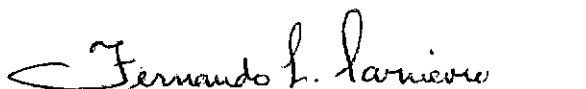


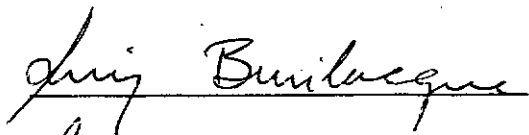
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
APLICADO A PROBLEMAS AXISSIMÉTRICOS

JOSE INÁCIO DANTAS

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.SC.)

APROVADA POR:


Presidente





RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
JULHO DE 1971

A meus pais.

A minha espôsa.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Fernando Luiz Lôbo Carneiro, pelo
apoio, compreensão, amizade.

Ao Núcleo de Computadores Eletrônicos, na
pessoa do Prof. Luiz Antonio Couceiro, pela colaboração.

I N D I C E

	Pág.
<u>CAPÍTULO I</u> - Introdução	1
<u>CAPÍTULO II</u> - Revisão da Literatura	7
<u>CAPÍTULO III</u> - Problema axissimétrico - Características do Elemento	9
3.1. - Introdução	9
3.2. - Função deslocamento	10
3.3. - Deformações e tensões	12
3.4. - Matriz elástica - Anisotropia estratificada	14
3.5. - Matriz de Rigidez	17
<u>CAPÍTULO IV</u> - Problema axissimétrico - Forças nodais	24
4.1. - Forças diretamente aplicadas aos nós	24
4.2. - Forças nodais devidas a deformações iniciais	24
4.3. - Forças nodais equivalentes a forças de massa	26
<u>CAPÍTULO V</u> - Problema axissimétrico - Conclusão	28
<u>CAPÍTULO VI</u> - Programa automático	30
6.1. - Introdução	30
6.2. - Rotinas - Diagramas de blocos	31
6.3. - Malhas - Recomendações - Restrições	38

	Pág.
6.4. - Âmbito do Programa - Listagem	41
<u>CAPÍTULO VII</u> - Aplicações - Análise dos resultados	43
7.1. - Introdução	43
7.2. - Convergência	44
7.3. - Comparação dos resultados	45
<u>CAPÍTULO VIII</u> - Conclusões e recomendações	46
<u>NOTAÇÕES</u>	48
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	51

C A P Í T U L O I

Introdução

A teoria elástica envolve três espécies de grandezas - Tensões, deformações e deslocamentos, definidas sobre determinado domínio D limitado por uma fronteira F , as quais se relacionam por intermédio de três grupos de equações de campo:

a) Equações de equilíbrio

$$| E | \{ \sigma \} = \{ p \}$$

b) Relações deformações - deslocamentos

$$\{ \xi \} = | B | \{ \delta \}$$

c) Relações tensões - deformações

$$\{ \sigma \} = | D | \{ \xi \}$$

Os vetores $\{ \sigma \}$, $\{ \xi \}$ e $\{ \delta \}$ contêm respectivamente as componentes de tensão, deformação e deslocamento. $| E |$ e $| B |$ são operadores diferenciais de primeira ordem, $\{ p \}$ é o vetor das componentes da densidade das forças de massa e $| D |$ é a matriz elástica simétrica.

As primeiras equações são de origem estática, as segundas de origem geométrica e as terceiras caracterizam

o comportamento mecânico do material. Este conjunto é suplementado por condições de fronteira, envolvendo tensões ou deslocamentos. Demonstra-se (KIRCHOFF) que os problemas assim postos tem solução unica.

Esta é a formulação analítica fundamental da teoria da elasticidade. Dar solução a um problema elástico, então, reduz-se à integração das equações anteriormente referidas obedecendo-se às condições de fronteira. As dificuldades conhecidas nessa integração levaram os engenheiros a formular hipóteses simplificadoras, mais ou menos satisfatórias, sobre o comportamento de tipos particulares de contínuos elásticos. Por exemplo, quando o material da estrutura se dispõe na vizinhança de uma superfície, tem-se a teoria das cascas, e se essa superfície é plana, tem-se a teoria das placas e dos estados elásticos planos. Quando o material se dispõe na vizinhança de uma linha, tem-se a teoria das barras ou peças lineares, etc...

Examinemos com mais cuidado a teoria das peças lineares. Desde o problema inicial, tridimensional, até a presente simplificação, um notável progresso foi conseguido: ao invêz de estudarmos campos definidos sobre domínios com três dimensões, estamos tratando de determinar um número finito de incógnitas, já que a fronteira F das peças lineares consiste nos dois pontos extremidade da mesma e é extremamente

simples neste caso resolver-se as equações diferenciais em termos de valores no contorno (forças e deslocamentos generalizados). Em outras palavras, conhecidos os valores de contorno, os campos elásticos estarão determinados. Além disso, nas estruturas reticuladas lineares podemos conceber a seguinte situação: o funcionamento da estrutura global é promovido pela associação dos diversos elementos lineares que se unem nos nós, ou seja, estudar o funcionamento da estrutura global é pesquisar o comportamento da associação de peças lineares simples, já tão bem conhecidas como se viu anteriormente. Essa é a essência do chamado processo de discretização da estrutura global que, embora quase intuitivo, é responsável pelo extraordinário progresso atual da mecânica das estruturas reticuladas, e é sua fase mais importante e sutil. Esse é, fora de dúvida, o maior desafio que se propõe ao engenheiro, o de formular hipóteses simplificadoras que permitam a discretização de um problema.

Diante do que foi visto, nada mais óbvio do que o analista, ao pretender estudar contínuos elásticos a duas dimensões, tentasse um processo de discretização semelhante, ou seja, tentasse retomar aqui um caminho que se revelou extremamente fértil na análise de estruturas reticuladas. Um embaraço maior, porém, se apresentava: enquanto naquelas a discretização era quase natural em virtude de sua geometria,

na situação atual o roteiro a ser seguido não era tão evidente. A principal pergunta que se fazia dizia respeito a como simular um domínio aonde era infinito o número de ligações entre seus subdomínios, através de um modelo com um número finito de tais ligações. O embaraço foi contornado a duras penas. Qualquer tentativa de simular o contínuo através de um modelo reticulado resultava frustrada se se exigia maior rigor nos resultados, ou um panorama geral dos campos elásticos na peça, ou ainda uma formulação que envolvesse as mais variadas situações, além do fato da análise se tornar tremendamente fastidiosa em virtude das distintas propriedades mecânicas dos elementos componentes do modelo.

Até que, por volta de 1953, e atendendo principalmente às necessidades da indústria aeronáutica, surgiu o método dos elementos finitos, rapidamente generalizado para tratar de estados triplos de tensão de uma forma geral. Como todas as tentativas que o precederam e que lhe deram origem, trata-se de um processo de discretização através da divisão do domínio V em subdomínios, ditos elementos finitos, cada um dos quais solidarizado aos outros através de um número finito de ligações, e que interagem através das condições reduzidas de compatibilidade e equilíbrio, proporcionando assim uma verificação média global do equilíbrio e compatibilidade e não uma verificação infinitesimal, como aconteceria se a solução

fôsse exata.

A característica inovadora, que individualiza o método, consiste na definição dos campos elásticos reinantes em cada subdomínio ou elemento finito. Enquanto em tudo que havia sido feito anteriormente admitia-se como premissa básica para que a montagem dos subdomínios fôsse elásticamente bem-representativa do contínuo, a necessidade destes subdomínios atenderem a tôdas as equações de campo do domínio, já no método dos elementos finitos estas equações são violadas, pois impõe-se que o campo elástico no subdomínio possa ser representado por uma combinação linear de um número finito de campos elementares ou modos elementares de deformação, imposição essa ditada pela necessidade óbvia de se obter um modelo o mais representativo possível do real.

A sistemática do método é a seguinte:

Após a divisão da estrutura em subdomínios, geralmente poligonais ou poliédricos, ligados entre si através de pontos privilegiados ditos nós, impõe-se que o campo de deslocamentos de um subdomínio possa ser expresso através de funções polinomiais de posição, ficando seus campos elásticos bem definidos a partir daí. Com a minimização da energia potencial de deformação constroi-se a matriz de rigidez do subdomínio, e a análise recai nos processos rotineiros da mecânica estrutural. Certamente que a seleção das funções polinomiais de posição, di-

-tas funções deslocamento, é fundamental para a convergência do método, obedecendo a critérios que, por exemplo, impedem a deformação do subdomínio quando seus nós sofrem deslocamentos de corpo rígido. E a eleição do fracionamento da estrutura em subdomínios, que fica a cargo da sensibilidade de quem o executa, tem relação direta com a velocidade de convergência do processo e com a precisão relativa dos diversos resultados de determinada análise.

Embora a formulação analítica do método seja a mesma para os diversos problemas da elasticidade, com pequenas nuances particulares, é importante reconhecer que, em se tratando de sua automatização para computador digital, há que se fazer distinções, originadas pelo número de deslocamentos generalizados possíveis por nó, número este que depende do tipo de problema analisado, e do elemento finito proposto. Para a solução de problemas com simetria axial (axissimétricos), é utilizado elemento finito anular, de seção triangular, com dois deslocamentos generalizados por nó.

C A P Í T U L O I I

REVISÃO DA LITERATURA

Embora relativamente recente, o método dos elementos finitos tem monopolizado a atenção dos analistas estruturais, o que justifica a literatura extensa e detalhada a respeito.

No concernente ao problema axissimétrico, o número de artigos já é bem mais limitado e nenhum dêles preenche a lacuna existente entre a formulação teórica do método e sua programação para computador digital, sem a qual o método perde parte do seu significado. Muito embora deva-se reconhecer que essa lacuna depende em grande escala da unidade de processamento disponível, que em nosso caso é um IBM /360 Mod. 40, com 256K bytes de memória central e funcionando sob o Sistema OS, certos preceitos de caráter geral deveriam ser mencionados, razão pela qual se anexa a este trabalho a listagem do programa automático desenvolvido e as restrições na sua utilização.

Excetuando então este particular, o artigo de ZIENKIEWICZ (1) é o mais completo, embora existam algumas restrições ao algoritmo de integração necessário à obtenção da

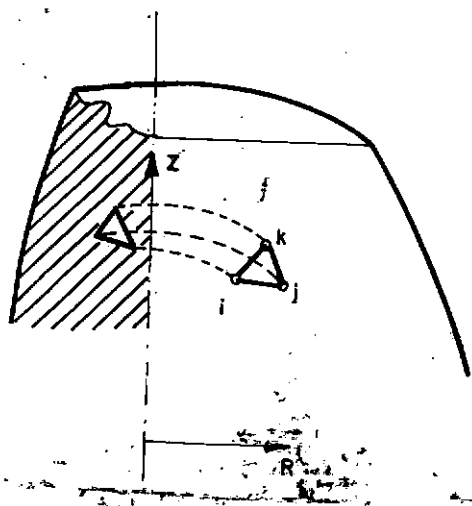
matriz de rigidez do elemento, e as aplicações apresentadas, em virtude da pobreza de informações, não venham a acrescentar o que seria desejável. Já CLOUGH (3) traz aplicações mais bem detalhadas. Finalmente, WILSON (4) traz formulação teórica bastante interessante, menos completa, entretanto, que ZIENKIEWICZ.

C A P Í T U L O I I I

PROBLEMA AXISSIMÉTRICO - CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO

3.1 - INTRODUÇÃO

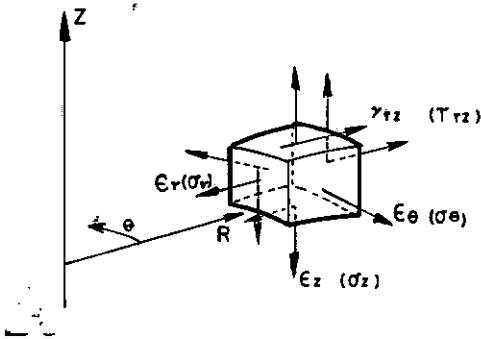
Em sólido de revolução, solicitado por carregamento axissimétrico, duas componentes de deslocamento em qualquer seção plana do corpo contendo o eixo de revolução, definem completamente o estado de deformações, e por conseguinte, o de tensões.



Assim, no que se segue, u denotará o deslocamento radial de um ponto, definido sobre um eixo R , e v denotará seu deslocamento axial, definido sobre um eixo z coincidente com o eixo de revolução do sólido. O elemento

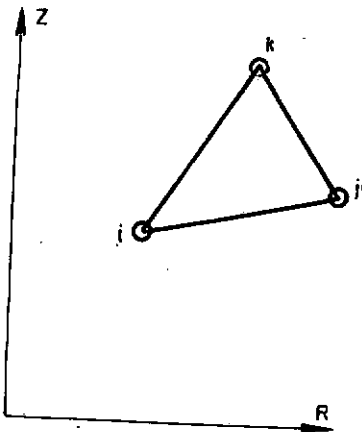
finito considerado é um sólido de revolução, de seção triangular, solidarizado aos elementos vizinhos por circunferências nodais, denotadas i , j , k no sentido anti-horário. As tensões e deformações no problema axissimétrico serão agrupadas nos daqui por diante denominados vetores das tensões e das deformações, e portanto, cada componente destes vetores

corresponderã a uma tensão ou deformação. Desta forma, cada um destes vetores possuirã quatro componentes, três das quais situadas no plano coordenado e a quarta na direção circunferencial, perpendicular a este plano. Ambos os vetores são constantes na direção circunferencial, em virtude da completa simetria.



3.2 - FUNÇÕES DESLOCAMENTO

Como já estabelecido, os deslocamentos do nó i , agrupados no vetor $\{\delta i\}$, serão



$$\{\delta i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

e os deslocamentos dos nós do elemento e , agrupados no vetor

$$\{\delta\}^e, \text{ serão}$$

$$\delta i$$

$$\{\delta\}^e = \{\delta j\}$$

$$\delta k$$

O campo de deslocamentos no subdomínio, função polinomial de posição, assumiremos ser da forma

$$\{\zeta(R, Z)\} = \begin{Bmatrix} \mu(R, Z) \\ v(R, Z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ R \\ Z \end{Bmatrix}$$

que, sendo linear, assegura a compatibilidade geométrica entre os elementos, após os deslocamentos de seus nós. Como a exposição será conduzida em termos dos deslocamentos nodais, é conveniente considerar

$$\begin{Bmatrix} \mu_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ R_i \\ Z_i \end{Bmatrix}$$

e expressões semelhantes para os outros nós, que nos leva finalmente a

$$\{\zeta(R, Z)\} = \begin{Bmatrix} \mu(R, Z) \\ v(R, Z) \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e \quad (1)$$

onde

$$[N] = [N_i, N_j, N_k]$$

e

$$N_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{a_i + b_i R + c_i Z}{2 \Delta} \right)$$

com

Δ = Área do triângulo

$$a_i = R_j Z_k - R_k Z_j$$

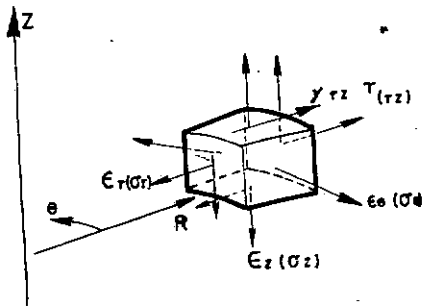
$$b_i = z_j - z_k$$

$$c_i = R_k - R_j$$

as demais matrizes sendo obtidas com permutações cíclicas dos índices.

3.3 - DEFORMAÇÕES E TENSÕES

As deformações no problema axissimétrico, agrupadas no vetor $\{\xi\}^e$, serão relacionadas aos deslocamentos nodais do elemento através de



$$\{\xi\}^e = [B] \{\delta\}^e \quad (2)$$

Para tal, considere-se a expressão

(TIMOSHENKO, 7)

$$\{\xi\}^e = \begin{Bmatrix} \xi_z \\ \xi_r \\ \xi_\theta \\ \gamma_{Rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta v}{\delta z} \\ \frac{\delta u}{\delta R} \\ \frac{u}{R} \\ \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta v}{\delta R} \end{Bmatrix}$$

que proporciona, juntamente com a equação (1)

$$|B| = |B_i, B_j, B_k|$$

$$\text{onde} \quad |B_i| = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 0 & c_i \\ b_i & 0 \\ \frac{a_i}{R} + b_i + \frac{c_i z}{R} & 0 \\ c_i & b_i \end{vmatrix}$$

É de se observar que, sendo a matriz $|B|$ função de posição, o campo de deformações também o será, através de seu termo $\xi\theta$. Assim, quando se impõe à peça deslocamentos tais que μ seja proporcional a R , obter-se-á um campo de deformações constante. Considerando que este é o único campo de deslocamentos com tal propriedade, conclui-se da satisfação da função deslocamento adotada aos critérios de convergência de ZIENKIEWICZ.

Se deformações iniciais foram impostas ao sólido em estudo, o vetor

$$\{\xi_0\}^e = \begin{Bmatrix} \xi_{0z} \\ \xi_{0x} \\ \xi_{0\theta} \end{Bmatrix}$$

γ_{0xz}

Deverá ser considerado, e se estas deformações iniciais forem de origem térmica, ter-se-á

$$\{\xi_0\}^e = \begin{Bmatrix} \alpha \theta \\ \alpha \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde α é o coeficiente de dilatação térmica do material e θ a temperatura no ponto em estudo. O vetor $\{\sigma\}^e$, que agrupa as tensões, pode ser escrito

$$\{\sigma\}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_{\theta} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = |D| (\{\xi\} - \{\xi_0\})$$

ou seja

$$\{\sigma\}^e = |D| |B| \{\delta\}^e - |D| \{\xi_0\} \quad (3)$$

onde $|D|$ é u'a matriz elástica, $|B|$ é a matriz de transformação previamente definida e o vetor $\{\sigma\}^e$, vetor das tensões no elemento e , é função de posição.

3.4 - MATRIZ ELÁSTICA - ANISOTROPIA ESTRATIFICADA

Na equação 3, a matriz $|D|$ chamada matriz elástica, não poderia referir-se ao caso mais geral de anisotropia, pois isso conflitaria com o caráter axissimétrico do problema. Assim, a única situação anisotrópica permissível é aquela aonde as características elásticas do material são

constantes na direção circunferencial. Isto nos leva a anisotropia estratificada, aonde as características elásticas na direção radial são distintas das na direção axial, e os planos de estratificação são ortogonais ao eixo de simetria.

