



SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS E A FORMAÇÃO DO ESTADO DE QUIMERA

Phablo Ramos Carvalho

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Rio de Janeiro
Novembro de 2020

SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS E A FORMAÇÃO DO ESTADO
DE QUIMERA

Phablo Ramos Carvalho

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Aprovada por: Prof. Marcelo Amorim Savi
Prof. Thiago Gamboa Ritto
Prof. Gustavo Rabello dos Anjos
Prof. Wallace Moreira Bessa
Prof. José Manoel Balthazar

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
NOVEMBRO DE 2020

Carvalho, Phablo Ramos

Sincronização de Sistemas Mecânicos e a Formação do Estado de Quimera / Phablo Ramos Carvalho – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2020.

XVII, 150 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Tese – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 141-150.

1. Análise não-linear. 2. Sincronização. 3. Estado de quimera. I. Savi, Marcelo Amorim. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS E A FORMAÇÃO DO ESTADO DE QUIMERA

Phablo Ramos Carvalho

Novembro/2020

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Programa: Engenharia Mecânica

O fenômeno da sincronização está presente em diversos sistemas naturais, participando de processos físicos, químicos e biológicos. Esse comportamento coletivo de sistemas dinâmicos apresenta padrões que dependem dos tipos de acoplamento do sistema. Neste trabalho, é investigado o processo de sincronização em um sistema mecânico composto por três populações de osciladores tipo carro-pêndulo conectados entre si. Simulações numéricas permitem avaliar como as condições iniciais e os parâmetros do sistema influenciam na formação de um estado sincronizado e quais tipos de padrão surgem do sistema. A identificação de cada tipo de comportamento é avaliada a partir da série temporal da resposta, definindo o grau de sincronia e permitindo a interpretação sobre a formação do estado de quimera que consiste em um comportamento que combina aspectos do estado sincronizado e dessincronizado. Propõe-se uma análise baseada no fluxo de energia transmitido entre os osciladores para distinguir um estado sincronizado qualquer de um estado dessincronizado e do estado de quimera. A partir da distribuição deste fluxo de energia e a relação com os comportamentos foi proposta uma hipótese para a formação do estado de quimera. A análise da robustez dos padrões dinâmicos mostra a resposta do estado de quimera sob a influência de componentes aleatórios no forçamento e na dissipação que corroboram com a hipótese da energia.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

SINCHRONIZATION OF MECHANICAL SYSTEMS AND THE FORMATION OF
CHIMERA STATES

Phablo Ramos Carvalho

November/2020

Advisor: Marcelo Amorim Savi

Department: Mechanical Engineering

The synchronization phenomenon is present in many natural systems, participating of physical, chemical and biological processes. This collective behavior of dynamical systems displays diverse patterns which depends of the coupling kind in the system. The present work investigates the synchronization process in a mechanical system compound of 3 pendulum-charts system coupled. Numerical simulation permit evaluates how initial conditions and the system parameters interfere in the formation of synchronized state and what kinds of synchronized patterns emerge of the system. The identification of each kind of behavior is evaluated from a temporal series response, defining the synchrony degree and permitting the interpretation about the chimera state formation, state which combine aspects of synchronized and desynchronized behaviors simultaneously. An analyze based on the energy flux among the oscillators is proposed to distingue any synchronized state from a desynchronized and the chimera state. Based on this energy flux distribution and its relation with the collective behaviors is proposed a hypothesis for the formation of the chimera state. The analysis of the robustness of dynamical patterns shows the response of the chimera state under the influence of random components in the excitation and dissipation which support the energy hypothesis.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	6
2	REVISÃO DE LITERATURA	7
2.1	EXPERIMENTOS COM SINCRONIZAÇÃO.....	14
2.1.1	EXPERIMENTOS COM O ESTADO DE QUIMERA.....	16
3	SINCRONIZAÇÃO	19
3.1	PADRÕES DINÂMICOS	19
3.2	MODELO DE KURAMOTO	22
3.3	METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO A PARTIR DA SÉRIE TEMPORAL.....	27
4	MODELAGEM DO SISTEMA MECÂNICO.....	29
4.1	MODELAGEM.....	29
4.2	TIPOS DE RESPOSTAS DO SISTEMA	34
5	ANÁLISE DINÂMICA DO SISTEMA.....	49
5.1	INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ	61
5.2	EFEITO DAS CONDIÇÕES INICIAIS	64
6	ANÁLISE PARAMÉTRICA	77
6.1	ANÁLISE DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS	87
6.2	ANÁLISE DO FLUXO DE ENERGIA.....	90
7	ROBUSTEZ DOS PADRÕES DINÂMICOS	102
7.1	ROBUSTEZ EM RELAÇÃO AO FORÇAMENTO	102
7.1.1	FREQUÊNCIA DE EXCITAÇÃO COM DISTRIBUIÇÃO NORMAL.....	102
7.1.2	AMPLITUDE DE EXCITAÇÃO COM DISTRIBUIÇÃO NORMAL.....	108
7.1.3	RUÍDO ADICIONADO À EXCITAÇÃO HARMÔNICA	113
7.2	ROBUSTEZ DOS PADRÕES DINÂMICOS EM RELAÇÃO AO AMORTECIMENTO.....	119
7.3	CONDIÇÕES INICIAIS ALEATÓRIAS E DESESTABILIZAÇÃO.....	128
8	ROBUSTEZ DO ESTADO DE QUIMERA COM RELAÇÃO À ASSIMETRIA	132
9	CONCLUSÕES.....	138
10	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA	141

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Desenho feito por Huygens para demonstrar o posicionamento dos relógios em seus experimentos. Fonte: HUYGENS (1666), página 185.....	2
Figura 1.2. Desenho feito por Huygens para descrever o fenômeno da sincronização. No detalhe observa-se o ponto D representando uma massa a qual ele acrescentou em testes realizados com o sistema. Fonte: HUYGENS (1666), página 183.	2
Figura 2.1. Espectro do ritmo cerebral contendo um pico para a frequência do ritmo alpha. Fonte: WIENER (1958), página 69.	8
Figura 2.2. Diferentes acoplamentos. a) Sistema totalmente acoplado; b) Sistema com acoplamento intermediário com os vizinhos mais próximos e c) acoplamento com apenas os primeiros vizinhos.	11
Figura 2.3. Osciladores divididos em duas populações distintas e simétricas A e B.	12
Figura 2.4. Osciladores divididos em duas populações, interna e externa ao círculo pontilhado. Os osciladores externos são dependentes dos internos para a comunicação com os demais o que caracteriza como uma relação hierárquica entre as duas populações.	12
Figura 2.5. Foto do experimento de sincronização com metrônimos. Fonte: PANTALEONE (2002).	15
Figura 2.6. Ponte do milênio e o efeito dos pedestres atravessando. Fonte: STROGATZ <i>et al.</i> (2005).	16
Figura 2.7. Modelo experimental composto por duas plataformas em movimento de balanço acopladas por uma mola e nas quais estão posicionados quinze metrônimos em cada. Fonte: MARTENS <i>et al.</i> (2013).	17
Figura 2.8. Sistema de metrônimos acoplados em anel. Fonte: KAPITANIAK <i>et al.</i> (2015). ..	18
Figura 3.1. Esquema com três osciladores acoplados apresentando os comportamentos: a) sincronizado, b) sincronizado em oposição de fase, c) frequência fechada, d) longo período de sincronização, e) Estado de quimera e f) dessincronizado.	20
Figura 3.2. Sincronização de fase.	21
Figura 3.3. Os estados de fase dos osciladores $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ distribuídos em um círculo unitário e vetores de estado associados y_1, y_2, \dots, y_n . O comprimento da soma do vetor $\sum y_i$ dividido por N dá a magnitude do parâmetro de ordem. Fonte: KURAMOTO (1984).	26
Figura 3.4. Fluxograma de identificação e classificação da sincronização a partir da série temporal.	28
Figura 4.1. Desenho esquemático do modelo mecânico composto de três populações de osciladores carro-pêndulo.	29
Figura 4.2. Modelo conceitual do sistema mecânico.	30
Figura 4.3. Espaço de fase para os carros em resposta sincronizada, o ponto marcado sobre a linha denota a seção de Poincaré.	35
Figura 4.4. Espaço de fase para os pêndulos com uma resposta sincronizada.	36
Figura 4.5. Diferença de posição entre os osciladores em comportamento sincronizado.	36
Figura 4.6. Espaço de estados para os carros com resposta caótica sincronizada.	37
Figura 4.7. Espaço de estados para os pêndulos com resposta caótica sincronizada.	37
Figura 4.8. Diferença de posição entre os osciladores em comportamento sincronizado caótico.	38
Figura 4.9. Espaço de fase para os carros em estado dessincronizado.	39
Figura 4.10. Espaço de fase para os pêndulos em estado dessincronizado.	39

Figura 4.11. Diferença de posição entre os osciladores em comportamento dessincronizado....	40
Figura 4.12. Posição dos carros no tempo com resposta de longo período de sincronização, em destaque o período de resposta do sistema.....	40
Figura 4.13. Posição dos pêndulos no tempo com comportamento de longo período de sincronização, em destaque o período de oscilação.	41
Figura 4.14. Espaço de estados dos carros sob uma resposta de longo período de oscilação (LPS).	41
Figura 4.15. Espaço de estados dos pêndulos sob uma resposta de longo período de oscilação (LPS).	42
Figura 4.16. Diferença de posição entre os osciladores em comportamento de longo período de sincronização.....	42
Figura 4.17. Espaço de fase para os carros sob a resposta de frequência fechada.	43
Figura 4.18. Espaço de fase para os pêndulos sob comportamento de frequência fechada.	44
Figura 4.19. Diferença de posição entre os osciladores em comportamento de frequência fechada.	44
Figura 4.20. Espaço de fase para os pêndulos em oposição de fase.....	45
Figura 4.21. Diferença de posição entre os osciladores com os pêndulos em comportamento de sincronização em oposição de fase.....	45
Figura 4.22. Resposta no tempo dos carros sob o estado de quimera.	46
Figura 4.23. Resposta no tempo dos pêndulos sob o estado de quimera.....	46
Figura 4.24. Espaço de fase dos carros sob o estado de quimera.	47
Figura 4.25. Espaço de fase dos pêndulos sob o estado de quimera.	47
Figura 4.26. Diferença de posição entre os osciladores no estado de quimera.	48
Figura 5.1. Diagrama de bifurcação para $k_1 = k_2 = k_3 = 20$ N/m, sem atualizar as condições iniciais.	49
Figura 5.2. Variação temporal dos carros para $\Omega = 2$ rad/s.	50
Figura 5.3. Variação temporal dos pêndulos para $\Omega = 2$ rad/s, onde $\phi_1 \neq \phi_2 = \phi_3$	50
Figura 5.4. Espaço de fase para os blocos para $\Omega = 2$ rad/s.....	51
Figura 5.5. Espaço de fase para os pêndulos para $\Omega = 2$ rad/s.....	51
Figura 5.6. Espaço de fase para os carros de $\Omega = 5$ rad/s.	52
Figura 5.7. Espaço de fase para os pêndulos de $\Omega = 5$ rad/s.....	52
Figura 5.8. Evolução temporal os carros para $\Omega = 15$ rad/s.	53
Figura 5.9. Evolução temporal os pêndulos para $\Omega = 15$ rad/s.....	53
Figura 5.10. Espaço de fase para os carros para $\Omega = 15$ rad/s.	54
Figura 5.11. Evolução temporal para os pêndulos para $\Omega = 15$ rad/s.....	54
Figura 5.12. Espaço de fase dos carros para $\Omega = 25$ rad/s.....	55
Figura 5.13. Espaço de fase para os pêndulos para $\Omega = 25$ rad/s.	56
Figura 5.14. Espaço de fase para os carros para $\Omega = 25,1$ rad/s.....	56
Figura 5.15. Espaço de fase para os pêndulos para $\Omega = 25,1$ rad/s.	57
Figura 5.16. Espaço de fase para os carros para $\Omega = 26$ rad/s.	57
Figura 5.17. Espaço de fase para os pêndulos para $\Omega = 26$ rad/s.	58
Figura 5.18. Espaço de fase para os carros para $\Omega = 28,3$ rad/s.....	59
Figura 5.19. Espaço de fase para os pêndulos para $\Omega = 28,3$ rad/s.	59
Figura 5.20. Espaço de fase para os carros para $\Omega = 28,4$ rad/s.....	60
Figura 5.21. Espaço de fase para os pêndulos para $\Omega = 28,4$ rad/s.	60

Figura 5.22. Diagrama de bifurcação com molas $k_1 = k_2 = k_3 = 40$ N/m e condição inicial de deslocamento dos carros 2 e 3 com valor de um.....	61
Figura 5.23. Diagrama de bifurcação com molas $k_1 = k_2 = k_3 = 50$ N/m e condição inicial de deslocamento do carro 1 com valor de um.....	62
Figura 5.24. Diagrama de bifurcação com molas $k_1 = k_2 = k_3 = 80$ N/m e condição inicial de deslocamento do carro 1 com valor de um.....	63
Figura 5.25. Diagrama de bifurcação com molas $k_1 = k_2 = k_3 = 100$ N/m e condição inicial de deslocamento do carro 1 com valor de um.	63
Figura 5.26. Diagrama de bifurcação com molas $k_1 = k_2 = k_3 = 40$ N/m e condição inicial de deslocamento nula para carros.	64
Figura 5.27. Evolução temporal para os carros para condições iniciais nulas.	64
Figura 5.28. Evolução temporal dos pêndulos para condições iniciais nulas.	65
Figura 5.29. Espaço de fase para os carros para condições iniciais nulas.....	65
Figura 5.30. Espaço de fase para os pêndulos para condições iniciais nulas.	66
Figura 5.31. Evolução temporal dos carros condição inicial com todos os carros com deslocamento unitário.	67
Figura 5.32. Evolução temporal dos pêndulos condição inicial com todos os carros com deslocamento unitário.	67
Figura 5.33. Espaço de fase dos carros condição inicial com todos os carros com deslocamento unitário.	68
Figura 5.34. Espaço de fase dos pêndulos condição inicial com todos os carros com deslocamento unitário.	68
Figura 5.35. Evolução temporal dos carros com condição inicial de deslocamento unitário do primeiro carro.....	69
Figura 5.36. Evolução temporal para os pêndulos com condição inicial de deslocamento unitário do primeiro carro.....	69
Figura 5.37. Espaço de fase para os carros com condição inicial de deslocamento unitário do primeiro carro.....	70
Figura 5.38. Espaço de fase para os pêndulos com condição inicial de deslocamento unitário do primeiro carro.....	70
Figura 5.39. Evolução temporal dos pêndulos condição inicial com o segundo carro com deslocamento unitário.	71
Figura 5.40. Espaço de fase dos pêndulos condição inicial com o segundo carro com deslocamento unitário.	72
Figura 5.41. Evolução temporal dos pêndulos com o terceiro carro com deslocamento unitário e os demais no equilíbrio, onde $\phi_1 = \phi_2 \neq \phi_3$	72
Figura 5.42. Espaço de fase dos pêndulos com o terceiro carro com deslocamento unitário e os demais no equilíbrio.....	73
Figura 5.43. Evolução temporal dos pêndulos com o primeiro e segundo carros com deslocamento unitário e o terceiro em equilíbrio, onde $\phi_1 = \phi_2 \neq \phi_3$	73
Figura 5.44. Espaço de fase dos pêndulos com o primeiro e segundo carros com deslocamento unitário e o terceiro em equilíbrio.	74
Figura 5.45. Evolução temporal dos pêndulos, primeiro carro em equilíbrio e os demais com deslocamento unitário.	74
Figura 5.46. Espaço de fase dos pêndulos, primeiro carro em equilíbrio e os demais com deslocamento unitário.	75

Figura 5.47. Evolução temporal dos pêndulos, primeiro e o terceiro carros com deslocamento unitário e o segundo em equilíbrio.....	75
Figura 5.48. Espaço de fase dos pêndulos, primeiro e o terceiro carros com deslocamento unitário e o segundo em equilíbrio.	76
Figura 6.1. Diagrama de padrões para os carros para amplitude de forçamento de $u = 0,1$ m. .	78
Figura 6.2. Diagrama de padrões para os carros para amplitude de forçamento de $u = 0,2$ m. .	79
Figura 6.3. Diagrama de padrões para os carros para amplitude de forçamento de $u = 0,5$ m. .	79
Figura 6.4. Diagrama de padrões para os carros para amplitude de forçamento de $u = 1$ m.	80
Figura 6.5. Diagrama de padrões para os pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,1$ m.	81
Figura 6.6. Diagrama de padrões para os pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,2$ m.	81
Figura 6.7. Diagrama de padrões para os pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,5$ m.	82
Figura 6.8. Diagrama de padrões para os pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 1$ m. .	82
Figura 6.9. Diagrama de padrões para os carros e pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,1$ m.....	83
Figura 6.10. Diagrama de padrões para os carros e pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,2$ m.....	83
Figura 6.11. Diagrama de padrões para os carros e pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,5$ m.....	84
Figura 6.12. Diagrama de padrões para os carros e pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 1$ m.....	84
Figura 6.13. Diagrama de padrões dos pêndulos para $u = 0,1$ m: a) diagrama completo; b) detalhe com o estado de quimera entre o comportamento sincronizado e sincronizado em oposição de fase e c) detalhe com o estado de quimera entre duas regiões com o comportamento sincronizado..	85
Figura 6.14. Diagrama de padrões para os pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,5$ m e massa dos pêndulos $m = 0,1$ Kg.....	87
Figura 6.15. Frequências naturais linearizadas do sistema, traçadas sobre a diagrama de padrões no domínio para $u = 0,2$ m. Em verde apenas considerando os carros, em azul-claro apenas um pêndulo isolado e em azul, o conjunto completo linearizado.....	88
Figura 6.16. Amplitude de resposta para condição inicial de todos os osciladores em repouso e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m. As frequências naturais linearizadas são em verde apenas considerando os carros, em azul-claro apenas um pêndulo isolado e em azul, o conjunto completo linearizado.	89
Figura 6.17. Amplitude de resposta para $u = 0,5$ m e condição inicial de todos os osciladores em repouso. Os quadrados representam as regiões onde os pêndulos rotacionam. As frequências naturais linearizadas são em verde apenas considerando os carros, em azul-claro apenas um pêndulo isolado e em azul, o conjunto completo linearizado.....	89
Figura 6.18. Amplitude de resposta com atualização das condições iniciais partindo de uma condição de repouso para todos os osciladores e progressão (marcado por círculos) e regressão (marcado por pontos) pelo intervalo. As frequências naturais linearizadas são em verde apenas considerando os carros, em azul-claro apenas um pêndulo isolado e em azul, o conjunto completo linearizado.	90
Figura 6.19. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para a amplitude de excitação de $u = 0,1$ m.	93

Figura 6.20. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para diferentes amplitudes de excitação para $u = 0,2$ m.....	93
Figura 6.21. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para diferentes amplitudes de excitação para $u = 0,5$ m.....	94
Figura 6.22. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para diferentes amplitudes de excitação para $u = 1$ m.....	94
Figura 6.23. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos pêndulos para diferentes amplitudes de excitação para $u = 0,1$ m.....	95
Figura 6.24. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos pêndulos para diferentes amplitudes de excitação para $u = 0,2$ m.....	95
Figura 6.25. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos pêndulos para diferentes amplitudes de excitação para $u = 0,5$ m.....	96
Figura 6.26. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos pêndulos para diferentes amplitudes de excitação para $u = 1$ m.....	96
Figura 6.27. Diagrama de padrões analisando condições iniciais para os pêndulos com os parâmetros $u = 0,2$ m, $\Omega = 7,7$ rad/s e $k_{1,2,3} = 10,8$ rad/s. a) Diagrama de padrões; b) bacia de atração dos padrões e c) diagrama energético para a bacia.	98
Figura 6.28. Parâmetro de Kuramoto para os carros com $u = 0,2$ m.	99
Figura 6.29. Parâmetro de Kuramoto para os pêndulos com $u = 0,2$ m.....	99
Figura 6.30. Parâmetro de Kuramoto para os carros e pêndulos com $u = 0,2$ m.	100
Figura 7.1. Nível de energia recebida pelo sistema para diferentes desvios padrão pela frequência de excitação.....	103
Figura 7.2. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação com $\sigma = 0$	104
Figura 7.3. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação com $\sigma = 0,02$	104
Figura 7.4. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação com $\sigma = 0,03$	105
Figura 7.5. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação com $\sigma = 0,1$	105
Figura 7.6. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação para $\sigma = 0$	106
Figura 7.7. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação para $\sigma = 0,02$	107
Figura 7.8. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação para $\sigma = 0,03$	107
Figura 7.9. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação para $\sigma = 0,1$	108
Figura 7.10. Nível de energia recebido pelo sistema para diferentes desvios padrão na amplitude de excitação.....	109
Figura 7.11. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 0$	110
Figura 7.12. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 0,1$	110
Figura 7.13. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 1$	111

Figura 7.14. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 2$	111
Figura 7.15. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 0$	112
Figura 7.16. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 0,1$	112
Figura 7.17. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 1$	113
Figura 7.18. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 2$	113
Figura 7.19. Nível de energia recebida pelo sistema em diferentes intensidades de ruído.	114
Figura 7.20. Diagrama de padrões considerando a influência do ruído para $\sigma = 0$	115
Figura 7.21. Diagrama de padrões considerando a influência do ruído para $\sigma = 0,01$	115
Figura 7.22. Diagrama de padrões considerando a influência do ruído para $\sigma = 1$	116
Figura 7.23. Diagrama de padrões considerando a influência do ruído para $\sigma = 3$	116
Figura 7.24. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório com ruído para $\sigma = 0$	117
Figura 7.25. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório com ruído para $\sigma = 0,01$	117
Figura 7.26. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório com ruído para $\sigma = 2$	118
Figura 7.27. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório com ruído para $\sigma = 3$	118
Figura 7.28. Diagramas de padrão para amplitude de excitação de $u = 0,2$ m e dissipação de $C_{1,2,3,5,7,9} = C_{1,2,3,5,7,9}(C_{1,2,3,5,7,9}, \sigma)$ com $C_{1,2,3,5,7,9} = 0,56$ N.s/m e $\sigma = 0$	120
Figura 7.29. Diagramas de padrão para amplitude de excitação de $u = 0,2$ m e dissipação de $C_{1,2,3,5,7,9} = C_{1,2,3,5,7,9}(C_{1,2,3,5,7,9}, \sigma)$ com $C_{1,2,3,5,7,9} = 0,56$ N.s/m e $\sigma = 0,1$	120
Figura 7.30. Diagramas de padrão para amplitude de excitação de $u = 0,2$ m e dissipação de $C_{1,2,3,5,7,9} = C_{1,2,3,5,7,9}(C_{1,2,3,5,7,9}, \sigma)$ com $C_{1,2,3,5,7,9} = 0,56$ N.s/m e $\sigma = 1$	121
Figura 7.31. Diagrama de padrões para os pêndulos para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 0$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.....	122
Figura 7.32. Diagrama de padrões para os pêndulos para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 0,28$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.....	122
Figura 7.33. Diagrama de padrões para os pêndulos para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 0,56$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.....	123
Figura 7.34. Diagrama de padrões para os pêndulos para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 1,68$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.....	123
Figura 7.35. Diagrama de padrões para os pêndulos para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 4,48$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.....	124
Figura 7.36. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 0$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.....	125
Figura 7.37. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 0,28$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.....	126

Figura 7.38. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 0,56$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.....	126
Figura 7.39. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 1,68$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.....	127
Figura 7.40. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 4,48$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.....	127
Figura 7.41. Diagrama de padrões considerando condições iniciais aleatórias para $\sigma = 0$	128
Figura 7.42. Diagrama de padrões considerando condições iniciais aleatórias para $\sigma = 0,01$.	129
Figura 7.43. Diagrama de padrões considerando condições iniciais aleatórias para $\sigma = 0,1$..	129
Figura 7.44. Resposta do sistema no estado quimera com uma desestabilização de cinco vezes as variáveis de estado para 530 segundos com sistema recuperando o estado de quimera.	130
Figura 7.45. Resposta do sistema em comportamento sincronizado com uma desestabilização de dez por cento do valor das variáveis de estado para 560 segundos. No entanto o sistema muda seu comportamento para o estado dessincronizado.....	131
Figura 7.46. Resposta do sistema em comportamento sincronizado com uma desestabilização de cinco vezes as variáveis de estado para 882 segundos com o sistema retornando ao comportamento sincronizado.	131
Figura 8.1. Diagrama de perturbação assimétrica para $k_1 - k_2$ de um comportamento sincronizado. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.....	133
Figura 8.2. Diagrama de perturbação assimétrica para $k_1 - k_2$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.	134
Figura 8.3. Diagrama de perturbação assimétrica para $k_7 - k_9$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.	135
Figura 8.4. Diagrama de perturbação assimétrica para $l_2 - l_3$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.	135
Figura 8.5. Diagrama de perturbação assimétrica para $M_2 - M_3$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.....	136
Figura 8.6. Diagrama de perturbação assimétrica para $m_2 - m_3$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.	136
Figura 8.7. Diagrama de perturbação assimétrica para $C_1 - C_2$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.	137
Figura 8.8. Diagrama de perturbação assimétrica para $C_7 - C_9$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.	137

Figura 8.9. Diagrama de perturbação assimétrica para $C_{\phi_2} - C_{\phi_3}$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.138

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Parâmetros do sistema.	34
Tabela 2. Combinações de resposta do sistema.	48

LISTA DE SÍMBOLOS

M_1, M_2, M_3	Massa dos carros
m_1, m_2, m_3	Massas dos pêndulos
x_1, x_2, x_3	Posição dos carros
$\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$	Velocidade dos carros
$\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3$	Aceleração dos carros
ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3	Posição angular dos pêndulos
$\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3$	Velocidade angular dos pêndulos
$\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2, \ddot{\phi}_3$	Aceleração angular dos pêndulos
$ v_1 , v_2 , v_3 $	Velocidade absoluta dos pêndulos
E_c	Energia cinética
E_p	Energia potencial
l	Comprimento dos pêndulos
L	Lagrangeano
k_1, k_2, k_3	Constante de restituição entre os carros e a base
$k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9$	Constante de restituição entre os carros
C_1, C_2, C_3	Constante de amortecimento entre os carros e a base
$C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9$	Constante de amortecimento dos carros
$\tilde{C}_{1,2,3,5,7,9}$	Constante de amortecimento aleatório dos carros
\bar{C}	Constante de amortecimento médio
$C_{\phi_1}, C_{\phi_2}, C_{\phi_3}$	Constante de amortecimento dos pêndulos
g	Gravidade
$F(t)$	Função de forçamento
u	Deslocamento da base
\tilde{u}	Deslocamento da base aleatório
\bar{u}	Deslocamento médio da base
Ω	Frequência de excitação
$\tilde{\Omega}$	Frequência de excitação aleatória
$\bar{\Omega}$	Frequência de excitação média
t	Tempo
σ	Desvio padrão
E_{FE}	Fluxo de energia no sistema

t_f

Tempo final do intervalo

1 INTRODUÇÃO

Os ritmos são manifestações dinâmicas que emergem na natureza na forma dos mais variados padrões. A compreensão de como esses ritmos e padrões emergem é parte do entendimento da própria natureza. A sincronização é um dos fenômenos em que um padrão surge da interação entre diferentes sistemas.

Hyugens foi o primeiro a discutir o fenômeno da sincronização em 1665 (HUYGENS, 1666). Ele construiu o primeiro relógio baseado em oscilações, em 1656, e depois continuou tentando aprimorá-lo para desenvolver um relógio para uso marítimo no intuito resolver o problema da medição da longitude. Desta forma, ele utilizou um sistema com dois relógios de pêndulos montados sobre a mesma base que oscilavam na mesma frequência em fase ou em oposição de fase, fenômeno do qual tentou tirar proveito para essa aplicação. Esses resultados foram publicados em um trabalho que inclui suas pesquisas para a construção do relógio de pêndulo intitulado *Horologium Oscillatorium* (do latim, relógio pêndulo) (HUYGENS, 1666).

No entanto, a primeira menção ao fenômeno da sincronização foi feita por HUYGENS (1665) em uma carta escrita ao seu pai, que menciona uma “simpatia” entre os dois relógios. Nessa carta, ele descreve o momento em que estava deitado na cama por razão de uma doença e verificou que dois relógios, que havia construído recentemente, estavam balançando de um lado para outro em sincronia. Mesmo após horas de observação, os pêndulos não perdiam a sincronia. Na sequência, ele tentou perturbá-los para avaliar o que ocorria e, após um período de tempo, eles retornaram a sincronia. Huygens suspeitou que os relógios deveriam, de alguma forma, influenciar um ao outro, possivelmente através de pequenos movimentos de vibrações imperceptíveis no suporte comum. Ao separar os relógios, colocando-os em lados opostos da sala, eles gradualmente perderam a sincronia, perdendo cinco segundos por dia em relação ao outro. Os resultados obtidos por HUYGENS (1666) foram recriados por KAPITANIAK *et al.* (2012) e BENNETT *et al.* (2002).

A Figura 1.1 mostra um esboço feito por HUYGENS (1666) ilustrando o posicionamento dos relógios no experimento. Por sua vez, a Figura 1.2 mostra uma das modificações de Huygens no experimento para entender quais as condições necessárias para haver sincronização através do acréscimo de massa à um dos relógios.

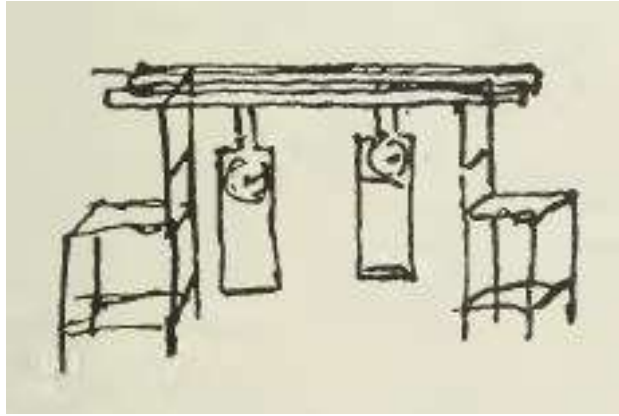


Figura 1.1. Desenho feito por Huygens para demonstrar o posicionamento dos relógios em seus experimentos. Fonte: HUYGENS (1666), página 185.

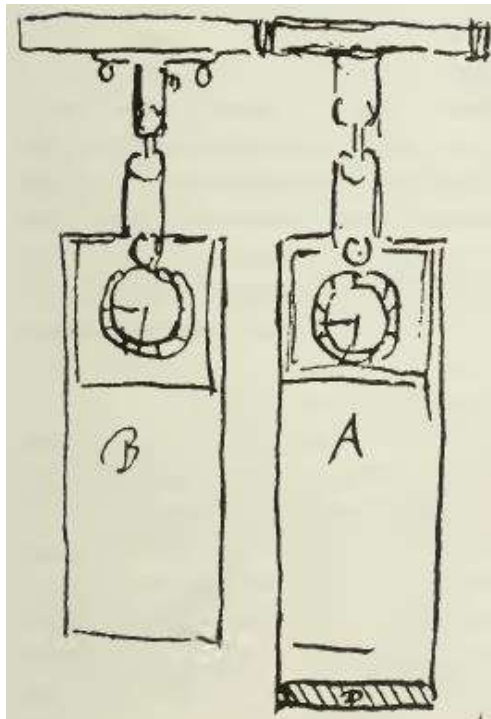


Figura 1.2. Desenho feito por Huygens para descrever o fenômeno da sincronização. No detalhe observa-se o ponto D representando uma massa a qual ele acrescentou em testes realizados com o sistema. Fonte: HUYGENS (1666), página 183.

O estudo do fenômeno da sincronização passa pela compreensão da natureza dos sistemas que interagem para formarem o fenômeno, assim como as formas de acoplamento entre eles. De uma maneira geral, cada sistema individual é uma população que pode ser composta por osciladores, podendo ser acopladas de maneiras e hierarquias distintas. Note que é importante avaliar os acoplamentos dentro de cada população e entre populações, pois os acoplamentos podem se dar de diferentes formas.

Usualmente, uma população está associada a um tipo de oscilador e, dentre os diferentes tipos de osciladores, destacam-se os autossustentados que recebem um aporte contínuo de energia que compensa a energia perdida por processos dissipativos (VIANA; CARVALHO, 2017). Os relógios de pêndulo de Huygens estão nessa classe de osciladores, recebendo a energia de pesos que descem lentamente transformando energia potencial em movimento aos pêndulos. Algumas características representativas de osciladores autossustentados são apontadas por PIKOVSKY *et al.* (2003) e VIANA & CARVALHO (2017): os sistemas são ativos, contendo uma fonte interna de energia que é transformada em movimento oscilatório; os sistemas são isolados, pois o oscilador continua a gerar ritmo até que a fonte de energia se esgote; o tipo de oscilação é determinado apenas pelos parâmetros do sistema e não por suas condições iniciais; as oscilações são estáveis para pequenas perturbações, ou seja, após perturbadas elas retornam à sua órbita inicial. Os osciladores autossustentados possuem um ciclo-limite, podendo ser modelados através da fase, sendo denominados como osciladores de fase. Desta forma, o comportamento desses osciladores pode ser descrito por meio do lugar geométrico em relação ao ciclo-limite.

O acoplamento entre os diferentes tipos de osciladores que compõem um sistema dinâmico é um ponto essencial na compreensão dos fenômenos de sincronização. Um tipo particular de acoplamento é chamado mestre-escravo, onde o acoplamento é direcional do mestre para o escravo. Lasers semicondutores utilizam esse tipo de configuração para aumentar o feixe emitido de modo que o mestre controle os escravos sincronizados (PIKOVSKY *et al.*, 2003). Assim como para lasers, existem outras aplicações em que se tira proveito do fenômeno da sincronização. Dentre essas aplicações, destaca-se a sincronização de sistemas caóticos, onde ao acoplar dois ou mais osciladores sob comportamento caótico estes interagem e sincronizam em fase, mantendo independência na amplitude (BLAZEJCZYK-OKOLEWSKA *et al.*, 2001; BOCCALETTI *et al.*, 2002; KAPITANIAK, 1995; KURTHS *et al.*, 2003; LIU; WU, 2017; PECORA; CARROLL, 1990; PYRAGIENE; PYRAGAS, 2017; ROSENBLUM *et al.*, 1996).

Em redes de transmissão de energia elétrica, quanto mais descentralizada a rede, mais suscetível a perturbações externas essa se torna, além da dificuldade criada para a inserção de uma nova fonte de energia a rede existente. No entanto, a sincronização em redes mais descentralizadas torna a operação da rede mais estável (BLAABJERG *et al.*, 2006; DÖRFLER *et al.*, 2013; FILATRELLA *et al.*, 2008; ROHDEN *et al.*, 2012; WITTHAUT; TIMME, 2012). As mesmas características aplicadas a redes de

transmissão de energia estão presentes em redes de comunicação onde cada computador integrado a rede possui sua frequência própria e interage uns com os outros trocando informações. O uso da sincronização dos componentes da rede facilita a troca de informações e diminui o consumo de energia (BALDONI *et al.*, 2010; CORREA *et al.*, 2015; KLEIN *et al.*, 2008; PIQUEIRA, 2009; SIMEONE *et al.*, 2008; WANG *et al.*, 2013). Quando compara-se os custos de uma rede mestre-escravo à uma rede totalmente conectada, a rede totalmente acoplada é mais barata e confiável, mantendo a sincronização mesmo que algum nó falhe (PIQUEIRA *et al.*, 2006).

Esse tipo de consideração mostra a importância da topologia do acoplamento e como esta exerce influência sobre os comportamentos possíveis para um conjunto de osciladores. O estado de quimera é uma quebra de simetria em conjuntos de osciladores idênticos com simetria de acoplamento. De certa forma, esse fenômeno é inesperado pois o comportamento parcialmente sincronizado somente é observado em sistemas com alguma assimetria na topologia de acoplamento (ABRAMS; STROGATZ, 2004). Assim, a quimera é a expressão de uma dinâmica rica, gerada a partir de um sistema com padrão homogêneo.

O fenômeno da sincronização ganhou grande projeção a partir dos trabalhos de WIENER (1958, 1989) sobre os ritmos cerebrais e posteriormente com o tratamento matemático de (WINFREE, 1967, 1983b, a). Finalmente, a abordagem de KURAMOTO (1975, 1984) consolida uma série de conceitos a respeito da sincronização. Os trabalhos que relatam o fenômeno da sincronização em outros tipos de sistemas (ADLER, 1946; BUCK; BUCK, 1968; GHOSH *et al.*, 1971; WALKER, 1969) impulsionaram novas pesquisas sobre o tema e inclusive aplicações como em controle (GOEDGEBUER *et al.*, 1998; KAPITANIAK, 1995; PECORA; CARROLL, 1990; ROSENBLUM *et al.*, 1996). Posteriormente, a descoberta do estado de quimera (KURAMOTO; BATTOGTOKH, 2002) abriu outras perspectivas na compreensão e na aplicação da sincronização de sistemas dinâmicos. Mesmo assim, existem poucos sistemas mecânicos que atingiram o estado de quimera (KAPITANIAK *et al.*, 2015; MARTENS *et al.*, 2013; WOJEWODA *et al.*, 2016).

Este trabalho se insere no contexto da análise da sincronização e formação de padrões dinâmicos decorrentes da interação entre osciladores. O objetivo é compreender os mecanismos de sincronização de sistemas mecânicos, dando especial atenção as condições para a formação do estado de quimera. Deste modo, os objetivos incluem uma investigação dos padrões dinâmicos do sistema e a definição de uma metodologia de

classificação desses padrões, além da investigação dos mecanismos que proporcionam os comportamentos de quebra de simetria, como o estado de quimera e o estado dessincronizado. Por fim, uma análise da robustez dos comportamentos do sistema é investigada de modo a compreender a estabilidade dos padrões dinâmicos.

As análises são feitas a partir de um sistema mecânico composto de três populações de osciladores tipo carro-pêndulo submetidos à excitação de base comum e acoplados aos osciladores de modo simétrico, atendendo a um requisito topológico para que haja o estado de quimera. Pois, o estado de quimera é definido pela coexistência de osciladores em comportamento sincronizado e dessincronizado em uma rede de osciladores simetricamente acoplados que compartilham uma identidade estrutural. Para a identificação e a classificação dos tipos de padrões formados pelas respostas dos osciladores é proposta uma metodologia baseada nas séries temporais. A investigação fenomenológica das condições para a existência do estado de quimera também é discutida. Nesse sentido, propõe-se um método baseado no fluxo de energia transmitido entre as populações de osciladores que permite compreender as condições dos diferentes padrões dinâmicos, publicado em CARVALHO & SAVI (2020) onde também discute-se uma hipótese para explicar o processo de formação do estado de quimera por meio do fluxo de energia. Apresenta-se uma análise da robustez dos padrões dinâmicos, investigando o estado de quimera sob a influência componentes aleatórios na excitação de base através da inserção deste componente na frequência de excitação, na amplitude de excitação e somado a excitação harmônica. A mesma análise de robustez é apresentada considerando-se o componente aleatório na dissipação dos elementos de ligação dos carros. Finalmente, a robustez do estado de quimera é observada por meio da desestabilização da resposta do sistema no regime permanente e através da assimetria paramétrica, definindo um nível de desvio paramétrico aceitável.

O método da energia proposto diferencia os comportamentos síncronos dos assíncronos e proporciona uma hipótese para a formação do estado de quimera. Resultados que corroboram os resultados da análise da robustez, visto a consistência na correlação entre a presença dos comportamentos assíncronos e o aumento da energia no sistema. Por fim, a análise da assimetria paramétrica possibilitou a definição de uma região aceitável de desvio paramétrico para o sistema, o que redefine as condições de existência do estado de quimera.

1.1 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho é dividido em nove capítulos. No primeiro capítulo é feita a introdução ao tema e uma breve revisão histórica.

O segundo capítulo apresenta uma revisão de literatura onde é mostrado um histórico da evolução do estudo da sincronização e os principais trabalhos. Uma visão geral das aplicações da sincronização também é discutida. Apresentam-se também os experimentos desenvolvidos para estudar a sincronização, dando ênfase ao estado de quimera.

No terceiro capítulo é feito uma revisão sobre os fundamentos teóricos da sincronização. Primeiramente é caracterizado o fenômeno e, em seguida, é feita uma abordagem geral dos tipos de sincronização, particularmente o estado de quimera. Apresenta-se também a formulação clássica do modelo de Kuramoto.

O quarto capítulo mostra a modelagem do sistema mecânico investigado neste trabalho, apresentando simulações numéricas com diferentes tipos de sincronização do sistema.

No capítulo cinco é avaliado a dependência paramétrica para a estabilização dos diferentes padrões de sincronização, mostrando as mudanças qualitativas de sincronização mediante as bifurcações do sistema dinâmico.

No capítulo seis é realizada a análise do fluxo de energia que consiste em um método proposto para a identificação dos estados dessincronizado e quimera com uma análise da influência das frequências naturais.

O sétimo capítulo investiga a robustez do sistema diante a influência da aleatoriedade no forçamento e no amortecimento para a formação dos comportamentos assíncronos. Também é avaliada a robustez dos comportamentos sob condições iniciais aleatórias e com a desestabilização dos comportamentos em regime permanente.

No oitavo capítulo é apresentado a resposta do sistema sob a assimetria de alguns conjuntos de parâmetros, explorando a tolerância a assimetria na qual o estado de quimera se mantém.

No nono capítulo são apresentadas as conclusões e as considerações finais sobre o trabalho.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Após os trabalhos pioneiros de HUYGENS (1666), a sincronização foi estudada por WIENER (1958, 1989), que discutiu um modelo para o sistema nervoso baseado nas integrais de Fourier. Ele especulou que os ritmos alfa no cérebro seriam como um tique-taque do corpo que dita a passagem de informações entre as diferentes áreas deste órgão. Isto é, os neurônios possuem diferentes frequências naturais e, para que as informações possam ser transmitidas adequadamente os neurônios devem estar sincronizados, o que é feito pelo ritmo alfa. Baseado nisso, WINFREE (1967) reformulou o problema em termos de uma grande população de osciladores ciclo-limite interagindo. Nesse trabalho, ele também observa a sincronização de longos períodos, ou seja, um oscilador vibrando sob uma frequência que é múltipla da frequência dos demais osciladores da população. A partir da formação de aglomerados transientes de fase, sendo possível observar a formação de núcleos separados de sincronização que interagem para formar um estado estável. A Figura 2.1 apresenta a forma do espectro de frequências do ritmo alfa. WINFREE (1967) através de sua abordagem de osciladores ciclo-limite acoplados conseguiu reproduzir esta mesma forma do espectro. Isto porque os osciladores ciclo-limite apresentam inicialmente uma distribuição normal de frequências. Mediante a interação destes osciladores e a consequente formação de um estado sincronizado, os osciladores próximos à frequência média aproximam ainda mais desta frequência. Assim, gerando a forma do espectro de frequência do ritmo alfa. Quanto maior a intensidade de acoplamento entre os osciladores, mais osciladores se juntam sincronizados na frequência média e mais destacado é o vale dos lados à esta.

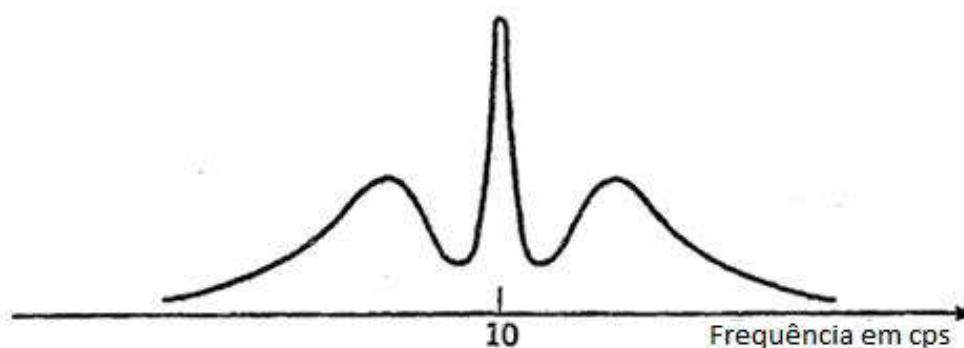


Figura 2.1. Espectro do ritmo cerebral contendo um pico para a frequência do ritmo alfa. Fonte: WIENER (1958), página 69.

Segundo STROGATZ (2000), o problema de WINFREE (1967) era matematicamente intratável, mas algumas simplificações podem ser feitas para o caso em que o acoplamento é fraco e osciladores aproximadamente idênticos. A partir desse ponto pode-se explorar duas interpretações de escala de tempo no sistema. Para uma grande escala de tempo, os osciladores se aproximam de seus ciclos-limite e podem ser descritos apenas por suas fases. Porém, em uma escala de tempo curta, essas fases evoluem devido a suas interações com um acoplamento fraco e as diferenças de frequência entre os osciladores. Assim, ele supôs que cada oscilador estivesse acoplado a um ritmo coletivo gerado pela população inteira, análogo à um campo médio.

Utilizando simulações, STROGATZ (2000) mostrou que a população de osciladores poderia exibir um análogo temporal a transição de fase. Quando a distribuição das frequências naturais é grande comparado ao acoplamento, o sistema se comporta de modo dessincronizado, com cada oscilador em sua frequência natural. Porém, reduzindo a distribuição, a população continua dessincronizada até um ponto em que um pequeno grupo de osciladores sincronizam e a população aumenta com a redução do espalhamento.

Outra contribuição de WINFREE (1983b) foi no estudo dos ritmos cardíacos, onde ele associa a formação de áreas de contração descoordenadas no coração, fibrilação, à presença de ondas circulantes ao longo do tecido cardíaco. As quais se formam, segundo ele, sob determinada combinação entre o acoplamento entre as células cardíacas e a intensidade do estímulo recebido por estas.

Ao modelo de osciladores de fase foi introduzido o parâmetro de ordem por KURAMOTO (1975), que enfatiza a semelhança deste resultado a forma do espectro de frequências do ritmo- α do cérebro humano apresentado no trabalho de WIENER (1958). KURAMOTO & BATTOGTOKH (2002) apresentaram resultados intrigantes em seu modelo no qual investigava um anel de osciladores idênticos acoplados. Eles descobriram que para certas condições iniciais, os osciladores que são igualmente acoplados com seus vizinhos e que tenham frequências naturais de oscilação iguais, podem diferir um do outro em comportamento. Isto é, alguns osciladores podem alcançar sincronismo, enquanto outros permanecem dessincronizados uns dos outros. Isso é um estado permanente estável que combina aspectos do estado sincronizado e dessincronizado. Posteriormente, esta quebra de simetria encontrada por KURAMOTO & BATTOGTOKH (2002) foi renomeada por ABRAMS & STROGATZ (2004) que teve a ideia de chamar este comportamento de “estado de quimera” como uma alusão com a criatura mitológica grega feita de partes incoerentes.

A quimera da mitologia era uma fera híbrida com cabeça de leão, corpo de bode e cauda de serpente. No entanto, na dinâmica não-linear se refere a um estado misto do comportamento de osciladores sincronizados e dessincronizados em uma rede de osciladores acoplados idênticos. Por uma década, o estado de quimera foi observado somente em simulações numéricas. Muitos destes resultados requerem cuidadosa escolha das condições iniciais para estimular perturbações sensíveis. Então, acreditava-se que condições mais robustas como observadas em experimentos poderiam comprometer a obtenção do estado de quimera (PANAGGIO; ABRAMS, 2015).

Somente em julho de 2012 esta questão foi respondida definitivamente quando dois experimentos tiveram sucesso em obter quimeras: um na *West Virginia University* (TINSLEY *et al.*, 2012), e outro na *Maryland University* (HAGERSTROM *et al.*, 2012). Os dois experimentos utilizaram osciladores químicos fotossensíveis e computadores para realizar o acoplamento, motivo pelo qual receberam algumas críticas (PANAGGIO; ABRAMS, 2015). No entanto, um terceiro experimento realizado por MARTENS *et al.* (2013) utilizou metrônimos sobre duas plataformas, acoplando duas populações, uma sobre cada plataforma, por meio de uma mola que conecta as plataformas. A vibração da plataforma promove um forte acoplamento entre os osciladores da mesma plataforma e um acoplamento mais fraco entre as duas plataformas. Este foi o primeiro experimento a observar o estado de quimera em um sistema mecânico. Posteriormente, KAPITANIAK *et al.* (2015) observou o mesmo comportamento em um anel de metrônimos acoplados. E em seguida WOJEWODA *et al.* (2016), reduziu o sistema para apenas três osciladores de modo a obter o menor sistema a apresentar o estado de quimera. E em 2020 CARVALHO & SAVI (2020) apresentaram um sistema contendo três carros-pêndulo acoplados ao qual se observou o estado de quimera numericamente e no qual se atribuiu a formação do estado de quimera a um acúmulo de energia no sistema.

De fato, a existência do estado de quimera não foi conclusivamente determinada fora dos laboratórios, mas existe muitos fenômenos naturais que tem forte semelhança ao estado de quimera e que podem ter ligações com este tipo de dinâmica (PANAGGIO; ABRAMS, 2015). Porém, as redes de osciladores de fase, caso estudado por Kuramoto, servem como exemplo prototípico para sincronização em redes complexas (BOCCALETTI *et al.*, 2006; DÖRFLER; BULLO, 2014; OSIPOV *et al.*, 2007; STROGATZ, 2001). Alguns trabalhos exploraram o controle do modelo de osciladores acoplados (BEMPORAD *et al.*, 1978; GIARDINA, 2008; SABER-OLFATI *et al.*, 2007).

A importância das redes de osciladores de fase decorre da diversidade de aplicações as quais o modelo se enquadra.

É notável a afirmação de WOLFRUM & OMEL'CHENKO (2011) de que o estado de quimera é caos transiente. Em seu artigo, eles definem uma relação exponencial entre o número de osciladores e tempo de duração do fenômeno, devido a hipótese do limite termodinâmico ao qual o modelo de Kuramoto se apoia. Assim, segundo os autores, quanto menor o número de osciladores, menor a duração do regime. Em outros trabalhos (KAPITANIAK *et al.*, 2015; MARTENS *et al.*, 2013; WOJEWODA *et al.*, 2016) o estado de quimera é verificado sob grupos finitos de osciladores de até três osciladores sob oscilações periódicas (WOJEWODA *et al.*, 2016). Este fato torna ainda mais interessante os resultados de WOLFRUM & OMEL'CHENKO (2011). Desta forma, existe a necessidade de verificação experimental da relação entre o caos, particularmente o caos transiente, e o estado de quimera. Existem algumas denominações dentro do estado de quimera que o separa em subgrupos (DUDKOWSKI *et al.*, 2014, 2016; HIZANIDIS *et al.*, 2016; KEMETH *et al.*, 2016; MAISTRENKO *et al.*, 2014; TINSLEY *et al.*, 2012; VÜLLINGS *et al.*, 2014; YELDESBAY *et al.*, 2014; ZHU *et al.*, 2013), porém neste trabalho estas subclassificações não serão consideradas.

A análise de sistemas acoplados usualmente considera diferentes populações, que por sua vez são compostas por osciladores. Os tipos de acoplamento e a hierarquia entre os osciladores dessas diferentes populações definem as principais características do sistema.

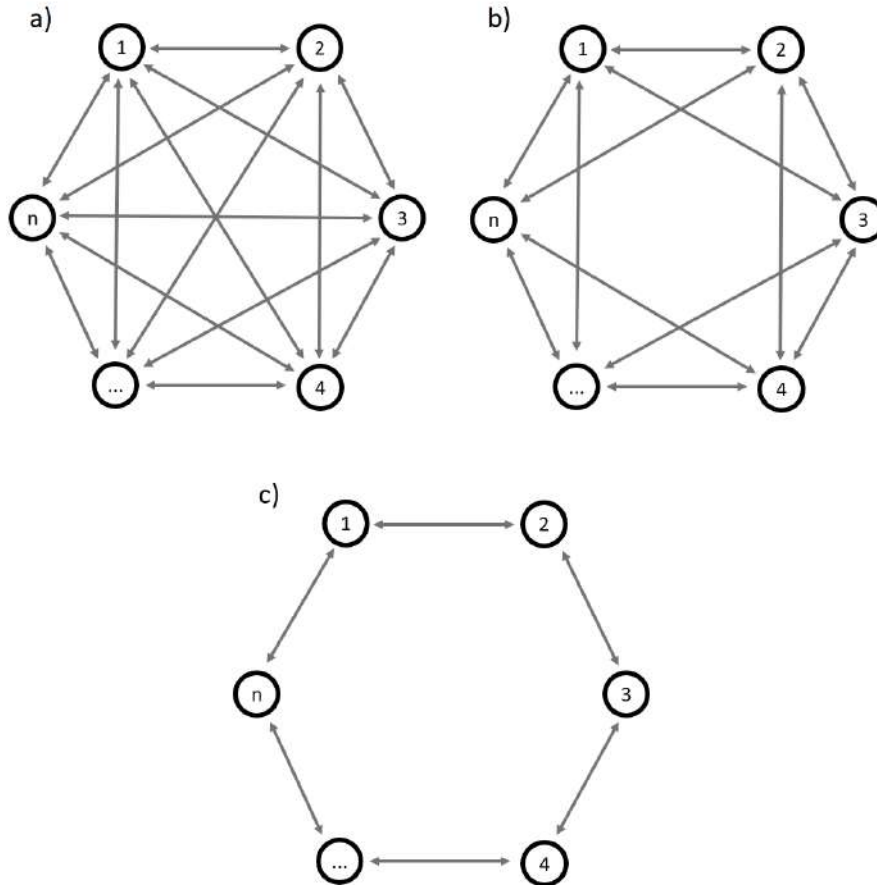


Figura 2.2. Diferentes acoplamentos. a) Sistema totalmente acoplado; b) Sistema com acoplamento intermediário com os vizinhos mais próximos e c) acoplamento com apenas os primeiros vizinhos.

A Figura 2.2 representa diferentes acoplamentos apresentando uma redução gradativa do nível de acoplamento de a) para c). Note que em a) têm-se um conjunto totalmente acoplado; em b) é reduzido esse grau de acoplamento para os primeiros e segundos vizinhos, o que é para alguns sistemas um acoplamento mais fraco entre os vizinhos mais distantes e diminuindo com a distância até que o acoplamento seja interrompido em um certo número de vizinhos; finalmente em c) tem-se um conjunto acoplado apenas com os primeiros vizinhos, formando um anel de osciladores. Isso denotando a ideia de grau de acoplamento dentro de um conjunto.

A Figura 2.3 mostra outra situação com um conjunto de osciladores totalmente acoplado. No entanto, observam-se duas intensidades de acoplamento diferentes, marcadas por setas distintas, o que denota a separação dos osciladores em duas populações A e B. Quando duas populações de osciladores possuem dependência no acoplamento, conforme a Figura 2.4, esses osciladores apresentam uma relação

hierárquica. Neste contexto, os osciladores internos transmitem a energia entre si e para os osciladores externos, o que implica em uma submissão dos osciladores externos perante os internos, que apresentam maior influência sobre o conjunto. Há um tipo particular deste tipo de acoplamento, o chamado *master-slave* (do inglês, mestre-escravo), onde o acoplamento é direcional do oscilador interno para o externo. Nessa configuração o interno é chamado de mestre e o externo, de escravo. Essa configuração possui inúmeras aplicações o que inclui lasers semicondutores (PIKOVSKY *et al.*, 2003).

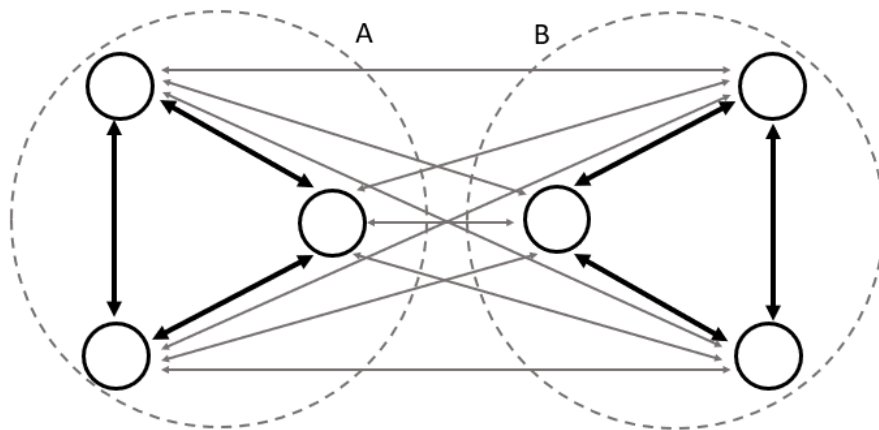


Figura 2.3. Osciladores divididos em duas populações distintas e simétricas A e B.

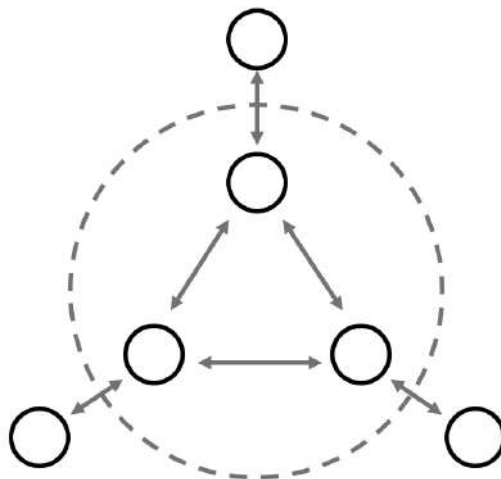


Figura 2.4. Osciladores divididos em duas populações, interna e externa ao círculo pontilhado. Os osciladores externos são dependentes dos internos para a comunicação com os demais o que caracteriza como uma relação hierárquica entre as duas populações.

O modelo de osciladores acoplados aparece no estudo da sincronização biológica e dos fenômenos rítmicos: células cardíacas (MICHAELS *et al.*, 1987; WINFREE, 1983b); células circadianas no cérebro (LIU *et al.*, 1997), acopladas a neurônios corticais (CROOK *et al.*, 1997), redes neurais (DÍAZ *et al.*, 2018; KAPLAN *et al.*, 2003; MAJHI; GHOSH, 2018; SANTOS *et al.*, 2017; VARELA *et al.*, 2001), células de levedura (GHOSH *et al.*, 1971); flashes de vagalumes no sudeste da Ásia, onde centenas desses insetos pousam em uma árvore e sincronizam o piscar de seus flashes, (BUCK; BUCK, 1968); chilrear de grilos (WALKER, 1969); padrões para a locomoção animal (KOPELL; ERMENTROUT, 1988); partículas que se aglutinam (HA *et al.*, 2011; HA *et al.*, 2010; HA *et al.*, 2010; HA; SLEMROD, 2011).

Também podem ser citados sistemas acoplados que aparecem na física e na química: junções de Josephson acopladas (WIESENFELD *et al.*, 1998); metrônimos acoplados (PANTALEONE, 2002); relógios de pêndulo acoplados (BENNETT *et al.*, 2002; KAPITANIAK *et al.*, 2012); osciladores micromecânicos com acoplamento óptico (ZHANG *et al.*, 2012) ou mecânico (SHIM *et al.*, 2007); ressonadores óticos (RAHIMI; SENDUR, 2018); na análise de oscilações químicas (KISS *et al.*, 2002; KURAMOTO, 1984; TOTZ *et al.*, 2018). As redes osciladores de fase também servem como modelos fenomenológicos para sincronização em sistemas sociais, tendências sociais como a cultura ou a língua podem se disseminar ou se equilibrar entre grupos sociais de maneira parecida a apresentada por esta dinâmica (ABRAMS; STROGATZ, 2003; COSENZA *et al.*, 2020), ou como aplausos rítmicos (RAVASZ *et al.*, 2000), dinâmicas de opinião (PLUCHINO *et al.*, 2006a; PLUCHINO *et al.*, 2006b), sincronia entre multidões na ponte Millennium do Reino Unido (STROGATZ *et al.*, 2005), na tomada de decisão em grupos de animais (LEONARD *et al.*, 2012) e na formação de padrões em metamateriais (HIZANIDIS *et al.*, 2020).

As aplicações de osciladores acoplados e sua generalização incluem a estimulação cerebral profunda (FRANCI *et al.*, 2012; NABI; MOEHLIS, 2011; TASS, 2003), osciladores de circuito de estado sólido (MIRZAEI *et al.*, 2007), coordenação de veículo planar (SEPULCHRE *et al.*, 2007, 2008), sincronização em matrizes de laser semicondutoras (KOZYREFF *et al.*, 2000) e conjuntos de osciladores de micro-ondas (YORK; COMPTON, 1991). Aplicações algorítmicas de osciladores acoplado incluem estimativa de ciclo-limite através da sincronização de *clock* em redes de computação descentralizadas (BALDONI *et al.*, 2010; KLEIN *et al.*, 2008; SIMEONE *et al.*, 2008;

WANG *et al.*, 2013) e geradores centrais de padrões para locomoção robótica (AOI; TSUCHIYA, 2005; IJSPEERT, 2008).

2.1 EXPERIMENTOS COM SINCRONIZAÇÃO

Nesta seção é discutido alguns experimentos onde se observou a sincronização. Dentre estes, é comum sistemas compostos por metrônimos, um tipo de relógio que mede o tempo do andamento musical. Produzindo-se pulsos regulares, esse é utilizado para fins de estudo e interpretação musical, existindo uma versão mecânica e uma eletrônica. O metrônomo mecânico consiste num pêndulo oscilante cuja frequência de oscilação pode ser regulada pela distância de um peso na haste do pêndulo. Cada distância deste peso corresponde uma frequência nominal e, conseqüentemente, um tempo do compasso musical. Diversos trabalhos utilizam metrônimos devido a simplicidade de ajuste da sua frequência de oscilação e por este ser um oscilador autossustentado tendo em vista um mecanismo interno que armazena energia em uma mola espiral que é liberada de modo a manter a amplitude de oscilação (CARLSEN *et al.*, 2012; CZOLCZYNSKI *et al.*, 2009a, b, 2011a, b; KAPITANIAK *et al.*, 2012; PANTALEONE, 2002; ULRICHS *et al.*, 2009). Os metrônimos fazem um bom paralelo aos relógios de HUYGENS (1666).

O movimento de dois ou mais metrônimos sobre uma plataforma, Figura 2.5, foi equacionado por PANTALEONE (2002). Neste trabalho, ele investiga as possibilidades de sincronização do modelo em fase e em oposição de fase, através de simulações e experimentos. Assim, ULRICHS *et al.* (2009) utilizam este modelo para analisar o trecho transiente para um grupo de 100 metrônimos. Ainda pode-se citar os experimentos de MARTENS *et al.* (2013) e KAPITANIAK *et al.* (2015), descritos na seção seguinte.

