrada na literatura foi que a posição da estrutura no sistema cartesiano pode acarretar na produção de matrizes singulares. Em alguns exemplos, quando uma ou mais arestas da placa eram coincidentes com os eixos cartesianos, a ocorrência de matrizes singulares era recorrente. Tendo em vista que as funções de aproximação são dependentes das coordenadas dos pontos, bem como a base monomial, pontos sobre os eixos cartesianos estão inclinados a produzirem diversos valores nulos nas matrizes utilizadas para obtenção das funções de aproximação. A simples translação do problema para uma nova posição no sistema cartesiano solucionou o problema mencionado.

O sistema global formado pela aplicação do MLPG se demonstrou bastante estável, sendo que, a imposição das condições de contorno de Dirichlet pôde ser efetuada por duas maneiras distintas conduzindo aos mesmos resultados. Através do método da interpolação direta o sistema global teve algumas de suas equações substituídas sem a constatação de nenhum inconveniente. No caso do método das penalidades, é costumeiro um parâmetro de penalidade muito alto provocar a degradação dos

resultados, sendo que, na integração proposta diversos parâmetros de penalidade foram testados e os resultados se mantiveram estáveis. Ao se elevar o parâmetro de penalidade, a matriz de rigidez global teve seu condicionamento piorado. Contudo, o parâmetro de penalidade também afeta o vetor de forças, de tal forma que nenhuma perda tenha sido produzida.

Naturalmente a simplificação apresentada no processo de integração proposto possui menor precisão na avaliação das variáveis no ponto de quadratura, se comparado ao processo de integração tradicional. Por mais que pareça contraditório, os resultados demonstraram que a integração proposta pode ser mais precisa que a integração tradicional quando comparados os resultados finais. Em tempo, cabe mencionar que MAZZIA *et al.* [54] compararam diversas regras de integração numérica para o MLPG, sendo que, a regra de integração mais precisa não se consagrou como sendo a mais eficiente. Conforme já mencionado, o MLPG é um método que possui muitos parâmetros para ajuste e por vezes, a integração proposta valoriza mais as características locais do problema através da utilização de subdomínios de influência menores, podendo justificar assim a obtenção de melhores resultados finais. Com relação a eficiência computacional, a integração proposta sempre apresenta menor custo e, a medida que o problema é refinado, a vantagem da integração proposta sobre a integração tradicional amplia exponencialmente.

Durante as análises numéricas percebeu-se que o método utilizado para solução do sistema de equações, a eliminação de Gauss com pivoteamento parcial, era computacionalmente ineficiente. Para agravar o problema, tal método tinha sua eficiência computacional piorada a medida que o problema era refinado. Tendo em vista o MLPG produz uma matriz de rigidez esparsa, uma alternativa pode ser o armazenamento da matriz em um formato comprimido e a solução do sistema através de um processo iterativo com a utilização de um pré-condicionador para acelerar a obtenção da solução.

Com relação ao efeito de *shear locking*, a utilização de bases monomiais de ordens mais elevadas tendem a solucionar o problema de forma satisfatória. Quando as funções de forma foram obtidas com o MLS, as dificuldades advindas de problemas de matrizes singulares, não permitiram que o efeito de *shear locking* fosse estudado detalhadamente. Já para o caso de funções de forma obtidas com o RPIM, há fortes indicativos de que, a correta escolha da formação do subdomínio para obtenção das funções de aproximação, pode suprimir completamente o efeito de *shear locking* até para o caso em que uma base monomial de primeira ordem é utilizada.

Por fim, durante as análises do efeito de *shear locking*, pôde-se concluir que, quanto mais pontos são utilizados na obtenção das funções de forma, mais estável se torna a solução do problema. O contra ponto é que, o custo computacional da integral proposta aumenta quando mais pontos são utilizados para obtenção das

funções de aproximação.

A implementação da técnica de nós geométricos descontínuos, apesar de simples, se mostrou uma técnica bastante eficiente para utilização no MLPG. A utilização de nós duplos, permitiu representar com bastante precisão as descontinuidades do contorno, conduzindo a resultados acertados sem afetar o custo computacional do método.