Para determinação da matriz $|D|$, considere-se

$$\xi_z = \sigma_z/E_z - \nu_z \sigma_r/E_z - \nu_z \sigma_\theta/E_z$$

$$\xi_r = -\nu_z \sigma_z/E_z + \sigma_r/E_r - \sigma_r \sigma_\theta/E_r$$

$$\xi_\theta = -\nu_z \sigma_z/E_z - \nu_r \sigma_r/E_r + \sigma_\theta/E_r$$

$$\gamma_{zr} = \tau_{zr}/G_z$$

onde E_z , ν_z , G_z e E_r , ν_r são o módulo de elasticidade longitudinal, o coeficiente de Poisson, e o módulo de elasticidade transversal nas direções axial e radial, respectivamente.

Escrevendo

$$\frac{E_r}{E_z} = n \quad \frac{G_z}{E_z} = m$$

e resolvendo o sistema para as tensões, obtém-se

$$|D| = \frac{Ez}{(1+u_x)(1-u_x-2nu_z^2)} \begin{vmatrix} 1-u_x^2 & nu_z(1+u_x) & nu_z(1+u_x) & 0 \\ & n(1-nu_z^2) & n(u_x+nu_z^2) & 0 \\ & & n(1-nu_z^2) & 0 \\ (Sim.) & & & m(1+u_x) \times \\ & & & \times (1-u_x-2nu_z^2) \end{vmatrix}$$

que, se se deseja particularizar para a situação isotrópica, basta considerar

$$E_x = E_z = E \quad \text{ou} \quad n = 1 \quad \text{e} \quad u_x = u_z = u$$

e além disso

$$\frac{G_z}{E_z} = \frac{G}{E} = \frac{1}{2(1+u)}$$

e obter-se-á

$$|D| = \frac{E}{(1+u)} \frac{(1-u)}{(1-2u)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{u}{1-u} & \frac{u}{1-u} & 0 \\ & 1 & \frac{u}{1-u} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ (Sim.) & & & \frac{1-2u}{2(1-u)} \end{vmatrix}$$

Acrescente-se que, em se tratando de deformações iniciais de origem térmica em problemas anisotrópicos, são possíveis dois coeficientes de dilatação térmica, um na

direção radial, ar , e outro na direção axial, az . Assim, o vetor das deformações iniciais tomará o aspecto

$$\{\xi_0\}^e = \begin{Bmatrix} az \cdot \theta \\ ar \cdot \theta \\ ar \cdot \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde θ é a temperatura no ponto em estudo.

3.5 - MATRIZ DE RIGIDEZ

Por razões expostas em VASCONCELLOS (2), Cap. 1.3, determina-se a matriz de rigidez de um elemento finito a travêz da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, que proporciona

$$|K|^e = \int |B|^T |D| |B| d(VOL)$$

(vol)

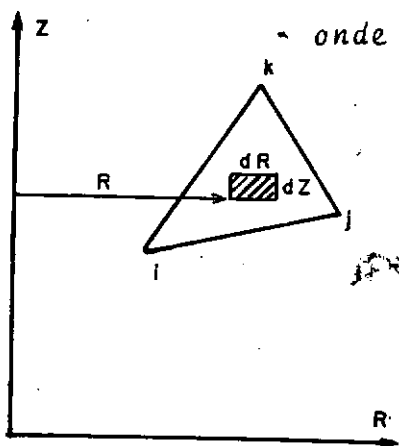
onde $|K|^e$ é a matriz de rigidez do elemento e.

Considerando que

$$d(VOL) = 2\pi R dR dz$$

obtem-se

$$|K|^e = 2\pi \int \int |B|^T |D| |B| R dR dz$$



Lembrando que

$$|B| = |B_i, B_j, B_k|$$

chega-se

$$|K_{rs}|^e = 2\pi \iint_S |Br|^T |D| |Bs| R dR dZ$$

onde $|K_{rs}|^e$ representa as forças generalizadas em um nó qualquer R para deslocamentos correspondentes unitários em S . Como visto anteriormente, a matriz $|B|$ é função de ponto, e tendo por objetivo simplificar a integração, a mesma será decomposta em outras duas, a primeira das quais obtida para a matriz $|B|$ calculada no centroide do triângulo. Assim

$$|B| = |\bar{B}| + |B'|$$

onde $|\bar{B}|$ é a matriz centroidal, constante, e $|B'|$ é a parcela corretiva.

Evidentemente

$$|Br| = |\bar{B}r| + |Br'|$$

Aonde

$$|\bar{B}r| = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 0 & Cr \\ br & 0 \\ \frac{ar}{R} + br + \frac{cr}{R} & 0 \\ Cr & br \end{vmatrix}$$

$$|B'_R| = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \left\{ \left(\frac{ar}{R} + \frac{crZ}{R} \right) - \left(\frac{ar}{R} + \frac{crZ}{R} \right) \right\}$$

$$\text{sendo } \bar{R} = \frac{R_i + R_j + R_k}{3}$$

$$\bar{Z} = \frac{Z_i + Z_j + Z_k}{3}$$

Desta forma, obtem-se

$$\begin{aligned} |K_{rs}|^e &= 2\pi \iint (|\bar{B}_R| + |B_{R'}|)^T |D| (|\bar{B}_\Delta| + |B'_{\Delta}|) R dR dZ \\ &= 2\pi \iint (|\bar{B}_R|^T |D| |\bar{B}_\Delta| + |\bar{B}_R|^T |D| |B'_{\Delta}| + \\ &\quad + |B_{R'}|^T |D| |\bar{B}_\Delta| + |B_{R'}|^T |D| |B'_{\Delta}|) R dR dZ \\ &= 2\pi |\bar{B}_R|^T |D| |\bar{B}_\Delta| \bar{R} \Delta + 2\pi \iint |B_{R'}|^T |D| |B'_{\Delta}| R dR dZ + \\ &\quad + 2\pi |\bar{B}_R|^T |D| \iint |B'_{\Delta}| R dR dZ + 2\pi (\iint |B'_{R}|^T R dR dZ) |D| |\bar{B}_\Delta| \\ &\text{e finalmente} \end{aligned}$$

$$|K_{rs}|^e = 2\pi |\bar{B}_R|^T |D| |\bar{B}_\Delta| \bar{R} \Delta + 2\pi \iint |B_{R'}|^T |D| |B'_{\Delta}| R dR dZ$$

já que

$$\begin{aligned} \iint |B_{R'}|^T R dR dZ &= \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \iint \left\{ \left(\frac{ar}{R} + \frac{crZ}{R} \right) - \left(\frac{ar}{R} + \frac{crZ}{R} \right) \right\} R dR dZ \\ &= \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \left\{ \iint (ar + crZ) dR dZ - \left(\frac{ar}{R} + \frac{crZ}{R} \right) \iint R dR dZ \right\} \end{aligned}$$

$$= 0 = \iint |B_s'| R dR dZ$$

Assim, a matriz de rigidez será obtida através de duas parcelas, a primeira das quais particularizada para o centroide do triângulo. Resta avaliar a segunda parcela, que envolve a integração a ser apresentada. Denotemos esta segunda parcela $|K_{rs}'|^e$. Teremos

$$|K_{rs}|^e = |K_{\bar{r}s}|^e + |K'_{rs}|^e$$

e ainda

$$|K'_{rs}|^e = \frac{2\pi}{(2\Delta)^2} \begin{vmatrix} 0010 \\ 0000 \end{vmatrix} |D| \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \iint \left\{ \left(\frac{ar}{R} + \frac{crZ}{R} \right) - \left(\frac{ar}{R} + \frac{crZ}{R} \right) \right\} \left\{ \left(\frac{as}{R} + \frac{csZ}{R} \right) - \left(\frac{as}{R} + \frac{csZ}{R} \right) \right\} R dR dZ$$

ou seja,

$$|K'_{rs}|^e = \frac{2\pi}{(2\Delta)^2} \begin{vmatrix} D_{33} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \left\{ ar as \left(I_1 - \frac{1}{R} \right) + (ar cs + as cr) \left(I_2 - \frac{Z}{R} \right) + \right. \\ \left. + c_r c_s \left(I_3 - \frac{Z^2}{R} \right) \right\}$$

onde

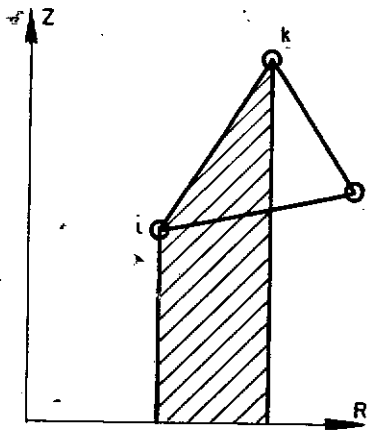
$$I_1 = \frac{1}{\Delta} \iint \frac{1}{R} dR dZ$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta} \iint \frac{Z}{R} dR dZ$$

$$I_3 = \frac{1}{\Delta} \iint \frac{Z^2}{R} dR dZ$$

Para avaliar estas integrais, considere-se a

reta



$$Z = A_{ik} + B_{ik} R$$

unindo os nós i e k , onde

$$A_{ik} = \frac{R_k Z_i - R_i Z_k}{R_k - R_i} \quad B_{ik} = \frac{Z_k - Z_i}{R_k - R_i}$$

Então, as integrais sob a linha ik serão

$$\int_{R=R_i}^{R=R_k} \int_{Z=0}^{Z=A_{ik}+B_{ik}R} \frac{1}{R} dR dZ$$

$$= \int_{R=R_i}^{R=R_k} \frac{1}{R} (A_{ik} + B_{ik} R) dR = A_{ik} \ln \frac{R_k}{R_i} +$$

$$+ B_{ik} (R_k - R_i)$$

$$\int_{R=R_i}^{R=R_k} \int_{Z=0}^{Z=A_{ik}+B_{ik}R} \frac{Z}{R} dR dZ$$

$$= \int_{R=R_i}^{R=R_k} \frac{1}{R} \frac{(A_{ik} + B_{ik} R)^2}{2} dR =$$

$$= \frac{A_{ik}^2}{2} \ln \frac{R_k}{R_i} + A_{ik} B_{ik} (R_k - R_i) + \frac{B_{ik}^2}{4} (R_k^2 - R_i^2)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{R=R_i}^{R=R_k} \int_{Z=0}^{Z=A_{ik}+B_{ik}R} \frac{Z^2}{R} dR dZ = \int_{R=R_i}^{R=R_k} \frac{1}{R} \frac{(A_{ik}+B_{ik}R)^3}{3} dR \\
 & = \frac{A_{ik}^3}{3} \ln \frac{R_k}{R_i} + A_{ik}^2 B_{ik} (R_k - R_i) + \frac{A_{ik} B_{ik}^2}{2} (R_k^2 - R_i^2) + \frac{B_{ik}^3}{9} \times \\
 & \quad \times (R_k^3 - R_i^3)
 \end{aligned}$$

e as integrais tomadas sob a área do triângulo serão obtidas somando-se as integrais sob as linhas ik, kj, ji , o que redunda em

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\Delta} \{ (A_{ji} - A_{ik}) \ln R_i + (A_{kj} - A_{ji}) \ln R_j + (A_{ik} - A_{kj}) \ln R_k + \\
 & \quad + B_{ik} (R_k - R_i) + B_{kj} (R_j - R_k) + B_{ji} (R_i - R_j) \} \\
 I_2 &= \frac{1}{\Delta} \{ (A_{ji}^2 - A_{ik}^2) \frac{\ln R_i}{2} + (A_{kj}^2 - A_{ji}^2) \frac{\ln R_j}{2} + (A_{ik}^2 - A_{kj}^2) \frac{\ln R_k}{2} + \\
 & \quad + A_{ik} B_{ik} (R_k - R_i) + A_{kj} B_{kj} (R_j - R_k) + A_{ji} B_{ji} (R_i - R_j) + \\
 & \quad + \frac{B_{ik}^2}{4} (R_k^2 - R_i^2) + \frac{B_{kj}^2}{4} (R_j^2 - R_k^2) + \frac{B_{ji}^2}{4} (R_i^2 - R_j^2) \} \\
 I_3 &= \frac{1}{\Delta} \{ (A_{ji}^3 - A_{ik}^3) \frac{\ln R_i}{3} + (A_{kj}^3 - A_{ji}^3) \frac{\ln R_j}{3} + (A_{ik}^3 - A_{kj}^3) \frac{\ln R_k}{3} + \\
 & \quad + A_{ik}^2 B_{ik} (R_k - R_i) + A_{kj}^2 B_{kj} (R_j - R_k) + A_{ji}^2 B_{ji} (R_i - R_j) + \\
 & \quad + \frac{A_{ik} B_{ik}^2}{2} (R_k^2 - R_i^2) + \frac{A_{kj} B_{kj}^2}{2} (R_j^2 - R_k^2) + \frac{A_{ji} B_{ji}^2}{2} (R_i^2 - R_j^2) +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{B_{ik}^3}{9} (R_k^3 - R_i^3) + \frac{B_{kj}^3}{9} (R_j^3 - R_k^3) + \frac{B_{ji}^3}{9} (R_i^3 - R_j^3) \}$$

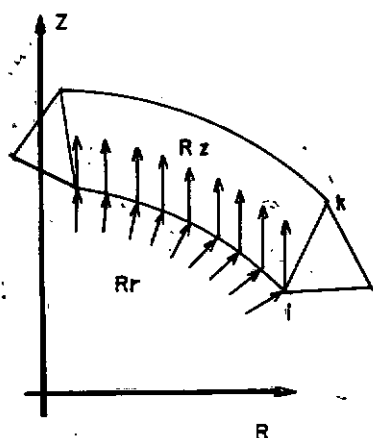
Na avaliação destas integrais, é de se observar que dois tipos de impossibilidade acontecerão: Seja quando uma das distâncias radiais qualquer, R_s , se anula, impossibilitando o cálculo de seu logaritmo, seja quando duas distâncias radiais, R_s e R_k , tornam-se iguais, impossibilitando o cálculo dos valores A_{sk} e B_{sk} . A primeira das impossibilidades será manipulada substituindo-se a distância radial nula por um valor fictício, diferente de zero mas de pequena ordem de grandeza se comparado com as outras dimensões do elemento finito em questão. Além disso, a condição de deslocamento radial nulo será explicitada. A segunda impossibilidade ocorre quando a reta unindo dois nós torna-se paralela ao eixo Z . Evidentemente, todas as integrais sob esta linha serão nulas e a impossibilidade é contornada anulando-se simplesmente os valores A_{sk} e B_{sk} . A esse propósito, se se observar as três últimas parcelas da integral I_1 , constata-se que sua soma é nula. Entretanto, se um dos lados torna-se paralelo ao eixo Z essa nulidade já não ocorre mais e essa é a razão que obriga as três parcelas a figurarem na expressão de I_1 .

Finalmente, é obtida a matriz de rigidez do elemento considerado montando-se as diversas (nove) matrizes $|K_{rs}|^e$.

C A P Í T U L O I V

PROBLEMA AXISSIMÉTRICO - FORÇAS NODAIS

4.1 - FORÇAS DIRETAMENTE APLICADAS AOS NÓS



Em se tratando de elementos finitos unidos entre si através de circunferências nodais, é óbvio que as forças diretamente aplicadas aos nós são aquelas distribuídas ao longo da circunferência. Assim, se $\{R\}$ denota o vetor das forças por unidade de

circunferência, agrupadas nas direções R e Z respectivamente, aplicadas em nó que dista R do eixo Z , os valores que devem ser introduzidos na computação são

$$2\pi R\{R\}$$

4.2 - FORÇAS NODAIS DEVIDAS A DEFORMAÇÕES INICIAIS

Em ZIENKIEWICZ (1), Cap. 2.2.4, encontra-se

$$\{F\}_{\xi_0}^e = \int |B|^T |D| |\xi_0| d(VOL)$$

(VOL)

que fornece o vetor das forças nodais oriundas de deformações iniciais, $\{F\}_{\xi_0}^e$.

Assim

$$\{F\}_{\xi_0}^e = 2\pi \iint |B|^T |D| \{ \xi_0 \} R dR dZ$$

ou seja, considerando o vetor $\{ \xi_0 \}$ sempre constante no interior de um elemento finito,

$$\{F\}_{\xi_0}^e = 2\pi \left| \iint |B|^T R dR dZ \right| |D| \{ \xi_0 \}$$

Particionando $|B|$, e decompondo-o como executado para dedução da matriz de rigidez, chega-se a

$$\begin{aligned} \{F_\delta\}_{\xi_0}^e &= 2\pi \left| \iint \bar{B}_\delta \right|^T R dR dZ \left| D \right| \{ \xi_0 \} + \\ &+ 2\pi \left| \iint B'_\delta \right|^T R dR dZ \left| D \right| \{ \xi_0 \} \end{aligned}$$

Considerando a nulidade da segunda integral, já estabelecida anteriormente, obtém-se

$$\{F_\delta\}_{\xi_0}^e = 2\pi \left| \bar{B}_\delta \right|^T \left| D \right| \{ \xi_0 \} \iint R dR dZ$$

$$= 2\pi \left| \bar{B}_\delta \right|^T \left| D \right| \{ \xi_0 \} R \cdot \Delta$$

que proporciona, após a montagem das subma-

-trizes

$$\{F\}_{\xi_0}^e = 2\pi |B|^T |D| \{\xi_0\} R \cdot \Delta$$

4.3 - FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES A FORÇAS DE MASSA

Seja $\{p\}$ o vetor das forças de massa por unidade de volume do material, suposto constante no interior de um elemento finito. O vetor das forças nodais equivalentes se
rã (1):

$$\{F\}_p^e = \int |N|^T \{p\} d(VOL)$$

ou

$$\{F\}_p^e = 2\pi \iint |N|^T \{p\} R dR dZ$$

ou ainda

$$\{Fs\}_p^e = 2\pi \iint |Ns|^T \{p\} R dR dZ$$

que pode ser escrito, tendo-se em mente a de
finição da matriz $|N|$ em item anterior

$$\{Fs\}_p^e = \frac{2\pi}{2\Delta} \iint \{p\} (as + bs R + cs Z) R dR dZ$$

$$= \frac{2\pi}{2\Delta} \{p\} \iint (a_s + b_s R + c_s Z) R dR dZ$$

Para avaliar a integral, considere-se

$$\begin{aligned} \iint (a_s + b_s R + c_s Z) R dR dZ &= a_s \iint R dR dZ + b_s \iint R^2 dR dZ + c_s \iint RZ dR dZ \\ &= a_s \cdot \bar{R} \cdot \Delta + b_s \cdot I_1 + c_s \cdot I_2 \end{aligned}$$

Observa-se que a integral I_1 representa o momento de inércia do triângulo em relação ao eixo Z , com expressão

$$I_1 = \iint R^2 dR dZ = \frac{\Delta}{12} (R_i^2 + R_j^2 + R_k^2) + \frac{\Delta}{9} (R_i + R_j + R_m)^2$$

Sendo a primeira parcela o momento de inércia centroidal e a segunda parcela o termo de translação.