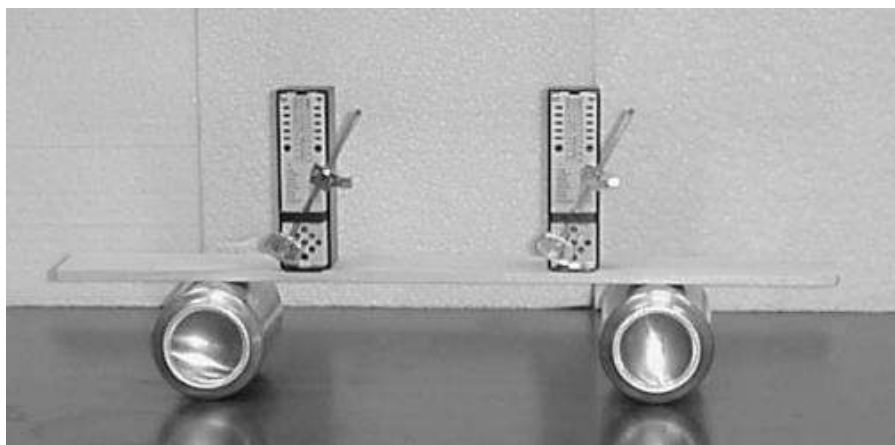


Figura 2.5. Foto do experimento de sincronização com metrônimos. Fonte: PANTALEONE (2002).

A sincronização em aparatos experimentais ainda foi analisada a partir de configurações contendo pêndulos rotacionais. Um aparato considera dois pêndulos acoplados a um bloco com dois graus de liberdade e excitação de base (NAJDECKA *et al.*, 2015). O outro sistema acopla quatro pêndulos sobre a mesma base e uma excitação de base sobre o conjunto (STRZALKO *et al.*, 2012). O terceiro aparato possui três pêndulos uma excitação horizontal (KAPITANIAK *et al.*, 2014) sendo estes dois últimos abordados em um trabalho mais amplo (KAPITANIAK *et al.*, 2014).

Um exemplo de sincronização que se tornou emblemático é o da ponte do milênio, em Londres, aberta apenas para pedestres. Assim que a ponte foi inaugurada em 2000, em comemoração à virada do milênio, a ponte começou a oscilar de um lado para outro decorrente do caminhar dos pedestres. A vibração da ponte foi sentida pelos pedestres que, por sua vez, começam a andar no ritmo imposto pelo movimento da ponte, fato que acabou por amplificar a vibração da ponte. O modelo desenvolvido por STROGATZ *et al.* (2005) descreve o movimento lateral da ponte, X , e obteve os mesmos resultados observados e medidos durante este evento na ponte. Na Figura 2.6 é mostrado um esquema do sistema onde a ponte é representada por um oscilador massa-mola-amortecedor e a influência dos pedestres como um forçamento que depende da fase da passada de cada pedestre.

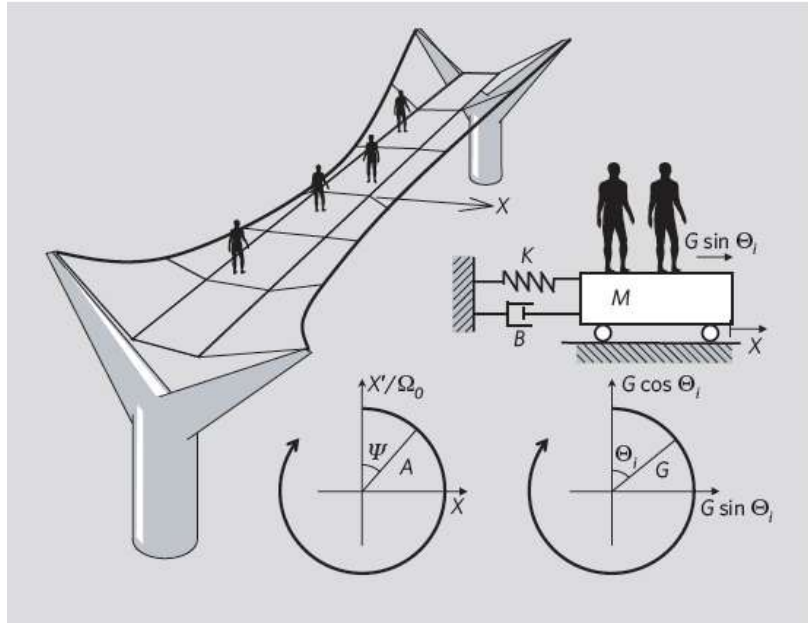


Figura 2.6. Ponte do milênio e o efeito dos pedestres atravessando. Fonte: STROGATZ *et al.* (2005).

2.1.1 EXPERIMENTOS COM O ESTADO DE QUIMERA

Desde 2002, o estado de quimera foi observado em modelos numéricos, mas não havia sido comprovado experimentalmente. Por isso, foi motivo de especulação que o estado de quimera seria de difícil, ou mesmo impossível, reprodução experimental (PANAGGIO; ABRAMS, 2015). Em 2012, duas equipes de pesquisadores conseguiram observar este fenômeno em osciladores fotoquímicos. TINSLEY *et al.* (2012) analisaram um anel de osciladores fotoquímicos acoplados fortemente aos osciladores da mesma população e com um acoplamento mais fraco com os osciladores da outra população. Esse experimento obteve alguns padrões como a sincronização total entre os dois grupos, a sincronização de um grupo e a formação de n -grupos na outra população e o estado de quimera. HAGERSTROM *et al.* (2012) também realizou um experimento com osciladores fotoquímicos, utilizando configurações unidimensional e bidimensional.

MARTENS *et al.* (2013) realizou o primeiro experimento mecânico a apresentar o estado de quimera acoplando duas plataformas onde cada uma contém 15 metrônimos, investigando o efeito do aumento e redução do parâmetro de restituição que acopla as duas plataformas sobre o aparecimento do estado de quimera. A Figura 2.7 mostra o aparato montado por MARTENS *et al.* (2013) que neste trabalho também observou a

dependência do parâmetro de acoplamento entre as plataformas para um modelo numérico com 64 metrônomos por plataforma.

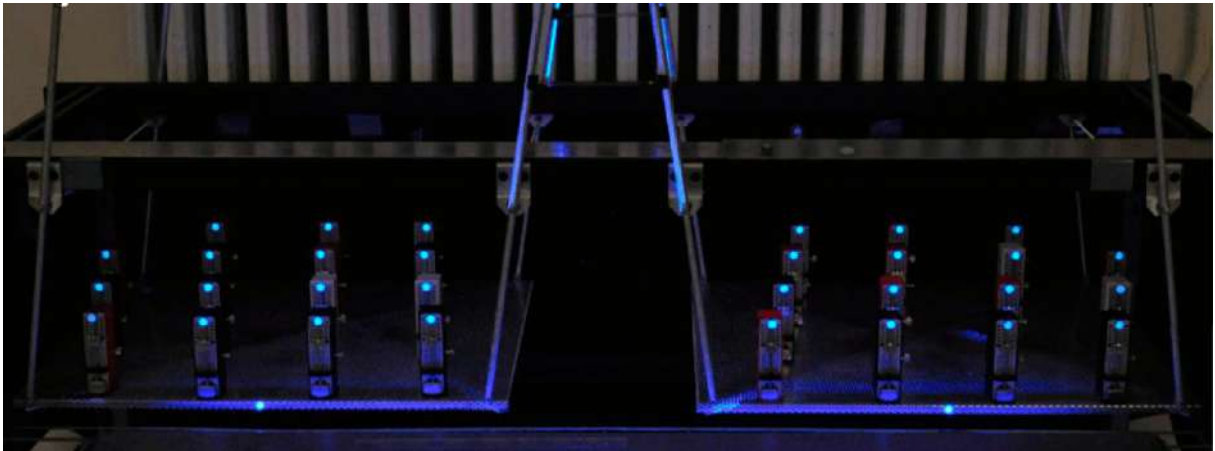


Figura 2.7. Modelo experimental composto por duas plataformas em movimento de balanço acopladas por uma mola e nas quais estão posicionados quinze metrônomos em cada. Fonte: MARTENS *et al.* (2013).

Segundo MARTENS *et al.* (2013) o estado de quimera emerge da competição entre os estados sincronizados em fase e oposição de fase. Com a redução do parâmetro de acoplamento, observa-se uma transição entre o estado sincronizado em fase para o em oposição de fase. MARTENS *et al.* (2013) observou que, próximo à curva de ressonância, há uma divisão entre o comportamento em fase e em oposição de fase e que é nesta região que ocorre o estado de quimera. Esta curva de ressonância é também avaliada por CARVALHO *et al.* (2016) através do parâmetro de Kuramoto.

Posteriormente, KAPITANIAK *et al.* (2015) obteve o estado de quimera para uma população de metrônomos acoplados em anel, Figura 2.8. Assim, o autor pode se aproximar mais da formulação de KURAMOTO & BATTOGTOKH (2002). Reduzindo o número de osciladores para um valor mínimo de três posteriormente, obtendo-se o menor grupo de osciladores a apresentar este comportamento (WOJEWODA *et al.*, 2016). Isso estabelece que, para que haja uma quebra de simetria necessita-se que exista no mínimo três osciladores. Deste resultado pode-se inferir que a formação do estado de quimera não se restringe a todas as condições abordadas na formulação do Modelo de Kuramoto, que descreve uma grande população de osciladores acoplados.

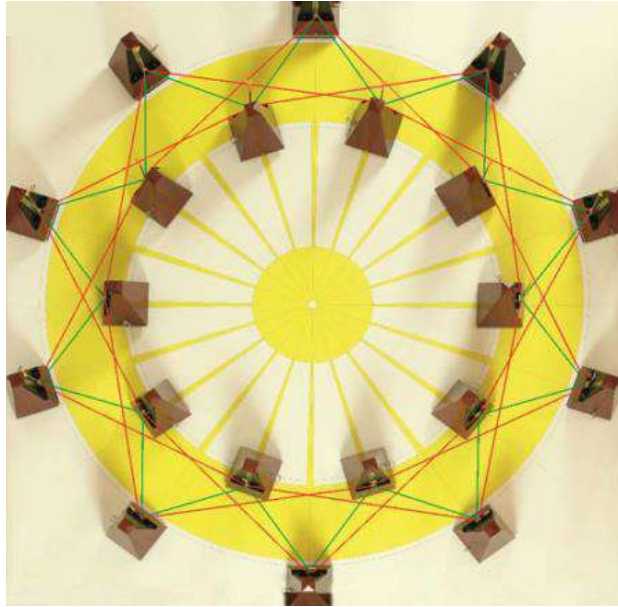


Figura 2.8. Sistema de metrônimos acoplados em anel. Fonte: KAPITANIAK *et al.* (2015).

3 SINCRONIZAÇÃO

Este capítulo apresenta os fundamentos teóricos da sincronização, destacando os conceitos mais relevantes sobre o assunto. Nesse sentido, destaca-se o modelo de Kuramoto que possui ampla utilização. Por fim, é proposta uma metodologia de classificação de padrões de sincronização a partir da série temporal.

3.1 PADRÕES DINÂMICOS

A sincronização consiste na formação de padrões dinâmicos, o que necessita uma definição apropriada de cada um desses comportamentos. Nesta seção apresentam-se os principais tipos de padrões identificados através da revisão realizada para o presente trabalho, dando especial atenção aos diferentes tipos de sincronização e o estado de quimera. Para isso considere um sistema formado por três osciladores idênticos igualmente acoplados, conforme mostrado na Figura 3.1.

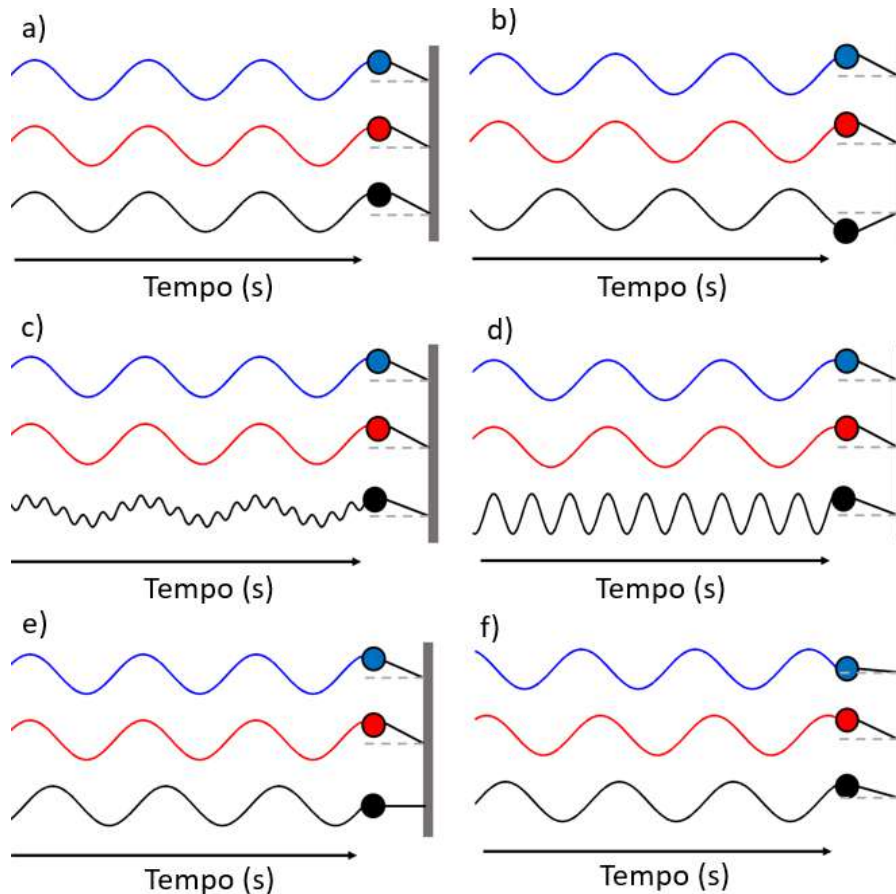


Figura 3.1. Esquema com três osciladores acoplados apresentando os comportamentos: a) sincronizado, b) sincronizado em oposição de fase, c) frequência fechada, d) longo período de sincronização, e) Estado de quimera e f) dessincronizado.

Desde o trabalho de HUYGENS (1666), definiram-se duas formas de sincronização em sistemas dinâmicos: a sincronização em fase ou completa, Figura 3.1-a, e a sincronização em oposição de fase, Figura 3.1-b. Esses dois tipos de sincronização são representados por dois ou mais osciladores vibrando de forma idêntica e defasados em π , respectivamente.

Outras duas formas de sincronização são as chamadas frequência fechada, Figura 3.1-c, e longo período de sincronização, Figura 3.1-d. Assim, para a sincronização com frequência fechada, alguns osciladores diferem do grupo sincronizado apenas na trajetória de sua órbita, sendo a fase e a frequência de oscilação a mesma para os osciladores envolvidos, assim completando suas órbitas simultaneamente (CARLSEN *et al.*, 2012; KURAMOTO; NISHIKAWA, 1987). A sincronização com longo período de oscilação, Figura 3.1-d, tem como característica que um ou mais osciladores apresentam uma frequência que é um múltiplo inteiro da frequência dos demais osciladores como uma modulação deste sinal (KAPITANIAK *et al.*, 2012). Isto é, apesar de em cada ciclo o

período ser diferente, ao final de um dado número de períodos os osciladores se encontram na mesma condição no espaço de estados e o processo se repete, o que forma um longo período de oscilação. Outras classificações podem ser encontradas na literatura, sendo aqui apresentados as mais amplamente utilizadas.

No caso em que os osciladores estão parcialmente sincronizados, situações em que um grupo sincronizado em um dos padrões possíveis, enquanto outro permanece dessincronizado (DÖRFLER; BULLO, 2014; POEL *et al.*, 2015). Um caso particular de sincronização parcial é quando ocorre em grupos de osciladores idênticos, o que foi nomeado como estado de quimera, Figura 3.1-e. Deste modo, ABRAMS & STROGATZ (2004) definiram o estado de quimera como um padrão espaço-temporal no qual um sistema de osciladores acoplados é dividido pela coexistência entre regiões sincronizadas (fase e frequência fechada) e dessincronizado. Ambos, dessincronizado e sincronizado, foram bem descritos em grupos de osciladores acoplados não-idênticos.

A diferença de comportamento em dois grupos formando a sincronização parcial usualmente ocorre para sistemas com diferentes níveis de acoplamento, com heterogeneidades nas frequências naturais. Isso ocorre em regiões de parâmetros onde há um estado completamente sincronizado e estável (PANAGGIO; ABRAMS, 2015). Assim, a simetria é quebrada no sistema dinâmico onde não há heterogeneidades na topologia de acoplamento.

O termo topologia de acoplamento se refere à distribuição espacial dos osciladores acoplados que, dependendo da forma da distribuição, pode gerar diferentes níveis de acoplamento entre os osciladores. No caso do estado de quimera, os osciladores devem ter o mesmo grau de acoplamento entre si, para que os osciladores possam interagir uns com os outros de modo não tendencioso. Tais condições foram observadas pela primeira vez por KURAMOTO & BATTOGTOKH (2002). Esse estado também foi verificado em redes hierárquicas onde os osciladores são posicionados em níveis diferentes (MARTENS *et al.*, 2013).

Uma vez definidos os tipos de sincronização, é importante definir o que é um estado dessincronizado, Figura 3.1-f. Neste contexto, considere um caso particular em que cada um dos osciladores possui estritamente a mesma frequência de oscilação, uma distribuição não uniforme destes ao longo do ciclo caracteriza como dessincronizado, Figura 3.1-f. No entanto, deve-se observar que a formação de grupos que se distanciam uniformemente em fase se caracteriza como um tipo específico de sincronização, a sincronização de fase (CARLSEN *et al.*, 2012), Figura 3.2.

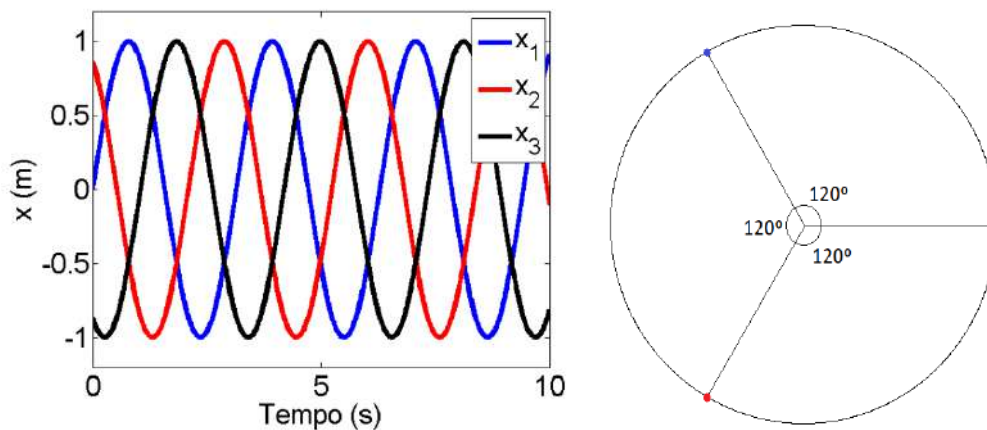


Figura 3.2. Sincronização de fase.

3.2 MODELO DE KURAMOTO

O modelo de Kuramoto foi proposto a partir de osciladores de fase, tendo se popularizado por definir um parâmetro de ordem que define o grau de sincronização de um sistema. Esse modelo foi originalmente proposto por WINFREE (1967) e posteriormente modificado por KURAMOTO (1984). O problema abordado por KURAMOTO (1984) consiste em um anel de osciladores ciclo-limite e descreve o comportamento geral de osciladores biológicos como o sistema nervoso e o cardíaco. WINFREE (1967) aponta algumas características do modelo, apresentadas a seguir.

- Os osciladores apresentam ciclo-limite sendo acoplados em uma rede uniforme.
- O sistema é formado por um número grande de osciladores acoplados.
- A população de osciladores é homogênea, o que significa que todos os osciladores possuem aproximadamente o mesmo ciclo-limite. Desta forma, mesmo assumindo uma distribuição de frequências normal, essa é uma distribuição estreita.
- A função de sensibilidade é unicamente dependente da fase.
- Os acoplamentos são fracos o suficiente de forma que os osciladores permanecem próximos ao ciclo-limite.
- As fases são alteradas pelo acoplamento ao longo do tempo e esta mudança é linear no tempo, o que implica que as frequências são levemente perturbadas.

Desta forma, considere um sistema dinâmico do tipo,

$$\dot{X} = F(X) \quad (3-1)$$

Considerando uma perturbação no campo vetorial, têm-se:

$$\dot{X} = F(X) + \varepsilon p(X) \quad (3-2)$$

onde $\varepsilon p(X)$ representa uma pequena perturbação genericamente dependente do tempo em X e ε representa a intensidade da perturbação p que é igualado à 1.

Considere uma órbita fechada C associada à uma solução periódica, $X_0(t + T) = X_0(t)$. Supondo que C é estável, cada ponto de X na vizinhança de C tende a se aproximar de C para $t \rightarrow \infty$, na ausência de perturbação $\varepsilon p(X)$, equação (3-2). Neste comportamento periódico assintótico de C associa-se um valor escalar ϕ para cada $X \in C$ de modo que o movimento em C provoca um acréscimo de ϕ (KURAMOTO, 1984; WINFREE, 1967),

$$\dot{\phi}(X) = 1, \quad X \in C \quad (3-3)$$

A fase ϕ é definida em C e este valor é determinado em um múltiplo inteiro de T . Desde que essa fase seja assumida como fraca, ou seja possui uma pequena influência nos demais osciladores devido à intensidade do acoplamento, permanece-se nas vizinhanças de C .

Assim, têm-se a identidade:

$$\dot{\phi}(X) = \text{grad}_X(\phi) \dot{X} \quad (3-4)$$

Desta forma, das equações (3-3) e (3-1) obtém-se:

$$\text{grad}_X(\phi) \cdot F(X) = 1 \quad (3-5)$$

Substituindo-se (3-2) em (3-4):

$$\dot{\phi}(X) = \text{grad}_X \phi [F(X) + \varepsilon p(X)] \quad (3-6)$$

Utilizando-se da equação (3-5):

$$\dot{\phi}(X) = 1 + \varepsilon \text{grad}_X \phi p(X) \quad (3-7)$$

Para que se mantenha a ideia de perturbação, observa-se que X deve ser próximo a $X_0(\phi)$. Ou seja, o desvio $|X - X_0(\phi)|$ é considerado aproximando-se de zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$, apresentando o comportamento assintótico quando $t \rightarrow \infty$. O termo grad_X mede a sensibilidade do oscilador em resposta a perturbação (WINFREE, 1967).

Descrevendo o sistema da forma da equação (3-7) para uma população de α osciladores, sendo que $V_{\alpha\alpha'}(X_\alpha, X_{\alpha'})$ representa a contribuição gerada pelo acoplamento e $f_\alpha(X_\alpha)$ representa uma diferença na natureza de cada oscilador. Assim, o período de um oscilador não perturbado é denotado por T . Derivando-se diretamente as equações acopladas para cada ϕ , obtém-se:

$$\dot{\phi}_\alpha = 1 + \varepsilon [\sum_{\alpha'} Z(\phi) V_{\alpha\alpha'}(\phi_\alpha, \phi_{\alpha'}) + g_\alpha(\phi_\alpha)] \quad (3-8)$$

onde $g_\alpha(\phi_\alpha) = Z(\phi) f_\alpha(X_0(\phi_\alpha))$ e $Z(\phi) = \text{grad}_X$. Efetuando-se a substituição $\phi_\alpha = t + \psi_\alpha$, encontra-se:

$$\dot{\psi}_\alpha = \sum_{\alpha'} \Gamma_{\alpha\alpha'}(\psi_\alpha - \psi_{\alpha'}) + \omega_\alpha \quad (3-9)$$

onde,

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}(\psi_\alpha - \psi_{\alpha'}) = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t + \psi_\alpha) V_{\alpha\alpha'}(t + \psi_\alpha, t + \psi_{\alpha'}) dt \quad (3-10)$$

E,

$$\omega_\alpha = \frac{1}{T} \int_0^T g_\alpha(t + \psi_\alpha) dt \quad (3-11)$$

Segundo KURAMOTO & NISHIKAWA (1987), a equação (3-9) não pode ser tratada analiticamente. Como alternativa, considera-se um modelo onde o acoplamento

$\Gamma_{\alpha\alpha'}$, e a distribuição da frequência natural ω_α são dados por funções simples. Isto é, os osciladores que interagem de modo colaborativo como partes de um todo, aplicando a concepção de campo médio.

Assumindo $\Gamma_{\alpha\alpha'}$ idêntico para todos os pares (α, α') e que tenha uma magnitude de ordem N^{-1} , assegura-se que a intensidade do campo local experimentado por cada oscilador é dependente do número total N . Desta forma:

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}(\psi_\alpha - \psi_{\alpha'}) = N^{-1}\Gamma(\psi_\alpha - \psi_{\alpha'}) \quad (3-12)$$

Além disso, supondo-se uma função trigonométrica simples para a função T-periódica Γ :

$$\Gamma(\psi_\alpha - \psi_{\alpha'}) = -K\text{sen}(\psi_\alpha - \psi_{\alpha'}) \quad (3-13)$$

Seja $g(\omega)$ a densidade de número normalizado dos osciladores cujas frequências naturais ω_α coincidem com ω . A curva de distribuição das frequências dos osciladores acoplados $n(\psi, t)$ que para um N infinitamente grande assume a forma $n(\psi')$. Assim, $g(\omega)$ é assumido como simétrico em relação a alguma frequência ω_0 , ou:

$$g(\omega_0 + \omega) = g(\omega_0 - \omega) \quad (3-14)$$

Assim, a partir da equação (3-9) obtém-se:

$$\dot{\psi}_\alpha = \omega_\alpha - N^{-1}K \sum_{\alpha'=1}^N \text{sen}(\psi_\alpha - \psi_{\alpha'}) \quad (3-15)$$

Em analogia com as transições de fase termodinâmica é apropriado definir um parâmetro de ordem. Uma escolha conveniente para isso é uma quantidade complexa $\sigma e^{i\theta}$, definida como:

$$\sigma e^{i\theta} = \int_0^{2\pi} n(\psi') e^{i\psi'} d\psi' \quad (3-16)$$

Kuramoto faz a seguinte definição para o parâmetro de ordem:

“O parâmetro de ordem representa o estado coletivo, sendo determinado a partir de uma condição de autoconsistência que existe entre a dinâmica do sistema e a dinâmica de cada oscilador individualmente” (KURAMOTO; BATTOGTOKH, 2002).

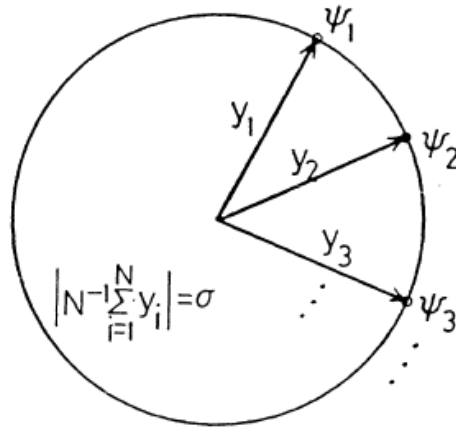


Figura 3.3. Os estados de fase dos osciladores $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ distribuídos em um círculo unitário e vetores de estado associados y_1, y_2, \dots, y_n . O comprimento da soma do vetor $\sum y_i$ dividido por N dá a magnitude do parâmetro de ordem. Fonte: KURAMOTO (1984).

De forma equivalente, pode-se distribuir os N osciladores em um círculo unitário associando um vetor do comprimento da unidade de cada oscilador, Figura 3.3, tomando uma soma vetorial e dividindo por N . Com isso, o sigma desaparece para a distribuição uniforme das frequências. No entanto, assumindo a formação de um grupo sincronizado o parâmetro de ordem complexa em (3-15) pode ser transformado em:

$$\dot{\psi}_\alpha = \omega_\alpha - K\sigma \sin(\psi_\alpha - \Omega t - \theta) \quad (3-17)$$

O parâmetro de ordem de Kuramoto é uma das formas de se medir o quão sincronizado um sistema dinâmico acoplado está. Este parâmetro representa matematicamente o grau de sincronização de uma população. O sistema é considerado sincronizado quando o valor é 1, e dessincronizado quando o valor é zero. Isso é obtido por meio do somatório da contribuição de cada oscilador para a formação do campo médio. Esse parâmetro representa a intensidade do campo médio. Para um valor zero, não há contribuição dos osciladores para o campo médio o que significa que eles não

sincronizam. Para o valor de um, o campo médio é máximo e há uma completa sincronização da população.

3.3 METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO A PARTIR DA SÉRIE TEMPORAL

O parâmetro de ordem de Kuramoto foi proposto para o modelo de osciladores de fase acoplados, designando duas possibilidades de padrão de comportamento: o estado sincronizado e o dessincronizado. Desta forma, define-se um grau de sincronização entre zero e um, onde um é totalmente sincronizado e zero dessincronizado. Com isso, o parâmetro de ordem não é capaz de identificar outras possibilidades de sincronização.

Uma outra forma de estabelecer a sincronização do sistema é através de uma verificação direta das respostas. Desta forma, é possível considerar a série temporal de cada oscilador e efetuar uma comparação com os outros. A métrica utilizada considera um sinal de referência e estabelece a diferença entre eles. Portanto, caso a diferença seja nula, têm-se uma sincronização total. Caso o critério não seja satisfeito, como uma segunda verificação a subtração resultante é somada ao dobro do sinal original e se o valor for aproximadamente zero para todos os instantes de tempo, tem-se uma sincronização em oposição de fase, ou seja, defasada em π .

Caso nenhum dos casos anteriores ocorra, realiza-se uma contagem dos máximos do sinal resultante e, se corresponderem aos mesmos valores em intervalos regulares, têm-se dois sinais em frequências fechadas. Se os valores desses máximos não correspondem uns aos outros em uma progressão imediata, é efetuada uma contagem a partir do primeiro máximo até que se identifique uma repetição deste valor, comparando todos os máximos subsequentes. Se a repetição for confirmada por três ciclos seguidos, é contabilizado uma sincronização de longo período de sincronização. Do contrário, verifica-se um oscilador do conjunto como dessincronizado. E o oscilador de referência é trocado para outro e o processo repetido. Todo o método é avaliado dentro de uma margem de tolerância que é dada pelo valor do passo no tempo.

Todos os osciladores são comparados à referência, um por um. Se todos forem sincronizados, avalia-se um estado totalmente sincronizado do sistema. Se ao menos um estiver em oposição de fase, o conjunto todo é classificado como sincronizado em oposição de fase. O mesmo para a frequência fechada e para longo período de sincronização, obedecendo a essa mesma sequência de classificação. Assim, se ao menos um oscilador estiver dessincronizado têm-se para o sistema um estado parcialmente

sincronizado, sendo considerado estado de quimera se o requisito topológico for satisfeito. Quando todos os osciladores forem aos pares qualificados como dessincronizados, classifica-se o sistema como dessincronizado. A Figura 3.4 mostra um fluxograma que ilustra o processo de identificação e classificação.

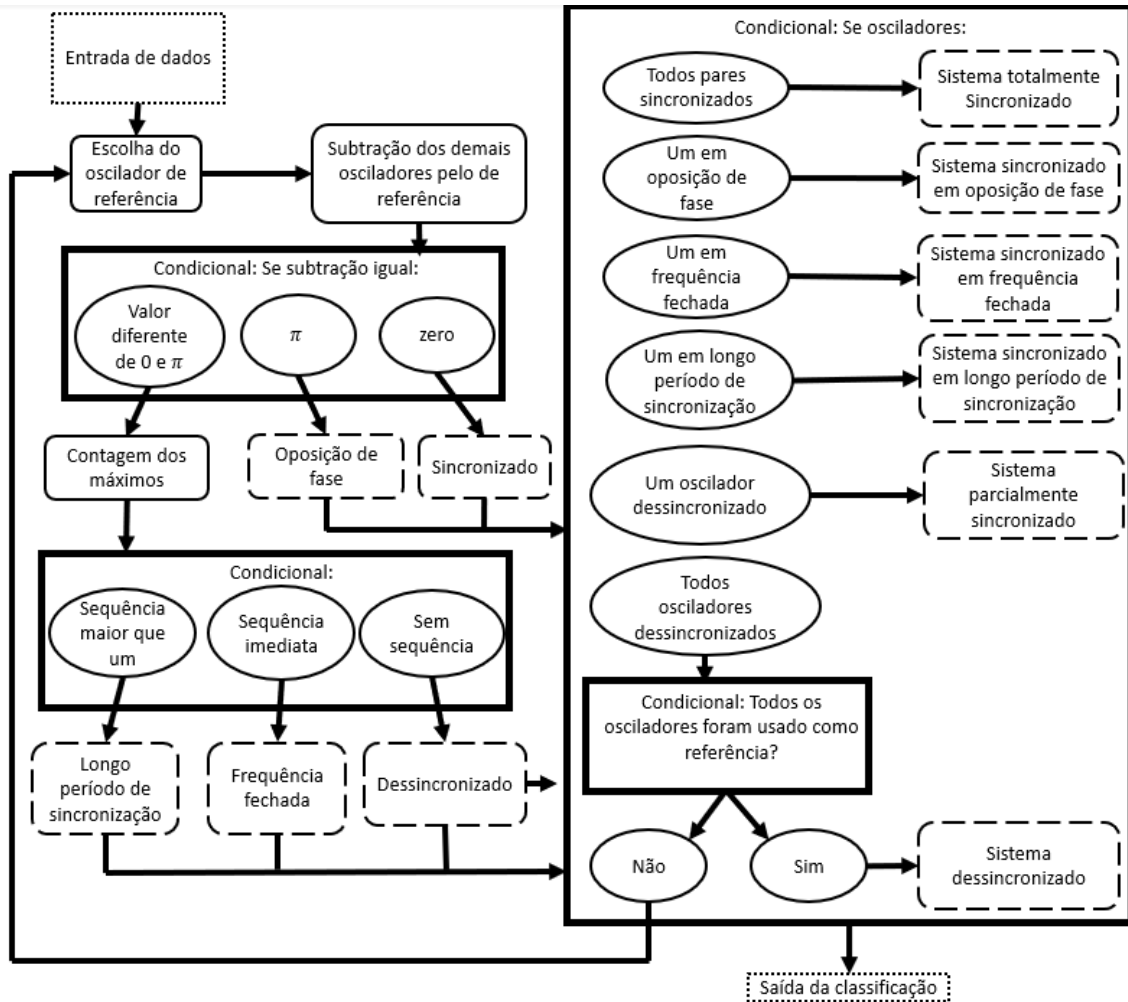


Figura 3.4. Fluxograma de identificação e classificação da sincronização a partir da série temporal.

4 MODELAGEM DO SISTEMA MECÂNICO

Este capítulo apresenta a modelagem do sistema mecânico analisado neste trabalho. Utiliza-se o método de Lagrange e apresentam-se as respostas do sistema para diferentes tipos de padrão de comportamento.

4.1 MODELAGEM

O sistema mecânico proposto neste trabalho é composto por três conjuntos pêndulo-carro onde cada pêndulo é ligado a um único carro e os carros são ligados simetricamente uns aos outros e cada um deles ligados a uma plataforma fixa e uma plataforma que exerce excitação de base. A Figura 4.1 mostra um desenho esquemático do sistema que pode ser considerado um conjunto hierárquico. Esse sistema é análogo ao sistema de plataformas e metrônomos utilizadas no trabalho de MARTENS *et al.* (2013), ao usar um sistema hierárquico onde os carros se equiparam as plataformas e os pêndulos aos metrônomos.

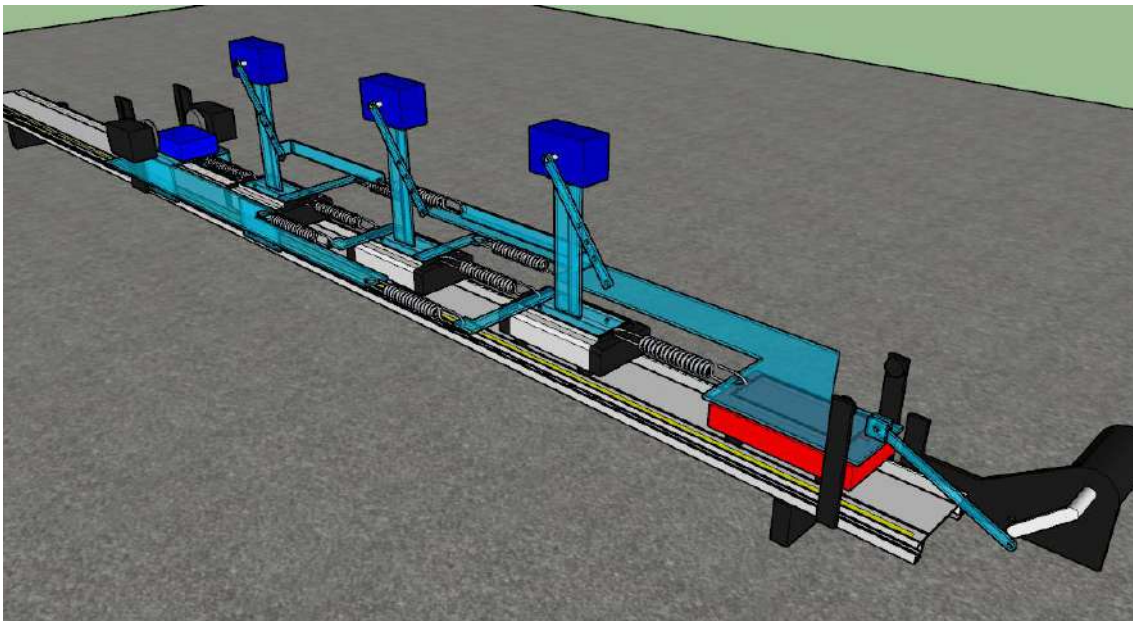


Figura 4.1. Desenho esquemático do modelo mecânico composto de três populações de osciladores carro-pêndulo.

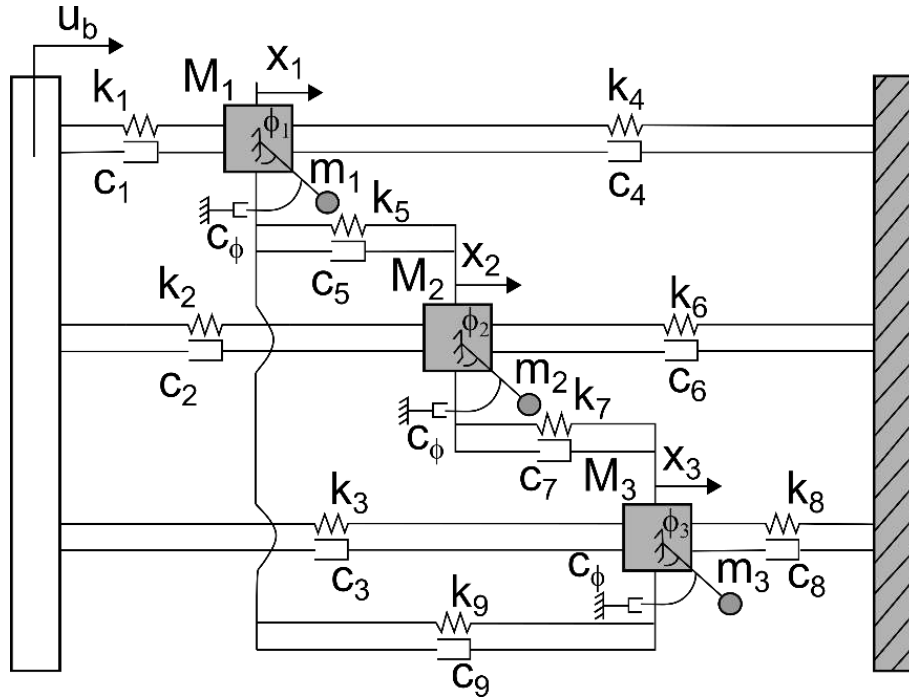


Figura 4.2. Modelo conceitual do sistema mecânico.

A Figura 4.2 mostra o sistema mecânico esquematicamente o que permite visualizar melhor os acoplamentos existentes. Note que cada carro possui massa M_i ($i = 1, 2, 3$) e cada pêndulo possui uma massa m_i ($i = 1, 2, 3$). O deslocamento de cada carro é medido por uma coordenada x_i enquanto a posição do pêndulo é avaliada a partir do ângulo ϕ_i . Além disso, os acoplamentos são proporcionados por elementos elásticos lineares k_j ($j = 1, \dots, 9$) e elementos dissipadores viscosos lineares C_j ($j = 1, \dots, 9$), também havendo dissipação viscosa nos pêndulos $C_{\phi i}$ ($i = 1, 2, 3$) e a excitação de base correspondendo a $u_b = u \sin \Omega t$. Ressaltando que o sistema possui acoplamentos simétricos para que a sincronização parcial que venha a ser identificada no sistema possa ser classificada como estado de quimera devido ao quesito topológico.

As equações de movimento do sistema podem ser obtidas através das equações de Lagrange. Desta forma, considere a energia cinética:

$$E_C = \frac{M_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{M_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{M_3 \dot{x}_3^2}{2} + \frac{m_1 |v_1|^2}{2} + \frac{m_2 |v_2|^2}{2} + \frac{m_3 |v_3|^2}{2} \quad (4-1)$$

onde as coordenadas são dadas por:

$$\begin{cases} y_1 = x_i + l \operatorname{sen} \phi_i \\ y_2 = l \cos \phi_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{x}_i + \dot{\phi}_i l \cos \phi_i \\ \dot{y}_2 = -\dot{\phi}_i l \operatorname{sen} \phi_i \end{cases} \quad (4-2)$$

Com isso, as velocidades podem ser expressas,

$$|v_i|^2 = \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 \quad (4-3)$$

$$|v_i|^2 = \dot{x}_i^2 + 2\dot{x}_i\dot{\phi}_i l \cos \phi_i + l^2\dot{\phi}_i^2 \quad (4-4)$$

Assim a energia cinética pode ser reescrita como:

$$E_C = \frac{M_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{M_2\dot{x}_2^2}{2} + \frac{M_3\dot{x}_3^2}{2} + \frac{m_1(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{\phi}_1 l \cos \phi_1 + l^2\dot{\phi}_1^2)^2}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_2\dot{\phi}_2 l \cos \phi_2 + l^2\dot{\phi}_2^2)^2}{2} + \frac{m_3(\dot{x}_3^2 + 2\dot{x}_3\dot{\phi}_3 l \cos \phi_3 + l^2\dot{\phi}_3^2)^2}{2} \quad (4-5)$$

De maneira análoga a energia potencial é dada por:

$$E_P = m_1 g l_1 (1 - \cos \phi_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos \phi_2) + m_3 g l_3 (1 - \cos \phi_3) + \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2} + \frac{k_3 x_3^2}{2} + \frac{k_4 x_1^2}{2} + \frac{k_6 x_2^2}{2} + \frac{k_8 x_3^2}{2} + \frac{k_5 (x_2 - x_1)^2}{2} + \frac{k_7 (x_3 - x_2)^2}{2} + \frac{k_9 (x_3 - x_1)^2}{2} + \frac{k_1 (u_b)^2}{2} + \frac{k_2 (u_b)^2}{2} + \frac{k_3 (u_b)^2}{2} \quad (4-6)$$

Também considera-se a energia dissipada pelo sistema, dada por:

$$E_D = \frac{C_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{C_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{C_3 \dot{x}_3^2}{2} + \frac{C_4 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{C_6 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{C_8 \dot{x}_3^2}{2} + \frac{C_9 (\dot{x}_3 - \dot{x}_1)^2}{2} + \frac{C_5 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2}{2} + \frac{C_7 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2}{2} + \frac{C_1 (\dot{u}_b)^2}{2} + \frac{C_2 (\dot{u}_b)^2}{2} + \frac{C_3 (\dot{u}_b)^2}{2} + \frac{C_{\phi_1} \dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{C_{\phi_2} \dot{\phi}_2^2}{2} + \frac{C_{\phi_3} \dot{\phi}_3^2}{2} \quad (4-7)$$

Desta forma, obtém-se que o Lagrangeano é expresso da seguinte forma:

$$L = \frac{M_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{M_2\dot{x}_2^2}{2} + \frac{M_3\dot{x}_3^2}{2} + \frac{m_1(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{\phi}_1 l \cos \phi_1 + l^2\dot{\phi}_1^2)^2}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_2\dot{\phi}_2 l \cos \phi_2 + l^2\dot{\phi}_2^2)^2}{2} + \frac{m_3(\dot{x}_3^2 + 2\dot{x}_3\dot{\phi}_3 l \cos \phi_3 + l^2\dot{\phi}_3^2)^2}{2} - \quad (4-8)$$

$$m_1gl_1(1 - \cos \phi_1) - m_2gl_2(1 - \cos \phi_2) - m_3gl_3(1 - \cos \phi_3) - \frac{k_1x_1^2}{2} - \frac{k_2x_2^2}{2} - \frac{k_3x_3^2}{2} - \frac{k_4x_1^2}{2} - \frac{k_6x_2^2}{2} - \frac{k_8x_3^2}{2} - \frac{k_5(x_2-x_1)^2}{2} - \frac{k_7(x_3-x_2)^2}{2} - \frac{k_9(x_3-x_1)^2}{2} - \frac{k_1(u_b)^2}{2} - \frac{k_2(u_b)^2}{2} - \frac{k_3(u_b)^2}{2}$$

Aplicando à equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4-9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\phi}_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4-10)$$

Chegando-se as seguintes equações de movimento. Considerando os carros,

$$(M_1 + m_1)\ddot{x}_1 + m_1l(\ddot{\phi}_1 \cos \phi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1) + (C_1 + C_4 + C_5 + C_9)\dot{x}_1 - C_5\dot{x}_2 - C_9\dot{x}_3 + (k_1 + k_4 + k_5 + k_9)x_1 - k_5x_2 - k_9x_3 = uk_1 \sin \Omega t + uC_1\Omega \cos \Omega t \quad (4-11)$$

$$(M_2 + m_2)\ddot{x}_2 + m_2l(\ddot{\phi}_2 \cos \phi_2 - \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2) + (C_2 + C_5 + C_6 + C_7)\dot{x}_2 + C_5\dot{x}_1 + C_7\dot{x}_3 + (k_2 + k_5 + k_6 + k_7)x_2 - k_5x_1 - k_7x_3 = uk_2 \sin \Omega t + uC_2\Omega \cos \Omega t \quad (4-12)$$

$$(M_3 + m_3)\ddot{x}_3 + m_3l(\ddot{\phi}_3 \cos \phi_3 - \dot{\phi}_3^2 \sin \phi_3) + (C_3 + C_7 + C_8 + C_9)\dot{x}_3 - C_9\dot{x}_1 - C_7\dot{x}_2 + (k_3 + k_7 + k_8 + k_9)x_3 - k_9x_1 - k_7x_2 = uk_3 \sin \Omega t + uC_3\Omega \cos \Omega t \quad (4-13)$$

Considerando os pêndulos.

$$m_1l^2\ddot{\phi}_1 + m_1l\ddot{x}_1 \cos \phi_1 + C_{\phi_1}\dot{\phi}_1 + m_1gl \sin \phi_1 = 0 \quad (4-14)$$

$$m_2l^2\ddot{\phi}_2 + m_2l\ddot{x}_2 \cos \phi_2 + C_{\phi_2}\dot{\phi}_2 + m_2gl \sin \phi_2 = 0 \quad (4-15)$$

$$m_3l^2\ddot{\phi}_3 + m_3l\ddot{x}_3 \cos \phi_3 + C_{\phi_3}\dot{\phi}_3 + m_3gl \sin \phi_3 = 0 \quad (4-16)$$

As equações (4-11), (4-12), (4-13), (4-14), (4-15) e (4-16) são as equações de movimento do sistema. Isolando e substituindo as derivadas de segunda ordem nas

respectivas equações obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias que governam o sistema:

$$\begin{aligned}
& (M_1 + m_1(1 - \cos^2 \phi_1))\ddot{x}_1 - \frac{C_{\phi_1}}{l}\dot{\phi}_1 \cos \phi_1 - m_1 g \sin \phi_1 \cos \phi_1 - \\
& m_1 l \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1 + (C_1 + C_4 + C_5 + C_9)\dot{x}_1 - C_5 \dot{x}_2 - C_9 \dot{x}_3 + (k_1 + \\
& k_4 + k_5 + k_9)x_1 - k_5 x_2 - k_9 x_3 = uk_1 \sin \Omega t + uC_1 \Omega \cos \Omega t
\end{aligned} \tag{4-17}$$

$$\begin{aligned}
& (M_2 + m_2(1 - \cos^2 \phi_2))\ddot{x}_2 - \frac{C_{\phi_2}}{l}\dot{\phi}_2 \cos \phi_2 - \\
& m_2 g \sin \phi_2 \cos \phi_2 - m_2 l \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2 + (C_2 + C_5 + C_6 + C_7)\dot{x}_2 - \\
& C_5 \dot{x}_1 - C_7 \dot{x}_3 + (k_2 + k_5 + k_6 + k_7)x_2 - k_5 x_1 - k_7 x_3 = \\
& uk_2 \sin \Omega t + uC_2 \Omega \cos \Omega t
\end{aligned} \tag{4-18}$$

$$\begin{aligned}
& (M_3 + m_3(1 - \cos^2 \phi_3))\ddot{x}_3 - \frac{C_{\phi_3}}{l}\dot{\phi}_3 \cos \phi_3 - \\
& m_3 g \sin \phi_3 \cos \phi_3 - m_3 l \dot{\phi}_3^2 \sin \phi_3 + (C_3 + C_7 + C_8 + C_9)\dot{x}_3 - \\
& C_7 \dot{x}_2 - C_9 \dot{x}_1 + (k_3 + k_7 + k_8 + k_9)x_3 - k_7 x_2 - k_9 x_1 = \\
& uk_3 \sin \Omega t + uC_3 \Omega \cos \Omega t
\end{aligned} \tag{4-19}$$

$$\begin{aligned}
& m_1 l^2 \ddot{\phi}_1 + C_{\phi_1} \dot{\phi}_1 + m_1 g l \sin \phi_1 + \\
& \frac{m_1 l \cos \phi_1}{(M_1 + m_1(1 - \cos^2 \phi_1))} \left[\frac{C_{\phi_1}}{l} \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 + m_1 g \sin \phi_1 \cos \phi_1 + \right. \\
& m_1 l \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1 - (C_1 + C_4 + C_5 + C_9)\dot{x}_1 + C_5 \dot{x}_2 + C_9 \dot{x}_3 - (k_1 + \\
& k_4 + k_5 + k_9)x_1 + k_5 x_2 + k_9 x_3 + uk_1 \sin \Omega t + uC_1 \Omega \cos \Omega t \left. \right] = 0
\end{aligned} \tag{4-20}$$

$$\begin{aligned}
& m_2 l^2 \ddot{\phi}_2 + C_{\phi_2} \dot{\phi}_2 + m_2 g l \sin \phi_2 + \\
& \frac{m_2 l \cos \phi_2}{(M_2 + m_2(1 - \cos^2 \phi_2))} \left[\frac{C_{\phi_2}}{l} \dot{\phi}_2 \cos \phi_2 + m_2 g \sin \phi_2 \cos \phi_2 + \right. \\
& m_2 l \dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2 - (C_2 + C_5 + C_6 + C_7)\dot{x}_2 + C_5 \dot{x}_1 + C_7 \dot{x}_3 - (k_2 + \\
& k_5 + k_6 + k_7)x_2 + k_5 x_1 + k_7 x_3 + uk_2 \sin \Omega t + uC_2 \Omega \cos \Omega t \left. \right] = 0
\end{aligned} \tag{4-21}$$

$$\begin{aligned}
& m_3 l^2 \ddot{\phi}_3 + C_{\phi_3} \dot{\phi}_3 + m_3 g l \sin \phi_3 + \\
& \frac{m_3 l \cos \phi_3}{(M_3 + m_3(1 - \cos^2 \phi_3))} \left[\frac{C_{\phi_3}}{l} \dot{\phi}_3 \cos \phi_3 + m_3 g \sin \phi_3 \cos \phi_3 + \right.
\end{aligned} \tag{4-22}$$

$$m_3 l \dot{\phi}_3^2 \sin \phi_3 - (C_3 + C_7 + C_8 + C_9) \dot{x}_3 + C_7 \dot{x}_2 + C_9 \dot{x}_1 - (k_3 + k_7 + k_8 + k_9) x_3 + k_7 x_2 + k_9 x_1 + u k_3 \sin \Omega t + u C_3 \Omega \cos \Omega t \Big] = 0$$

4.2 TIPOS DE RESPOSTAS DO SISTEMA

Esta seção apresenta simulações numéricas do sistema mecânico, identificando algumas respostas típicas. As simulações são realizadas utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem com passos menores que 0,001. Os parâmetros utilizados estão indicados na Tabela 1, exceto quando indicado de forma diferente. O mesmo se aplica as condições iniciais que, quando não for indicado, são assumidas como deslocamento unitário para o carro 1 e os demais osciladores nulos. Os parâmetros indicados na Tabela 1 foram obtidos através de diagramas de bifurcação realizados no intuito de identificar regiões de interesse no espaço dos parâmetros.

Tabela 1. Parâmetros do sistema.

Parâmetro	Valor	Unidade
<i>u</i>	1	m
<i>k</i>₁, <i>k</i>₂, <i>k</i>₃	20	N/m
<i>k</i>₄, <i>k</i>₆, <i>k</i>₈	0	N/m
<i>k</i>₅, <i>k</i>₇, <i>k</i>₉	50	N/m
<i>g</i>	9,81	m/s ²
<i>l</i>	0,2	m
<i>M</i>	1	kg
<i>m</i>₁, <i>m</i>₂, <i>m</i>₃	1	kg
<i>C</i>₁, <i>C</i>₂, <i>C</i>₃, <i>C</i>₅, <i>C</i>₇, <i>C</i>₉	0,56	N s/m
<i>C</i>_{<i>φ</i><i>i</i>}	0,01	N s/m
<i>C</i>₄, <i>C</i>₆, <i>C</i>₈	0	N s/m
<i>Ω</i>	10	rad/s

O primeiro resultado considera um caso totalmente sincronizado onde a amplitude de forçamento é $u = 0,2$ m, as rigidezes são $k_{1,2,3} = 12,2$ N/m e por fim uma frequência de forçamento de $\Omega = 5,7$ rad/s. A Figura 4.3 apresenta a resposta dos carros, representadas através de subespaços de fase compostos pela posição e velocidade de cada

carro. A Figura 4.4 segue a mesma ideia considerando a resposta dos pêndulos. Note que todas as respostas são de período-1, confirmadas por um ponto da seção de Poincaré. Observando a diferença entre a posição dos osciladores o padrão sincronizado destes é confirmado, Figura 4.5.

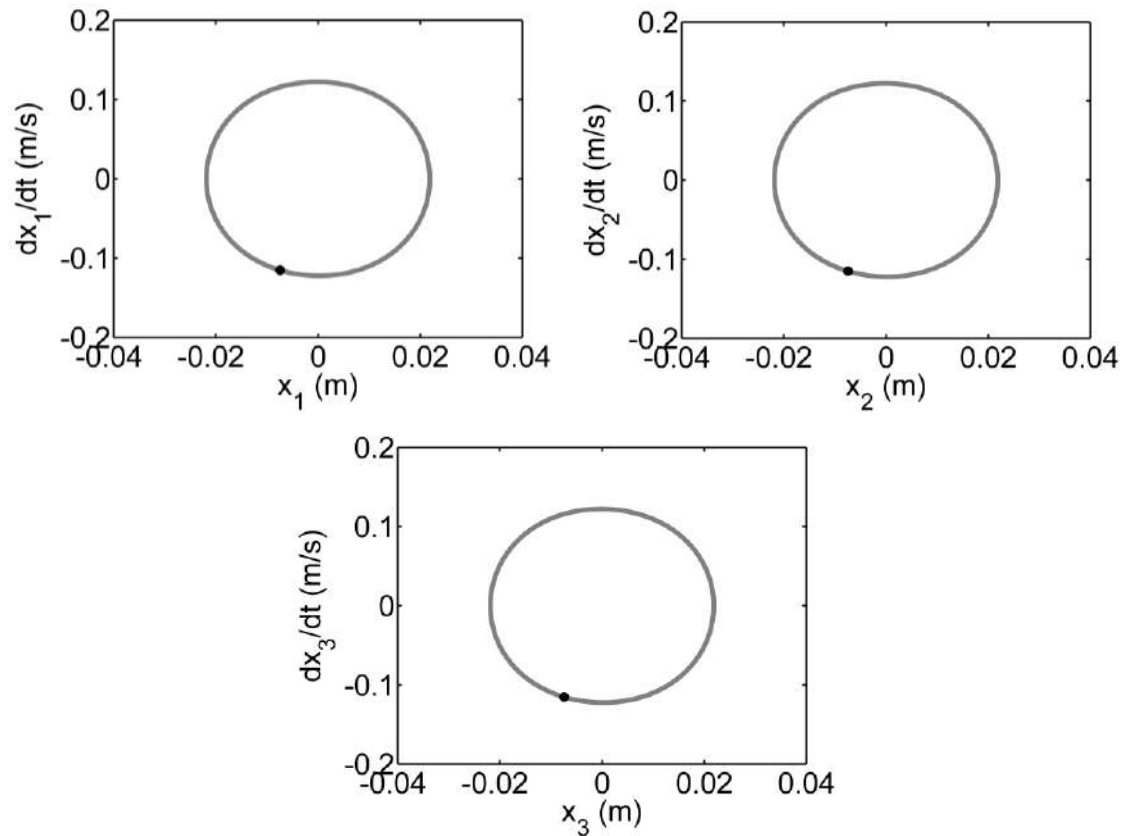


Figura 4.3. Espaço de fase para os carros em resposta sincronizada, o ponto marcado sobre a linha denota a seção de Poincaré.

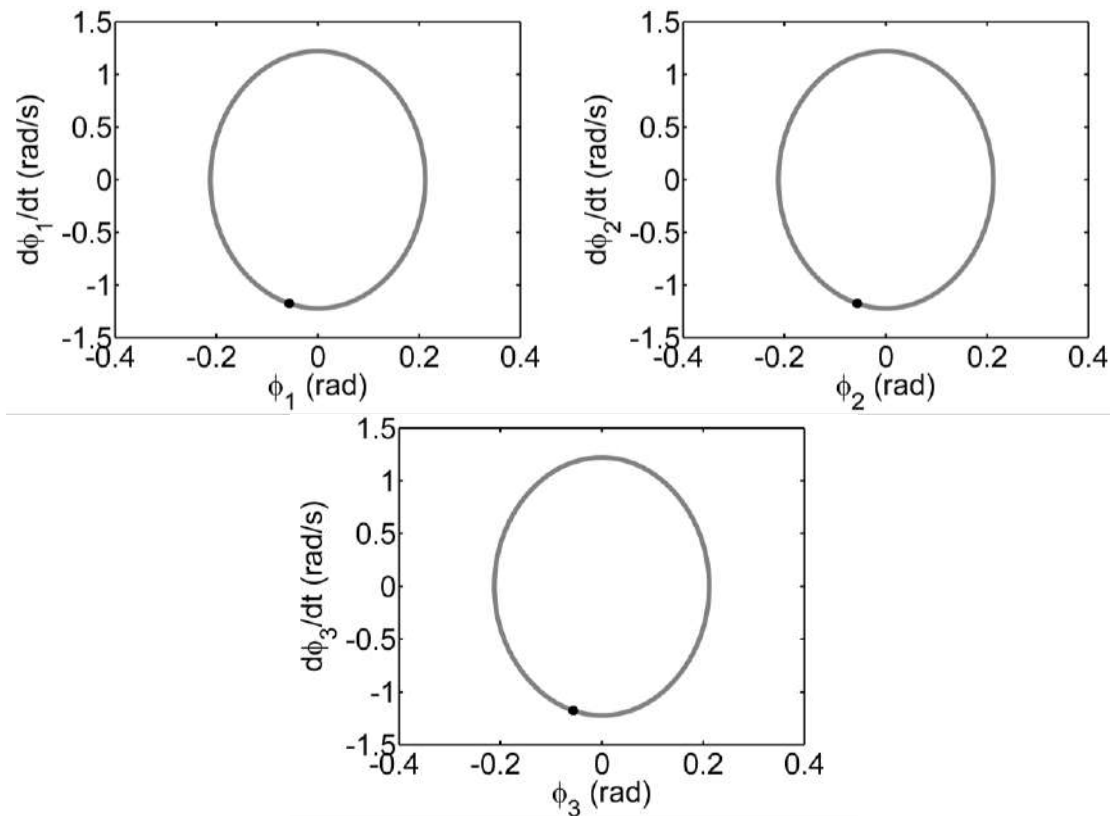


Figura 4.4. Espaço de fase para os pêndulos com uma resposta sincronizada.

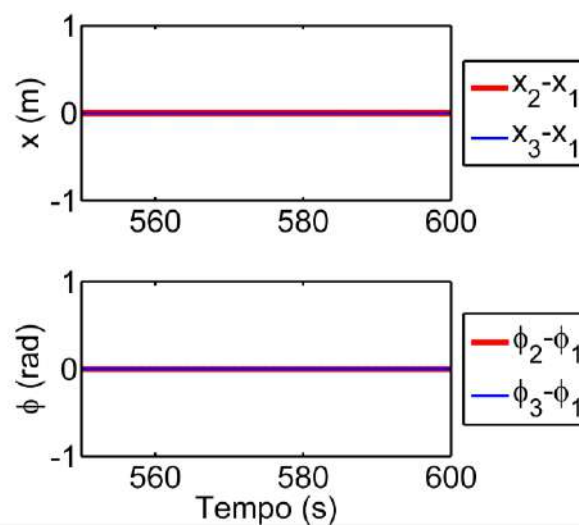


Figura 4.5. Diferença de posição entre os osciladores em comportamento sincronizado.

Mudando as rigidezes para $k_{1,2,3} = 19 \text{ N/m}$, e assumindo condições iniciais nulas, o sistema passa a apresentar uma resposta caótica sincronizada, conforme mostrado na Figura 4.6 e Figura 4.7. Assim como a diferença entre as posições dos osciladores que confirma a sincronia do sistema, Figura 4.8. A caoticidade da resposta é verificada a partir dos expoentes de Lyapunov cujo maior valor é 0,66, um valor positivo. Os expoentes são calculados a partir do algoritmo proposto por WOLF *et al.* (1985).