Os resultados obtidos neste trabalho mostram que o MLPG é um método robusto para a análise de placas espessas e finas, permitindo a aplicação de um processo de integração menos rigoroso que o tradicionalmente utilizado, propiciando redução do custo computacional e mantendo a qualidade dos resultados. É importante ressaltar que o processo de integração proposto não se restringe a formulação para análise de flexão de placas de Reissner, podendo ser utilizado em qualquer desenvolvimento do MLPG.

## 6.2 Sugestões para desenvolvimentos futuros

A inclusão da consideração de não linearidade física é uma proposta interessante para a continuação deste trabalho. Tão interessante quanto, é estender a formulação para consideração de trincas no domínio da placa.

De maior simplicidade, mas não menos importante, é a utilização de um sistema mais eficiente de armazenamento da matriz de rigidez global. Conjuntamente, sugere-se a utilização de um sistema eficiente para a solução do sistema final de equações, com a utilização de pré-condicionador para acelerar a obtenção da resposta final do problema.

A análise das quasi-singularidades das matrizes é um estudo bastante oportuno, pois a aplicação de diversas técnicas de regularização e de solução do sistema podem ser avaliadas.

A consideração de materiais anisotrópicos ou heterogêneos é outra contribuição de grande monta para a formulação apresentada.

Uma sugestão interessante, seria um estudo especializado para otimizar a distribuição de pontos para aplicação do MLPG ou até mesmo um estudo sobre a distribuição aleatória de pontos.

A formulação apresentada neste trabalho permite que a matriz de rigidez seja montada com a utilização de processamento em paralelo. Desta forma, a implementação de um algoritmo que permita a utilização de vários núcleos computacionais é uma proposta agradável de se trabalhar.

Por fim, uma sugestão bastante válida é o desenvolvimento de uma plataforma com ambiente gráfico e amigável, objetivando incentivar novos pesquisadores a trabalhar com o MLPG ou ainda, objetivando apresentar esta ferramenta para cursos

de graduação.

# Referências Bibliográficas

- [1] GINGOLD, R. A., MONAGHAN, J. J. “Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 181, n. 3, pp. 375–389, dez. 1977.
- [2] LUCY, L. B. “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis”, *The astronomical journal*, v. 82, pp. 1013–1024, 1977.
- [3] NAYROLES, B., TOUZOT, G., VILLON, P. “Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements”, *Computational mechanics*, v. 10, n. 5, pp. 307–318, 1992.
- [4] BELYTSCHKO, T., LU, Y. Y., GU, L. “Element-free Galerkin methods”, *International journal for numerical methods in engineering*, v. 37, n. 2, pp. 229–256, 1994.
- [5] ZHU, T., ZHANG, J.-D., ATLURI, S. “A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach”, *Computational mechanics*, v. 21, n. 3, pp. 223–235, 1998.
- [6] ATLURI, S. N., ZHU, T. “A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics”, *Computational mechanics*, v. 22, n. 2, pp. 117–127, 1998.
- [7] SHEN, S. N. A. S. “The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: a simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods”, *Comput Model Eng Sci*, v. 3, pp. 11–51, 2002.
- [8] LEITÃO, V. “A meshless method for Kirchhoff plate bending problems”, *International journal for numerical methods in engineering*, v. 52, n. 10, pp. 1107–1130, 2001.
- [9] KIRCHOFF, G. “Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe”, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelle’s Journal)*, v. 40, pp. 51–88, 1850.

- [10] LONG, S., ZHANG, Q. “Analysis of thin plates by the local boundary integral equation (LBIE) method”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 26, n. 8, pp. 707–718, 2002.
- [11] SORIC, J., LI, Q., JARAK, T., et al. “Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) formulation for analysis of thick plates”, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, v. 6, pp. 349–358, 2004.
- [12] YUAN-BO, X., SHU-YAO, L. “Local Petrov-Galerkin method for a thin plate”, *Applied Mathematics and Mechanics*, v. 25, n. 2, pp. 210–218, 2004.
- [13] SLADEK, J., SLADEK, V., ZHANG, C., et al. “Analysis of orthotropic thick plates by meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method”, *International journal for numerical methods in engineering*, v. 67, n. 13, pp. 1830–1850, 2006.
- [14] SLADEK, J., SLADEK, V., ZHANG, C. “Local integral equation method for viscoelastic Reissner–Mindlin plates”, *Computational Mechanics*, v. 41, n. 6, pp. 759–768, 2008.
- [15] XIA, P., LONG, S., WEI, K. “An analysis for the elasto-plastic problem of the moderately thick plate using the meshless local Petrov–Galerkin method”, *Engineering analysis with boundary elements*, v. 35, n. 7, pp. 908–914, 2011.
- [16] XIA, P., WEI, K. X. “Application of the Meshless Local Petrov-Galerkin Method in the Elasto-plastic Fracture Problem of Moderately Thick Plate”. In: *Applied Mechanics and Materials*, v. 155, pp. 485–490. Trans Tech Publ, 2012.
- [17] MIERS, L. *Formulações Não-Convencionais de Métodos do Tipo Meshless Baseados na Equação Integral de Contorno*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2007.
- [18] SILVA, K. *Uma aplicação da estratégia OMLS para elastoplasticidade dinâmica com o método dos elementos de contorno*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2010.
- [19] DE ARAÚJO COSTA, E. G. *APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS USANDO FUNÇÕES DE GREEN PARA PROBLEMAS ACÚSTICOS*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2013.

