



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

LUCAS VIEGAS RUIZ INOI DE OLIVEIRA

**MODELANDO A VARIÂNCIA E MÉDIA CONDICIONAL DO IBOVESPA ENTRE
2016 E 2021: UMA APLICAÇÃO ARMA-GARCH.**

RIO DE JANEIRO

2022

LUCAS VIEGAS RUIZ INOI DE OLIVEIRA

**MODELANDO A VARIÂNCIA E MÉDIA CONDICIONAL DO IBOVESPA ENTRE
2016 E 2021: UMA APLICAÇÃO ARMA-GARCH.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Economia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como exigência para obtenção do título de Bacharel ou Bacharela em Ciências Econômicas.

Orientadora: Prof^ª. Susan Schommer

RIO DE JANEIRO

2022

CIP - Catalogação na Publicação

VL933m
Viegas Ruiz Inoi de Oliveira,
Lucas
MODELANDO A VARIÂNCIA E MÉDIA
CONDICIONAL DO IBOVESPA ENTRE
2016 E 2021: UMA APLICAÇÃO
ARMA GARCH. / Lucas Viegas
Ruiz Inoi de Oliveira. -- Rio
de Janeiro, 2022.
29 f.

Orientadora: Susan Schommer.
Trabalho de conclusão de
curso (graduação) -
Universidade Federal do Rio de
Janeiro, Instituto de
Economia, Bacharel em Ciências
Econômicas, 2022.

1. modelos Heteroscedásticos.
2. ARMA. 3. IBOVESPA. 4.
volatilidade. 5. Econometria.
I. Schommer, Susan, orient.
II. Título.

LUCAS VIEGAS RUIZ INOI DE OLIVEIRA

MODELANDO A VARIÂNCIA E MÉDIA CONDICIONAL DO
IBOVESPA ENTRE 2016 E 2021: UMA APLICAÇÃO ARMA e
GARCH

Trabalho de conclusão
de curso apresentado ao
Instituto de Economia da
Universidade Federal do
Rio de Janeiro, como
requisito para a obtenção
do título de Bacharel em
Ciências Econômicas.

Rio de Janeiro, 5/10/2022.

SUSAN SCHOMMER - Presidente
Professora Dra. do Instituto de Economia da UFRJ

ARY VIEIRA BARRADAS
Professor Dr. do Instituto de Economia da UFRJ

LEDSON LUIZ GOMES DA ROSA
Mestre em Economia pela UFRJ

Aos meus pais, sem seu apoio incondicional
nunca teria chegado aqui. Obrigado por tudo.

RESUMO

Este trabalho busca modelar os retornos do IBOVESPA entre 2016-2021. As inferências são realizadas em cima do logaritmo natural do retorno, a fim de garantir a estacionariedade da série. Em seguida à identificação de autocorrelação serial nas observações por meio de funções de autocorrelação, a média condicional é modelada mediante um processo ARMA. Similarmemente, após a identificação de autocorrelação nos resíduos estimados com o uso do teste ARCH-LM, a variância condicional é estimada com modelos de heterocedasticidade condicional. Assegurada a boa especificação através do teste Ljung-Box, a identificação dos melhores modelos é feita por meio de critérios de informação, observando-se que os modelos assimétricos EGARCH e APARCH apresentam resultados superiores, indicando efeitos desproporcionais de choques negativos nos retornos sobre a volatilidade futura quando comparados a choques positivos. Ao final, são comparados os resultados obtidos para o período estudado com trabalhos passados de outros autores.

Palavras-chave: modelos Heteroscedásticos; ARMA; IBOVESPA; volatilidade; Econometria;

ABSTRACT

This paper aims to model the BOVESPA index returns between 2016-2021. Inferences are made on the natural logarithm of returns, guaranteeing the stationarity of the series. After identifying serial correlation in the observations through the autocorrelation functions, the conditional mean is modeled by an ARMA process. Similarly, after identifying serial correlation in the estimated residuals through an ARCH-LM test, the conditional variance is estimated through conditional heteroskedastic models. After assuring goodness of fit through a Ljung-Box test, the identification of the best models is made through the information criteria, with the asymmetric models EGARCH and APARCH showing superior results, indicating a disproportionate effect of sudden drops in index returns on its future volatility when compared to positive swings. Then, the results obtained for the period studied are compared to previous works by other authors.

Keywords: heteroskedastic models; ARMA; IBOVESPA; volatility; Econometrics

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Evolução do IBOVESPA no período 2016 a 2021	17
Gráfico 2 – Histograma dos retornos diários	18
Gráfico 3 – Correlograma dos retornos diários	19
Gráfico 4 – Correlograma parcial dos retornos diários	19

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Métrica AIC	20
Tabela 2 – Métrica BIC	21
Tabela 3 – Métrica SIC	21
Tabela 4 – Métrica HQIC	22
Tabela 5 – Estimação dos coeficientes para os modelos selecionados	23
Tabela 6 – Resultados dos Teste Ljung-Box	24
Tabela 7 – Resultados do dos Testes ARCH-LM	24

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- ACF – Função de autocorrelação (Autocorrelation Function)
- ADF – Dickey-Fuller aumentado (Augmented Dickey-Fuller)
- AIC – Critério de Informação Akaike (Akaike Information Criterion)
- APARCH – Heterocedasticidade condicional auto regressiva poder assimétrico (Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)
- AR – Autorregressivo
- ARCH – Heterocedasticidade condicional autoregressiva (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)
- ARMA – Autoregressivo média móvel (Autoregressive Moving Average)
- BIC – Critério de Informação Bayesiano (Bayesian Information Criterion)
- D.o.f. – Graus de liberdade (Degrees of Freedom)
- EGARCH – Heterocedasticidade condicional autorregressiva exponencial (Exponential Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)
- FAC – Função de autocorrelação
- GARCH – Heterocedasticidade condicional autorregressiva generalizada (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)
- HQIC – Critério de Informação Hannan-Quinn (Hannan-Quinn Information Criterion)
- JB - IBOVESPA – Índice da Bolsa de Valores de São Paulo
- i.i.d. – Independente e identicamente distribuído (Independent and Identically Distributed)
- JB – Teste Jarque-Bera (Jarque-Bera Test)
- Lag – Defasagem
- LB – Teste Ljung-Box (Ljung-Box Test)
- LM – Multiplicador de Lagrange (Lagrange Multiplier)
- MA – Média Móvel
- PACF – Função de autocorrelação parcial (Partial Autocorrelation Function)
- SIC – Critério de Informação Shibata (Shibata Information Criterion)
- TARCH – Heterocedasticidade condicional autorregressiva com limiar (Threshold Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
2. METODOLOGIA	10
2.1 ARMA	10
2.2 Modelos de heterocedasticidade condicional	11
2.3 Estacionariedade, teste aumentado Dickey-Fuller (ADF) e teste Phillips-Perron	13
2.4 Função de autocorrelação(FAC) e função de autocorrelação parcial(FACP)	14
2.5 Teste Jarque Bera	15
2.6 Teste ARCH-LM	15
2.7 Teste Ljung-Box	15
2.8 Critérios de informação	16
3. RESULTADOS	17
4. INTERPRETAÇÃO E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS	25
5. CONCLUSÃO	28
REFERÊNCIAS	29

1. INTRODUÇÃO

O Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA) representa uma carteira das empresas mais negociadas na B3, seu valor servindo como indicador para investidores do desempenho da economia. Caso um agente econômico esteja interessado em entender como o valor do índice é formado, por se tratar de uma série temporal, efeitos específicos a séries desse tipo devem ser considerados, para que haja um entendimento completo do seu processo.