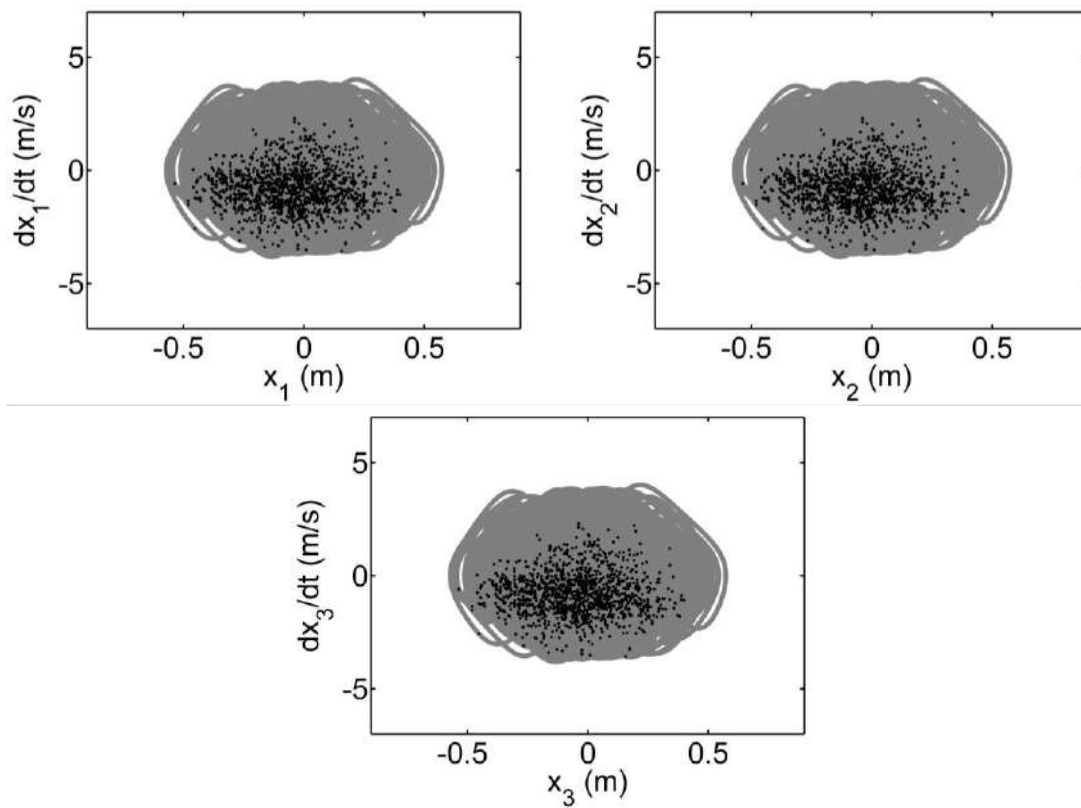


Figura 4.6. Espaço de estados para os carros com resposta caótica sincronizada.

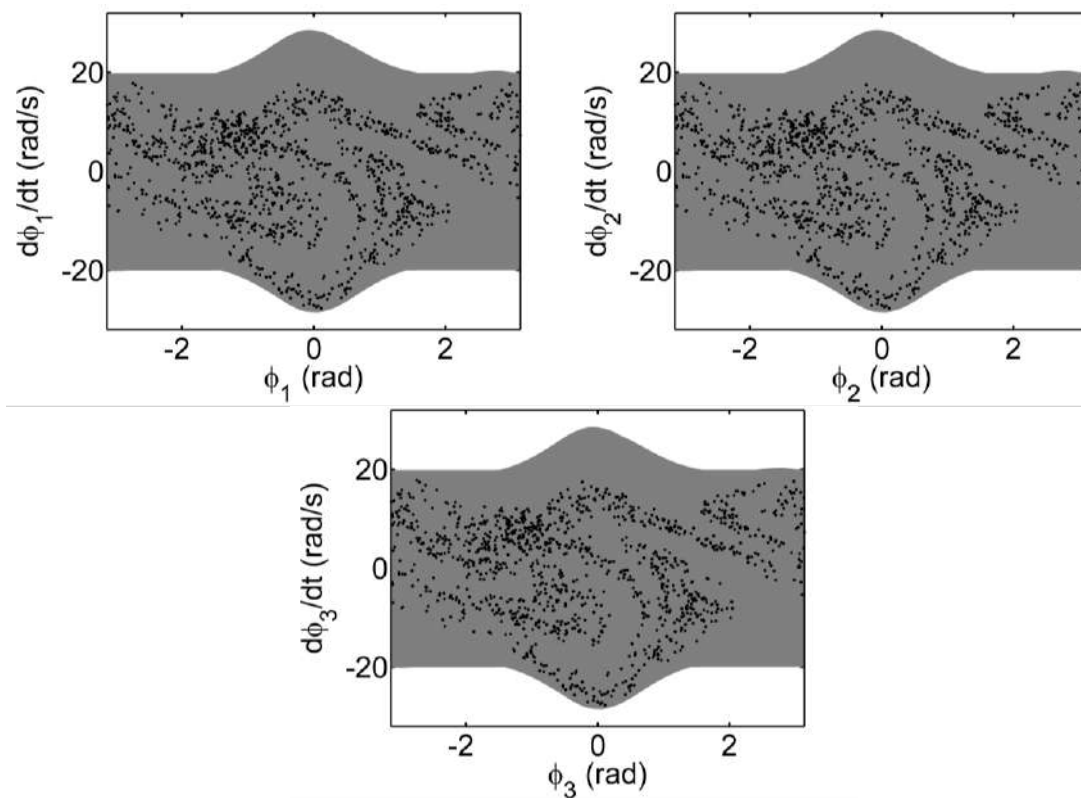


Figura 4.7. Espaço de estados para os pêndulos com resposta caótica sincronizada.

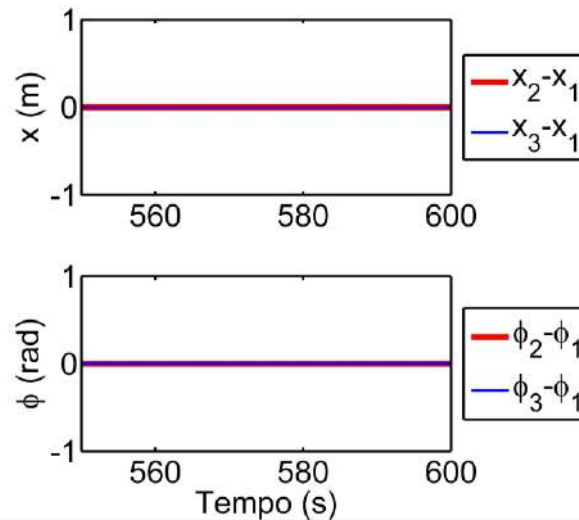


Figura 4.8. Diferença de posição entre os osciladores em comportamento sincronizado caótico.

Considerando $u = 0,2$ m, $\Omega = 9,1$ rad/s e $k_{1,2,3} = 19,1$ N/m obtém-se uma resposta caótica dessincronizada com um expoente de Lyapunov máximo de 0,87. A Figura 4.9 e Figura 4.10 apresentam essa resposta mostrando que apesar de dessincronizados, a forma do atrator caótico é praticamente a mesma pois o sistema é simétrico e os osciladores idênticos. Deste modo, as diferenças de resposta entre eles decorrem de condições iniciais assimétricas a qual apenas o carro 1 foi deslocado enquanto os demais foram nulos. Assim, os osciladores movem independentes não sendo identificado nenhum padrão dinâmico evidente, Figura 4.11.

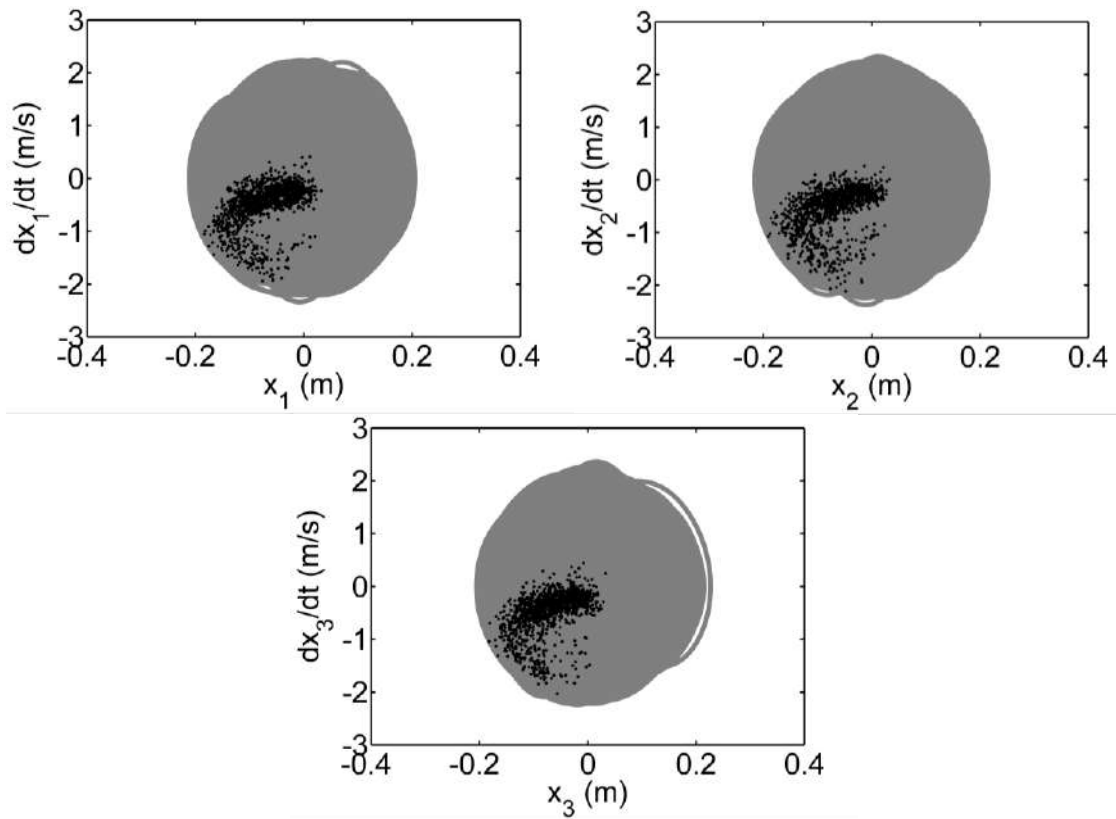


Figura 4.9. Espaço de fase para os carros em estado dessincronizado.

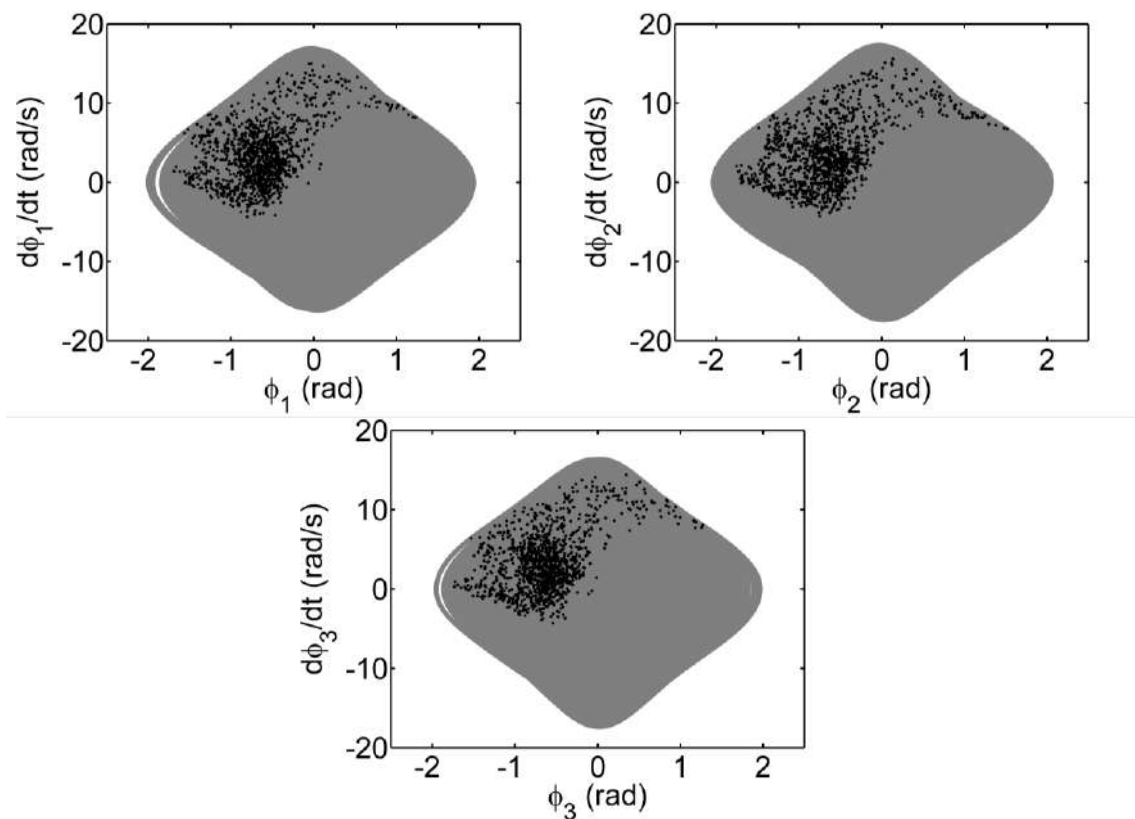


Figura 4.10. Espaço de fase para os pêndulos em estado dessincronizado.

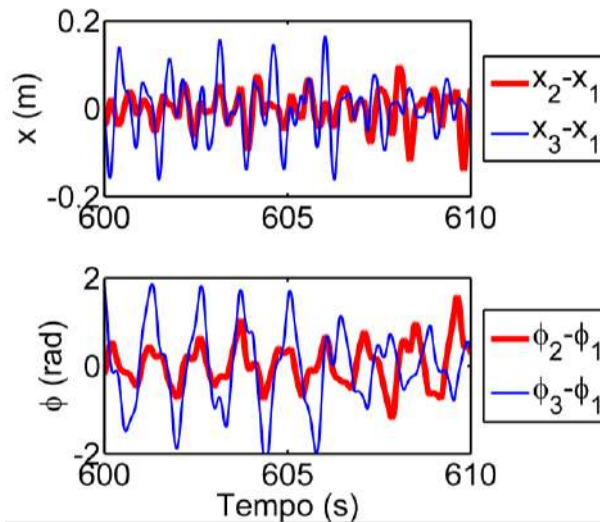


Figura 4.11. Diferença de posição entre os osciladores em comportamento dessincronizado.

O chamado longo período de sincronização (LPS) é um dos comportamentos menos frequentes para o sistema avaliado, sendo a resposta totalmente sincronizada e a sincronização em oposição de fase os comportamentos mais comuns. Para as condições $u = 0,2 \text{ m}$, $k_{1,2,3} = 6,5 \text{ N/m}$ e $\Omega = 9,5 \text{ rad/s}$, esse comportamento é identificado. A Figura 4.12 e Figura 4.13 mostram a posição dos osciladores no tempo com destaque para o período sob este comportamento que em destaque pelo quadrado pontilhado. Em seguida, a Figura 4.14 e Figura 4.15 mostram o espaço de fase do carro e dos pêndulos, respectivamente. E na Figura 4.16 é mostrado a diferença de posição ao longo do tempo entre os osciladores.

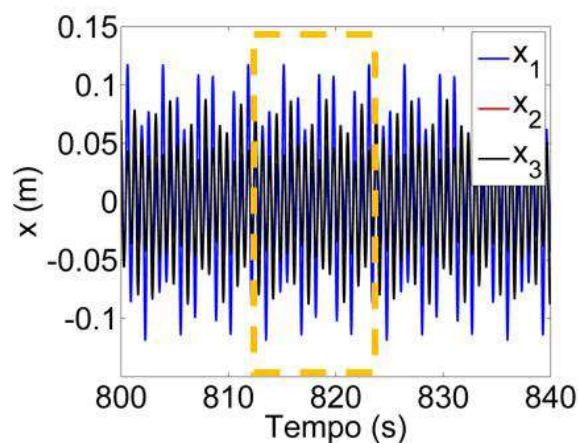


Figura 4.12. Posição dos carros no tempo com resposta de longo período de sincronização, em destaque o período de resposta do sistema.

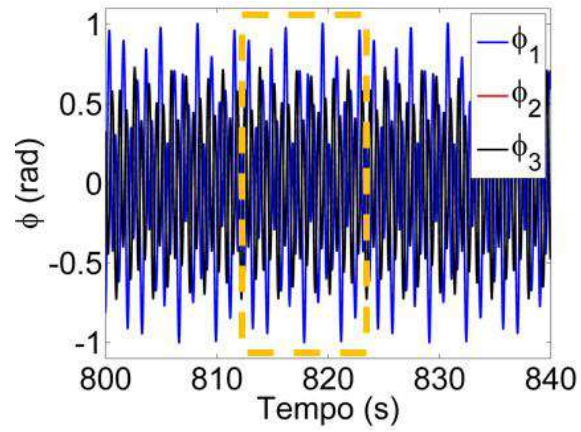


Figura 4.13. Posição dos pêndulos no tempo com comportamento de longo período de sincronização, em destaque o período de oscilação.

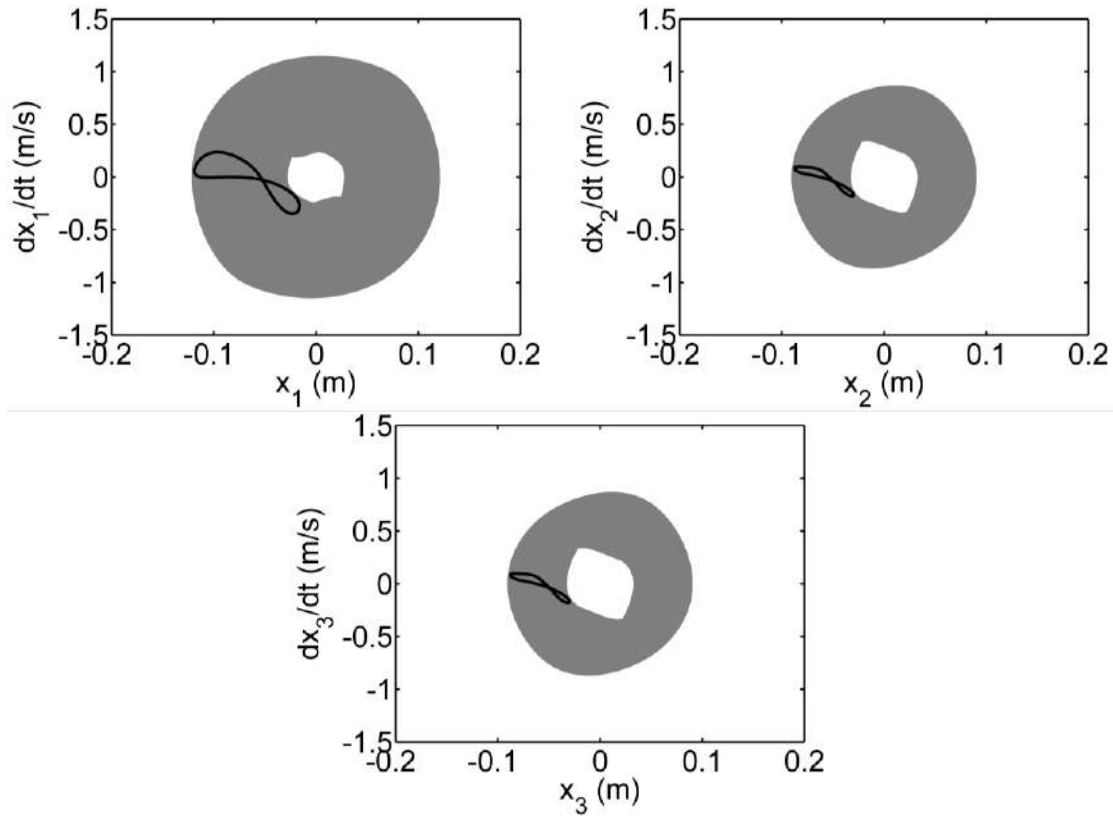


Figura 4.14. Espaço de estados dos carros sob uma resposta de longo período de oscilação (LPS).

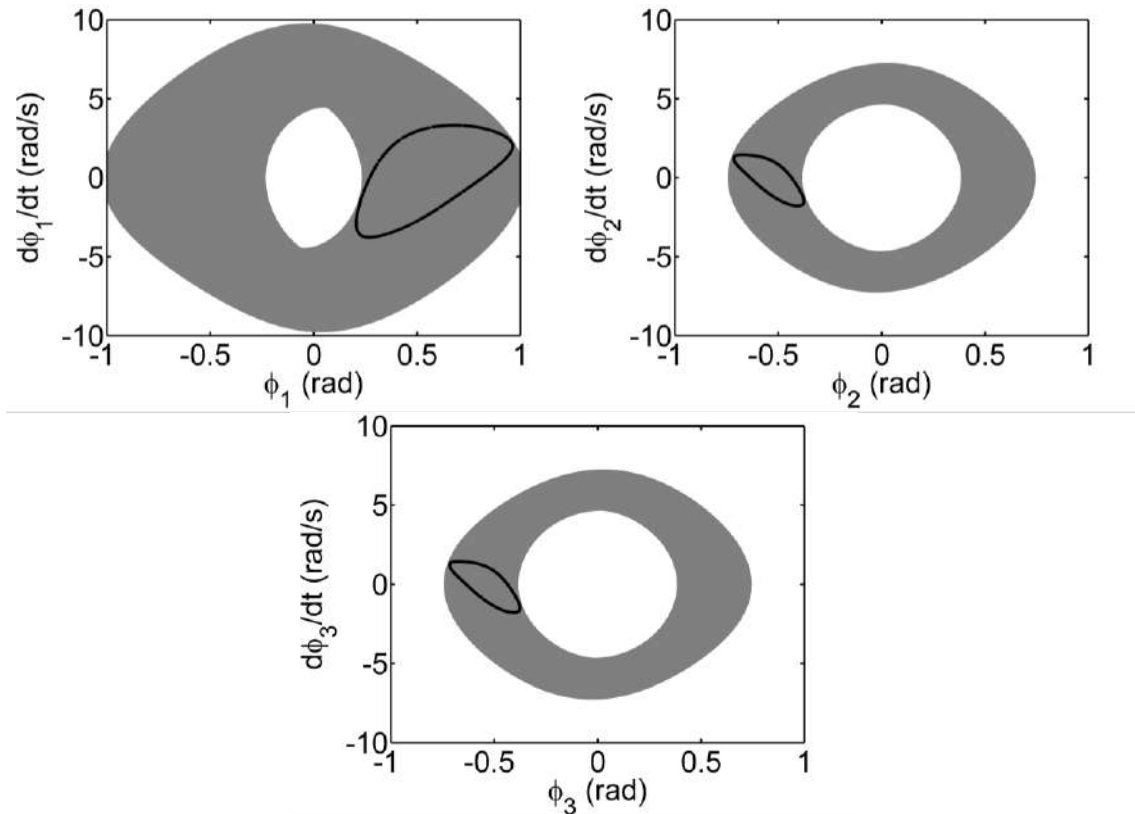


Figura 4.15. Espaço de estados dos pêndulos sob uma resposta de longo período de oscilação (LPS).

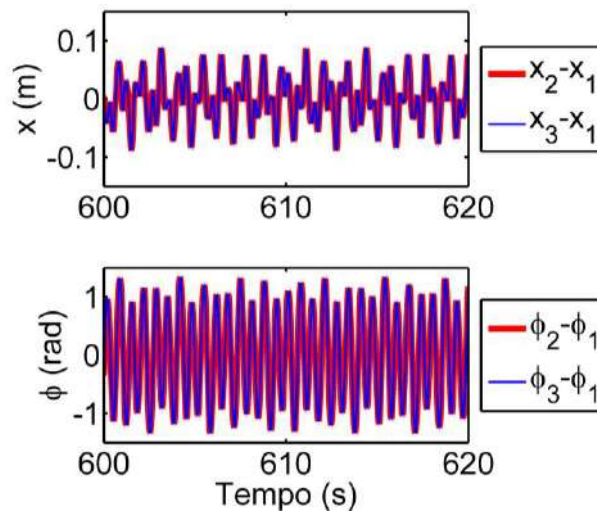


Figura 4.16. Diferença de posição entre os osciladores em comportamento de longo período de sincronização.

Um outro comportamento pouco frequente para este sistema é a sincronização com frequência fechada. Considerando as condições $u = 0,5 \text{ m}$, $k_{1,2,3} = 13,5 \text{ N/m}$ e $\Omega = 9,9 \text{ rad/s}$, o sistema apresenta a sincronização com frequência fechada. Note que tanto os carros como os pêndulos apresentam este mesmo comportamento entre si, Figura

4.17 e Figura 4.18. A Figura 4.19 mostra que o primeiro oscilador se move em uma órbita distinta dos demais que permanecem sincronizados.

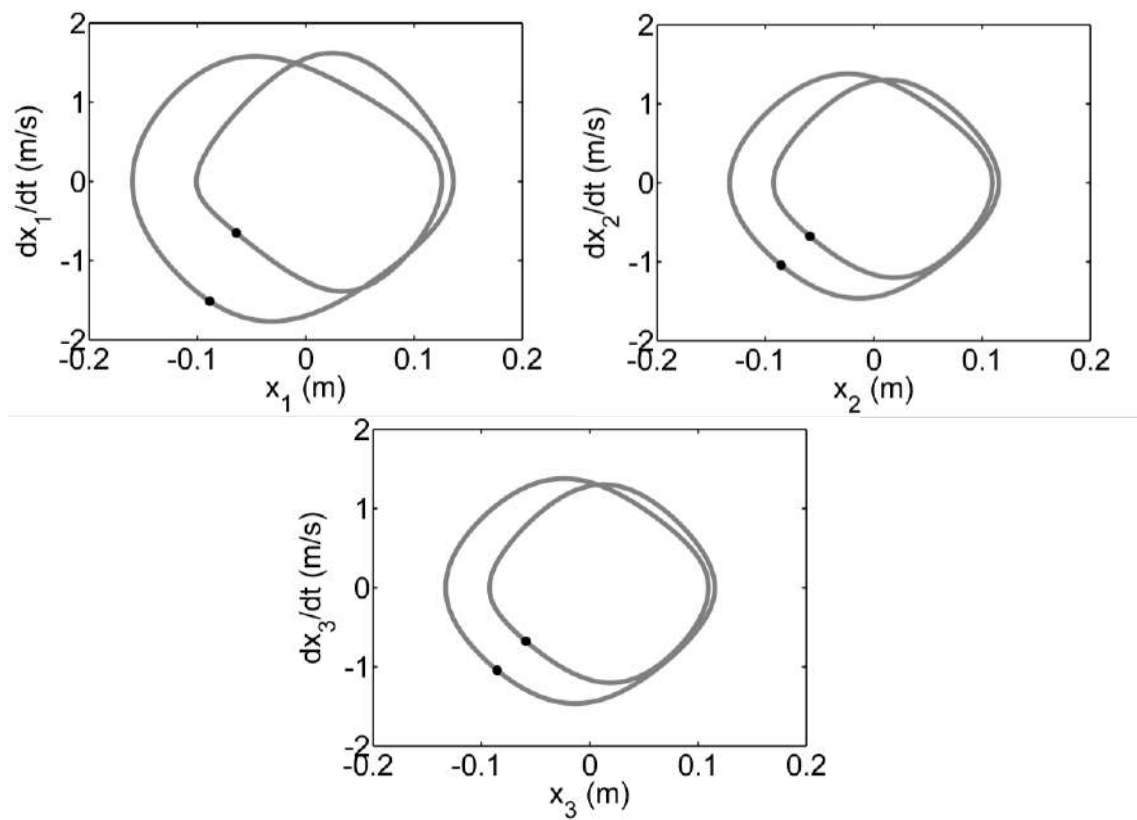


Figura 4.17. Espaço de fase para os carros sob a resposta de frequência fechada.

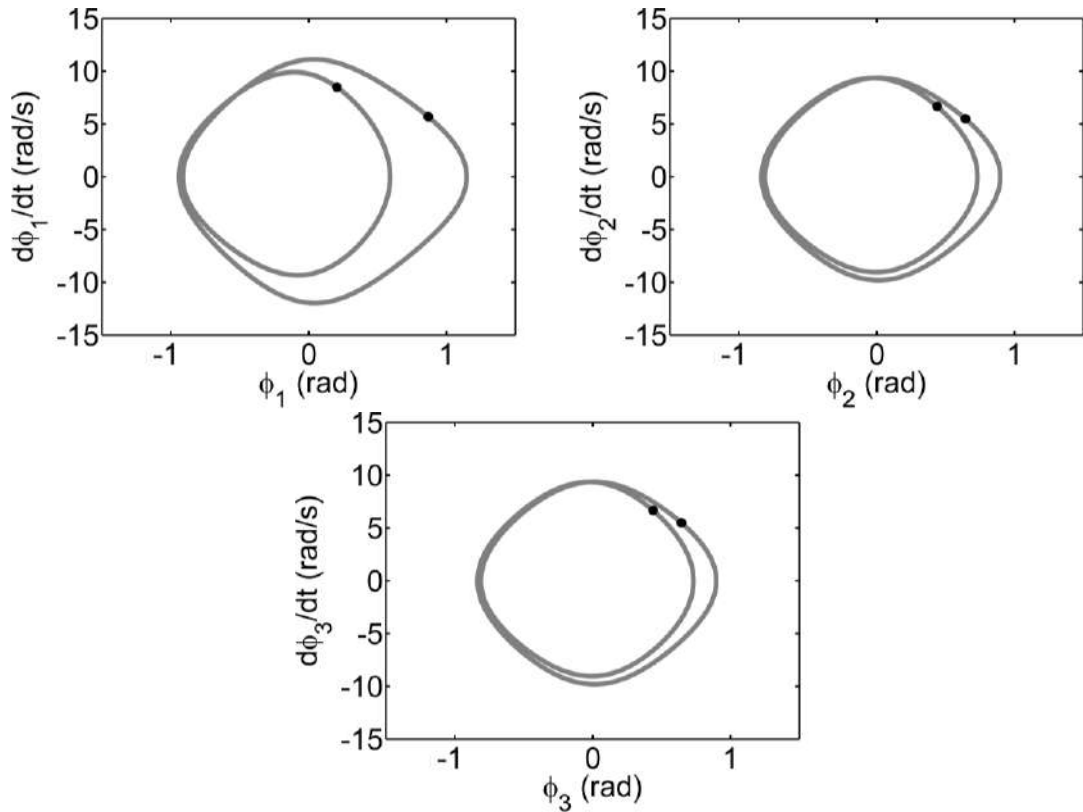


Figura 4.18. Espaço de fase para os pêndulos sob comportamento de frequência fechada.

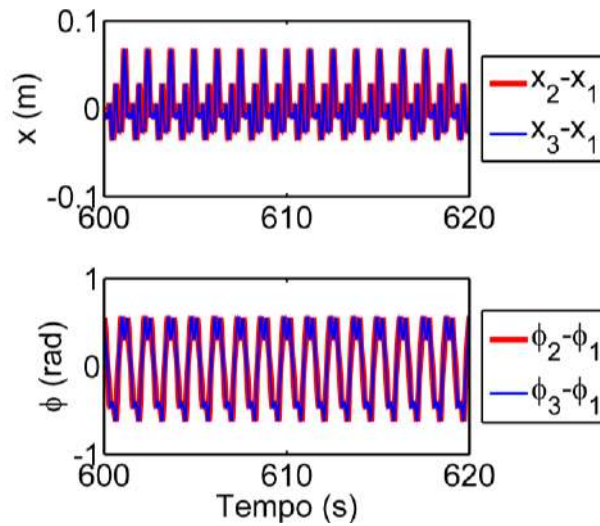


Figura 4.19. Diferença de posição entre os osciladores em comportamento de frequência fechada.

O comportamento de oposição de fase é um dos mais comuns para este sistema. A Figura 4.20 exemplifica este comportamento do sistema, para as condições $u = 0,2$ m, $k_{1,2,3} = 16,6$ N/m e $\Omega = 11$ rad/s. Na Figura 4.21 se observa que a diferença entre o

oscilador sincronizado e em oposição de fase resultou em um sinal que têm o dobro da amplitude da vibração dos osciladores no espaço de estados.

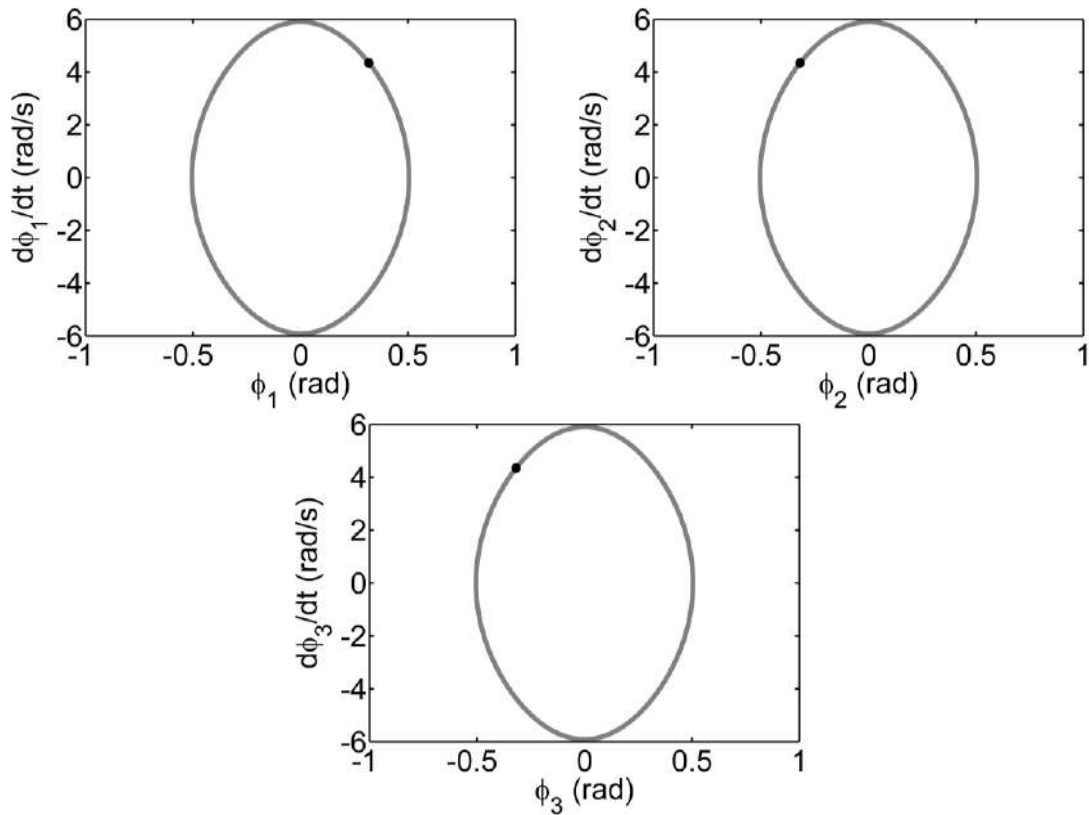


Figura 4.20. Espaço de fase para os pêndulos em oposição de fase.

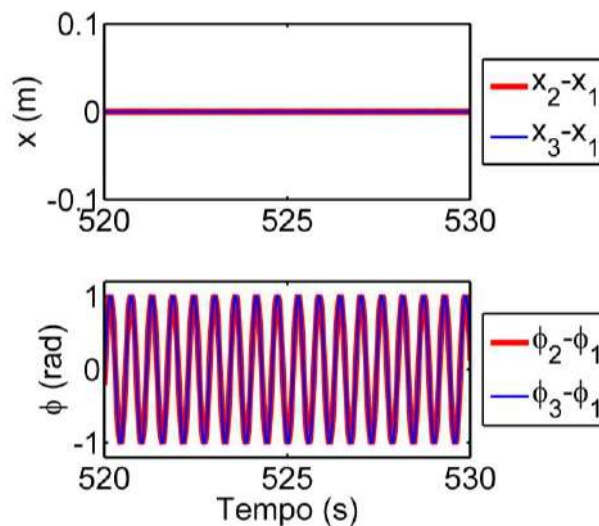


Figura 4.21. Diferença de posição entre os osciladores com os pêndulos em comportamento de sincronização em oposição de fase.

O estado de quimera é um comportamento assimétrico, muitas vezes difícil de ser encontrado ou identificado. Considere os parâmetros da Tabela 1, alterando a frequência

de forçamento para $\Omega = 9 \text{ rad/s}$ e as condições iniciais de deslocamento do primeiro e terceiro carros de 1 m com o segundo em repouso. A Figura 4.22 mostra a resposta no tempo dos carros enquanto a Figura 4.23 a resposta no tempo dos pêndulos. As Figura 4.24 e Figura 4.25 mostram a mesma resposta na forma de espaço de fase e a diferença dos mesmos no tempo na Figura 4.26. Nota-se que o primeiro carro apresenta uma resposta distinta dos demais, o que caracteriza a quebra de simetria do estado de quimera. Esse resultado em específico trata-se de um estado de quimera no hipercaos, pois apresenta os dois maiores valores dos expoentes de Lyapunov positivos (0,89 e 0,40).

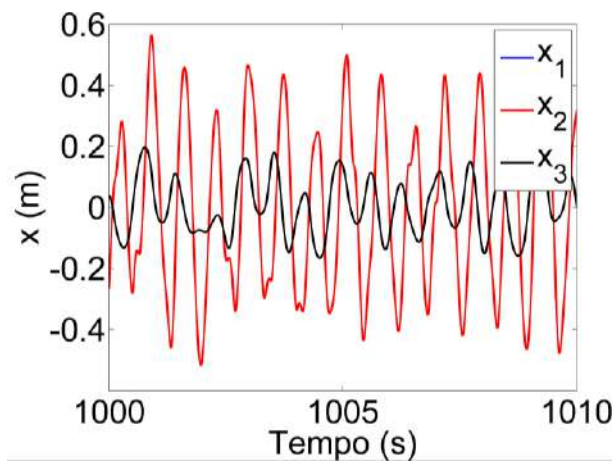


Figura 4.22. Resposta no tempo dos carros sob o estado de quimera.

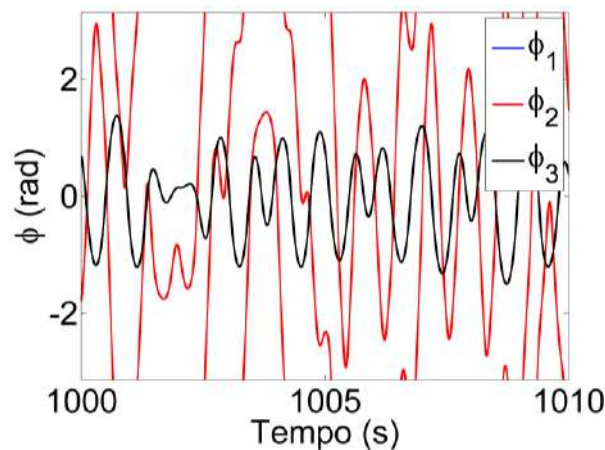


Figura 4.23. Resposta no tempo dos pêndulos sob o estado de quimera.

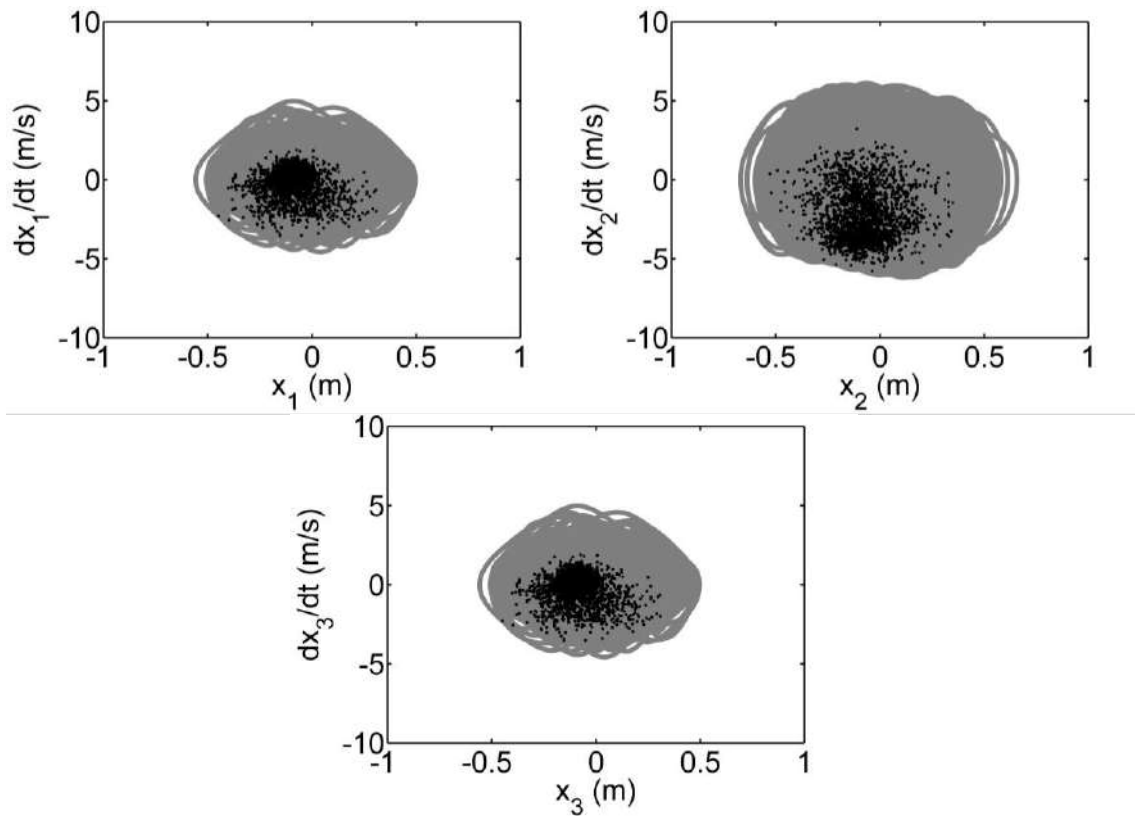


Figura 4.24. Espaço de fase dos carros sob o estado de quimera.

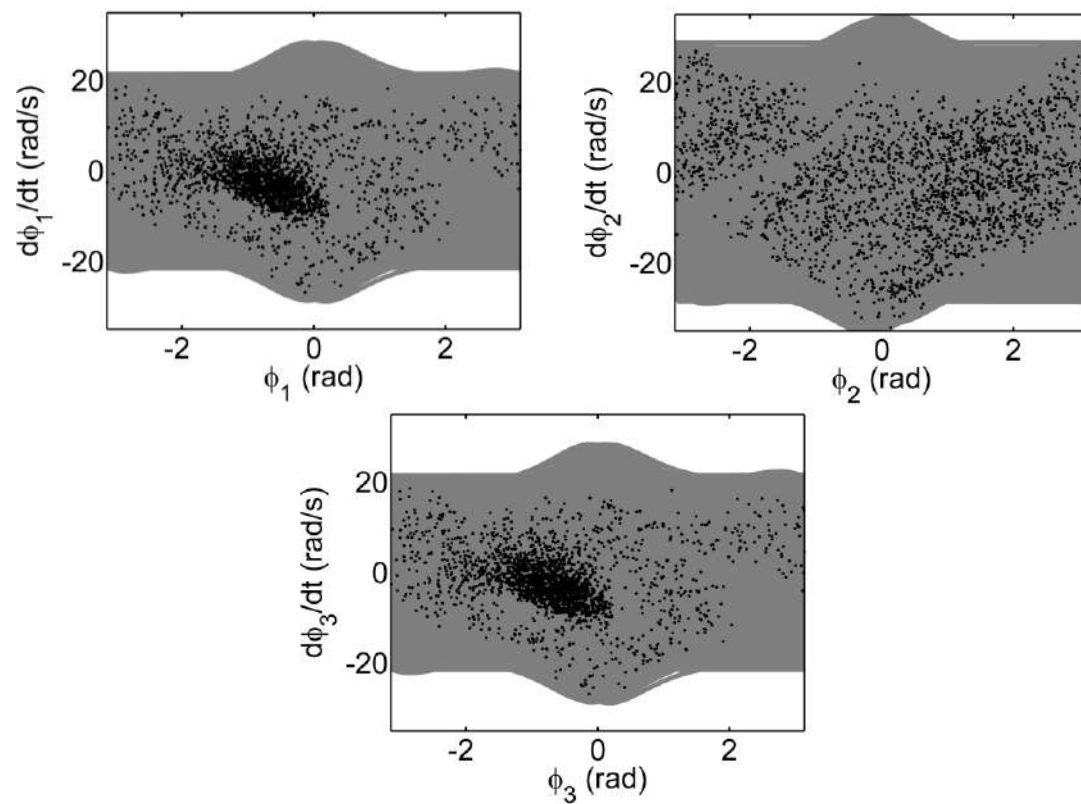


Figura 4.25. Espaço de fase dos pêndulos sob o estado de quimera.

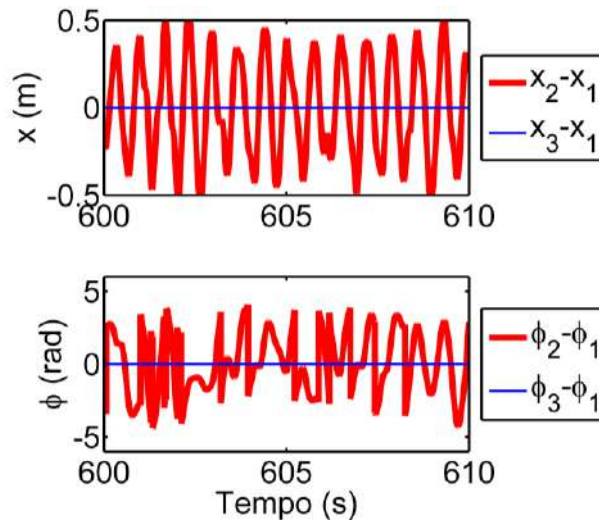


Figura 4.26. Diferença de posição entre os osciladores no estado de quimera.

A Tabela 2 mostra uma combinação de padrões entre os carros e os pêndulos conforme os tipos descritos na seção 3.1 e exemplificados anteriormente. Nesta tabela é verificado que os carros não apresentaram em nenhuma das simulações realizadas o comportamento de oposição de fase. E que os comportamentos sincronizados em fase e em oposição de fase dos pêndulos foram apenas correspondidos por respostas totalmente sincronizadas dos carros.

Tabela 2. Combinações de resposta do sistema.

Pêndulos \ Carros	Carros					
	Totalmente sincronizado	Oposição de fase	Frequência fechada	LPS	Quimera	Estado Dessincronizado
Totalmente sincronizado	X					
Oposição de fase	X					
Frequência fechada	X		X		X	
LPS	X		X	X	X	X
Quimera	X		X	X	X	X
Estado Dessincronizado	X		X	X	X	X

5 ANÁLISE DINÂMICA DO SISTEMA

Uma análise dinâmica do sistema é tratada neste capítulo considerando variações de parâmetros e mudanças de tipos de respostas e padrões de sincronização obtidos. Diagramas de bifurcação são utilizados para avaliar a mudança de comportamento do sistema. Basicamente, considera-se uma observação estroboscópica da resposta a partir da variação quase-estática de um parâmetro, neste caso a frequência de forçamento. Consideram-se que as condições iniciais não são atualizadas. A condição inicial adotada é que apenas o primeiro carro é deslocado e os demais partem do repouso. A Figura 5.1 apresenta os diagramas de bifurcação sobrepostos dos carros e dos pêndulos considerando $k_1 = k_2 = k_3 = 20$ N/m. Observa-se diferentes tipos de comportamentos, que fornecem uma visão global da dinâmica do sistema.

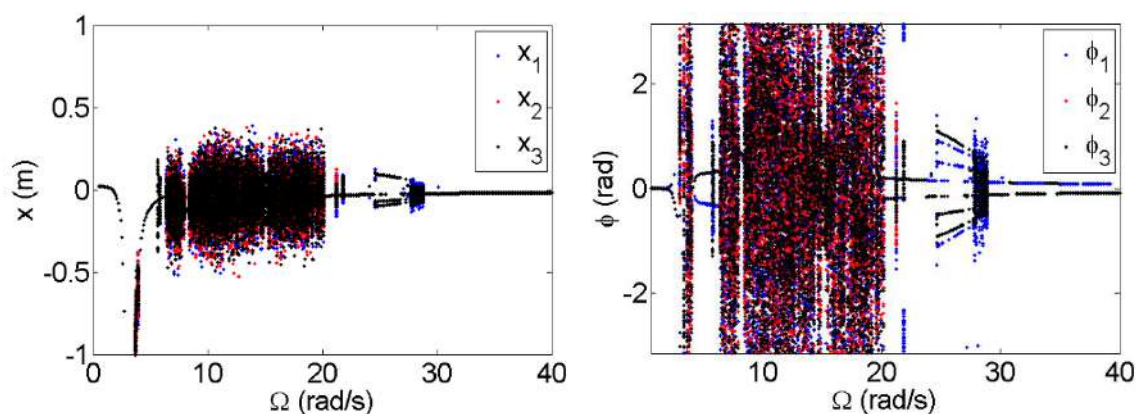


Figura 5.1. Diagrama de bifurcação para $k_1 = k_2 = k_3 = 20$ N/m, sem atualizar as condições iniciais.

A partir dos diagramas de bifurcação, Figura 5.1, consideram-se algumas situações específicas. Considerando $\Omega = 2$ rad/s observa-se que os osciladores sincronizam em fase no conjunto dos blocos, Figura 5.2 e Figura 5.4, e em oposição de fase para os pêndulos, Figura 5.3. Deve-se destacar que essa característica não está evidente no diagrama de bifurcação. Isso acontece pois, como se observa na Figura 5.5, o ponto referente a seção de Poincaré está aproximadamente no mesmo local e o espaço de fase apresenta-se semelhante para o pêndulo 1 em relação aos demais. Nesse contexto, observa-se que a melhor forma de identificar esse comportamento é pela evolução temporal, Figura 5.3.

Mudando a frequência de forçamento para a seção de $\Omega = 5 \text{ rad/s}$, o sistema altera seu comportamento no espaço de estados, mantendo qualitativamente o tipo de padrão de sincronização que permanece em oposição de fase para os pêndulos, Figura 5.7 e sincronizado para os carros Figura 5.6.

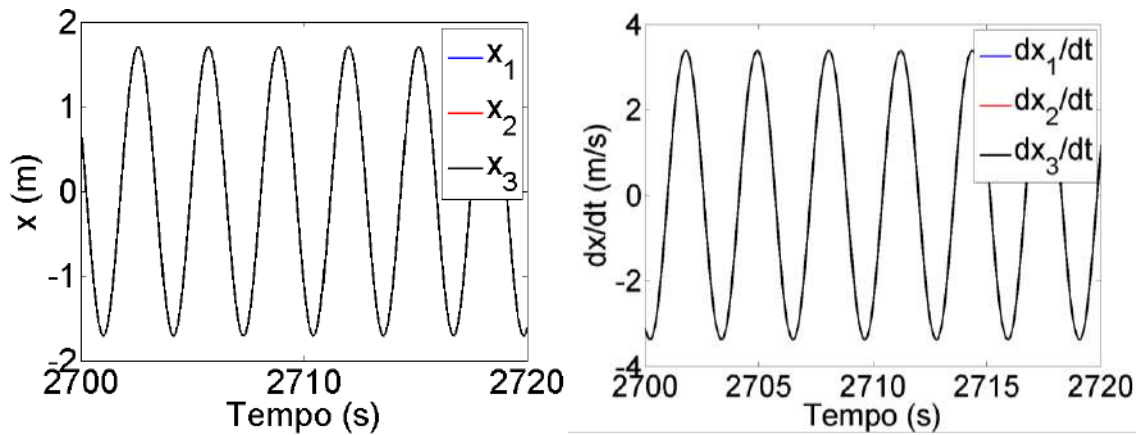


Figura 5.2. Variação temporal dos carros para $\Omega = 2 \text{ rad/s}$.

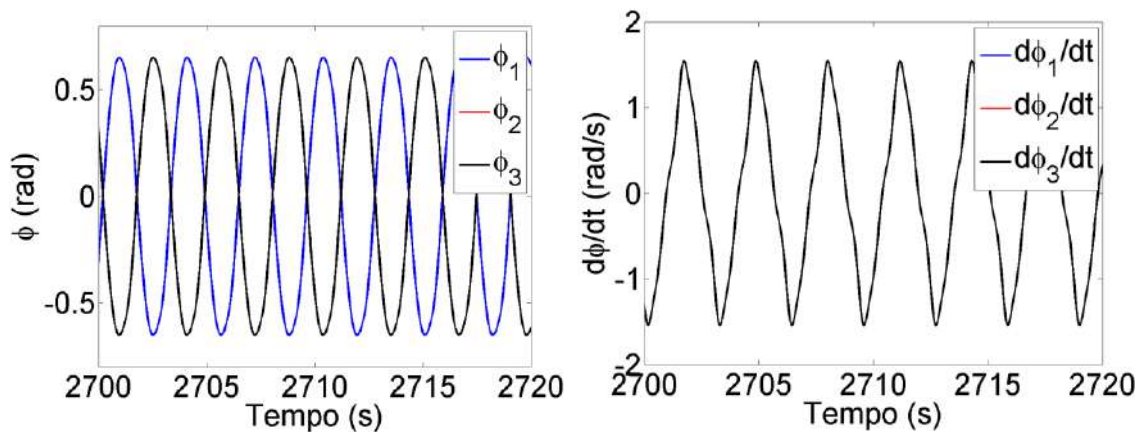


Figura 5.3. Variação temporal dos pêndulos para $\Omega = 2 \text{ rad/s}$, onde $\phi_1 \neq \phi_2 = \phi_3$.

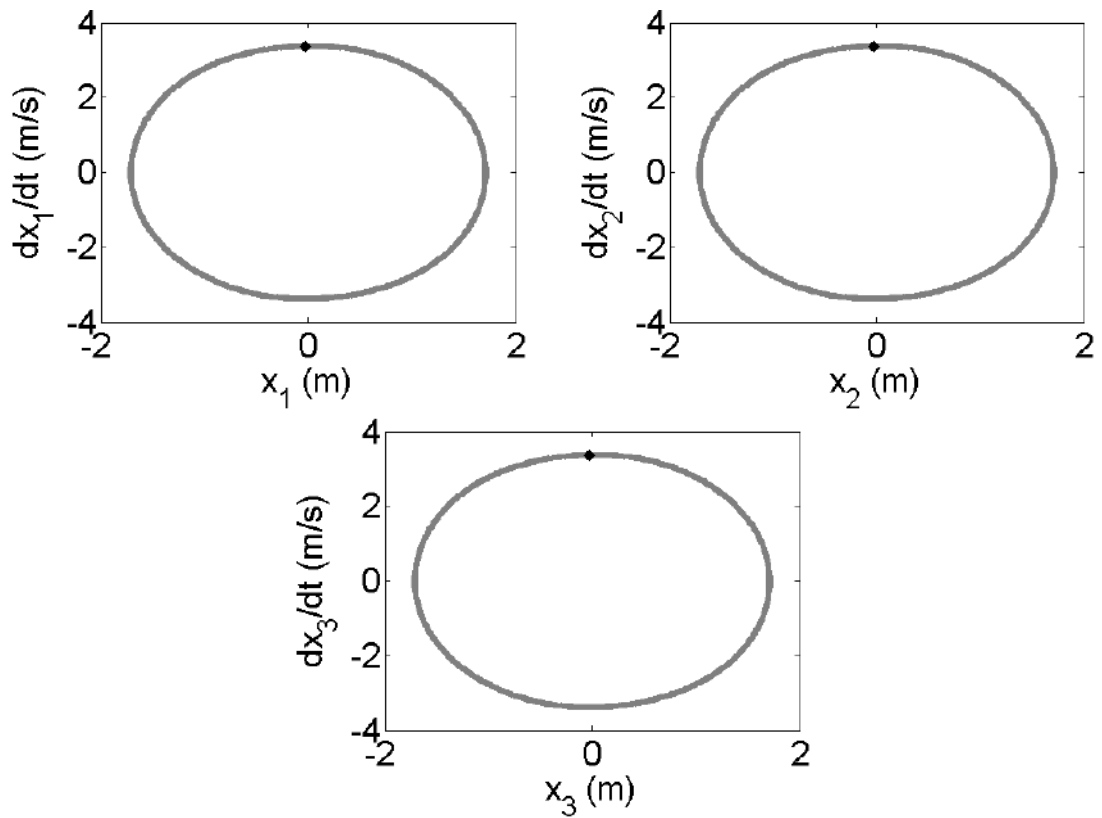


Figura 5.4. Espaço de fase para os blocos para $\Omega = 2$ rad/s.

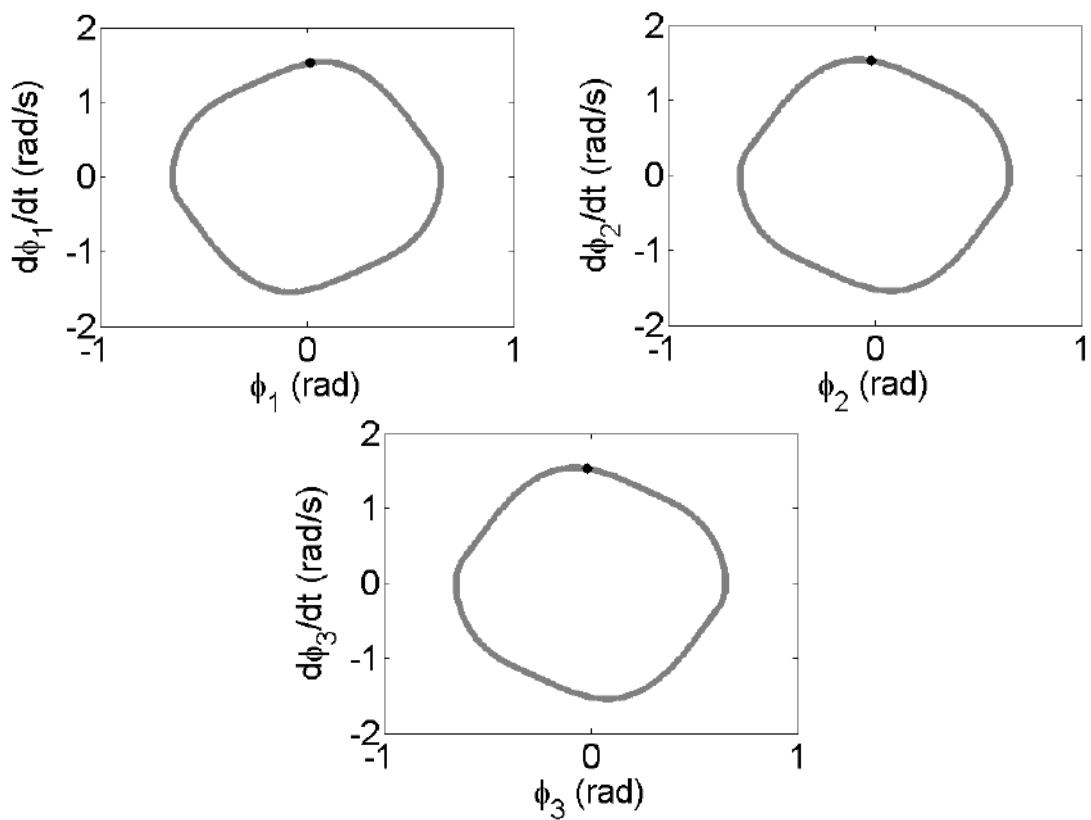


Figura 5.5. Espaço de fase para os pêndulos para $\Omega = 2$ rad/s.

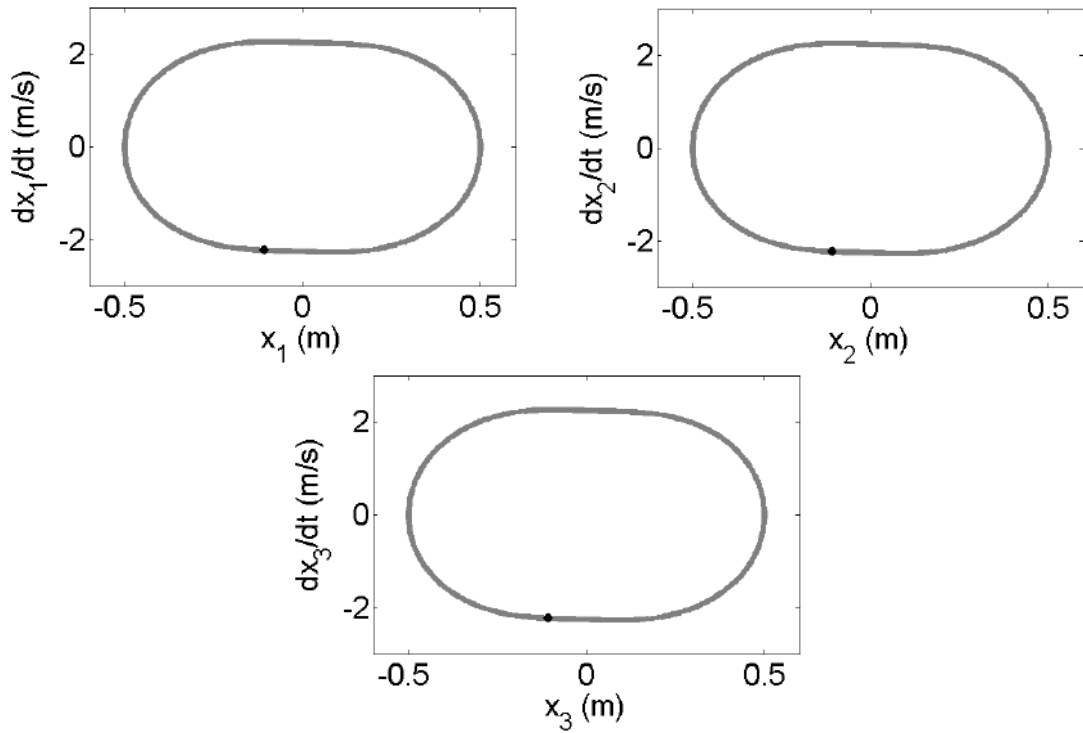


Figura 5.6. Espaço de fase para os carros de $\Omega = 5$ rad/s.

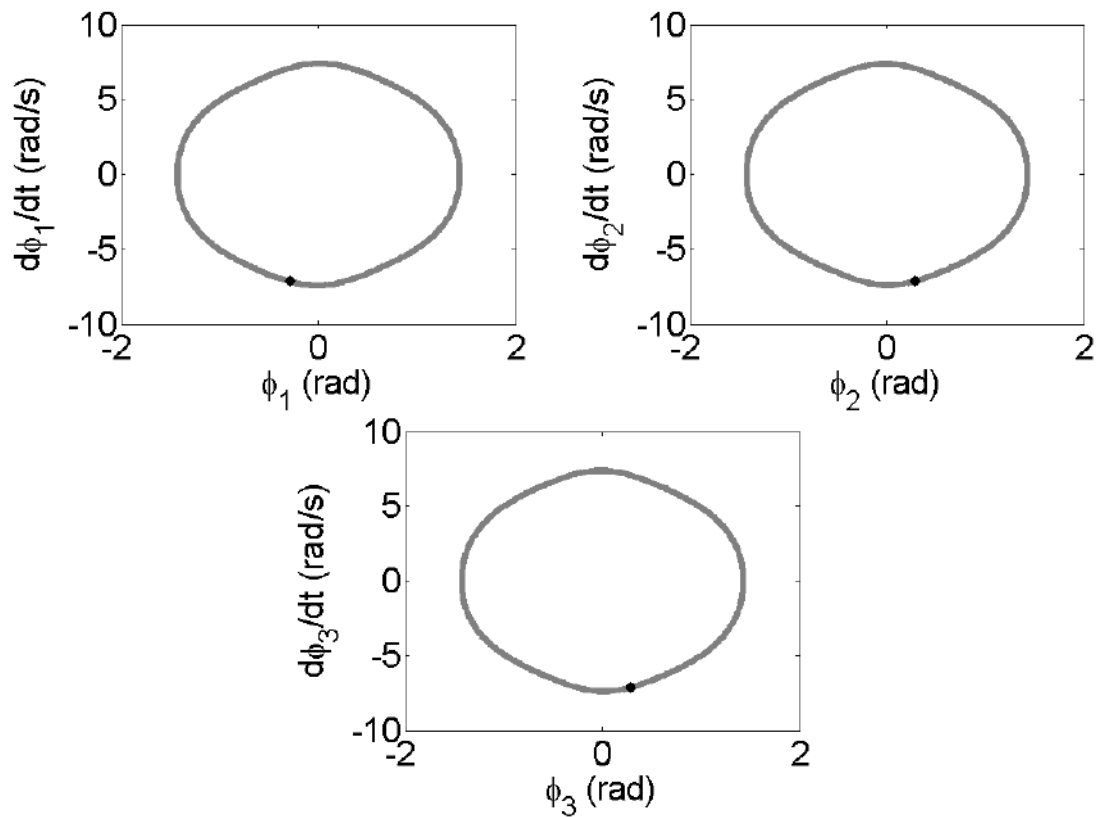


Figura 5.7. Espaço de fase para os pêndulos de $\Omega = 5$ rad/s.