- [20] FONTES JR, E., SANTIAGO, J., TELLES, J. “On a regularized method of fundamental solutions coupled with the numerical Green’s function procedure to solve embedded crack problems”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 37, n. 1, pp. 1–7, 2013.
- [21] SILVA, D. J. “Paralelização de Algoritmos e Estruturas de Dados utilizando GPU(Graphics Processing Unit)”, 2012.
- [22] FONSECA, A. R. *Algoritmos eficientes em métodos sem malha*. Tese de Doutorado, Tese de D. Sc., Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte Minas Gerais Brasil, 2011.
- [23] MINDLIN, R. D. “Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates”, *J. appl. Mech.*, v. 18, pp. 31, 1951.
- [24] VON KÁRMÁN, T. “Untersuchungen über knickfestigkeit”. In: *Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens insbesondere aus den Laboratorien der technischen Hochschulen*, Springer, pp. 1–44, 1910.
- [25] REISSNER, E. “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *J. appl. Mech.*, pp. A69–A77, 1945.
- [26] REISSNER, E. “On bending of elastic plates”, *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 5, n. 1, pp. 55–68, 1947.
- [27] WANG, C. M., LIM, G., REDDY, J., et al. “Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories”, *Engineering structures*, v. 23, n. 7, pp. 838–849, 2001.
- [28] TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of plates and shells*. Engineering societies monographs. McGraw-Hill, 1959. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=rTQFAAAAMAAJ>>.
- [29] REISSNER, E. “On the theory of bending of elastic plates”, *Studies in Applied Mathematics*, v. 23, n. 1-4, pp. 184–191, 1944.
- [30] VILLAÇA, S. F., GARCIA, L. F. T. “Introdução à teoria da elasticidade”, *COPPE/UFRJ*,, 1998.
- [31] BATHE, K.-J. *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- [32] WASHIZU, K. “Variational Methods in Elasticity and Plasticity,(1968)”, *Google Scholar*.

- [33] HE, J. “Equivalent theorem of Hellinger-Reissner and Hu-Washizu variational principles”, *Journal of Shanghai University (English Edition)*, v. 1, n. 1, pp. 36–41, 1997.
- [34] KONDA, D. H. *Análise de pavimentos de edifícios através de uma formulação do método dos elementos de contorno baseada nas hipóteses de Reissner*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Ilha Solteira, SP, Brasil, 2008.
- [35] RIBEIRO, G. *Sobre a Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas usando as hipóteses de Reissner*. Tese de Doutorado, São Carlos. 195p. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1992.
- [36] LI, H., MULAY, S. S. *Meshless methods and their numerical properties*. CRC press, 2013.
- [37] BUHMANN, M. D. *Radial basis functions: theory and implementations*, v. 12. Cambridge university press, 2003.
- [38] RIPPA, S. “An algorithm for selecting a good value for the parameter  $c$  in radial basis function interpolation”, *Advances in Computational Mathematics*, v. 11, n. 2-3, pp. 193–210, 1999.
- [39] LIU, G.-R., GU, Y.-T. *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [40] KANSA, E. J. “Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations”, *Computers & mathematics with applications*, v. 19, n. 8-9, pp. 147–161, 1990.
- [41] SHARAN, M., KANSA, E., GUPTA, S. “Application of the multiquadric method for numerical solution of elliptic partial differential equations”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 84, n. 2-3, pp. 275–302, 1997.
- [42] FRANKE, C., SCHABACK, R. “Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 93, n. 1, pp. 73–82, 1998.
- [43] WANG, J., LIU, G. “On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 191, n. 23-24, pp. 2611–2630, 2002.

