



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE ECONOMIA  
BACHARELADO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

Alessandra Gomes Ribeiro Bastos

ASSIMETRIA NA MODELAGEM DE VOLATILIDADE DO S&P500 COM O MODELO  
ARMA-GARCH

Rio de Janeiro

2022

Alessandra Gomes Ribeiro Bastos

ASSIMETRIA NA MODELAGEM DE VOLATILIDADE DO S&P500 COM O MODELO  
ARMA-GARCH

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada  
ao Programa de Graduação em Ciências  
Econômicas da Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, como requisito para a obtenção do  
título de Bacharela em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Susan Schommer

Rio de Janeiro

2022

### CIP - Catalogação na Publicação

BB327a Bastos, Alessandra Gomes Ribeiro  
Assimetria na Modelagem de Volatilidade do  
S&P500 com o modelo ARMA-GARCH / Alessandra Gomes  
Ribeiro Bastos. -- Rio de Janeiro, 2022.  
33 f.

Orientadora: Susan Schommer.  
Trabalho de conclusão de curso (graduação) -  
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto  
de Economia, Bacharel em Ciências Econômicas, 2022.

1. ARMA-GARCH. 2. Volatilidade. 3. GARCH. I.  
Schommer, Susan, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

ALESSANDRA GOMES RIBEIRO BASTOS

ASSIMETRIA NA MODELAGEM DE VOLATILIDADE DO S&P500 COM O MODELO  
ARMA-GARCH

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Economia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito para a obtenção do título de Bacharela em Ciências Econômicas.

Rio de Janeiro, 5/6/2022.

---

SUSAN SCHOMMER - Presidente

Professora Dra. do Instituto de Economia da UFRJ

---

PEDRO JAMES FRIAS HEMSLEY

Professor Dr. do Instituto de Economia da UFRJ

---

SÉRGIO HENRIQUE ANDRADE DE AZEVEDO

Mestre em Estatística pela UNICAMP

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Guilherme que me carregou nos braços como um príncipe encantado durante alguns dos maiores desafios que passei na faculdade, estando eles relacionados à graduação ou não.

Agradeço a Beatriz por ser minha melhor amiga e puxar pra frente quando parecia que eu não conseguiria seguir.

Agradeço a Fernanda, minha *primary caregiver* e mãe, por ter cuidado de mim. Sem você, isso não seria possível.

Agradeço à Adriana, minha psicanalista, por ser a maior constante da minha vida durante a faculdade e por tantas vezes ser a única que me fazia ver do que eu era capaz.

Agradeço a minha avó Selma por, sendo formada em economia pela UFRJ, ter reclamado de econometria tantas vezes. Eu provavelmente não gostaria tanto do assunto se não fosse uma forma de rebeldia.

Agradeço a Anna Lucia por ser o Atlas do Instituto de Economia e não deixar o teto cair sobre nossas cabeças. Também agradeço a diversos professores que tiveram paciência e compaixão comigo durante minha graduação, como Ary, Julia Paranhos e Julia Torraca.

Agradeço a Susan Schommer, minha orientadora de monografia, por aceitar todas as minhas mudanças de idéia, entender o meu tempo e não desistir de mim. Agradeço ao Eduardo Pontual, anteriormente meu orientador de iniciação científica, pelo amadurecimento acadêmico que tive durante a pesquisa de IC que me permitiu posteriormente seguir outros caminhos e certamente dar menos dor de cabeça à Susan; talvez ela tenha mais a agradecer do que eu. Agradeço a todos os professores que frequentaram a sala de disciplinas quantitativas durante meu período de IC (inclusive os já mencionados) por me permitir aprender com os debates que faziam em minha presença; desse grupo, agradeço em especial ao Pedro Hemsley por sempre tornar qualquer assunto mais divertido.

## RESUMO

Nesta monografia, são feitas estimações e previsões de volatilidade de curto prazo para o índice S&P500 durante o período de recuperação após o *crash* do coronavírus. São usados os modelos ARMA-GARCH Padrão, exponencial e GJR com o objetivo de descobrir qual modelo ARMA-GARCH, padrão ou assimétrico, tem o menor erro quadrático médio. Os resultados mostram que as previsões feitas com modelo ARMA-GJR GARCH são as que mais se aproximam dos dados observados. Sendo esse um modelo que possui coeficiente de assimetria, podemos entender que a série temporal possui assimetria.

**Palavras-chave:** ARMA-ARCH; Assimetria; GARCH.

## **ABSTRACT**

In this monograph, short-term volatility estimates and predictions are made for the S&P500 index during the recovery period following the coronavirus crash. Standard, exponential and GJR ARMA-GARCH models are used in order to find out which ARMA-GARCH model, standard or asymmetric, has the smallest mean square error. The results show that the predictions made with the ARMA-GJR GARCH model are the closest to the observed data. Since this is a model that has an asymmetry coefficient, we can understand that the time series has asymmetry.

**Keywords:** ARMA-ARCH; Asymmetry; GARCH

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Gráfico de preços do índice S&P500	17
Figura 2 - Gráfico de retornos diários em log do índice S&P500	18
Figura 3 - Autocorrelalograma dos retornos diários em log do índice S&P500	19
Figura 4 - Autocorrelalograma parcial dos retornos diários em log do índice S&P500	19
Figura 5 - Autocorrelalograma parcial dos retornos diários em log ao quadrado do índice S&P500	20
Figura 6 - Autocorrelalograma parcial dos retornos diários em log ao quadrado do índice S&P500	20
Figura 6 - Resultados do teste do multiplicador de Lagrange	21
Figura 7 - Resultados das estimações de ARMA-garch padrão, ARMA-Garch Exponencial e ARMA-GJR-Garch	22
Figura 8 - Seleção da melhor especificação do modelo Garch Padrão	23
Figura 9 - Seleção da melhor especificação do modelo Garch Exponencial	24
Figura 10 - Seleção da melhor especificação do modelo GJR-Garch	25
Figura 11 - Resultados das novas estimações de ARMA-garch padrão, ARMA-Garch Exponencial e ARMA-GJR-Garch	26
Figura 12 - Resultados das modelagens de volatilidade dos modelos ARMA-garch padrão, ARMA-Garch Exponencial e ARMA-GJR-Garch	27
Figura 13 - Erro quadrático médio dos modelos ARMA-garch padrão, ARMA-Garch Exponencial e ARMA-GJR-Garch	28
Figura 14 - Gráfico de volatilidades estimada e observada pelo modelo Garch Padrão	28
Figura 15 - Gráfico de volatilidades estimada e observada pelo modelo Garch Exponencial	29
Figura 16 - Gráfico de volatilidades estimada e observada pelo modelo GJR-Garch	29
Figura 17 - Gráfico de logs dos retornos estimado e observado pelo modelo Garch Padrão	30
Figura 18 - Gráfico de logs dos retornos estimado e observado pelo modelo Garch Exponencial	30
Figura 19 - Gráfico de logs dos retornos estimado e observado pelo modelo Garch Exponencial	31





## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ARCH - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

ARMA – Autoregressive Moving Averages

GARCH - Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	12
<b>MODELO ARMA-ARCH</b>	13
<b>VARIAÇÕES DO MODELO GARCH</b>	15
<b>METODOLOGIA E RESULTADOS</b>	17
<b>Dados</b>	17
<b>Visualização dos dados</b>	17
<b>Resultados</b>	21
<b>Previsão</b>	28
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	33
<b>REFERÊNCIAS</b>	34

## 1 INTRODUÇÃO

Em fevereiro e março de 2020, as bolsas mundiais tiveram uma forte e repentina queda devido à iminência da pandemia do Coronavírus. Com isso, a volatilidade dos retornos dos ativos financeiros cresceu de forma expressiva, tornando interessante uma investigação sobre o efeito da assimetria.

A assimetria entre efeitos decorrentes de choques positivos e negativos sobre a volatilidade é um fato estilizado do estudo de finanças. Isso significa que más notícias geram mais volatilidade do que boas notícias, ou seja, a volatilidade é maior em um bear market do que em um bull market.