A segunda integral, I_2 , é o momento centrífugo ou produto de inércia do triângulo, e da mesma forma será escrita em duas parcelas, a primeira centroidal e a segunda o termo de translação.

$$\begin{aligned} I_2 = \iint RZ dR dZ &= \frac{\Delta}{12} (R_i Z_i + R_j Z_j + R_k Z_k) + \\ &+ \frac{\Delta}{9} (R_i + R_j + R_k) \cdot (Z_i + Z_j + Z_k) \end{aligned}$$

Avaliados assim os vetores $\{F_s\}_p^e$, monta-se o vetor $\{F\}_p^e$, referente às cargas nodais induzidas por forças de massa.

C A P Í T U L O V

PROBLEMA AXISSIMÉTRICO--- CONCLUSÃO

Após a geração da matriz de rigidez do elemento finito, a topologia da estrutura ditará a montagem da matriz de rigidez global, e a fase da inversão é a seguinte. Construídos os vetores das forças nodais equivalentes aos diversos tipos de carregamentos, o vetor resultante premultiplicado pela matriz de rigidez invertida fornecerá deslocamentos dos nós da estrutura. De posse destes, calculam-se tensões e a análise finaliza. Como toda esta formulação é rotineira e encontra-se explanada de uma forma muito clara e concisa em VASCONCELLOS (2), será aqui omitida. Deve-se ressaltar entretanto, que de posse dos deslocamentos nodais, os campos elásticos no interior de um subdomínio ficam determinados. Como o campo de tensões é função de posição, dispunha-se de duas opções: ou se apresentava como resultados as tensões no centrói de do elemento finito, ou se apresentava estas tensões nos pontos nodais. Por motivos diversos, aonde se conclui também a comodidade na análise dos resultados, preferiu-se a segunda opção, e o vetor de tensões resultante em determinado nó é a média dos vetores de tensões nodais correspondentes dos diversos elementos finitos que concorrem naquêlê nó. Vai-se constatar que este procedimento fornece tensões com aproximações

excelentes, salvo em nós de fronteira, onde certa oscilação sempre acontece.

C A P Í T U L O V I

PROGRAMA AUTOMÁTICO

6.1 - INTRODUÇÃO

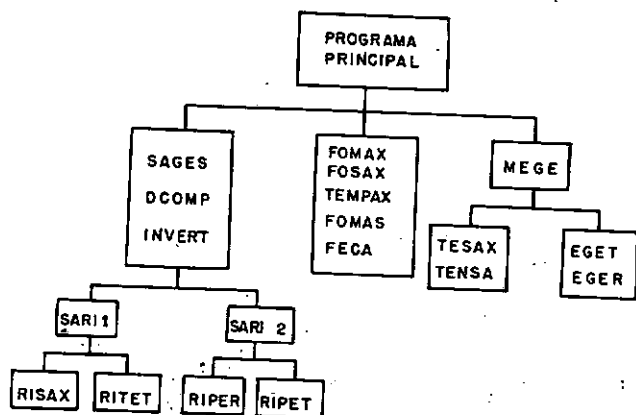
O professor Alcebíades Vasconcellos Filho aplicou o método dos elementos finitos na solução de problemas de placas e de elasticidade plana e o programa automático, desenvolvido originalmente para o sistema IBM 1130 da COPPE, serviu de estrutura básica para a execução do presente trabalho. Este programa é composto de uma série de Rotinas e um programa principal. Todas as tarefas que dizem respeito a um problema específico são desenvolvidas nas rotinas, ficando as providências de caráter geral, tais como entrada/saída de dados, etc, afetas ao programa principal. Tal estrutura de programa, bastante flexível, permitiu que a ampliação do programa existente para tratar do problema axissimétrico se transformasse, basicamente, na construção de rotinas apropriadas para esta situação. A nova configuração do programa, já com a inclusão destas rotinas, tomou dimensões excessivas no que se refere a ocupação de memória e tempo de computação, além da análise axissimétrica exigir um número de algoritmos significativos nos resultados que o 1130 não era capaz de fornecer. Assim, montou-se o programa no IBM /360, Mod 40, na ocasião re-

-cem-instalado na COPPE.

Então, o problema original de elaboração de rotinas para o tratamento do problema axissimétrico foi acrescido das dificuldades da adaptação do conjunto de rotinas do 1130 para o /360, que não foram poucas, não obstante ter sido usada a linguagem Fortran, com distinções mínimas de um sistema computacional para o outro. Esta adaptação implicou em modificações no programa principal e nas rotinas já existentes, razão pela qual a listagem a ser apresentada em itens sequentes se refere a todo o conjunto.

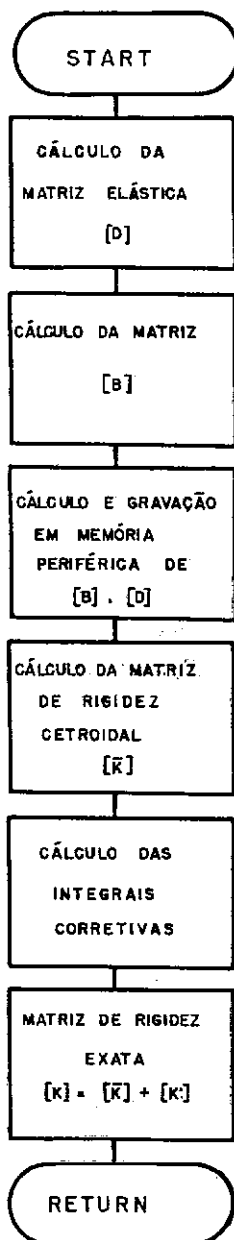
6.2 - ROTINAS - DIAGRAMAS DE BLOCOS

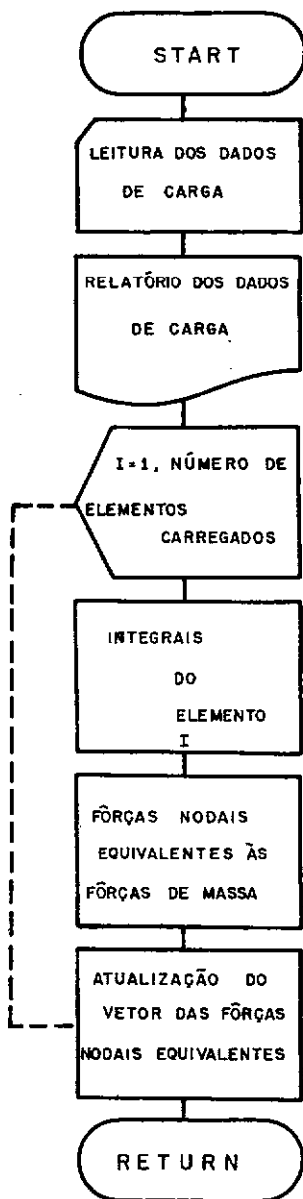
O programa já na nova configuração envolve dezenove rotinas, das quais cinco dizem respeito exclusivamente ao problema axissimétrico e dez são utilizadas em sua solução.

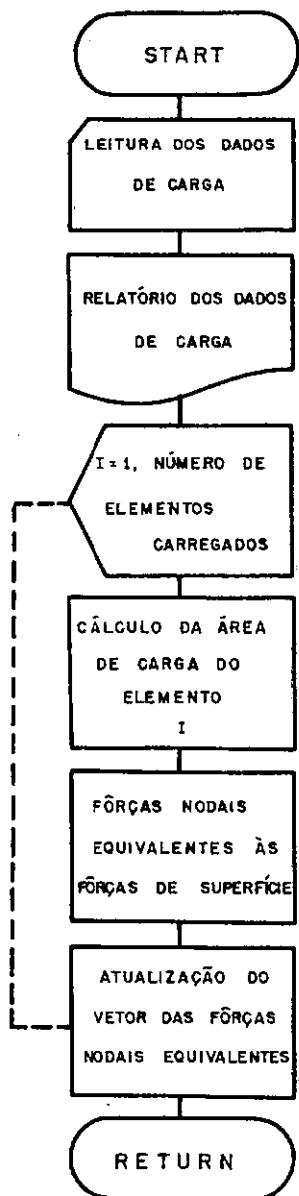


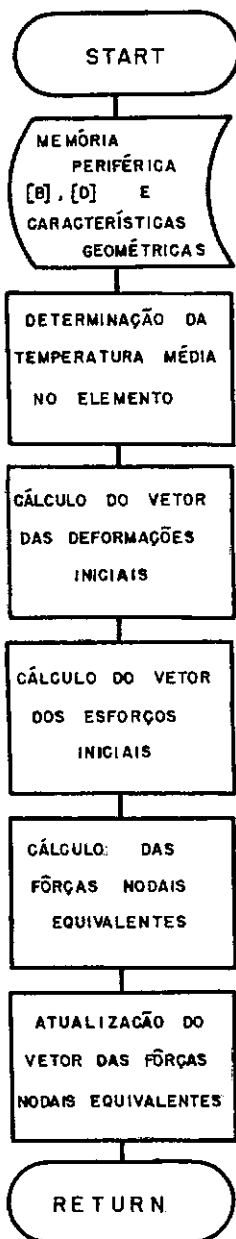
Durante a execução de uma tarefa nem todas as rotinas residem na memória central, tendo-se criado uma estrutura de OVERLAY para adequar o tamanho da partição de memória disponível ao requerido pelo programa principal e rotinas.

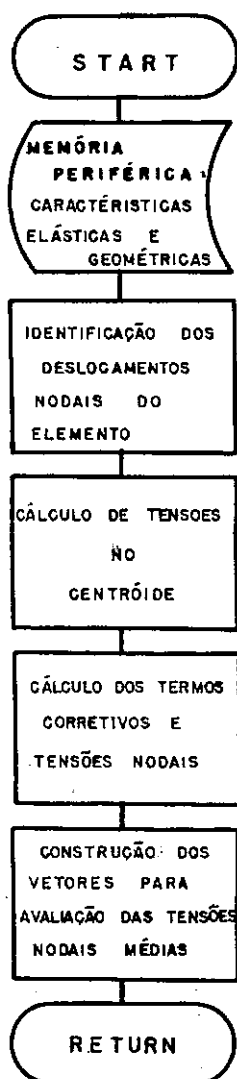
As cinco rotinas específicas do problema axi-simétrico são - RISAX, FOMAX, FOSAX, TEMPAX e TESAX. A primeira gera a matriz de rigidez de um elemento finito, sendo então chamada pelo programa principal tantas vezes quantos são os elementos da estrutura em análise. As três seguintes calculam forças nodais equivalentes a diversos tipos de carregamento: FOMAX trata das forças de massa, FOSAX das de superfície e TEMPAX trata dos esforços de origem térmica. Finalmente, TESAX calcula tensões nos nós de um elemento finito axissimétrico. Seguem-se os diagramas de blocos.











6.3 - MALHAS: RECOMENDAÇÕES - RESTRIÇÕES

Como já observado no Capítulo I, muito da experiência e familiaridade do analista com o método dos elementos finitos é requerido quando do fracionamento do domínio em subdomínios, ou seja, quando do lançamento da montagem de elementos finitos que simulará o sólido em estudo. As condicionantes principais são o tempo de computação e a precisão dos resultados obtidos. Ambas crescem a medida que se refina a malha, e é preciso definir o ponto ideal em que se obtenha precisão satisfatória com tempo de computação razoável. Paralelamente a isto, locais com gradientes de tensões elevados exigem malhas mais sensíveis e em contraposição, distinções geométricas acentuadas entre elementos finitos de u'a mesma malha geralmente introduzem erros de truncamento nos resultados, introdução localizada principalmente nos algoritmos de integração utilizados na obtenção da matriz de rigidez do elemento.

Estas considerações, que ainda não acentuam toda a complexidade do problema, justificariam a inclusão em todo trabalho sobre método dos elementos finitos, de critérios gerais de estabelecimento de malhas mais convenientes, e será executada aqui uma tentativa de esboço de tais critérios no problema axissimétrico e para o programa automático a ser

apresentado, montado no sistema IBM /360 da CÔPPE, tal esboço podendo tornar-se parcial ou totalmente falso se se utiliza seja outro sistema computacional, seja outro programa automático. Alguns dos critérios são evidentes por si próprios, outros só terão por justificativa a experiência do autor em problemas correlatos, e em sua totalidade eles só dirão respeito aos algoritmos de integração e via de regra terão caráter limitativo.

Assim, no problema axissimétrico, é sempre oportuno lembrar dos seguintes itens:

a) A origem do Sistema de referência não deve ser locada muito distante do Sólido em estudo, em outras palavras, as ordenadas Z dos nós da estrutura devem, sempre que possível, variar de um mínimo $-A$ a um máximo A ($A > 0$).

b) É sempre conveniente considerar a eventual simetria do problema em foco, manipulando somente o trecho não simétrico do sólido, obrigando obviamente a deslocamentos nulos nas direções perpendiculares ao eixo de simetria, os nós nêle situados.

c) A geometria da malha deve ser a mais regular possível e preferencialmente os elementos finitos, em seção contendo o eixo Z , seriam triângulos com dois lados formando ângulos de 45 graus com o eixo Z , o terceiro lado sendo paralelo ou perpendicular a este.

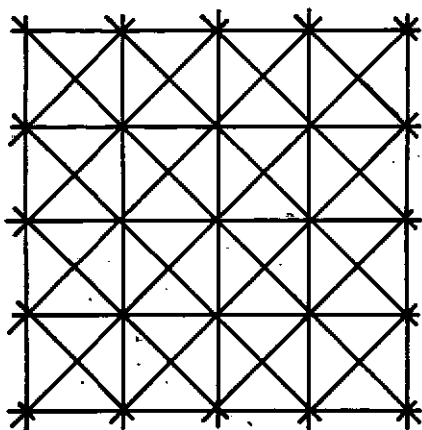
d) O número de algarismos significativos das coordenadas nodais não deve ser superior a cinco.

e) Nós sobre o eixo de simetria Z devem ter suas abcissas nulas substituídas por um valor fictício, da ordem de 0,01% da menor das outras abcissas nodais dos elementos finitos aos quais eles pertencem, além de se explicitar a condição de deslocamento radial nulo dos mesmos, através de ligações nesta direção.

f) Se se trabalha com elementos finitos que atendam ou pelo menos não estejam muito distantes das relações citadas no item c, a relação lado horizontal ou vertical do elemento finito sobre menor abcissa nodal do mesmo não deve se tornar inferior a 0,5%. Em outras situações esta cota inferior pode atingir até 1%. A título de exemplo, suponha-se que se deseja calcular casca axissimétrica, e seja necessário conhecer tensões em cinco pontos ao longo de toda a espessura. Assim, dever-se-á ter cinco nós e quatro elementos finitos distribuídos ao longo da espessura, o que obriga a que esta seja no mínimo 2% do raio do meridiano de maior perímetro.

Se a relação citada acima for violada erros serão introduzidos, mas os primeiros dois algarismos da tensão circunferencial, geralmente a de maior valor absoluto, ainda serão aproveitáveis, se não se exceder 0,1%.

g) A malha que proporcionou melhores resulta-



dos com menor número de nós foi a da figura, sendo que os nós centrais acusaram resultados mais precisos que os laterais.

Esta configuração de malha é a aconselhada especialmente se o problema envolve nos no eixo

de simetria Z.

6.4 - ÂMBITO DO PROGRAMA - LISTAGEM

Apresenta-se aqui, por motivos justificados anteriormente, a listagem completa do programa existente na COPPE que aplica o método dos elementos finitos na solução de problemas axissimétricos, de placas e de elasticidade plana. No que se refere ao problema axissimétrico, este programa possibilita a análise de problemas onde estejam presentes forças de massa, de superfície e esforços de origem térmica. A situação elástica pode ser isotrópica ou anisotrópica estratificada. Fundamentalmente, o problema axissimétrico trata de sólidos, onde a espessura seja da mesma ordem de grandeza das outras dimensões, mas cascas axissimétricas e placas circulares também podem ser analisadas, desde que obedçam a restrições citadas no item anterior.

A fim de fornecer maior potencialidade ao programa, a técnica de divisão do problema em subestruturas foi adotada. Segue-se a listagem.

C A P Í T U L O V I I

APLICAÇÕES - ANÁLISE DOS RESULTADOS

7.1 - INTRODUÇÃO

Os exemplos de aplicação do programa automático de solução de problema axissimétrico através do método dos elementos finitos foram construídos com três objetivos principais: determinação de relações geométricas, numéricas, ou topológicas que não deveriam ser violadas sob pena de não se obter resultados significativos, verificação experimental da convergência do método para a função deslocamento adotada, e finalmente a determinação dos campos elásticos em situações inéditas, ou pelo menos, em situações que foram julgadas interessantes. Assim, dois problemas básicos foram solucionados: anel de seção triangular, anel de seção quadrada. O primeiro problema forneceu subsídios para a manipulação da singularidade no ponto $R=0$ e envolveu a solução de 50 configurações de malha. A maioria das restrições contidas no item 6.3 do capítulo VI foram concluídas da análise do anel de seção quadrada, conduzida através de cinco malhas distintas. Este segundo problema também se destinou à análise de convergência. Atendendo ao terceiro dos objetivos citados anteriormente, ainda enquadrou-se o anel de seção quadrada, cujos campos elásticos eram conhecidos apenas parcialmente.