- [44] WANG, J., LIU, G. “A point interpolation meshless method based on radial basis functions”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 54, n. 11, pp. 1623–1648, 2002.
- [45] MELLO, J. P. F. *Técnica alternativa de integração numérica utilizada em métodos sem malha aplicados em elasticidade bidimensional*. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2018.
- [46] ATLURI, S. N., SHEN, S. “The basis of meshless domain discretization: the meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method”, *Advances in computational mathematics*, v. 23, n. 1-2, pp. 73–93, 2005.
- [47] LIU, G.-R. *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*. CRC press, 2009.
- [48] FONTES JUNIOR, E. F. *Técnicas avançadas em métodos verdadeiramente sem malha com aplicações em problemas de elasticidade e mecânica da fratura via superposição da função de Green Numérica*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2014.
- [49] DUFLOT, M., NGUYEN-DANG, H. “A truly meshless Galerkin method based on a moving least squares quadrature”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 18, n. 6, pp. 441–449, 2002.
- [50] KHOSRAVIFARD, A., HEMATIYAN, M. R. “A new method for meshless integration in 2D and 3D Galerkin meshfree methods”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 34, n. 1, pp. 30–40, 2010.
- [51] CARPINTERI, A., FERRO, G., VENTURA, G. “The partition of unity quadrature in meshless methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 54, n. 7, pp. 987–1006, 2002.
- [52] ROSCA, V. E., LEITÃO, V. M. “Quasi-Monte Carlo mesh-free integration for meshless weak formulations”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 32, n. 6, pp. 471–479, 2008.
- [53] XIA, P., WEI, K. X. “Shear Locking Analysis of Plate Bending by Using Meshless Local Radial Point Interpolation Method”. In: *Applied Mechanics and Materials*, v. 166, pp. 2867–2870. Trans Tech Publ, 2012.
- [54] MAZZIA, A., FERRONATO, M., PINI, G., et al. “A comparison of numerical integration rules for the meshless local Petrov–Galerkin method”, *Numerical Algorithms*, v. 45, n. 1-4, pp. 61–74, 2007.

# Apêndice A

## Placa Quadrada Biapoiada - Apoio *Soft* e *Hard*

Nas figuras A.1, A.2 e A.3 são apresentados lado a lado, os resultados de uma placa quadrada biapoiada, considerando-se apoios do tipo *soft* e *hard*. A proposta de integração apresentada na seção 4.4.3 é utilizada na formulação do MLPG. Os dados utilizados para obtenção dos resultados são: Carregamento uniformemente distribuído:  $g = -0.64 \frac{KN}{m^2}$ ; Comprimento da aresta da placa:  $L = 1m$ ; Espessura da placa:  $t = 0.25m$ ; Nuvem de pontos: 289 pontos distribuídos de forma homogênea sobre o contorno e domínio da placa; Pontos de quadratura:  $8 \times 8$  pontos na avaliação das integrais de domínio e 8 pontos na avaliação das integrais de contorno; Módulo de elasticidade:  $E = 2 \times 10^6 \frac{KN}{m^2}$ ; Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0.3$ .