Dado que sabemos da existência de assimetria em séries financeiras, buscamos aqui descobrir qual modelo ARMA-GARCH, padrão ou assimétrico, faz a melhor previsão de volatilidade de curto prazo para o índice S&P500 no período de recuperação após o *crash* do COVID. Tivemos como inspiração o artigo feito por PERLIN, M., MASTELLA, M., VANCIN, D. e RAMOS, H., em que é modelada a volatilidade do índice Ibovespa para estimar quando esse iria atingir sua máxima histórica novamente após a pandemia do coronavírus.

O trabalho está dividido em quatro partes. Além desta introdução, na seção 2 discutiremos os modelos ARMA-GARCH a serem utilizados; na seção 3 apresentaremos dados, metodologia e resultados; e por fim concluiremos o trabalho.

## 2 MODELO ARMA-ARCH

A econometria de séries temporais desenvolve modelos que descrevem a evolução temporal da esperança condicional das séries. No caso de séries temporais financeiras, modela-se também a forma como a variância condicional das séries evolui no tempo. Séries financeiras notadamente apresentam volatility clustering (agrupamento de volatilidade), ou seja, o nível de volatilidade tende a persistir: há períodos de baixa volatilidade e períodos de alta volatilidade. Uma vez que se observam padrões na variação da volatilidade, torna-se possível descrever e prever a volatilidade através de modelagem estatística. Para modelos univariados, a média condicional é modelada com o processo ARMA (autoregressive moving averages) e a variância condicional através do processo GARCH (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity).

A modelagem de séries temporais univariadas costuma pressupor que uma série temporal é gerada pela combinação de dois processos estocásticos básicos, o processo MA (moving averages) e o processo AR (autoregressive). A cada período do tempo, o valor de um processo MA(q) é dado pela soma de uma constante, um ruído branco (contemporâneo) e uma combinação linear dos ruídos brancos de q períodos anteriores. Já o valor de um processo AR(p) é dado pela soma de uma constante, um ruído branco, e uma combinação linear dos valores do próprio processo em p períodos anteriores. A soma de um processo AR(p) com um processo MA(q) é chamada de processo ARMA(p, q). Sob a hipótese de que uma série temporal segue um processo ARMA, é possível estimar seus coeficientes e prever seus valores futuros.

$$\text{AR}(p): \quad X_t = c + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

$X$  é o valor da série

$c$  é uma constante

$\varphi_i$  são os parâmetros do modelo

$\varepsilon$  é o ruído branco

$$\text{MA}(q): \quad X_t = \mu + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

$X$  é o valor da série

$\mu$  é a média da série

$\theta_i$  são os parâmetros do modelo

$\varepsilon$  é o ruído branco

$$\text{ARMA}(p,q): \quad X_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

$X$  é o valor da série

$c$  é uma constante

$\varphi_i$  são os parâmetros da parte AR do modelo

$\theta_i$  são os parâmetros da parte MA do modelo

$\varepsilon$  é o ruído branco

Segundo HEIJ, C. et al. (2004), quando a variância de uma série temporal depende do passado, dizemos que a série é condicionalmente heterocedástica. Se essa dependência do passado pode ser modelada como um processo autoregressivo, então temos o modelo ARCH - autoregressive conditional heteroskedasticity.

$$\text{ARCH}(q): \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2$$

$\sigma$  é o desvio padrão

$y$  é o retorno

$\omega$  é o intercepto

$\alpha_i$  são os parâmetros do modelo

Segundo ENDERS, W. (2015), o modelo ARCH pode ser generalizado para o caso em que a variância condicional segue um processo ARMA. A este modelo se dá o nome de GARCH. O modelo Garch Padrão como definido por BOLLERSLEV, T. (1986) é escrito:

$$\text{GARCH}(p,q): \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$\sigma$  é o desvio padrão

$\omega$  é o intercepto

$\alpha_i$  e  $\beta_j$  são os parâmetros do modelo

$\varepsilon$  é o ruído branco

JORION, P. (2003) analisa que dado que a variância dos ativos financeiros muda ao longo do tempo, então um modelo que considera isso tem estimações mais precisas, com intervalos mais amplos em períodos voláteis e intervalos mais estreitos em períodos estáveis. As modelagens de variância do modelo GARCH podem ser usadas para fazer previsões.

É possível estimar um modelo ARMA simples assumindo variância condicional constante, da mesma forma que é possível estimar um GARCH simples assumindo esperança condicional constante. Entretanto, algumas séries financeiras possuem tanto o processo ARMA quando o processo GARCH na sua modelagem. Nesse sentido o modelo ARMA-Garch é descrito como:

$$\text{ARMA}(p,q)\text{-GARCH}(p,q): X_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$u_t = \sigma_t \varepsilon_t$

## 2.1 VARIAÇÕES DO MODELO GARCH

Também utilizaremos algumas variações do modelo GARCH, como o Garch Exponencial e GJR-Garch, nomeado pelas iniciais de seus criadores: Glosten, Jagannathan e Runkle.

O modelo Garch padrão tem algumas limitações, como o fato de que ele responde simetricamente a resíduos positivos e negativos. Evidências empíricas em Black (1976) sugerem que séries financeiras são negativamente correlacionadas com mudanças na volatilidade dos retornos, ou seja, a volatilidade aumenta com “notícias ruins” e diminui com “notícias boas”. Dessa forma, um modelo que considera apenas a magnitude e não a direção da volatilidade é limitado. NELSON, D. (1991) resolve essa limitação incorporando no modelo os coeficientes  $\gamma_k$ , que refletem a assimetria do efeito de retornos positivos e negativos sobre a volatilidade. Dessa forma, permite-se que o sinal e a magnitude dos retornos afetem a volatilidade de formas diferentes. Este modelo é chamado de Garch Exponencial, e pode ser escrito como:

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i [ |u_t - i| - E(|u_t - i|) ] + \sum_{k=1}^r \gamma_k u_t - k$$

$\sigma$  é o desvio padrão

$\omega$  é o intercepto

$\beta_j$  e  $\alpha_j$  são os parâmetros do modelo

$u = \varepsilon / \sigma$

$\gamma_k$  são os coeficientes que capturam a assimetria dos efeitos

$\varepsilon$  é o ruído branco

Outro modelo que busca resolver as limitações do Garch simétrico é o GJR-Garch, que é uma modificação do Garch Exponencial mostrado acima. O GJR-Garch incorpora variáveis dummy para captura de sazonalidade e permite a inclusão de variáveis de assimetria na equação da variância condicional. Neste modelo,  $\gamma$  é o coeficiente de alavancagem. A assimetria dos retornos está associada à alavancagem, pois entendia-se que o aumento de risco vinha do

aumento da alavancagem no mercado causado pelo choque negativo (BLACK, 1976) . O GJR-Garch definido por GLOSTEN, L., JAGANNATHAN, R. e RUNKLE, D. (1993) é escrito:

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma I_{t-1})\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