Avaliando o sistema para uma frequência de forçamento de $\Omega = 15$ rad/s, o sistema apresenta comportamento sincronizado, Figura 5.8, Figura 5.9, Figura 5.10 e

Figura 5.11, isto em meio a uma região de comportamento predominantemente dessincronizado, Figura 5.1.

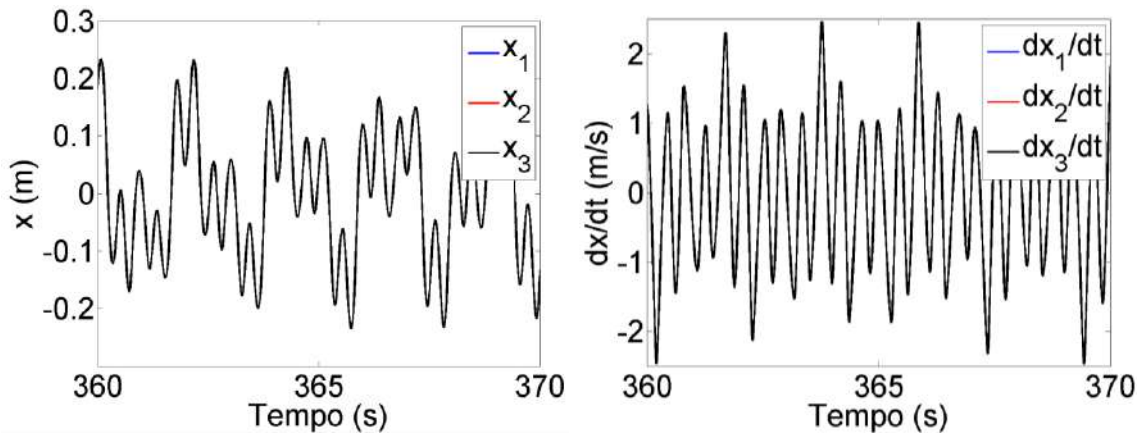


Figura 5.8. Evolução temporal os carros para $\Omega = 15$ rad/s.

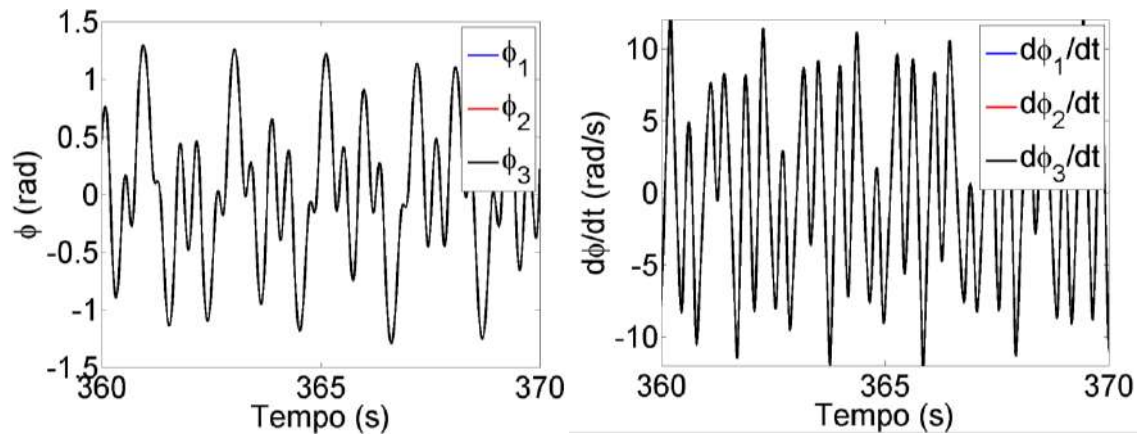


Figura 5.9. Evolução temporal os pêndulos para $\Omega = 15$ rad/s.

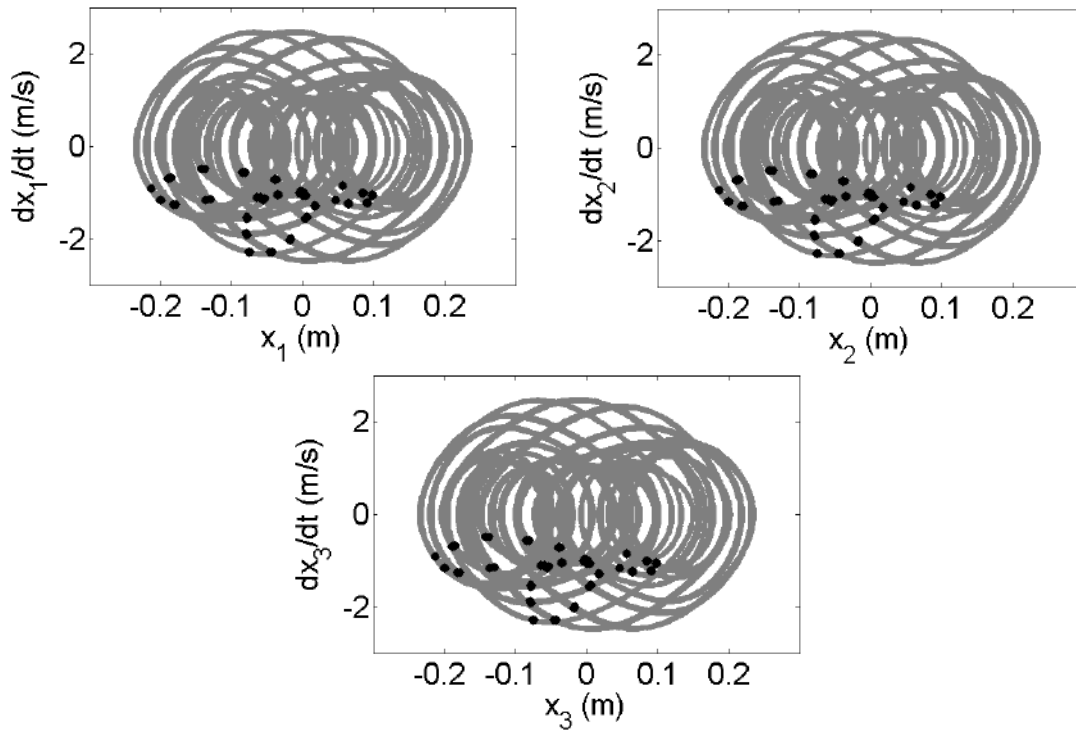


Figura 5.10. Espaço de fase para os carros para $\Omega = 15$ rad/s.

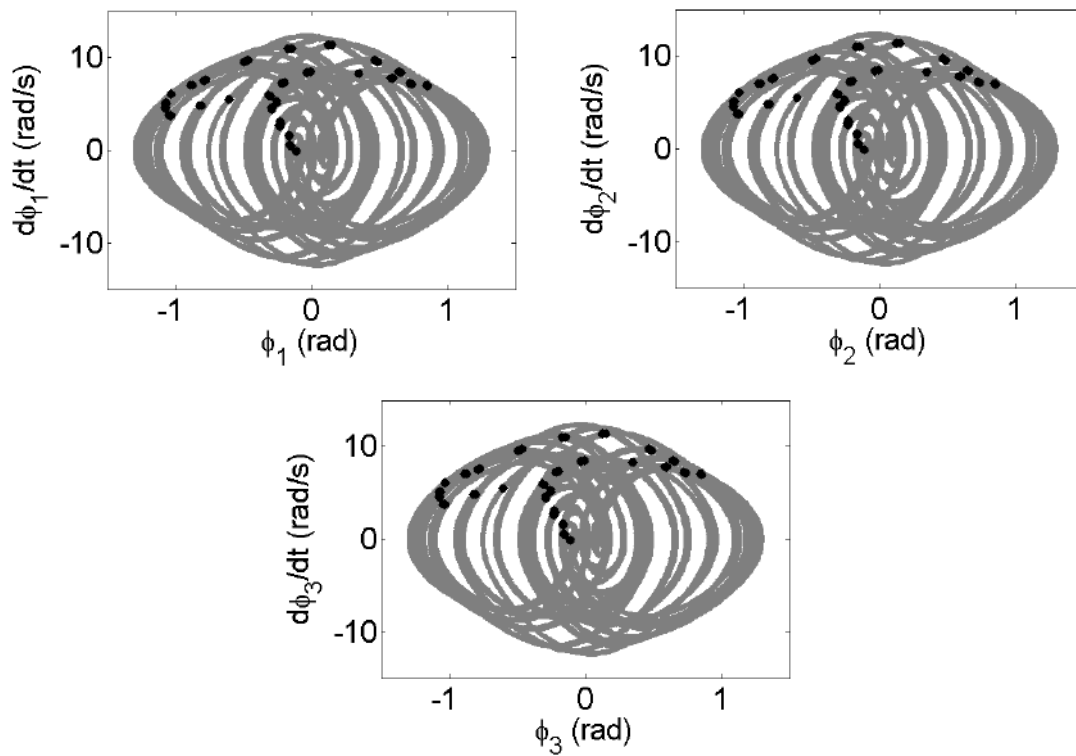


Figura 5.11. Evolução temporal para os pêndulos para $\Omega = 15$ rad/s.

Com uma frequência de 25 rad/s o sistema volta a se comportar em uma resposta de período-1 em oposição de fase para os pêndulos Figura 5.13, e sincronizado para os carros, Figura 5.12. No entanto, o aumento da frequência para 25,1 rad/s acarreta uma

mudança no sistema para uma oscilação de período-3, mantendo o comportamento em oposição de fase, Figura 5.14 e Figura 5.15. Com uma frequência de 26 rad/s o sistema mantém uma oscilação de período-3 e passa a ser totalmente sincronizado, Figura 5.16 e Figura 5.17. Deve-se observar que nas simulações para $\Omega = 2$ rad/s, $\Omega = 5$ rad/s, $\Omega = 25$ rad/s e $\Omega = 25,1$ rad/s, o oscilador que se encontra em oposição de fase permanece em uma órbita simétrica à dos demais, sendo esta uma órbita espelhada segundo o eixo- y .

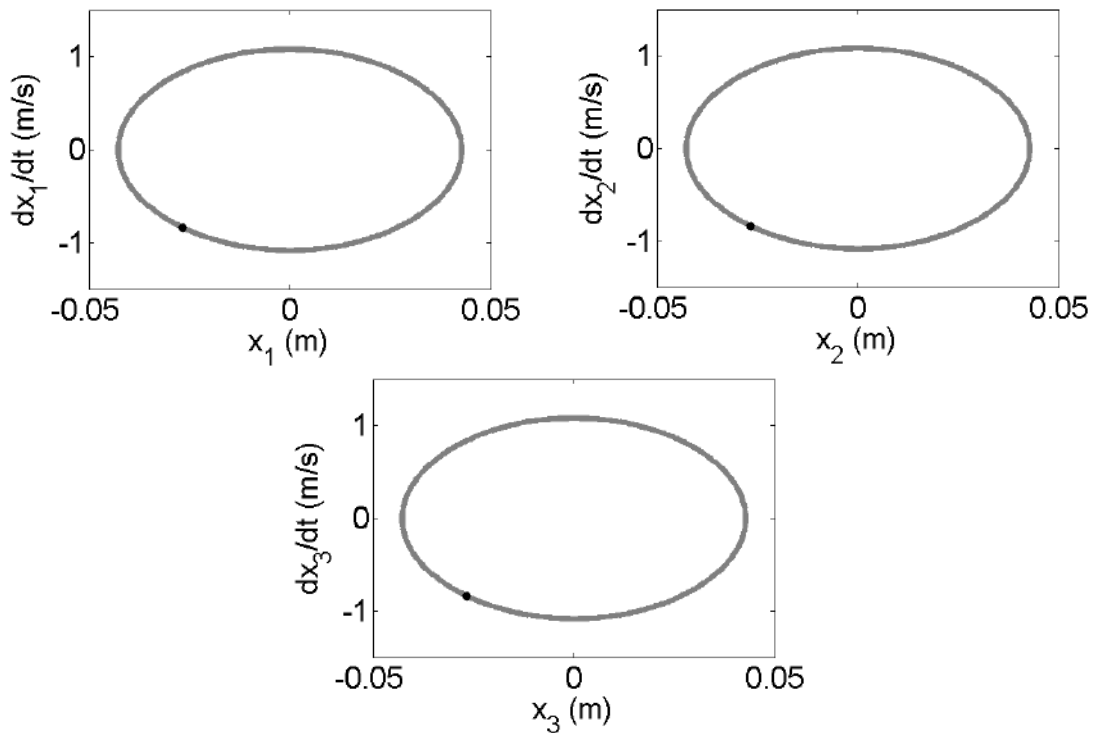


Figura 5.12. Espaço de fase dos carros para $\Omega = 25$ rad/s.

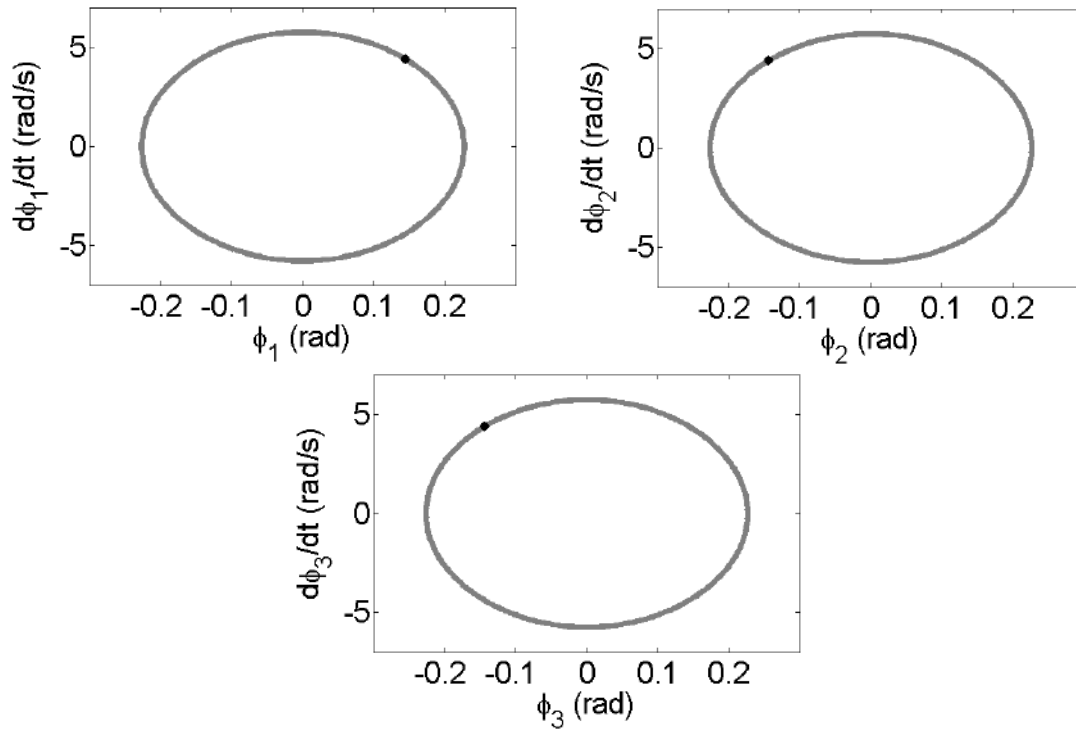


Figura 5.13. Espaço de fase para os pêndulos para $\Omega = 25$ rad/s.

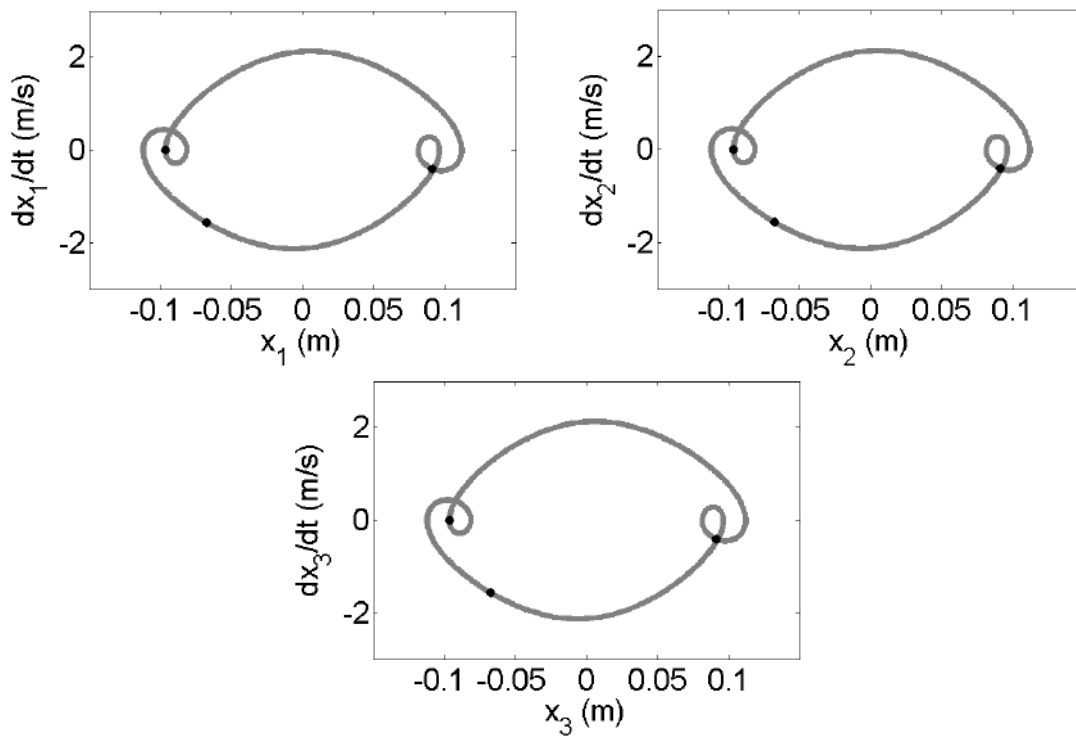


Figura 5.14. Espaço de fase para os carros para $\Omega = 25,1$ rad/s.

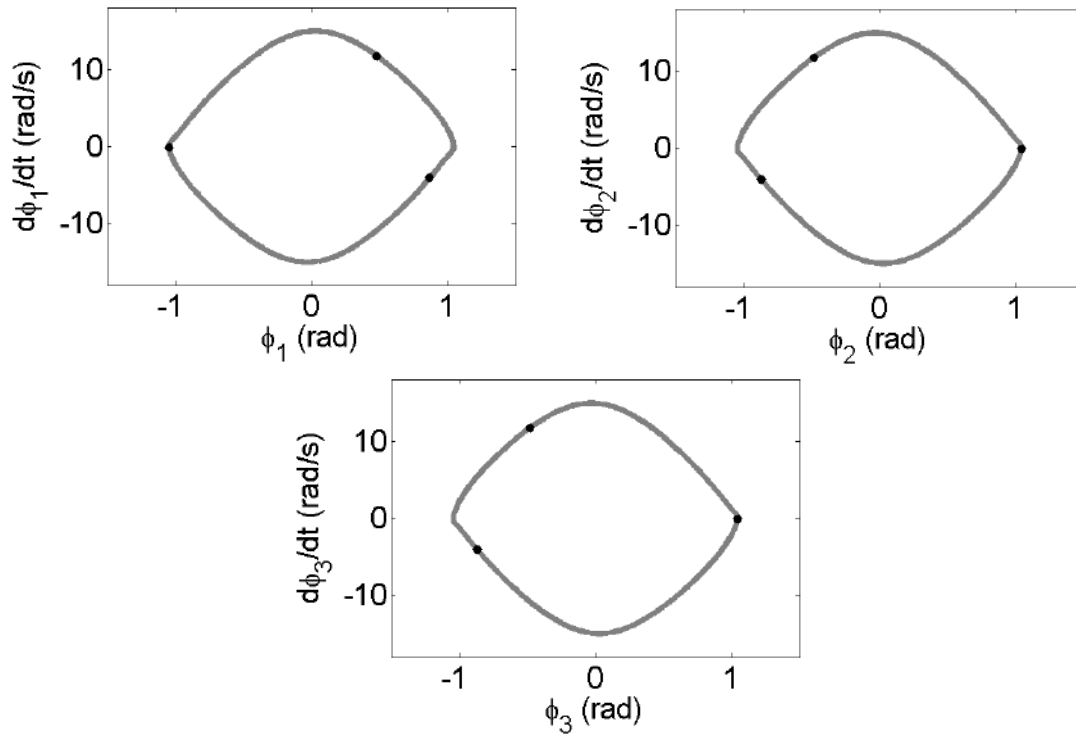


Figura 5.15. Espaço de fase para os pêndulos para $\Omega = 25,1$ rad/s.

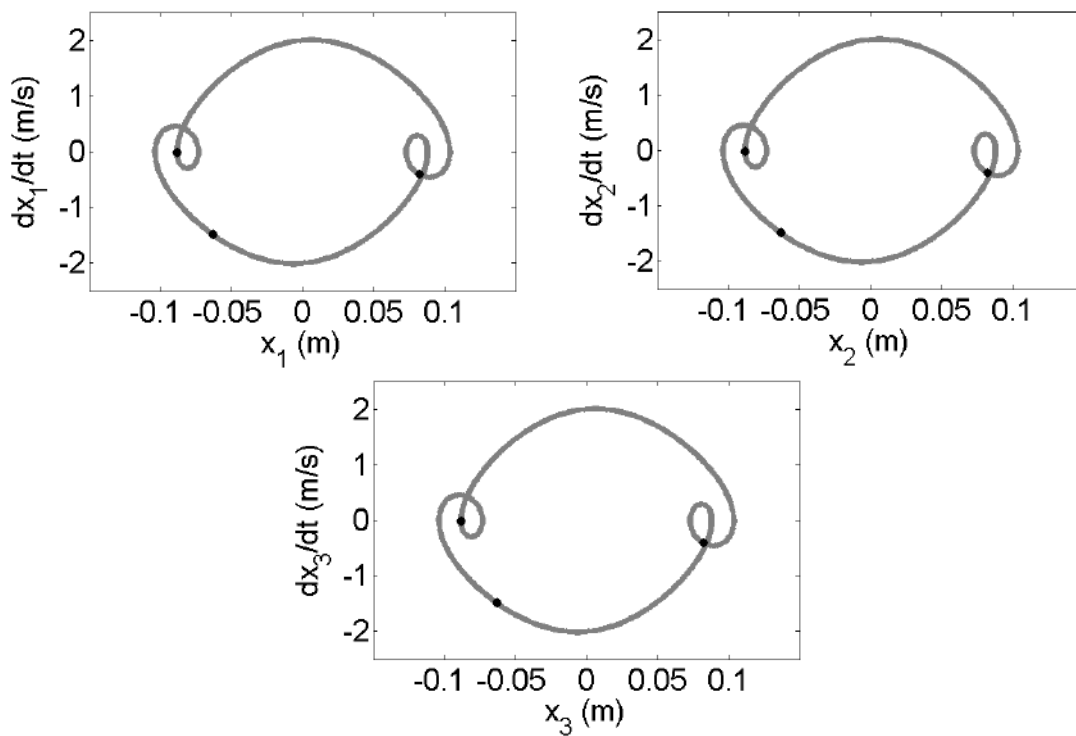


Figura 5.16. Espaço de fase para os carros para $\Omega = 26$ rad/s.

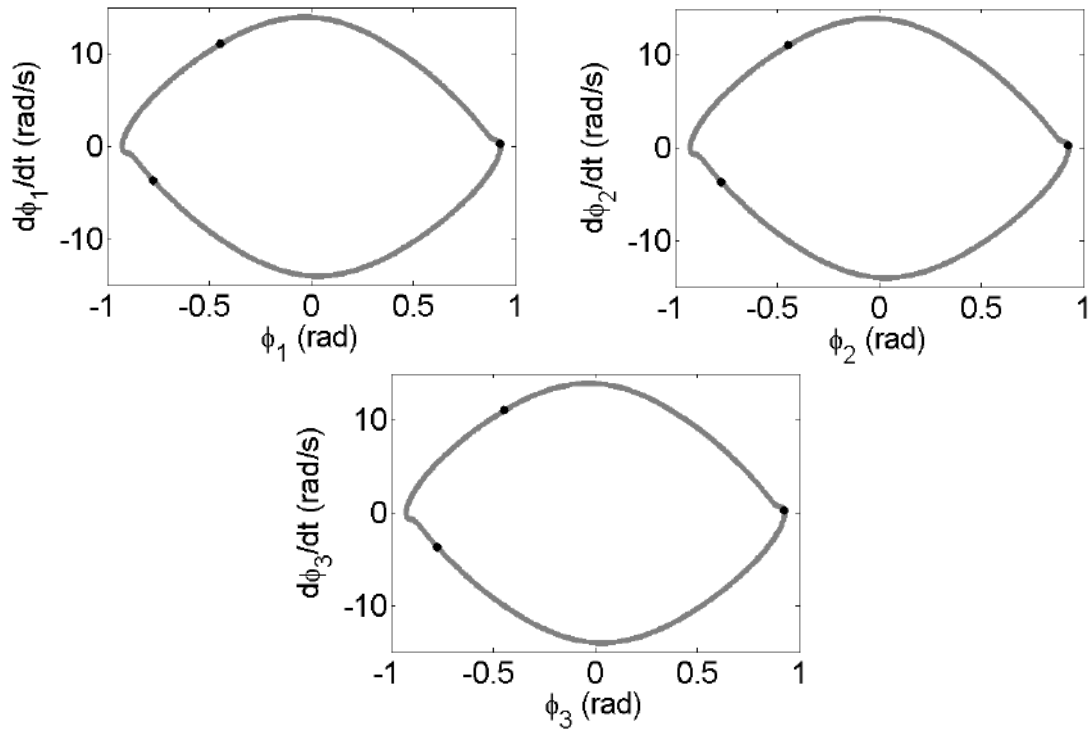


Figura 5.17. Espaço de fase para os pêndulos para $\Omega = 26$ rad/s.

Essa análise indica uma independência entre a periodicidade e os padrões de sincronização. Em outras palavras, a mudança qualitativa da resposta do sistema não altera o padrão de sincronização entre os osciladores.

Considere agora as frequências de 28,3 e 28,4 rad/s. Para $\Omega = 28,3$ rad/s, o sistema apresenta uma resposta de período-1 sincronizado, Figura 5.18 e Figura 5.19, que se altera para um comportamento de alto período em estado de quimera quando a frequência é $\Omega = 28,4$ rad/s, Figura 5.20 e Figura 5.21, o que evidencia novamente um desacoplamento entre as mudanças de periodicidade e as mudanças do comportamento coletivo do sistema.

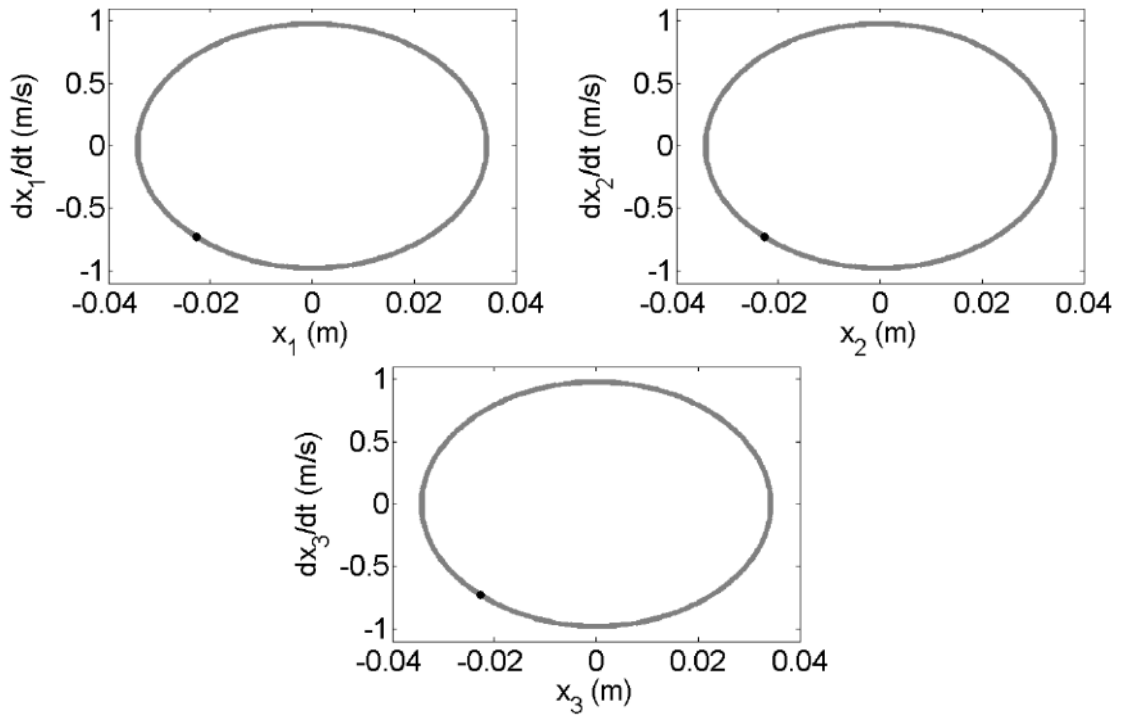


Figura 5.18. Espaço de fase para os carros para $\Omega = 28,3$ rad/s.

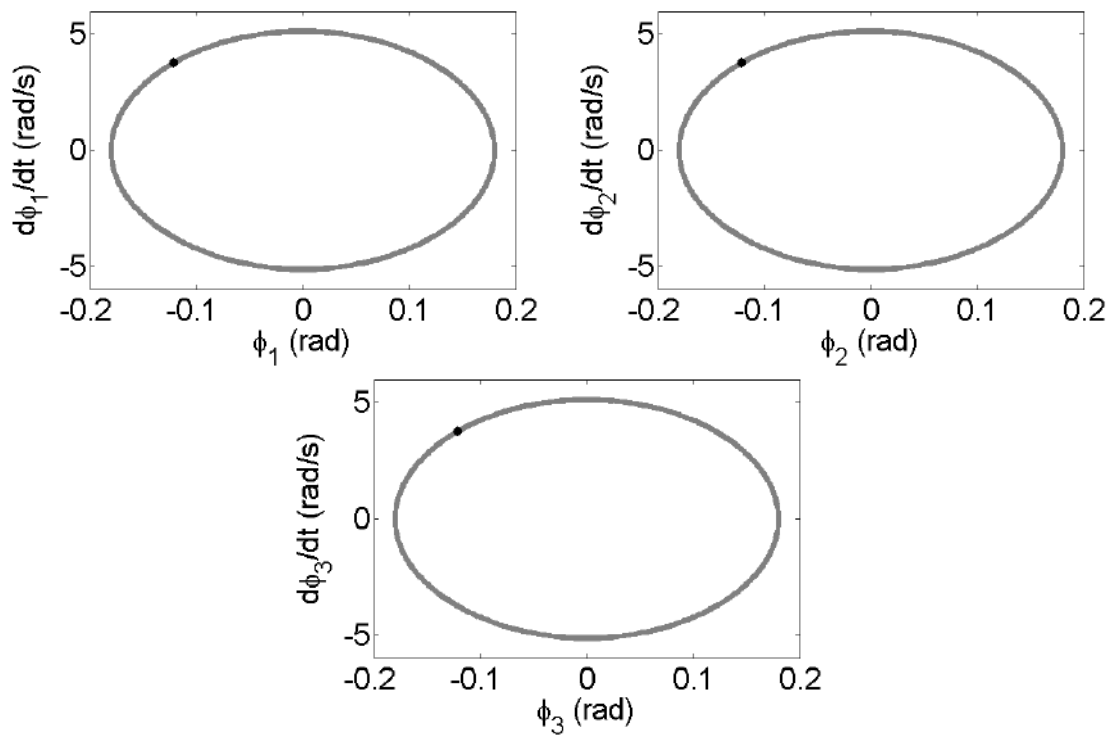


Figura 5.19. Espaço de fase para os pêndulos para $\Omega = 28,3$ rad/s.

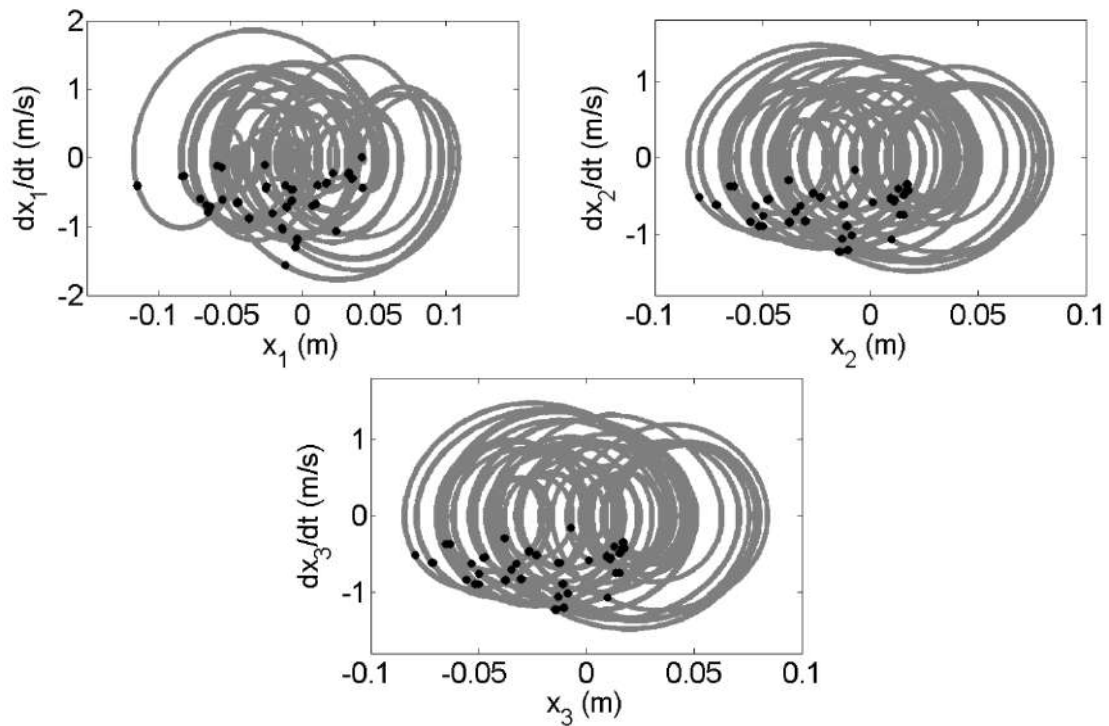


Figura 5.20. Espaço de fase para os carros para $\Omega = 28,4$ rad/s.

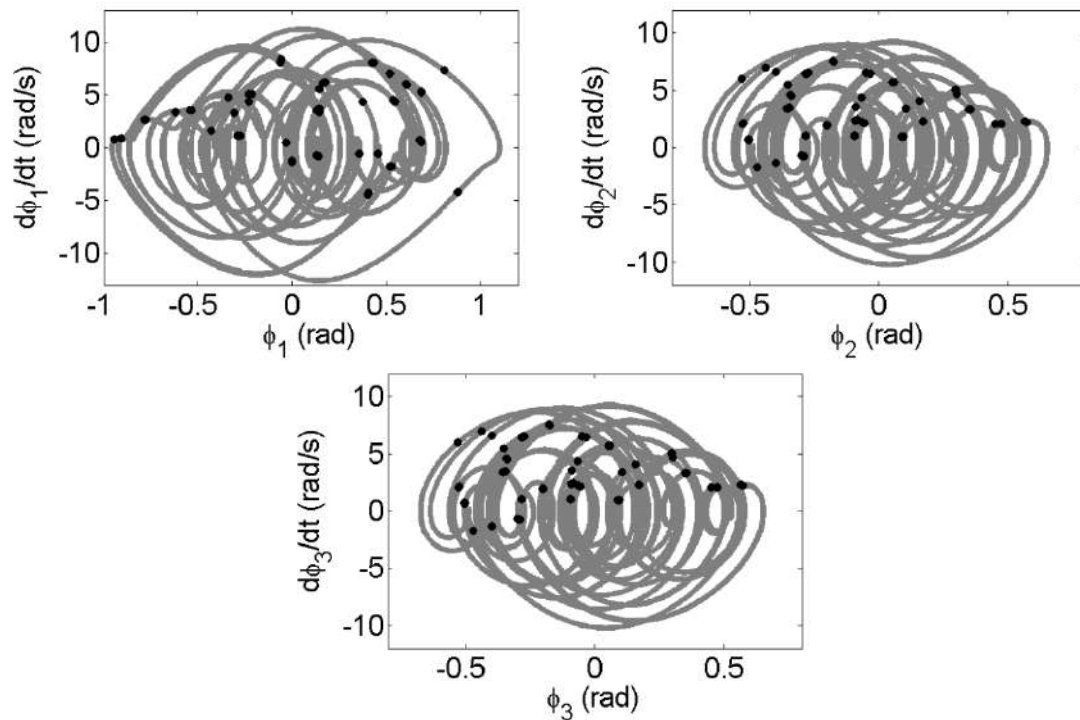


Figura 5.21. Espaço de fase para os pêndulos para $\Omega = 28,4$ rad/s.

5.1 INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ

Nesta seção são apresentados alguns diagramas de bifurcação que mostram o comportamento para diferentes rigidezes de modo a avaliar essa influência na resposta do sistema. Cada diagrama apresenta três curvas representativas de cada conjunto pêndulo-carro. A coincidência dessas curvas não denota necessariamente em sincronização pois o diagrama de bifurcação é proveniente de um mapeamento estroboscópico da variação temporal das variáveis de estado do sistema.

Os diagramas apresentados nesta seção são traçados mediante a atualização das condições iniciais a partir do posicionamento final das variáveis de estado do passo anterior da simulação de modo crescente com a frequência de forçamento Ω . Consideram-se diferentes valores dos elementos elásticos: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 e 100 N/m e ainda as oito combinações possíveis de condições iniciais para o deslocamento unitário dos carros. A seguir são apresentados alguns destes resultados.

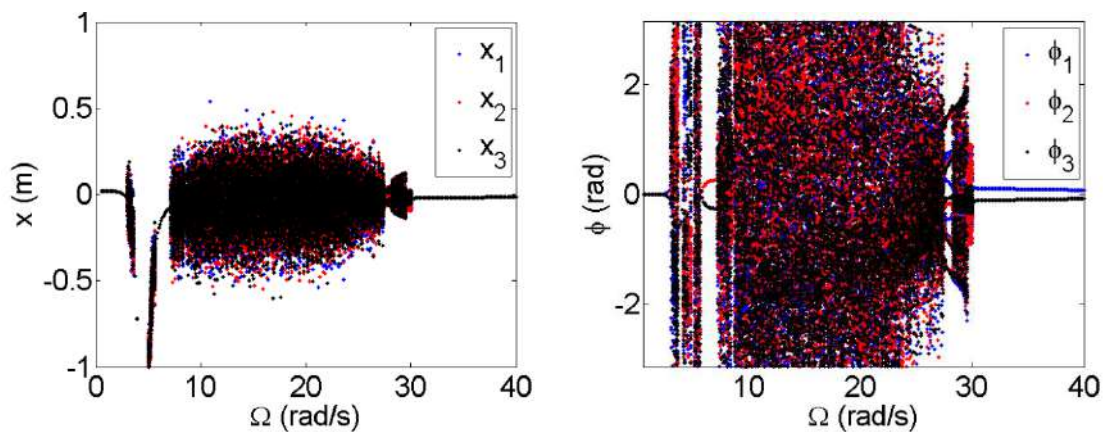


Figura 5.22. Diagrama de bifurcação com molas $k_1 = k_2 = k_3 = 40$ N/m e condição inicial de deslocamento dos carros 2 e 3 com valor de um.

Na Figura 5.22 há uma grande região aparentemente caótica entre cerca de 10 rad/s até aproximadamente 25 rad/s para ambos os componentes, carros e pêndulos. É um trecho de comportamento de período-1 para frequências inferiores a 5 rad/s e para superiores a 30 rad/s. Outra característica notável é que no instante de tempo onde se coleta a posição das variáveis os pêndulos dois e três estão na mesma posição para frequências superiores a 30 rad/s, porém o primeiro pêndulo não. Possivelmente essa distinção é provocada pela assimetria gerada pelas condições iniciais sobre o primeiro carro, diretamente conectado a esse pêndulo. Sendo esta condição inicial a de

deslocamento igual dos carros 2 e 3 com valor de um. Outra observação é a “persistência” dessa assimetria da condição inicial, pois mesmo após passagem pela região dessincronizada entre o início da simulação e este trecho. A assimetria é expressa no comportamento do sistema, apresentando sincronização diferente de um lado e outro dessa região.

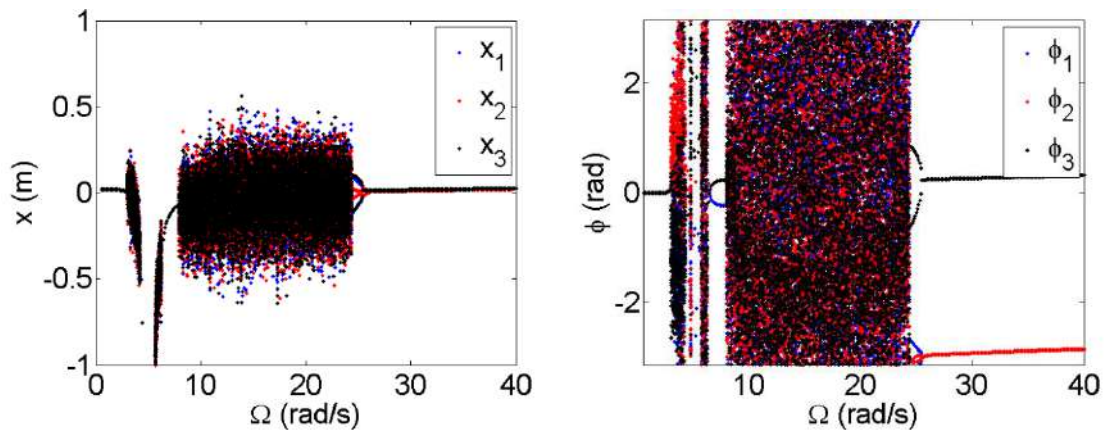


Figura 5.23. Diagrama de bifurcação com molas $k_1 = k_2 = k_3 = 50$ N/m e condição inicial de deslocamento do carro 1 com valor de um.

Na Figura 5.23 é utilizado elementos elásticos mais rígido e a simulação é executada sob condições iniciais diferentes, considerando que apenas o primeiro carro recebe um deslocamento, enquanto os demais são mantidos em repouso. Neste caso, a região onde os osciladores apresentam comportamento dessincronizado continua aproximadamente a mesma. No entanto, o primeiro e o segundo oscilador estão sincronizados e o terceiro apresenta um comportamento distinto. Assim, apesar de ser possível perceber que uma assimetria nas condições iniciais possibilita comportamentos assimétricos, a resposta assimétrica do sistema não é necessariamente no mesmo oscilador em que a assimetria é introduzida.

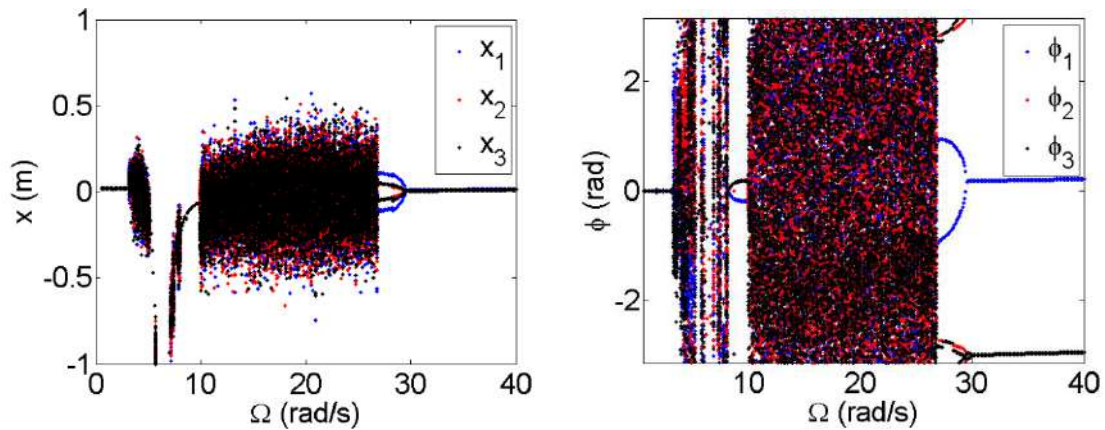


Figura 5.24. Diagrama de bifurcação com molas $k_1 = k_2 = k_3 = 80$ N/m e condição inicial de deslocamento do carro 1 com valor de um.

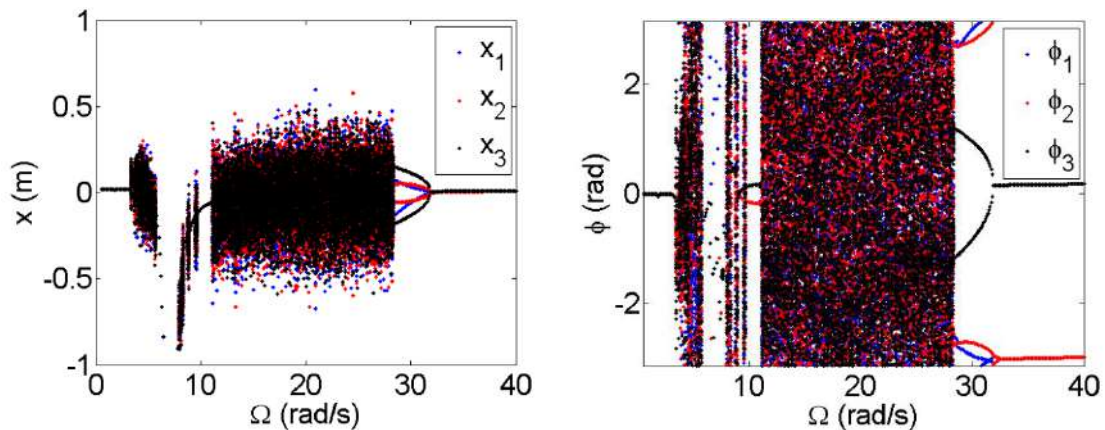


Figura 5.25. Diagrama de bifurcação com molas $k_1 = k_2 = k_3 = 100$ N/m e condição inicial de deslocamento do carro 1 com valor de um.

As Figura 5.24 e Figura 5.25 corroboram a perspectiva de que a instabilidade gerada pelas condições iniciais não são mantidas pelos mesmos osciladores ao longo da variação da frequência de forçamento. Sob as condições simuladas, não há caso de condições iniciais simétricas induzindo uma resposta dessincronizada, mesmo para regiões aparentemente caóticas, os osciladores mantêm-se sincronizados, Figura 5.26. Em relação a mudança da rigidez do elemento elástico, tanto o caso sincronizado, Figura 5.26, quanto os casos dessincronizados, Figura 5.22, Figura 5.24 e Figura 5.25, a região caótica se mantém na mesma região da frequência de forçamento. Desta forma, o aumento de rigidez sugere um aumento do trecho dessincronizado aproximando-se de 30 rad/s. Observa-se também a presença de algumas janelas periódicas e uma região com cascata de bifurcações de diferentes dimensões e intervalos que se deslocam juntamente com a borda da região caótica.

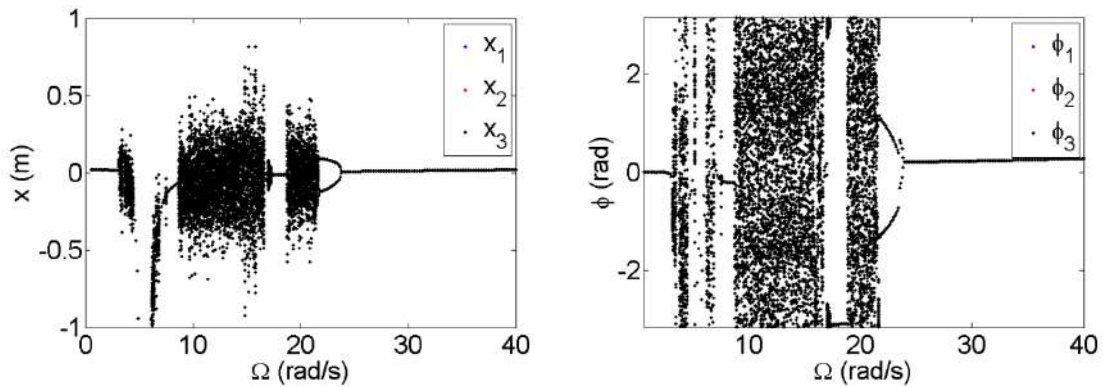


Figura 5.26. Diagrama de bifurcação com molas $k_1 = k_2 = k_3 = 40$ N/m e condição inicial de deslocamento nula para carros.

5.2 EFEITO DAS CONDIÇÕES INICIAIS

Nesta seção é avaliada a dependência em relação às condições iniciais do sistema para a formação de um estado sincronizado. Considere os parâmetros do sistema descritos na seção 4.2, apenas alterando as condições iniciais para cada caso considerando as oito combinações de deslocamento unitário dos carros. Inicialmente, considere um caso em que todos os osciladores partem da posição de equilíbrio.

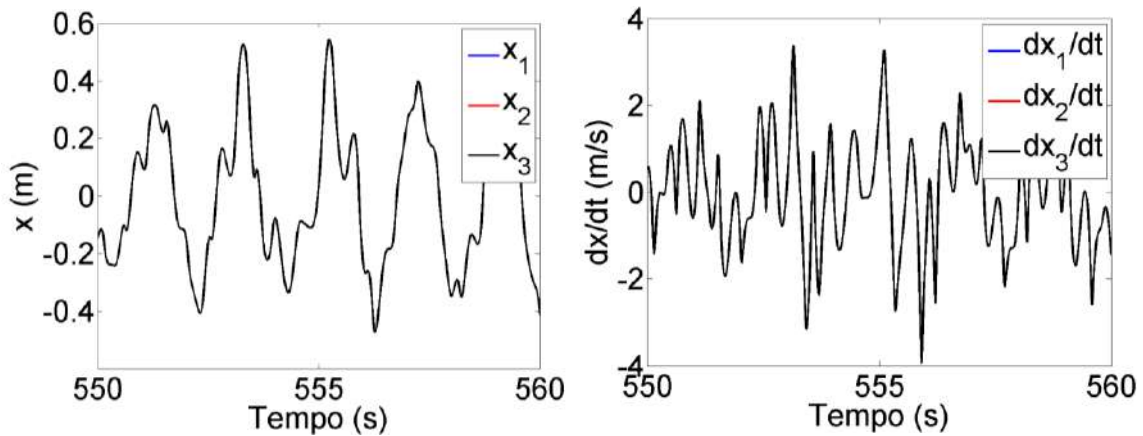


Figura 5.27. Evolução temporal para os carros para condições iniciais nulas.

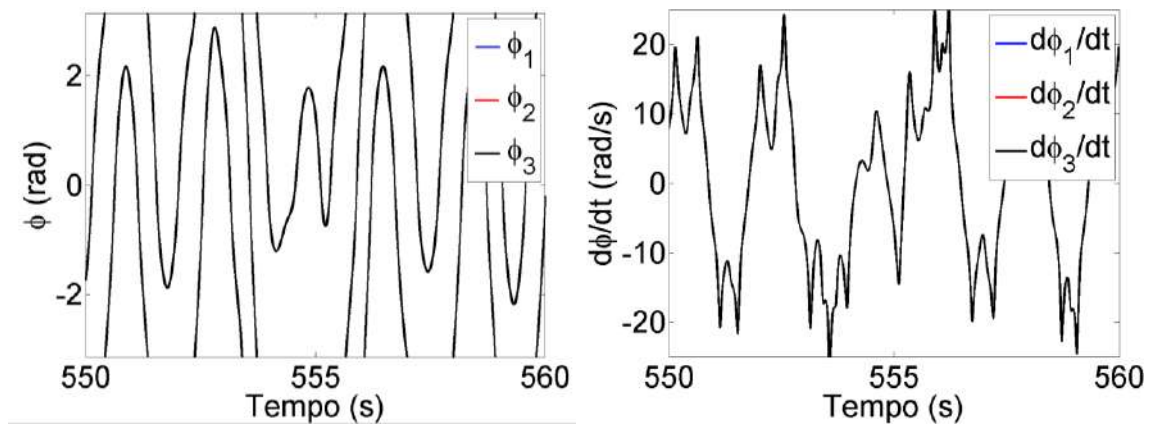


Figura 5.28. Evolução temporal dos pêndulos para condições iniciais nulas.

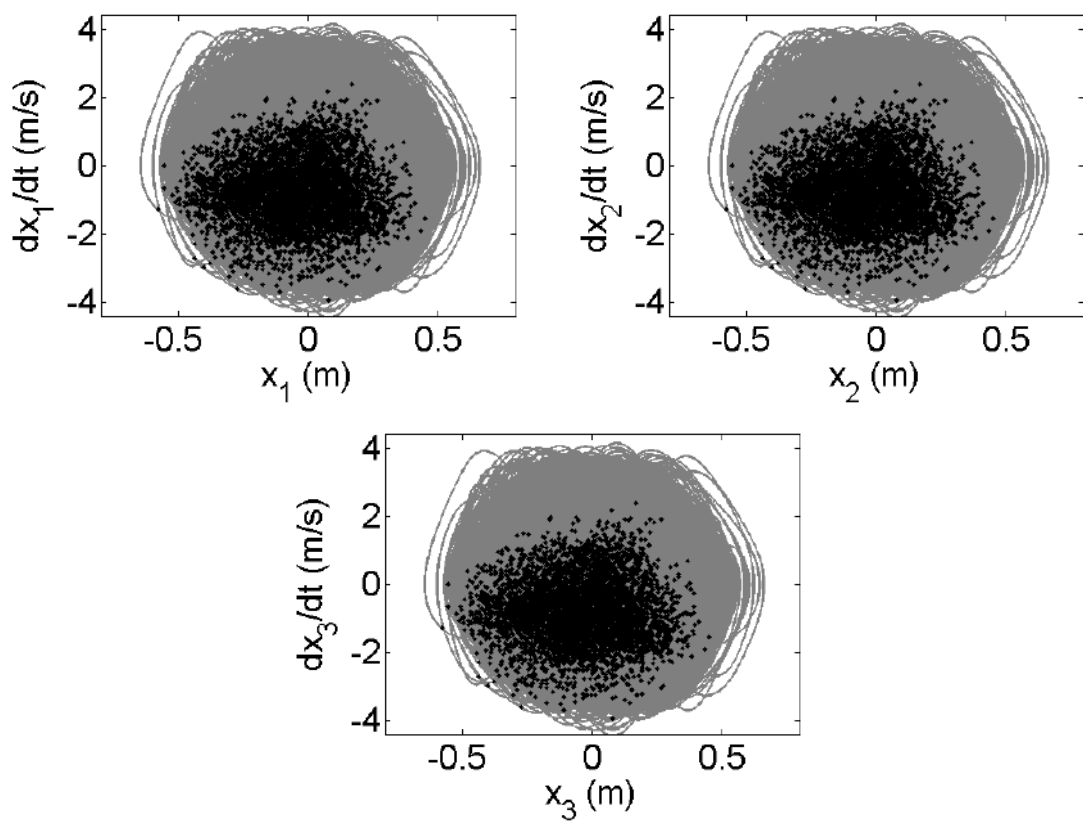


Figura 5.29. Espaço de fase para os carros para condições iniciais nulas.

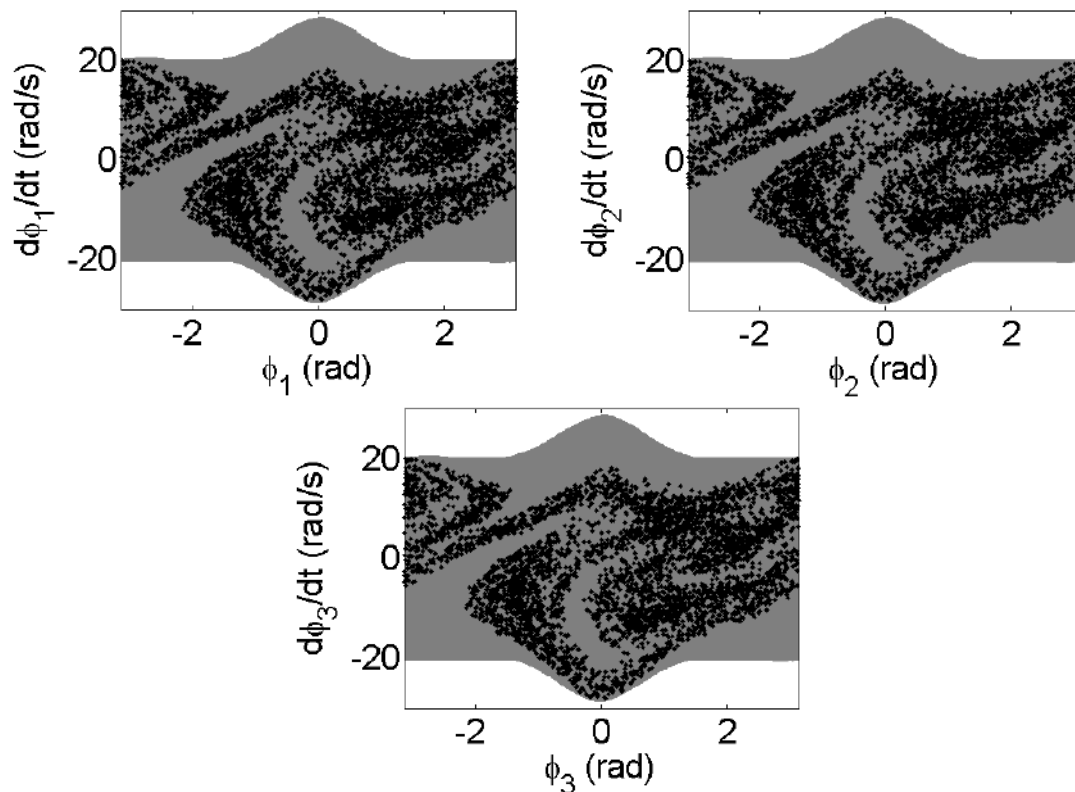


Figura 5.30. Espaço de fase para os pêndulos para condições iniciais nulas.

Na Figura 5.27 e Figura 5.28 os carros e os pêndulos estão sincronizados entre si. Realizando a mesma trajetória, o que também está presente no espaço de estados dos mesmo, Figura 5.29 e Figura 5.30. Os expoentes de Lyapunov para este caso, apresentam um valor máximo positivo de 0,71 caracterizando um comportamento caótico. A sincronização do sistema sob a condição do caos é um resultado relevante dado a sensibilidade deste comportamento aos parâmetros de simulação e às condições iniciais, fatores que poderiam contribuir para uma perda de sincronização entre os osciladores. Estudos que tratam da sincronização de sistemas caóticos mostram apenas uma sincronização na fase, enquanto mantém-se dessincronizados na amplitude. Isso acaba por suprimir, mesmo que parcialmente, essa dinâmica com relação a fase (BLAZEJCZYK-OKOLEWSKA *et al.*, 2001; BOCCALETTI *et al.*, 2002; KAPITANIAK, 1995; KURTHS *et al.*, 2003; LIU; WU, 2017; PYRAGIENE; PYRAGAS, 2017; ROSENBLUM *et al.*, 1996).

Agora, é computado os resultados para o caso em que a condição inicial é com todos os carros com deslocamento unitário.

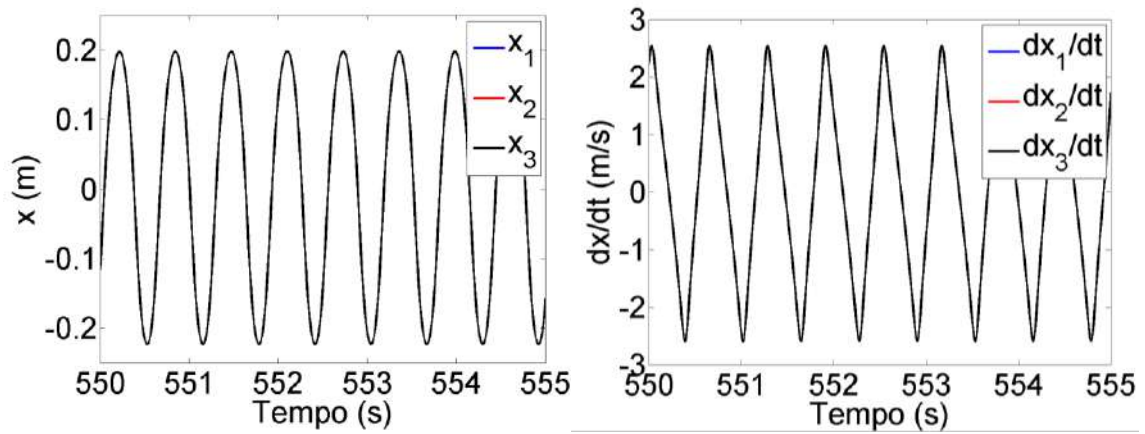


Figura 5.31. Evolução temporal dos carros condição inicial com todos os carros com deslocamento unitário.

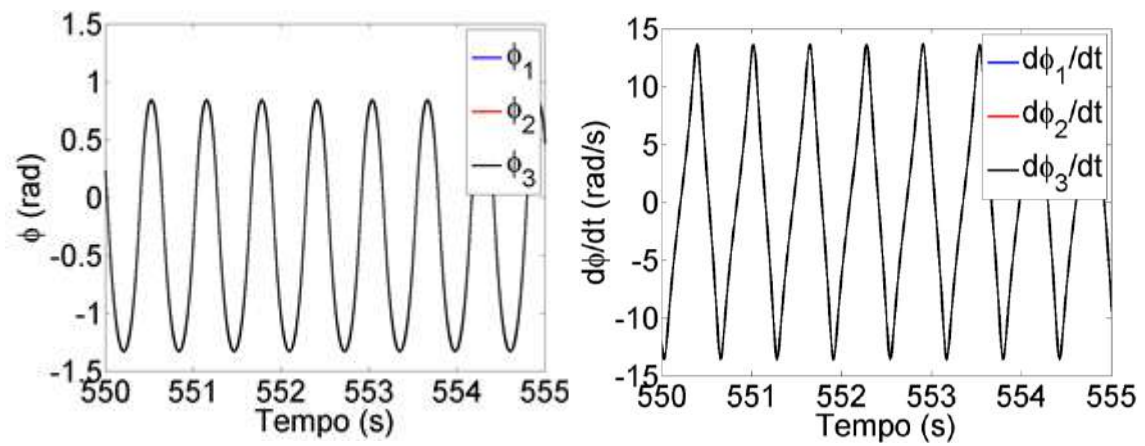


Figura 5.32. Evolução temporal dos pêndulos condição inicial com todos os carros com deslocamento unitário.