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 1

```
SUBROUTINE EGER(DJ, I, VEGA, LEGA)
  IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z), INTEGER*2(I-N)
  INTEGER*2 SUBN
  REAL*8 MAT(12,12)
  DIMENSION DJ(78,2), DJA(12), VEGA(156,2), VEG(12), LAJ(4), LEGA(156,2)
  COMMON /UM/ S(78,78), FTC(78,2), JI(60), JJ(60), JK(60), JL(60), LL(78),
  ILTE(60), LCL(78), LCL1(78), LCL2(78), SUBN, NCJ, NEL, NCE, I1, I2, I3, J1, J2,
  2J3, K1, K2, K3, L1, L2, L3, NSUS, NL1, NL2, NJU, N, NL, NCA, NJU3,>NNL,>NNL1, ID, JD
  3, NJL1A, ITP, NJU2, ID1, ID2, ID3, ID4, ID5, ID6, ID7, ID8, ID9, ID10, ID11, ID12
  COMMON /DOIS/ X(39), Y(39), EX(5), EY(5), ESP(60), LCE(60), EE(5), G(5)
  EQUIVALENCE (MAT(1,1), S(1,1))
```

ESTA SUBROUTINE REFERE-SE A ELEMENTOS RETANGULARES ORTOTROPOS UTILIZADOS NA ANALISE DE PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE. ELA CALCULA OS MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO NOS NOS DO ELEMENTO I AO MESMO TEMPO EM QUE OS ADICIONA AS MATRIZES VEGA E LEGA. ESTAS MATRIZES PERMITIRAO O CALCULO DA MEDIA DOS MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO EM CADA PUNTO NODAL.

```
ID=SUBN
READ(11, ID) X, Y, EX, EY, EE, G, ESP, LCE
DO 112 LN=1, NCA
  IF(LN-1) 1050, 101, 1050
101  IA=JI(I)-NCJ
    JA=JJ(I)-NCJ
    KA=JK(I)-NCJ
    LA=JL(I)-NCJ
    A=DSORT((X(LA)-X(IA))**2+(Y(LA)-Y(IA))**2)
    B=DSORT((X(JA)-X(IA))**2+(Y(JA)-Y(IA))**2)
    P=A/B
    PX=A*B
    II=LCE(I)
    VA=ESP(I)**3/12.0
    DX=EX(II)*VA
```

```
104 DY=EY(II)*VA
    D1=EE(II)*VA
    DXY=G(II)*VA
    DO 104 K=1,6
    DO 104 J=1,12
    MAT(J,K)=0.0
    MAT(1,1)=6.0*(DX/P+D1*P)/PX
    MAT(2,1)=6.0*(DY*P+D1/P)/PX
    MAT(3,1)=-2.0*DXY/PX
    MAT(4,1)=-6.0*P*D1/PX
    MAT(5,1)=-6.0*P*DY/PX
    MAT(6,1)=MAT(3,1)
    MAT(9,1)=MAT(3,1)
    MAT(10,1)=-6.0*DX/P/PX
    MAT(11,1)=-6.0*D1/P/PX
    MAT(12,1)=MAT(3,1)
    MAT(1,2)=-4.0*D1/B
    MAT(2,2)=-4.0*DY/B
    MAT(3,2)=2.0*DXY/A
    MAT(4,2)=2.0*D1/B
    MAT(5,2)=2.0*DY/B
    MAT(12,2)=MAT(3,2)
    MAT(1,3)=4.0*DX/A
    MAT(2,3)=4.0*D1/A
    MAT(3,3)=-2.0*DXY/B
    MAT(6,3)=MAT(3,3)
    MAT(10,3)=-2.0*DX/A
    MAT(11,3)=-2.0*D1/A
    MAT(1,4)=MAT(4,1)
    MAT(2,4)=MAT(5,1)
    MAT(3,4)=-MAT(6,1)
    MAT(4,4)=MAT(1,1)
    MAT(5,4)=MAT(2,1)
    MAT(6,4)=-MAT(3,1)
```

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 3

MAT(7,4)=MAT(10,1)
MAT(8,4)=MAT(11,1)
MAT(9,4)=-MAT(12,1)
MAT(12,4)=-MAT(9,1)
MAT(1,5)=-MAT(4,2)
MAT(2,5)=-MAT(5,2)
MAT(4,5)=-MAT(1,2)
MAT(5,5)=-MAT(2,2)
MAT(6,5)=MAT(3,2)
MAT(9,5)=MAT(12,2)
MAT(3,6)=-MAT(6,3)
MAT(4,6)=MAT(1,3)
MAT(5,6)=MAT(2,3)
MAT(6,6)=-MAT(3,3)
MAT(7,6)=MAT(10,3)
MAT(8,6)=MAT(11,3)

DO 105 J=1,6

J6=J+6

MAT(J,7)=MAT(J6,1)
MAT(J6,7)=MAT(J,1)
MAT(J,8)=-MAT(J6,2)
MAT(J6,8)=-MAT(J,2)
MAT(J,9)=-MAT(J6,3)
MAT(J6,9)=-MAT(J,3)
MAT(J,10)=MAT(J6,4)
MAT(J6,10)=MAT(J,4)
MAT(J,11)=-MAT(J6,5)
MAT(J6,11)=-MAT(J,5)
MAT(J,12)=-MAT(J6,6)
MAT(J6,12)=-MAT(J,6)

105

C

C

C

1050

MATRIZ DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DO ELEMENTO 1

DJA(1)=DJ(3*IA-2, LN)

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 4

```
DJA(2)=DJ(3*IA-1, LN)
DJA(3)=DJ(3*IA, LN)
DJA(4)=DJ(3*JA-2, LN)
DJA(5)=DJ(3*JA-1, LN)
DJA(6)=DJ(3*JA, LN)
DJA(7)=DJ(3*KA-2, LN)
DJA(8)=DJ(3*KA-1, LN)
DJA(9)=DJ(3*KA, LN)
DJA(10)=DJ(3*LA-2, LN)
DJA(11)=DJ(3*LA-1, LN)
DJA(12)=DJ(3*LA, LN)
```

C
C MATRIZ DOS MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO NOS NOS DO ELEMENTO I
C

```
DO 106 J=1,12
  VEG(J)=0.0
DO 106 K=1,12
  VEG(J)=VEG(J)+MAT(J,K)*DJA(K)
  LAJ(1)=IA
  LAJ(2)=JA
  LAJ(3)=KA
  LAJ(4)=LA
```

C
C MATRIZES VEGA E LEGA
C

```
DO 111 J=1,4
  II=3*LAJ(J)
  VEGA(II-2, LN)=VEGA(II-2, LN)+VEG(3*J-2)
  VEGA(II-1, LN)=VEGA(II-1, LN)+VEG(3*J-1)
  VEGA(II, LN)=VEGA(II, LN)+VEG(3*J)
  LEGA(II-2, LN)=LEGA(II-2, LN)+1
  LEGA(II-1, LN)=LEGA(II-1, LN)+1
  LEGA(II, LN)=LEGA(II, LN)+1
111 CONTINUE
112
```

A

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 5

RETURN
END

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG. 1

```
SUBROUTINE SAGES(IN1,IN2,I,SMD)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
  INTEGER *2 SUBN
  DIMENSION SMD(12,12)
  COMMON /UM/ S(78,78),FTC(78,2),JI(60),JJ(60),JK(60),JL(60),LL(78),
  1LTE(60),LCL(78),LCL1(78),LCL2(78),SUBN,NCJ,NEL,NCE,I1,I2,I3,J1,J2,
  2J3,K1,K2,K3,L1,L2,L3,NSJS,NL1,NL2,NJU,N,NL,NCA,NJUB,NNL,NNL1,ID,JD
  3,NJLIA,ITP,NJU2,ID1,ID2,ID3,ID4,ID5,ID6,ID7,ID8,ID9,ID10,ID11,ID12
  COMMON /DOIS/ X(39),Y(39),EX(5),EY(5),ESP(60),LCE(60),EE(5),G(5)
```

ESTA E UMA SUBROUTINE AUXILIAR UTILIZADA AO SE ESPALHAR A MATRIZ
DE RIGIDEZ SMD DO ELEMENTO I CONSIDERADO. ELA ADICIONA AOS
COEFICIENTES ADEQUADOS DA COLUNA IN1 DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
S A CONTRIBUICAO DA COLUNA IN2 DA MATRIZ SMD.

```
IF(ITP-1)99,99,100
S(I1,IN1)=S(I1,IN1)+SMD(1,IN2)
S(I2,IN1)=S(I2,IN1)+SMD(2,IN2)
S(J1,IN1)=S(J1,IN1)+SMD(3,IN2)
S(J2,IN1)=S(J2,IN1)+SMD(4,IN2)
S(K1,IN1)=S(K1,IN1)+SMD(5,IN2)
S(K2,IN1)=S(K2,IN1)+SMD(6,IN2)
GO TO 102
```

```
100 S(I1,IN1)=S(I1,IN1)+SMD(1,IN2)
S(I2,IN1)=S(I2,IN1)+SMD(2,IN2)
S(I3,IN1)=S(I3,IN1)+SMD(3,IN2)
S(J1,IN1)=S(J1,IN1)+SMD(4,IN2)
S(J2,IN1)=S(J2,IN1)+SMD(5,IN2)
S(J3,IN1)=S(J3,IN1)+SMD(6,IN2)
S(K1,IN1)=S(K1,IN1)+SMD(7,IN2)
S(K2,IN1)=S(K2,IN1)+SMD(8,IN2)
S(K3,IN1)=S(K3,IN1)+SMD(9,IN2)
IF(LTE(I)-1)102,101,102
101 S(L1,IN1)=S(L1,IN1)+SMD(10,IN2)
```

DOCUMENTO
ILEGIVEL

B

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

102 S(L2,IN1)=S(L2,IN1)+SMD(11,IN2)
S(L3,IN1)=S(L3,IN1)+SMD(12,IN2)
RETURN
END

PAG 1

```
C
C   ESTA E UMA SUBROUTINE AUXILIAR UTILIZADA AO SE ESPALHAR A MATRIZ
C   DE RIGIDEZ SMD DO ELEMENTO I CONSIDERADO. E USADA QUANDO O ELEMEN-
C   TO I POSSUI 3 OU 4 NOS E SAO POSSIVEIS 3 DESLOCAMENTOS POR NO.
C   ELA ALTERA A NUMERACAO INICIALMENTE ARBITRADA PARA OS DESLOCAMEN-
C   TOS DOS NOS DO ELEMENTO I VISANDO OBTER A MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
C   S COM SUAS LINHAS E COLUNAS REORGANIZADAS.
```

```

1      I1=3*I A-2
      I2=3*I A-1
      I3=3*I A
      J1=3*J A-2
      J2=3*J A-1
      J3=3*J A
      K1=3*K A-2
      K2=3*K A-1
      K3=3*K A
      IF(LL(I1)) 187,187,188
187    I1=I1-LCL(I1)
      GO TO 191
188    IF(LL(I1)-1) 189,189,190
189    I1=N+LCL1(I1)
      GO TO 191
190    I1=NNL1+LCL2(I1)
191    IF(LL(I2)) 192,192,193
192    I2=I2-LCL(I2)

```


JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

GO TO 1950
193 IF(LL(I2)-1)194,194,195
194 I2=N+LCL1(I2)
GO TO 1950
195 I2= NNL1+LCL2(I2)
1950 IF(LL(I3))1951,1951,1952
1951 I3=I3-LCL(I3)
GO TO 196
1952 IF(LL(I3)-1)1953,1953,1954
1953 I3=N+LCL1(I3)
GO TO 196
1954 I3= NNL1+LCL2(I3)
196 IF(LL(J1))197,197,198
197 J1=J1-LCL(J1)
GO TO 201
198 IF(LL(J1)-1)199,199,200
199 J1=N+LCL1(J1)
GO TO 201
200 J1= NNL1+LCL2(J1)
201 IF(LL(J2))202,202,203
202 J2=J2-LCL(J2)
GO TO 2050
203 IF(LL(J2)-1)204,204,205
204 J2=N+LCL1(J2)
GO TO 2050
205 J2= NNL1+LCL2(J2)
2050 IF(LL(J3))2051,2051,2052
2051 J3=J3-LCL(J3)
GO TO 206
2052 IF(LL(J3)-1)2053,2053,2054
2053 J3=N+LCL1(J3)
GO TO 206
2054 J3= NNL1+LCL2(J3)
206 IF(LL(K1))2061,2061,2062

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 3

2061 K1=K1-LCL(K1)
GO TO 2065
2062 IF(LL(K1)-1)2063,2063,2064
2063 K1=N+LCL1(K1)
GO TO 2065
2064 K1= NNL1+LCL2(K1)
2065 IF(LL(K2))2066,2066,2067
2066 K2=K2-LCL(K2)
GO TO 2070
2067 IF(LL(K2)-1)2068,2068,2069
2068 K2=N+LCL1(K2)
GO TO 2070
2069 K2= NNL1+LCL2(K2)
2070 IF(LL(K3))2071,2071,2072
2071 K3=K3-LCL(K3)
GO TO 2075
2072 IF(LL(K3)-1)2073,2073,2074
2073 K3=N+LCL1(K3)
GO TO 2075
2074 K3= NNL1+LCL2(K3)
2075 IF(LTE(I)-1)2091,2076,2091
2076 LA=JL(I)-NCJ
L1=3*LA-2
L2=3*LA-1
L3=3*LA
IF(LL(L1))2077,2077,2078
2077 L1=L1-LCL(L1)
GO TO 2081
2078 IF(LL(L1)-1)2079,2079,2080
2079 L1=N+LCL1(L1)
GO TO 2081
2080 L1= NNL1+LCL2(L1)
2081 IF(LL(L2))2082,2082,2083
2082 L2=L2-LCL(L2)

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 4

GO TO 2086
2083 IF(LL(L2)-1)2084,2084,2085
2084 L2=N+LCL1(L2)
GO TO 2086
2085 L2= NNL1+LCL2(L2)
2086 IF(LL(L3))2087,2087,2088
2087 L3=L3-LCL(L3)
GO TO 2091
2088 IF(LL(L3)-1)2089,2089,2090
2089 L3=N+LCL1(L3)
GO TO 2091
2090 L3= NNL1+LCL2(L3)
2091 RETURN
END

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 1

```
SUBROUTINE RIPET(I,SMD,JI,JJ,JK,NCJ,SUBN)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
INTEGER *2 SUBN , IID*4
DIMENSION SMD(12,12),T(7,9),H(7,9),B(3),C(3),E(7),XI(7),YI(7),JI(6
10),JJ(60),JK(60)
COMMON /DOIS/ X(39),Y(39),EX(5),EY(5),ESP(60),LCE(60),EE(5),G(5)
```

ESTA SUBROUTINE REFERE-SE A ELEMENTOS TRIANGULADES ORTOTRUPOS UTI-
LIZADOS NA ANALISE DE PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE. ELA
CALCULA A MATRIZ DE RIGIDEZ SMD DO ELEMENTO I CONSIDERADO E A MA-
TRIZ BIT (PRODUTO DAS MATRIZES B' E T) NECESSARIAS AO CALCULO DOS
MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO.

```
IA=JI(I)-NCJ
JA=JJ(I)-NCJ
KA=JK(I)-NCJ
II=LCE(I)
VA=ESP(I)**3/12.0
DX=EX(II)*VA
DY=EY(II)*VA
DI=EE(II)*VA
DXY=G(II)*VA
XG=(X(IA)+X(JA)+X(KA))/3.0
YG=(Y(IA)+Y(JA)+Y(KA))/3.0
X1=X(IA)-XG
X2=X(JA)-XG
X3=X(KA)-XG
Y1=Y(IA)-YG
Y2=Y(JA)-YG
Y3=Y(KA)-YG
B(1)=Y2-Y3
B(2)=Y3-Y1
B(3)=Y1-Y2
C(1)=X3-X2
```

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

```

C(2)=X1-X3
C(3)=X2-X1
A=X2*Y3-X3*Y2
AR=1.5*A
AR2=2.0*AR
DO 101 K=1,9
DO 101 J=1,7
101 T(J,K)=0.0
C
C   CALCULO DA MATRIZ T
C
DO 102 K=1,3
K1=3*(K-1)+1
DO 102 J=1,3
J1=2*(J-1)+1
T(J1,K1)=C(K)/AR2
102 T(J1+1,K1)=-B(K)/AR2
T(1,2)=1.0
T(2,3)=1.0
T(3,5)=1.0
T(4,6)=1.0
T(5,8)=1.0
T(6,9)=1.0
C
C   CALCULO DA MATRIZ B'
C
E(1)=A*(B(1)*B(2)+B(2)*B(3)+B(3)*B(1))
E(2)=A*(C(1)*B(2)+B(1)*C(2)+C(2)*B(3)+B(2)*C(3)+C(3)*B(1)+B(3)*
1C(1))
E(3)=A*(C(1)*C(2)+C(2)*C(3)+C(3)*C(1))
E(4)=B(1)*B(2)*B(3)
E(5)=C(1)*B(2)*B(3)+C(2)*B(3)*B(1)+C(3)*B(1)*B(2)
E(6)=C(1)*C(2)*B(3)+C(2)*C(3)*B(1)+C(3)*C(1)*B(2)
E(7)=C(1)*C(2)*C(3)

```

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 3

DO 107 II=1,3
IF(II-2)103,104,105
103 J=2
K=3
GO TO 106
104 J=3
K=1
GO TO 106
105 J=1
K=2
106 XI(1)=B(II)*A*(B(II)+2.0*B(J))
XI(2)=2.0*A*(B(II)*C(II)+B(J)*C(II)+B(II)*C(J))
XI(3)=C(II)*A*(C(II)+2.0*C(J))
XI(4)=B(II)**2*B(J)
XI(5)=B(II)*(2.0*C(II)*B(J)+B(II)*C(J))
XI(6)=C(II)*(C(II)*B(J)+2.0*B(II)*C(J))
XI(7)=C(II)**2*C(J)
YI(1)=B(II)*A*(B(II)+2.0*B(K))
YI(2)=2.0*A*(B(II)*C(II)+B(K)*C(II)+B(II)*C(K))
YI(3)=C(II)*A*(C(II)+2.0*C(K))
YI(4)=B(II)**2*B(K)
YI(5)=B(II)*(2.0*C(II)*B(K)+B(II)*C(K))
YI(6)=C(II)*(C(II)*B(K)+2.0*B(II)*C(K))
YI(7)=C(II)**2*C(K)
FI=(B(K)-B(J))/2.0
GI=(C(K)-C(J))/2.0
IIA=2*II
DO 107 LA=1,7
H(LA,IIA-1)=XI(LA)*B(K)-YI(LA)*B(J)+E(LA)*FI
H(LA,IIA)=XI(LA)*C(K)-YI(LA)*C(J)+E(LA)*GI
107
C
C
C
CALCULO DO PRODUTO B'T
DO 108 K=1,9