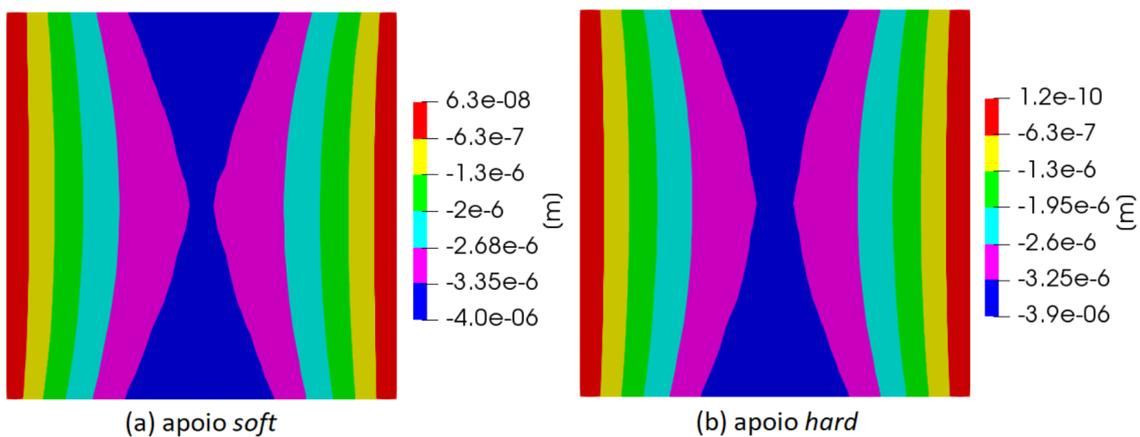


Figura A.1: Deslocamento transversal - (a) placa com apoio *soft* e (b) placa com apoio *hard*

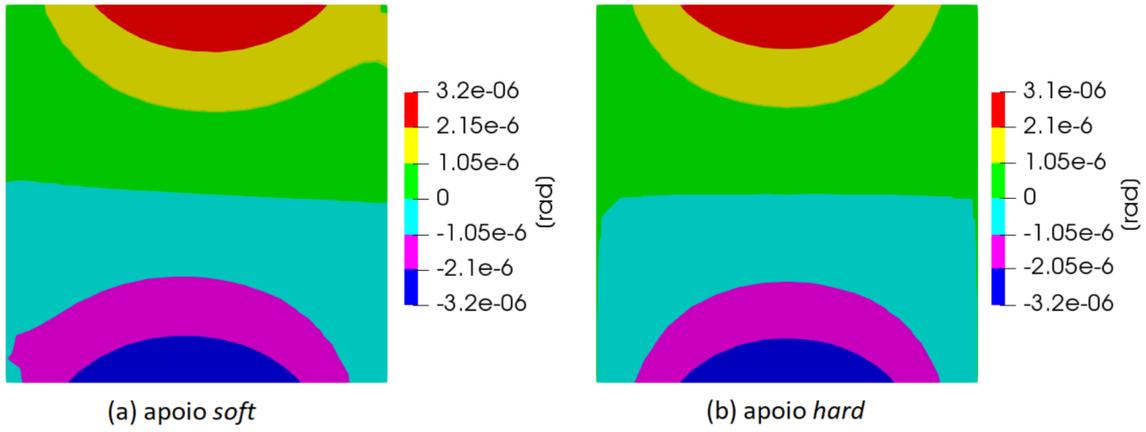


Figura A.2: Rotação na direção  $X_1$  - (a) placa com apoio *soft* e (b) placa com apoio *hard*

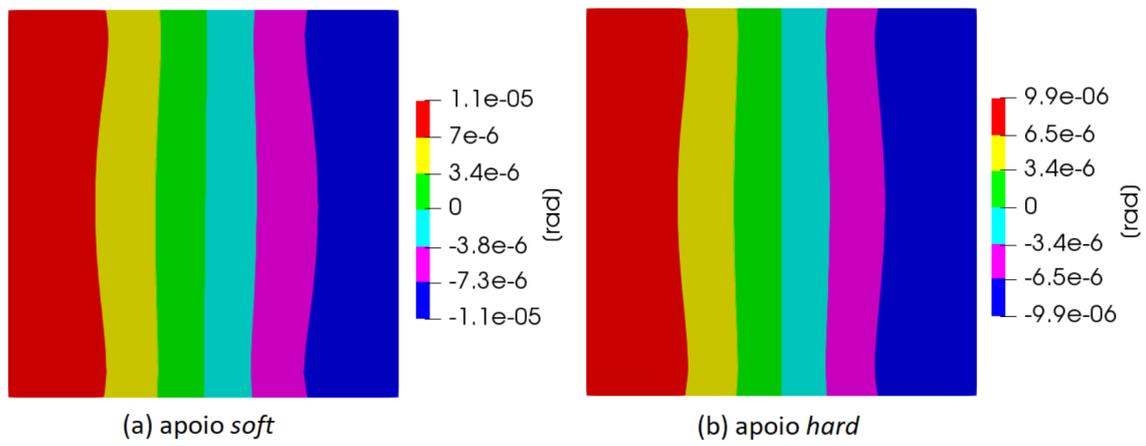


Figura A.3: Rotação na direção  $X_2$  - (a) placa com apoio *soft* e (b) placa com apoio *hard*