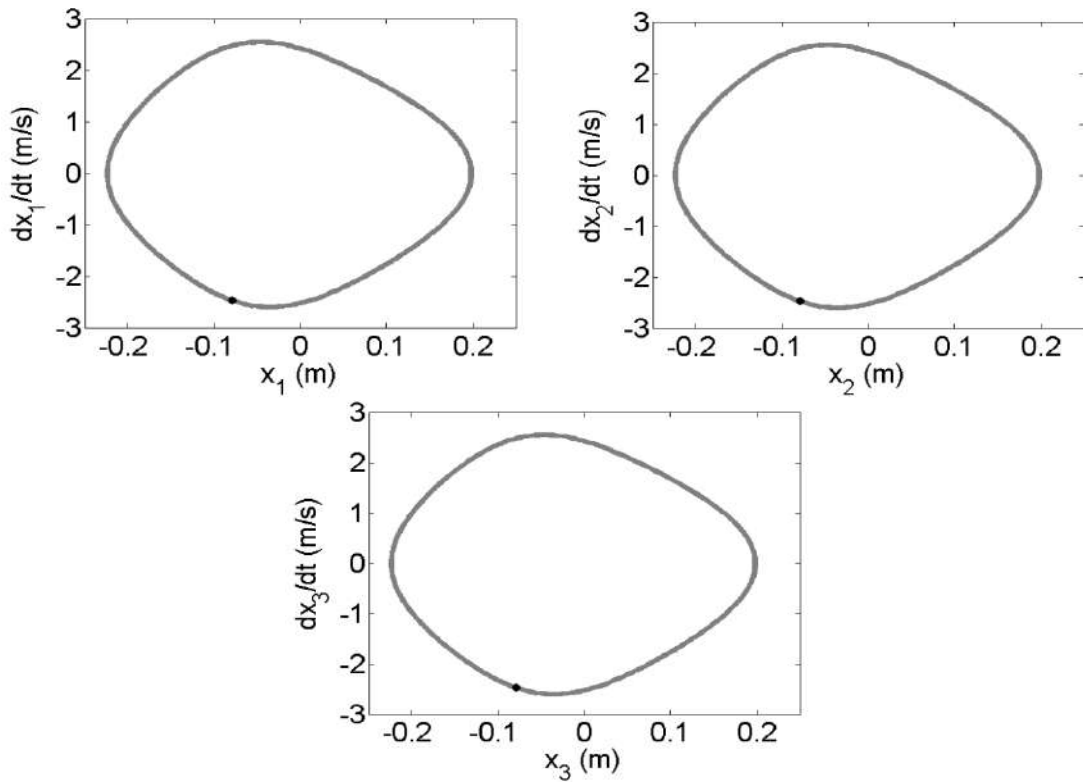


Figura 5.33. Espaço de fase dos carros condição inicial com todos os carros com deslocamento unitário.

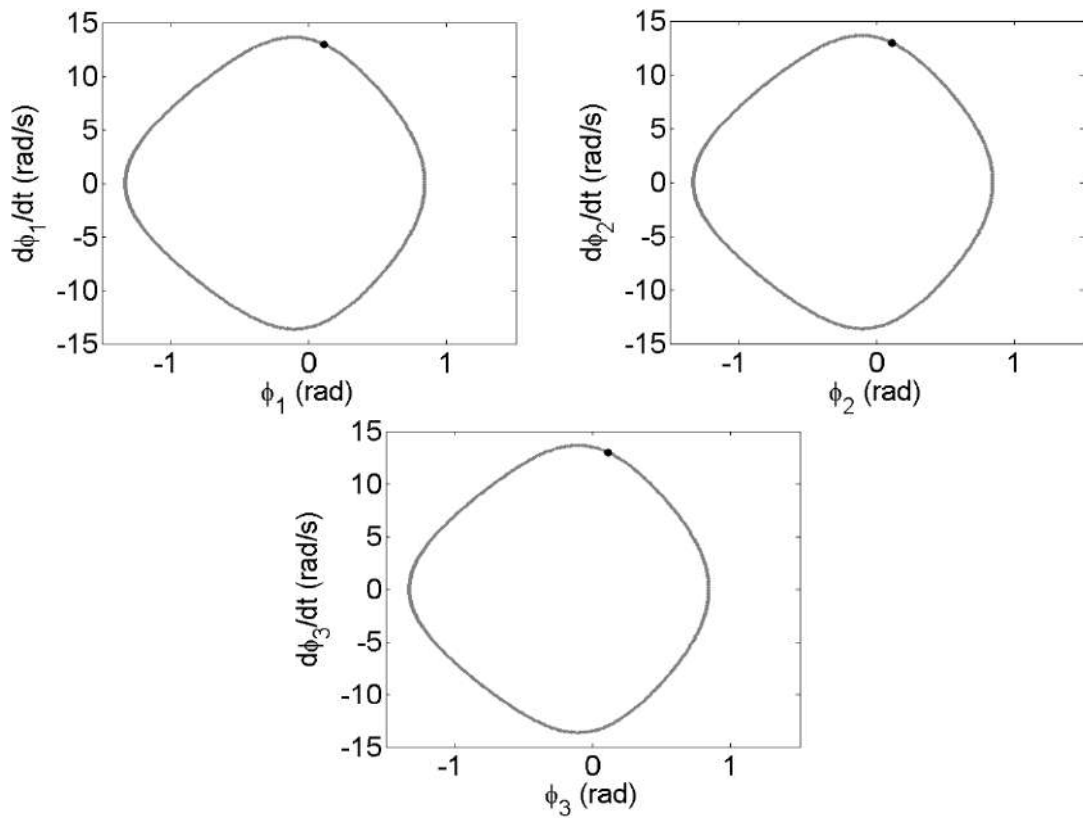


Figura 5.34. Espaço de fase dos pêndulos condição inicial com todos os carros com deslocamento unitário.

As Figura 5.31, Figura 5.32, Figura 5.33 e Figura 5.34 mostram os resultados para o caso em que as condições iniciais são iguais para os três carros, sendo estas um deslocamento unitário. Diferentemente do caso tratado anteriormente em que se obtém uma sincronização no caos, neste caso se observa a sincronização do sistema em regime periódico. No entanto, ambas sincronizadas para condições iniciais simétricas.

Avaliando as combinações de condições iniciais não-simétricas. E alterando a condição inicial com o primeiro carro com deslocamento unitário e os demais no equilíbrio, espera-se que a assimetria seja mantida no comportamento, como observado anteriormente.

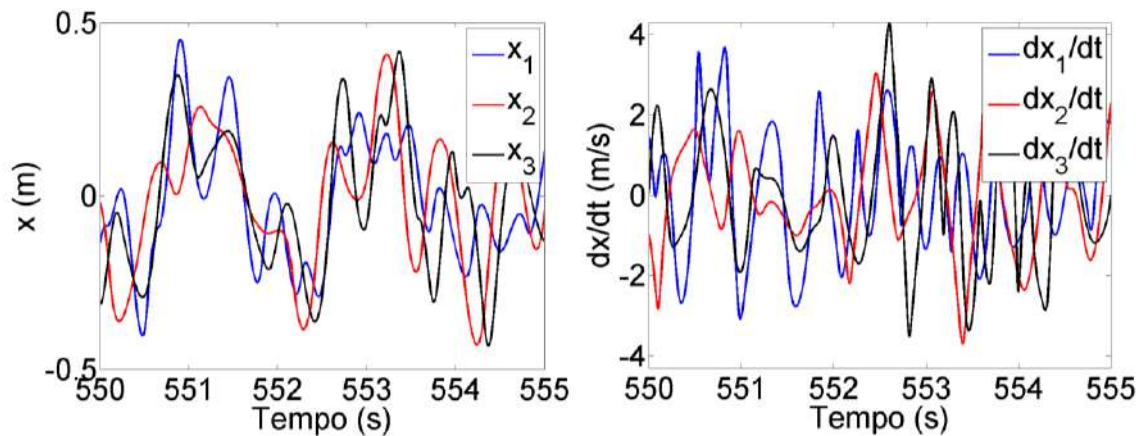


Figura 5.35. Evolução temporal dos carros com condição inicial de deslocamento unitário do primeiro carro.

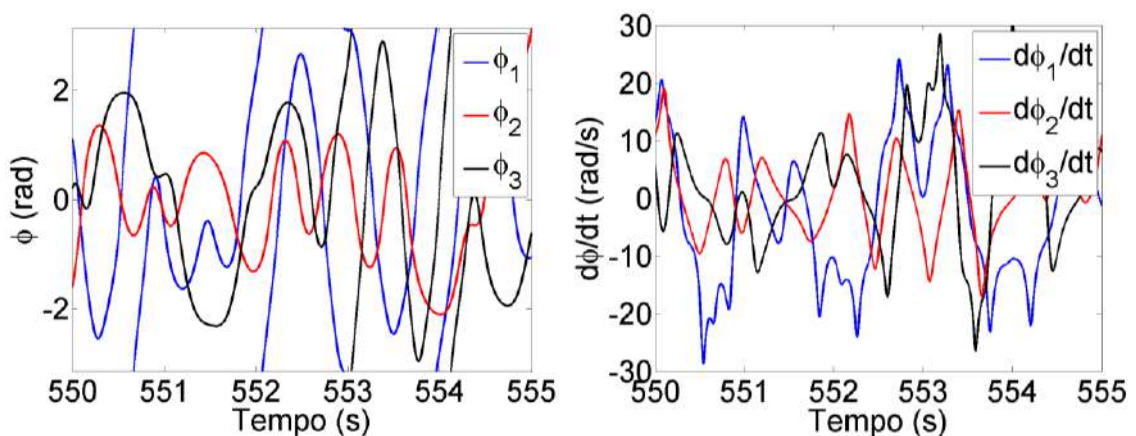


Figura 5.36. Evolução temporal para os pêndulos com condição inicial de deslocamento unitário do primeiro carro.

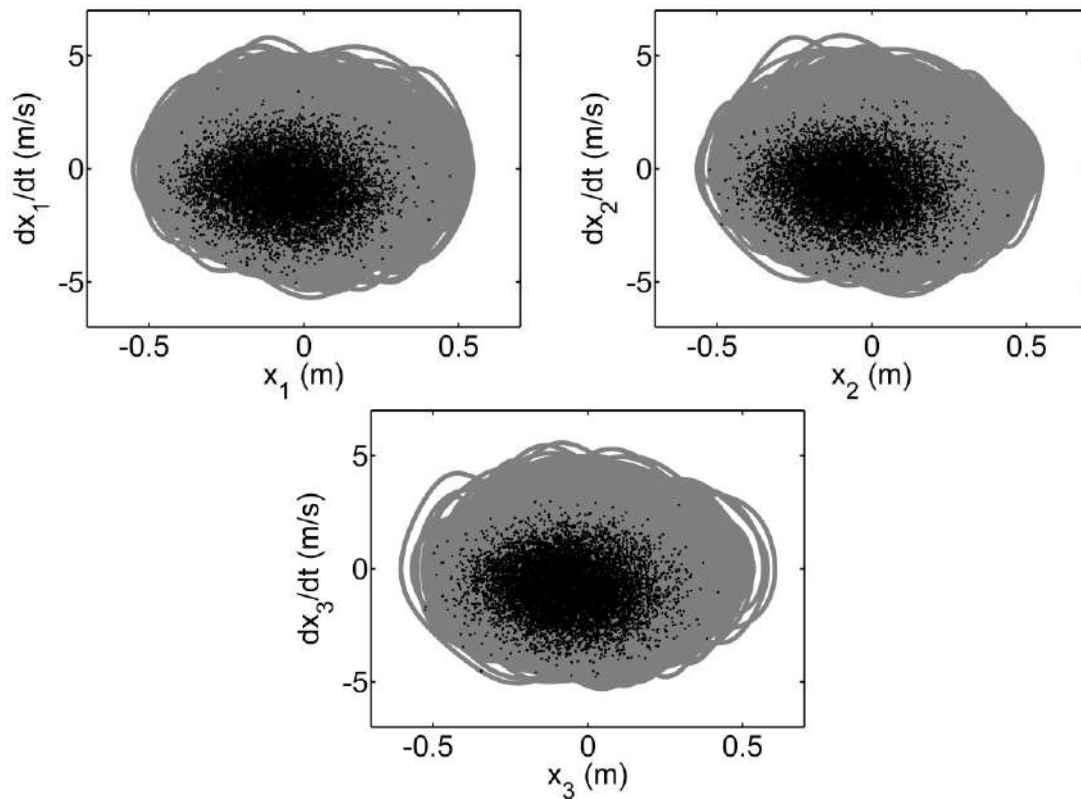


Figura 5.37. Espaço de fase para os carros com condição inicial de deslocamento unitário do primeiro carro.

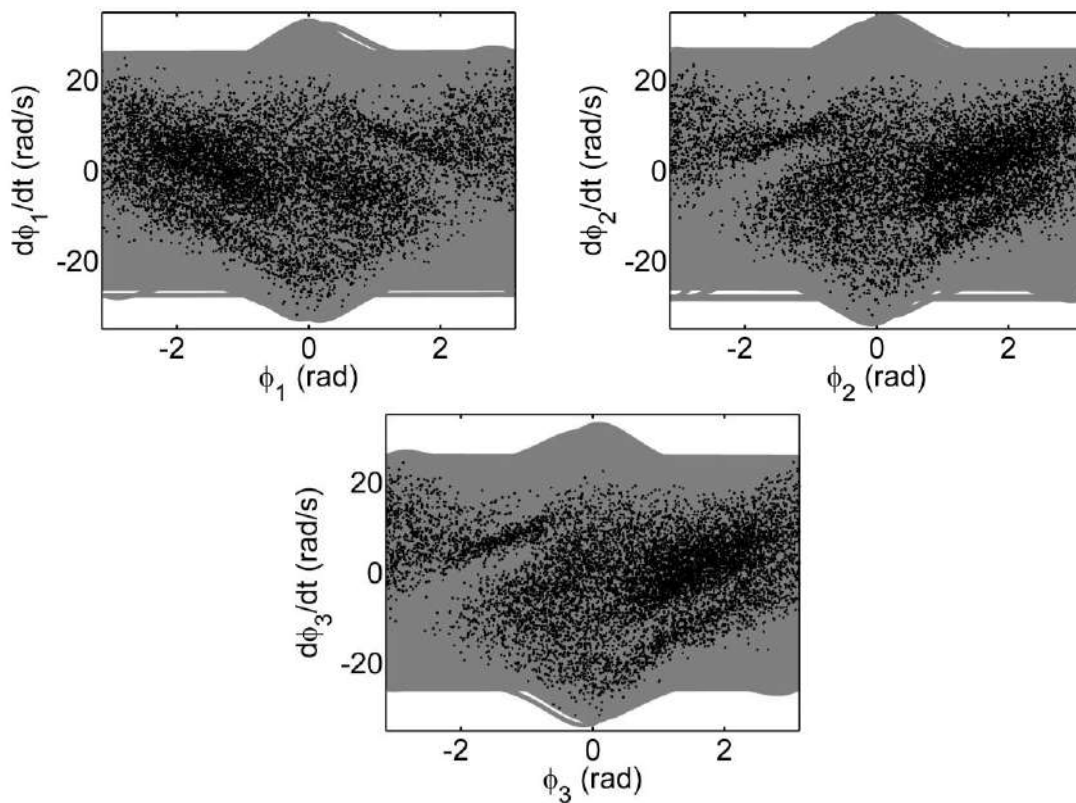


Figura 5.38. Espaço de fase para os pêndulos com condição inicial de deslocamento unitário do primeiro carro.

Na Figura 5.35, Figura 5.36, Figura 5.37 e Figura 5.38 há um estado dessincronizado caótico entre os osciladores, cujo expoente de Lyapunov máximo é de 0,68. Esse estado dessincronizado ocorre por causa das assimetrias nas condições iniciais. Note contudo que, nas Figura 5.23, Figura 5.24 e Figura 5.25 a condição assimétrica não implica necessariamente em um estado dessincronizado. Mas uma condição inicial assimétrica, possibilita a formação de estados de sincronização parcial ou mesmo o estado dessincronizado.

Para avaliar outra situação de condições iniciais assimétricas, considera-se que o segundo carro possui deslocamento unitário e os demais partem do equilíbrio.

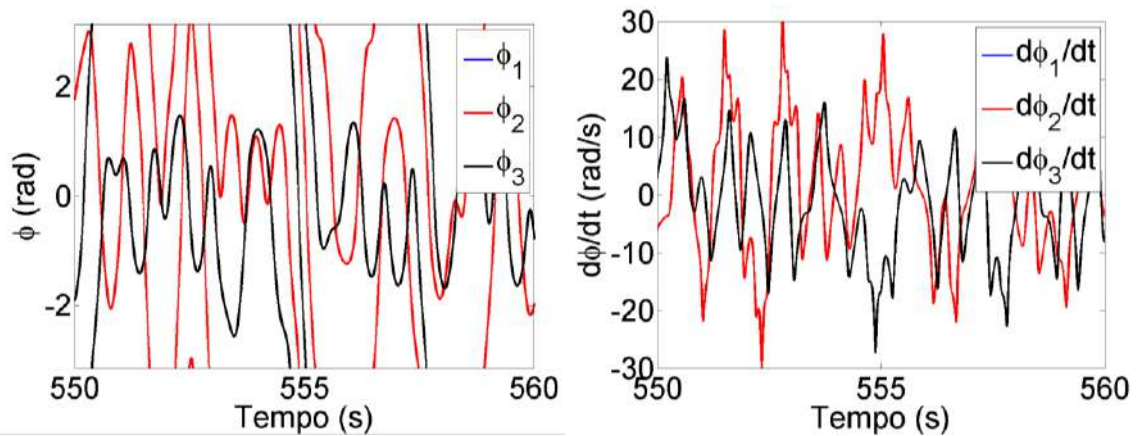


Figura 5.39. Evolução temporal dos pêndulos condição inicial com o segundo carro com deslocamento unitário.

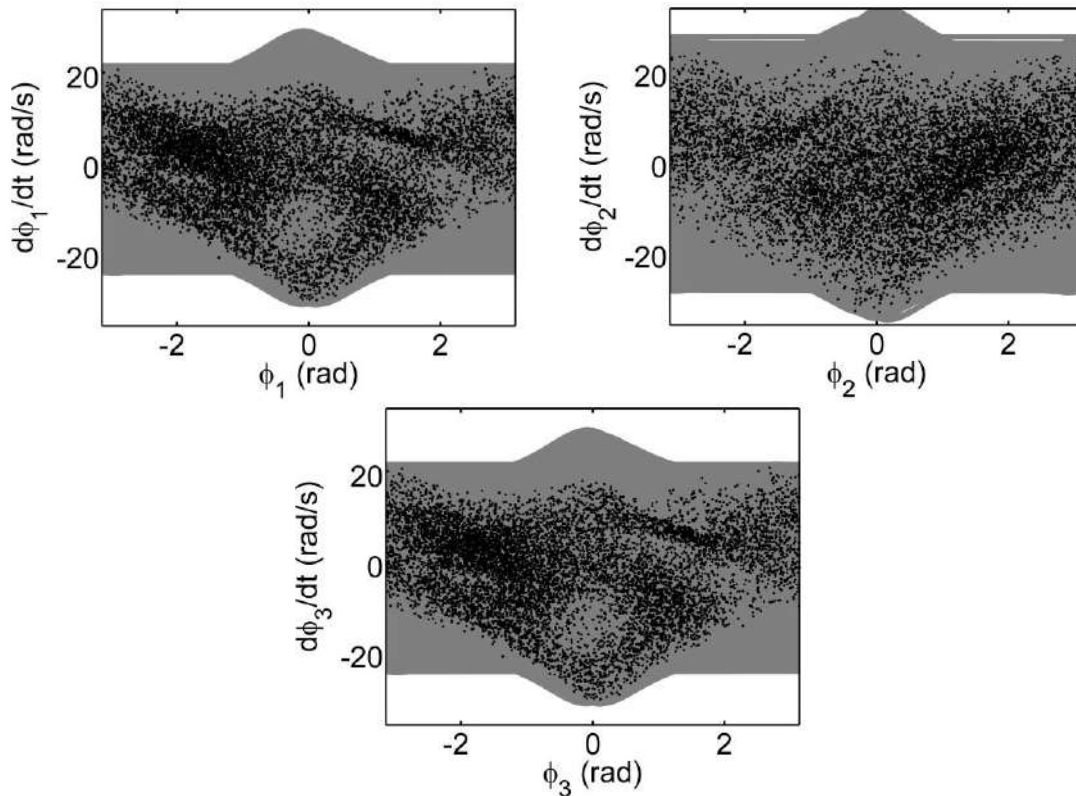


Figura 5.40. Espaço de fase dos pêndulos condição inicial com o segundo carro com deslocamento unitário.

As Figura 5.39 e Figura 5.40 apresentam um comportamento do sistema no estado de quimera e caótico e expoente de Lyapunov de 0,67. Agora, a simulação para a condição inicial com o terceiro carro com deslocamento unitário e os demais no equilíbrio.

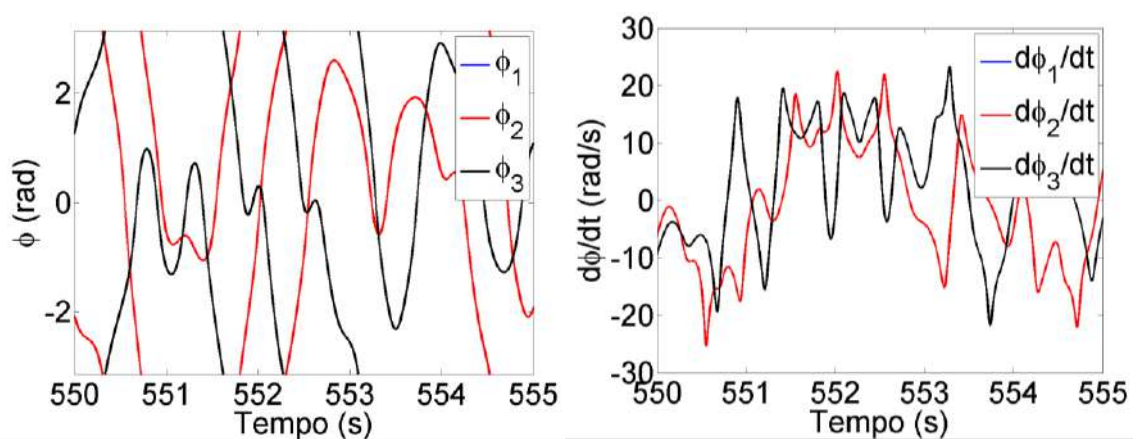


Figura 5.41. Evolução temporal dos pêndulos com o terceiro carro com deslocamento unitário e os demais no equilíbrio, onde $\phi_1 = \phi_2 \neq \phi_3$.

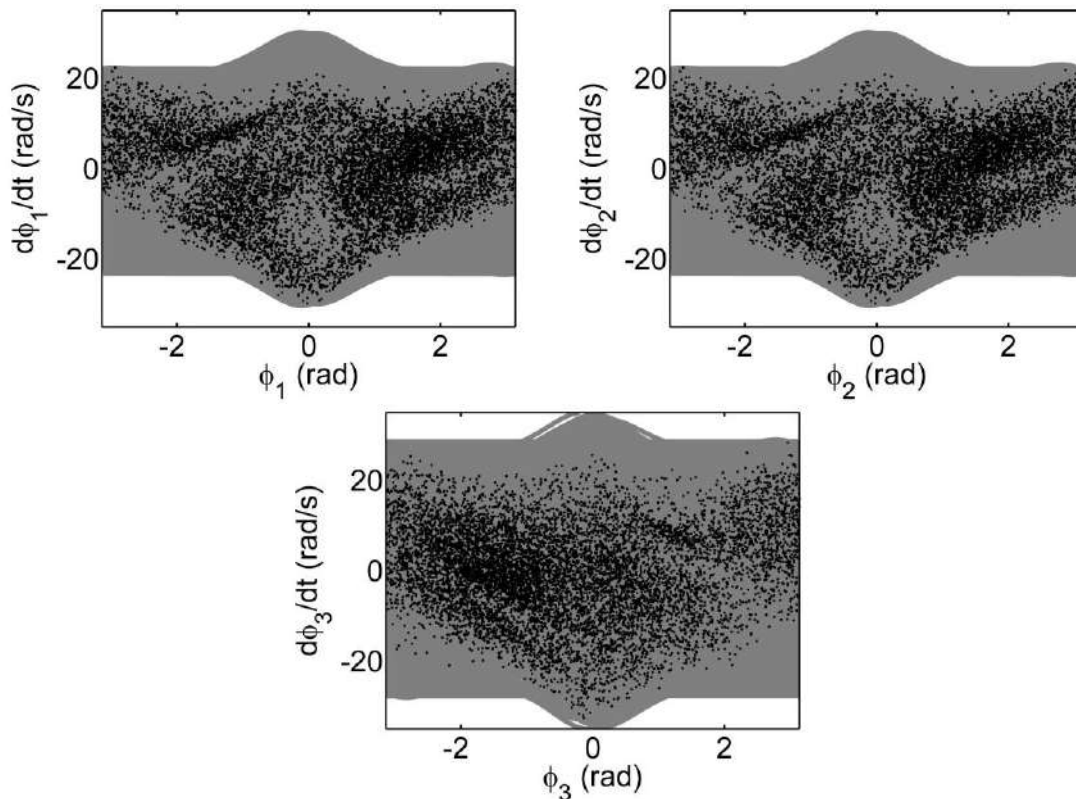


Figura 5.42. Espaço de fase dos pêndulos com o terceiro carro com deslocamento unitário e os demais no equilíbrio.

Nas Figura 5.41 e Figura 5.42 o sistema se comporta no estado de quimera e com movimento caótico, no qual o expoente de Lyapunov de 0,66. Agora, realizando outra simulação apresentando a condição inicial com o primeiro e segundo carros com deslocamento unitário e o terceiro em equilíbrio.

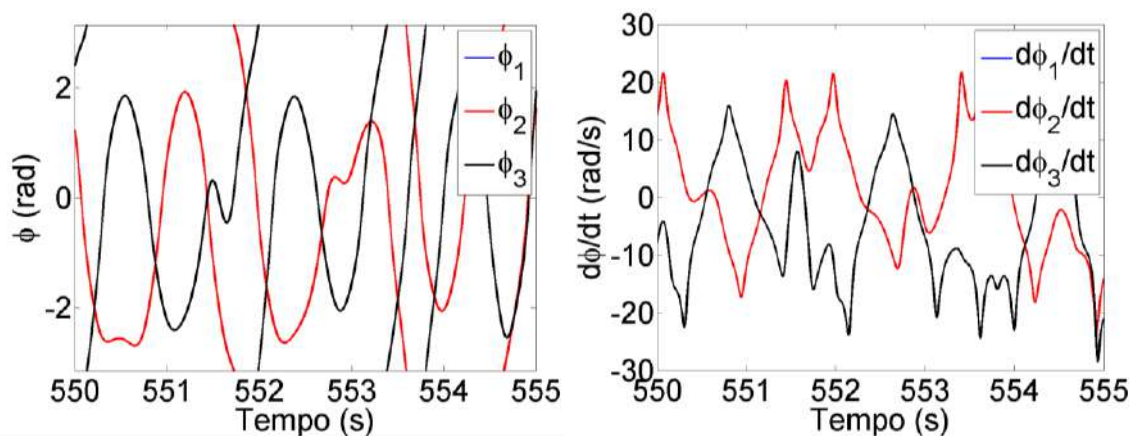


Figura 5.43. Evolução temporal dos pêndulos com o primeiro e segundo carros com deslocamento unitário e o terceiro em equilíbrio, onde $\phi_1 = \phi_2 \neq \phi_3$.

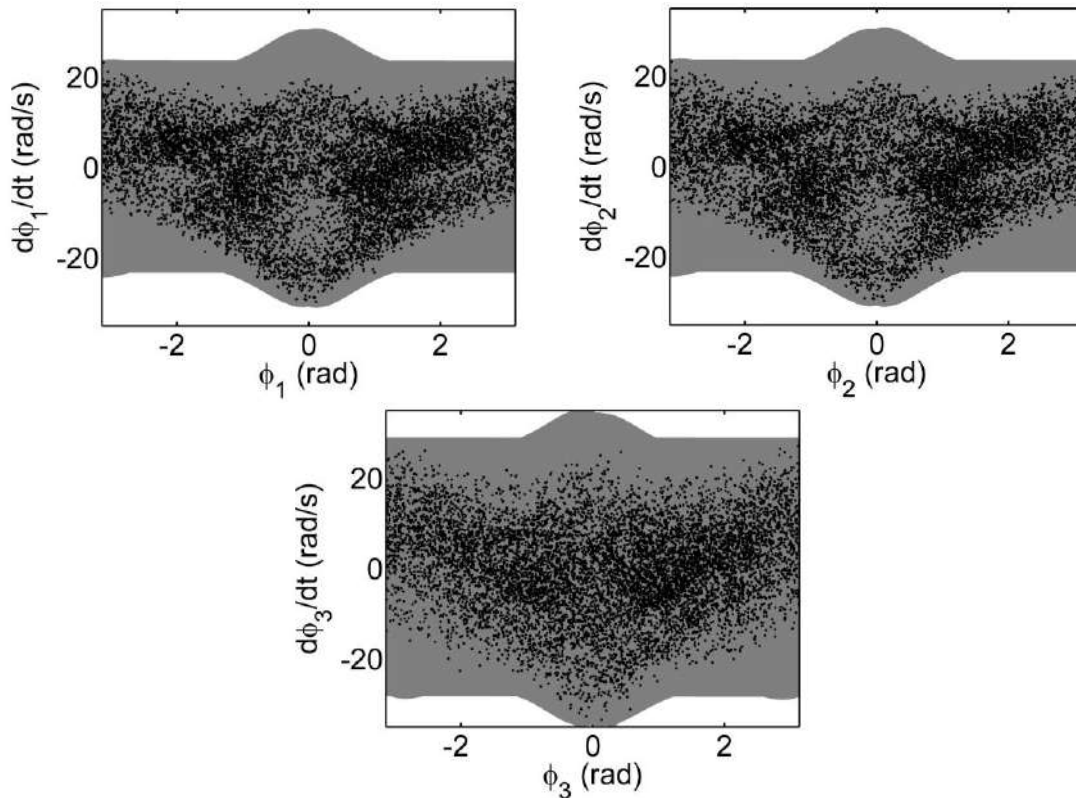


Figura 5.44. Espaço de fase dos pêndulos com o primeiro e segundo carros com deslocamento unitário e o terceiro em equilíbrio.

Nas Figura 5.43 e Figura 5.44 o comportamento de quimera com movimento caótico é novamente exibido, e expoente de Lyapunov para este caso de 0,66. Mudando a condição inicial para a com o primeiro carro em equilíbrio e os demais com deslocamento unitário.

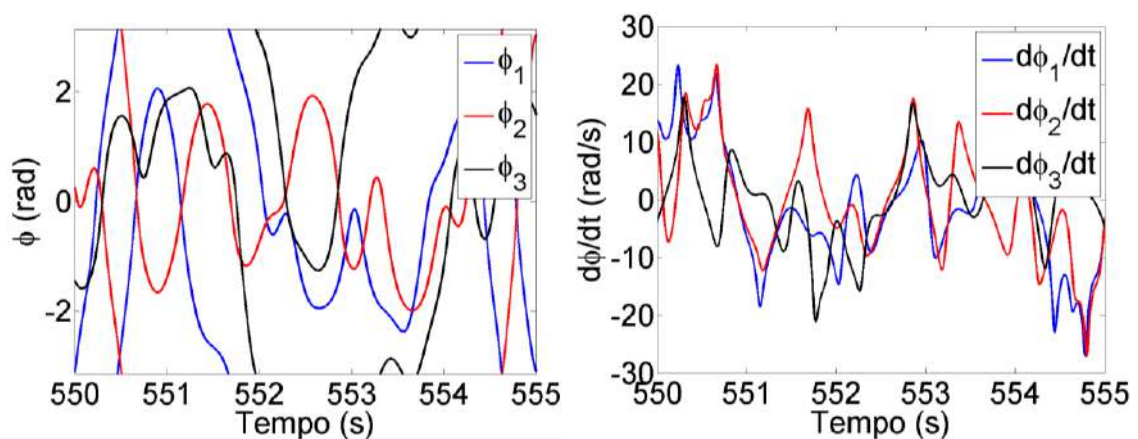


Figura 5.45. Evolução temporal dos pêndulos, primeiro carro em equilíbrio e os demais com deslocamento unitário.

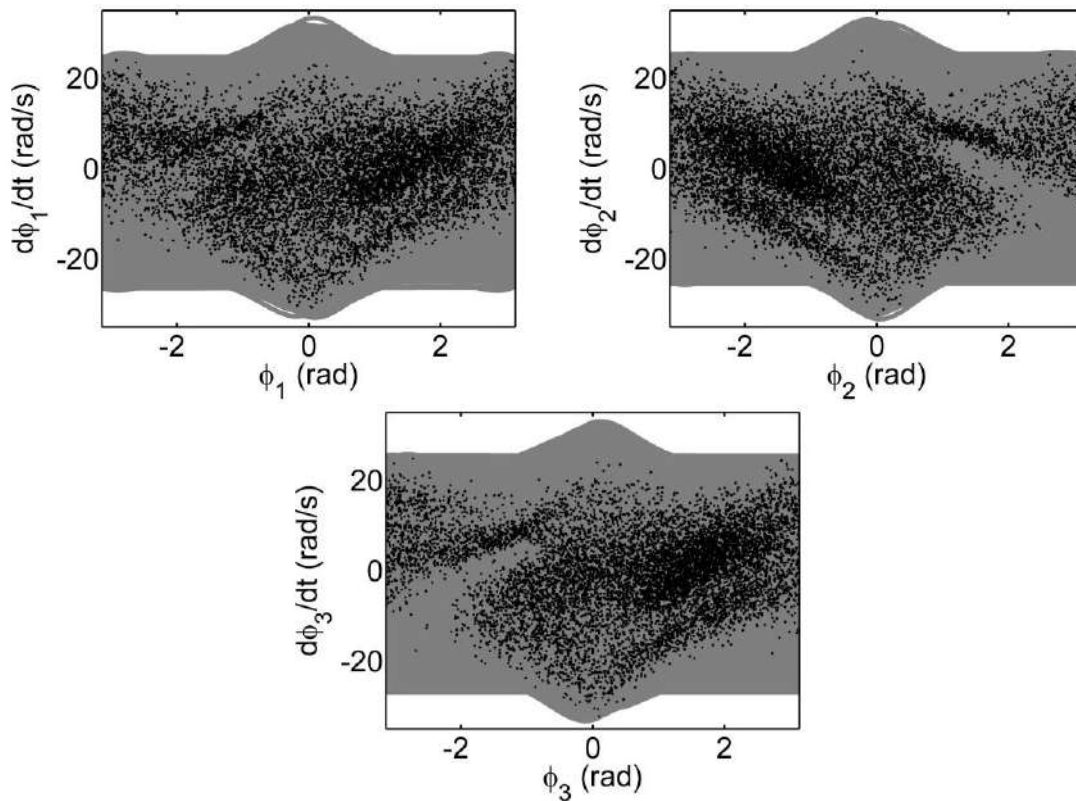


Figura 5.46. Espaço de fase dos pêndulos, primeiro carro em equilíbrio e os demais com deslocamento unitário.

Observa-se que as Figura 5.45 e Figura 5.46 apresentam um comportamento do sistema no estado de dessincronizado e caótico, com expoente de Lyapunov de 0,7. E finalmente, a condição inicial com o primeiro e o terceiro carros com deslocamento unitário e o segundo em equilíbrio.

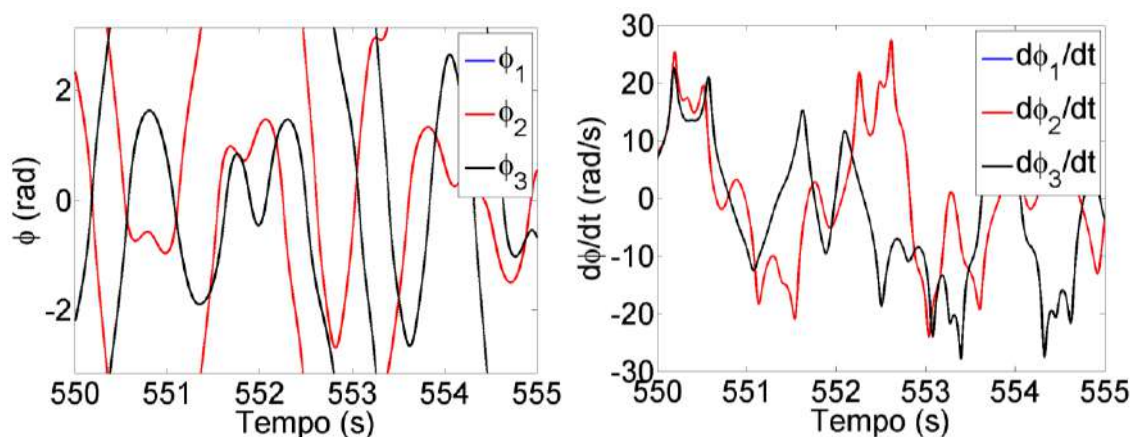


Figura 5.47. Evolução temporal dos pêndulos, primeiro e o terceiro carros com deslocamento unitário e o segundo em equilíbrio.

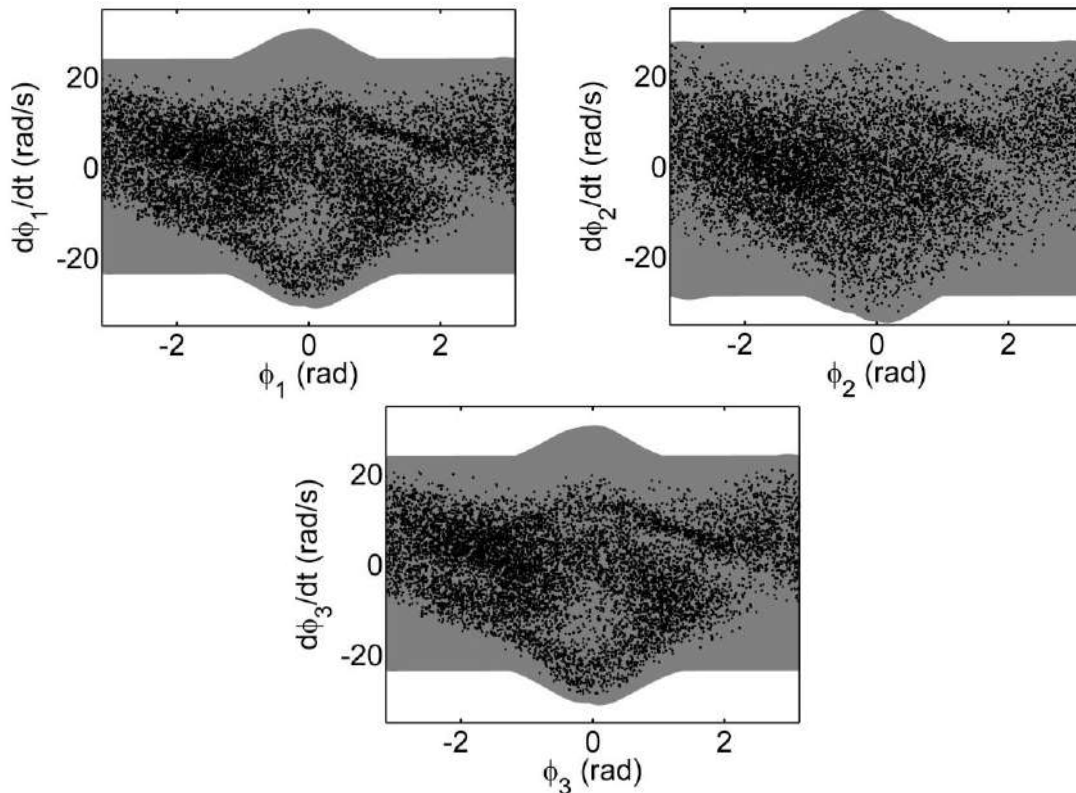


Figura 5.48. Espaço de fase dos pêndulos, primeiro e o terceiro carros com deslocamento unitário e o segundo em equilíbrio.

As Figura 5.47 e Figura 5.48 apresentam um comportamento do sistema no estado de quimera e caótico, cujo expoente de Lyapunov de 0,65. As simulações observadas nesta seção evidenciam que condições assimétricas possibilitam a formação de um estado dessincronizado ou de quimera. Porém, a assimetria inserida através das condições iniciais não é mantida no mesmo oscilador a qual a simulação se iniciou. Podendo esta assimetria ser apresentada por quaisquer osciladores. No entanto, mesmo sob um comportamento caótico o sistema mantém a sincronia para a condição inicial nula.

6 ANÁLISE PARAMÉTRICA

A variedade de padrões formados por osciladores acoplados motiva uma análise paramétrica que permita compreender os detalhes acerca da dinâmica do sistema. Desta forma, desenvolve-se uma análise que avalia o tipo de resposta em um espaço de parâmetros. Os padrões avaliados são: o estado sincronizado, sincronizado em oposição de fase, frequência fechada, longo período de sincronização, estado de quimera e o estado dessincronizado. Diante da perspectiva de que há uma transição entre diferentes comportamentos ao longo do diagrama de bifurcação, seja em termos de periodicidade ou de padrão de organização entre os osciladores, destaca-se a necessidade de descrever como esse processo ocorre. Para tanto, o diagrama de bifurcação é representativo de uma técnica que fornece as mudanças de comportamento do sistema ao variar-se um parâmetro do sistema. E conforme observado na seção anterior, não há uma relação de causalidade entre uma ou outra periodicidade e a formação de dado padrão entre os osciladores.

Nesse sentido, a análise paramétrica foi desenvolvida de modo a elucidar os diferentes padrões e a transição entre estes. Assim, foi feito um diagrama que apresenta os padrões dinâmicos classificados em um domínio de parâmetros. O procedimento é similar a uma bacia de atração, identificando o padrão no estado permanente dos osciladores pela série temporal, conforme mostrado na seção 3.3. Adicionalmente, diagramas apresentando as respostas dos carros e pêndulos isoladamente e simultaneamente são descritos nessa seção. O espaço dos parâmetros é definido pela frequência de excitação e pelo coeficiente de rigidez das molas que ligam os carros a base de excitação, os quais são assumidos como iguais $k = k_1 = k_2 = k_3$.

As Figura 6.1 à Figura 6.4 apresentam os diagramas de padrões para diferentes valores da amplitude de excitação identificando os padrões dinâmicos neste domínio. O diagrama mostra uma grande região referente ao comportamento sincronizado em cinza e com uma região dessincronizada e com o estado de quimera e nesta distribuídos alguns pontos de frequência fechada. Sendo esta região dos comportamentos dessincronizados e de quimera genericamente chamada de região assíncrona, apesar do nome, há nesta estes pontos de frequência fechada que são de fato um tipo de estado sincronizado. Esta região assíncrona tende a aumentar sua área com o aumento da amplitude de excitação, como observado comparando a Figura 6.1 à Figura 6.4.

A Figura 6.1 mostra uma resposta para a amplitude de $u = 0,1$ m mudando a amplitude para $u = 0,2$ m, Figura 6.2, uma segunda região assíncrona surge próximo à 3

rad/s. Também é notável o surgimento do comportamento dessincronizado. Assim, a Figura 6.3 considera uma amplitude de $u = 0,5$ m, onde a banda de comportamento assíncrono em torno de 10 rad/s se torna ainda maior e a segunda banda em 3 rad/s aumentando seu comprimento. O comportamento dessincronizado possui uma forte presença para $u = 0,5$ m e novas áreas com o comportamento de quimera aparecem em torno de 20 rad/s, expandindo a região assíncrona. Finalmente, considerando a amplitude de excitação de $u = 1$ m, Figura 6.4, esta tendência é ainda mais evidente, além da forma difusiva em que isto ocorre nesta amplitude. Estes resultados mostram uma forte dependência da região assíncrona em relação a amplitude de excitação. Isto é, o aumento da amplitude de excitação é seguido por um aumento consequente da região assíncrona.

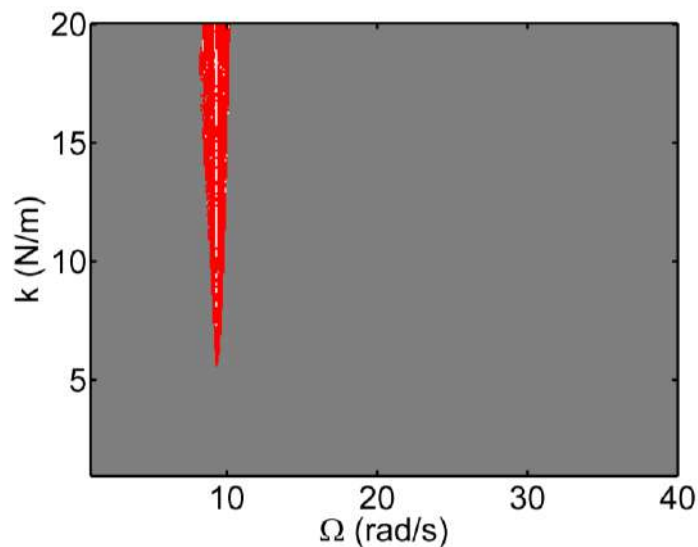
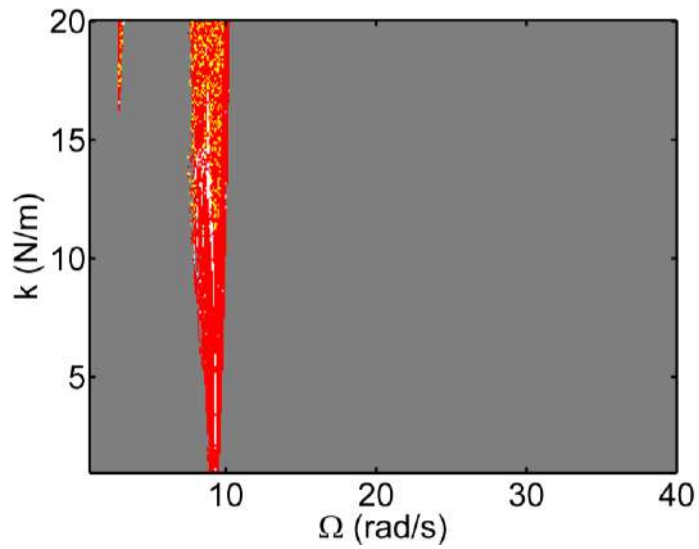
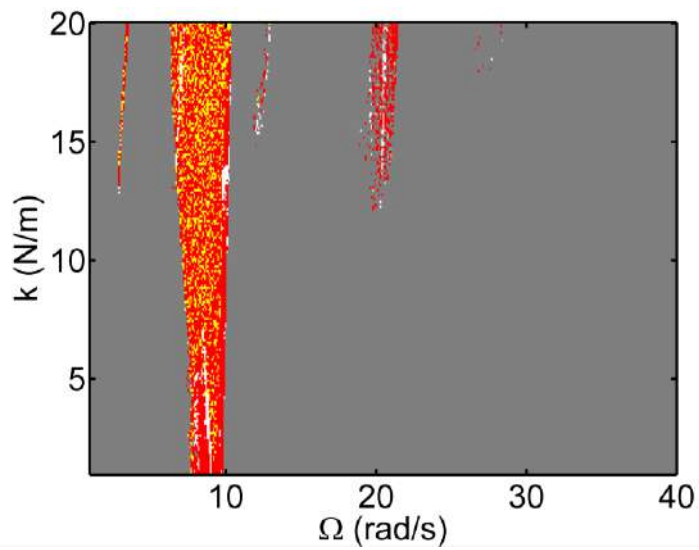


Figura 6.1. Diagrama de padrões para os carros para amplitude de forçamento de $u = 0,1$ m.



■ quimera
 ■ dessincronizado
 □ frequência fechada
 ■ sincronizado
 ■ oposição de fase
 ■ LPS

Figura 6.2. Diagrama de padrões para os carros para amplitude de forçamento de $u = 0,2$ m.



■ quimera
 ■ dessincronizado
 □ frequência fechada
 ■ sincronizado
 ■ oposição de fase
 ■ LPS

Figura 6.3. Diagrama de padrões para os carros para amplitude de forçamento de $u = 0,5$ m.

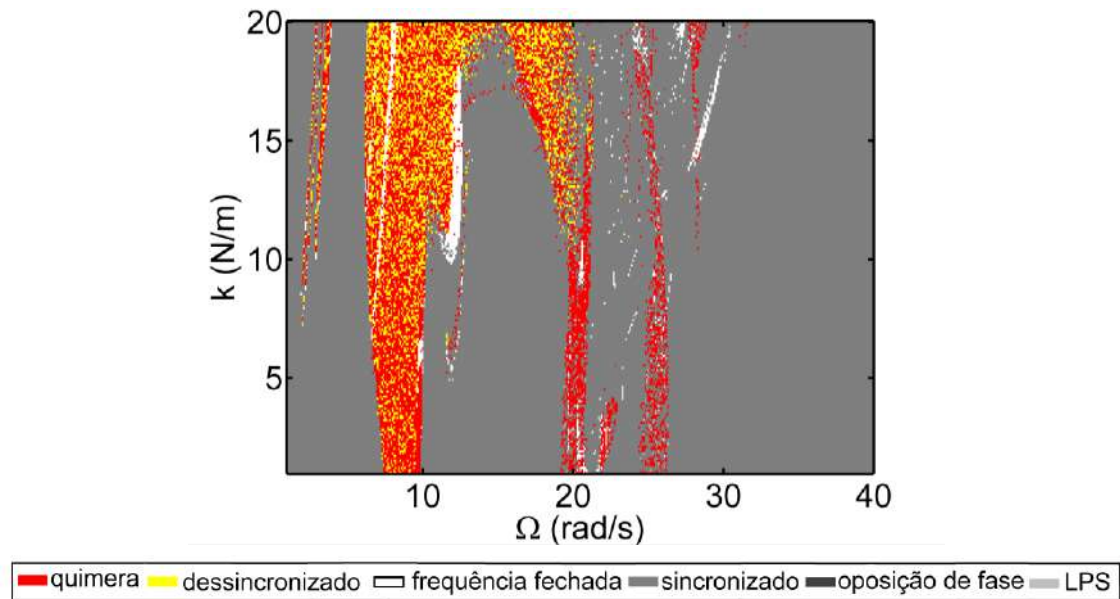


Figura 6.4. Diagrama de padrões para os carros para amplitude de forçamento de $u = 1$ m.

O mesmo diagrama foi feito para o conjunto dos pêndulos, Figura 6.5 à Figura 6.8. As mesmas tendências relativas à região assíncrona são observadas. No entanto, a região sincronizada apresenta uma estrutura complexa entre o comportamento sincronizado e sincronizado em oposição de fase. A borda entre estes comportamentos apresenta um padrão que em alguns lugares se assemelha as características de um fractal. Para o aumento da amplitude de excitação da Figura 6.5 para Figura 6.6, $u = 0,1$ para $0,2$ m, a banda assíncrona apresenta as mesmas bordas do caso dos carros, Figura 6.2. No entanto, na Figura 6.6 o comportamento dessincronizado é concentrado para valores maiores de rigidez quando comparado a análise dos carros, Figura 6.2, onde o estado de quimera e dessincronizado estão mais misturados. Observando a Figura 6.7 e Figura 6.8, respectivamente associadas as amplitudes de $0,5$ e 1 m, há áreas onde o comportamento de quimera é observado para os mesmos valores do caso dos carros para esta amplitudes. Porém, no conjunto dos pêndulos o comportamento dessincronizado é mais concentrado que nos carros e a estrutura entre os comportamentos sincronizado e sincronizado em oposição de fase se tornam ainda mais complexo e difuso com o aumento da amplitude.

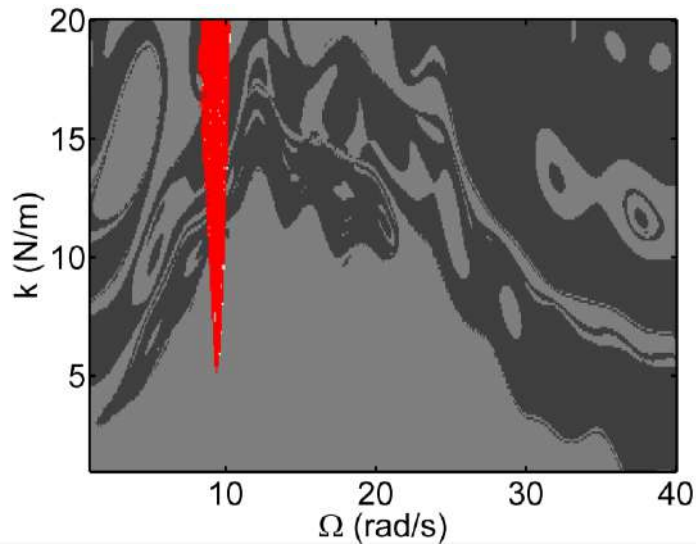


Figura 6.5. Diagrama de padrões para os pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,1$ m.

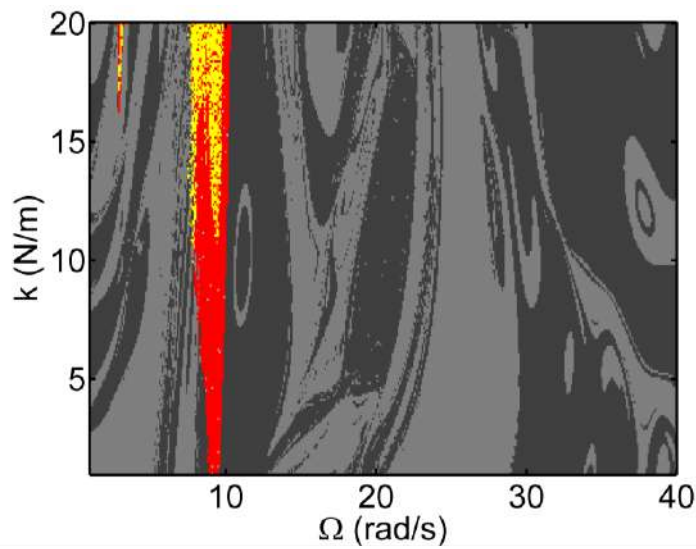


Figura 6.6. Diagrama de padrões para os pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,2$ m.

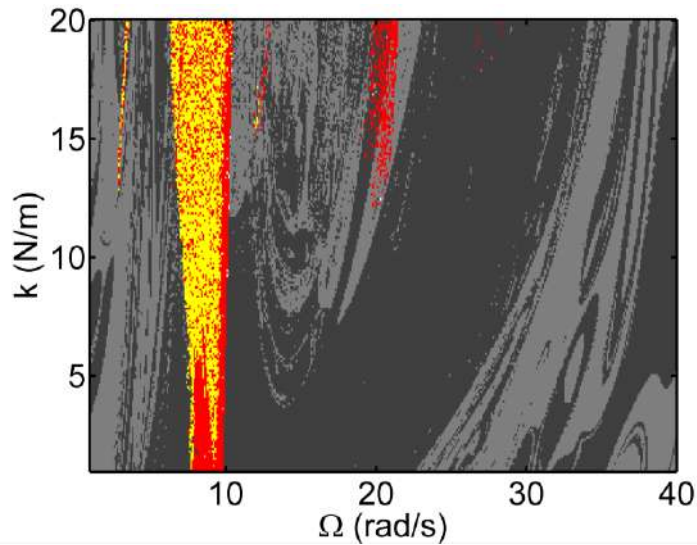


Figura 6.7. Diagrama de padrões para os pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,5$ m.

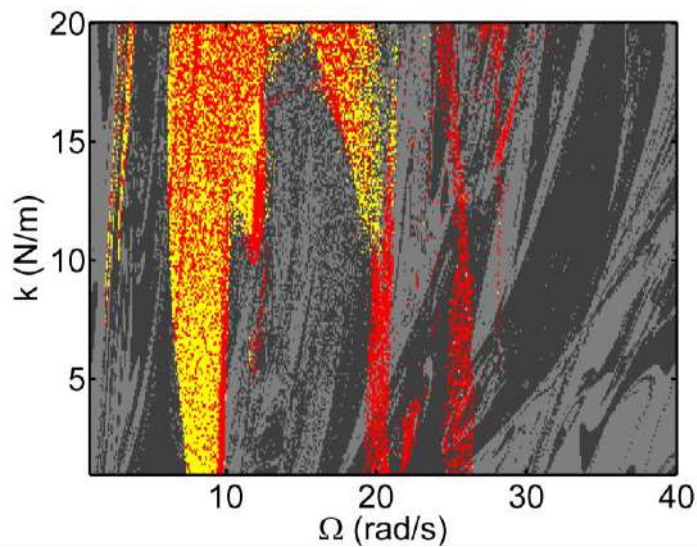


Figura 6.8. Diagrama de padrões para os pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 1$ m.

Analisando conjuntamente carros e pêndulos, Figura 6.9, Figura 6.10, Figura 6.11 e Figura 6.12, novamente as mesmas tendências são observadas, especialmente em relação à região assíncrona. No entanto, é importante observar que a forma do comportamento sincronizado é diferente para os seis osciladores. Isto é, mesmo que os carros e pêndulos estejam sincronizados, é possível que os subgrupos não estejam sincronizados um com o outro. Baseado nisso, comportamentos sincronizados aparecem

como frequência fechada quando são considerados conjuntamente. Além disso, a região assíncrona permanece com as mesmas bordas. Assim, o estado dessincronizado desta análise de todos os osciladores conjuntamente corresponde apenas aos pontos onde este comportamento é identificado para carros e pêndulos em cada respectiva abordagem.

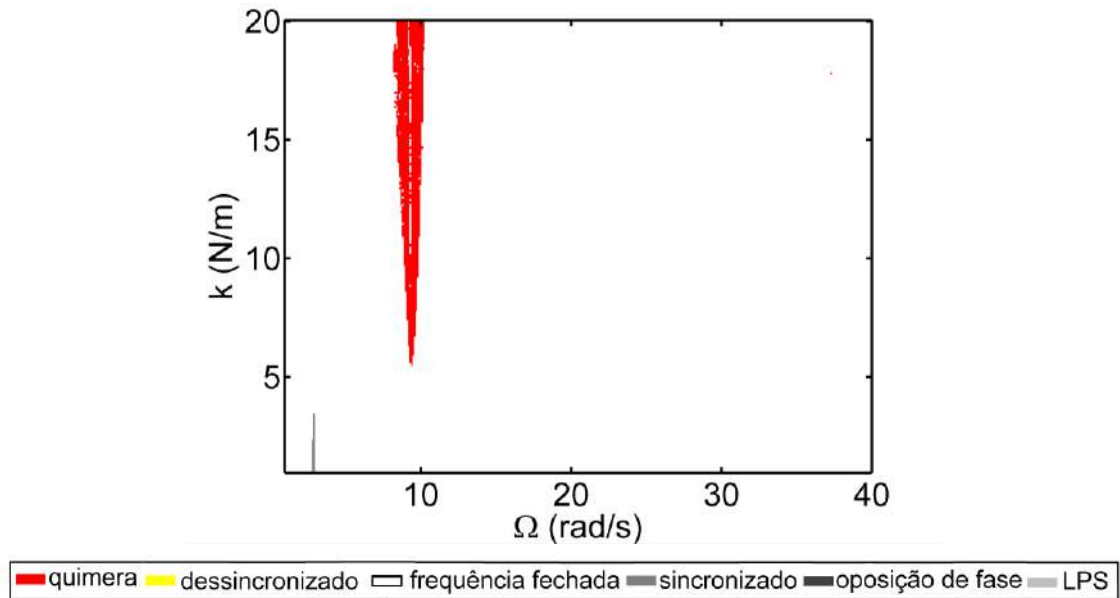


Figura 6.9. Diagrama de padrões para os carros e pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,1$ m.

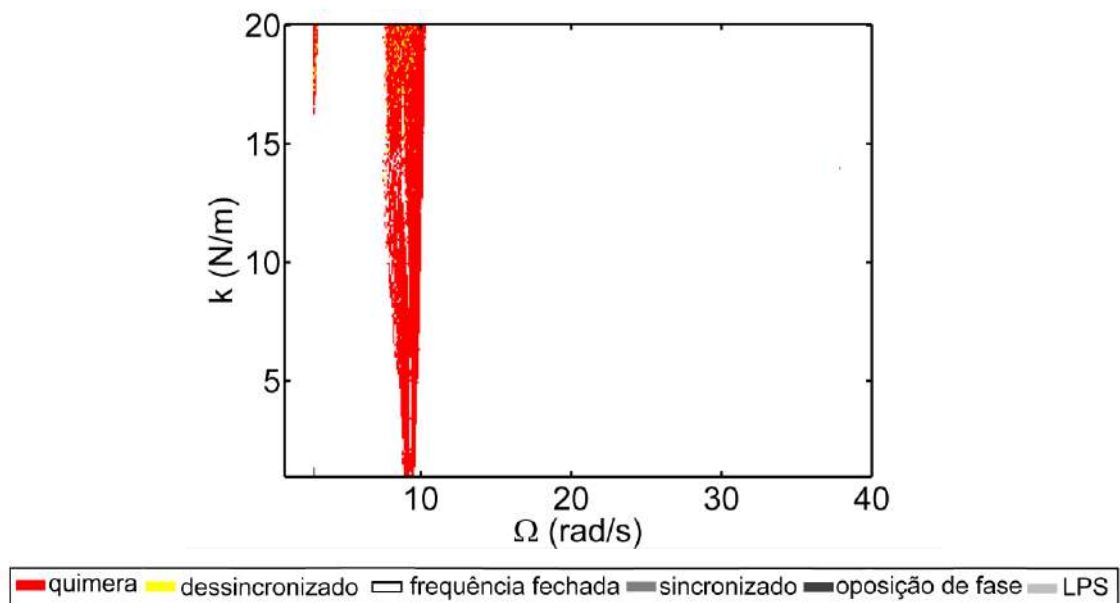


Figura 6.10. Diagrama de padrões para os carros e pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,2$ m.

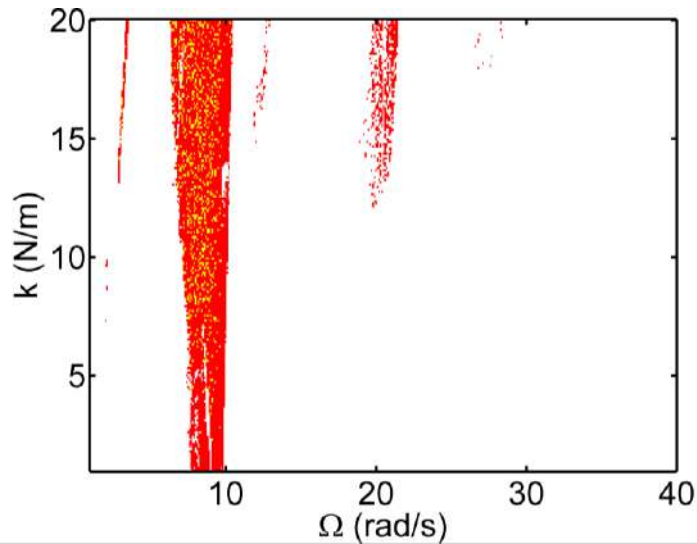


Figura 6.11. Diagrama de padrões para os carros e pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,5$ m.