$\sigma$  é o desvio padrão

$\omega$  é o intercepto

$\beta_j$  e  $\alpha_j$  são os parâmetros do modelo

$\gamma_j$  é o coeficiente de alavancagem, que captura a assimetria dos efeitos

$\varepsilon$  é o ruído branco

$I$  é 0 se  $\varepsilon \leq 0$ , e 1 se  $\varepsilon > 0$



### 3 METODOLOGIA E RESULTADOS

#### 3.1 DADOS

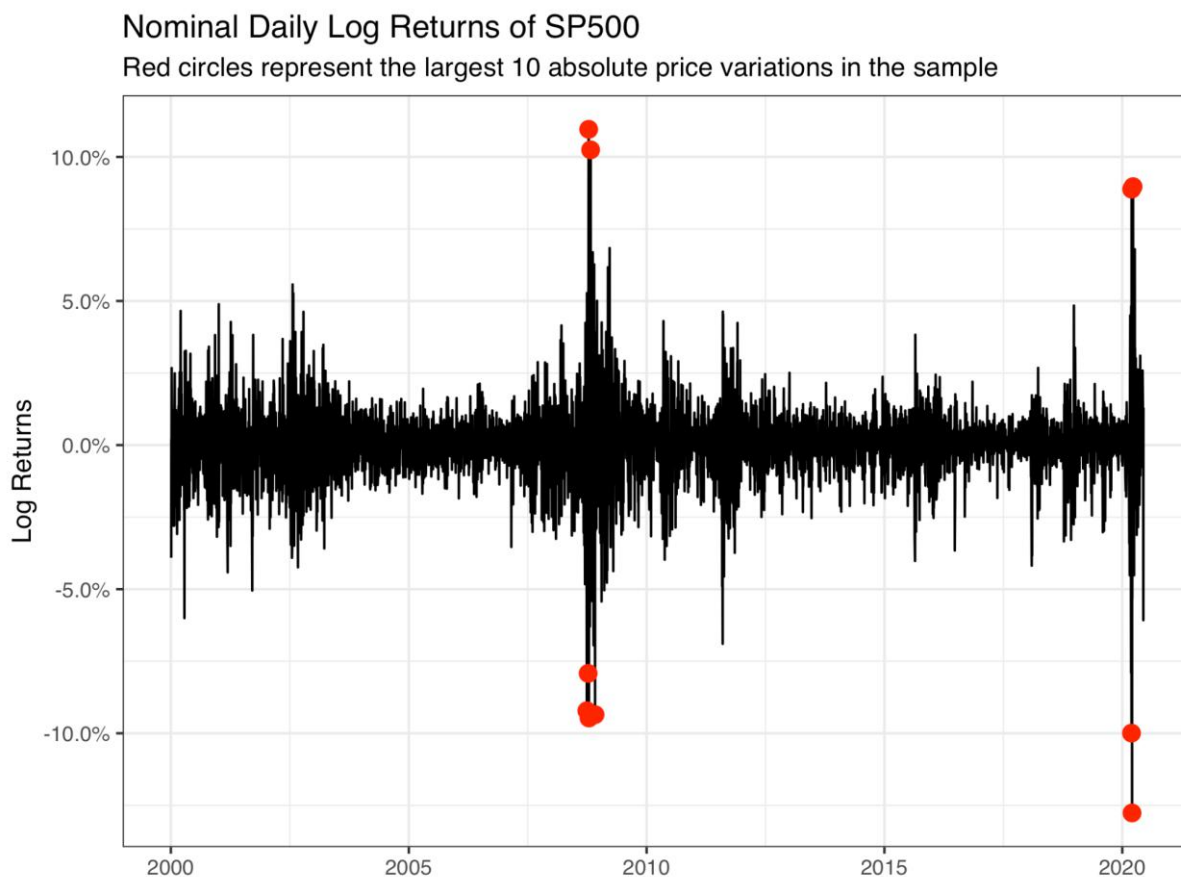
Este trabalho modela a volatilidade da série financeira do índice S&P500 utilizando modelos ARMA-GARCH. A série histórica do S&P500 com os preços de fechamento do índice entre 4 de janeiro de 2000 e 27 de junho de 2020 foi obtida com o uso do pacote `BatchGetSymbols` da linguagem R, desenvolvido pela Yahoo Finance. A partir dos preços de fechamento, foram calculados os logs dos retornos para a estimação da volatilidade. Primeiramente, a série histórica de 4 de janeiro de 2000 a 12 de junho de 2020 (ver figura 1) foi utilizada para fazer previsões das volatilidades entre os dias 15 e 26 de junho de 2020; esse período foi escolhido por ser o momento de recuperação após o *crash* do Covid já que neste trabalho buscamos entender o efeito da assimetria na capacidade de previsão de um modelo.

##### 3.1.1 Visualização dos dados

Figura 1 - Gráfico de preços do índice S&P500



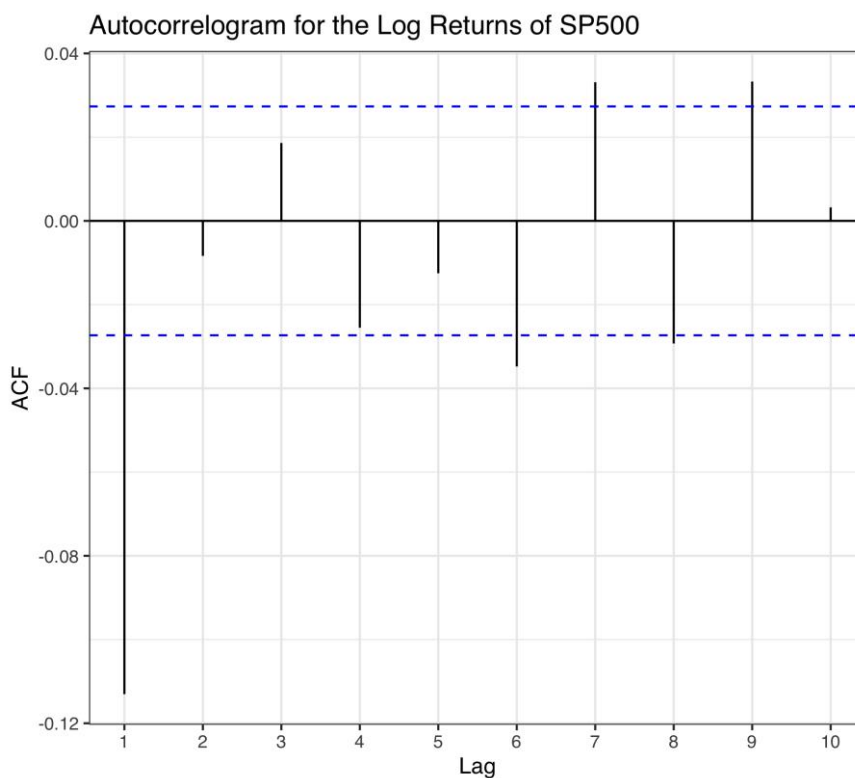
Fonte: Yahoo Finance

**Figura 2 - Gráfico de retornos diários em log do índice S&P500**

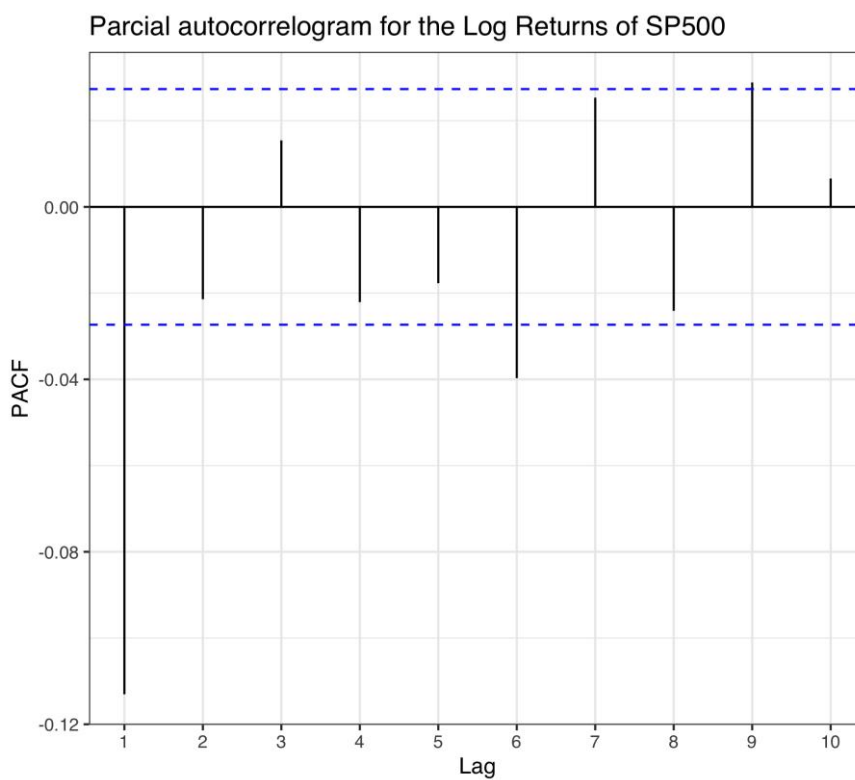
Fonte: Yahoo Finance

Em um modelo da família ARMA-GARCH, assume-se que a variância condicional da série, assim como a série em si, segue um processo ARMA. Dessa forma, a aplicação destes modelos só faz sentido quando a variância condicional da série apresenta autocorrelação serial. Este é um fato estilizado amplamente aceito no caso de séries financeiras. De qualquer forma, podemos identificar visualmente a presença de autocorrelação serial através dos gráficos ACF e PACF do quadrado dos retornos em log:

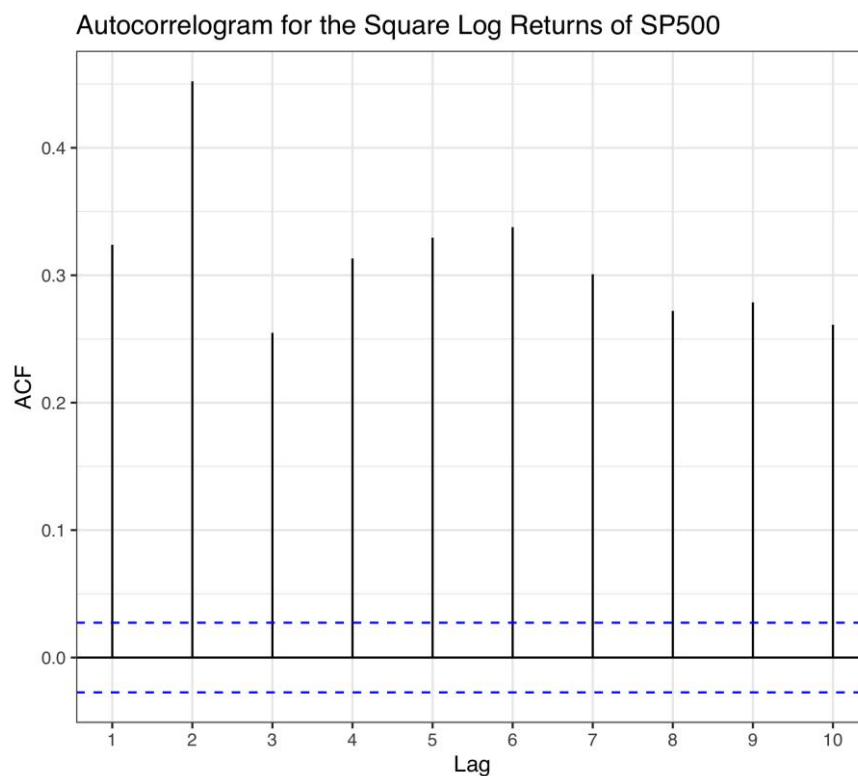
Ambos os gráficos mostram valores significantes em múltiplos lags, indicando fortemente a presença de autocorrelação serial.

**Figura 3 - Autocorrelalograma dos retornos diários em log do índice S&P500**

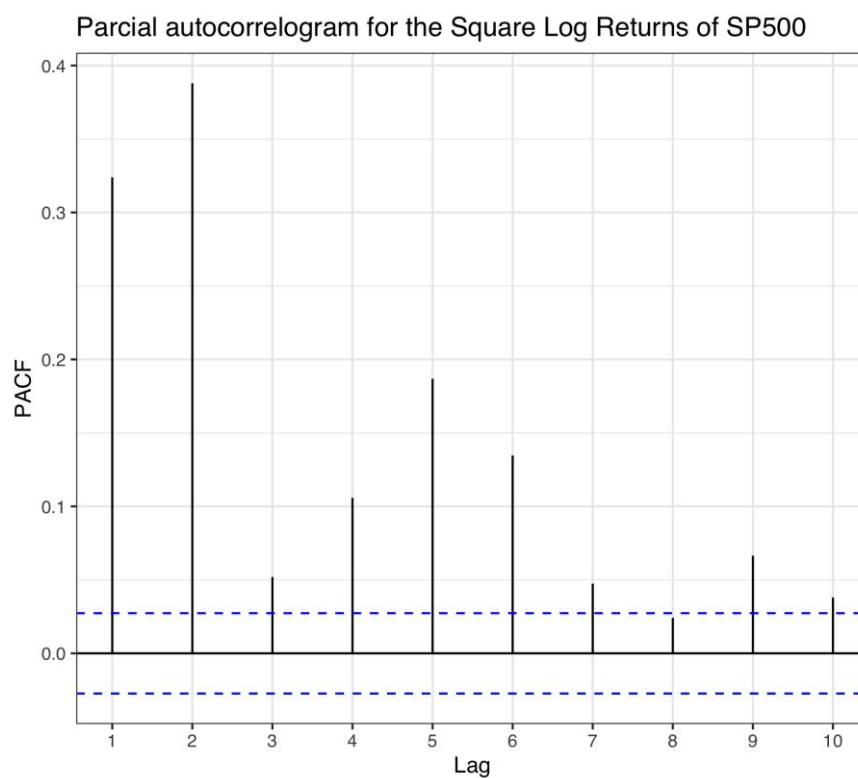
Fonte: Elaborado pela autora (2022)

**Figura 4 - Autocorrelograma parcial dos retornos diários em log do índice S&P500**

Fonte: Elaborado pela autora (2022)

**Figura 5 - Autocorrelalograma parcial dos retornos diários em log ao quadrado do índice S&P500**

Fonte: Elaborado pela autora (2022)

**Figura 6 - Autocorrelalograma parcial dos retornos diários em log ao quadrado do índice S&P500**

Fonte: Elaborado pela autora (2022)

### 3.2 RESULTADOS

O erro quadrático médio é uma medida da qualidade de uma previsão, calculando o quão próximo do valor observado está o valor estimado.

$$MSE = E[(X - x^{\wedge})^2]$$

$X$  é o valor observado

$x^{\wedge}$  é o valor estimado

A modelagem em Garch feita neste trabalho foi inspirada pelo artigo feito por PERLIN, M., MASTELLA, M., VANCIN, D. e RAMOS, H. em que é modelada a volatilidade do índice Ibovespa para estimar seus retornos e responder a pergunta "Dada a crise financeira recente de 2020, quando o Ibovespa irá atingir sua máxima histórica novamente?". Para responder a pergunta, os autores fizeram 5000 simulações para calcular a probabilidade da máxima ser atingida a cada data. Esse artigo tem seu código em R disponibilizado para a reprodução de seus resultados, que foi usado, com alterações, nesta monografia.

Aqui buscamos responder a pergunta: "Qual modelo ARMA-GARCH padrão ou assimétrico, faz a melhor previsão de volatilidade de curto prazo para o índice S&P500?".

Para isso, começamos fazendo o teste LM (multiplicador de Lagrange) para verificar que existe efeito ARCH, ou seja, se existe heterocedasticidade condicional nos dados. o quão mais baixo for o p-valor, maior o indício de efeito ARCH na série. Observa-se que os p-valores para até 5 lags são bastante próximos a zero, portanto podemos prosseguir.

**Figura 6 - Resultados do teste do multiplicador de Lagrange**

Lag	LMStatistic	p-value
1	540,0759255	1,8e-119
2	1239,50401	7e-270
3	1250,740501	7,2e-271
4	1293,519673	8,5e-279
5	1429,328149	6,1e-307

Fonte: Elaborado pela autora (2022)

A partir daí estimamos o ARMA-Garch em três variedades: Garch Padrão, Garch Exponencial e GJR-Garch; para verificar a significância de seus parâmetros. Observa-se que o coeficiente de assimetria  $\gamma$  (gamma1) tem significância em ambos os modelos assimétricos, eGarch e gjrGarch.