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 4

```

DO 108 J=1,7
  SMD(J,K)=0.0
DO 108 LA=1,6
108  SMD(J,K)=SMD(J,K)+H(J,LA)*T(LA,K)
DO 109 J=1,7
DO 109 K=1,J
109  T(J,K)=0.0
C
C  CALCULO DA MATRIZ QUE SUBSTITUE A INTEGRAL
C
  SQX=X1**2+X2**2+X3**2
  SXY=X1*Y1+X2*Y2+X3*Y3
  SQY=Y1**2+Y2**2+Y3**2
  VA=0.015625/AR**5
  T(1,1)=4.0*DX*VA
  T(3,1)=4.0*D1*VA
  T(2,2)=4.0*DEX*VA
  T(3,3)=4.0*DY*VA
  T(4,4)=3.0*DX*SQX*VA
  T(5,4)=DX*SXY*VA
  T(6,4)=D1*SQX*VA
  T(7,4)=3.0*D1*SXY*VA
  T(5,5)=(DX*SQY/3.0+1.333333*DEX*SQX)*VA
  T(6,5)=(D1*SXY/3.0+1.333333*DEX*SXY)*VA
  T(7,5)=D1*SQY*VA
  T(6,6)=(DY*SQX/3.0+1.333333*DEX*SQY)*VA
  T(7,6)=DY*SXY*VA
  T(7,7)=3.0*DY*SQY*VA
DO 110 J=1,7
DO 110 K=1,J
110  T(K,J)=T(J,K)
C
C  CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ SMD
C

```

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 5

```
DO 111 K=1,9
DO 111 J=1,7
H(J,K)=0.0
DO 111 LA=1,7
111 H(J,K)=H(J,K)+T(J,LA)*SMD(LA,K)
DO 112 K=1,9
DO 112 J=1,7
112 T(J,K)=SMD(J,K)
DO 113 K=1,9
DO 113 J=1,9
SMD(J,K)=0.0
DO 113 LA=1,7
113 SMD(J,K)=SMD(J,K)+T(LA,J)*H(LA,K)
IID=SUBN+11
WRITE(IID,'I)DX,DY,D1,DXY,AR,((T(J,K),K=1,9),J=1,3),IA,JA,KA
RETURN
END
```


PAG 1

C
C
C
C
C
C
C

C

101

102

C

5

$$D(1,3) = D(1,2)$$

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

```
D(2,1)=D(1,2)
D(2,2)=VA*QUOC1*(1-QUOC1*XM2**2)
D(2,3)=VA*(XM1+QUOC1*XM2**2)*QUOC1
D(3,1)=D(1,3)
D(3,2)=D(2,3)
D(3,3)=VA*QUOC1*(1-QUOC1*XM2**2)
D(4,4)=G2
GX=(X(IA)+X(JA)+X(KA))/3.0
GY=(Y(IA)+Y(JA)+Y(KA))/3.0
AR2=3.0*((X(JA)-GX)*(Y(KA)-GY)-(Y(JA)-GY)*(X(KA)-GX))
```

MATRIZ DE TRANSFORMACAO B

```
B(2,1)=(Y(JA)-Y(KA))/AR2
B(4,1)=(X(KA)-X(JA))/AR2
B(1,2)=B(4,1)
B(4,2)=B(2,1)
B(2,3)=(Y(KA)-Y(IA))/AR2
B(4,3)=(X(IA)-X(KA))/AR2
B(1,4)=B(4,3)
B(4,4)=B(2,3)
B(2,5)=(Y(IA)-Y(JA))/AR2
B(4,5)=(X(JA)-X(IA))/AR2
B(1,6)=B(4,5)
B(4,6)=B(2,5)
```

MATRIZ DE TRANSFORMACAO B E MATRIZ DB CALCULADAS NO CENTROIDE DO ELEMENTO

```
B(3,1)=(X(JA)*Y(KA)-X(KA)*Y(JA))/GX/AR2+B(2,1)+B(4,1)*GY/GX
B(3,3)=(X(KA)*Y(IA)-X(IA)*Y(KA))/GX/AR2+B(2,3)+B(4,3)*GY/GX
B(3,5)=(X(IA)*Y(JA)-X(JA)*Y(IA))/GX/AR2+B(2,5)+B(4,5)*GY/GX
DO 112 K=1,6
DO 112 J=1,4
DB(J,K)=0.0
```

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 3

```
DO 112 L=1,4
112 DB(J,K)=DB(J,K)+D(J,L)*B(L,K)
IID=SUBN+11
WRITE(IID,'1')((DB(J,K),J=1,4),K=1,6),IA,JA,KA
C
C MATRIZ DE RIGIDEZ SMD CALCULADA NO CENTROIDE DO ELEMENTO
C
VOL=3.141516*AR2
DO 113 K=1,6
DO 113 J=1,6
SMD(J,K)=0.0
DO 113 L=1,4
113 SMD(J,K)=SMD(J,K)+B(L,J)*DB(L,K)*VOL*GX
C
C CALCULO DAS INTEGRAIS PARA OBTENCAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ EXATA
C
PRI=X(IA)
RRJ=X(JA)
RRM=X(KA)
ZZI=Y(IA)
ZZJ=Y(JA)
ZZM=Y(KA)
IF(DABS(RRM-PRI)-1.0E-5)114,114,121
114 ALRRI=DLOG(RRI)
ALRRJ=DLOG(RRJ)
ALRRM=ALRRI
AIM=0.0
BIM=0.0
AJI=(RRI*ZZJ-RRJ*ZZI)/(RRI-RRJ)
BJI=(ZZI-ZZJ)/(RRI-RRJ)
AMJ=(RRJ*ZZM-RRM*ZZJ)/(RRJ-RRM)
BMJ=(ZZJ-ZZM)/(RRJ-RRM)
GO TO 115
121 IF(DABS(RRI-RRJ)-1.0E-5)122,122,123
```

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 4

```

122 RRM=X(IA)
    RRI=X(JA)
    RRJ=X(KA)
    ZZM=Y(IA)
    ZZI=Y(JA)
    ZZJ=Y(KA)
    GO TO 114
123 IF(DABS(RRJ-RRM)-1.0E-5)124,124,125
124 RRM=X(JA)
    RRI=X(KA)
    RRJ=X(IA)
    ZZM=Y(JA)
    ZZI=Y(KA)
    ZZJ=Y(IA)
    GO TO 114
125 ALRRI=DLOG(RRI)
    ALRRJ=DLOG(RRJ)
    ALRRM=DLOG(RRM)
135 AIM=(X(KA)*Y(IA)-X(IA)*Y(KA))/(X(KA)-X(IA))
    BIM=(Y(KA)-Y(IA))/(X(KA)-X(IA))
    AMJ=(X(JA)*Y(KA)-X(KA)*Y(JA))/(X(JA)-X(KA))
    BMJ=(Y(JA)-Y(KA))/(X(JA)-X(KA))
    AJI=(X(IA)*Y(JA)-X(JA)*Y(IA))/(X(IA)-X(JA))
    BJI=(Y(IA)-Y(JA))/(X(IA)-X(JA))
115 AAJIM=AJI-AIM
    AAMJI=AMJ-AJI
    AAIMJ=AIM-AMJ
    PARC1=AAJIM*ALRRI
    PARC2=AAMJI*ALRRJ
    PARC3=AAIMJ*ALRRM
    AINT1=PARC1+PARC2+PARC3+BIM*(RRM-RRI)+BMJ*(RRJ-RRM)+BJI*(RRI-RRJ)
    A2JIM=AAJIM*(AJI+AIM)
    A2MJI=AAMJI*(AMJ+AJI)
    A2IMJ=AAIMJ*(AIM+AMJ)

```

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 5

$PARC1 = A2JIM * ALRRI / 2.$
 $PARC2 = A2MJI * ALRRJ / 2.$
 $PARC3 = A2IMJ * ALRRM / 2.$
 $PARC4 = AIM * BIM * (RRM - RRI)$
 $PARC5 = AMJ * BMJ * (RRJ - RRM)$
 $PARC6 = AJI * BJI * (RRI - RRJ)$
 $PARC7 = BIM ** 2 * (RRM ** 2 - RRI ** 2) / 4.$
 $PARC8 = BMJ ** 2 * (RRJ ** 2 - RRM ** 2) / 4.$
 $PARC9 = BJI ** 2 * (RRI ** 2 - RRJ ** 2) / 4.$
 $SOM1 = PARC1 + PARC2 + PARC3$
 $SOM2 = PARC4 + PARC5 + PARC6$
 $SOM3 = PARC7 + PARC8 + PARC9$
 $AIN2 = SOM1 + SOM2 + SOM3$
 $A3JIM = AJI ** 3 - AIM ** 3$
 $A3MJI = AMJ ** 3 - AJI ** 3$
 $A3IMJ = AIM ** 3 - AMJ ** 3$
 $PARC1 = A3JIM * ALRRI / 3.$
 $PARC2 = A3MJI * ALRRJ / 3.$
 $PARC3 = A3IMJ * ALRRM / 3.$
 $SOM1 = PARC1 + PARC2 + PARC3$
 $SOM2 = PARC4 * AIM + PARC5 * AMJ + PARC6 * AJI$
 $SOM3 = (PARC7 * AIM + PARC8 * AMJ + PARC9 * AJI) * 2$
 $SOM4 = BIM ** 3 * (RRM ** 3 - RRI ** 3) / 9.$
 $SOM4 = SOM4 + BMJ ** 3 * (RRJ ** 3 - RRM ** 3) / 9.$
 $SOM4 = SOM4 + BJI ** 3 * (RRI ** 3 - RRJ ** 3) / 9.$
 $AIN3 = SOM1 + SOM2 + SOM3 + SOM4$
 $AAINT(1) = X(JA) * Y(KA) - X(KA) * Y(JA)$
 $AAINT(2) = X(KA) * Y(IA) - X(IA) * Y(KA)$
 $AAINT(3) = X(IA) * Y(JA) - X(JA) * Y(IA)$
 $CCINT(1) = X(KA) - X(JA)$
 $CCINT(2) = X(IA) - X(KA)$
 $CCINT(3) = X(JA) - X(IA)$

MATRIZ DE RIGIDEZ CORRIGIDA

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 6

C

```
DO 116 K=1,3
DO 116 J=1,3
COREC(K,J)=3.141516*(AAINT(K)*AAINT(J)*(AINT1/AR2*2.-1./GX)+(AAINT
1(K)*CCINT(J)+AAINT(J)*CCINT(K))*(AINT2/AR2*2.0-GY/GX)+CCINT(K)*CCI
2NT(J)*(AINT3/AR2*2.-GY**2/GX))/AR2*D(3,3)
116 SMD(2*K-1,2*J-1)=SMD(2*K-1,2*J-1)+COREC(K,J)
WRITE(24,'I')B,D,GX,AR2
RETURN
END
```

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 1

```
SUBROUTINE RIPER(I,SMD)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
  INTEGER *2 SUBN
  DIMENSION SMD(12,12),VEL(12)
  COMMON /UM/ S(78,78),FTC(78,2),JI(60),JJ(60),JK(60),JL(60),LL(78),
  1LTE(60),LCL(78),LCL1(78),LCL2(78),SUBN,NCJ,NEL,NCE,I1,I2,I3,J1,J2,
  2J3,K1,K2,K3,L1,L2,L3,NSUS,NL1,NL2,NJU,N,NL,NCA,NJU3,NNL,NNL1,ID,JD
  3,NJL1A,ITP,NJU2,ID1,ID2,ID3,ID4,ID5,ID6,ID7,ID8,ID9,ID10,ID11,ID12
  COMMON /DOIS/ X(39),Y(39),EX(5),EY(5),ESP(60),LCE(60),EE(5),G(5)
```

ESTA SUBROUTINE REFERE-SE A ELEMENTOS RETANGULARES ORTOTROPOS
UTILIZADOS NA ANALISE DE PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE. ELA
CALCULA A MATRIZ DE RIGIDEZ SMD DO ELEMENTO I CONSIDERADO.

```
IA=JI(I)-NCJ
JA=JJ(I)-NCJ
LA=JL(I)-NCJ
A=DSQRT((X(LA)-X(IA))**2+(Y(LA)-Y(IA))**2)
B=DSQRT((X(JA)-X(IA))**2+(Y(JA)-Y(IA))**2)
P2=A**2/B**2
II=LCE(I)
VA1=0.06666666/A/B
VA2=ESP(I)**3/12.0
DX=EX(II)*VA2
DY=EY(II)*VA2
D1=EE(II)*VA2
DXY=G(II)*VA2
SMD(1,1)=60.0/P2*DX+60.0*P2*DY+30.0*D1+84.0*DXY
SMD(2,1)=-30.0*P2*DY-15.0*D1-6.0*DXY
SMD(3,1)=30.0/P2*DX+15.0*D1+6.0*DXY
SMD(4,1)=30.0/P2*DX-60.0*P2*DY-30.0*D1-84.0*DXY
SMD(5,1)=-30.0*P2*DY-6.0*DXY
SMD(6,1)=15.0/P2*DX-15.0*D1-6.0*DXY
SMD(7,1)=-30.0/P2*DX-30.0*P2*DY+30.0*D1+84.0*DXY
```

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

$SMD(8,1) = -15.0 * P2 * DY + 6.0 * DXY$
 $SMD(9,1) = 15.0 / P2 * DX - 6.0 * DXY$
 $SMD(10,1) = -60.0 / P2 * DX + 30.0 * P2 * DY - 30.0 * D1 - 84.0 * DXY$
 $SMD(11,1) = -15.0 * P2 * DY + 15.0 * D1 + 6.0 * DXY$
 $SMD(12,1) = 30.0 / P2 * DX + 6.0 * DXY$
 $SMD(2,2) = 20.0 * P2 * DY + 8.0 * DXY$
 $SMD(3,2) = -15.0 * D1$
 $SMD(4,2) = -SMD(5,1)$
 $SMD(5,2) = 10.0 * P2 * DY - 2.0 * DXY$
 $SMD(6,2) = 0.0$
 $SMD(7,2) = -SMD(8,1)$
 $SMD(8,2) = 5.0 * P2 * DY + 2.0 * DXY$
 $SMD(9,2) = 0.0$
 $SMD(10,2) = SMD(11,1)$
 $SMD(11,2) = 10.0 * P2 * DY - 8.0 * DXY$
 $SMD(12,2) = 0.0$
 $SMD(3,3) = 20.0 / P2 * DX + 8.0 * DXY$
 $SMD(4,3) = SMD(6,1)$
 $SMD(5,3) = 0.0$
 $SMD(6,3) = 10.0 / P2 * DX - 8.0 * DXY$
 $SMD(7,3) = -SMD(9,1)$
 $SMD(8,3) = 0.0$
 $SMD(9,3) = 5.0 / P2 * DX + 2.0 * DXY$
 $SMD(10,3) = -SMD(12,1)$
 $SMD(11,3) = 0.0$
 $SMD(12,3) = 10.0 / P2 * DX - 2.0 * DXY$
 $SMD(4,4) = SMD(1,1)$
 $SMD(5,4) = -SMD(2,1)$
 $SMD(6,4) = SMD(3,1)$
 $SMD(7,4) = SMD(10,1)$
 $SMD(8,4) = -SMD(11,1)$
 $SMD(9,4) = SMD(12,1)$
 $SMD(10,4) = SMD(7,1)$
 $SMD(11,4) = -SMD(8,1)$

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 3

SMD(12,4)=SMD(9,1)
SMD(5,5)=SMD(2,2)
SMD(6,5)=-SMD(3,2)
SMD(7,5)=-SMD(11,1)
SMD(8,5)=SMD(11,2)
SMD(9,5)=0.0
SMD(10,5)=SMD(8,1)
SMD(11,5)=SMD(8,2)
SMD(12,5)=0.0
SMD(6,6)=SMD(3,3)
SMD(7,6)=-SMD(12,1)
SMD(8,6)=0.0
SMD(9,6)=SMD(12,3)
SMD(10,6)=-SMD(9,1)
SMD(11,6)=0.0
SMD(12,6)=SMD(9,3)
SMD(7,7)=SMD(1,1)
SMD(8,7)=-SMD(2,1)
SMD(9,7)=-SMD(3,1)
SMD(10,7)=SMD(4,1)
SMD(11,7)=-SMD(5,1)
SMD(12,7)=-SMD(6,1)
SMD(8,8)=SMD(2,2)
SMD(9,8)=SMD(3,2)
SMD(10,8)=SMD(5,1)
SMD(11,8)=SMD(5,2)
SMD(12,8)=0.0
SMD(9,9)=SMD(3,3)
SMD(10,9)=-SMD(6,1)
SMD(11,9)=0.0
SMD(12,9)=SMD(6,3)
SMD(10,10)=SMD(1,1)
SMD(11,10)=SMD(2,1)
SMD(12,10)=-SMD(3,1)

F

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 4

```
SMD(11,11)=SMD(2,2)
SMD(12,11)=-SMD(3,2)
SMD(12,12)=SMD(3,3)
DO 100 J=1,4
  VEL(3*J-2)=1.0
  VEL(3*J-1)=B
100  VEL(3*J)=A
  DO 101 J=1,12
    DO 101 K=1,J
      SMD(J,K)=VEL(J)*SMD(J,K)*VEL(K)*VAL
101  SMD(K,J)=SMD(J,K)
  RETURN
END
```

PAG 1

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

101

102

104

C
C
C

105

C

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

C MATRIZ DE TRANSFORMACAO D PARA ESTADO PLANO DE TENSOES

C

106 VA=XE/(1.0-COP**2)
D(1,1)=VA
D(2,1)=VA*COP
D(1,2)=D(2,1)
D(2,2)=D(1,1)
D(3,3)=VA*(1.0-COP)/2.0

C

C MATRIZ DE TRANSFORMACAO B E MATRIZ DB

C

107 GX=(X(IA)+X(JA)+X(KA))/3.0
GY=(Y(IA)+Y(JA)+Y(KA))/3.0
AR2=3.0*((X(JA)-GX)*(Y(KA)-GY)-(Y(JA)-GY)*(X(KA)-GX))
B(1,1)=(Y(JA)-Y(KA))/AR2
B(3,1)=(X(KA)-X(JA))/AR2
B(2,2)=B(3,1)
B(3,2)=B(1,1)
B(1,3)=(Y(KA)-Y(IA))/AR2
B(3,3)=(X(IA)-X(KA))/AR2
B(2,4)=B(3,3)
B(3,4)=B(1,3)
B(1,5)=(Y(IA)-Y(JA))/AR2
B(3,5)=(X(JA)-X(IA))/AR2
B(2,6)=B(3,5)
B(3,6)=B(1,5)
DO 108 K=1,6
DO 108 J=1,3
DB(J,K)=0.0
DO 108 L=1,3
108 DB(J,K)=DB(J,K)+D(J,L)*B(L,K)
IID=SUBN+11
WRITE(IID*1)((DB(J,K),J=1,3),K=1,6),IA,JA,KA