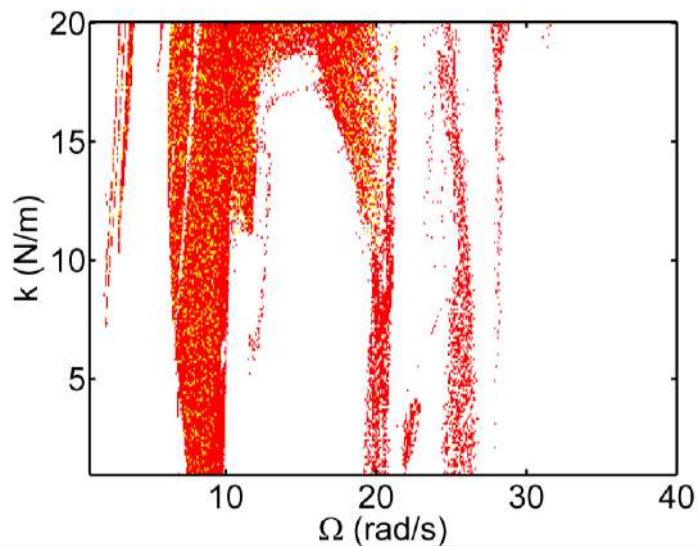


Figura 6.12. Diagrama de padrões para os carros e pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 1$ m.

MARTENS *et al.* (2013) propôs a hipótese que estado de quimera é a consequência da competição entre o comportamento sincronizado e sincronizado em oposição de fase. Basicamente, o estado de quimera é propício de ocorrer entre estes comportamentos. Observando o diagrama de padrões dos pêndulos é evidente que para baixa excitação, Figura 6.13-a ($u = 0,1$ m, o mesmo da Figura 6.5), a hipótese pareça uma interessante explicação sobre a transição de algumas áreas, Figura 6.13-b. Esta área

mostra a mesma transição de sincronizado para sincronizado em oposição de fase da hipótese da competição. No entanto, em outras áreas como apresentado na Figura 6.13-c o comportamento sincronizado aparece nos dois lados da banda do comportamento de quimera. Assim, considerando a hipótese da competição, o estado de quimera deveria surgir apenas na transição de um padrão para o outro. Porém, a região assíncrona não está relacionada a forma da estrutura formada pelos estados sincronizado e sincronizado em oposição de fase, mesmo para grandes amplitudes de excitação onde esta forma se torna mais complexa. Assim, o aumento da região assíncrona para amplitudes de excitação maiores não é relacionado a possível competição de padrões. Esta correlação indica uma dependência do nível de energia do sistema.

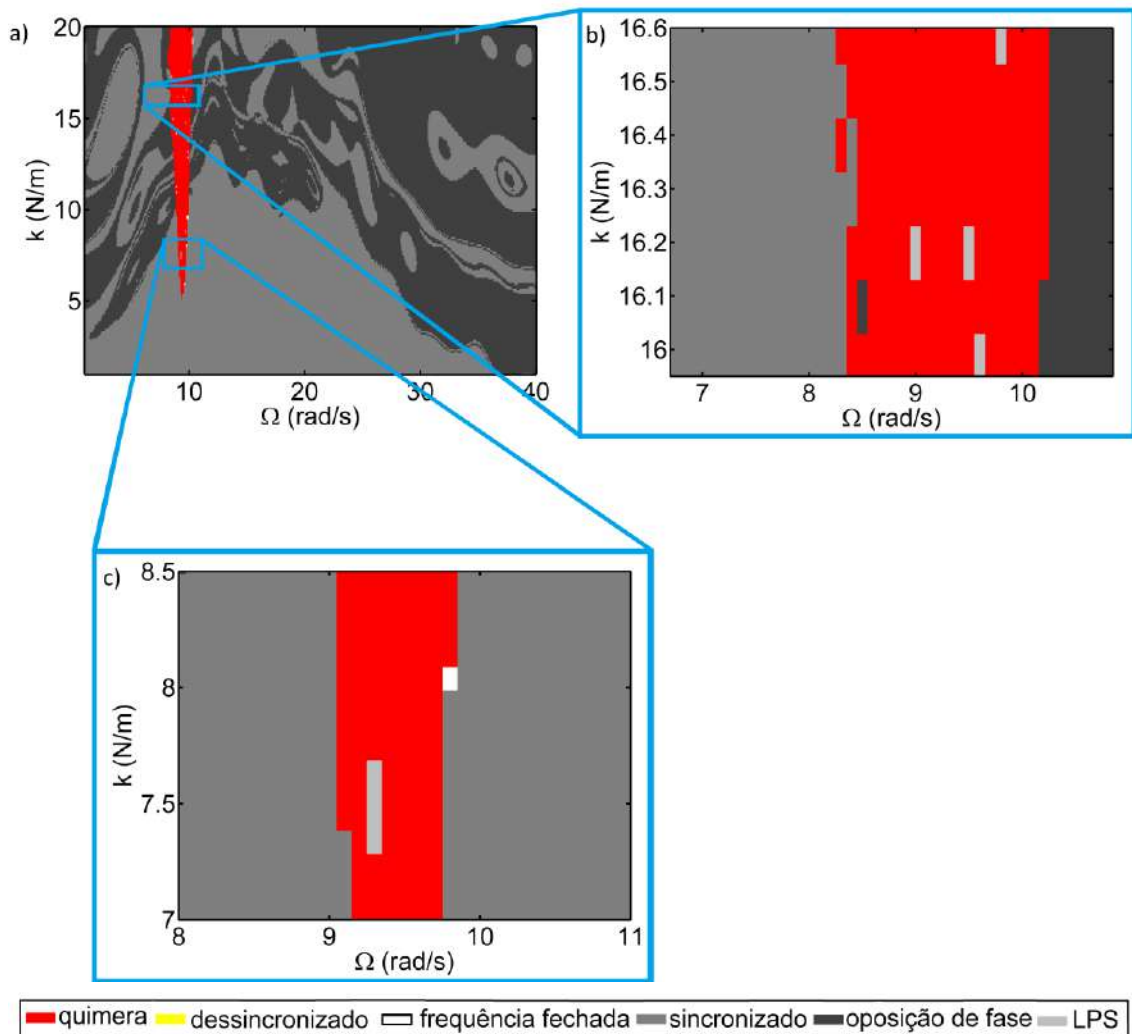


Figura 6.13. Diagrama de padrões dos pêndulos para $u = 0,1$ m: a) diagrama completo; b) detalhe com o estado de quimera entre o comportamento sincronizado e sincronizado em oposição de fase e c) detalhe com o estado de quimera entre duas regiões com o comportamento sincronizado.

Na Figura 6.14 é perceptível que a bacia de atração alterou completamente para um grupo de pêndulos com massa menor que nas simulações anteriores, um décimo da massa usada anteriormente. Assim, uma redução das massas dos pêndulos no sistema aqui tratado, o aproxima do modelo de MARTENS *et al.* (2013). Pois, a inércia dos metrônomos em relação a da plataforma mais a base dos metrônomos é baixa, assim como na relação aqui apresentada, Figura 6.14.

Deste modo, semelhante ao apresentado por MARTENS *et al.* (2013) para uma razão baixa entre as massas tem-se o surgimento de uma região com sincronização parcial entre uma região sincronizada e uma sincronizada em oposição de fase. Além da presença da região sincronizada ocorrer sob frequências de oscilação mais baixas que a região de comportamento de quimera, como no trabalho citado, e consequentemente a sincronização em oposição de fase, assim como no trabalho dele aparece para frequências superiores ao estado de quimera. Porém, como verificado em simulações anteriores esta região de assíncrona permanece próxima a certos valores da frequência de oscilação, enquanto a estrutura fractal entre sincronização e oposição de fase tornam-se mais intrincadas dos dois lados desse estado de quimera. Este resultado se enquadra no questionamento se a formação do estado de quimera derivaria de uma competição entre os estados sincronizado e sincronizado em oposição de fase. MARTENS *et al.* (2013) também sugere que o estado de quimera possa estar relacionado a frequência de ressonância das plataformas, pois a linha que define a frequência natural de oscilação das plataformas coincide com a região onde obteve o estado de quimera. Nesta concepção é analisado na seção seguinte a relação da frequência natural de oscilação com os padrões de comportamento do sistema.

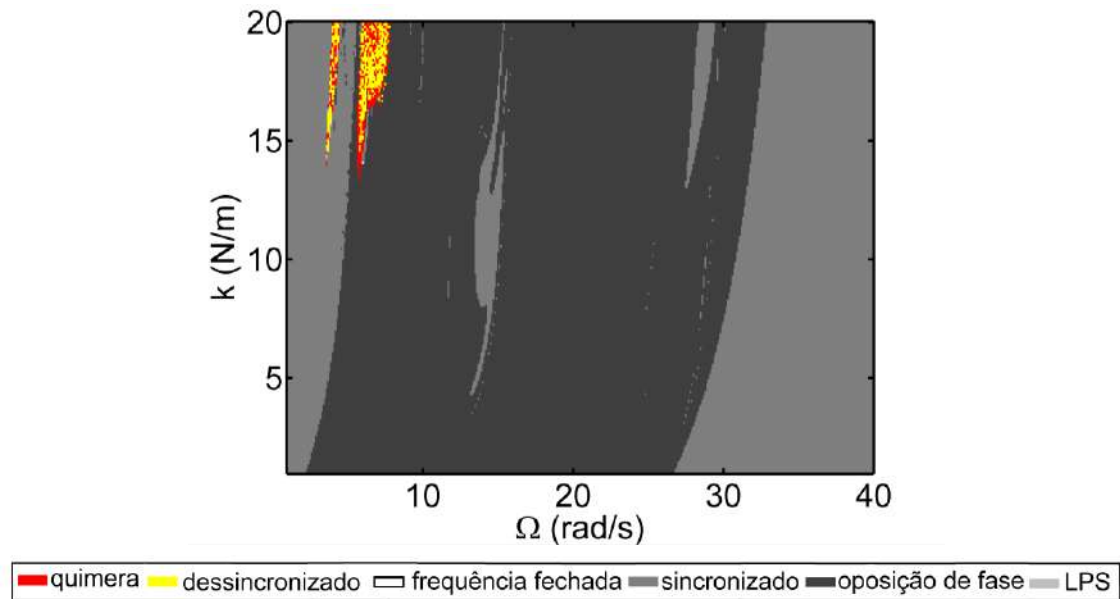


Figura 6.14. Diagrama de padrões para os pêndulos para amplitude de forçamento de $u = 0,5$ m e massa dos pêndulos $m = 0,1$ Kg.

6.1 ANÁLISE DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

Nesta seção é discutida a hipótese proposta por MARTENS *et al.* (2013) de que o estado de quimera se relaciona à presença da frequência natural de oscilação do sistema. Como o sistema é não-linear considera-se uma aproximação da resposta em frequência através da amplitude de resposta do sistema e uma aproximação linearizada.

Basicamente, as equações de governo do sistema, (4-17), (4-18), (4-19), (4-20), (4-21) e (4-22) foram linearizadas assumindo $\sin \phi_i \approx \phi_i$, $\cos \phi_i \approx 1$ e $\dot{\phi}_i^2 \sin \phi_i \approx 0$. Assim, três diferentes abordagens foram executadas: considerando apenas os carros, apenas os pêndulos e os carros e pêndulos conjuntamente. Para o caso dos carros isolados e dos carros e pêndulos conjuntamente foi obtido os autovalores do sistema linearizado. E para os pêndulos isolados a frequência natural de um pêndulo isolado é suficiente, já que sem o movimento dos carros estes se encontram desconectados entre si. Os resultados destas análises é apresentado na Figura 6.15 conjuntamente aos resultados do diagrama de padrões da Figura 6.6. As linhas azuis representam a frequência natural do sistema carro-pêndulo linearizado; as linhas verdes representam o sistema dos carros; e a linha azul-claro representa a resposta dos pêndulos isolados. Note que algumas destas frequências linearizadas, em azul, são relacionadas as bordas da região assíncrona seguindo os mesmos contornos desta região.

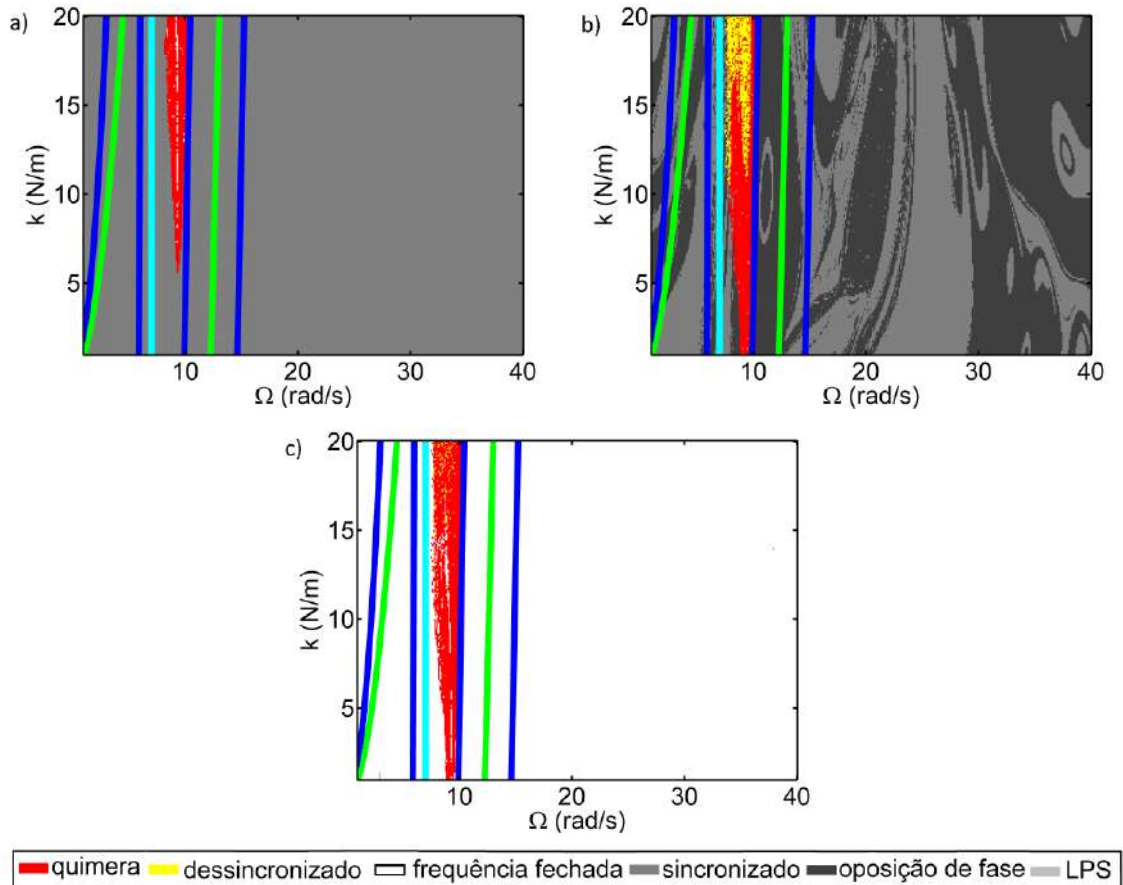


Figura 6.15. Frequências naturais linearizadas do sistema, traçadas sobre a diagrama de padrões no domínio para $u = 0,2$ m. Em verde apenas considerando os carros, em azul-claro apenas um pêndulo isolado e em azul, o conjunto completo linearizado.

Outra abordagem para investigar esta relação entre as condições de ressonância é desenvolvida considerando a amplitude de resposta, construída a partir do máximo no tempo de cada resposta no regime permanente utilizando as mesmas condições iniciais. Esta curva apresenta um pico entorno da frequência natural do sistema permitindo a identificação da frequência não-linear de ressonância. A Figura 6.16 apresenta o resultado para uma amplitude de excitação de $u = 0,2$ m e $k_{1,2,3} = 20$ N/m, equivalente a um corte horizontal na Figura 6.6 em 20 N/m e a Figura 6.17 foi obtida pelo mesmo processo em relação à Figura 6.7, onde $u = 0,5$ m. O sistema mostra dois picos na resposta em frequência em 3 rad/s e 8 rad/s, Figura 6.16. Observe que a uma correlação entre o pico e a região assíncrona, a qual é próxima ao salto dinâmico, em torno de 10 rad/s e ao pico de 3 rad/s para a segunda banda assíncrona. A amplitude de resposta mostra uma relação próxima com a frequência natural obtida da linearização, linhas azuis. O primeiro pico está na mesma posição de uma das linhas azuis e os outros três estão em torno do salto

dinâmico. Baseado nisso, é possível verificar a relação entre o estado de quimera e as frequências naturais do sistema.

Na Figura 6.18 é apresentado o gráfico de amplitude de resposta com os mesmos parâmetros da Figura 6.16, porém com a atualização das condições iniciais na progressão e regressão do intervalo. Nesta abordagem é possível verificar com clareza toda a largura de banda do fenômeno do salto e como esta banda se encaixa nos limites da região assíncrona. Dos resultados descritos nessa seção é possível afirmar que existe uma relação entre a formação do estado de quimera e do estado dessincronizado com os picos de frequência.

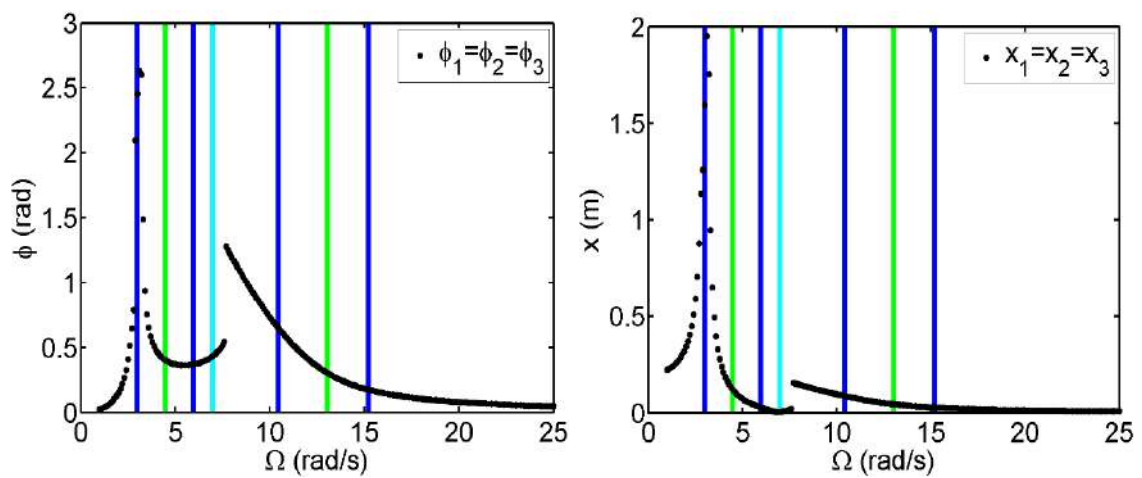


Figura 6.16. Amplitude de resposta para condição inicial de todos os osciladores em repouso e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m. As frequências naturais linearizadas são em verde apenas considerando os carros, em azul-claro apenas um pêndulo isolado e em azul, o conjunto completo linearizado.

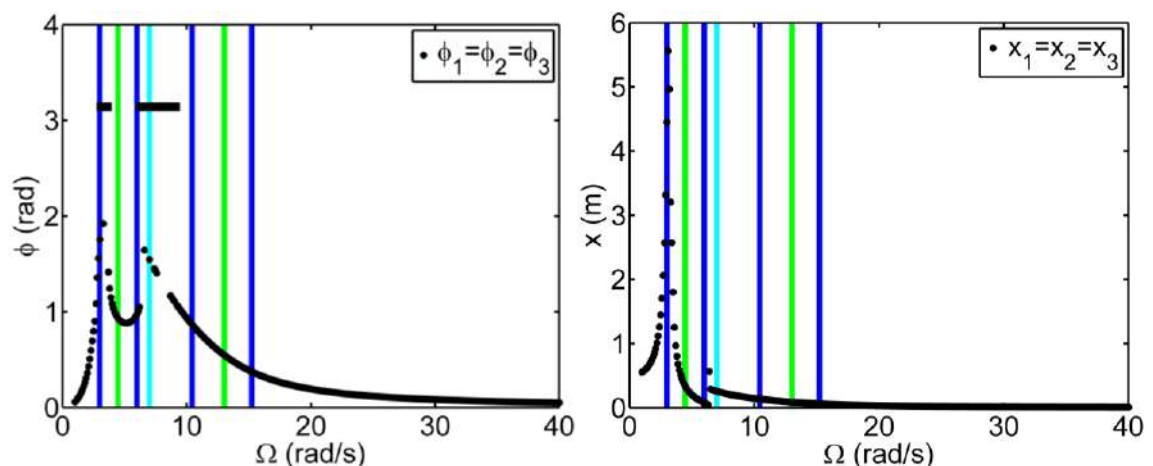


Figura 6.17. Amplitude de resposta para $u = 0,5$ m e condição inicial de todos os osciladores em repouso. Os quadrados representam as regiões onde os pêndulos

rotacionam. As frequências naturais linearizadas são em verde apenas considerando os carros, em azul-claro apenas um pêndulo isolado e em azul, o conjunto completo linearizado.

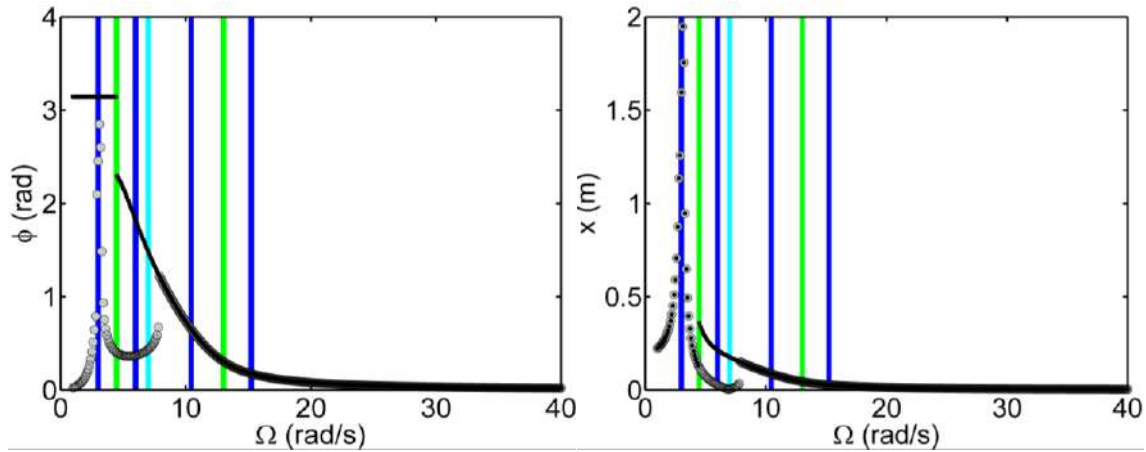


Figura 6.18. Amplitude de resposta com atualização das condições iniciais partindo de uma condição de repouso para todos os osciladores e progressão (marcado por círculos) e regressão (marcado por pontos) pelo intervalo. As frequências naturais linearizadas são em verde apenas considerando os carros, em azul-claro apenas um pêndulo isolado e em azul, o conjunto completo linearizado.

6.2 ANÁLISE DO FLUXO DE ENERGIA

Nesta seção é proposta uma abordagem diferente para classificar os padrões de sincronização encontrados neste trabalho. Como indicado através dos resultados da análise da seção anterior, o estado de quimera e dessincronizado são relacionados às frequências naturais. Assim, é notável que os picos de amplitude de resposta arremetam à presença da frequência natural de oscilação, pois a formação do pico deve-se propriamente a fenômeno da ressonância. Desta maneira, fica estabelecido que há uma relação entre a presença dos estados de quimera e do estado dessincronizado, Figura 6.6, com o pico de frequência, Figura 6.16.

Além de se verificar esta relação, estabelece-se que a quantidade de energia no sistema define qual tipo de padrão estão associadas as respostas dos osciladores. Das análises realizadas nas Figura 6.1 a Figura 6.14, conclui-se que a medida que a amplitude de excitação se torna maior, independente de qual conjunto é analisado, o domínio dessincronizado e o estado de quimera aumentam. Quanto maior a amplitude de forçamento, mais energia é fornecida ao sistema. Tendo em vista essas duas relações de

amplitude de resposta e amplitude de excitação com a presença de comportamento dessincronizado e de quimera, infere-se que há uma dependência do nível de energia no sistema com estes tipos de comportamento. Desta forma, nesta seção a abordagem pelo fluxo de energia é estabelecido como uma condição para identificar e compreender os comportamentos de quebra de simetria, estados de quimera e dessincronizado.

De modo a quantificar essa hipótese que o estado de quimera advém de um acúmulo de energia no sistema, a qual flui entre os osciladores de modo a manter um padrão dinâmico coletivo. A energia potencial elástica das molas e o potencial dos pêndulos são considerados para cada instante de tempo. Nesse sentido, essas são divididas em dois tipos: as molas que recebem energia diretamente da excitação de base, k_1, k_2, k_3, k_4, k_6 e k_8 , e as que realizam a comunicação entre os carros transmitindo a energia entre eles, k_5, k_7 e k_9 . A comunicação entre os pêndulos também é efetuada por meio desses elementos elásticos que ligam os carros, enquanto seu termo de restituição é o potencial gravitacional. Assim, o método monitora o fluxo de energia (E_F) no sistema através do somatório das razões das energias transmitidas, k_5, k_7 e k_9 , pela energia recebida, k_1, k_2, k_3, k_4, k_6 e k_8 , para cada oscilador na média do tempo (onde o intervalo de tempo é de 0 à t_f). Assim, é obtido um valor que classifica qualitativamente o tipo de comportamento do sistema. Quando o estado é sincronizado, essa razão é inferior aproximadamente à zero e, para valores superiores, obtém-se um estado dessincronizado ou de quimera. Assim o valor do fluxo de energia é dado pela seguinte equação para os carros ($E_{F,C}$):

$$E_{F,C} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \left(\frac{k_5(x_2(t) - x_1(t))^2 + k_9(x_3(t) - x_1(t))^2}{k_1(x_1(t))^2 + k_4(x_1(t))^2} + \frac{k_5(x_2(t) - x_1(t))^2 + k_7(x_3(t) - x_2(t))^2}{k_2(x_2(t))^2 + k_6(x_2(t))^2} + \frac{k_7(x_3(t) - x_2(t))^2 + k_9(x_3(t) - x_1(t))^2}{k_3(x_3(t))^2 + k_8(x_3(t))^2} \right) dt \quad (6-1)$$

E pelo potencial dos pêndulos ($E_{F,P}$):

$$E_{F,P} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \left(\frac{m_1 g l (1 - \cos \phi_1)}{k_1 (x_1(t))^2 + k_4 (x_1(t))^2} + \frac{m_2 g l (1 - \cos \phi_2)}{k_2 (x_2(t))^2 + k_6 (x_2(t))^2} + \frac{m_3 g l (1 - \cos \phi_3)}{k_3 (x_3(t))^2 + k_8 (x_3(t))^2} \right) dt \quad (6-2)$$

Este procedimento permite definir uma hipótese alternativa a de que analisa o estado de quimera como o resultado da competição entre os estados sincronizado em fase e em oposição de fase. Isso é, entendendo que o estado de quimera provém de um acúmulo de energia no sistema acima da capacidade de transmitir a energia entre os osciladores. Os elementos k_1, k_2 e k_3 transmitem a energia continuamente fornecida pela excitação de base ao sistema que as distribui pelos elementos k_5, k_7 e k_9 . Quando a amplitude de excitação aumenta, a energia recebida pelo sistema aumenta. Assim, quando a capacidade do sistema em distribuir essa energia é superada pelo montante recebido, o estado de quimera e o estado dessincronizado surgem, Figura 6.8 comparado à Figura 6.5. Este comportamento é observado próximo as frequências naturais de excitação, conforme mostrado através das curvas de amplitude de resposta, Figura 6.16 à Figura 6.18, onde o sistema naturalmente acumula mais energia. Com isso, devido à proximidade a ressonância ou a um salto dinâmico, há maior possibilidade da capacidade do sistema em distribuir a energia ser superada e o sistema desenvolva o estado quimera ou o dessincronizado. Naturalmente o sistema apenas estabiliza em um destes comportamentos, mediante uma assimetria inculcida através das condições iniciais, seção 5.2.

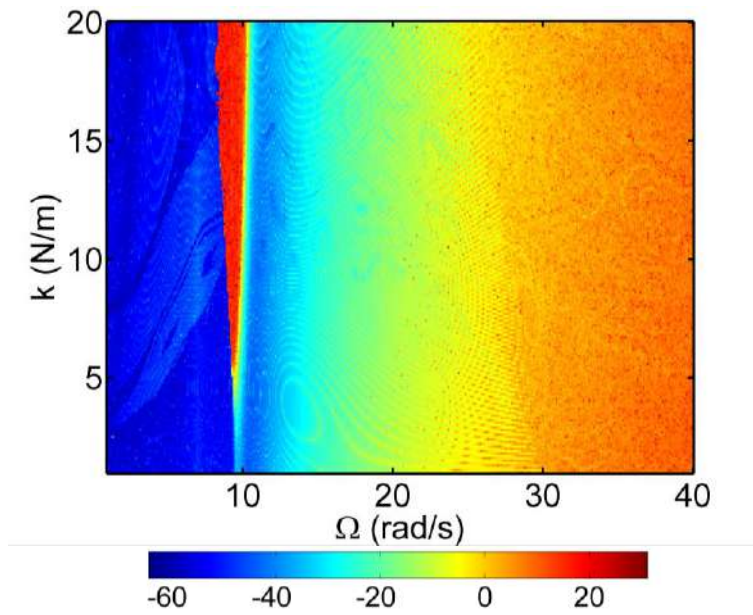


Figura 6.19. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para a amplitude de excitação de $u = 0,1$ m.

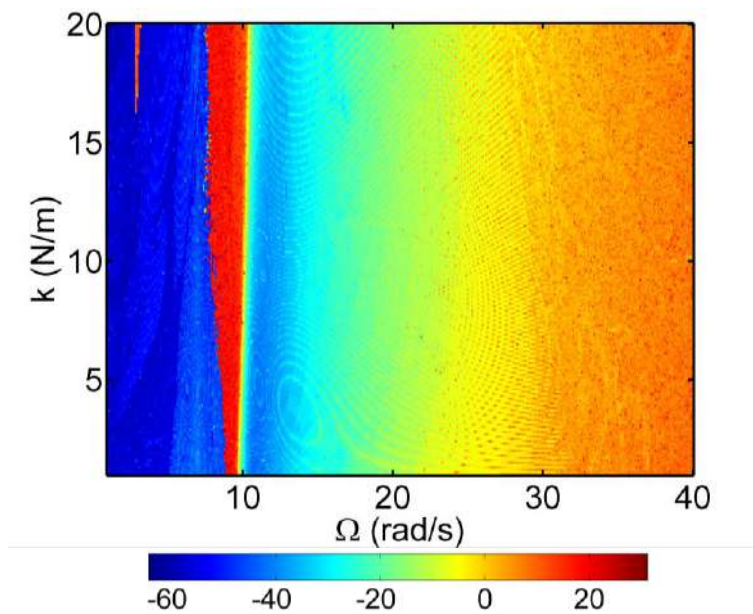


Figura 6.20. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para diferentes amplitudes de excitação para $u = 0,2$ m.

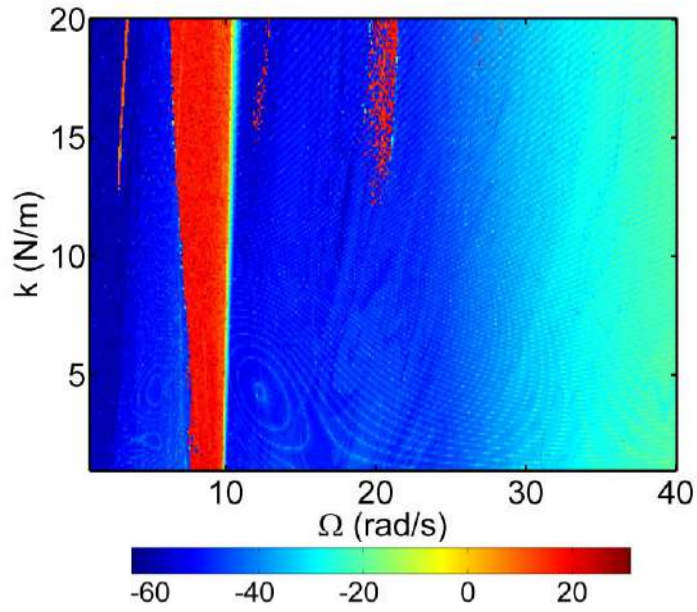


Figura 6.21. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para diferentes amplitudes de excitação para $u = 0,5$ m.

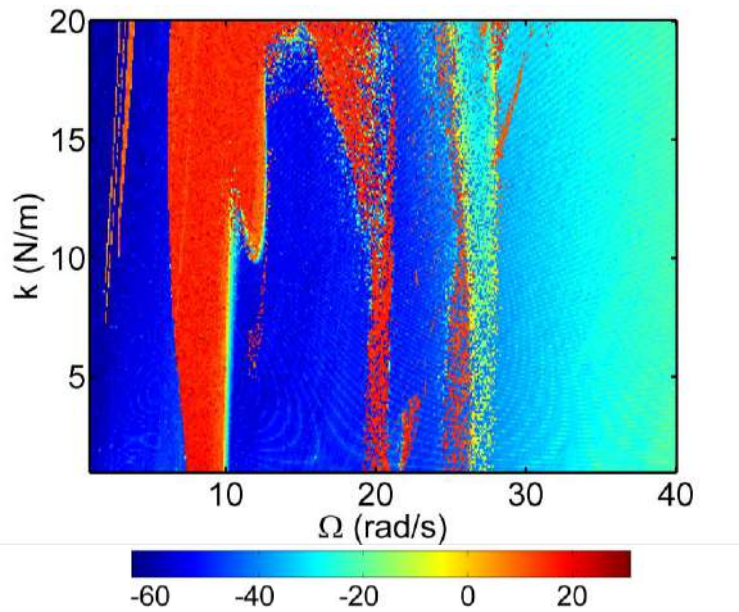


Figura 6.22. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para diferentes amplitudes de excitação para $u = 1$ m.

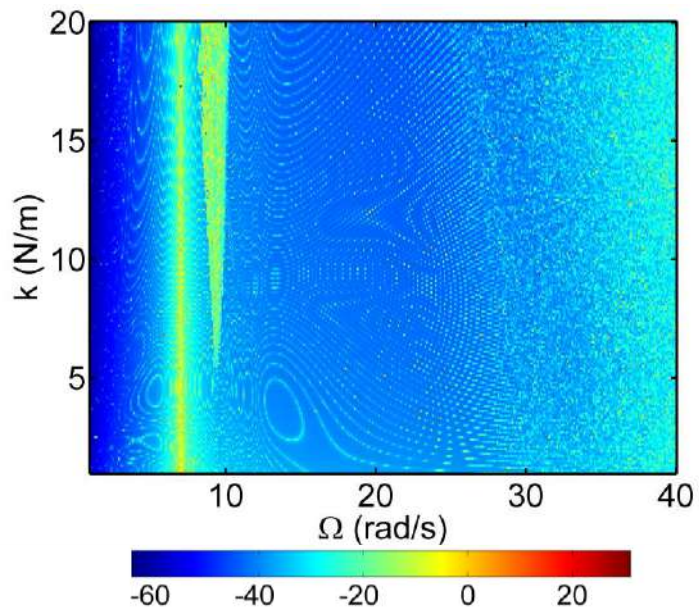


Figura 6.23. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos pêndulos para diferentes amplitudes de excitação para $u = 0,1$ m.

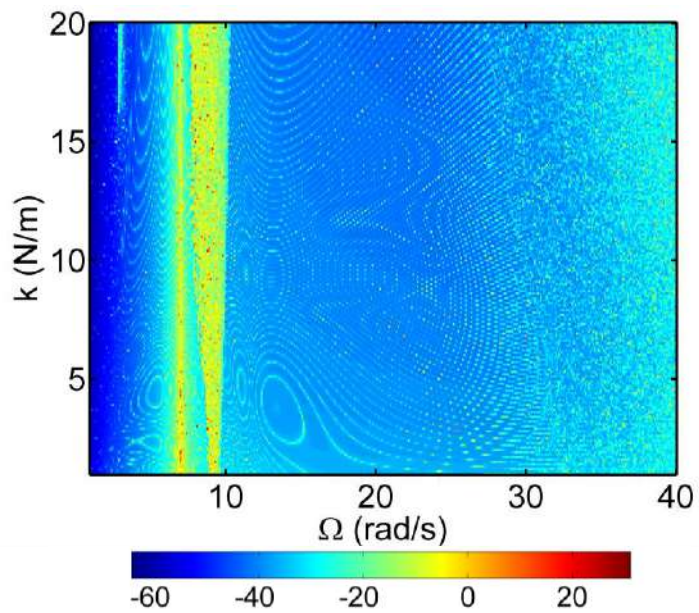


Figura 6.24. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos pêndulos para diferentes amplitudes de excitação para $u = 0,2$ m.

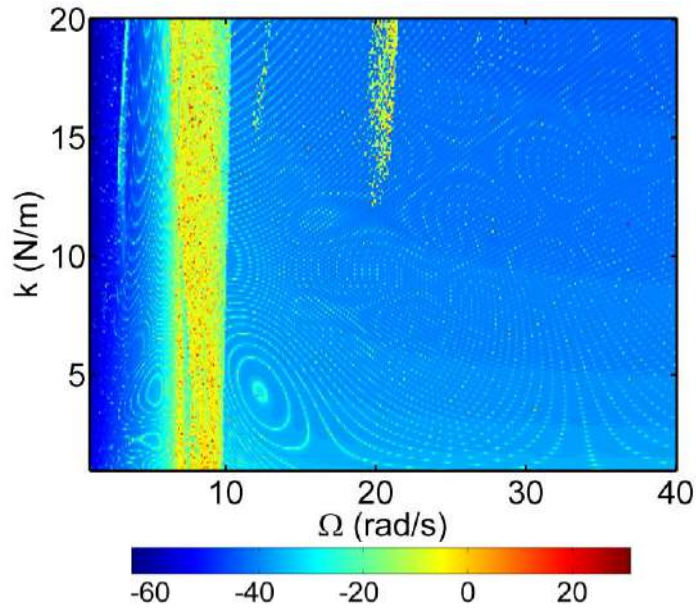


Figura 6.25. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos pêndulos para diferentes amplitudes de excitação para $u = 0,5$ m.

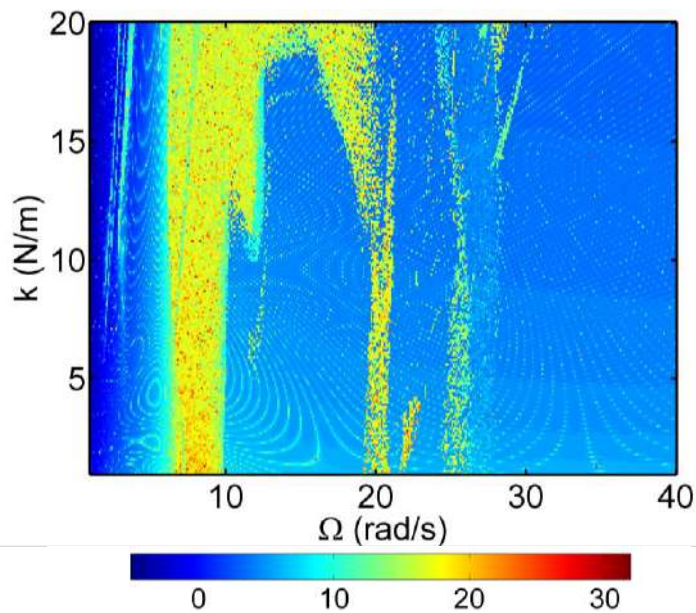


Figura 6.26. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos pêndulos para diferentes amplitudes de excitação para $u = 1$ m.

As Figura 6.19, Figura 6.20, Figura 6.21 e Figura 6.22 mostram o diagrama energético para os carros usando as definições apresentadas na equação (6-1) usando uma escala logarítmica, onde se observa que a energia com valores maiores se concentra na região assíncrona. As Figura 6.26, Figura 6.24, Figura 6.25 e Figura 6.26 mostram o mesmo diagrama energético considerando a abordagem dos pêndulos usando a definição da equação (6-2). A mesma tendência é verificada, no entanto, é notável que o nível de

energia é menor quando comparado com o caso dos carros. Também se observa que entorno de 7 rad/s há um nível de energia tão alto quanto a própria banda de quimera o qual não aparece no diagrama energético dos carros (Figura 6.19, Figura 6.20, Figura 6.21 e Figura 6.22). Este comportamento não é devido a região assíncrona, mas é consequência das frequências naturais dos pêndulos, como observa-se na Figura 6.15, em azul-claro.

Comparando a Figura 6.19 com a Figura 6.23 e considerando a região assíncrona exibida da Figura 6.1 à Figura 6.12, nota-se que o diagrama energético dos carros (Figura 6.19) representa melhor a separação entre os padrões dinâmicos.

A influência das condições iniciais é agora investigada considerando o diagrama de padrões no espaço das condições iniciais. A partir dos parâmetros $u = 0,2$ m, $\Omega = 7,7$ rad/s e $k_{1,2,3} = 10,8$ rad/s, a Figura 6.27-a apresenta um diagrama de padrões do conjunto dos pêndulos e a influência das condições iniciais na Figura 6.27-b. Assim, no diagrama energético, Figura 6.27-c, é mostrado no mesmo espaço mostrando a distinção entre os comportamentos síncronos e assíncronos. Novamente, o aumento do nível de energia é mais efetivo para gerar um comportamento assíncrono. Note que há mais comportamentos assíncronos associados a condições iniciais mais distantes da origem, as quais denotam maior energia inicial ao sistema.

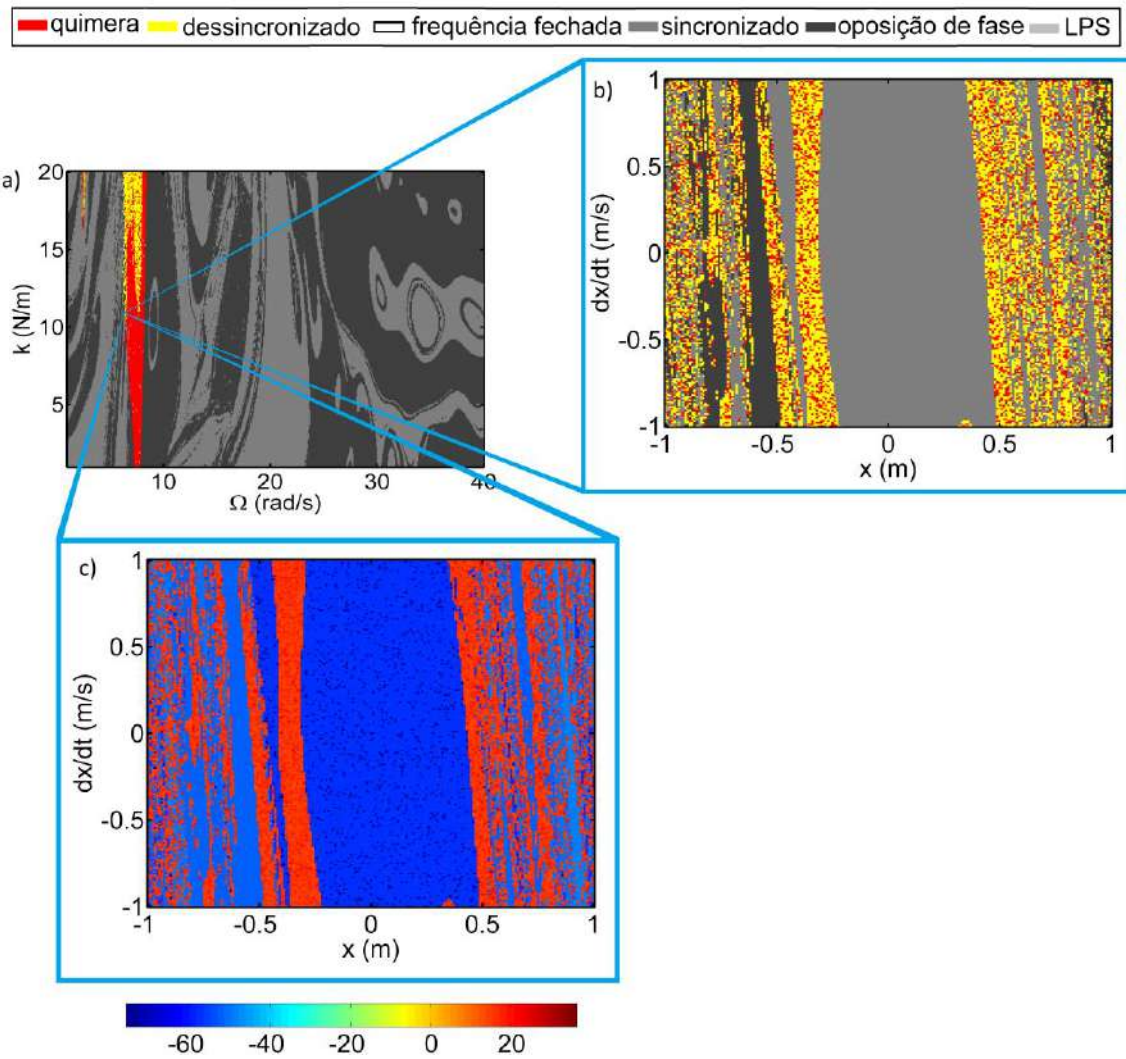


Figura 6.27. Diagrama de padrões analisando condições iniciais para os pêndulos com os parâmetros $u = 0,2$ m, $\Omega = 7,7$ rad/s e $k_{1,2,3} = 10,8$ N/m. a) Diagrama de padrões; b) bacia de atração dos padrões e c) diagrama energético para a bacia.

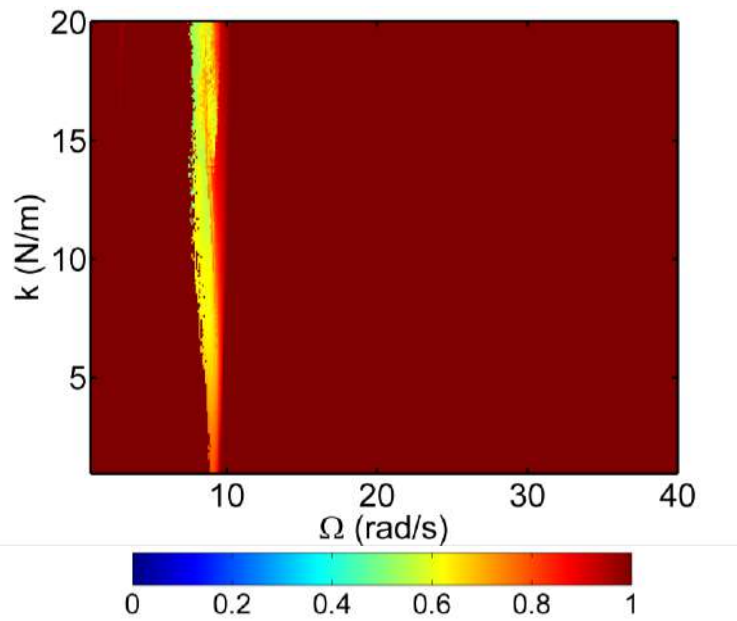


Figura 6.28. Parâmetro de Kuramoto para os carros com $u = 0,2$ m.

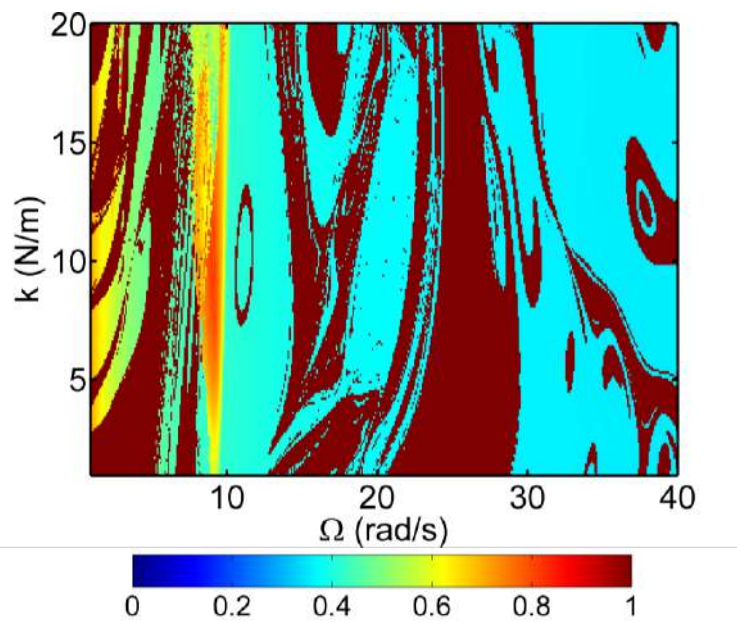


Figura 6.29. Parâmetro de Kuramoto para os pêndulos com $u = 0,2$ m.

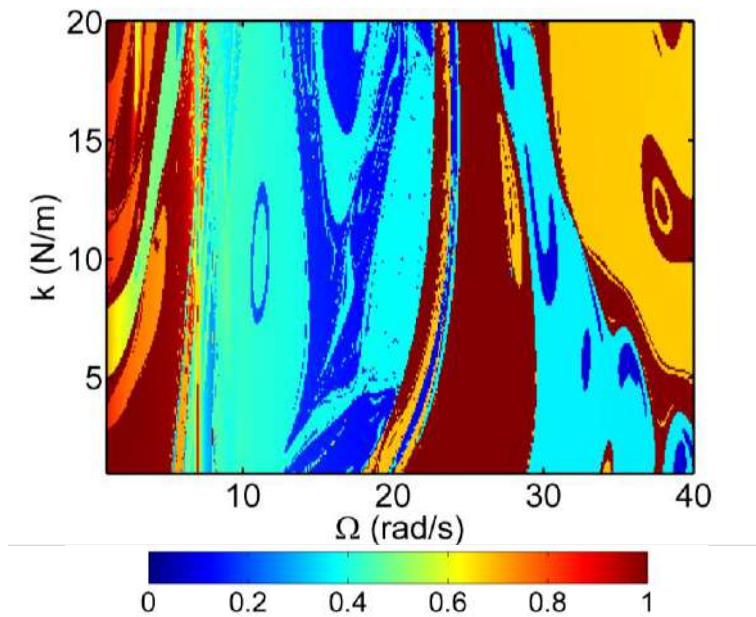


Figura 6.30. Parâmetro de Kuramoto para os carros e pêndulos com $u = 0,2$ m.

Por comparação entre os métodos as Figura 6.28, Figura 6.29 e Figura 6.30 são o resultado através do parâmetro de ordem de Kuramoto para classificação do domínio com $u = 0,2$ m. Através destes é possível afirmar que o parâmetro de ordem de Kuramoto é capaz de identificar o estado sincronizado. Porém, não distingue o estado dessincronizado de outros padrões de sincronização que não o sincronizado. Isto é devido a formulação do parâmetro de Kuramoto que foi modelado para um sistema ciclo-limite cuja principal forma de sincronização apresentada é a sincronização de fase, definindo graus de sincronia semelhantes para o estado de quimera e alguns padrões sincronizados. Deste modo, a Figura 6.28 e Figura 6.29 que comparam apenas osciladores de mesma classe conseguem fazer uma distinção mais clara que na Figura 6.30, onde todos os osciladores do sistema são considerados. A Figura 6.28 mostra uma estrutura similar a apresentada considerando o diagrama de padrões e o diagrama energético, diferenciando a região assíncrona. O mesmo ocorre para o conjunto dos pêndulos, Figura 6.29, onde uma complexa estrutura aparece fora da região assíncrona a qual mostra a estrutura entre o comportamento sincronizado e sincronizado em oposição de fase. A Figura 6.30 têm uma estrutura similar onde é possível identificar a estrutura entre os comportamentos exibida na Figura 6.29. Porém, mesmo que os osciladores estejam sincronizados, pela metodologia do parâmetro de ordem o valor obtido não é um, porque estes não apresentam a mesma órbita. Não sendo possível distinguir através do parâmetro de ordem um tipo de comportamento de outro.

Por estas considerações, deduz-se que o método proposto pelo fluxo de energia é capaz de capturar na essência o que distingue um comportamento sincronizado de um dessincronizado e do estado de quimera. Sendo assim, passível de uso como ferramenta de identificação e distinção entre o comportamento sincronizado e o não sincronizado. E pela sua própria formulação traz uma hipótese para a formação do estado de quimera.

7 ROBUSTEZ DOS PADRÕES DINÂMICOS

Neste capítulo é avaliado a robustez do sistema sob algumas abordagens. Primeiramente se adiciona um termo aleatório ao forçamento para definir como os padrões de comportamento do sistema reagem. Em seguida é repetida esta abordagem com os elementos dissipadores do sistema. Finalmente, é analisado como os padrões de comportamento respondem a uma desestabilização em um dado instante de tempo do regime permanente.

7.1 ROBUSTEZ EM RELAÇÃO AO FORÇAMENTO

De modo a entender a robustez a aleatoriedade no forçamento, foi considerado três aproximações: a frequência de excitação com uma distribuição normal, $\tilde{\Omega}$; a amplitude de excitação com uma distribuição normal, \tilde{u} ; e por fim um ruído adicionado à excitação harmônica, \tilde{r} .

7.1.1 FREQUÊNCIA DE EXCITAÇÃO COM DISTRIBUIÇÃO NORMAL

De forma a mensurar a influência da aleatoriedade sobre o comportamento coletivo do sistema, considera-se que a excitação de base que atua sobre o sistema, $u_b = u \sin(\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}, \sigma, t)t)$, onde a frequência com uma distribuição normal é definida por $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}, \sigma, t)$ para cada instante de tempo. A Figura 7.1 foi obtida pela soma da energia potencial do conjunto dos carros, a qual é a soma dos denominadores da equação (6-1). Então, esta construção resulta no montante de energia que o sistema recebe da excitação de base. Devido ao aumento do desvio padrão do sistema, a energia próxima ao pico de ressonância é reduzida. Isto é consequência de uma larga banda de frequências na excitação. Desta forma, quanto maior o desvio padrão, menor é a energia concentrada na frequência de ressonância e conseqüentemente menor o pico, Figura 7.1.

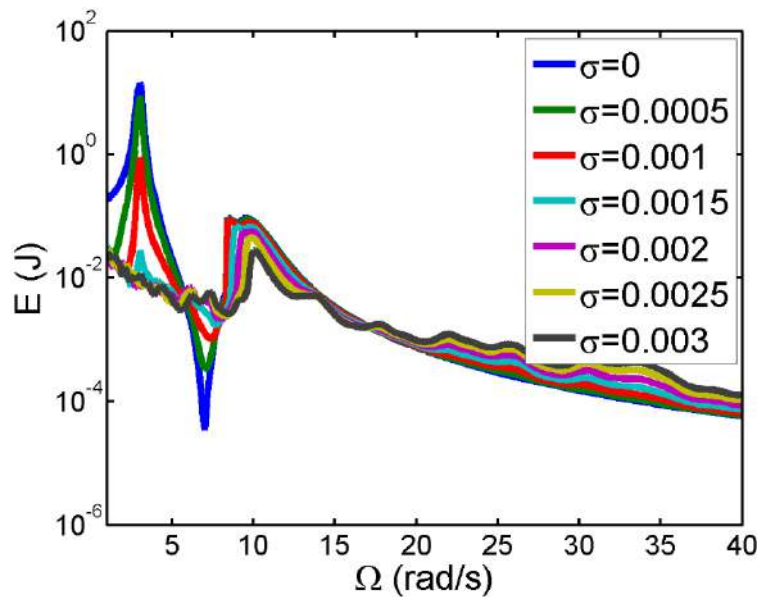
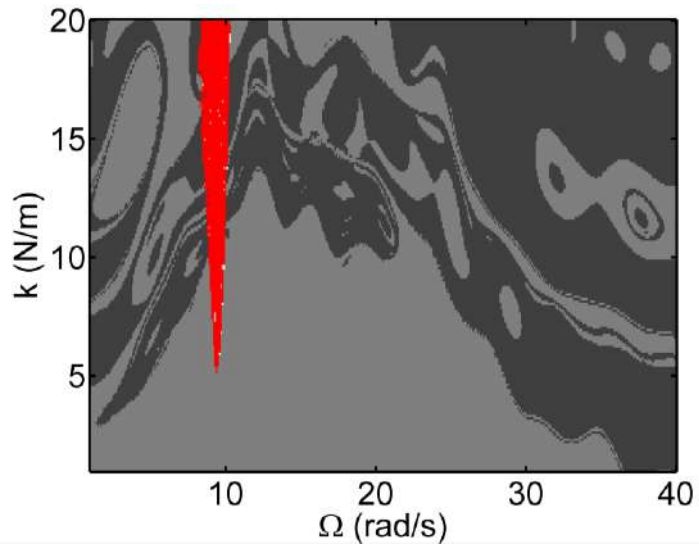


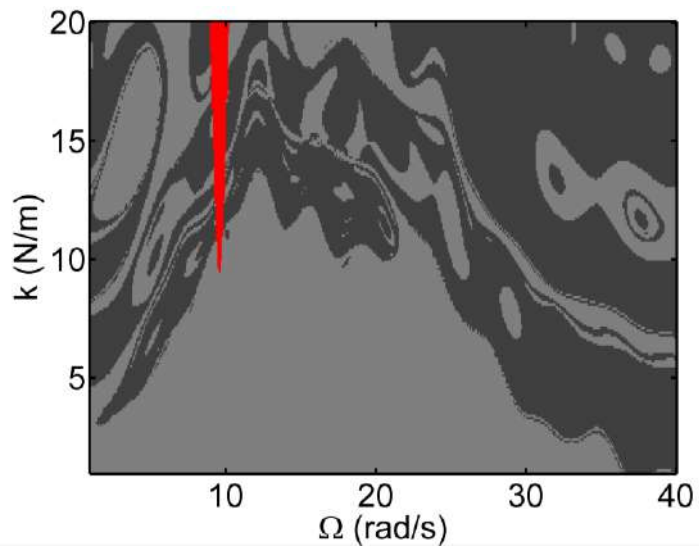
Figura 7.1. Nível de energia recebida pelo sistema para diferentes desvios padrão pela frequência de excitação.

A Figura 7.2, Figura 7.3, Figura 7.4 e Figura 7.5 mostram o diagrama de padrões para o sistema considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação. A Figura 7.2 é a resposta do sistema sem este efeito aleatório, o mesmo resultado apresentado na Figura 6.5. Nesta figura é mostrada uma alternância entre os comportamentos sincronizados e sincronizado em oposição de fase e a banda assíncrona em torno de 10 rad/s (CARVALHO; SAVI, 2020), devido a presença do comportamento de quimera e dessincronizado nesta região. No entanto, comparando a Figura 7.3 à Figura 7.2 se observa uma redução da área da região assíncrona pela presença de um desvio padrão de $\sigma = 0,02$, enquanto a bacia entre os estados sincronizado e sincronizado em oposição de fase permanece a mesma. Aumentando o desvio padrão para $\sigma = 0,03$, Figura 7.4, há uma redução ainda maior da banda assíncrona e com $\sigma = 0,1$, Figura 7.5, não há mais a presença destes comportamentos assíncronos. Isto ocorre pela razão apresentada na Figura 7.1, a aleatoriedade distribui a energia em uma banda que é proporcional ao desvio padrão. Assim, o aumento do desvio padrão reduz a energia fornecida ao sistema de modo que não há energia suficiente para estimular os comportamentos de quebra de simetria, isto é, não se forma o comportamento de quimera e dessincronizado.



quimera dessincronizado frequência fechada sincronizado oposição de fase LPS

Figura 7.2. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação com $\sigma = 0$.



quimera dessincronizado frequência fechada sincronizado oposição de fase LPS

Figura 7.3. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação com $\sigma = 0,02$.

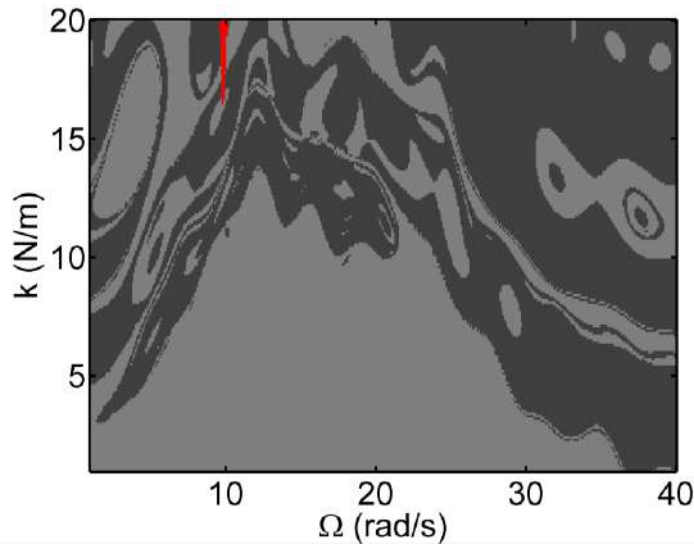


Figura 7.4. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação com $\sigma = 0,03$.

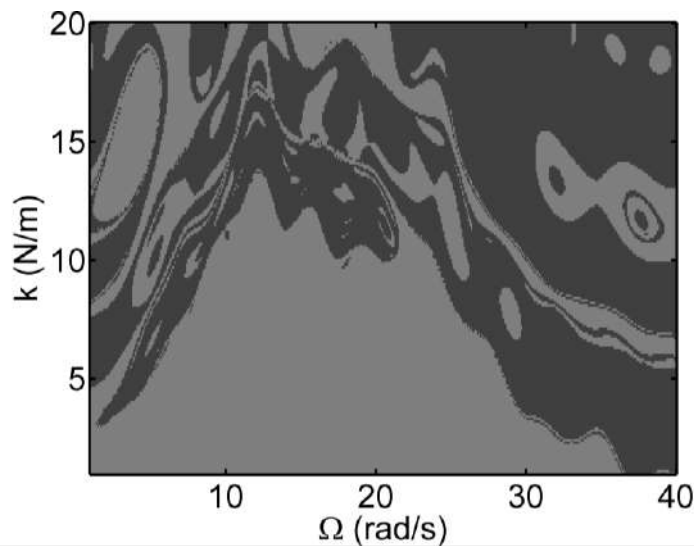


Figura 7.5. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação com $\sigma = 0,1$.

Analisando os resultados anteriores pelo ponto de vista da energia, definido na equação (6-1), se obtém as repostas apresentadas na Figura 7.6, Figura 7.7, Figura 7.8 e Figura 7.9. Sem o termo aleatório, Figura 7.6, o diagrama de energia mostra um alto nível do fluxo de energia para a região assíncrona e um baixo para os estados sincronizados (CARVALHO; SAVI, 2020). O aumento do desvio padrão reduz a área da região assíncrona, Figura 7.2 à Figura 7.5, e conseqüentemente a energia deste domínio

apresenta a mesma correlação, isto é, reduzindo a energia até que a resposta de alta energia desapareça, Figura 7.7, Figura 7.8 e Figura 7.9. Durante este processo a diferença de energia entre o comportamento sincronizado e sincronizado em oposição de fase torna-se distinguível no segundo plano devido a pequena diferença de energia destes dois comportamentos. É notável que a área em torno de 30 para 40 rad/s têm um nível de energia maior e este nível reduz com o aumento do desvio padrão. Isto é consequência do ganho de energia que aparece neste intervalo na Figura 7.1, o qual é a soma do denominador da equação (6-1). Então, com o aumento deste denominador o resultado do fluxo de energia apresenta uma razão inferior quando comparado ao caso sem aleatoriedade, Figura 7.7.