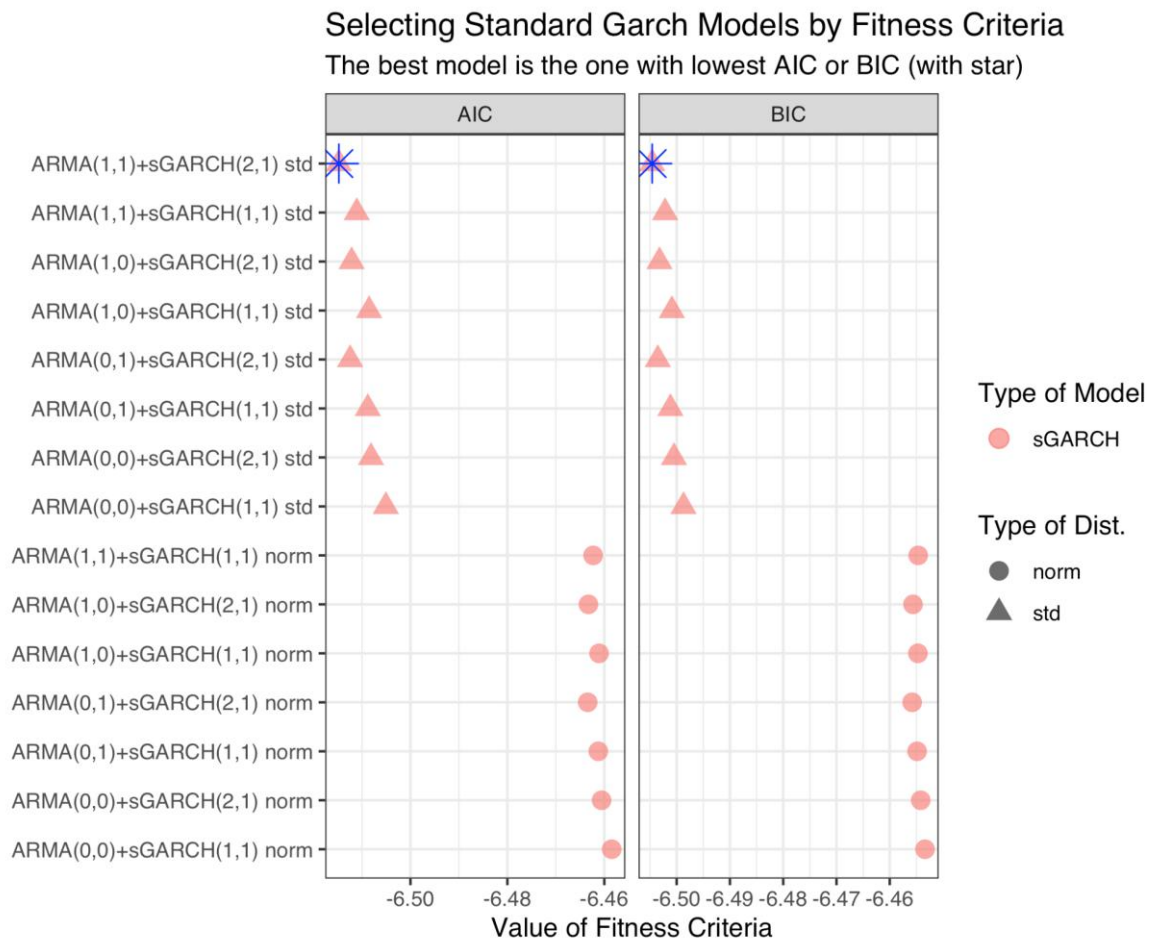
Figura 7 - Resultados das estimações de ARMA-garch padrão, ARMA-Garch Exponencial e ARMA-GJR-Garch

	Garch Padrão	Garch Exponencial	GJR-Garch
<b>mu</b>	0,001*** (0.000)	0,000* (0.000)	0,000* (0.000)
<b>omega</b>	0,000** (0.000)	-0,252*** (0.001)	0,000*** (0.000)
<b>alpha1</b>	0,123*** (0.010)	-0,157*** (0.007)	0,000 (0.002)
<b>beta1</b>	0,862*** (0.011)	0,973*** (0.000)	0,889*** (0.007)
<b>gamma1</b>		0,156*** (0.004)	0,185*** (0.010)
<b>Variance Model</b>	ARMA(0,0)-sGARCH(1,1)	ARMA(0,0)-eGARCH(1,1)	ARMA(0,0)-gjrGARCH(1,1)
<b>Distribution</b>	norm	norm	norm
<b>Log likelihood</b>	16611,95	16733,58	16720,67
<b>AIC</b>	-6,458	-6,505	-6,500
<b>BIC</b>	-6,453	-6,499	-6,494

Fonte: Elaborado pela autora (2022)

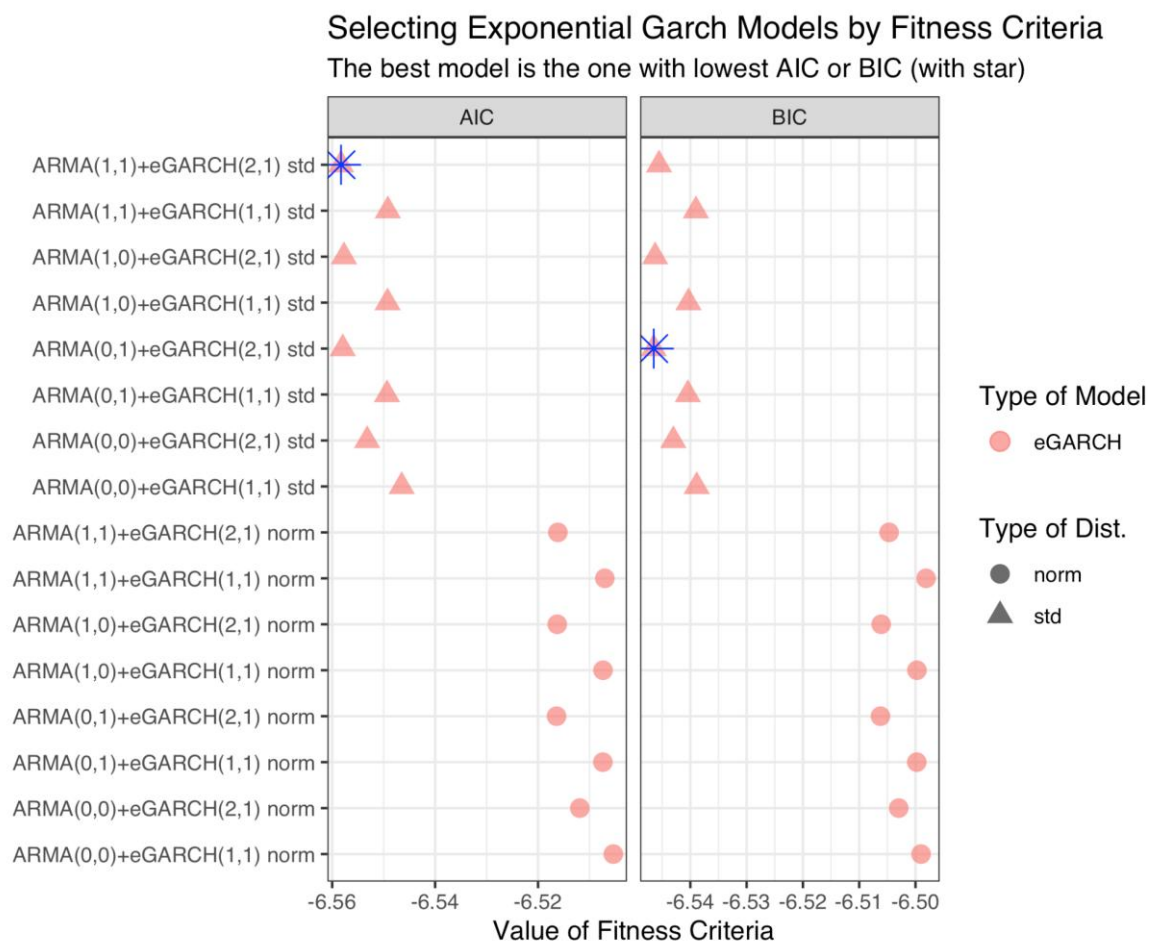
Então buscamos a melhor especificação para cada uma das variedades de Garch.