Para agentes privados, entender a dinâmica desse processo é de grande importância. Investidores qualificados podem utilizar de sua modelagem para obter ganhos monetários significativos, a exemplo do mercado de opções. Ao prever a variância condicional, nominalmente a volatilidade, investidores conseguem fazer operações que se aproveitam da característica temporal da precificação de derivativos. Parte do valor de uma opção vem da previsão de mercado de quanto o ativo lastreado pode subir ou descer. Ao conseguir fazer uma previsão mais precisa, é possível lucrar nessa assimetria de informação.

Esse efeito temporal observado, pode ser modelado através de efeitos auto regressivos, tanto quanto na expectativa da média quanto na variância condicional do índice. Esta forma de modelar o IBOVESPA já vem sendo estudada há décadas por diversos autores. Morais e Portugal (1999) estão entre os primeiros a tentar identificar efeitos de persistência temporal no IBOVESPA, estudando a série na primeira metade da década de 90. Gaio et al. (2007, p. 7), também nesta linha de avaliar o IBOVESPA sob a ótica de variância heterocedástica, identificaram que o mercado apresenta uma assimetria na resposta a choques, onde “choques negativos tendem a se propagar de forma mais forte e em períodos mais extensos do que choques positivos”. Jubert et al. (2009, p. 237) identificaram aglomerações de volatilidade associadas à queda de preço nas ações, assim como assimetria para todos os índices estudados. Finalmente temos Júnior e Kobunda (2019), no trabalho mais recente quanto à modelagem auto regressiva do IBOVESPA, estudaram o período mais extenso nos trabalhos observados, analisando a série entre 2001 a 2016.

Sendo observados efeitos autoregressivos, a variância condicional ainda pode ser estimada por uma gama de modelos. Dessa forma, visando a comparação de resultados, seguindo a linha de Gaio et al. (2007), Jubert et al. (2009), Morais e Portugal (1999), e Júnior & Kobunda (2019), a volatilidade será estimada por meio do emprego de três modelos: heterocedasticidade condicional autorregressiva generalizada(GARCH), heterocedasticidade condicional autorregressiva exponencial(EGARCH), e heterocedasticidade condicional auto regressiva poder assimétrico(APARCH).

O objetivo do trabalho é estimar a média e a volatilidade estocástica do índice BOVESPA usando dados diários do período entre 2016 e 2021, identificando bons modelos de estimação, e sua interpretação econômica. Para isso o trabalho é dividido em 5 seções. Na seção 2 é feita uma revisão da metodologia, em que os modelos ARMA e de heterocedasticidade condicional, juntamente com os testes e critérios a serem usados, são explicados. Em seguida na seção 3, a metodologia é aplicada e os resultados obtidos. Na seção 4 é feita a interpretação dos resultados e os compara com aqueles obtidos por outros autores. E ao final, a seção 5 conclui o trabalho.

2. METODOLOGIA

2.1 ARMA

O modelo autoregressivo média móvel (ARMA) combina duas maneiras por meio das quais uma série pode ser auto correlacionada: autorregressão e média móvel. O modelo AR é uma extensão de um *random walk*, com observações linearmente dependentes de seus valores defasados, somadas a um valor de erro i.i.d. Um modelo $AR(p)$ é então definido como :

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + \varphi_1 x_{t-1} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + \omega_t \\ &= \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_i x_{t-i} + \omega_t \end{aligned}$$

onde ω_t é ruído branco e $\varphi \in \mathbb{R}$, com φ_i diferente de 0 para processos de ordem p .

Uma média móvel é caracterizada como a combinação linear dos ruídos brancos defasados, na qual um modelo $MA(q)$ é definido como:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + \omega_t + \phi_1 \omega_{t-1} + \dots + \phi_q \omega_{t-q} \\ &= \mu + \omega_t + \sum_{i=1}^q \phi_i \omega_{t-i} \end{aligned}$$

onde ω_t é ruído branco, $E(\omega_t) = 0$, e variância constante.

Combinando os dois modelos, obtemos o processo $ARMA(p,q)$, com a seguinte especificação:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + \varphi_1 x_{t-1} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + \phi_1 \omega_{t-1} + \dots + \phi_q \omega_{t-q} + \omega_t \\ &= \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^q \phi_i \omega_{t-i} + \omega_t \end{aligned}$$

2.2 Modelos de heterocedasticidade condicional

Um problema do modelo ARMA refere-se à condição de homocedasticidade. Em uma série temporal, caso a variância não seja constante ao longo do tempo, temos heterocedasticidade. No caso de séries financeiras, é comum a presença disso, e a forma que a variação toma é de “clusters” de volatilidade, onde grandes choques aumentam a volatilidade de períodos subsequentes, persistindo até determinado tempo. Essa volatilidade, chamada de heterocedasticidade condicional, precisa ser levada em conta quando tentamos modelar o IBOVESPA.

Para tanto, usaremos modelos derivados do Heterocedasticidade Condicional Auto Regressivo (ARCH). Especificamente, compararemos os modelos GARCH, EGARCH, e APARCH.

O modelo generalizado ARCH, ou GARCH de Bollerslev (1986)¹, é definido como:

$$\omega_t = \sigma_t \epsilon_t, \epsilon_t \sim i. i. d,$$

$$\sigma_t^2 = \Omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \omega_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

onde:

σ_t^2 = variância condicional no tempo t ;

Ω = constante;

α_i = coeficiente de reação da volatilidade no período i ;

ω_{t-i}^2 = termo de erro ao quadrado no período $t-1$;

β_j = coeficiente de persistência da volatilidade;

σ_{t-j}^2 = variância da volatilidade no período $t-j$;

O coeficiente α_i mede o efeito na variância condicional de um choque no quadrado dos resíduos passados, enquanto o coeficiente β_j mede o efeito da variância condicional passada na variância em t .

Juntando os modelos auto regressivos de média e variância condicional, chegamos a especificação do processo ARMA + GARCH, dado por:

$$x_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^q \phi_i \omega_{t-i} + \omega_t$$

$$\omega_t = \sigma_t \epsilon_t, \epsilon_t \sim i. i. d,$$

¹ BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics, v.31, n.3, p.307 – 327, 1986.

$$\sigma_t^2 = \Omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \omega_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Um problema desse modelo, especialmente significativa para o mercado financeiro, é tratar choques positivos e negativos igualmente, algo que não é realístico para o IBOVESPA. Então, a fim de capturar impactos assimétricos de choques, Nelson (1991)² propôs o EGARCH (Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). A variância condicional deste modelo é dada como:

$$\ln \sigma_t^2 = \Omega + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left[\left| \frac{\omega_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| - E \left(\left| \frac{\omega_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| \right) \right] + \sum_{k=1}^r \gamma_k \left(\frac{\omega_{t-k}}{\sigma_{t-k}} \right)$$

onde:

$\ln \sigma_t^2$ = logaritmo natural da variância condicional t;

σ_t = desvio padrão no tempo t;

ω_t = erro no período t;

β_j = coeficiente de persistência da volatilidade em relação a defasagem j;

γ_k = coeficiente que capta o efeito da assimetria na volatilidade em relação a choques no período k;

Para entender o último modelo a ser aplicado (APARCH) é necessário, antes, apresentar o modelo TARARCH (Threshold Autoregressive Conditional Heteroscedasticity), proposto por Zakoian (1994)³.

$$\sigma_t^2 = \Omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \omega_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^r \gamma_k d_{t-k} \omega_{t-k}^2$$

onde:

d_{t-k} = variável dummy;

A magnitude do efeito assimétrico na volatilidade em t se dá ao se multiplicar o estimador γ_i à variável dummy d_{t-k} , que toma valor de 1 caso $\epsilon_{t-k} < 0$.