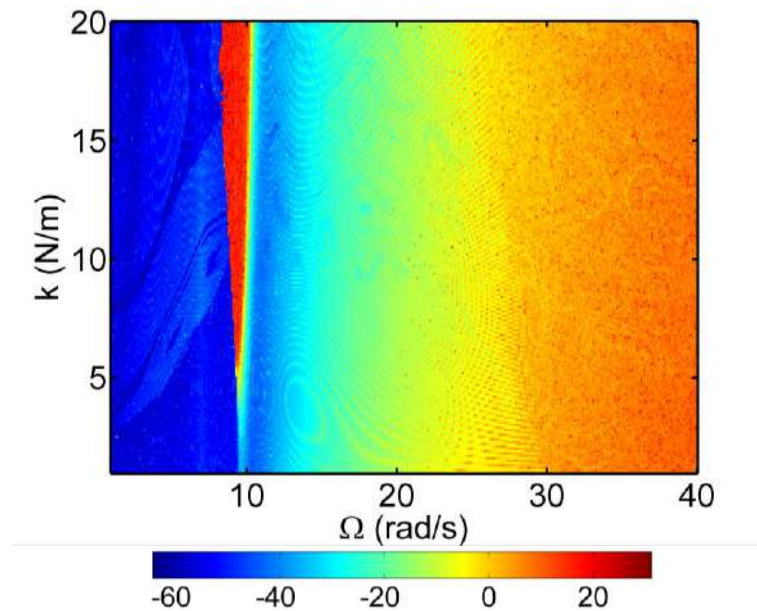


Figura 7.6. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação para $\sigma = 0$.

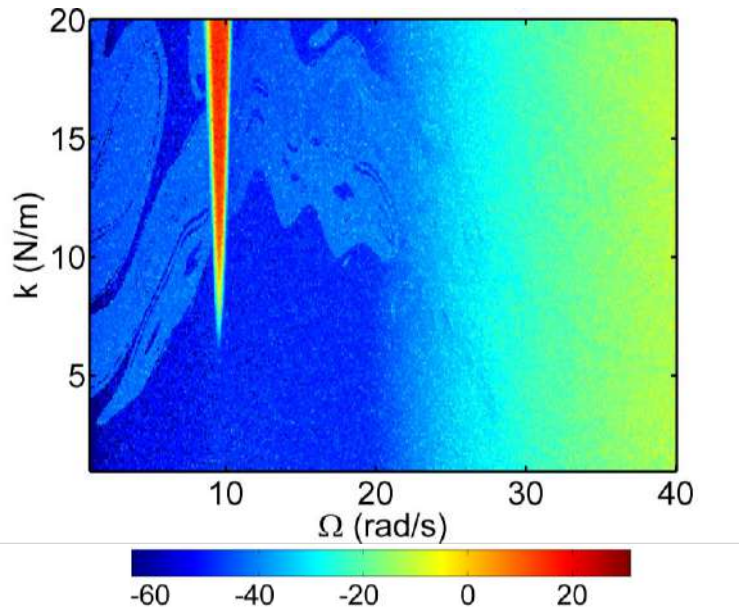


Figura 7.7. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação para $\sigma = 0,02$.

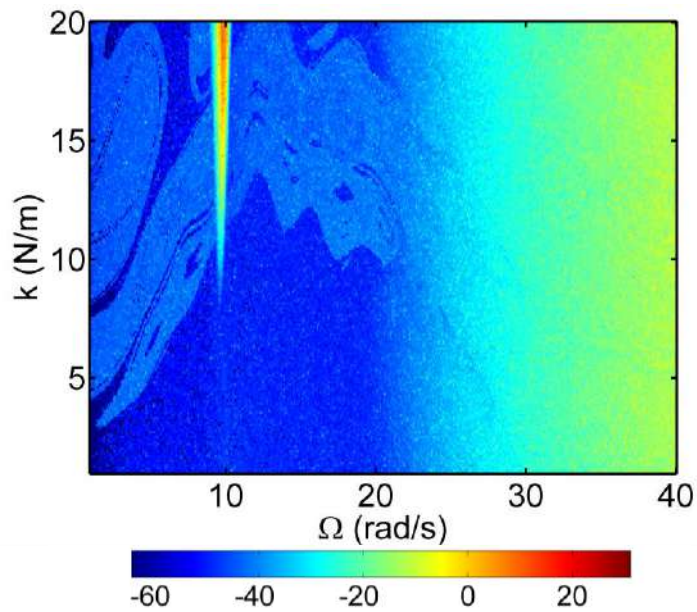


Figura 7.8. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação para $\sigma = 0,03$.

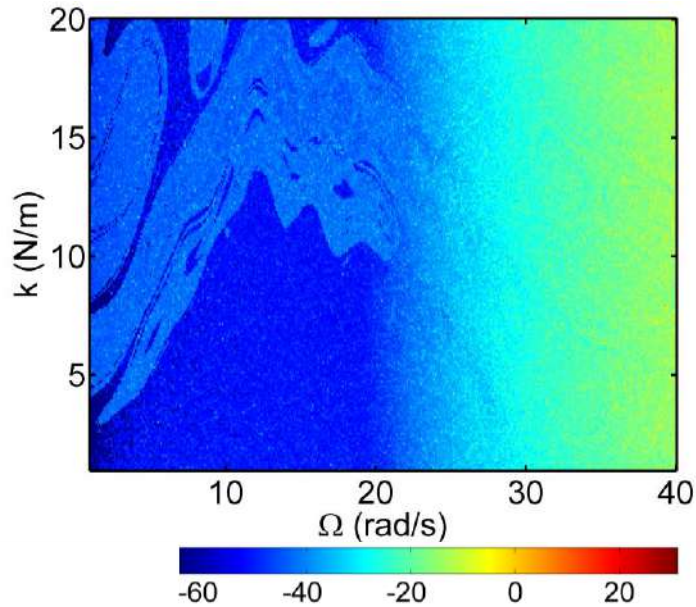


Figura 7.9. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na frequência de excitação para $\sigma = 0,1$.

7.1.2 AMPLITUDE DE EXCITAÇÃO COM DISTRIBUIÇÃO NORMAL

A influência da aleatoriedade sobre os padrões do sistema foi considerada por uma excitação de base da forma $u_b = \tilde{u}(\bar{u}, \sigma, t) \sin(\Omega t)$, onde $\tilde{u} = \tilde{u}(\bar{u}, \sigma, t)$ é a amplitude de excitação com uma distribuição normal para cada instante de tempo. Desta forma, seguindo o mesmo processo descrito na Figura 7.1, no entanto aplicando o termo aleatório na amplitude de excitação ao invés da frequência. O resultado é apresentado na Figura 7.10, onde a influência oposta é observada, com o aumento do total de energia do sistema com o desvio padrão. A adição do termo aleatório da amplitude de excitação é equivalente à acrescentar mais excitação ao sistema, como mostrado na Figura 7.10.

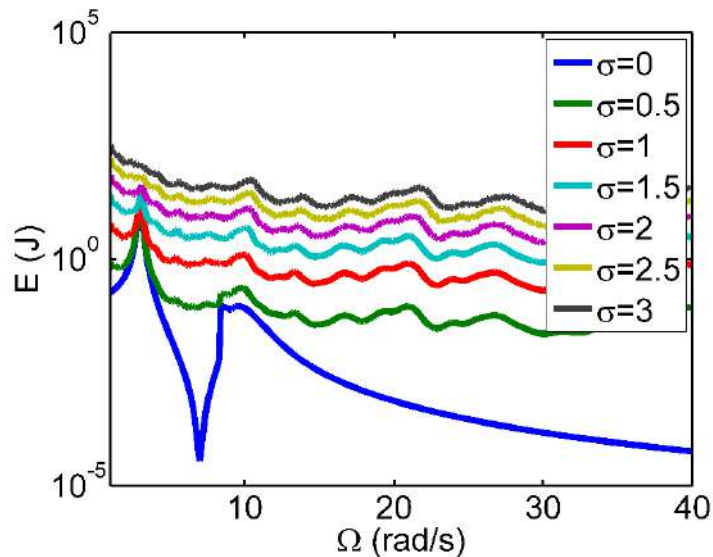


Figura 7.10. Nível de energia recebido pelo sistema para diferentes desvios padrão na amplitude de excitação.

A aleatoriedade sobre a amplitude é apresentada nas Figura 7.11 à Figura 7.14, onde pode-se observar a gradual difusão da bacia entre os comportamentos sincronizados e sincronizados em oposição de fase. Esta difusão aumenta com a desvio padrão, Figura 7.12, Figura 7.13 e Figura 7.14, homogeneizando a bacia fractal entre sincronizado e sincronizado em oposição de fase. E simultaneamente há um aumento das áreas de comportamento assíncrono.

Os diagramas de energia foram obtidos, Figura 7.15, Figura 7.16, Figura 7.17 e Figura 7.18, para analisar o efeito da amplitude de excitação. Há uma diferença no fluxo de energia da Figura 7.15 até a Figura 7.18, onde é observado uma redução da energia de fundo para valores superiores à 30 rad/s da frequência de excitação. Esta é consequência de um nível alto de energia para o intervalo como mostrado na curva de energia da Figura 7.10, o qual considerando a equação (6-1) é dada pela soma dos denominadores. Assim, o alto nível de energia nesta área torna a transição mais suave e consequentemente a difusão entre o comportamento sincronizado e sincronizado em oposição de fase mais claro quando comparado com os diagramas de energia da aleatoriedade na frequência. E também a separação entre os comportamentos síncronos e assíncronos ficam mais evidentes.

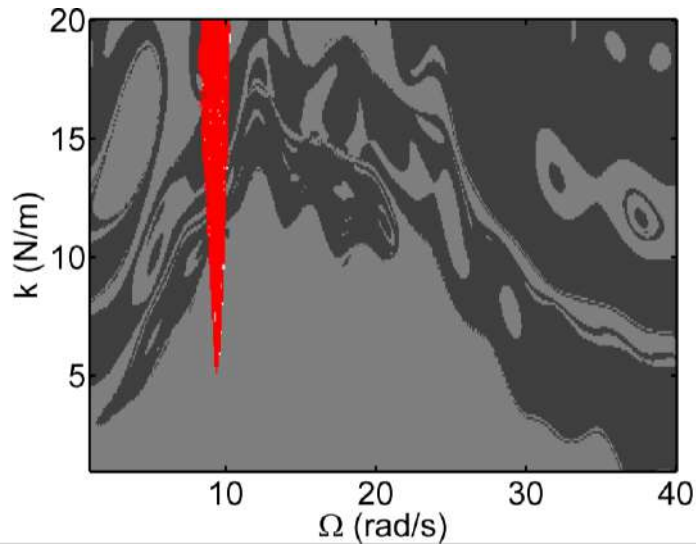


Figura 7.11. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 0$.

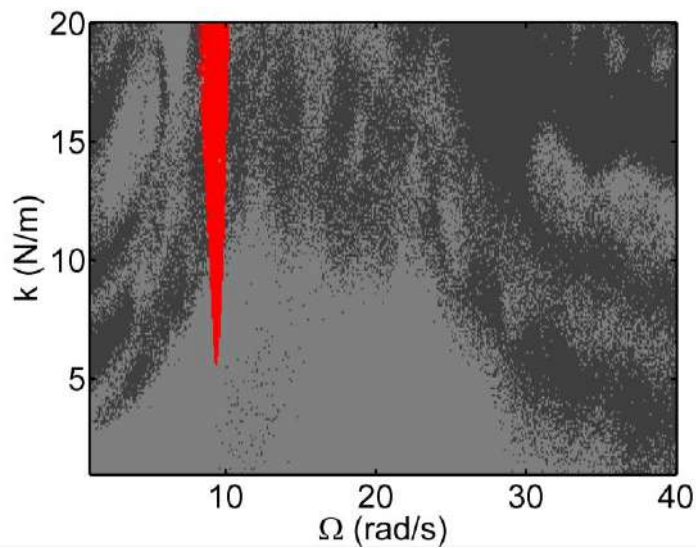
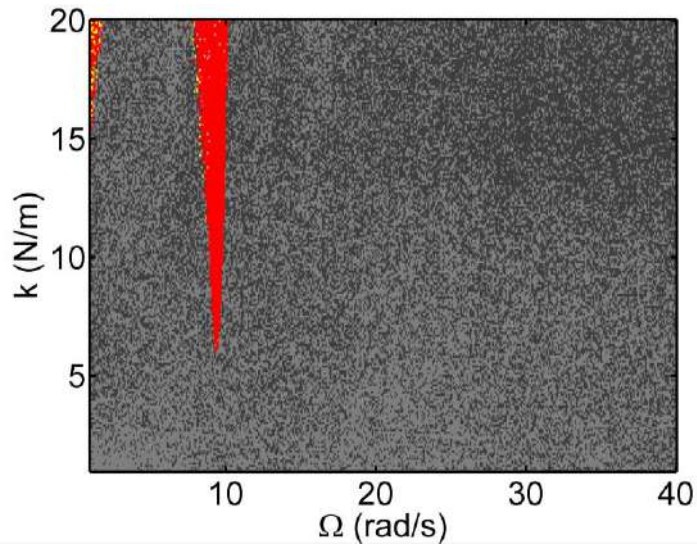
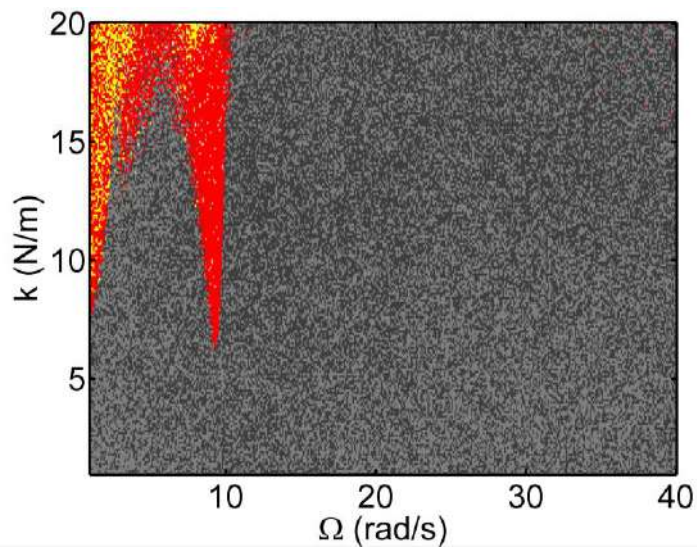


Figura 7.12. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 0,1$.



■ quimera
 ■ dessincronizado
 □ frequência fechada
 ■ sincronizado
 ■ oposição de fase
 ■ LPS

Figura 7.13. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 1$.



■ quimera
 ■ dessincronizado
 □ frequência fechada
 ■ sincronizado
 ■ oposição de fase
 ■ LPS

Figura 7.14. Diagrama de padrões considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 2$.

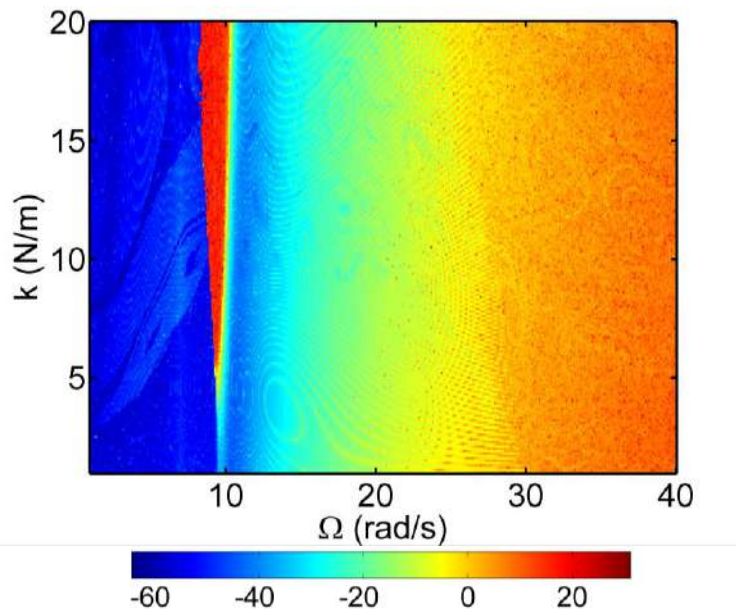


Figura 7.15. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 0$.

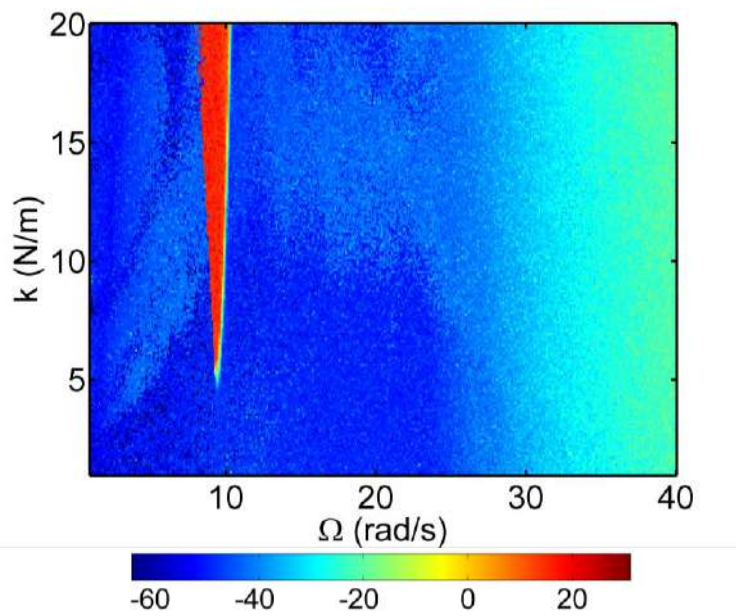


Figura 7.16. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 0,1$.

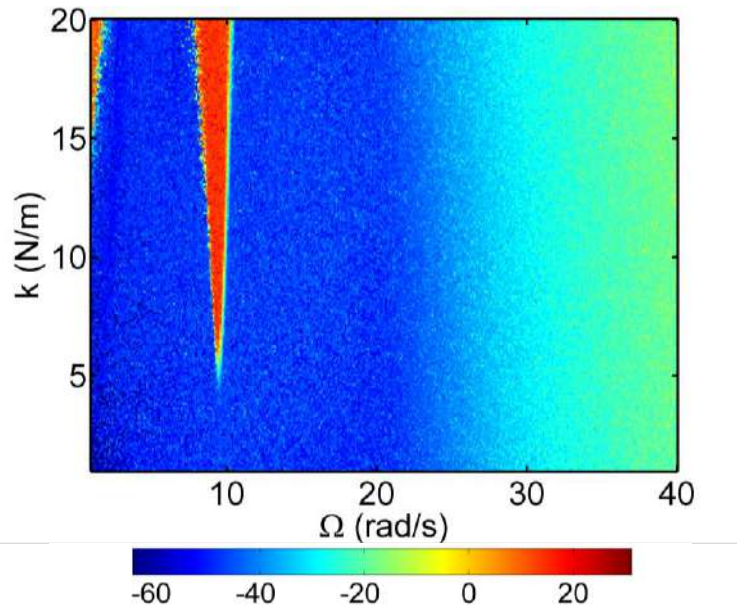


Figura 7.17. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 1$.

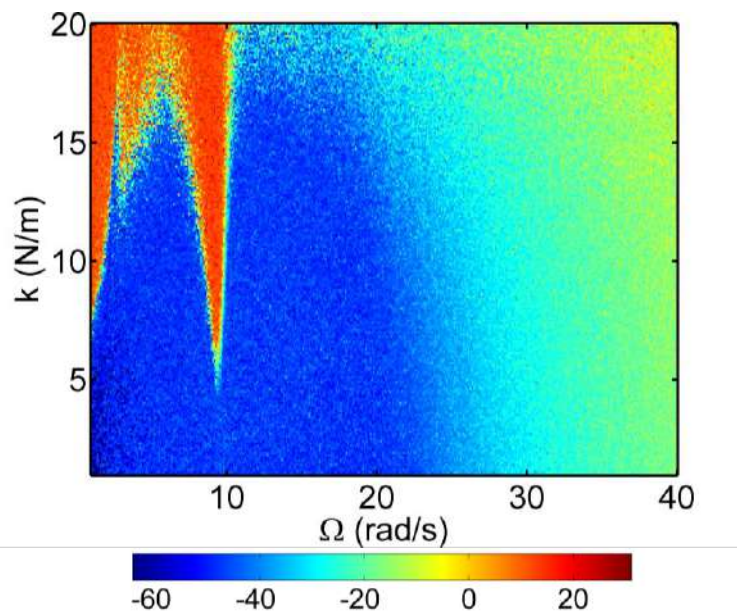


Figura 7.18. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório na amplitude de excitação para $\sigma = 2$.

7.1.3 RUÍDO ADICIONADO À EXCITAÇÃO HARMÔNICA

Considerando a influência do ruído sobre os padrões do sistema foi adotado uma excitação de base na forma $u_b = u \sin(\Omega t) + \tilde{r}(0, \sigma, t)$, onde \tilde{r} é o ruído que depende da distribuição normal e é alterado a cada instante de tempo. Analisando a resposta do sistema pela adição do ruído à excitação harmônica, os resultados são similares quando

comparados ao caso da amplitude com uma distribuição normal. No entanto, com uma escala menor, visto que a distribuição é adicionada ao termo harmônico e não diretamente na amplitude. Neste caso, as frequências maiores que 30 rad/s apresentam um nível de energia que aumenta proporcionalmente ao desvio padrão, Figura 7.19. Porém, no pico de ressonância a diferença não é significativa, pois o montante de energia acumulado na ressonância é menor quando proporcionado pela adição do ruído.

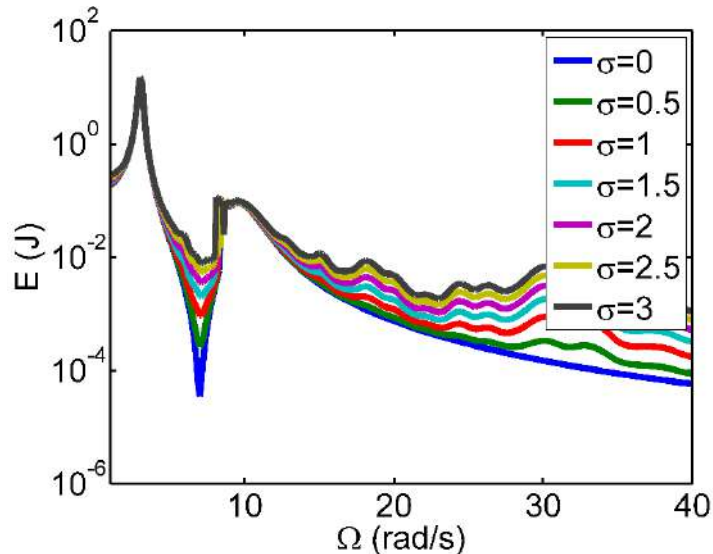
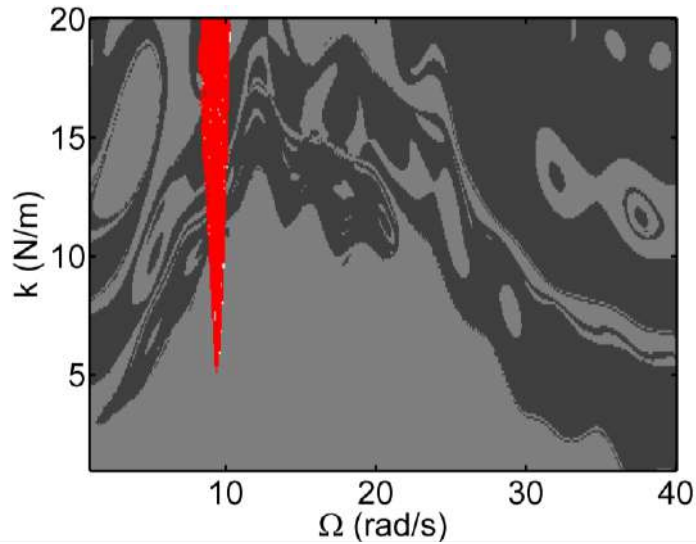


Figura 7.19. Nível de energia recebida pelo sistema em diferentes intensidades de ruído.

Nas Figura 7.20, Figura 7.21, Figura 7.22 e Figura 7.23 o diagrama de padrões mostra uma transição do caso sem ruído para o caso com desvio padrão de três. Como descrito para a Figura 7.19, próximo a ressonância a influência do ruído é insignificante, o que é expresso pela região assíncrona na qual nenhuma diferença aparece de um caso para outro. No entanto, a estrutura entre o comportamento sincronizado e sincronizado em oposição de fase sofre uma lenta degradação com o aumento do desvio padrão. Similar com o caso no qual a aleatoriedade é inclusa a amplitude de excitação. Apesar da construção ser distinta os resultados da Figura 7.12 são muito parecidos aos da Figura 7.22.

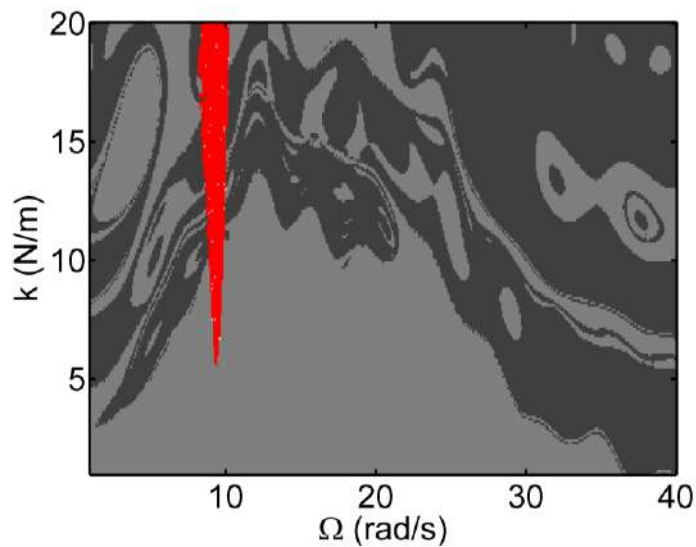
Além disso, observando a Figura 7.20 e Figura 7.21 não há mudanças além de uns poucos pontos de comportamento de frequência fechada. Porém, quando se compara estes dois resultados pelo diagrama de energia a distinção destes é evidente. Na Figura 7.25 é mostrado a estrutura entre o comportamento sincronizado e sincronizado em oposição de fase, enquanto na Figura 7.24 este não é aparente. Essa distinção é devido a maior razão de energia para valores superiores à 30 rad/s, Figura 7.19, o que torna a visualização mais

fácil para um maior ruído. Além desta característica, observando a transição das Figura 7.24, Figura 7.25, Figura 7.26 e Figura 7.27 outro aspecto notável é a degradação da estrutura fractal dos comportamentos síncronos.



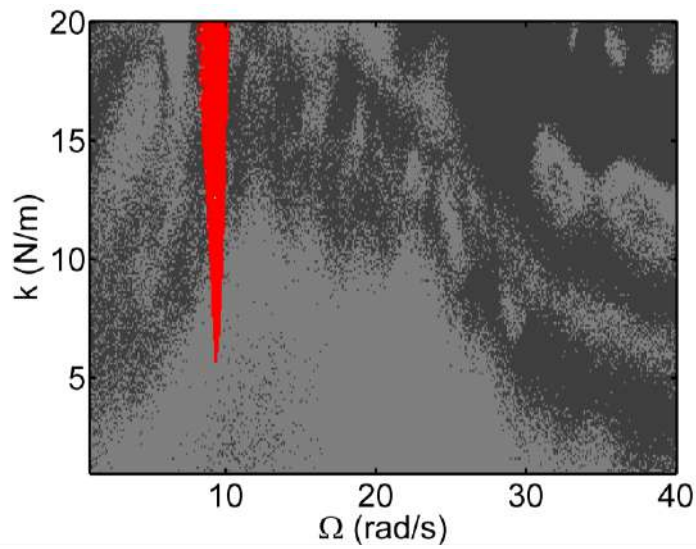
— quimera — dessincronizado — frequência fechada — sincronizado — oposição de fase — LPS

Figura 7.20. Diagrama de padrões considerando a influência do ruído para $\sigma = 0$.



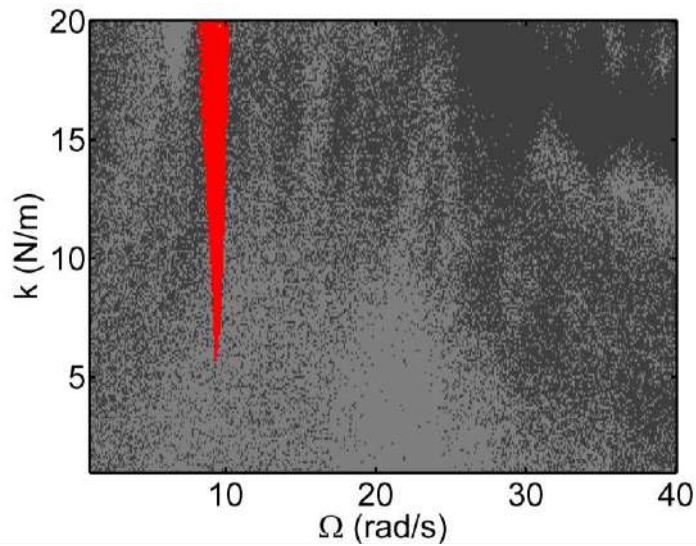
— quimera — dessincronizado — frequência fechada — sincronizado — oposição de fase — LPS

Figura 7.21. Diagrama de padrões considerando a influência do ruído para $\sigma = 0,01$.



■ quimera
 ■ dessincronizado
 frequência fechada
 sincronizado
 oposição de fase
 LPS

Figura 7.22. Diagrama de padrões considerando a influência do ruído para $\sigma = 1$.



■ quimera
 ■ dessincronizado
 frequência fechada
 sincronizado
 oposição de fase
 LPS

Figura 7.23. Diagrama de padrões considerando a influência do ruído para $\sigma = 3$.

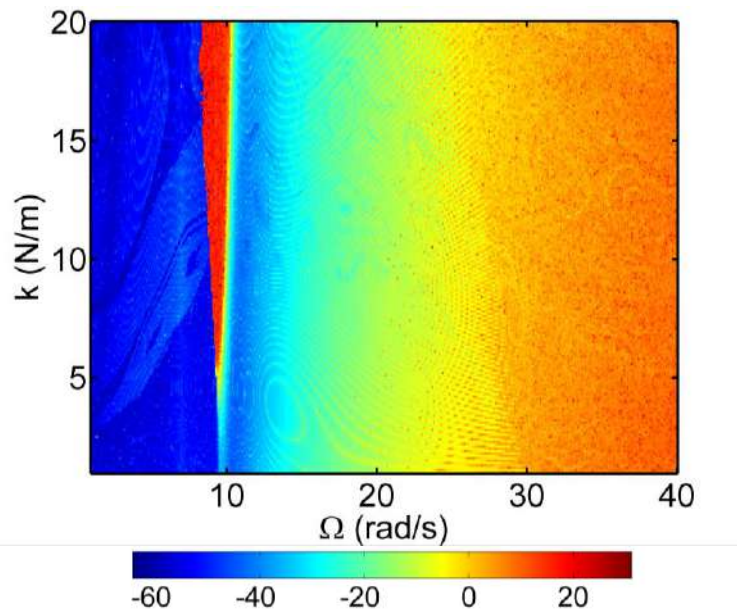


Figura 7.24. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório com ruído para $\sigma = 0$.

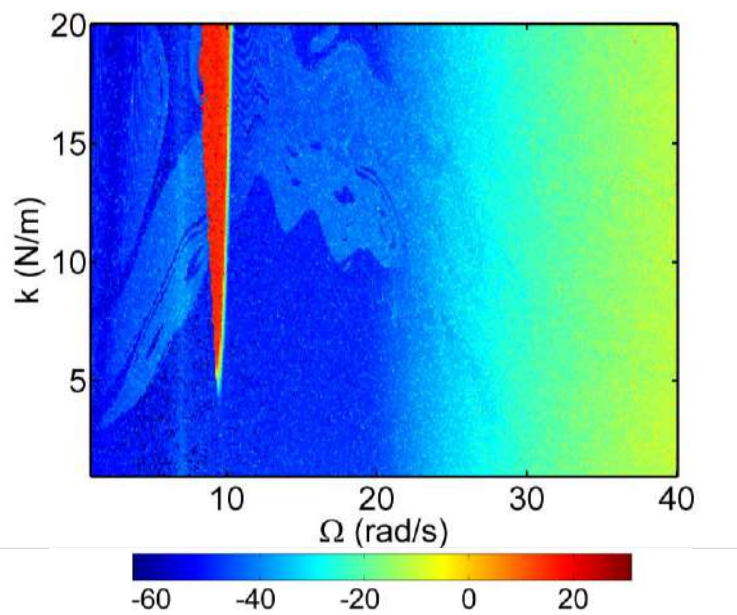


Figura 7.25. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório com ruído para $\sigma = 0,01$.

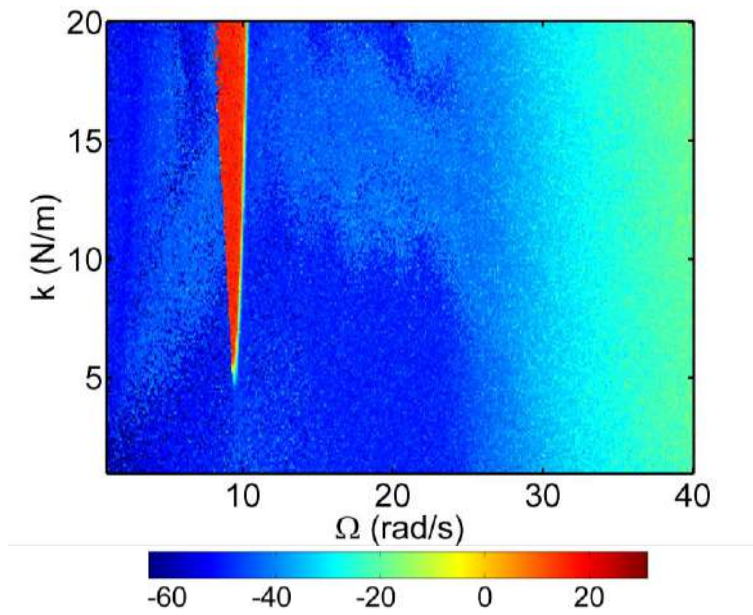


Figura 7.26. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório com ruído para $\sigma = 2$.

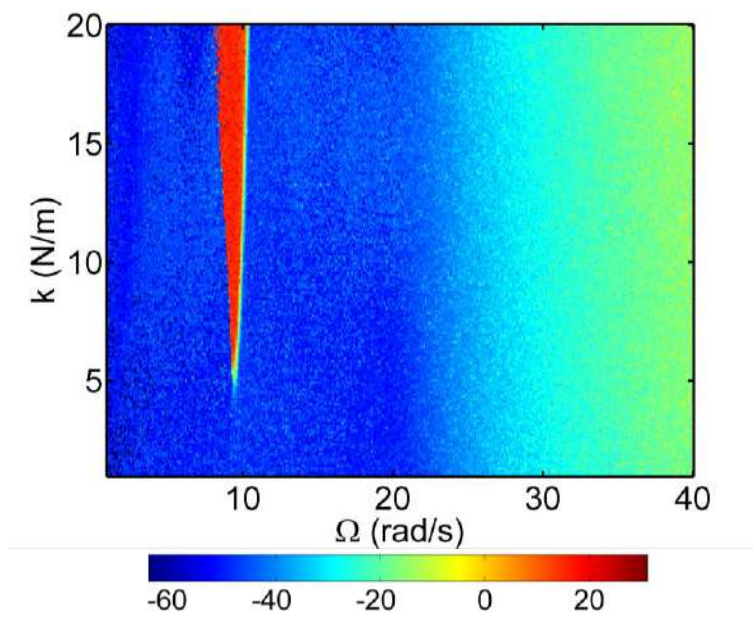
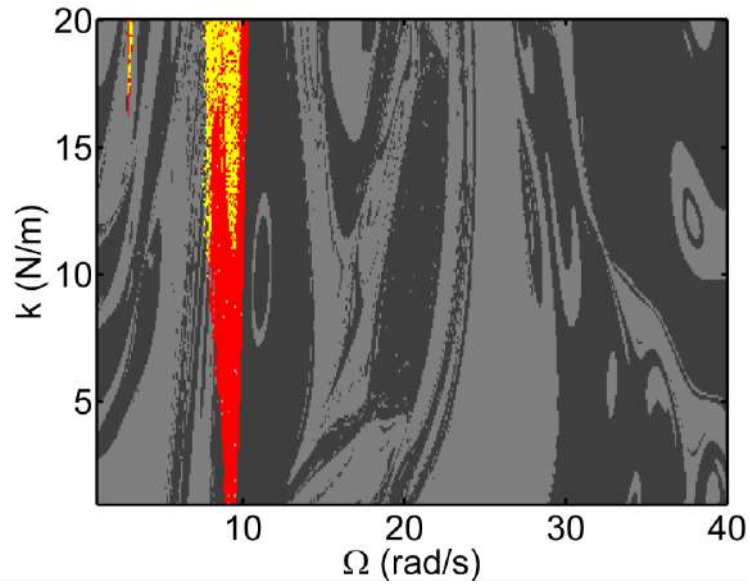


Figura 7.27. Fluxo de energia em escala logarítmica considerando a influência do termo aleatório com ruído para $\sigma = 3$.

7.2 ROBUSTEZ DOS PADRÕES DINÂMICOS EM RELAÇÃO AO AMORTECIMENTO

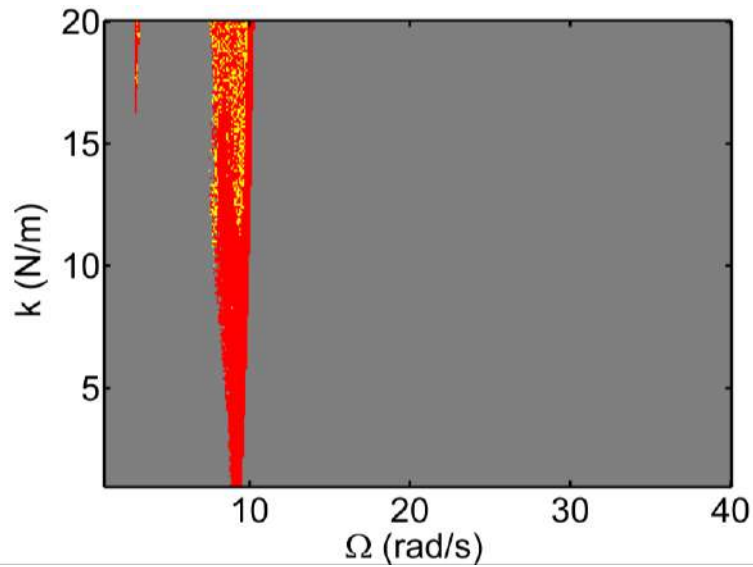
A influência da dissipação sobre a robustez é agora avaliada na formação dos padrões considerando um parâmetro de dissipação aleatório. Esta análise fornece uma compreensão sobre a robustez dos fenômenos de sincronização. Adota-se que $u = 0,2$ m e dissipação aleatória conectando os carros, considerando uma distribuição normal em torno do amortecimento médio $\tilde{C}_{1,2,3,5,7,9} = \tilde{C}_{1,2,3,5,7,9}(\bar{C}_{1,2,3,5,7,9}, \sigma, t)$, onde o valor médio nominal é $\bar{C}_{1,2,3,5,7,9} = 0,56$ N. s/m e o valor $\tilde{C}_{1,2,3,5,7,9}$ é alterado a cada instante de tempo. Os valores aleatórios são considerados sempre positivos e, portanto, todos os valores negativos aleatoriamente gerados são igualados à zero. As Figura 7.28, Figura 7.29 e Figura 7.30 apresentam os diagramas de padrão para diferentes desvios-padrão. A Figura 7.28 mostra uma situação sem efeitos aleatórios, $\sigma = 0$. A Figura 7.29 considera $\sigma = 0,1$ que causa a supressão do comportamento de oposição de fase e a região assíncrona aumenta a largura de banda próxima à rigidez de 20 N/m. As mesmas características são observadas considerando $\sigma = 1$, Figura 7.30. Deve-se ressaltar que o aumento da aleatoriedade acarreta a supressão do comportamento de oposição de fase e a redução da proporção de comportamento dessincronizado dentro da região assíncrona. Sendo estas características atribuídas a mudança do amortecimento ao longo do tempo.

Desta forma, a fim de se ter uma melhor compreensão da influência da dissipação, os casos limites da variação aleatória são analisados a seguir de $C = 0$ a $C = 4,48$ N. s/m. Considere como referência o gráfico apresentado na Figura 7.34, isto é, que possui o mesmo amortecimento dos resultados das seções anteriores.



■ quimera
 ■ dessincronizado
 □ frequência fechada
 ■ sincronizado
 ■ oposição de fase
 ■ LPS

Figura 7.28. Diagramas de padrão para amplitude de excitação de $u = 0,2 \text{ m}$ e dissipação de $\tilde{C}_{1,2,3,5,7,9} = \tilde{C}_{1,2,3,5,7,9}(\bar{C}_{1,2,3,5,7,9}, \sigma, t)$ com $\bar{C}_{1,2,3,5,7,9} = 0,56 \text{ N.s/m}$ e $\sigma = 0$.



■ quimera
 ■ dessincronizado
 □ frequência fechada
 ■ sincronizado
 ■ oposição de fase
 ■ LPS

Figura 7.29. Diagramas de padrão para amplitude de excitação de $u = 0,2 \text{ m}$ e dissipação de $\tilde{C}_{1,2,3,5,7,9} = \tilde{C}_{1,2,3,5,7,9}(\bar{C}_{1,2,3,5,7,9}, \sigma, t)$ com $\bar{C}_{1,2,3,5,7,9} = 0,56 \text{ N.s/m}$ e $\sigma = 0,1$.

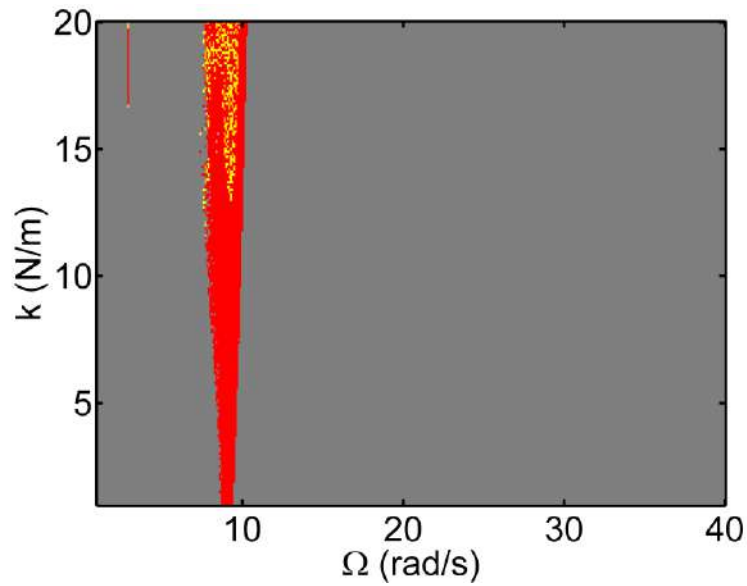
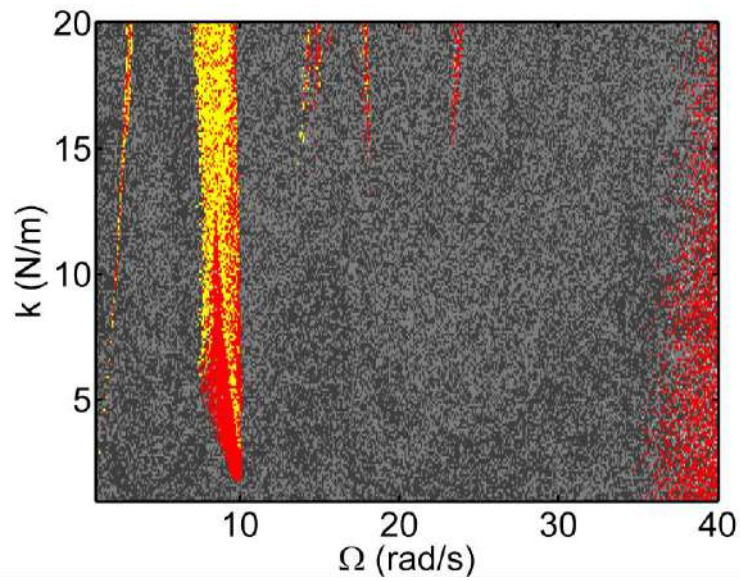


Figura 7.30. Diagramas de padrão para amplitude de excitação de $u = 0,2$ m e dissipação de $\tilde{C}_{1,2,3,5,7,9} = \tilde{C}_{1,2,3,5,7,9}(\bar{C}_{1,2,3,5,7,9}, \sigma, t)$ com $\bar{C}_{1,2,3,5,7,9} = 0,56$ N.s/m e $\sigma = 1$.

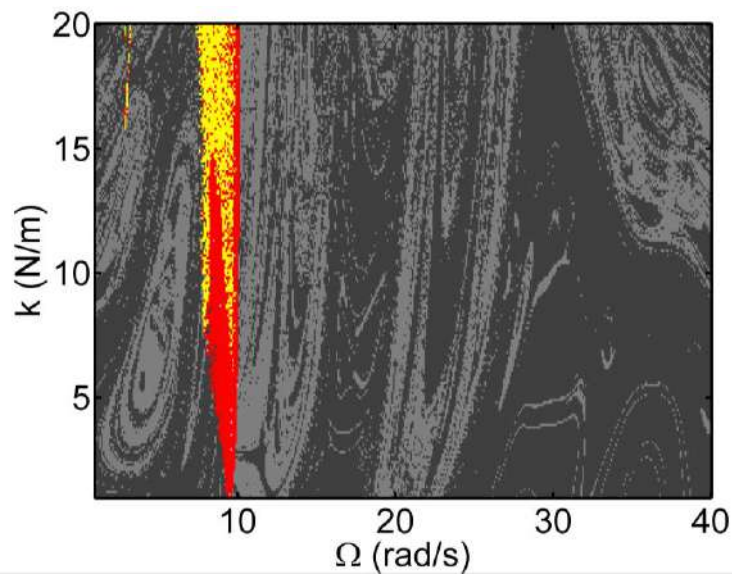
Na Figura 7.31 se observa a resposta do sistema sem amortecimento nos elementos de ligação dos carros. Em relação ao caso de referência, Figura 7.33, sem amortecimento há uma difusão entre os comportamentos sincronizado e sincronizado em oposição de fase. E também a banda assíncrona é mais espessa para Figura 7.31 com a presença da segunda banda em torno de 3 rad/s e outras bandas assíncronas secundárias para frequências superiores, as quais não são evidentes no caso de referência, Figura 7.34.

Agora avaliando a Figura 7.32 com 0,28 N.s/m de amortecimento, o padrão entre os comportamentos sincronizados e sincronizados em oposição de fase é mais complexo que a referência, além do comportamento dessincronizado apresentar uma área maior dentro da região assíncrona. Desta forma, analisando pela perspectiva da energia quanto maior o amortecimento maior a dissipação de energia e menor a região de comportamento assíncrono.



■ quimera
 ■ dessincronizado
 □ frequência fechada
 ■ sincronizado
 ■ oposição de fase
 ■ LPS

Figura 7.31. Diagrama de padrões para os pêndulos para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 0$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.



■ quimera
 ■ dessincronizado
 □ frequência fechada
 ■ sincronizado
 ■ oposição de fase
 ■ LPS

Figura 7.32. Diagrama de padrões para os pêndulos para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 0,28$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.

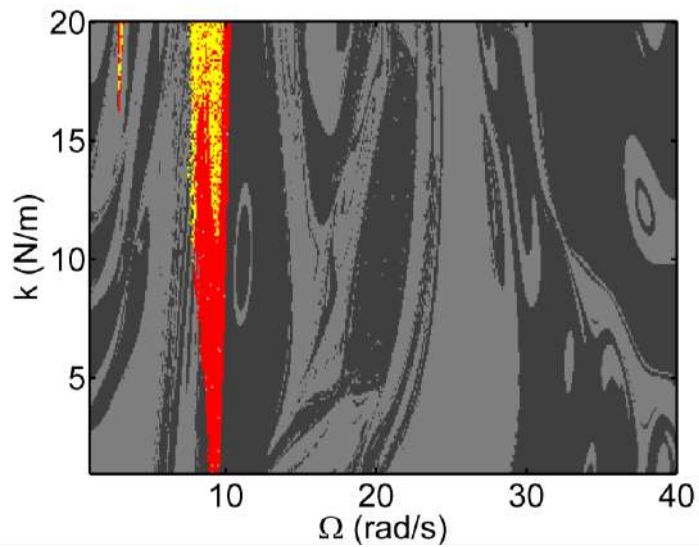


Figura 7.33. Diagrama de padrões para os pêndulos para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 0,56$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.

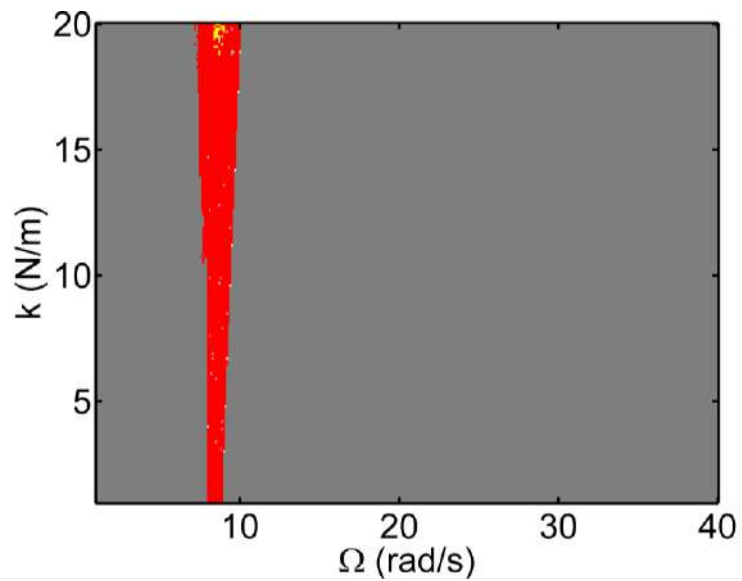


Figura 7.34. Diagrama de padrões para os pêndulos para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 1,68$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.

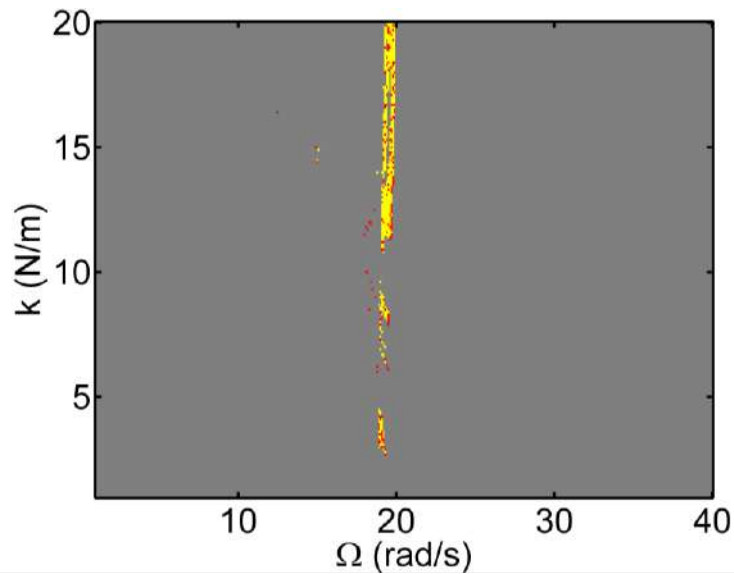


Figura 7.35. Diagrama de padrões para os pêndulos para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 4,48$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.

A transição entre os comportamentos sincronizado e sincronizado em oposição de fase desaparecem com o aumento do amortecimento para três vezes o valor do amortecimento de referência, Figura 7.34 em relação à Figura 7.33. Nesta parte do domínio o comportamento sincronizado é apresentado sozinho. Uma possibilidade é devido a maior dissipação de energia o nível de energia no sistema diminui, aumentando a propensão ao comportamento sincronizado. Pois o comportamento de oposição de fase é menos sincronizado que o movimento idêntico dos osciladores.

Concomitantemente, na Figura 7.34 há menor presença do comportamento dessincronizado na principal banda de comportamento assíncrono. Assim como o desaparecimento da segunda banda síncrona em torno de 3 rad/s. Seguindo a análise para o caso em que o amortecimento é oito vezes o valor do caso de referência, Figura 7.35, observa-se um domínio muito diferente do anterior, mantendo-se apenas o domínio do comportamento sincronizado. Porém, com a principal banda assíncrona em torno de 20 rad/s ao invés de 10 rad/s e mais estreita que a anterior, além de uma presença mais dominante do comportamento dessincronizado dentro da mesma. Uma das hipóteses para esta mudança é o fato de que para o sistema linearizado, o amortecimento neste caso é classificado como superamortecido enquanto os anteriores são subamortecidos.

Diante destes indícios da relação do domínio dos parâmetros com o amortecimento indica uma dependência da energia no sistema, assim efetuou-se a análise

do fluxo de energia do sistema conforme a equação (6-1), pela perspectiva dos carros. Observando as Figura 7.36, Figura 7.37, Figura 7.38, Figura 7.39 e Figura 7.40 a separação entre os comportamentos da banda assíncrona dos comportamentos síncronos é verificada. No entanto, a energia de fundo destas figuras também se altera com o aumento do amortecimento. Isto é, quanto maior o amortecimento, mais baixo é o fluxo de energia disponível nos comportamentos sincronizados. Esta característica deve estar relacionada ao desaparecimento do comportamento sincronizado em oposição da fase para $C = 1,68 \text{ N.s/m}$, porém a banda assíncrona permanece no mesmo patamar de energia, destacando a mesma nas Figura 7.39 e Figura 7.40.

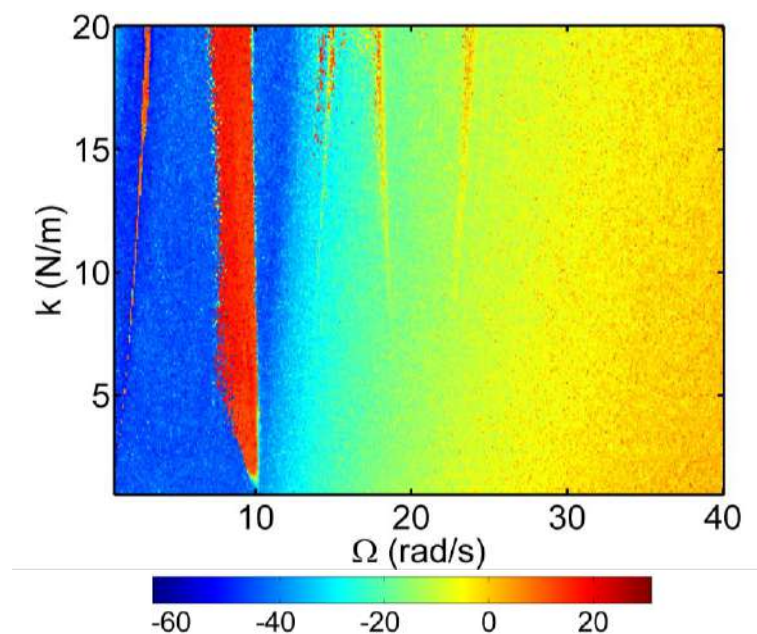


Figura 7.36. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 0 \text{ N.s/m}$ e amplitude de excitação de $u = 0,2 \text{ m}$.

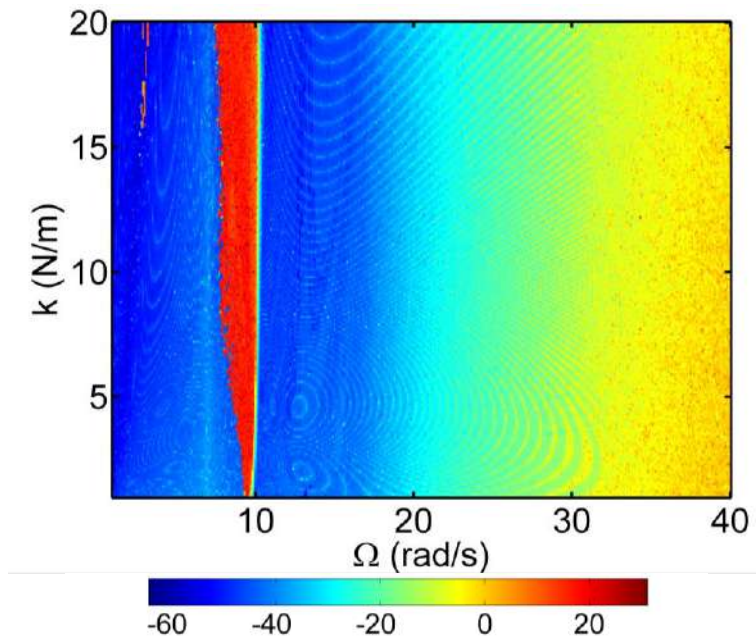


Figura 7.37. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 0,28$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.

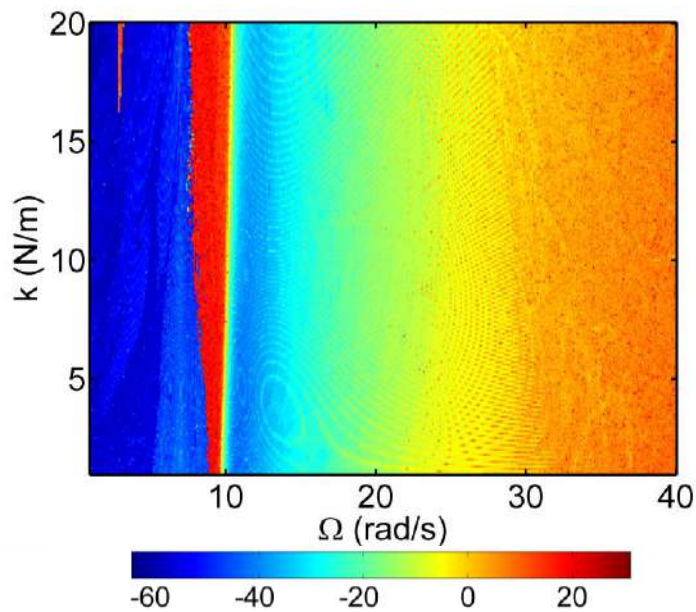


Figura 7.38. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 0,56$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.

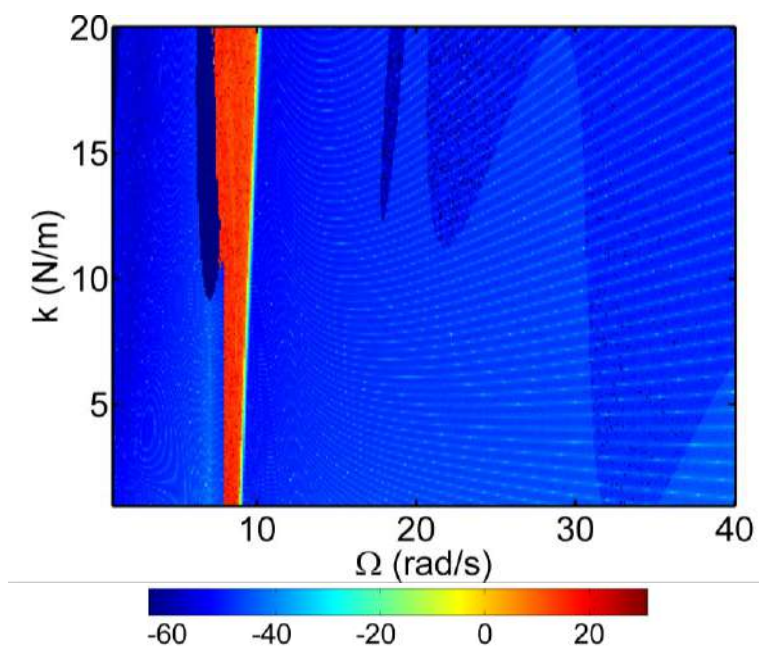


Figura 7.39. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 1,68$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.

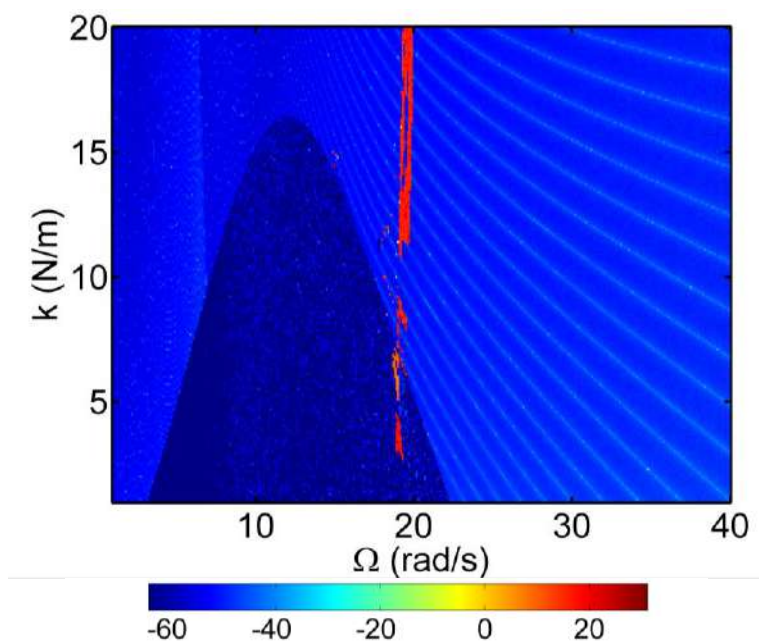


Figura 7.40. Fluxo de energia no sistema em escala logarítmica na abordagem dos carros para o amortecimento de $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = 4,48$ N.s/m e amplitude de excitação de $u = 0,2$ m.

7.3 CONDIÇÕES INICIAIS ALEATÓRIAS E DESESTABILIZAÇÃO

Para investigar a robustez da resposta do sistema em relação às condições iniciais, condições iniciais aleatórias são analisadas. As Figura 7.41, Figura 7.42 e Figura 7.43 mostram o classificação de padrões para diferentes níveis de aleatoriedade, começando com uma resposta determinística, Figura 7.41 sem aleatoriedade e com diferentes valores de desvio padrão, Figura 7.42 e Figura 7.43. Os resultados mostram uma clara erosão dos padrões, gerando um diagrama classificação de padrões com uma estrutura semelhante a um fractal. Isso significa que os comportamentos síncronos e assíncronos são misturados de forma imprevisível, produzindo respostas com alta sensibilidade às condições iniciais. Os parâmetros utilizados foram $\Omega = 7,7$ rad/s, $u = 0,2$ m e $k_{1,2,3} = 10,8$ rad/s.