**Figura 8 - Seleção da melhor especificação do modelo Garch Padrão**



Fonte: Elaborado pela autora (2022)

**Figura 9 - Seleção da melhor especificação do modelo Garch Exponencial**



Fonte: Elaborado pela autora (2022)



**Figura 10 - Seleção da melhor especificação do modelo GJR-Garch**



Fonte: Elaborado pela autora (2022)

Segundo PERLIN, M. et al. (2021) o critério BIC penaliza modelos com mais parâmetros, enquanto AIC é mais leniente. Portanto, para simplificar a modelagem, os melhores modelos pelo critério BIC foram selecionados.

O melhor modelo do Garch Padrão foi ARMA(1,1)-sGARCH(2,1); o melhor modelo Garch Exponencial foi ARMA(0,1)-eGARCH(2,1) tendo  $\gamma_1$  de  $-0,062^{***}$  e  $\gamma_2$  de  $0,200^{***}$ ; e o melhor GJR Garch foi ARMA(0,1)-gjrGARCH(1,1) tendo  $\gamma$  de  $0,200^{***}$ .

**Figura 11 - Resultados das novas estimações de ARMA-garch padrão, ARMA-Garch Exponencial e ARMA-GJR-Garch**

	Garch Padrão	Garch Exponencial	GJR-Garch
<b>mu</b>	0,001*** (0,000)	0,000* (0,000)	0,000* (0,000)
<b>ar1</b>	0.714*** (0,087)		
<b>ma1</b>	0.774*** (0,080)	-0.067*** (0,012)	-0.060*** (0,014)
<b>omega</b>	0,000* (0,000)	-0.207*** (0,003)	0,000* (0,000)
<b>alpha1</b>	0.052** (0,016)	-0,275*** (0,024)	0,000 (0,010)
<b>alpha2</b>	0.104* (0,049)	0.122*** (0,023)	
<b>beta1</b>	0.842*** (0,041)	0.978*** (0,000)	0.886*** (0,014)
<b>shape</b>	5.883*** (0,733)	6.870*** (0,626)	6.834*** (0,678)
<b>gamma1</b>		-0.062*** (0,014)	0.200*** (0,024)
<b>gamma2</b>		0.222*** (0,006)	
<b>Variance Model</b>	ARMA(1,1)-sGARCH(2,1)	ARMA(0,1)-eGARCH(2,1)	ARMA(0,1)-gjrGARCH(1,1)
<b>Distribution</b>	norm	norm	norm
<b>Log likelihood</b>	16760,748	16872,766	16833,549
<b>AIC</b>	-6,515	-6,558	-6,543
<b>BIC</b>	-6,505	-6,546	-6,535

Com os melhores modelos escolhidos, modelamos a volatilidade para o primeiro período. É possível observar na tabela 11 que os modelos passam nos testes de Ljung-Box, para heterocedasticidade, e LM, para autocorrelação.

**Figura 12 - Resultados das modelagens de volatilidade dos modelos ARMA-garch padrão, ARMA-Garch Exponencial e ARMA-GJR-Garch**

	Garch Padrão	Garch Exponencial	GJR-Garch									
Garch Model	sGarch(2,1)	eGARCH(2,1)	gjrGARCH(1,1)									
Mean Model	ARMA(1,1)	ARMA(0,1)	ARMA(0,1)									
LogLikelihood	16760,75	16872,77	16833,55									
<b>Information Criteria</b>												
Akaike	-6,5148	-6,5579	-6,5435									
Bayes	-6,5046	-6,5465	-6,5346									
Shibata	-6,5148	-6,558	-6,5435									
Hannan-Quinn	-6,5112	-6,5539	-6,5404									
<b>Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals</b>												
	statistic	p-value	statistic	p-value	statistic	p-value						
Lag[1]	1,1130	0,2914	0,7011	0,4024	0,4995	0,4797						
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]	5,7990	0,0002	1,4698	0,4541	1,2383	0,5924						
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]	8,1980	0,0488	2,8174	0,4786	2,9516	0,4436						
<b>Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals</b>												
	statistic	p-value	statistic	p-value	statistic	p-value						
Lag[1]	9,629	0,0019	2,166	0,1411	4,166	0,0412						
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][8]	12,075	0,0115	3,442	0,6045	5,126	0,1367						
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][14]	15,786	0,0173	5,680	0,6817	6,544	0,2405						
<b>Weighted ARCH LM Tests</b>												
	Statistic	Shape	Scale	P-Value	Statistic	Shape	Scale	P-Value	Statistic	Shape	Scale	P-Value
ARCH Lag[4]	0,2307	0,500	2,000	0,6310	1,3930	0,500	2,000	0,2378	5,2730	0,500	2,000	0,4677
ARCH Lag[6]	2,9574	1,461	1,711	0,3142	1,7390	1,461	1,711	0,5511	1,7550	1,440	1,667	0,5279
ARCH Lag[8]	4,4001	2,368	1,583	0,3198	1,8390	2,368	1,583	0,7739	2,7799	2,315	1,543	0,5560

**Fonte: Elaborado pela autora (2022)**

### 3.3 PREVISÃO

Com base nos modelos acima, fazemos as previsões da volatilidade para o segundo período, que são os 10 próximos dias úteis, e usamos as mesmas especificações de ARMA-

GARCH para modelar a volatilidade observada. Com isso, calculamos os erros quadráticos médios:

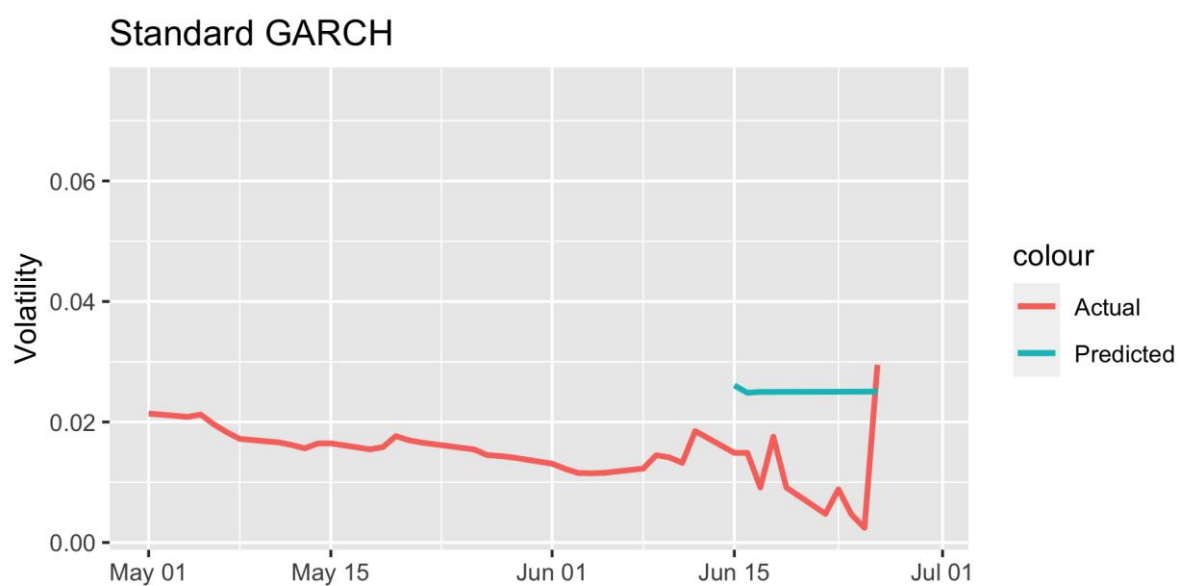
**Figura 13 - Erro quadrático médio dos modelos ARMA-garch padrão, ARMA-Garch Exponencial e ARMA-GJR-Garch**