O modelo APARCH foi introduzido por Ding et al. (1993)⁴, que combinaram os modelos anteriores. Ele apresenta a seguinte forma:

² NELSON, D. B. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach. *Econometrica*, v. 59, p.347-370, 1991.

³ ZAKOIAN, J.M. Threshold Heteroskedascity Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v.18, p.931-955, 1994.

⁴ DING, C.W.J. GRANGER, and R.F. ENGLE. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1(1):83-106, 1993.

$$\sigma_t^\delta = \Omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (t|\omega_{t-i}| - \gamma_i \omega_{t-i})^\delta$$

Este modelo permite captar tanto o efeito alavancagem quanto o efeito observado por Taylor (1986), o qual constatou que a autocorrelação dos valores absolutos dos retornos é normalmente maior que o quadrado dos retornos. O valor de δ determina que tipo de modelo ARCH está se aplicando. Por exemplo, caso $\delta = 2$ e $\gamma_i = 0$, temos um processo GARCH; caso $\delta = 1$, temos um processo TARCH.

2.3 Estacionariedade, teste aumentado Dickey-Fuller (ADF) e teste Phillips-Perron

Estacionariedade é vital para análise de um processo temporal. Muitos dos objetivos comuns, como a identificação da média e a análise da variância, são impossíveis sob a não estacionariedade, uma vez que a primeira não é definida e que a variância cresce infinitamente. Outro fator está nas inferências, nas quais podemos obter relações entre séries não estacionárias, mesmo estas não possuindo qualquer sentido econômico. Esta é chamada de regressão espúria, comum entre séries não estacionárias. Para exemplificá-las, temos os modelos autorregressivos com raiz unitária, onde ao se regredir duas séries autoregressivas estocásticas randômicas, mas com raiz unitária, obter-se-ia uma relação, aparentemente, significativa.

Para identificar se há estacionariedade ou não, um teste comum a ser usado é o ADF, introduzido por Dickey e Fuller (1979)⁵, sob a forma:

$$x_t = c + \beta_t + \alpha x_{t-1} + \phi_1 \Delta X_{t-1} + \phi_2 \Delta X_{t-2} \dots + \phi_p \Delta X_{t-p} + \epsilon_t$$

visando saber se o coeficiente $\alpha = 0$, uma vez que:

$$\alpha = \phi_1 + \phi_2 \dots + \phi_p - 1$$

testa-se, então, esta hipótese contra a alternativa de $\alpha < 0$. Usamos da estatística:

$$DF = \frac{\hat{\alpha}}{\widehat{\sigma}_\alpha}$$

Vale notar que, caso a hipótese nula seja rejeitada, a estatística não seguiria uma distribuição comum como t-student ou normal; portanto, é utilizada a distribuição DF para calcular o valor crítico.

Esta segunda parte da regressão do teste ADF, regredindo nas defasagens das diferenças, serve para corrigir o efeito da autocorrelação.

⁵ DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366), 427-431, 1979.

Outra maneira de se testar esta modalidade é o teste não paramétrico Phillips e Perron (1988)⁶, que não só corrige para correlação serial, como também para a presença de heterocedasticidade.

$$x_t = \rho x_{t-1} + \epsilon_t$$

onde ρ é o fator corretivo para os dois efeitos. Aqui, testa-se a hipótese nula de $\rho = 1$ contra a alternativa de $\rho < 1$.

Caso a não estacionariedade seja identificada, o processo mais comumente utilizado é o da diferenciação da série. Este processo é chamado de integração $I(n)$, e o número de diferenciações necessárias para se alcançar a estacionariedade é a ordem n .

2.4 Função de autocorrelação (FAC) e função de autocorrelação parcial (FACP)

Muitas séries financeiras apresentam efeito serial de autocorrelação, os quais podem ser demonstrados pelos dois mecanismos apresentados, $AR(p)$ e $MA(q)$.

Para identificar a ordem do processo MA , é usual empregar o correlograma, chamado de FAC . Este gráfico apresenta a correlação entre x_t e suas defasagens: em um processo $MA(q)$, obter-se-ia uma correlação significativa até q defasagens, capturando o efeito de cada $\phi_i \omega_{t-i}$.

Por outro lado, em processos $AR(p)$, o fator autorregressivo implica que as perturbações em qualquer período são carregadas para o período t , havendo uma autocorrelação que decai lentamente, tornando difícil identificar a ordem p por este método. Para fazê-lo, o efeito particular de cada defasagem deve ser analisado empregando-se o $FACP$.

2.5 Teste Jarque-Bera

Usado para identificar a normalidade dos erros, Jarque e Bera (1981) elaboraram uma estatística empregando assimetria e curtose amostral, comparando-as com uma distribuição qui-quadrada com 2 graus de liberdade.

$$JB = (n/6) * \left(S^2 + \frac{C^2}{4} \right)$$

onde n é o número de observações, S assimetria amostral e C a curtose amostral.

⁶ PHILIPS, P. C. B.; PERRON, P. Testing for a Unit Root in Time Series Regression. *Biometrika*, 75 (2): 335-346, 1988.

Embora originalmente criado para o caso específico de variância condicional constante, Fiorentini et al (2003) comprovaram que, para grande parte de processos com efeito GARCH, o teste ainda é aplicável.

2.6 Teste ARCH-LM

Para testar se há heterocedasticidade na série, usa-se o teste ARCH-LM criado por Engle (1982). O teste é construído baseado no fato de que se os resíduos são condicionalmente heterocedásticos, o quadrado dos resíduos são autocorrelacionados.

Uma regressão auxiliar é feita na forma:

$$\epsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \epsilon_{t-s}^2 + \omega_t$$

onde a hipótese nula de $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$ é testada.

2.7 Teste Ljung-Box

Após a escolha de um modelo, como ARMA(p,q) ou GARCH(p,q), é necessário um método de avaliação da sua adequação. Para tal, é usada a estatística teste criada por Ljung & Box (1978)⁷, que é uma adaptação da estatística teste de Box & Pierce (1970)⁸ para menores amostras.

$$Q = n(n + 2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{(n - k - 1)}$$

onde $\hat{\rho}$ são as autocorrelações estimadas. Testa-se a hipótese nula de que a soma $\hat{\rho} = 0$, sob a distribuição qui-quadrada:

$$Q \rightarrow \chi_h^2$$

logo, se a hipótese nula não é rejeitada, há fortes evidências de que o processo gerador foi bem estimado.