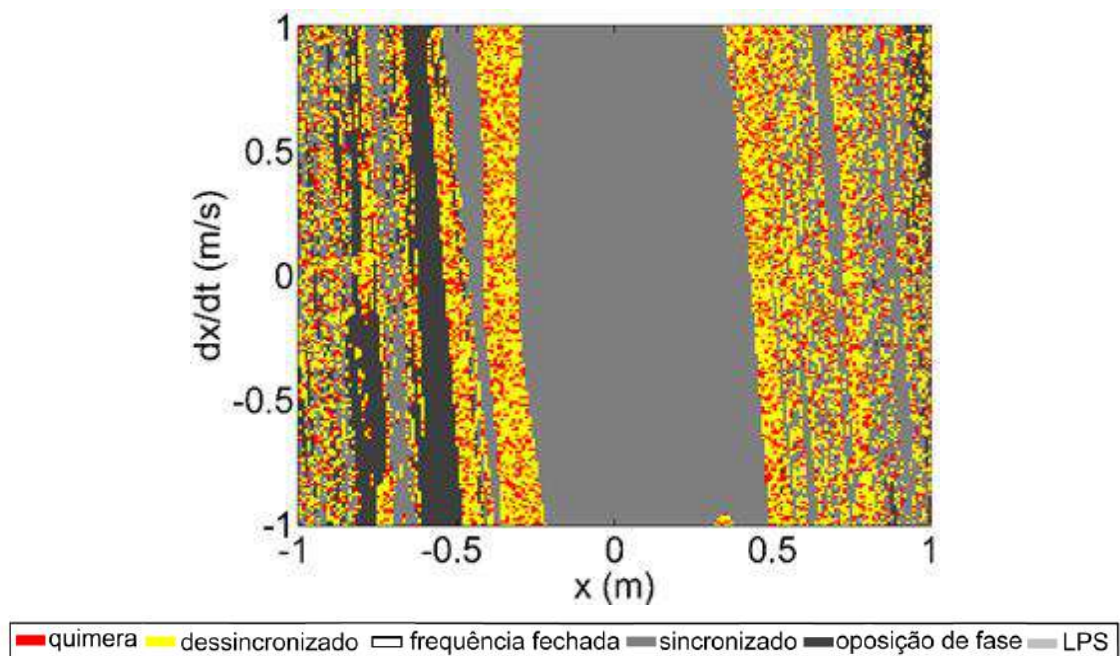
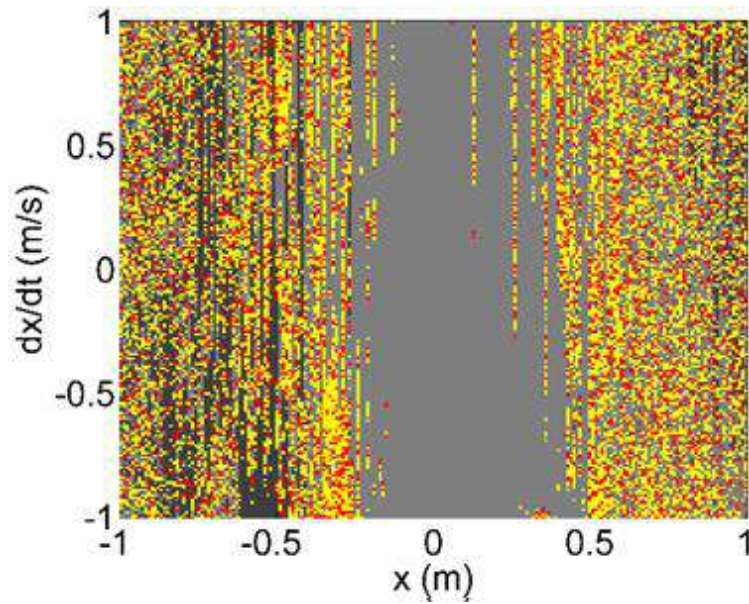


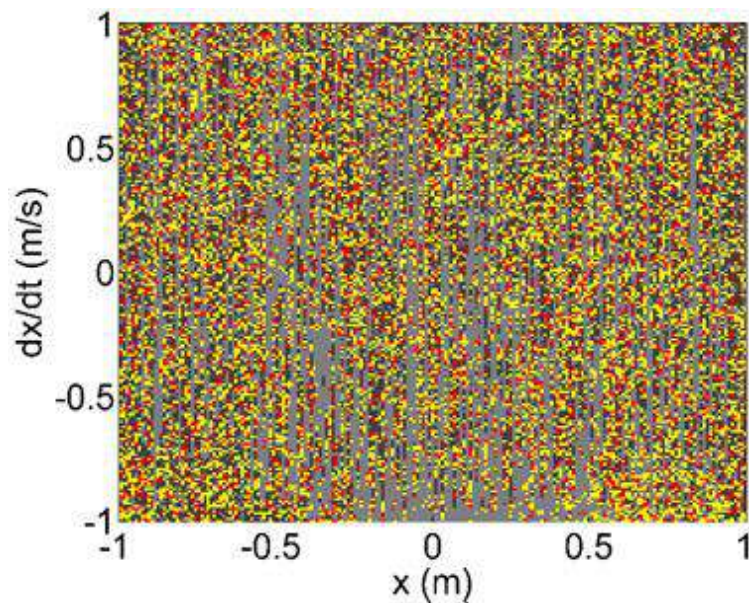
Figura 7.41. Diagrama de padrões considerando condições iniciais aleatórias para $\sigma =$

0.



quimera dessincronizado frequência fechada sincronizado oposição de fase LPS

Figura 7.42. Diagrama de padrões considerando condições iniciais aleatórias para $\sigma = 0,01$.



quimera dessincronizado frequência fechada sincronizado oposição de fase LPS

Figura 7.43. Diagrama de padrões considerando condições iniciais aleatórias para $\sigma = 0,1$.

Esses resultados mostram que diferentes condições iniciais podem alterar a órbita e o padrão de comportamento. Outra abordagem que avalia como o sistema responde à perturbação no regime permanente é promovida considerando uma alteração de deslocamento e velocidade no primeiro carro em um determinado instante de tempo. A

ideia é observar se o sistema muda o comportamento coletivo devido a essa desestabilização e o nível de perturbação. Destacando que a condição inicial de deslocamento para o primeiro carro é $x_1(0) = 1$ m para a Figura 7.44 e Figura 7.46, e a amplitude da resposta é de 0,18 e 0,025 m respectivamente. Então, uma desestabilização de cinco vezes a amplitude, conforme aplicada nessas figuras, resulta em um deslocamento em torno do tamanho da condição inicial ($x = 1$ m).

A Figura 7.44 mostra a resposta do sistema para $u = 0,1$ m, $\Omega = 9,5$ rad/s, $k_{1,2,3} = 18$ N/m e condição inicial de deslocamento $x_1(0) = 1$ m do primeiro carro e nula para os demais osciladores, apresentando um estado quimera. Uma desestabilização é imposta ao sistema em cinco vezes o deslocamento e a velocidade no instante de tempo 530 segundos. Observe que após cerca de vinte segundos, o sistema recupera o padrão quimera.

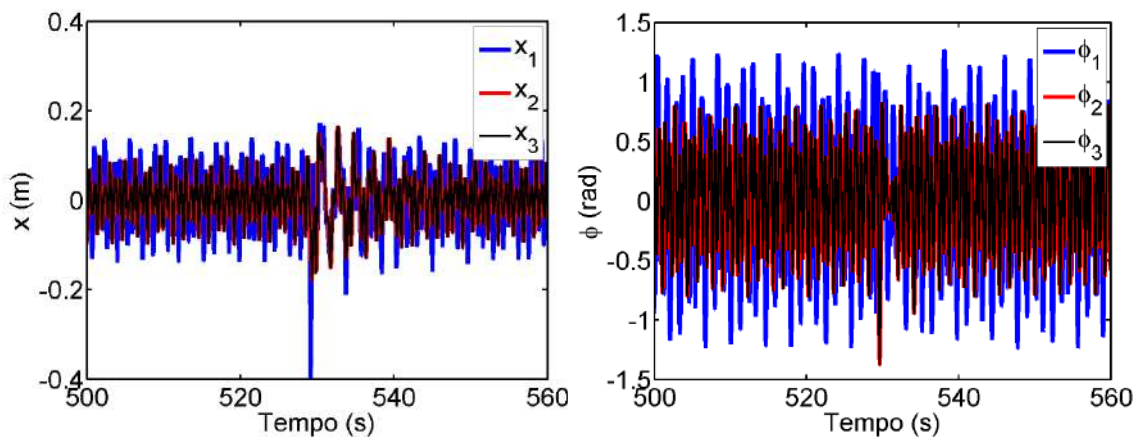


Figura 7.44. Resposta do sistema no estado quimera com uma desestabilização de cinco vezes as variáveis de estado para 530 segundos com sistema recuperando o estado de quimera.

A Figura 7.45 mostra a resposta com $u = 1$ m, $\Omega = 10$ rad/s, $k_{1,2,3} = 19$ N/m e condições iniciais nulas, onde o sistema está em estado sincronizado. A desestabilização promovida pela adição de dez por cento do deslocamento e velocidade no instante de tempo de 500 segundos. Observe que a diferença entre os osciladores diverge e em 530 segundos eles estão no estado dessincronizado.

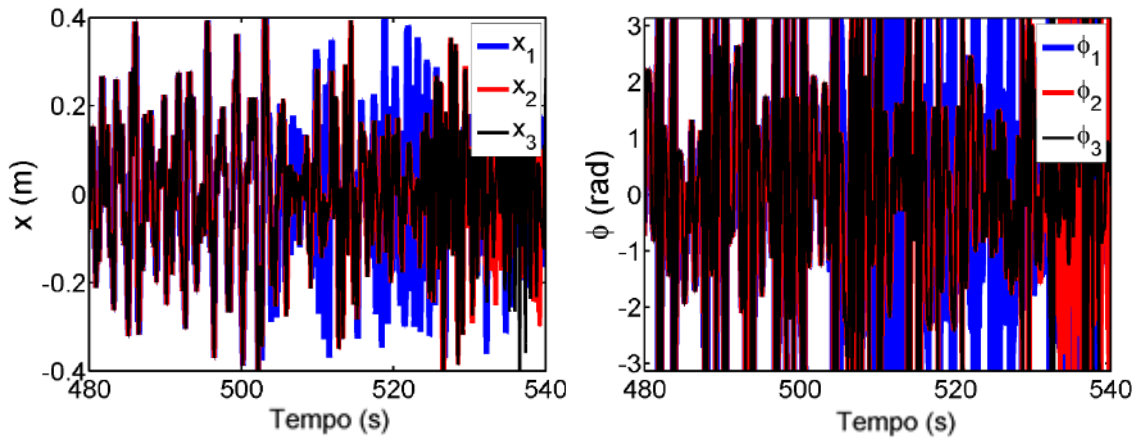


Figura 7.45. Resposta do sistema em comportamento sincronizado com uma desestabilização de dez por cento do valor das variáveis de estado para 560 segundos. No entanto o sistema muda seu comportamento para o estado dessincronizado.

Uma situação em que ocorreu uma resposta sincronizada em fase é com $u = 0,2 \text{ m}$, $\Omega = 5,7 \text{ rad/s}$, $k_{1,2,3} = 12,2 \text{ N/m}$ e condição inicial de deslocamento $x_1(0) = 1 \text{ m}$ do primeiro carro e nulo para os outros osciladores (Figura 7.46). Uma desestabilização é aplicada considerando cinco vezes o deslocamento e a velocidade no instante de tempo 882 segundos. Observe que por volta dos 910 segundos os osciladores estão sincronizados na mesma órbita.

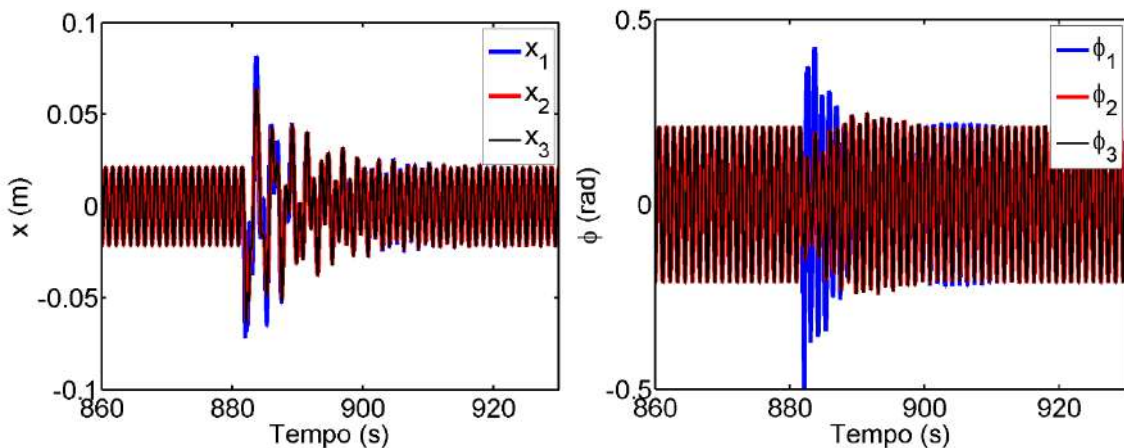


Figura 7.46. Resposta do sistema em comportamento sincronizado com uma desestabilização de cinco vezes as variáveis de estado para 882 segundos com o sistema retornando ao comportamento sincronizado.

Exceto pelo comportamento caótico sincronizado, Figura 7.45, os demais comportamentos coletivos apresentaram uma resposta estável, o que significa que a desestabilização não altera o padrão dinâmico. Para o comportamento caótico sincronizado, pequenas perturbações alteraram a resposta do sistema.

8 ROBUSTEZ DO ESTADO DE QUIMERA COM RELAÇÃO À ASSIMETRIA

Após a análise dos efeitos aleatórios na dinâmica do sistema, a assimetria do sistema é considerada para situações onde os valores dos parâmetros variam definindo um sistema assimétrico. A ideia é avaliar a influência de alguma mudança de parâmetro próximo à configuração simétrica, devido ao critério de simetria para a classificação do estado de quimera.

Em outras palavras, é construído um diagrama de perturbação analisando o padrão das respostas nas proximidades do espaço de parâmetros simétrico. Portanto, o ponto central do diagrama representa a condição de simetria e o aumento da assimetria é representado pela distância do ponto simétrico central. A análise verifica as perturbações de simetria para os carros e para o pêndulo usando um diagrama para cada um. Considere uma situação de sincronização em fase sob condição simétrica: $u = 0,2$ m, $k_3 = 12,2$ N/m, $\Omega = 5,7$ rad/s, k_1 e k_2 são definidos para cada ponto da Figura 8.1. Esta figura mostra o diagrama de perturbação relacionado a $k_1 - k_2$ para carros e pêndulos, avaliando esta robustez à assimetria. Note que a condição simétrica, representada pelo ponto central, está relacionada à cor cinza que ocupa uma vizinhança que define a robustez onde o sistema ainda apresenta o mesmo padrão dinâmico. É possível quantificar o tamanho dessa região que está em torno de 0,01 N/m (ou um parâmetro de perturbação de 0,8%) para o pêndulo (gráfico esquerdo) e cerca de dez vezes maior para os carros (gráfico direito). A quebra de simetria do pêndulo é muito mais dramática, dando espaço para o estado quimera (vermelho) e respostas dessincronizadas (amarelo). Por outro lado, os carros apresentam uma pequena região de resposta de frequência fechada.

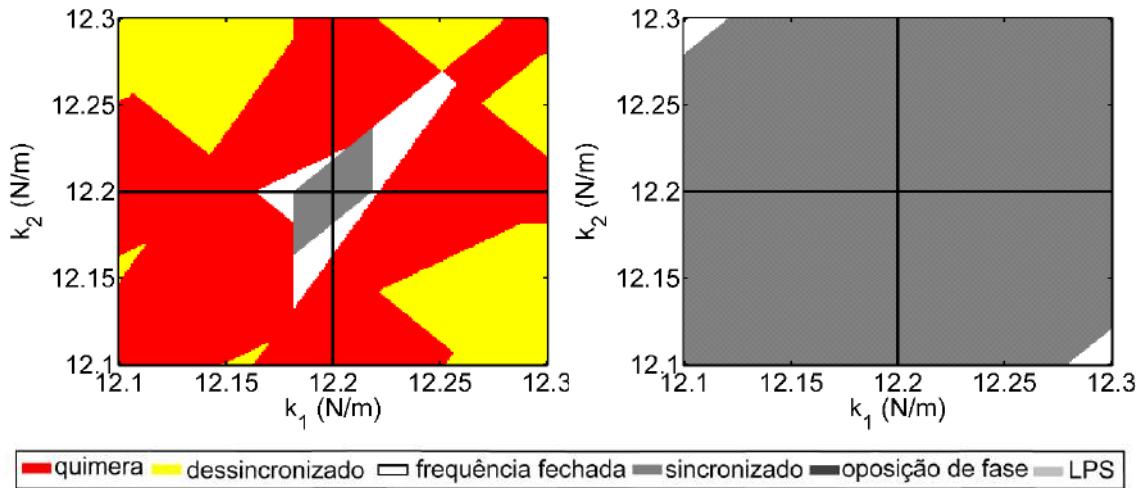


Figura 8.1. Diagrama de perturbação assimétrica para $k_1 - k_2$ de um comportamento sincronizado. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.

Considerando esta análise para a simetria no estado de quimera onde $u = 0,1$ m, $\Omega = 9,5$ rad/s, $k_3 = 18$ N/m, condições iniciais de deslocamento de um para o primeiro e terceiro carros, $x_1(0) = x_3(0) = 1$ m e os valores k_1 e k_2 são definidos na Figura 8.2. Esta figura mostra o diagrama de perturbação relacionado a $k_1 - k_2$, com a condição simétrica em um estado de quimera (vermelho). Mais uma vez, as respostas dos carros são muito mais robustas do que dos pêndulos. Mas este resultado tem uma propriedade interessante com uma característica mais robusta em relação ao eixo k_1 horizontal do que ao eixo k_2 vertical, que é perceptível pela região vermelha. Fora da região robusta, o diagrama mostra uma deterioração com uma estrutura tipo fractal onde o estado de quimera se torna dessincronizado.

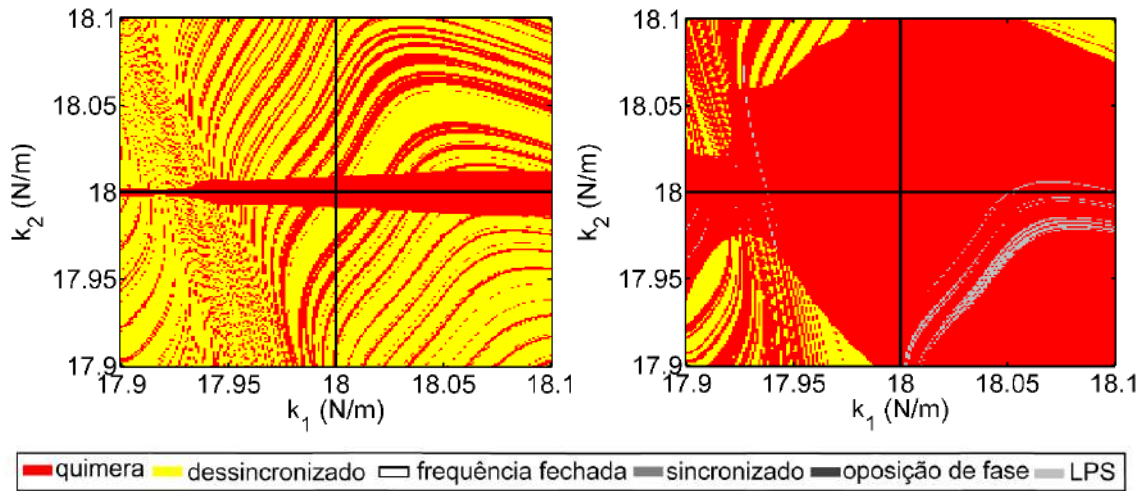


Figura 8.2. Diagrama de perturbação assimétrica para $k_1 - k_2$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.

A Figura 8.3 mostra o padrão de perturbação relacionado aos parâmetros $k_7 - k_9$ considerando desvios de 0,1% do valor simétrico. Sob esta condição, o sistema apresenta uma clara deterioração do caso simétrico apresentando uma estrutura tipo fractal associada ao estado quimera e a resposta dessincronizada. Destacando uma tendência na horizontal, eixo k_7 , na disposição das camadas dos comportamentos.

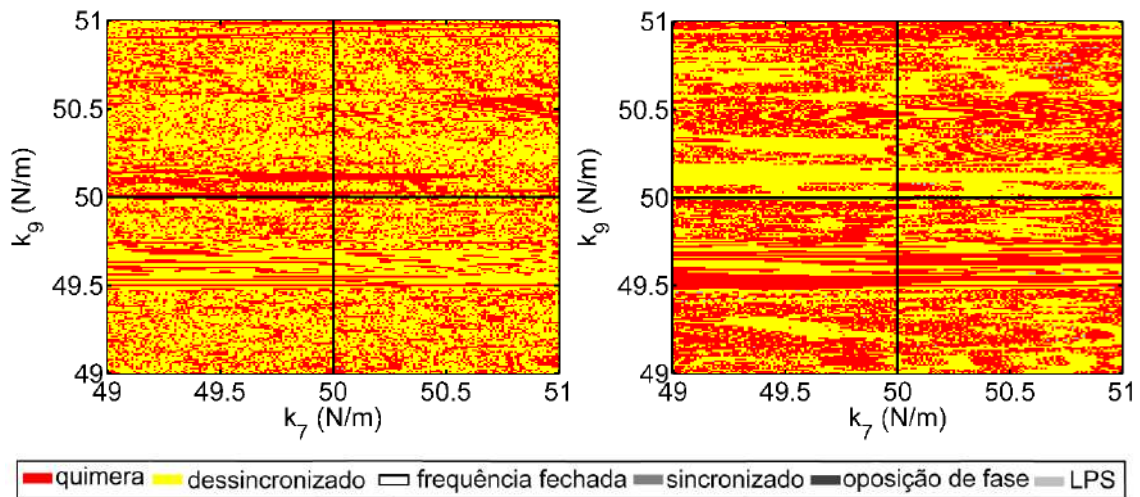


Figura 8.3. Diagrama de perturbação assimétrica para $k_7 - k_9$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.

A Figura 8.4 mostra os diagramas de perturbação relacionados aos parâmetros $l_2 - l_3$. Sob esta condição, é novamente perceptível um padrão deteriorado tipo fractal,

mas com uma tendência diagonal. O mesmo tipo de padrão é observado na Figura 8.5 que está relacionado a $M_2 - M_3$ e na Figura 8.6 que está associada a $m_2 - m_3$. A Figura 8.7 também mostra a mesma tendência para o diagrama de perturbação relacionado a $C_1 - C_2$.

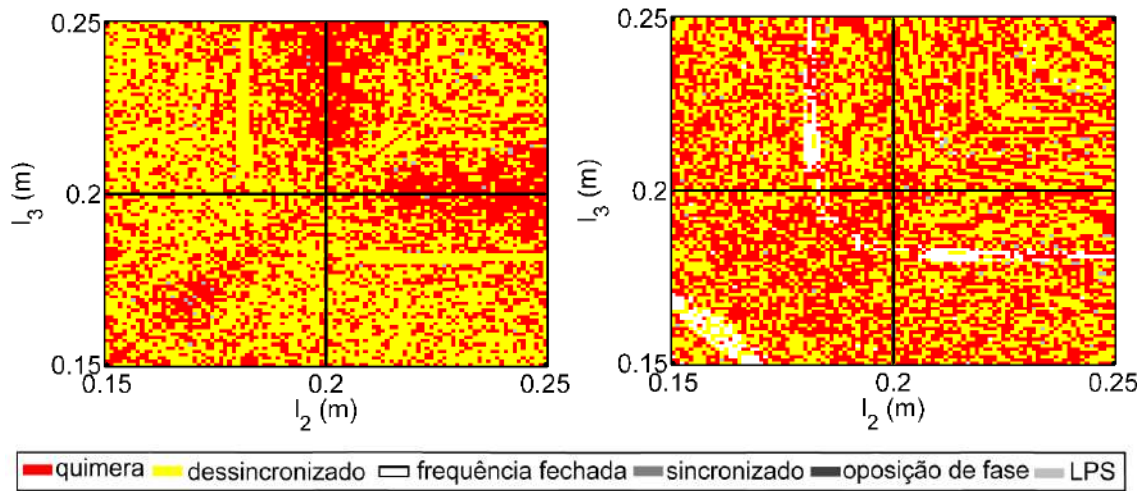


Figura 8.4. Diagrama de perturbação assimétrica para $l_2 - l_3$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.

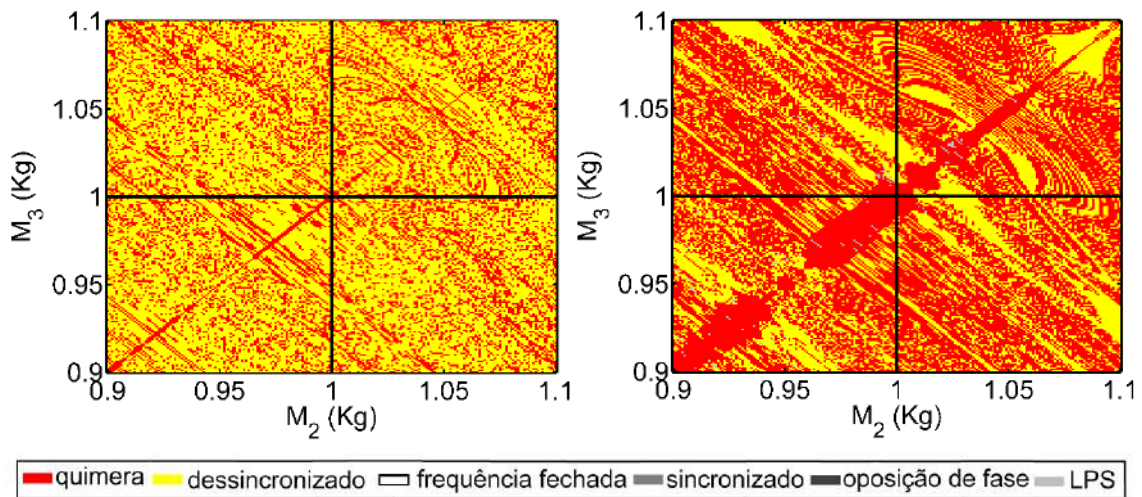


Figura 8.5. Diagrama de perturbação assimétrica para $M_2 - M_3$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.

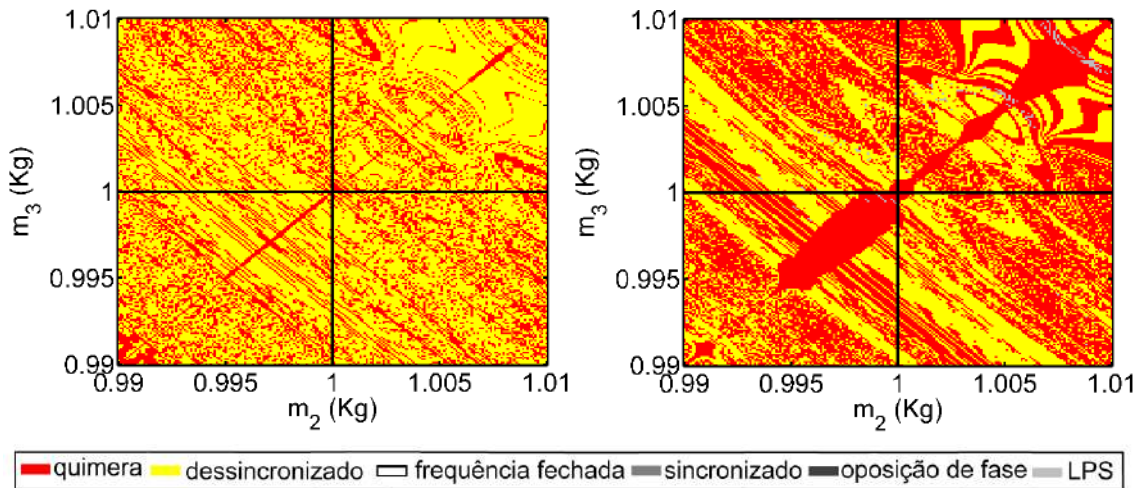


Figura 8.6. Diagrama de perturbação assimétrica para $m_2 - m_3$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.

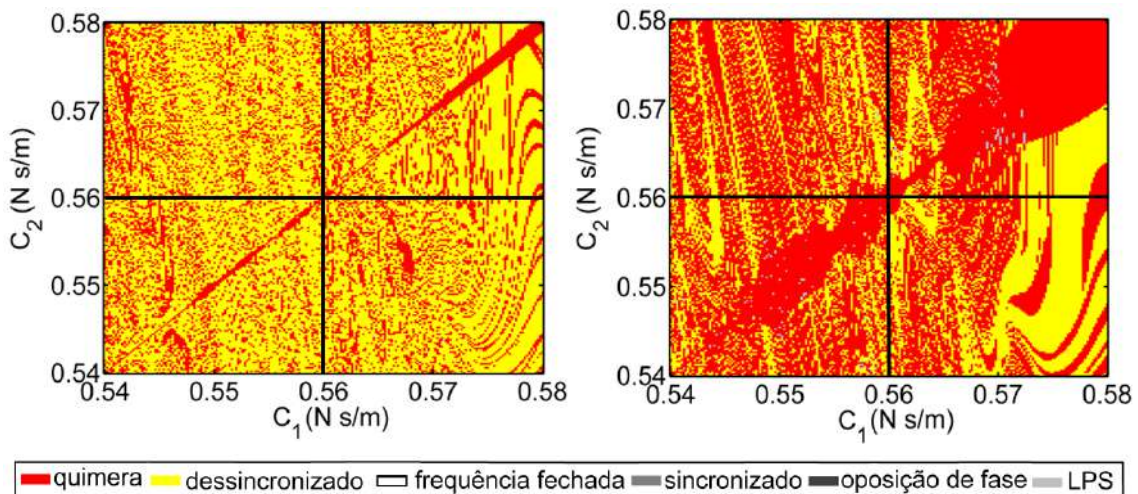


Figura 8.7. Diagrama de perturbação assimétrica para $C_1 - C_2$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.

A Figura 8.8 considera a perturbação relacionada ao parâmetro $C_7 - C_9$. Mais uma vez, uma estrutura tipo fractal é observada, mas com um padrão de dobradas. Nessa condição, não é possível identificar qualquer tipo de robustez em torno do ponto simétrico central. A Figura 8.9 apresenta o diagrama para $C_{\phi_2} - C_{\phi_3}$ com um padrão semelhante, mas com uma simetria diagonal.

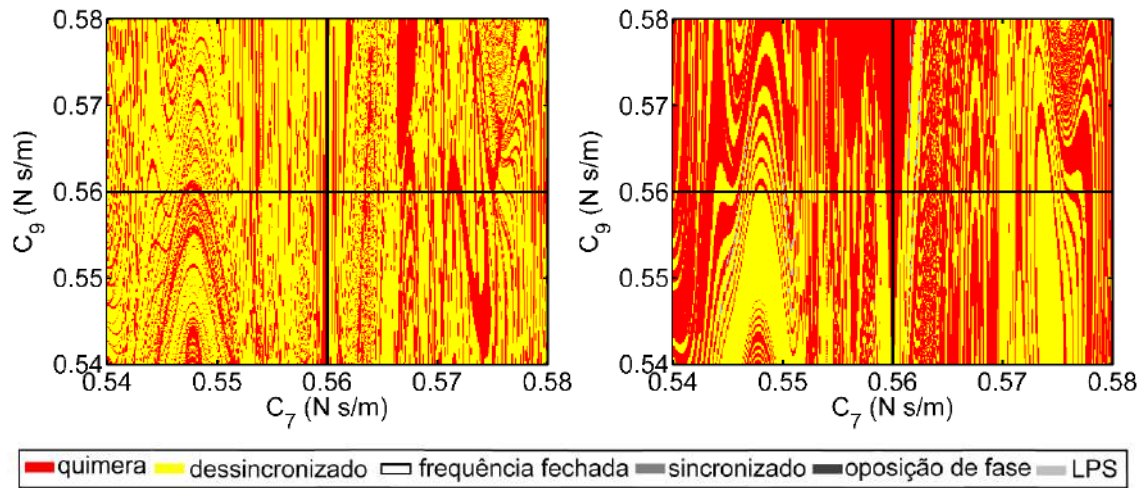


Figura 8.8. Diagrama de perturbação assimétrica para $C_7 - C_9$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.

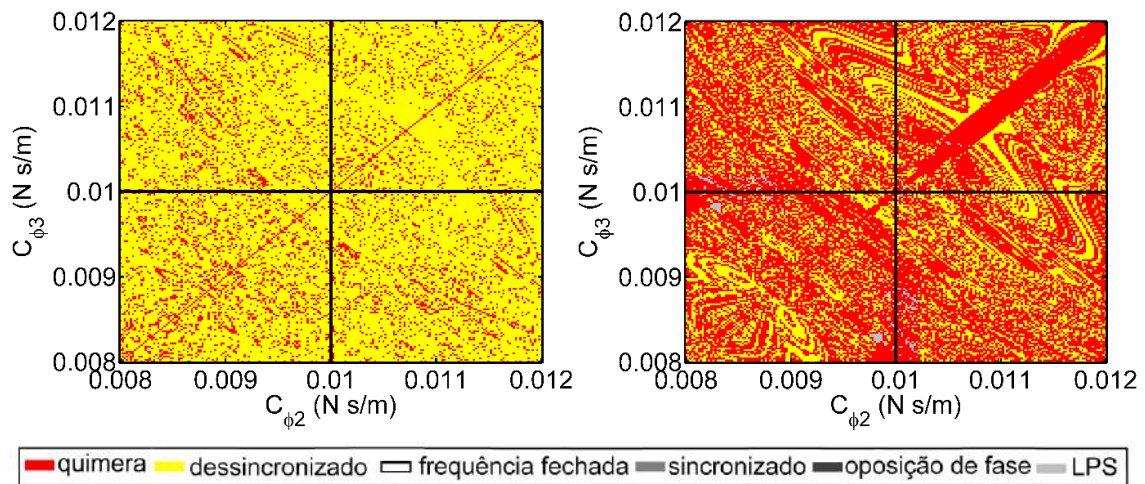


Figura 8.9. Diagrama de perturbação assimétrica para $C_{\phi_2} - C_{\phi_3}$ de um comportamento de quimera. À esquerda é apresentada as respostas dos pêndulos, enquanto à direita a resposta dos carros e a cruz destaca o ponto simétrico.

Deve-se ressaltar que, com exceção dos diagramas $k_1 - k_2$, os demais apresentam um estreito desvio em torno do ponto simétrico, o que indica as dificuldades de obtenção do estado quimera devido às incertezas. A análise desenvolvida permite definir um domínio assimétrico aceitável onde há o estado de quimera dentro deste desvio da simetria do sistema.

9 CONCLUSÕES

Este trabalho investiga a sincronização e o estado de quimera em sistemas mecânicos. Considera-se um sistema mecânico composto por três populações de osciladores tipo carro-pêndulo onde os carros são ligados simetricamente uns aos outros e cada um deles ligados a duas plataformas: uma fixa e outra que exerce excitação de base. Os resultados possibilitam a compreensão das condições para a existência de diferentes padrões de resposta dinâmica incluindo sincronização e o estado de quimera.

A análise dos efeitos das condições iniciais mostra a possibilidade de que situações de maior energia podem estimular a quebra de simetria do sistema e, conseqüentemente, a formação do estado de quimera e do estado dessincronizado. Através dos diagramas de bifurcação fica evidente não haver relação de causalidade entre as bifurcações e as mudanças de padrão de sincronização. Ao percorrer o diagrama se observa que as mudanças de periodicidade não são acompanhadas por alterações nos padrões coletivos, evidenciando uma dissociação destas características.

Uma das contribuições deste trabalho foi a identificação dos padrões dinâmicos através da série temporal se mostrou adequada para distinguir e classificar os diferentes padrões do sistema. Isso permite construir diagramas de padrão do sistema, capturando estruturas tipo bacias de atração e regiões de estados dessincronizados e do estado de quimera. Os resultados se mostraram coerentes com a literatura apresentando a mesma relação descrita por MARTENS *et al.* (2013), onde o estado de quimera surge nas proximidades da frequência natural de oscilação.

Outra contribuição advém da comparação dos diagramas de padrões para diferentes amplitudes de forçamento propiciou a formulação de uma hipótese para explicar o processo de formação do estado de quimera, que consiste em medir a razão entre a energia transmitida entre os osciladores em função da recebida pelo forçamento. Essa hipótese é uma alternativa a hipótese de MARTENS *et al.* (2013) que estabelece a competição entre o estado sincronizado e sincronizado em oposição de fase. Com isso, quando a energia transmitida entre os osciladores supera a recebida, o sistema desenvolve um estado dessincronizado ou de quimera devido a uma capacidade intrínseca de distribuir a energia recebida. Em situações próximas à frequência natural, onde o sistema possui a característica de acumular energia, este limite é ultrapassado e assimetrias inseridas através das condições iniciais são amplificadas pelo sistema. Isso implica na

formação do estado de quimera e do estado dessincronizado, significando que o aumento do fluxo de energia no sistema proporciona os comportamentos de quebra de simetria.

Com base na análise energética, vê-se que a redução da energia disponível no sistema causa a redução dos comportamentos dessincronizados e de quimera. Isso pode ser observado através do aumento da dissipação do sistema e medido por meio do fluxo de energia. Como conclusão essencial pode-se dizer que os estados sincronizados são preponderantes e que a quebra da sincronização necessita de um aumento da quantidade de energia fornecida ao sistema.

Dentre as contribuições deste trabalho as perturbação aleatórias na dissipação apresentaram características diferentes em relação ao caso determinístico, estando principalmente relacionadas à quantidade de energia no sistema do que ao desvio padrão. Portanto, apesar de algumas mudanças que surgem comparando diferentes aleatoriedades, é a quantidade de energia que define o tamanho da região assíncrona. Assim, quanto maior a dissipação mais robusto o sistema é a quebra de simetria.

A robustez dos padrões dinâmicos foi analisada considerando diferentes tipos de perturbação no sistema. Perturbações aleatórias e determinísticas, nas condições iniciais e a assimetria paramétrica foram investigadas. Considerando a robustez na frequência de excitação aleatória, a quantidade de energia recebida pelo sistema diminui devido a distribuição da energia em uma maior banda de frequências. A região do comportamento assíncrono é reduzida devido ao fato de que é necessária mais energia para quebrar a simetria, tornando o sistema mais robusto. Com relação à amplitude de excitação aleatória, ocorre o comportamento oposto. O sistema recebe mais energia, pois essa aleatoriedade é distribuída apenas na amplitude. Portanto, a robustez dos comportamentos síncronos é reduzida uma vez que a maior quantidade de energia disponível induz a quebra de simetria, expresso por uma banda assíncrona maior. As mesmas conclusões são obtidas quando excitações aleatórias são adicionadas a excitação harmônica.

A desestabilização de órbitas através da inserção de uma energia extra no sistema mostra uma resposta robusta para comportamentos sincronizados. A exceção é o caso da sincronização de comportamento caótico que não apresenta robustez. Isso é esperado tendo em vista que pequenas perturbações acarretam efeitos desproporcionais em regime caótico. A análise da desestabilização é coerente com o observado pelas análises de aleatoriedade e dissipação.

A análise da assimetria paramétrica mostra que os comportamentos sincronizados são mais robustos do que o estado de quimera, o que é esperado pelas características

necessárias para a sua classificação. No entanto, o estado de quimera é robusto o bastante para que se observe uma região aceitável de sua existência em torno do ponto de simetria.

Para a continuação da investigação apresentada, sugere-se os seguintes temas:

- Construção de um aparato experimental do modelo proposto;
- Aplicação da abordagem do diagrama de padrões e fluxo de energia em outros sistemas dinâmicos,
- Adaptar a abordagem do fluxo de energia para osciladores autossustentados;
- Investigar a possibilidade de aumento na quantidade de energia gerada em dispositivos de colheita de energia através da sincronização;
- Investigar a melhoria no desempenho de metamateriais através do uso de padrões de comportamento coletivo.

10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

- ABRAMS, D. M.; STROGATZ, S. H. “Chimera States for Coupled Oscillators”. *Physical Review Letters*, v. 93, n. 17, p. 174102, 19 jul. 2004. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/nlin/0407045>>.
- ABRAMS, D. M.; STROGATZ, S. H. “Modelling the dynamics of language death”. *Nature*, v. 424, n. August, p. 900, 2003.
- ADLER, R. “A study of locking phenomena in microwave oscillators”. *Proceedings of the IRE and Waves and Electrons*, v. 61, n. 10, p. 351–357, 1946.
- AOI, S.; TSUCHIYA, K. “Locomotion control of a biped robot using nonlinear oscillators”. *Autonomous Robots*, v. 19, n. 3, p. 219–232, 2005.
- BALDONI, R. *et al.* “Coupling-based internal clock synchronization for large-scale dynamic distributed systems”. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, v. 21, n. 5, p. 607–619, 2010.
- BEMPORAD, A.; HEEMELS, M.; JOHANSSON, M. **Networked control systems**. [S.l.: s.n.], 1978.
- BENNETT, M. *et al.* “Huygens’ s clocks”. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 458, n. 2019, p. 563–579, 2002.
- BLAABJERG, F. *et al.* “Overview of control and grid synchronization for distributed power generation systems”. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 53, n. 5, p. 1398–1409, 2006.
- BLAZEJCZYK-OKOLEWSKA, B. *et al.* “Antiphase synchronization of chaos by noncontinuous coupling: Two impacting oscillators”. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 12, n. 10, p. 1823–1826, 2001.
- BOCCALETTI, S. *et al.* “Complex networks: Structure and dynamics”. *Physics Reports*, v. 424, n. 4–5, p. 175–308, 2006.
- BOCCALETTI, S. *et al.* “The synchronization of chaotic systems”. *Physics Reports*, v. 366, n. 1–2, p. 1–101, 2002. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157302001370>>.
- BUCK, J.; BUCK, E. “Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies”. *Science*, v. 159, n. 3821, p. 1319–1327, 1968.
- CARLSEN, S. *et al.* *Synchronization of two metronomes*. . [S.l.]: Niels Bohr Institute - Copenhagen University. , 2012
- CARVALHO, P. R.; FEITEIRA, J. F. S.; PAIVA, A. “The Influence of the Resonant

Frequency on the Presence Of Chimera State”. *International Journal of engineering research and applications*, v. 6, n. 4, p. 8–12, 2016.

CARVALHO, P. R.; SAVI, M. A. “Synchronization and chimera state in a mechanical system”. *Nonlinear Dynamics*, 3 jan. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11071-019-05441-4>>.

CORREA, D. P. F.; WULFF, C.; PIQUEIRA, J. R. C. “Symmetric bifurcation analysis of synchronous states of time-delayed coupled Phase-Locked Loop oscillators”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 22, n. 1–3, p. 793–820, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.08.004>>.

COSENZA, M. G.; GAVIDIA, M. E.; GONZÁLEZ-AVELLA, J. C. “Against mass media trends: Minority growth in cultural globalization”. *PLoS ONE*, v. 15, n. 4, p. 1–14, 2020.

CROOK, S. M. *et al.* “The role of axonal delay in the synchronization of networks of coupled cortical oscillators”. *Journal of Computational Neuroscience*, v. 4, n. 2, p. 161–172, 1997.

CZOLCZYNSKI, K. *et al.* “Clustering and synchronization of n Huygens’ clocks”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 388, n. 24, p. 5013–5023, 2009a. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2009.08.033>>.

CZOLCZYNSKI, K. *et al.* “Clustering of Huygens’ Clocks”. *Progress of Theoretical Physics*, v. 122, n. 4, p. 1027–1033, 2009b.

CZOLCZYNSKI, K. *et al.* “Clustering of Non-Identical Clocks”. *Progress of Theoretical Physics*, v. 125, n. 3, p. 473–490, mar. 2011a. Disponível em: <<https://academic.oup.com/ptp/article-lookup/doi/10.1143/PTP.125.473>>.

CZOLCZYNSKI, K. *et al.* “Huygens’ Odd Sympathy Experiment Revisited”. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 21, n. 7, p. 2047–2056, 2011b. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127411029628>>.

DÍAZ, J. *et al.* “Envelope analysis links oscillatory and arrhythmic EEG activities to two types of neuronal synchronization”. *NeuroImage*, v. 172, n. October 2017, p. 575–585, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2018.01.063>>.

DÖRFLER, F.; BULLO, F. “Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey”. *Automatica*, v. 50, n. 6, p. 1539–1564, jun. 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2014.04.012>>.

DÖRFLER, F.; CHERTKOV, M.; BULLO, F. “Synchronization in complex oscillator

networks and smart grids”. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 110, n. 6, p. 2005–2010, 2013. Disponível em: <<http://www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.1212134110>>.

DUDKOWSKI, D.; MAISTRENKO, Y.; KAPITANIAK, T. “Different types of chimera states: An interplay between spatial and dynamical chaos”. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 90, n. 3, p. 1–5, 2014.

DUDKOWSKI, D.; MAISTRENKO, Y.; KAPITANIAK, T. “Occurrence and stability of chimera states in coupled externally excited oscillators”. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 26, n. 11, p. 116306, nov. 2016. Disponível em: <<http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4967386>>.

FILATRELLA, G.; NIELSEN, A. H.; PEDERSEN, N. F. “Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model”. *European Physical Journal B*, v. 61, n. 4, p. 485–491, 2008.

FRANCI, A. *et al.* “Desynchronization and inhibition of Kuramoto oscillators by scalar mean-field feedback”. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, v. 24, n. 1–2, p. 169–217, 2012.

GHOSH, A. K.; CHANCE, B.; PYE, E. K. “Metabolic coupling and synchronization of NADH oscillations in yeast cell populations”. *Archives of Biochemistry and Biophysics*, v. 145, n. 1, p. 319–331, 1971.

GIARDINA, I. “Collective behavior in animal groups: Theoretical models and empirical studies”. *HFSP Journal*, v. 2, n. 4, p. 205–219, 2008.

GOEDGEBUER, J. P.; LARGER, L.; PORTE, H. “Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode”. *Physical Review Letters*, v. 80, n. 10, p. 2249–2252, 1998.

HA, S. *et al.* “Flocking and Synchronization of Particle Models”. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 69, n. 1, p. 91–103, 2011.

HA, S.; HA, T.; KIM, J. “On the complete synchronization of the Kuramoto phase model”. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 239, n. 17, p. 1692–1700, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2010.05.003>>.

HA, S.; JEONG, E.; KANG, M. “Emergent behaviour of a generalized Viscek-type flocking model”. *Nonlinearity*, v. 23, n. 12, p. 3139–3156, 2010.

HA, S.; SLEMROD, M. “A fast-slow dynamical systems theory for the Kuramoto type phase model”. *Journal of Differential Equations*, v. 251, n. 10, p. 2685–2695, 2011. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2011.04.004>>.

HAGERSTROM, A. M. *et al.* “Experimental observation of chimeras in coupled-map

- lattices”. *Nature Physics*, v. 8, n. 9, p. 658–661, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nphys2372>>.
- HIZANIDIS, J. *et al.* “Chimera-like States in Modular Neural Networks”. *Scientific Reports*, v. 6, n. September 2015, p. 1–11, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/srep19845>>.
- HIZANIDIS, J.; LAZARIDES, N.; TSIRONIS, G. P. “Pattern formation and chimera states in 2D SQUID metamaterials”. *Chaos*, v. 30, n. 1, 2020.
- HUYGENS, C. **Correspondance 1664-1665**. Amsterdam: Société Hollandaise des sciences, 1665. v. 5.
- HUYGENS, C. **L’Horloge à pendule de 1651 à 1666. Travaux divers de physique, de mécanique et de technique de 1650 à 1666. Traité des couronnes et des parhélies (1662 ou 1663)**. Amsterdam: Swets & Zeitlinger N. V., 1666. v. 17.
- IJSPEERT, A. J. “Central pattern generators for locomotion control in animals and robots: A review”. *Neural Networks*, v. 21, n. 4, p. 642–653, 2008.
- KAPITANIAK, M.; LAZAREK, M.; *et al.* “Synchronization extends the life time of the desired behavior of globally coupled systems.” *Scientific reports*, v. 4, p. 4391, 2014. Disponível em: <<http://www.pubmedcentral.nih.gov/articlerender.fcgi?artid=3955919&tool=pmcentrez&rendertype=abstract>>.
- KAPITANIAK, M. *et al.* “Synchronization of clocks”. *Physics Reports*, v. 517, n. 1–2, p. 1–69, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2012.03.002>>.
- KAPITANIAK, M.; CZOLCZYNSKI, K.; *et al.* “Synchronous states of slowly rotating pendula”. *Physics Reports*, v. 541, n. 1, p. 1–44, 2014.
- KAPITANIAK, T. “Continuous Control and Synchronization in Chaotic Systems system”. *Chaos Solitons and Fractals*, v. 6, n. 94, p. 237–244, 1995.
- KAPITANIAK, T. *et al.* “Energy balance of two synchronized self-excited pendulums with different masses”. *Journal of theoretical and applied mechanics*, v. 50, n. 3, p. 729–741, 2012.
- KAPITANIAK, T. *et al.* Imperfect chimera states for coupled pendula. 2015, [S.l: s.n.], 2015. p. 6. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/25223296>>.
- KAPLAN, E.; MARSDEN, J. E.; SREENIVASAN, K. R. **Perspectives and Problems in Nonlinear Science**. [S.l: s.n.], 2003. v. 5. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-0-387-21789-5>>.
- KEMETH, F. P. *et al.* “A classification scheme for chimera states”. *Chaos*, v. 26, n. 9,

2016.

KISS, I. Z.; ZHAI, Y.; HUDSON, J. L. “Emerging Coherence in a Population of Chemical Oscillators”. *Science*, v. 296, n. 5573, p. 1676–1678, 2002. Disponível em: <<http://www.sciencemag.org/cgi/doi/10.1126/science.1070757>>.

KLEIN, D. J. *et al.* Integration of communication and control using discrete time Kuramoto models for multivehicle coordination over broadcast networks. 2008, [S.l.]: IEEE, 2008. p. 695–705. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/4434294/>>.

KOPELL, N.; ERMENTROUT, G. B. “Coupled oscillators and the design of central pattern generators”. *Mathematical Biosciences*, v. 90, n. 1–2, p. 87–109, 1988.

KOZYREFF, G.; VLADIMIROV, A. G.; MANDEL, P. “Global coupling with time delay in an array of semiconductor lasers”. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 18, p. 3809–3812, 2000. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/7577482/>>.

KURAMOTO, Y. **Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence**. Berlin: Springer Series in Synergetics, 1984. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-12601-7>>.

KURAMOTO, Y. “Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators”. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, p. 420–422, 1975. Disponível em: <<http://www.springerlink.com/index/10.1007/BFb0013365>>.

KURAMOTO, Y.; BATTOGTOKH, D. “Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators: A soluble case”. *Nonlinear phenomena in complex systems*, v. 4, n. February 2008, p. 380–385, 2002. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0210694>>.

KURAMOTO, Y.; NISHIKAWA, I. “Statistical macrodynamics of large dynamical systems. Case of a phase transition in oscillator communities”. *Journal of Statistical Physics*, v. 49, n. 3–4, p. 569–605, 1987.

KURTHS, J. *et al.* “Introduction: Control and synchronization in chaotic dynamical systems”. *Chaos*, v. 13, n. 1, p. 126–127, 2003.

LEONARD, N. E. *et al.* “Decision versus compromise for animal groups in motion”. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 109, n. 1, p. 227–232, 2012. Disponível em: <<http://www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.1118318108>>.

LIU, C. *et al.* “Cellular construction of a circadian clock: Period determination in the suprachiasmatic nuclei”. *Cell*, v. 91, n. 6, p. 855–860, 1997.

LIU, X.; WU, C. “Fault-tolerant synchronization for nonlinear switching systems with

time-varying delay”. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, v. 23, p. 91–110, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.nahs.2016.06.005>>.

MAISTRENKO, Y. L. *et al.* “Cascades of Multiheaded Chimera States for Coupled Phase Oscillators”. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 24, n. 08, p. 17, 2014. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127414400148>>.

MAJHI, S.; GHOSH, D. “Alternating chimeras in networks of ephaptically coupled bursting neurons”. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 28, n. 8, p. 083113, 2018. Disponível em: <<http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5022612>>.

MARTENS, E. A. *Back Scatter. Physics Today*. [S.l.: s.n.], 2013

MARTENS, E. A. *et al.* “Chimera States in Mechanical Oscillator Networks”. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 110, n. 26, p. 10563–10567, 25 jun. 2013. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1301.7608>><<http://dx.doi.org/10.1073/pnas.1302880110>>.

MICHAELS, D. C.; MATYAS, E. P.; JALIFE, J. “Mechanisms of sinoatrial pacemaker synchronization: A new hypothesis”. *Circulation Research*, v. 61, n. 5, p. 704–714, 1987.

MIRZAEI, A. *et al.* “The quadrature LC oscillator: A complete portrait based on injection locking”. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, v. 42, n. 9, p. 1916–1932, 2007.

NABI, A.; MOEHLIS, J. “Single input optimal control for globally coupled neuron networks”. *Journal of Neural Engineering*, v. 8, n. 6, p. 12, 2011.

NAJDECKA, A.; KAPITANIAK, T.; WIERCIGROCH, M. “Synchronous rotational motion of parametric pendulums”. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 70, p. 84–94, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.10.008>>.

OSIPOV, G. V.; KURTHS, J.; ZHOU, C. **Synchronization in oscillatory networks**. Berlin: Springer, 2007.

PANAGGIO, M. J.; ABRAMS, D. M. “Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators”. *Nonlinearity*, v. 28, n. 3, p. 67–87, 2015. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/0951-7715/28/3/R67/%5Cnhttp://arxiv.org/abs/1403.6204%5Cnhttp://stacks.iop.org/0951-7715/28/i=3/a=R67?key=crossref.3c46bd149b4501a9c3629f19b6927fa1>>.

PANTALEONE, J. “Synchronization of metronomes”. *American Journal of Physics*, v. 70, n. 10, p. 1–9, 2002.

PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. “Synchronization in chaotic systems”. *Physical review letters*, v. 64, n. 8, p. 821–824, 1990.

PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. **Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences**. [S.l.]: Cambridge university press, 2003.

PIQUEIRA, J. R. C. “Using bifurcations in the determination of lock-in ranges for third-order phase-locked loops”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 14, n. 5, p. 2328–2335, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2008.06.012>>.

PIQUEIRA, J. R. C.; OLIVEIRA, M. Q.; MONTEIRO, L. H. A. “Synchronous state in a fully connected phase-locked loop network”. *Mathematical Problems in Engineering*, p. 1–12, 2006. Disponível em: <<http://www.hindawi.com/journals/mpe/2006/052356/abs/>>.

PLUCHINO, A.; BOCCALETTI, S.; *et al.* “Opinion dynamics and synchronization in a network of scientific collaborations”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 372, n. 2, p. 316–325, 2006.

PLUCHINO, A.; LATORA, V.; RAPISARDA, A. “Compromise and synchronization in opinion dynamics”. *European Physical Journal B*, v. 50, n. 1–2, p. 169–176, 2006.

POEL, W.; ZAKHAROVA, A.; SCHÖLL, E. “Partial synchronization and partial amplitude death in mesoscale network motifs”. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 91, n. 2, p. 1–12, 2015.

PYRAGIENE, T.; PYRAGAS, K. “Anticipatory synchronization via low-dimensional filters”. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 381, n. 22, p. 1893–1898, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2017.04.005>>.

RAHIMI, E.; SENDUR, K. “Chimera states in plasmonic nanoresonators”. *Photonics Research*, v. 6, n. 5, p. 427–433, 2018.

RAVASZ, E. *et al.* “Physics of the rhythmic applause”. *Physical Review E*, v. 61, n. 6, p. 6987–6992, 2000.

ROHDEN, M. *et al.* “Self-organized synchronization in decentralized power grids”. *Physical Review Letters*, v. 109, n. 6, p. 1–5, 2012.

ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J. “Phase Synchronization of Chaotic Oscillators”. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 3, p. 1804–1807, 1996.

SABER-OLFATI, R.; FAX, J. A.; MURRAY, R. M. “Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems”. *Proceedings of the IEEE*, v. 95, n. 1, p. 215–233, 30 set. 2007. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/4118472/>>.

SANTOS, M.S. *et al.* “Chimera-like states in a neuronal network model of the cat brain”.

Chaos, Solitons & Fractals, v. 101, n. September, p. 86–91, 3 ago. 2017. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1609.01534>><<http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2017.05.028>>.

SEPULCHRE, R.; PALEY, D. A.; LEONARD, N. E. “Stabilization of planar collective motion: all-to-all communication”. *IEEE Transactions on automatic control*, v. 52, n. 5, p. 811–824, 2007.

SEPULCHRE, R.; PALEY, D. A.; LEONARD, N. E. “Stabilization of planar collective motion with limited communication”. *IEEE Transactions on automatic control*, v. 53, n. 3, p. 706–719, 2008.

SHIM, S. B.; IMBODEN, M.; MOHANTY, P. “Synchronized oscillation in coupled nanomechanical oscillators”. *Science*, v. 316, n. 5821, p. 95–99, 2007.

SHIMA, S.; KURAMOTO, Y. “Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators”. *Physical Review E*, v. 69, n. 3, p. 1–9, 31 mar. 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.69.036213>>.

SIMEONE, O. *et al.* “Distributed synchronization in wireless networks”. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 25, n. September, p. 81–97, 2008. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=4607217>>.

STROGATZ, S. H. *et al.* “Crowd synchrony on the Millennium Bridge”. *Nature*, v. 438, n. 7064, p. 43–44, 3 nov. 2005. Disponível em: <<http://www.nature.com/doi/10.1038/43843a>>.

STROGATZ, S. H. “Exploring complex networks”. *Insight review articles*, v. 410, n. 1, p. 268–276, 2001. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/01441640701322552>><<http://doi.wiley.com/10.1111/j.1944-8287.2002.tb00194.x>><<http://dx.doi.org/10.1016/j.jtrangeo.2012.04.017>><<http://usj.sagepub.com/content/40/8/1455.short>><[http://dx.doi.org/10.1016/S0969-6997\(03\)00039-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0969-6997(03)00039-5)>.

STROGATZ, S. H. “From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators”. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 143, n. 1–4, p. 1–20, 2000.

STRZALKO, J. *et al.* “Synchronous rotation of the set of double pendula: Experimental observations”. *Chaos*, v. 22, n. 4, p. 1–7, 2012.

TASS, P. A. “A model of desynchronizing deep brain stimulation with a demand-controlled coordinated reset of neural subpopulations”. *Biological Cybernetics*, v. 89, n. 2, p. 81–88, 2003.

TINSLEY, M. R.; NKOMO, S.; SHOWALTER, K. “Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators”. *Nature Physics*, v. 8, n. 9, p. 662–665, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nphys2371>>.

TOTZ, J. F. *et al.* “Spiral wave chimera states in large populations of coupled chemical oscillators”. *Nature Physics*, v. 14, n. 3, p. 282–285, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41567-017-0005-8>>.

ULRICH, H.; MANN, A.; PARLITZ, U. “Synchronization and chaotic dynamics of coupled mechanical metronomes”. *Chaos*, v. 19, n. 2009, p. 1–6, 2009.

VARELA, F. *et al.* “The brainweb: phase synchronization and large-scale integration.” *Nature reviews. Neuroscience*, v. 2, n. 4, p. 229–39, abr. 2001. Disponível em: <<http://www.emeraldinsight.com/doi/10.1108/eb004533>>.

VIANA, R. L.; CARVALHO, F. F. “Sincronização entre um oscilador de fase e um forçamento externo”. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 39, n. 3, 2017. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172017000300406&lng=pt&tlng=pt>.

VÜLLINGS, A. *et al.* “Clustered chimera states in systems of type-I excitability”. *New Journal of Physics*, v. 16, p. 13, 2014.

WALKER, T. J. “Acoustic synchrony: Two mechanisms in the snowy tree cricket”. *Science*, v. 166, n. 3907, p. 891–894, 1969.

WANG, Y.; NUNEZ, F.; DOYLE III, F. J. “Increasing sync rate of pulse-coupled oscillators via phase response function design: Theory and application to wireless networks”. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 21, n. 4, p. 1455–1462, 2013.

WIENER, N. *Nonlinear Problems in Random Theory*. [S.l: s.n.], 1958

WIENER, N. **The human use of human beings: Cybernetics and society**. London: Free Association Books, 1989. v. 20.

WIESENFELD, K.; COLET, P.; STROGATZ, S. H. “Frequency locking in Josephson arrays: Connection with the Kuramoto model”. *Physical Review E*, v. 57, n. 2, p. 1563–1569, 1998.

WINFREE, A. T. “Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators”. *Journal of Theoretical Biology*, v. 16, n. 1, p. 15–42, 1967. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0022519367900513>>.

WINFREE, A. T. “Impact of a circadian clock on the timing of human sleep”. *The American journal of physiology*, v. 245, n. 4, p. 497–504, out. 1983a. Disponível em:

<<http://www.physiology.org/doi/10.1152/ajpregu.1983.245.4.R497>>.

WINFREE, A. T. “Sudden Cardiac Death: A Problem in Topology”. *Scientific American*, v. 248, n. 5, p. 144–161, 1983b. Disponível em: <<http://circ.ahajournals.org/content/98/21/2334.short%5Cnhttp://www.nature.com/doi/10.1038/scientificamerican0583-144>>.

WITTHAUT, D.; TIMME, M. “Braess’s paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage”. *New Journal of Physics*, v. 14, 2012.

WOJEWODA, J. *et al.* “The smallest chimera state for coupled pendula”. *Scientific Reports*, v. 6, p. 34329, 7 out. 2016. Disponível em: <<http://www.nature.com/articles/srep34329>>.

WOLF, A. *et al.* “Determining Lyapunov exponents from a time series”. *physica D*, v. 16, p. 285–317, 1985.

WOLFRUM, M.; OMEL’CHENKO, O. E. “Chimera states are chaotic transients”. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 84, n. 1, p. 2–5, 2011.

YELDESBAI, A.; PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M. “Chimera-like states in an ensemble of globally coupled oscillators”. *Physical review letters*, v. 112, n. 14, 2014.

YORK, R. A.; COMPTON, R. C. “Quasi-Optical Power Combining Using Mutually Synchronized Oscillator Arrays”. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, v. 39, n. 6, p. 1000–1009, 1991.

ZHANG, M. *et al.* “Synchronization of micromechanical oscillators using light”. *Physical Review Letters*, v. 109, n. 23, p. 1–5, 2012.

ZHU, Y.; ZHENG, Z. G.; YANG, J. Z. “Four-cluster chimera state in non-locally coupled phase oscillator systems with an external potential”. *Chinese Physics B*, v. 22, n. 10, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1674-1056/22/i=10/a=100505?key=crossref.464be241ca2c4a546669c24e87aa3f2d>>.