Erro quadrático médio		
SGarch	eGarch	gjr-Garch
0,00024	0,00949	6,89e-05

Fonte: Elaborado pela autora (2022)

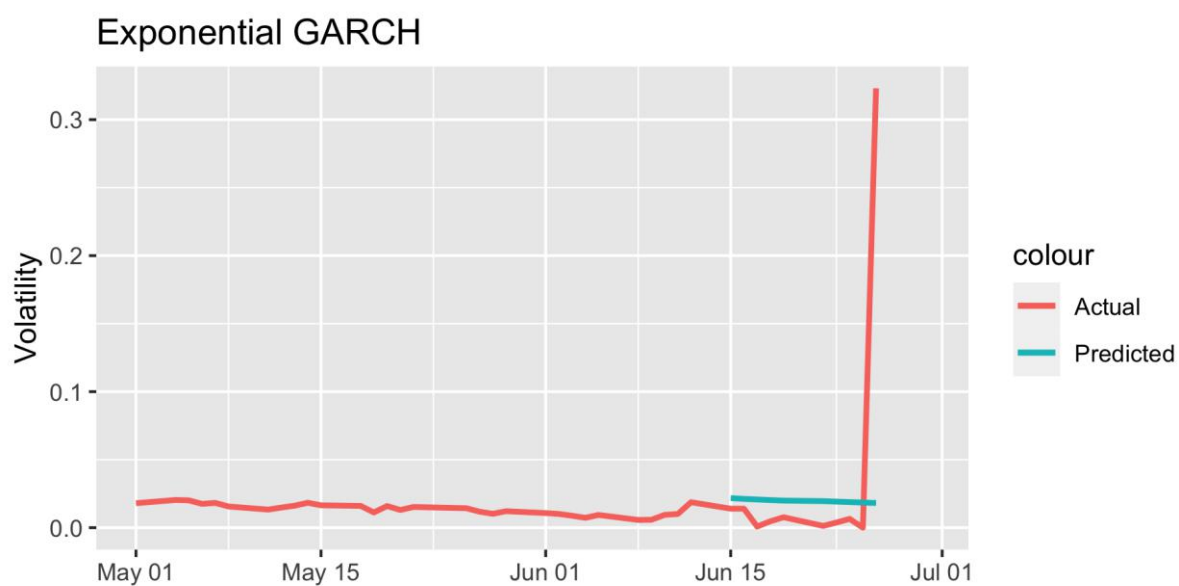
Uma interpretação do sucesso do modelo gjr-Garch é a existência de assimetria na série histórica do índice S&P500.

**Figura 14 - Gráfico de volatilidades estimada e observada pelo modelo Garch Padrão**



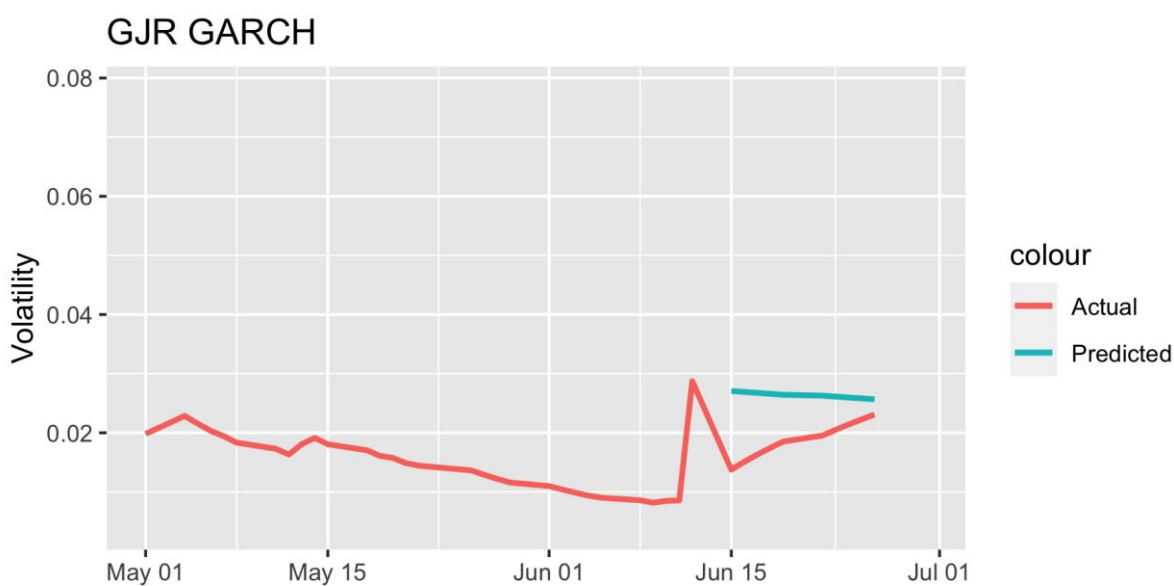
Fonte: Elaborado pela autora (2022)

Figura 15 - Gráfico de volatilidades estimada e observada pelo modelo Garch Exponencial

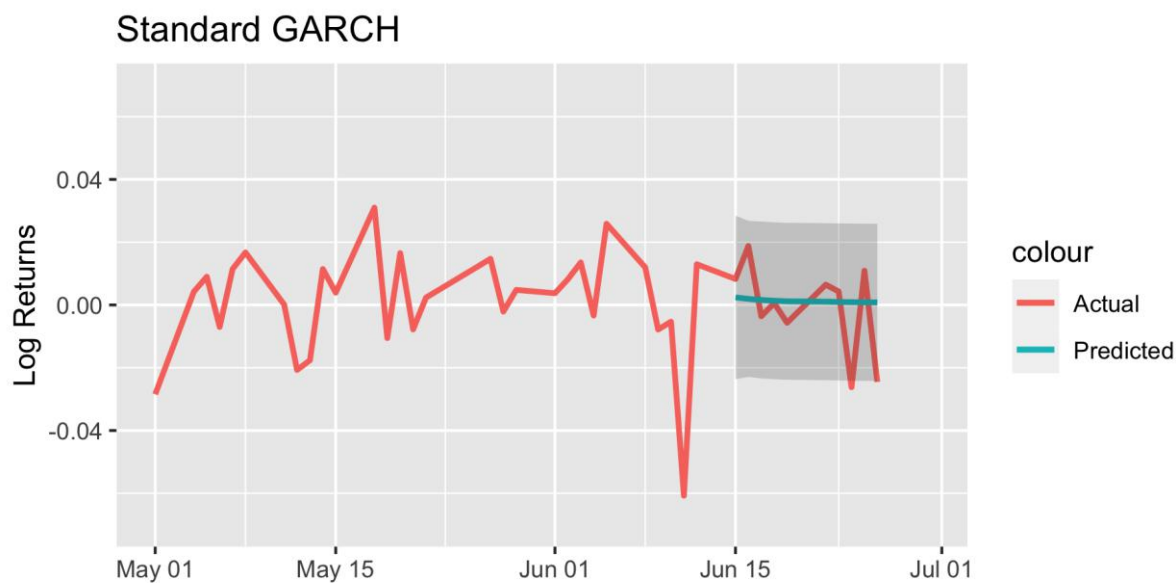


Fonte: Elaborado pela autora (2022)