C

DOCUMENTO
ILEGIVEL

PAG 3

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

C MATRIZ DE RIGIDEZ SMD
C

VOL=AR2*ESP(1)/2.0

DO 109 K=1,6

DO 109 J=1,6

SMD(J,K)=0.0

DO 109 L=1,3

109 SMD(J,K)=SMD(J,K)+B(L,J)*DB(L,K)*VOL

RETURN

END

PAG 1

C
C
C
C
C
C
C

1

187

188

189

190

191

192

193

194

$$I_2 = N + LCL1(I_2)$$

H

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

```
GO TO 196
195 I2=>NNL1+LCL2(I2)
196 IF(LL(J1))197,197,198
197 J1=J1-LCL(J1)
GO TO 201
198 IF(LL(J1)-1)199,199,200
199 J1=N+LCL1(J1)
GO TO 201
200 J1=>NNL1+LCL2(J1)
201 IF(LL(J2))202,202,203
202 J2=J2-LCL(J2)
GO TO 206
203 IF(LL(J2)-1)204,204,205
204 J2=N+LCL1(J2)
GO TO 206
205 J2=>NNL1+LCL2(J2)
206 IF(LL(K1))2061,2061,2062
2061 K1=K1-LCL(K1)
GO TO 2065
2062 IF(LL(K1)-1)2063,2063,2064
2063 K1=N+LCL1(K1)
GO TO 2065
2064 K1=>NNL1+LCL2(K1)
2065 IF(LL(K2))2066,2066,2067
2066 K2=K2-LCL(K2)
GO TO 2070
2067 IF(LL(K2)-1)2068,2068,2069
2068 K2=N+LCL1(K2)
GO TO 2070
2069 K2=>NNL1+LCL2(K2)
2070 RETURN
END
```

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 1

```
SUBROUTINE DCOMP(N,S)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
  DIMENSION S(78,78)
```

C AS SUBROUTINES DCOMP E INVER INVERTEM MATRIZES SIMETRICAS UTILI-
C ZANDO O METODO DE CHOLESKI. NESTA SUBROUTINE A MATRIZ S (OU A SUB-
C MATRIZ NXN NELA CONTIDA) E DECOMPOSTA FORNECENDO A MATRIZ TRIAN-
C GULAR SUPERIOR NECESSARIA A SUA INVERSAO.

```
3 DO 108 I=1,N
```

```
DO 108 J=I,N
```

```
STE=S(I,J)
```

```
K1=I-1
```

```
IF(I-1)101,103,101
```

```
DO 102 K=1,K1
```

```
STE=STE-S(K,I)*S(K,J)
```

```
103 IF(J-I)107,104,107
```

```
104 IF(STE)105,105,1050
```

```
105 WRITE(3,1) I,J,STE
```

```
1 FORMAT(//1X,'ELEMENTO NA DIAGONAL NEGATIVO OU NULO-PARE. I=',I5,
```

```
1',J=',I5,'. STE=',E22.15,'.')
```

```
STOP
```

```
1050 IF(STE-0.1)1051,106,106
```

```
1051 WRITE(3,2)STE
```

```
2 FORMAT(//1X,'STE=',F15.5)
```

```
106 VAUX=1.0/DSORT(STE)
```

```
S(I,J)=VAUX
```

```
GO TO 108
```

```
107 S(I,J)=STE*VAUX
```

```
108 CONTINUE
```

```
RETURN
```

```
END
```


J

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 1

```
SUBROUTINE INVER(N,S)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
DIMENSION S(78,78)
```

C
C AS SUBROUTINES DCOMP E INVER INVERTEM MATRIZES SIMETRICAS UTILI-
C ZANDO O METODO DE CHOLESKI. NESTA SUBROUTINE OBTEM-SE A MATRIZ
C INVERSA DE S (OU DA SUBMATRIZ NXN NELA CONTIDA) UTILIZANDO A MA-
C TRIZ OBTIDA NA SUBROUTINE DCOMP.
C

```
      I1=N-1
      DO 102 I=1,I1
        J1=I+1
        DO 102 J=J1,N
          STE=0.0
          K1=J-1
          DO 101 K=I,K1
            STE=STE-S(K,I)*S(K,J)
            S(J,I)=STE*S(J,J)
101      CONTINUE
102      DO 104 I=1,N
        DO 104 J=I,N
          STE=0.0
          DO 103 K=J,N
            STE=STE+S(K,I)*S(K,J)
            S(I,J)=STE
            S(J,I)=STE
103      CONTINUE
104      RETURN
      END
```

K

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 1

```
SUBROUTINE FECA(FEQ,NECA,LN,ICD)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
INTEGER *2 SUBN
DIMENSION FEQ(78,2),O(60),LIA(60)
COMMON /UM/ S(78,78),FTC(78,2),JI(60),JJ(60),JK(60),JL(60),LL(78),
1LTE(60),LCL(78),LCL1(78),LCL2(78),SUBN,NCJ,NEL,NCE,I1,I2,I3,J1,J2,
2J3,K1,K2,K3,L1,L2,L3,NSUS,NL1,NL2,NJU,N,NL,NCA,NJU3,NNL,NNL1,LD,JD
3,NJL1A,ITP,NJU2,LD1,LD2,LD3,LD4,LD5,LD6,LD7,LD8,LD9,LD10,LD11,LD12
COMMON /DOIS/ X(39),Y(39)
```

```
C
C  ESTA SUBROUTINE REFERE-SE A ANALISE DE PLACAS CARREGADAS TRANSVER-
C  SALMENTE. ELA CALCULA, PARA ELEMENTOS RETANGULARES, AS CARGAS NO-
C  DAIS EQUIVALENTES A UM CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDO SO-
C  BRE O ELEMENTO.
C
```

```
IF(ICD)103,101,103
```

```
101 READ(2,1)IA,VA
```

```
1  FORMAT(4(I5,F15.3,8X))
```

```
DO 102 I=1,NEL
```

```
LIA(I)=I+NCE
```

```
102 Q(I)=VA
```

```
WRITE(3,2)VA
```

```
2  FORMAT( 3X,'TODOS',F12.3)
```

```
GO TO 104
```

```
103 READ(2,3)(LIA(I),Q(I),I=1,NECA)
```

```
3  FORMAT(4(I5,F15.3))
```

```
WRITE(3,1)(LIA(I),Q(I),I=1,NECA)
```

```
104 DO 110 IM=1,NECA
```

```
I=LIA(IM)-NCE
```

```
IA=JI(I)-NCJ
```

```
JA=JJ(I)-NCJ
```

```
KA=JK(I)-NCJ
```

```
IF(LTE(I))108,107,108
```

```
107 CAT=((X(JA)*Y(KA)-Y(JA)*X(KA))+X(IA)*(Y(JA)-Y(KA))+Y(IA)*
```

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

```
1(X(KA)-X(JA))*Q(I)/6.0
FEQ(3*IA-2, LN)=FEQ(3*IA-2, LN)+CAT
FEQ(3*JA-2, LN)=FEQ(3*JA-2, LN)+CAT
FEQ(3*KA-2, LN)=FEQ(3*KA-2, LN)+CAT
GO TO 110
108 LA=JL(I)-NCJ
A=DSQRT((X(LA)-X(IA))**2+(Y(LA)-Y(IA))**2)
B=DSQRT((X(JA)-X(IA))**2+(Y(JA)-Y(IA))**2)
CAT=Q(I)*A*B
FEQ(3*IA-2, LN)=FEQ(3*IA-2, LN)+CAT/4.0
FEQ(3*IA-1, LN)=FEQ(3*IA-1, LN)-CAT*B/24.0
FEQ(3*IA, LN)=FEQ(3*IA, LN)+CAT*A/24.0
FEQ(3*JA-2, LN)=FEQ(3*JA-2, LN)+CAT/4.0
FEQ(3*JA-1, LN)=FEQ(3*JA-1, LN)+CAT*B/24.0
FEQ(3*JA, LN)=FEQ(3*JA, LN)+CAT*A/24.0
FEQ(3*KA-2, LN)=FEQ(3*KA-2, LN)+CAT/4.0
FEQ(3*KA-1, LN)=FEQ(3*KA-1, LN)+CAT*B/24.0
FEQ(3*KA, LN)=FEQ(3*KA, LN)-CAT*A/24.0
FEQ(3*LA-2, LN)=FEQ(3*LA-2, LN)+CAT/4.0
FEQ(3*LA-1, LN)=FEQ(3*LA-1, LN)-CAT*B/24.0
FEQ(3*LA, LN)=FEQ(3*LA, LN)-CAT*A/24.0
110 CONTINUE
RETURN
END
```

PAG 1

C
C
C
C
C
C
C

101
1

102
2

103
3
104

```

IF(ICD.)103,101,103
READ(2,1)IA,VA1,VA2
FORMAT(4(I4,2F8.3))
DO 102 I=1,NEL
LIA(I)=I+NCE
FMX(I)=VA1
FMY(I)=VA2
WRITE(3,2)VA1,VA2
FORMAT(/3X,'TODOS',2F15.3)
GO TO 104
READ(2,1)(LJA(I),FMX(I),FMY(I),I=1,NECA)
WRITE(3,3)(LIA(I),FMX(I),FMY(I),I=1,NECA)
FORMAT(4(I5,F11.3,F10.3,3X))
DO 105 IM=1,NECA
I=LIA(IM)-NCE
IA=JI(I)-NCJ
JA=JJ(I)-NCJ
KA=JK(I)-NCJ
GX=(X(IA)+X(JA)+X(KA))/3.0
GY=(Y(IA)+Y(JA)+Y(KA))/3.0
AR=1.5*((X(JA)-GX)*(Y(KA)-GY)-(Y(JA)-GY)*(X(KA)-GX))
VA=ESP(I)*AR/3.0

```

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

FMXT=FMX(I)*VA
FMYT=FMY(I)*VA
I1=2*IA-1
I2=2*IA
J1=2*JA-1
J2=2*JA
K1=2*KA-1
K2=2*KA
FEQ(I1, LN)=FEQ(I1, LN)+FMXT
FEQ(I2, LN)=FEQ(I2, LN)+FMYT
FEQ(J1, LN)=FEQ(J1, LN)+FMXT
FEQ(J2, LN)=FEQ(J2, LN)+FMYT
FEQ(K1, LN)=FEQ(K1, LN)+FMXT
FEQ(K2, LN)=FEQ(K2, LN)+FMYT
CONTINUE
RETURN
END

105

M

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSÉ INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 1

```
SUBROUTINE FOMAX(FEQ,NEL,JI,JJ,JK,NCJ,LN,NECA,ICD,NCE,SUBN)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
INTEGER *2 SUBN
DIMENSION FEQ(78,2),JI(60),JJ(60),JK(60),LIA(60),FMX(60),FMY(60)
COMMON /DOIS/ X(39),Y(39)
```

ESTA SUBROTINA REFERE-SE A PROBLEMAS AXISSIMETRICOS. ELA CALCULA,
PARA ELEMENTOS TRIANGULARES, AS CARGAS NODAIS EQUIVALENTES A FORÇAS
DE MASSA QUANDO SUAS COMPONENTES FMX E FMY SAO CONSTANTES EM CADA
ELEMENTO (PODENDO TODAVIA VARIAR DE ELEMENTO PARA ELEMENTO)

```
IF(ICD)103,101,103
101 READ(2,1)IA,VA1,VA2
1  FORMAT(4(14,2F8.3))
DO 102 I=1,NEL
LIA(I)=I+NCE
FMX(I)=VA1
102 FMY(I)=VA2
WRITE(3,2)VA1,VA2
2  FORMAT(13X,'TODOS',2F15.3)
GO TO 104
103 READ(2,1)(LIA(I),FMX(I),FMY(I),I=1,NECA)
WRITE(3,3)(LIA(I),FMX(I),FMY(I),I=1,NECA)
3  FORMAT(4(15,F11.3,F10.3,3X))
104 DO 105 IM=1,NECA
I=LIA(IM)-NCE
IA=JI(I)-NCJ
JA=JJ(I)-NCJ
KA=JK(I)-NCJ
GX=(X(IA)+X(JA)+X(KA))/3.0
GY=(Y(IA)+Y(JA)+Y(KA))/3.0
AR=1.5*((X(JA)-GX)*(Y(KA)-GY)-(Y(JA)-GY)*(X(KA)-GX))
AT=X(JA)*Y(KA)-X(KA)*Y(JA)
BI=Y(JA)-Y(KA)
```

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

```
CI=X(KA)-X(JA)
AJ=X(KA)*Y(IA)-X(IA)*Y(KA)
BJ=Y(KA)-Y(IA)
CJ=X(IA)-X(KA)
AM=X(IA)*Y(JA)-X(JA)*Y(IA)
BM=Y(IA)-Y(JA)
CM=X(JA)-X(IA)
AUX=X(IA)**2+X(JA)**2+X(KA)**2
PARC1=AUX*AR/12.0
PARC2=AR*GX**2
INTG1=PARC1+PARC2
AUX=X(IA)*Y(IA)+X(JA)*Y(JA)+X(KA)*Y(KA)
PARC1=AUX*AR/12.0
PARC2=AR*GX*GY
INTG2=PARC1+PARC2
FFMI=3.141516*(AI*GX*AR+BI*INTG1+CI*INTG2)/AR
FFMJ=3.141516*(AJ*GX*AR+BJ*INTG1+CJ*INTG2)/AR
FFMM=3.141516*(AM*GX*AR+BM*INTG1+CM*INTG2)/AR
I1=2*IA-1
I2=2*IA
J1=2*JA-1
J2=2*JA
K1=2*KA-1
K2=2*KA
FEQ(I1, LN)=FEQ(I1, LN)+FMX(I)*FFMI
FEQ(I2, LN)=FEQ(I2, LN)+FMY(I)*FFMI
FEQ(J1, LN)=FEQ(J1, LN)+FMX(I)*FFMJ
FEQ(J2, LN)=FEQ(J2, LN)+FMY(I)*FFMJ
FEQ(K1, LN)=FEQ(K1, LN)+FMX(I)*FFMM
FEQ(K2, LN)=FEQ(K2, LN)+FMY(I)*FFMM
105 CONTINUE
RETURN
END
```

N

DOCUMENTO ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 1

SUBROUTINE FOSAX(FEQ,JI,JJ,JK,NCJ,LN,NECFS,NEFS1,NEFS2,NEFS3,NCE,S
IUBN).

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)

INTEGER *2 SUBN

DIMENSION FEQ(78,2),JI(60),JJ(60),JK(60),LIA(60),FSX(60),FSY(60)

COMMON /DDIS/ X(39),Y(39)

ESTA SUBROTINA REFERE-SE A PROBLEMAS AXISSIMETRICOS. ELA CALCULA,
PARA ELEMENTOS TRIANGULARES, AS CARGAS NODAIS EQUIVALENTES A FORÇAS
DE SUPERFICIE QUANDO SUAS COMPONENTES SAO CONSTANTES EM CADA ELEMENTO
(PODENDO TODAVIA VARIAR DE ELEMENTO PARA ELEMENTO)

IF(NEFS1)1,3,1

1 READ(2,2)(LIA(I),FSX(I),FSY(I),I=1,NEFS1)

2 FORMAT(4(14,2F8.3))

3 IF(NEFS2)4,7,4

4 IINIC=NEFS1+1

IFINL=NEFS1+NEFS2

READ(2,9) VA1,VA2

9 FORMAT(2F8.3)

READ(2,220)(LIA(I),I=IINIC,IFINL)

220 FORMAT(20I4)

DO 6 I=IINIC,IFINL

FSX(I)=VA1

6 FSY(I)=VA2

7 IF(NEFS3)8,11,8

8 IINIC=NEFS1+NEFS2+1

IFINL=NEFS1+NEFS2+NEFS3

READ(2,5) VA1,VA2

5 FORMAT(2F8.3)

READ(2,225)(LIA(I),I=IINIC,IFINL)

225 FORMAT(20I4)

DO 10 I=IINIC,IFINL

FSX(I)=VA1

N

**DOCUMENTO
ILEGIVEL**

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

```

10  FSY(1)=VA2
11  IF(NECFS-(NEFS1+NEFS2+NEFS3))510,511,510
510  IINIC=NEFS1+NEFS2+NEFS3+1
      IFINL=NECFS
      READ(2,231) VA1,VA2
231  FORMAT(2F8.3)
      READ(2,232)(LIA(I),I=IINIC,IFINL)
232  FORMAT(20I4)
      DO 233 I=IINIC,IFINL
          FSX(I)=VA1
233  FSY(I)=VA2
511  WRITE(3,12)(LIA(I),FSX(I),FSY(I),I=1,NECFS)
12   FORMAT(4(15,F11.3,F10.3,3X))
      DO 105 IM=1,NECFS
          I=LIA(IM)-NCE
          IA=JI(I)-NCJ
          JA=JJ(I)-NCJ
          KA=JK(I)-NCJ
          AXX=2*3.141516*X(IA)*DABS(Y(KA)-Y(IA))
          AYY=3.141516*DABS(X(KA)**2-X(IA)**2)
          I1=2*IA-1
          I2=2*IA
          K1=2*KA-1
          K2=2*KA
          FEQ(I1,LN)=FEQ(I1,LN)+FSX(IM)*AXX/2.
          FEQ(I2,LN)=FEQ(I2,LN)+FSY(IM)*AYY/2.
          FEQ(K1,LN)=FEQ(K1,LN)+FSX(IM)*AXX/2.
          FEQ(K2,LN)=FEQ(K2,LN)+FSY(IM)*AYY/2.
105  CONTINUE
      RETURN
      END

```

PAG 1

C
C
C
C
C
C
C

C
C
C
C
C
C
C

C
C
C
C
C
C
C

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

AM=X(IA)*Y(JA)-X(JA)*Y(IA)
CM=X(JA)-X(IA)
SUBT1=(AI+CI*GY)/GX
SUBT2=(AJ+CJ*GY)/GX
SUBT3=(AM+CM*GY)/GX

MATRIZ DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DO ELEMENTO I

DO 112 LN=1,NCA
IF(NEFT(LN))1,2,1
DO 3 J=1,4
TENS(J)=0.
GO TO 6
ID=60*(SUBN-1)+I
READ(25,ID)TENS
DJA(1)=DJ(2*IA-1, LN)
DJA(1)=DJ(2*IA-1, LN)
DJA(2)=DJ(2*IA, LN)
DJA(3)=DJ(2*JA-1, LN)
DJA(4)=DJ(2*JA, LN)
DJA(5)=DJ(2*KA-1, LN)
DJA(6)=DJ(2*KA, LN)

TENSDES NO ELEMENTO I (CALCULADAS NO CENTROIDE)

DO 101 II=1,4
SIG(II)=0.0
DO 101 J=1,6
101 SIG(II)=SIG(II)+DB(II,J)*DJA(J)

CALCULO DOS TERMOS CORRETIVOS

DO 106 J=1,3
III=LAJ(J)