2.8 Critérios de informação

⁷ LJUNG G. M. & BOX, G. E. P. On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika*, 65(2), 297–303, 1978.

⁸ BOX, G. E. P.; PIERCE, D. A. Distribution of residual correlations in autoregressive-integrated moving average time series models. *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1509–1526, 1970.

Os modelos apresentados são apenas algumas das diversas opções que podem ser estimadas para uma série temporal. A fim de identificar o “melhor” modelo, precisamos de ferramentas estatísticas para avaliá-los, os chamados critérios de informação.

Os quatro a serem empregados são o Critério de Informação Akaike (AIC)⁹; o Critério de Informação Bayesiano (BIC)¹⁰; o Critério de Informação Shibata (SIC)¹¹, e o Critério de Informação Hannan-Quinn (HQIC)¹².

O critério AIC estima a qualidade de cada modelo, baseada no valor previsto contra o valor observado. Considerando a função de verossimilhança, com K parâmetros, e L que a maximiza, o Critério de Informação Akaike é definido como:

$$AIC = -2\log(L) + 2K$$

Esta função leva em consideração o quão próximo do valor observado o modelo estimado está; enquanto, ao mesmo tempo, penaliza a inclusão de parâmetros adicionais a serem estimados. O modelo preferido é aquele com menor AIC.

Os outros três critérios são similares, mas são mais parcimoniosos quanto à adição de parâmetros. Possuem as seguintes fórmulas:

$$BIC = -2\log(L) + K * \log(n)$$

$$SIC = -2\log(L) + \log\left(\frac{n + 2K}{n}\right)$$

$$HQIC = -2\log(L) + \frac{2K * \log(\log(n))}{n}$$

3. RESULTADOS

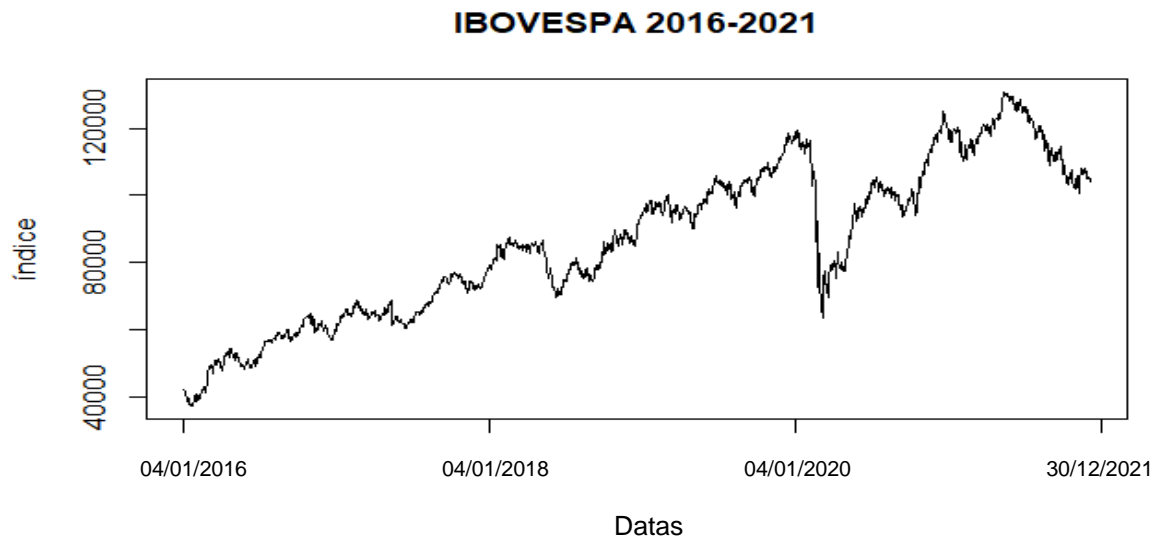
Gráfico 1 – Evolução do IBOVESPA no período 2016 a 2021

⁹ AKAIKE, H. Block Toeplitz matrix inversion. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 24(2), 234-241, 1973.

¹⁰ SCHWARTZ, G. Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, 461- 464, 1978.

¹¹ SHIBATA, R. Selection of the Order of an Autoregressive Model by Akaike’s Information Criterion. *Biometrika*, 63(1), 117–126, 1976.

¹² HANNAN, E. J; QUINN, B. G. The determination of the order of an autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 41(2), 190-195, 1979.



Fonte: Dados obtidos pelo site Investing.com

O gráfico 1 parece mostrar a presença de uma tendência positiva de longo prazo, onde o índice varia.

Para determinar a estacionariedade desta série, é aplicado o teste não paramétrico Phillips-Perron. Ao fazê-lo, não é rejeitada a hipótese nula de raiz unitária:

Phillips-Perron Unit Root Test

data: índice

*Dickey-Fuller Z(alpha) = -16.303, Truncation lag = 7, alternative hypothesis: stationary
p-value = 0.2004*

Esta série, então, é não estacionária, apresentando *drift*. O procedimento padrão é o de diferenciação, até se obter uma série estacionária. Como é de se esperar, após uma primeira integração, fazendo a diferença do logaritmo dos retornos e aplicando novamente o teste, rejeita-se a hipótese nula em favor da alternativa da hipótese alternativa:

Phillips-Perron Unit Root Test

data: log_retorno

*Dickey-Fuller Z(alpha) = -1800, Truncation lag = 7, alternative hypothesis: stationary
p-value < 0.01*

Aplicando o teste ADF, obtemos resultados semelhantes, onde a hipótese nula de não estacionariedade é rejeitada:

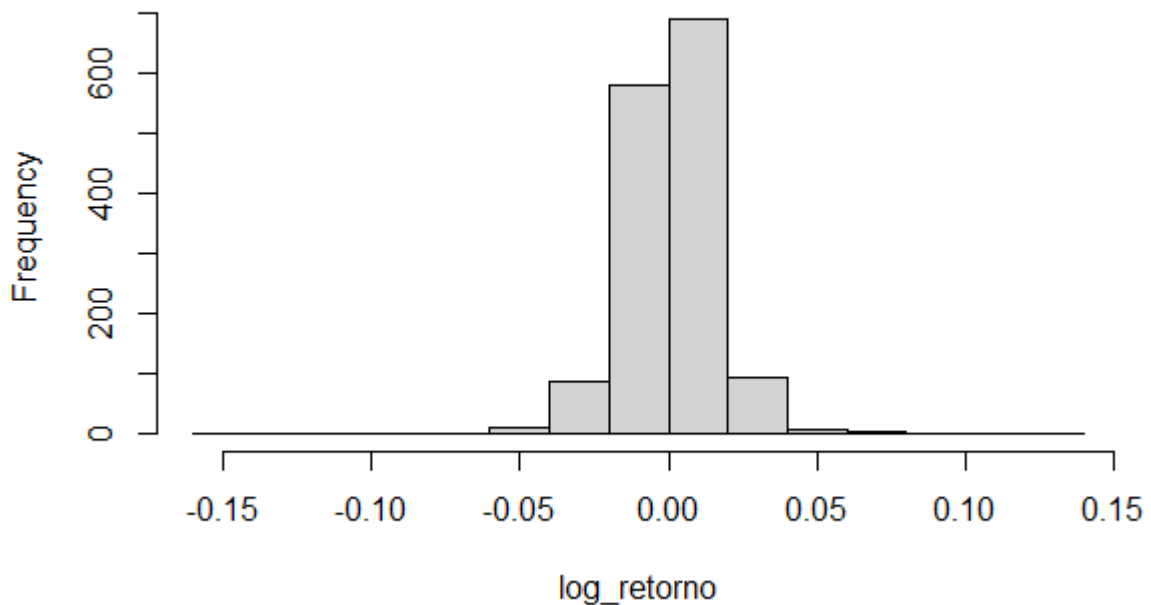
Augmented Dickey-Fuller Test

data: log_retorno

*Dickey-Fuller = -9.8749, Lag order = 11, p-value < 0.01
alternative hypothesis: stationary*