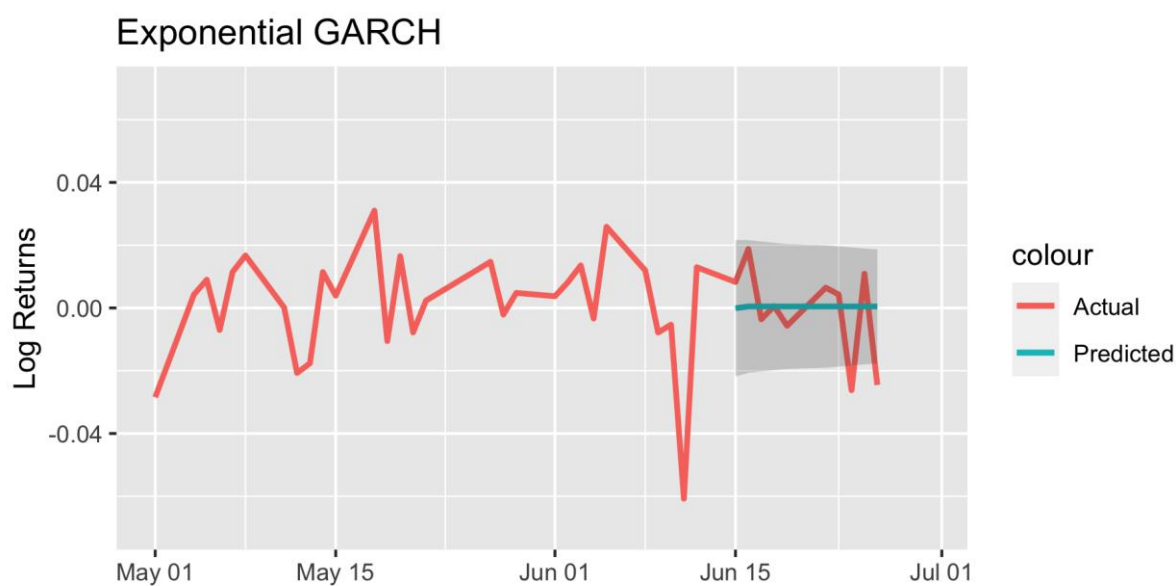
Figura 16 - Gráfico de volatilidades estimada e observada pelo modelo GJR-Garch



Fonte: Elaborado pela autora (2022)

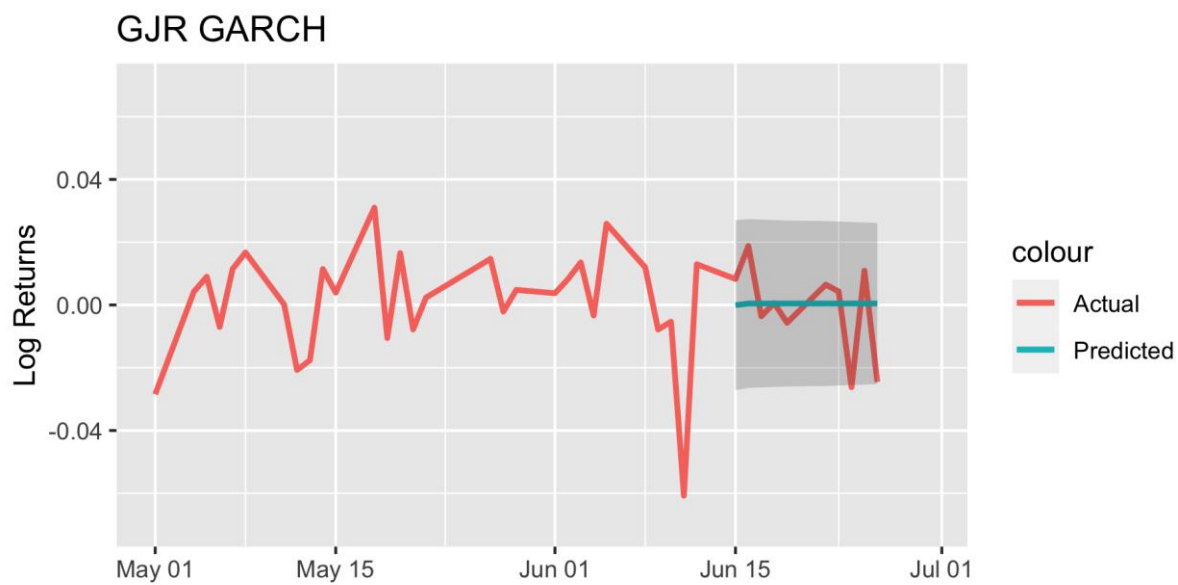
**Figura 17 - Gráfico de logs dos retornos estimado e observado pelo modelo Garch Padrão**

Fonte: Elaborado pela autora (2022)

**Figura 18 - Gráfico de logs dos retornos estimado e observado pelo modelo Garch Exponencial**

Fonte: Elaborado pela autora (2022)

Figura 19 - Gráfico de logs dos retornos estimado e observado pelo modelo Garch Exponencial



Fonte: Elaborado pela autora (2022)



#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para a análise foram considerados o modelo simétrico Garch padrão e os modelos assimétricos Garch Exponencial e GJR-Garch com o objetivo de verificar se a modelagem da assimetria resultaria em uma previsão melhor. A importância de estudar os efeitos da assimetria é evidenciada pela extensa bibliografia disponível sobre o tema. Black (1976) associou esse efeito ao aumento da alavancagem, pois, com a queda de preços, a razão entre dívida e equity das empresas abertas aumentaria, por sua vez aumentando a volatilidade dos preços de ações. Contudo, evidências mais recentes (Hasanhodzic, J. and Lo, A. W. (2011) e Figlewski, S. and X. Wang (2000)) mostram que assimetria dos retornos pode ser observada mesmo na ausência de alavancagem. A teoria de finanças comportamentais, pode oferecer uma explicação alternativa para a ocorrência de assimetria: os investidores apresentam vieses e com isso, sua percepção de risco é distorcida, alterando sua demanda por ativos de risco.

Este estudo buscou entender qual modelo ARMA-GARCH, padrão ou assimétrico, faz a melhor previsão de volatilidade de curto prazo para o índice S&P500, em um contexto de recuperação dos retornos após um *crash* das bolsas mundiais. Comparamos então os modelos Garch Padrão foi ARMA(1,1)-sGARCH(2,1), Garch Exponencial ARMA(0,1)-eGARCH(2,1) e ARMA(0,1)-gjrGARCH(1,1). Os resultados empíricos mostram que um modelo ARMA-GJR Garch é o mais adequado para prever a volatilidade do índice, sugerindo que a série possui assimetria.

É possível ampliar o estudo da assimetria em séries financeiras, como feito neste e em outros trabalhos, analisando empiricamente outros ativos financeiros em momentos de *crash*.

## REFERÊNCIAS

- PERLIN, Marcelo Scherer et al. A GARCH Tutorial with R. **Revista de Administração Contemporânea**, v. 25, 2020. Disponível em <https://www.scielo.br/j/rac/a/FyNM3rThZN7wQgMKshwLHjk/abstract/?format=html&lang=pt>
- HEIJ, Christiaan et al. **Econometric methods with applications in business and economics**. Oxford University Press, 2004.
- Enders, W.. **Applied Econometric Time Series**. Wiley, 4 edition, 2015
- BOLLERSLEV, Tim. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of econometrics**, v. 31, n. 3, p. 307-327, 1986.
- JORION, Philippe. **Value at Risk: a nova fonte de referência para a gestão do risco financeiro**. Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2003.
- BLACK, F., 1976, Studies of Stock Price Volatility Changes, **Proceedings of the Business and Economics Section of the American Statistical Association** , 177–181.
- NELSON, Daniel B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, p. 347-370, 1991.
- GLOSTEN, Lawrence R.; JAGANNATHAN, Ravi; RUNKLE, David E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. **The journal of finance**, v. 48, n. 5, p. 1779-1801, 1993.
- HASANHODZIC, Jasmina; LO, Andrew W. Black's leverage effect is not due to leverage. **Available at SSRN 1762363**, 2011.
- FIGLEWSKI, Stephen; WANG, Xiaozu. Is the 'Leverage Effect' a leverage effect?. **Available at SSRN 256109**, 2000.