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 3

```
DI=((IAI+CI*Y(III))/X(III)-SUBT1)/AR2
ZJ=((AJ+CJ*Y(III))/X(III)-SUBT2)/AR2
DM=((AM+CM*Y(III))/X(III)-SUBT3)/AR2
AUX=DI*DJA(1)+ZJ*DJA(3)+DM*DJA(5)
CORC=(1-XM1-2*QUOC1*XM2**2)
CORC1=AUX*E2*QUOC1*XM2/CORC
CORC2=AUX*E2*(XM1+QUOC1*XM2**2)*QUOC1/(1+XM1)/CORC
CORC3=AUX*E2*QUOC1*(1-QUOC1*XM2**2)/(1+XM1)/CORC
II=4*LAJ(J)
```

TENSOES NOS VERTICES DOS ELEMENTOS E GERACAO DAS MATRIZES VEGA E LEGA

```
VEGA(II-3, LN)=VEGA(II-3, LN)+SIG(1)-TENS(1)+CORC1
VEGA(II-2, LN)=VEGA(II-2, LN)+SIG(2)-TENS(2)+CORC2
VEGA(II-1, LN)=VEGA(II-1, LN)+SIG(3)-TENS(3)+CORC3
VEGA(II, LN)=VEGA(II, LN)+SIG(4)-TENS(4)
LEGA(II-3, LN)=LEGA(II-3, LN)+1
LEGA(II-2, LN)=LEGA(II-2, LN)+1
LEGA(II-1, LN)=LEGA(II-1, LN)+1
LEGA(II, LN)=LEGA(II, LN)+1
```

106
112 CONTINUE
RETURN
END

2

DOCUMENTO ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 1

```
SUBROUTINE TENSA(DJ,I,VEGA,LEGA,SUBN,NCA)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
  INTEGER *2 SUBN , IID*4
  DIMENSION DB(3,6),DJ(78,2),SIG(3),DJA(6),VEGA(156,2),LEGA(156,2),
  LAJ(3)
```

ESTA SUBROUTINE REFERE-SE A ELEMENTOS TRIANGULARES ISOTROPICOS UTILIZADOS EM PROBLEMAS DE ESTADOS PLANOS DE TENSORES E DEFORMACOES. ELA CALCULA AS TENSOES NORMAIS E DE CISALHAMENTO NOS NOS DO ELEMENTO I AO MESMO TEMPO EM QUE AS ADICIONA AS MATRIZES VEGA E LEGA. ESTAS MATRIZES PERMITIRAO O CALCULO DA MEDIA DAS TENSOES NORMAIS E DE CISALHAMENTO EM CADA PONTO NODAL.

```
  IID=SUBN+11
  READ(IID,'I')((DB(J,K),J=1,3),K=1,6),IA,JA,KA
```

MATRIZ DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DO ELEMENTO I

```
  DO 112 LN=1,NCA
    DJA(1)=DJ(2*IA-1,LN)
    DJA(2)=DJ(2*IA,LN)
    DJA(3)=DJ(2*JA-1,LN)
    DJA(4)=DJ(2*JA,LN)
    DJA(5)=DJ(2*KA-1,LN)
    DJA(6)=DJ(2*KA,LN)
```

TENSOES NORMAIS E DE CISALHAMENTO NO ELEMENTO I

```
  DO 101 II=1,3
    SIG(II)=0.0
    DO 101 J=1,6
101  SIG(II)=SIG(II)+DB(II,J)*DJA(J)
    LAJ(1)=IA
    LAJ(2)=JA
```

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

LAJ(3)=KA

MATRIZES VEGA E LEGA

DO 106 J=1,3

II=3*LAJ(J)

VEGA(II-2, LN)=VEGA(II-2, LN)+SIG(1)

VEGA(II-1, LN)=VEGA(II-1, LN)+SIG(2)

VEGA(II, LN)=VEGA(II, LN)+SIG(3)

LEGA(II-2, LN)=LEGA(II-2, LN)+1

LEGA(II-1, LN)=LEGA(II-1, LN)+1

LEGA(II, LN)=LEGA(II, LN)+1

CONTINUE

RETURN

END

106

112

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 1

```
SUBROUTINE EGET(DJ,I,VEGA,LEGA,SUBN,NCA)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
INTEGER *2 SUBN , IID*4
DIMENSION DJ(78,2),VEGA(156,2),LEGA(156,2),T(3,9),DA(3,3),ESF(3,9)
1,DJA(9),LAJ(3)
```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
ESTA SUBROUTINE REFERE-SE A ELEMENTOS TRIANGULARES ORTOTROPOS UTI-
LIZADOS NA ANALISE DE PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE. ELA CAL-
CULA OS MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO NOS NOS DO ELEMENTO I AO
MESMO TEMPO EM QUE OS ADICIONA AS MATRIZES VEGA E LEGA. ESTAS MA-
TRIZES PERMITIRAO O CALCULO DA MEDIA DOS MOMENTOS FLETORES E DE
TORCAO EM CADA PONTO NODAL.

```
IID=SUBN+11
READ(IID,I)DX,DY,D1,DXY,AR,((T(J,K),K=1,9),J=1,3),IA,JA,KA
DO 112 LN=1,NCA
IF(LN-1)104,100,104
100 DO 101 K=1,3
DO 101 J=1,3
101 DA(J,K)=0.0
VA=0.125/AR**3
DA(1,1)=-2.0*DX*VA
DA(2,1)=-2.0*D1*VA
DA(3,2)=2.0*DXY*VA
DA(1,3)=DA(2,1)
DA(2,3)=-2.0*DY*VA
DO 102 K=1,9
DO 102 J=1,3
ESF(J,K)=0.0
DO 102 II=1,3
102 ESF(J,K)=ESF(J,K)+DA(J,II)*T(II,K)
```

C
C
C
MATRIZ DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DO ELEMENTO I

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

104 DJA(1)=DJ(3*IA-2, LN)
DJA(2)=DJ(3*IA-1, LN)
DJA(3)=DJ(3*IA, LN)
DJA(4)=DJ(3*JA-2, LN)
DJA(5)=DJ(3*JA-1, LN)
DJA(6)=DJ(3*JA, LN)
DJA(7)=DJ(3*KA-2, LN)
DJA(8)=DJ(3*KA-1, LN)
DJA(9)=DJ(3*KA, LN)
VT1=0.0
VT2=0.0
VT3=0.0

C
C MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO NO ELEMENTO I
C

DO 105 J=1,9
VT1=VT1+ESF(1,J)*DJA(J)
VT2=VT2+ESF(2,J)*DJA(J)
105 VT3=VT3+ESF(3,J)*DJA(J)
LAJ(1)=IA
LAJ(2)=JA
LAJ(3)=KA

C
C MATRIZES VEGA E LEGA
C

DO 106 J=1,3
II=3*LAJ(J)
VEGA(II-2, LN)=VT1+VEGA(II-2, LN)
VEGA(II-1, LN)=VT2+VEGA(II-1, LN)
VEGA(II, LN)=VT3+VEGA(II, LN)
LEGA(II-2, LN)=LEGA(II-2, LN)+1
LEGA(II-1, LN)=LEGA(II-1, LN)+1
106 LEGA(II, LN)=LEGA(II, LN)+1
112 CONTINUE

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 3

RETURN
END

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 1

```
SUBROUTINE MEGE(NJLIA,NJU,VEGA,LEGA,NCA,NCJ,ITP)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
  REAL *8 MXD,MYD,MXYD,M1,M2
  DIMENSION VEGA(156,2),LEGA(156,2)
```

ESTA SUBROUTINE CALCULA A MEDIA DOS ESFORÇOS GENERALIZADOS (TEN-
SOES NORMAIS E DE CISALHAMENTO OU MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO)
NOS PONTOS NODAIS. EM SEGUIDA CALCULA OS ESFORÇOS PRINCIPAIS.

```
  IF(ITP-1)9100,100,101
9100  WRITE(3,5)
5     FORMAT(/10X,'TENSOES NORMAIS, DE CISALHAMENTO E CIRCUNFERENCIAIS.
1TENSOES NORMAIS PRINCIPAIS.'//3X,'ND',7X,'SIGXX',10X,'SIGYY',11X,'
2SIGXY',9X,'SIGCIRC',8X,'ALFA',10X,'SIG1',11X,'SIG2'//)
     GO TO 102
100   WRITE(3,3)
     GO TO 102
101   WRITE(3,1)
1     FORMAT(/10X,'MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO. MOMENTOS FLETORES PRIN
1CIPAIS.'//3X,'ND',9X,'MXD',12X,'MYD',12X,'MXYD',8X,'ALFA',12X,
2'M1',13X,'M2'//)
102   IA=NJLIA+1
     DO 112 LN=1,NCA
       WRITE(3,2)LN
2       FORMAT(/10X,'CARREGAMENTO NO.',I3//)
3       FORMAT(/10X,'TENSOES NORMAIS E DE CISALHAMENTO. TENSOES NORMAIS PR
1INCIPAIS.'//3X,'ND',7X,'SIGXX',10X,'SIGYY',11X,'SIGXY',8X,
2'ALFA',10X,'SIG1',11X,'SIG2'//)
       DO 112 J=1A,NJU
         IF(ITP-1)201,202,202
201    MXD=VEGA(4*J-2,LN)/LEGA(4*J-2,LN)
         MYD=VEGA(4*J-3,LN)/LEGA(4*J-3,LN)
         MXYD=VEGA(4*J,LN)/LEGA(4*J,LN)
         XYY=VEGA(4*J-1,LN)/LEGA(4*J-1,LN)
```

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

```

GO TO 104
202 MXD=VEGA(3*J-2, LN)/LEGA(3*J-2, LN)
MYD=VEGA(3*J-1, LN)/LEGA(3*J-1, LN)
MXYD=VEGA(3*J, LN)/LEGA(3*J, LN)
IF(1TP-1)104,104,105
104 MXYD=-MXYD
105 P=DABS(MXD)+DABS(MYD)
IF(1.0E-15-P)106,106,109
106 IF(0.0005-DABS(MYD-MXD)/P)110,107,107
107 IF(0.0005-DABS(MXYD)/P)109,108,108
108 ALFA=0.0
GO TO 111
109 ALFA=0.7853981
GO TO 111
110 ALFA=DATAN(2*MXYD/(MYD-MXD))/2.0
111 SA=DSIN(ALFA)
CA=DCOS(ALFA)
M1=MXD*CA**2+MYD*SA**2-2.0*MXYD*SA*CA
M2=MXD*SA**2+MYD*CA**2+2.0*MXYD*SA*CA
ALFA=ALFA*180.0/3.14159
JA=J+NCJ
IF(1TP-1)9110,1110,1111
9110 MXYD=-MXYD
WRITE(3,6) JA, MXD, MYD, MXYD, XYYY, ALFA, M1, M2
6 FORMAT(15, 4F15.5, F11.2, 2F15.5)
GO TO 112
1110 MXYD=-MXYD
1111 WRITE(3,4) JA, MXD, MYD, MXYD, ALFA, M1, M2
4 FORMAT(15, 3F15.5, F11.2, 2F15.5)
112 CONTINUE
RETURN
END

```

PAG 1

C
C
C
C
C

C
C
C

14

2

3

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

C
C VETOR DAS DEFORMACOES TERMICAS
C
5 EO(1)=ALFAZ*TM(1)
EO(2)=ALFAR*TM(1)
EO(3)=EO(2)
EO(4)=0.
C
C VETOR DAS TENSOES TERMICAS
C
DO 6 J=1,4
SIG(J)=0.
DO 6 K=1,4
6 SIG(J)=SIG(J)+D(J,K)*EO(K)
C
C VETOR DAS FORCAS NODAIS EQUIVALENTES ORIUNDAS
C DO GRADIENTE TERMICO
C
DO 7 J=1,6
FT(J)=0.
DO 7 K=1,4
7 FT(J)=FT(J)+B(K,J)*SIG(K)*3.141516*AR2*GX
I1=2*IA-1
I2=2*IA
J1=2*JA-1
J2=2*JA
K1=2*KA-1
K2=2*KA
FEQ(I1, LN)=FEQ(I1, LN)+FT(1)
FEQ(I2, LN)=FEQ(I2, LN)+FT(2)
FEQ(J1, LN)=FEQ(J1, LN)+FT(3)
FEQ(J2, LN)=FEQ(J2, LN)+FT(4)
FEQ(K1, LN)=FEQ(K1, LN)+FT(5)
FEQ(K2, LN)=FEQ(K2, LN)+FT(6)

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 3

ID=60*(SUBN-1)+1
WRITE(25, ID) SIG
RETURN
END

T

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 1

```
IMPLICIT REAL*(A-H,O-Z),INTEGER*(I-N)
INTEGER *2 SUBN
DIMENSION VT1(50),VT2(2),LIA(156),SMD(12,12),FDA(78,2),FEQ(78,2),R
1A(78,2),DJ(78,2),DO(78,2),VEGA(156,2),LEGA(156,2),TM(60),NEFT(2)
COMMON /UM/ S(78,78),FTC(78,2),JI(60),JJ(60),JK(60),JL(60),LL(78),
1LTE(60),LCL(78),LCL1(78),LCL2(78),SUBN,NCJ,NEL,NCE,I1,I2,I3,J1,J2,
2J3,K1,K2,K3,L1,L2,L3,NSUS,NL1,NL2,NJU,N,NL,NCA,NJU3,NNL,NNL1,IO,JO
3,NJL1A,ITP,NJU2,IO1,IO2,IO3,IO4,IO5,IO6,IO7,IO8,IO9,IO10,IO11,IO12
COMMON /DOIS/ X(39),Y(39),EX(5),EY(5),ESP(60),LCE(60),EE(5),G(5),G
1G(5)
EQUIVALENCE (SMD(1),FEQ(1)),(FEQ(1),D(1))
DATA INDCOM/'C'/,INDINC/'2'/,INDEFIN/'0'/
DEFINE FILE 10(312,500,U,JO),11(12,400,U,IO),12(60,70,U,IO1),13(60
1,70,U,IO2),14(60,70,U,IO3),15(60,70,U,IO4),16(60,70,U,IO5),17(60,7
20,U,IO6),18(60,70,U,IO7),19(60,70,U,IO8),20(60,70,U,IO9),21(60,70,
3U,IO10),22(60,70,U,IO11),23(60,70,U,IO12),24(60,100,U,IO13),25(720
4,10,U,IO14)
```

```
C
C ESTE PROGRAMA UTILIZA O METODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANALISAR
C PROBLEMAS AXISSIMETRICOS, PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE, E PRO
C BLEMAS DE ESTADO PLANO DE TENSOES E DEFORMACOES
C
```

```
9993 K=0
9997 READ(2,9998)(LIA(I),I=1,80)
9998 FORMAT(80A1)
IF(LIA(1)-INDCOM)9995,9996,9995
9996 K=K+1
IF(K-1)9991,9992,9991
9992 WRITE(3,9990)
9990 FORMAT('3',////////,1X,99('*'),/,1X,('*'))
9991 WRITE(3,9989)(LIA(I),I=2,80)
9989 FORMAT(1X,'* ',79A1)
GO TO 9997
9995 IF(K)9988,9987,9988
```

T

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 2

```
9988 WRITE(3,9986)
9986 FORMAT(1X,'*',/,1X,90('*'))
9987 IF(LIA(5)-INDINC)9985,101,9985
9985 IF(LIA(5)-INDFIN)103,100,103
9999 READ(2,5) IA
9994 IF(IA-1)100,102,101
100 CALL EXIT
C
C   INFORMACOES GERAIS
C
101 READ(2,5)NPL,NCA,NSUS,ITP,ITP1
   IF(ITP-1)9011,1011,1010
1010 WRITE(3,1)
1   FORMAT('3',29X,'ANALISE DE PLACAS CARREGADAS TRANSVERSALMENTE'//)
   GO TO 1012
1011 WRITE(3,2)
2   FORMAT('3',29X,'ANALISE DE PROBLEMAS ELASTICOS BI-DIMENSIONAIS'//)
   GO TO 1012
9011 WRITE(3,8001)
8001 FORMAT('3',29X,'ANALISE DE PROBLEMAS AXISSIMETRICOS'//)
1012 NCE=0
     NCJ=0
     NJLIA=0
     WRITE(3,3)NPL,NSUS,NCA,ITP
3   FORMAT(10X,'ANALISE NO.',I4,'. NO. DE SUBESTRUTURAS=',I3,
1' . NO. DE CARREGAMENTOS=',I3,'. ITP=',I3,'.'//)
     SUBN=0
102 SUBN=SUBN+1
     WRITE(3,4)SUBN
4   FORMAT(/10X,'DADOS RELATIVOS A SUBESTRUTURA NO.',I3,4X,'*****'
1*****'//2X,'NEL',4X,
2'N',2X,'NJU',3X,'NL',2X,'NJL',2X,'NET',2X,'NER'//)
C
C   INFORMACOES RELATIVAS A MALHA ADOPTADA E AS LIGACOES EXISTENTES
```


T

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 3

```
C
  READ(2,5)NEL,NJU,NL,NJL,NET
5   FORMAT(16I5)
   IF(1TP-1)1020,1020,1021
1020 N=2*NJU-NL
     GO TO 1022
1021 N=3*NJU-NL
1022 NER=NEL-NET
     WRITE(3,5)NEL,N,NJU,NL,NJL,NET,NER

C
C   COORDENADAS DOS PONTOS NODAIS
C
  WRITE(3,6)
6   FORMAT(/10X,'COORDENADAS DOS NOS' //3X,'NO',7X,'X',8X,'Y',
14(5X,'NO',7X,'X',8X,'Y'))/
  IA=NJL1A+1
  READ(2,5)INX
  IF(INX)9403,9404,9403
9403 I=IA
  READ(2,7)LIA(I),X(I),Y(I)
9400 I=I+1
  IF(I-NJU)9405,9405,9406
9405 READ(2,7)LIA(I),X(I),Y(I)
  IF(LIA(I)-LIA(I-1)-1)9401,9400,9401
9401 I1=LIA(I-1)+1-NCJ
  I2=LIA(I)-1-NCJ
  I3=LIA(I)-NCJ
  LIA(I3)=LIA(I)
  X(I3)=X(I)
  Y(I3)=Y(I)
  NPONT=I3-I1+1
  DELTAX=X(I)-X(I-1)
  DELTAY=Y(I)-Y(I-1)
  ACRSCX=DELTAX/NPONT
```