Para entender o processo que gera o IBOVESPA, a variação dos retornos de um período para o outro serão modelados. Uma consideração inicial que deve ser feita é quanto aos retornos apresentarem normalidade ou não. Podemos observar a distribuição através do histograma no gráfico 2:

Gráfico 2 – Histograma dos retornos diários



Fonte: Elaboração do autor

Ao aplicar o teste Jarque-Bera de normalidade, observa-se:

Jarque Bera Test

data: log_retorno

X-squared = 17009, df = 2, p-value < 2.2e-16

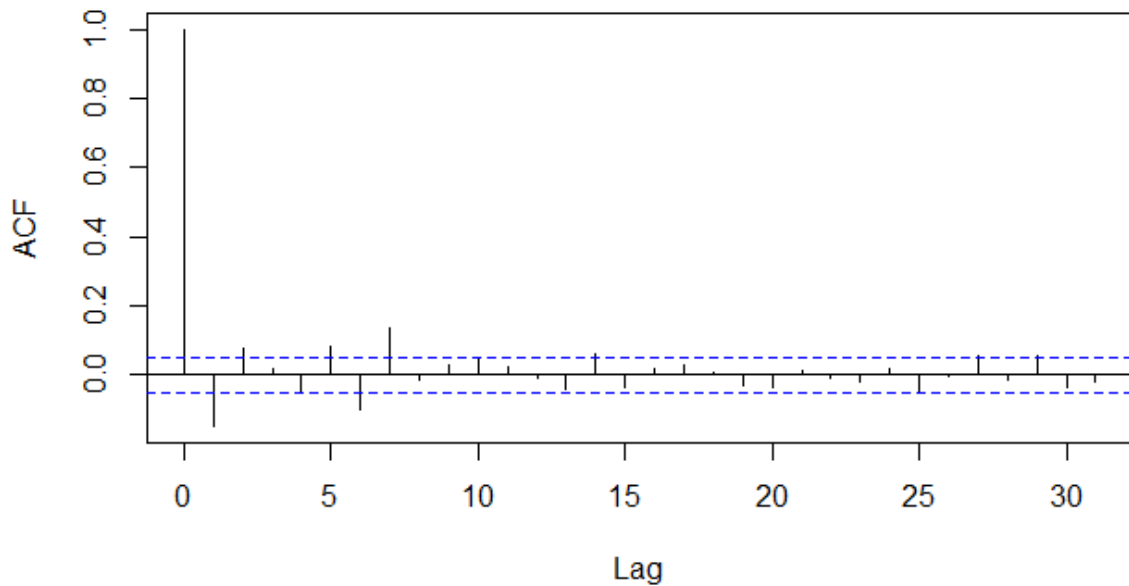
Kurtosis = 16.36268

Skewness = -1.289988

Como era de se esperar, o IBOVESPA não apresenta uma distribuição normal de retornos. Tendo uma alta curtose, as caudas da distribuição são consideravelmente maiores, enquanto *skewness* menor que -1 indica uma alta assimetria, com a cauda negativa maior.

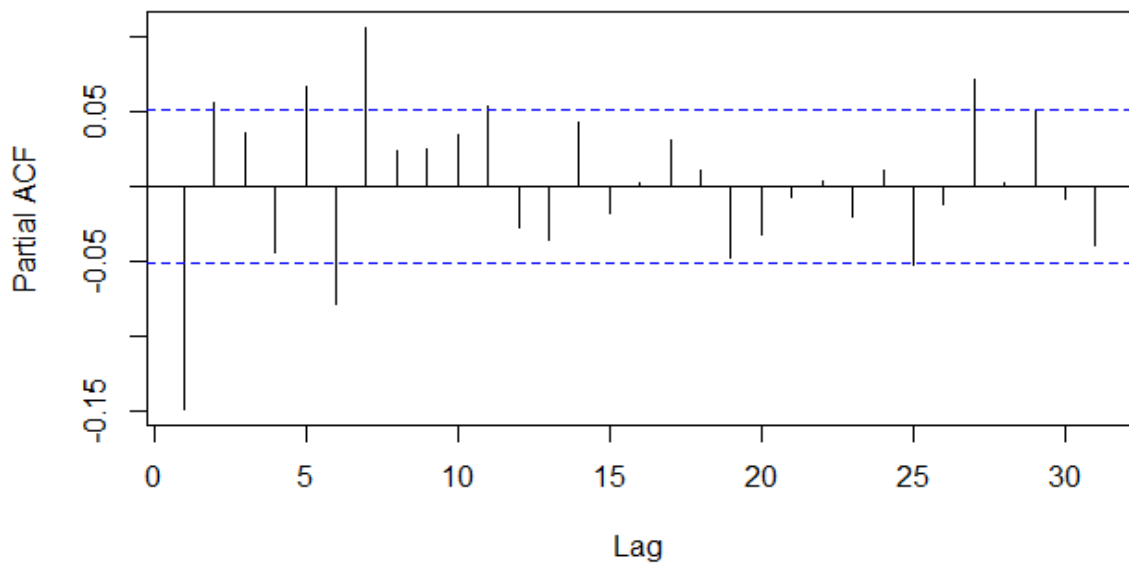
Para inferir a defasagem do processo ARMA mais apropriado, um FAC e FACP foram obtidos, com os seguintes gráficos:

Gráfico 3 – Correlograma dos retornos diários



Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 4 – Correlograma parcial dos retornos diários



Fonte: Elaboração do autor

A FAC é usada para sugerir a defasagem do processo autorregressivo da série; enquanto o FACP para o processo de média móvel. Em ambos os casos, a primeira defasagem é significativa quanto ao seu efeito no processo gerador. A adição de uma segunda defasagem quanto ao processo AR e MA pode se mostrar vantajosa.

Enquanto a média condicional será modelada por meio de um processo ARMA, também estamos interessados na volatilidade, representada na variância condicional da série. Ao se aplicar o teste LM:

Lagrange Multiplier test

data: log_retorno

LM = 1346.2, df = 1, p-value < 2.2e-16

alternative hypothesis: log_retorno is heteroscedastic

Observa-se que é rejeitada a hipótese nula de homocedasticidade da variância condicional em favor da hipótese alternativa de heterocedasticidade.

Dessa forma, utilizando o pacote rugarch do da linguagem de programação estatística R, foram estimados os modelos $ARMA(p,q) + *ARCH(p,q)$, onde p e q tomaram os valores de 1 e 2, obtendo-se os critérios de informação apresentados nas próximas tabelas, sendo que, com a cor vermelha, estão destacados aqueles com maior pontuação na métrica, e na cor verde, os com menor pontuação.

Tabela 1 – Métrica AIC

<i>GARCH</i>	<i>(1,1)</i>	<i>(1,2)</i>	<i>(2,1)</i>	<i>(2,2)</i>
<i>ARMA(1,1)</i>	-5.662.406	-5.661.193	-5.661.175	-5.659.844
<i>ARMA(1,2)</i>	-5.661.184	-5.659.853	-5.659.835	-5.658.504
<i>ARMA(2,1)</i>	-5.661.226	-5.659.905	-5.659.878	-5.658.556
<i>ARMA(2,2)</i>	-5.663.746	-5.658.693	-5.658.692	-5.661.068
<i>EGARCH</i>	<i>(1,1)</i>	<i>(1,2)</i>	<i>(2,1)</i>	<i>(2,2)</i>
<i>ARMA(1,1)</i>	-5.672.422	-5.671.831	-5.675.090	-5.672.197
<i>ARMA(1,2)</i>	-5.671.139	-5.670.501	-5.673.749	-5.670.865
<i>ARMA(2,1)</i>	-5.671.609	-5.671.292	-5.674.324	-5.671.325
<i>ARMA(2,2)</i>	-5.674.382	-5.673.690	-5.676.524	-5.672.828
<i>APARCH</i>	<i>(1,1)</i>	<i>(1,2)</i>	<i>(2,1)</i>	<i>(2,2)</i>
<i>ARMA(1,1)</i>	-5.673.210	-5.673.099	-5.675.021	-5.674.135
<i>ARMA(1,2)</i>	-5.672.065	-5.671.793	-5.674.782	-5.672.811
<i>ARMA(2,1)</i>	-5.672.703	-5.672.753	-5.674.080	-5.673.431
<i>ARMA(2,2)</i>	-5.670.975	-5.675.288	-5.672.642	-5.675.746

Fonte: Elaboração do autor

Tabela 2 – Métrica BIC

<i>GARCH</i>	<i>(1,1)</i>	<i>(1,2)</i>	<i>(2,1)</i>	<i>(2,2)</i>
<i>ARMA(1,1)</i>	-5.640.955	-5.636.167	-5.636.150	-5.631.244
<i>ARMA(1,2)</i>	-5.636.158	-5.631.252	-5.631.234	-5.626.329
<i>ARMA(2,1)</i>	-5.636.201	-5.631.304	-5.631.277	-5.626.380

<i>ARMA(2,2)</i>	-5.635.146	-5.626.518	<u>-5.626.516</u>	<u>-5.625.317</u>
<i>EGARCH</i>	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
<i>ARMA(1,1)</i>	<u>-5.647.397</u>	<u>-5.643.230</u>	-5.642.914	-5.636.446
<i>ARMA(1,2)</i>	-5.642.539	-5.638.325	-5.637.999	-5.631.539
<i>ARMA(2,1)</i>	<u>-5.643.009</u>	-5.639.116	-5.638.573	-5.631.999
<i>ARMA(2,2)</i>	<u>-5.642.206</u>	-5.637.939	-5.637.198	-5.629.927
<i>APARCH</i>	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
<i>ARMA(1,1)</i>	<u>-5.644.609</u>	-5.640.924	-5.639.271	-5.634.809
<i>ARMA(1,2)</i>	-5.639.889	-5.636.042	-5.635.456	-5.629.910
<i>ARMA(2,1)</i>	-5.640.527	-5.637.002	-5.634.754	-5.630.530
<i>ARMA(2,2)</i>	-5.635.224	-5.635.962	-5.629.741	-5.629.271

Fonte: Elaboração do autor

Tabela 3 – Métrica SIC

<i>GARCH</i>	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
<i>ARMA(1,1)</i>	-5.662.438	-5.661.237	-5.661.220	-5.659.902
<i>ARMA(1,2)</i>	-5.661.228	-5.659.911	-5.659.893	<u>-5.658.577</u>
<i>ARMA(2,1)</i>	-5.661.270	-5.659.962	-5.659.935	<u>-5.658.629</u>
<i>ARMA(2,2)</i>	-5.663.804	<u>-5.658.766</u>	<u>-5.658.765</u>	-5.661.158
<i>EGARCH</i>	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
<i>ARMA(1,1)</i>	-5.672.467	-5.671.888	<u>-5.675.163</u>	-5.672.287
<i>ARMA(1,2)</i>	-5.671.197	-5.670.574	-5.673.840	-5.670.974
<i>ARMA(2,1)</i>	-5.671.667	-5.671.365	-5.674.414	-5.671.434
<i>ARMA(2,2)</i>	-5.674.455	-5.673.780	<u>-5.676.633</u>	-5.672.957
<i>APARCH</i>	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
<i>ARMA(1,1)</i>	-5.673.267	-5.673.172	-5.675.112	-5.674.244
<i>ARMA(1,2)</i>	-5.672.138	-5.671.883	-5.674.891	-5.672.940
<i>ARMA(2,1)</i>	-5.672.776	-5.672.843	-5.674.189	-5.673.561
<i>ARMA(2,2)</i>	-5.671.065	<u>-5.675.397</u>	-5.672.771	<u>-5.675.898</u>

Fonte: Elaboração do autor

Tabela 4 – Métrica HQIC

<i>GARCH</i>	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
<i>ARMA(1,1)</i>	-5.654.410	-5.651.865	-5.651.847	-5.649.183
<i>ARMA(1,2)</i>	-5.651.855	-5.649.192	-5.649.174	<u>-5.646.511</u>
<i>ARMA(2,1)</i>	-5.651.898	-5.649.244	-5.649.217	<u>-5.646.562</u>

<i>ARMA(2,2)</i>	-5.653.086	-5.646.700	-5.646.699	-5.647.742
<i>EGARCH</i>	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
<i>ARMA(1,1)</i>	-5.663.094	-5.661.170	-5.663.097	-5.658.871
<i>ARMA(1,2)</i>	-5.660.478	-5.658.508	-5.660.423	-5.656.206
<i>ARMA(2,1)</i>	-5.660.949	-5.659.298	-5.660.998	-5.656.666
<i>ARMA(2,2)</i>	-5.662.389	-5.660.364	-5.661.866	-5.656.836
<i>APARCH</i>	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
<i>ARMA(1,1)</i>	-5.662.549	-5.661.106	-5.661.695	-5.659.476
<i>ARMA(1,2)</i>	-5.660.071	-5.658.467	-5.660.123	-5.656.819
<i>ARMA(2,1)</i>	-5.660.710	-5.659.426	-5.659.421	-5.657.440
<i>ARMA(2,2)</i>	-5.657.649	-5.660.629	-5.656.651	-5.658.423

Fonte: Elaboração do autor

A expectativa inicial de que uma segunda defasagem da média condicional ser significativa mostrou-se correta.

Reunindo os critérios, o modelo que melhor se adequou foi um $ARMA(2,2) + EGARCH(2,1)$, apresentando os menores AIC e SIC.

O modelo de menor BIC foi um $ARMA(1,1) + EGARCH(1,1)$, apresentando também o segundo menor HQIC.

O modelo de menor HQIC foi um $ARMA(1,1) + EGARCH(2,1)$, com o quarto menor SIC e quarto menor AIC.

Outro modelo que se mostrou relevante foi um $ARMA(2,2) + APARCH(2,2)$, com segundo menor AIC e SIC.

Os coeficientes estimados dos quatro melhores modelos, junto com os do $ARMA(1,1) + GARCH(1,1)$ para fim de comparação, são apresentados na tabela 5 presente na página seguinte.

Tabela 5 – Estimação dos coeficientes para os modelos selecionados

	$ARMA(2,2) + EGARCH(2,1)$	$ARMA(1,1) + EGARCH(1,1)$	$ARMA(1,1) + EGARCH(2,1)$	$ARMA(2,2) + APARCH(2,2)$	$ARMA(1,1) + GARCH(1,1)$
--	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	--------------------------

μ	0,000770	0,000704	0,000720	0,000693	0,000934
s.e.	0,000275	0,000332	0,000425	0,000204	0,000324
ϕ_1	-1,427066	-0,113182	-0,094587	-1,438960	-0,111131
s.e.	-0,110899	0,069569	0,087132	0,037529	0,354474
ϕ_2	-0,645667			-0,649443	
s.e.	0,023249			0,017932	
ϕ_1	1,374898	0,066363	0,046112	1,383451	0,045661
s.e.	0,124471	0,067652	0,081005	0,038276	0,356269
ϕ_2	0,581255			0,582058	
s.e.	0,025528			0,018666	
Ω	-0,372778	-0,433232	-0,384909	0,001464	0,000013
s.e.	0,125013	0,127634	0,126758	0,001356	0,000000
α_1	-0,170444	-0,085463	-0,178736	0,107810	0,103277
s.e.	0,052325	0,025585	0,042734	0,028008	0,007307
α_2	0,098846		0,103171	0,034629	
s.e.	0,038665		0,036067	0,015773	
β_1	0,955569	0,948317	0,954075	0,734713	0,841533
s.e.	0,014550	0,014958	0,014785	0,161201	0,011999
β_2				0,097168	
s.e.				0,142206	
γ_1	0,186823	0,199439	0,180526	0,864533	
s.e.	0,070782	0,026927	0,069219	0,254930	
γ_2	0,011305		0,018651	-1,000000	
s.e.	0,062508		0,061100	0,000534	
δ				0,891980	
s.e.				0,217569	

Fonte: Elaboração do autor

Aplicando-se os testes Ljung-Box e LM, observamos na tabela 6 e 7 que todos os modelos apresentam boa especificação com ausência de heterocedasticidade condicional:

Tabela 6 – Resultados dos Teste Ljung-Box

H0: No serial correlation

<i>ARMA(2,2) + EGARCH(2,1)</i>			<i>ARMA(1,1) + EGARCH(1,1)</i>		
	Statistic	P-value		Statistic	P-value
Lag[1]	0,03868	0,8441	Lag[1]	0,01331	0,9082
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][8]	1,38153	0,9405	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]	0,65623	0,9311
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][14]	2,4304	0,9803	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]	1,13606	0,9799
d.o.f	3	3	d.o.f	2	2

<i>ARMA(1,1) + EGARCH(2,1)</i>			<i>ARMA(2,2) + APARCH(2,2)</i>		
	Statistic	P-value		Statistic	P-value
Lag[1]	0,02198	0,8822	Lag[1]	0,00247	0,9604
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][8]	1,60924	0,9139	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][11]	1,53743	0,9835
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][14]	2,75275	0,9678	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][19]	2,7451	0,997
d.o.f	3	3	d.o.f	4	4

ARMA(1,1) + GARCH(1,1)

	Statistic	P-value
Lag[1]	0,06479	0,7991
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]	0,40185	0,9717
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]	1,55846	0,9507
d.o.f	2	2

Tabela 7 – Resultados dos Testes ARCH-LM

H0: No ARCH effect

<i>ARMA(2,2) + EGARCH(2,1)</i>			<i>ARMA(1,1) + EGARCH(1,1)</i>		
	Statistic	P-value		Statistic	P-value
ARCH Lag[4]	0,2882	0,5914	ARCH Lag[3]	0,03254	0,8568
ARCH Lag[6]	0,4745	0,8991	ARCH Lag[5]	0,22701	0,959
ARCH Lag[8]	0,8736	0,942	ARCH Lag[7]	0,4588	0,982

<i>ARMA(1,1) + EGARCH(2,1)</i>			<i>ARMA(2,2) + APARCH(2,2)</i>		
	Statistic	P-value		Statistic	P-value
ARCH Lag[4]	0,2603	0,6099	ARCH Lag[5]	0,2354	0,6276
ARCH Lag[6]	0,4783	0,898	ARCH Lag[7]	0,4903	0,8998

ARCH Lag[8]	0,9595	0,9302	ARCH Lag[9]	0,6567	0,9711
-------------	--------	--------	-------------	--------	--------

ARMA(1,1) + GARCH(1,1)

	Statistic	P-value
ARCH Lag[3]	0,03513	0,8513
ARCH Lag[5]	0,36861	0,9215
ARCH Lag[7]	0,55464	0,9732

Fonte: Elaboração do autor

4. INTERPRETAÇÃO E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Observando-se os resultados, o processo gerador da média apresenta um efeito negativo autorregressivo em todos os modelos, assim como um efeito positivo na média móvel.

O componente $AR(p)$ nos dá o efeito *carry-over* de realizações passadas no valor esperado presente, com o quão mais perto de 1 ele for, mais longo o decaimento para a média do processo será. O valor relativamente longe em módulo de $AR(1)$ indica um decaimento rápido de volta à média após a realização do retorno.

O componente $MA(1)$ nos diz o quanto choques passados afetam a esperança de novas realizações e, no caso do IBOVESPA, apresenta um valor estimado baixo, significando um baixo efeito positivo, embora não negligenciável, de novas informações representados no erro, em realizações futuras.

O indício que uma segunda defasagem no efeito da média móvel pudesse se mostrar vantajoso na estimação do modelo mostrou-se correto, com os modelos $ARMA(2,2)$ apresentando alguns dos menores critérios de informação. Isso indica que a inclusão de mais uma ordem p e q pode ser relevante em modelar o processo, resultado incomum quando comparado a estudos passados. Os trabalhos de outros autores discutidos adiante, a fim de entender a volatilidade, todos assumem um processo $ARMA(1,1)$, significando que nos últimos anos a "memória" da média condicional quanto aos choques aumentou.

Quanto à heterocedasticidade da série, é interessante notar que modelos assimétricos, de ordem $p > 1$, mostraram-se preferíveis, sendo que três das quatro especificações com melhores critérios de informação apresentaram essas características. Os resultados são incomuns quando comparados a outras aplicações. Hansen & Lunde (2005) analisaram uma

gama de modelos paramétricos para volatilidade e concluíram que em poucas ocasiões defasagens maiores geraram melhores estimações do que GARCH de primeira ordens.

Os coeficientes α_1 e α_2 mostram uma reação significativa na volatilidade em relação a choques anteriores. O γ_1 positivo aponta a assimetria observada na variância condicional, com choques negativos tendo efeitos mais fortes na volatilidade do que choques positivos. Este resultado condiz com o fato de que as perdas terão um efeito mais profundo nas expectativas de curto prazo do que ganhos pronunciados. Outro fato é o da persistência de choques na volatilidade, ou "aglomeração" de picos dessa. O β_1 alto aponta para essa persistência de aumentos da variância condicional defasados.

Os resultados obtidos assemelham-se aos de Júnior e Kobunda (2019). Ao modelar o período de 2001-2016 do IBOVESPA sob modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1), e TARARCH(1,1), acharam uma persistência de choques na volatilidade representado pelo coeficiente β_1 acima de 0,92 para todos os modelos estimados. O trabalho também constatou a existência de assimetria na variância condicional dos retornos, o que é de se esperar com séries financeiras. O γ_1 encontrado na estimação EGARCH(1,1) foi de 0,1159, a contraponto do 0,1994 observado no presente trabalho. Isto pode significar uma mudança no efeito alavancagem de choques, com investidores mais sensíveis a grandes retornos negativos.

Ainda quanto ao trabalho de Júnior e Kobunda (2019), é interessante notar que o melhor modelo estimado quando são considerados os critérios de informação, foi o modelo EGARCH(1,1). No presente trabalho, foi observado que, para o período subsequente (2016-2021), uma segunda defasagem na estimação da variância condicional passou a ser preferível, e que a verossimilhança adicional obtida ganha da penalização de se estimar mais uma variável.

Ao estimar a variância condicional da Petrobras (PETR4), no período de 2000 a 2008, Da Silva (2009) encontrou uma elevada persistência da volatilidade quando usado um modelo GARCH(1,1), com coeficiente β_1 de 0,899, comparado aos 0,841 do período de 2016-2021 do IBOVESPA. Esta discrepância entre os dois, provavelmente, resulta de o IBOVESPA ser uma carteira diversificada, onde os efeitos de cada ação que o compõem são compensados por outras. Outro motivo, é o da menor relevância deste modelo quanto aos dias de hoje, uma vez que GARCH(1,1) não se diferenciou quanto aos outros candidatos.

A assimetria encontrada por Da Silva (2009) representada no γ_1 ao modelar por um EGARCH(1,1), foi de 0,2128, mais na linha dos resultados da IBOVESPA no período estudado neste trabalho. A assimetria foi constatada nesse período, com "más notícias", tendo um efeito superior na volatilidade na cotação da Petrobrás do que boas notícias.

Jubert et al. (2009) analisaram a volatilidade de uma série de índices sob a ótica de efeitos ARCH no período de 2006-2007. Os índices estudados foram o IBOVESPA, e os índices setoriais: Índice de Energia Elétrica (IEE), Índice de Sustentabilidade Empresarial (ISE), Índice do Setor Industrial (INDX) e o Índice de Telecomunicações (ITEL). A persistência β_1 foi de 0,887 para o IBOVESPA, quando empregado um modelo EGARCH(1,1), apresentando uma magnitude menor que encontramos para o período de 2016-2021. Isto é mais uma indicação de uma mudança estrutural do processo gerador, onde agentes econômicos hoje mostram-se com memória mais longa do que aqueles no boom econômico pré 2008. A assimetria encontrada para este período condiz com a presente, com um γ_1 de -0,188 para o IBOVESPA, e valores entre -0,135 e -0,237 para os demais índices setoriais, com o índice ITEL apresentando a menor assimetria, e o IEE a maior.

Morais e Portugal (1999) investigaram o processo gerador do IBOVESPA assumindo a autocorrelação serial da variância condicional. Ao modelar o período de 04/07/1994 a 09/10/1998, o EGARCH(1,1) apresentou uma persistência de 0,95, o resultado mais próximo ao deste estudo entre as demais pesquisas. Ao comparamos o período de alta turbulência econômica estudado por eles, afetado por três crises em um curto período (crise do México, crise asiática, e moratória da Rússia), com o deste trabalho, encontramos similaridades com o nível de turbulência enfrentado pelo Brasil na última meia década, com as diversas crises políticas e uma pandemia duradoura.

Os coeficientes estimados no presente estudo e no de Moraes e Portugal são maiores que os coeficientes dos outros estudos mencionados, o que é explicado pelo fato de os outros estudos serem sobre períodos que não passaram por épocas de crise ou trataram de períodos longos, onde crises representam uma fração pequena do tempo estudado.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho se propôs a analisar o índice BOVESPA do período 2016 a 2021, a fim de entender a dinâmica de seu processo. Após a identificação de autocorrelação serial nos retornos, assim como nos resíduos estimados, mostrou-se necessário modelar o processo corrigindo esses efeitos, por meio de um ARMA e de um modelo autorregressivo de heterocedasticidade condicional.

Os indícios de segunda defasagens constatados no gráfico da função de autocorrelação e no gráfico da função de autocorrelação parcial mostraram-se verdadeiros, com dois dos melhores modelos baseados nos critérios de informação, apresentando duas defasagens em ambos processos AR e MA. Similarmente, uma segunda defasagem p no processo ARCH(p, q) mostrou-se preferível, com três das quatro melhores especificações o tendo.

Por fim, após estimados os coeficientes dos diversos modelos, foi mostrado o elevado nível de persistência de choques defasados na volatilidade, de até dois períodos antecedentes. Este resultado condiz com estudos passados, como o de Junior et al. (2019) e de Moraes e Portugal (1999). A magnitude do efeito foi entendida como similar àquela vista nos períodos de grande turbulência econômica, como na primeira metade da década de 90. Da mesma forma, a assimetria do efeito de novas informações sobre a volatilidade futura foi constatada, com notícias negativas tendo impactos desproporcionalmente maiores nos retornos do que boas notícias.

REFERÊNCIAS

DA SILVA, C. A. G. Modelagem de estimação da volatilidade do retorno das ações brasileiras: os casos da Petrobrás e Vale. **Cadernos do IME-Série Estatística**, 26(1), 15, 2009.

FIorentini, G.; SENTANA, E.; CALZONARI, G. **On the Validity of the Jarque-Bera Normality Test in Conditionally Heteroskedastic Dynamic Regression Models**, Working Papers, CEMFI, 2003.

GAIO, L. E., PESSANHA, G. R. G., OLIVEIRA, D. R. D., & ÁZARA, L. N. D. Análise da volatilidade do índice Bovespa: um estudo empírico utilizando modelos da classe ARCH. Contextus – **Revista Contemporânea de Economia e Gestão**, v. 5, n. 1, 2007.

HANSEN, P. R.; LUNDE, A. A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH (1, 1)? **Journal of applied econometrics**, 20(7), 873-889, 2005.

JUBERT, R. W., DO MONTE, P. A., PAIXÃO, M. C. S., & DE LIMA, W. H. Um estudo do padrão de volatilidade dos principais índices financeiros do Bovespa: uma aplicação de modelos ARCH. **Revista Contabilidade, Gestão e Governança**, v. 11, n. 1-2, 2009.

JUNIOR E. C. N., & KOBUNDA, C. N. Análise da volatilidade do Ibovespa entre 2001 e 2016: uma estimação através de modelos ARCH. **Revista de Economia**, 40(72), 2019.

MORAIS, I. A. C. & PORTUGAL, M. S. **Modelagem e previsão de volatilidade determinística e estocástica para a série do Ibovespa**. 1999.

NELSON, D. B. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach. **Econometrica**, v. 59, p.347-370, 1991.

TAYLOR, S.J. **Modelling financial time series**. Wiley, 1986