T

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 4

```
ACRSCY=DELTAY/NPONT
DO 9402 J=11,12
LIA(J)=LIA(J-1)+1
X(J)=X(J-1)+ACRSCX
9402 Y(J)=Y(J-1)+ACRSCY
I=I3
GO TO 9400
9404 READ(2,7)(LIA(J),X(J),Y(J),J=1A,NJU)
7 FORMAT(4(I4,2F8.2))
9406 IF(INCJ+NJU-LIA(NJU))103,104,103
103 WRITE(3,8)
8 FORMAT(/10X,'LEITURA ERRADA DE DADOS - PARÉ')
STOP
104 WRITE(3,9)(LIA(J),X(J),Y(J),J=1A,NJU)
9 FORMAT(5(I5,F10.3,F9.3))
10 FORMAT(/2X,'LCE',2X,'MOD. DE ELASTICIDADE',4X,'C. DE POISSON'/)
11 FORMAT(I5,F15.1,F21.3)
15 FORMAT(2(I5I5,2I2,F11.3))
C
C DADOS RELATIVOS AOS ELEMENTOS
C
WRITE(3,16)
16 FORMAT(/10X,'DADOS RELATIVOS AOS ELEMENTOS'//1X,'ELEMENTO',4X,'JI'
1,3X,'JJ',3X,'JK',3X,'JL',6X,'ESPESSURA',3X,'LCE',2X,'LTE',5X,'ELEM
2ENTO',4X,'JI',3X,'JJ',3X,'JK',3X,'JL',6X,'ESPESSURA',3X,'LCE',2X,
3'LTE'/)
READ(2,5)INDELM
IF(INDELM)9701,9702,9701
9702 IF(ITP-1)9703,9704,9704
9703 READ(2,5)(LIA(I),JI(I),JJ(I),JK(I),LCE(I),I=1,NEL)
GO TO 9507
9704 READ(2,15)(LIA(I),JI(I),JJ(I),JK(I),JL(I),LCE(I),LTE(I),ESP(I),I=1
1,NEL)
GO TO 9116
```

T

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 5

```
9701 IF(I/P-1)9112,9115,9115
9115 I=1
      READ(2,15)LIA(I),JI(I),JJ(I),JK(I),JL(I),LCE(I),LTE(I),ESP(I)
9501 I=I+1
      IF(I-NEL)9502,9502,9116
9502 READ(2,15)LIA(I),JI(I),JJ(I),JK(I),JL(I),LCE(I),LTE(I),ESP(I)
      IF(LIA(I)-LIA(I-1)-1)9504,9501,9504
9504 I1=LIA(I-1)+1-NCE
      I2=LIA(I)-1-NCE
      I3=LIA(I)-NCE
      LIA(I3)=LIA(I)
      JI(I3)=JI(I)
      JJ(I3)=JJ(I)
      JK(I3)=JK(I)
      JL(I3)=JL(I)
      LCE(I3)=LCE(I)
      LTE(I3)=LTE(I)
      ESP(I3)=ESP(I)
      DO 9505 J=I1,I2
      LIA(J)=LIA(J-1)+1
      JI(J)=JI(J-1)+1
      JJ(J)=JJ(J-1)+1
      JK(J)=JK(J-1)+1
      JL(J)=JL(J-1)+1
      LCE(J)=LCE(J-1)
      LTE(J)=LTE(J-1)
9505 ESP(J)=ESP(J-1)
      I=I3
      GO TO 9501
9112 I=1
      READ(2,5)LIA(I),JI(I),JJ(I),JK(I),LCE(I)
9511 I=I+1
      IF(I-NEL)9506,9506,9507
9506 READ(2,5)LIA(I),JI(I),JJ(I),JK(I),LCE(I)
```

T

DOCUMENTO ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 6

```

IF(LIA(I)-LIA(I-1)-1)9508,9511,9508
9508 I1=LIA(I-1)+1-NCE
      I2=LIA(I)-1-NCE
      I3=LIA(I)-NCE
      LIA(I3)=LIA(I)
      JI(I3)=JI(I)
      JJ(I3)=JJ(I)
      JK(I3)=JK(I)
      LCE(I3)=LCE(I)
      DO 9509 J=I1,I2
      LIA(J)=LIA(J-1)+1
      JI(J)=JI(J-1)+1
      JJ(J)=JJ(J-1)+1
      JK(J)=JK(J-1)+1
9509 LCE(J)=LCE(J-1)
      I=I3
      GO TO 9511
9507 DO 9114 IJI=1,NEL
      JL(IJI)=0
      LTE(IJI)=0
9114 ESP(IJI)=0.0
9116 IF(NCE+NEL-LIA(NEL))112,113,112
112  WRITE(3,8)
      STOP
113  IF(NER)114,115,116
114  STOP
115  WRITE(3,17)(LIA(I),JI(I),JJ(I),JK(I),ESP(I),LCE(I),LTE(I),I=1,NEL)
17   FORMAT(2(I5,110,2I5,5X,F15.4,2I5,5X))
      GO TO 118
116  WRITE(3,18)(LIA(I),JI(I),JJ(I),JK(I),JL(I),ESP(I),LCE(I),LTE(I),
11   I=1,NEL)
18   FORMAT(2(I5,110,3I5,F15.4,2I5,5X))
C
C   CONSTANTES ELASTICAS

```

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 7

```

C
118 READ(2,19)NGCE,I,EX(I),EY(I),EE(I),G(I),GG(I)
19  FORMAT(2I5,5F10.5)
    IF(NGCE-I)119,119,118
119  IF(ITP-1)9971,120,122
9971 WRITE(3,9972)
9972 FORMAT(/2X,'LCE',13X,'EX',13X,'EZ',12X,'NIX',12X,'NIZ',13X,'GZ'/)
    DO 9973 I=1,NGCE
9973 WRITE(3,21)I,EX(I),EY(I),EE(I),G(I),GG(I)
    ID=SUBN
    WRITE(11,ID)X,Y,EX,EY,EE,G,ESP,LCE,GG
    GO TO 1250
120  WRITE(3,10)
    DO 121 I=1,NGCE
121  WRITE(3,11)I,EX(I),EY(I)
    ID=SUBN
    WRITE(11,ID)X,Y,EX,EY,ESP,LCE
    GO TO 1250
122  WRITE(3,20)
20  FORMAT(/2X,'LCE',8X,'EX',13X,'EY',13X,'EE',14X,'G'/)
    DO 125 I=1,NGCE
125  WRITE(3,21)I,EX(I),EY(I),EE(I),G(I)
21  FORMAT(15,5F15.3)
    ID=SUBN
    WRITE(11,ID)X,Y,EX,EY,EE,G,ESP,LCE

C
C  LISTA DE LIGACOES DOS PONTOS NODAIS
C
1250 IF(ITP-1)126,126,129
126  NJU2=2*NJU
    DO 127 J=1,NJU2
127  LL(J)=0
    IF(NJL)1270,1590,1270
1270 WRITE(3,22)

```

T

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 8

```
      READ(2,23)((LIA(3*J-2),LIA(3*J-1),LIA(3*J)),J=1,NJL)
      DO 128 J=1,NJL
        IA=3*J
        JA=2*(LIA(IA-2)-NCJ)
        LL(JA-1)=LIA(IA-1)
128    LL(JA)=LIA(IA)
        WRITE(3,25)((LIA(3*J-2),LIA(3*J-1),LIA(3*J)),J=1,NJL)
        GO TO 1590
129    NJU3=3*NJU
        DO 157 J=1,NJU3
157    LL(J)=0
        IF(NJL)158,1590,158
158    WRITE(3,22)
22    FORMAT(/10X,'LIGACOES DOS NUS'//3X,'NO',3X,'L1',3X,'L2',
13X,'L3',3(8X,'NO',3X,'L1',3X,'L2',3X,'L3'))/
        READ(2,23)((LIA(4*J-3),LIA(4*J-2),LIA(4*J-1),LIA(4*J)),J=1,NJL)
23    FORMAT(16I5)
        DO 159 J=1,NJL
          IA=4*J
          JA=3*(LIA(IA-3)-NCJ)
          LL(JA-2)=LIA(IA-2)
          LL(JA-1)=LIA(IA-1)
159    LL(JA)=LIA(IA)
          WRITE(3,24)((LIA(4*J-3),LIA(4*J-2),LIA(4*J-1),LIA(4*J)),J=1,NJL)
24    FORMAT(4(4I5,5X))
25    FORMAT(4(3I5,10X))
C
C    LISTAS CUMULATIVAS DE LIGACOES DOS PONTOS NODAIS
C
1590  IF(SURN-1)161,161,160
160    NLIA=NL1
161    IF(LL(1)-1)165,162,164
162    LCL1(1)=1
        LCL2(1)=0
```

T

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 9

```
GO TO 166
164 LCL1(1)=0
    LCL2(1)=1
    GO TO 166
165 LCL1(1)=0
    LCL2(1)=0
166>NNL=N+NL
    DO 171 K=2,NNL
    IF(LL(K)-1)170,167,169
167 LCL1(K)=LCL1(K-1)+1
    LCL2(K)=LCL2(K-1)
    GO TO 171
169 LCL1(K)=LCL1(K-1)
    LCL2(K)=LCL2(K-1)+1
    GO TO 171
170 LCL1(K)=LCL1(K-1)
    LCL2(K)=LCL2(K-1)
171 CONTINUE
    DO 172 K=1,NNL
172 LCL(K)=LCL1(K)+LCL2(K)
    NL1=LCL1(NNL)
    NL2=NL-NL1
   >NNL1=N+NL1
    IF(NNL-73)1716,1716,1717
1716 IF(NL1-50)1718,1718,1717
1717 WRITE(3,27)
27  FORMAT(/10X,'DIMENSÃO INADEQUADA PARA S OU VT1 - PARE!/')
    STOP
1718 IF(SUBN-1)173,1719,173
1719 DO 1720 K=1,>NNL1
    DO 1720 J=1,NNL
1720 S(J,K)=0.0
    DO 1721 K=1,NCA
    DO 1721 J=1,NNL
```

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 10

```
1721 FTC(J,K)=0.0
      GO TO 185
173  NL11=NL1A+1
C
C      REARRANJO DAS MATRIZES RESIDUAIS DE RIGIDEZ E CARGA
C
      DO 1722 K=NL11,NNL1
      DO 1722 J=1,NL1A
1722 S(J,K)=0.0
      DO 1723 K=1,NNL1
      DO 1723 J=NL11,NNL1
1723 S(J,K)=0.0
      DO 1724 K=1,NCA
      DO 1724 J=NL11,NNL1
1724 FTC(J,K)=0.0
      IF(NL2)174,185,174
174  DO 176 IA=1,NL1A
174  DO 176 IA=1,NL1A
174  DO 176 IA=1,NL1A
      I=NL1A+1-IA
      IF(LL(I)-2)176,175,176
175  DO 1750 K=1,NL1A
      DO 1750 J=1,NL1A
      S(J,K)=S(J,K+1)
1750 S(J,K+1)=0.0
176  CONTINUE
      KA=NL1A
      DO 184 IA=1,KA
      I=KA+1-IA
      IF(LL(I)-2)184,177,184
177  DO 178 K=1,NL1A
178  VT1(K)=S(I,K)
      DO 179 LN=1,NCA
179  VT2(LN)=FTC(I,LN)
```


DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 113

```
DO 1810 J=1,NL1A
DO 180 K=1,NL1A
S(J,K)=S(J+1,K)
180 S(J+1,K)=0.0
DO 191 LN=1,NCA
FTC(J,LN)=FTC(J+1,LN)
181 FTC(J+1,LN)=0.0
1810 CONTINUE
J=N+NL1+LCL2(1)
IF(J-NL1A)1811,1811,1812
1811 WRITE(3,28)
28 FORMAT(/10X,'ERRO NO REARRANJO DAS MATRIZES. N+NL1+LCL2(1) IGUAL
OU MENOR QUE NL1A - PARE.')
```

STOP

```
1812 DO 182 K=1,NL1A
182 S(J,K)=VT1(K)
DO 183 LN=1,NCA
183 FTC(J,LN)=VT2(LN)
NL1A=NL1A-1
184 CONTINUE
C
C GERACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
C
185 I=0
186 I=I+1
IF(I-NEL)1860,1860,215
1860 IA=JI(1)-NCJ
JA=JJ(1)-NCJ
KA=JK(1)-NCJ
IF(ITP-1)1861,1861,1873
9861 CALL SARI1(IA,JA,KA)
CALL RISAX(IA,JA,KA,SMD,I,SUBN)
GO TO 9862
1861 CALL SARI1(IA,JA,KA)
```

T
DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 12

9862 CALL RITET(ITP,ITP1,IA,JA,KA,SMD,I,SUBN)
1862 IF(LL(2*IA-1)-2)1862,1863,1862
1862 KW=1
1863 CALL SAGES(I1,KW,I,SMD)
1864 IF(LL(2*IA)-2)1864,1865,1864
1864 KW=2
1865 CALL SAGES(I2,KW,I,SMD)
1866 IF(LL(2*JA-1)-2)1866,1867,1866
1866 KW=3
1867 CALL SAGES(J1,KW,I,SMD)
1868 IF(LL(2*JA)-2)1868,1869,1868
1868 KW=4
1869 CALL SAGES(J2,KW,I,SMD)
1870 IF(LL(2*KA-1)-2)1870,1871,1870
1870 KW=5
1871 CALL SAGES(K1,KW,I,SMD)
1872 IF(LL(2*KA)-2)1872,186,1872
1872 KW=6
1873 CALL SAGES(K2,KW,I,SMD)
1873 GO TO 186
1874 CALL SARI2(IA,JA,KA,LA,I)
1874 IF(LTE(I)-1)1875,1874,1875
1875 CALL RIPER(I,SMD)
1875 GO TO 1876
1876 CALL RIPET(I,SMD,JI,JJ,JK,NCJ,SUBN)
207 IF(LL(3*IA-2)-2)207,208,207
207 KW=1
208 CALL SAGES(I1,KW,I,SMD)
209 IF(LL(3*IA-1)-2)209,210,209
210 KW=2
211 CALL SAGES(I2,KW,I,SMD)
211 IF(LL(3*IA)-2)211,212,211
212 KW=3
213 CALL SAGES(I3,KW,I,SMD)

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 13

212 IF(LL(3*JA-2)-2)213,214,213
213 KW=4
CALL SAGES(J1,KW,I,SMD)
214 IF(LL(3*JA-1)-2)2140,2141,2140
2140 KW=5
CALL SAGES(J2,KW,I,SMD)
2141 IF(LL(3*JA)-2)2142,2143,2142
2142 KW=6
CALL SAGES(J3,KW,I,SMD)
2143 IF(LL(3*KA-2)-2)2144,2145,2144
2144 KW=7
CALL SAGES(K1,KW,I,SMD)
2145 IF(LL(3*KA-1)-2)2146,2147,2146
2146 KW=8
CALL SAGES(K2,KW,I,SMD)
2147 IF(LL(3*KA)-2)2148,2149,2148
2148 KW=9
CALL SAGES(K3,KW,I,SMD)
2149 IF(LTE(I)-1)186,2168,186
2168 IF(LL(3*LA-2)-2)2169,2170,2169
2169 KW=10
CALL SAGES(L1,KW,I,SMD)
2170 IF(LL(3*LA-1)-2)2171,2172,2171
2171 KW=11
CALL SAGES(L2,KW,I,SMD)
2172 IF(LL(3*LA)-2)2173,2174,2173
2173 KW=12
CALL SAGES(L3,KW,I,SMD)
2174 GO TO 186
C
C DECOMPOSICAO E INVERSAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
C
215 CALL DCOMP(N,S)
CALL INVER(N,S)

T

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 14

```
DO 217 K=1,NCA
DO 217 J=1,NNL
FDA(J,K)=0.0
217 FEQ(J,K)=0.0
C
C DADOS RELATIVOS AOS SISTEMAS DE CARREGAMENTO
C
LN=0
218 LN=LN+1
IF(LN-NCA)219,219,308
219 WRITE(3,29)LN
29 FORMAT(/10X,'CARREGAMENTO NO.',I3/)
READ(2,30)NJCA,NECA,ICD,NECFS,NEFS1,NEFS2,NEFS3,NEFT(LN),ALFAZ,ALF
1AR
30 FORMAT(8I5,2F15.5)
C
C CARGAS DIRETAMENTE APLICADAS AOS PONTOS NODAIS
C
IF(NJCA)292,299,292
292 WRITE(3,31)
31 FORMAT(10X,'CARGAS DIRETAMENTE APLICADAS AOS NOS'//3X,'NO',
110X,'FDA1',11X,'FDA2',11X,'FDA3'//)
IF(ITP-1)293,293,2931
293 DO 2930 J=1,NJCA
READ(2,32)K,AT1,AT2
IA=2*(K-NCJ)
FDA(IA-1,LN)=AT1
FDA(IA,LN)=AT2
2930 WRITE(3,32)K,FDA(IA-1,LN),FDA(IA,LN)
GO TO 299
2931 DO 294 J=1,NJCA
READ(2,32)K,AT1,AT2,AT3
32 FORMAT(I5,3F15.3)
IA=3*(K-NCJ)
```

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 15

```
FDA(IA-2, LN)=AT1
FDA(IA-1, LN)=AT2
FDA(IA, LN)=AT3
294 WRITE(3,32)K,FDA(IA-2, LN),FDA(IA-1, LN),FDA(IA, LN)
C
C CARGAS NODAIS EQUIVALENTES AO CARREGAMENTO DO ELEMENTO
C
299 IF(NECA)2999,9218,2999
2999 IF(IIP-1)304,304,300
300 IF(ICD-1)302,301,302
301 WRITE(3,33)
33 FORMAT(/4(1X,'ELEMENTO',4X,'CARGA Q',8X)/)
GO TO 303
302 WRITE(3,34)
34 FORMAT(/1X,'ELEMENTO',4X,'CARGA Q',/)
303 CALL FECA(FEQ,NECA, LN, ICD)
GO TO 218
304 IF(ICD-1)305,306,305
305 WRITE(3,35)
35 FORMAT(/1X,'ELEMENTO',9X,'FMX',12X,'FMY',/)
GO TO 307
306 WRITE(3,36)
36 FORMAT(/4(1X,'ELEMENTO',2X,'FMX',7X,'FMY',4X)/)
307 IF(IIP)9307,9307,9308
9308 CALL FOMAS(FEQ,NEL,JI,JJ,JK,NCJ, LN,NECA,ICD,NCE,SUBN)
GO TO 218
9307 CALL FOMAX(FEQ,NEL,JI,JJ,JK,NCJ, LN,NECA,ICD,NCE,SUBN)
9218 IF(NECFS)9219,9251,9219
9219 WRITE(3,9221)
9221 FORMAT(/4(1X,'ELEMENTO',2X,'FSX',7X,'FSY',5X)/)
CALL FUSAX(FEQ,JI,JJ,JK,NCJ, LN,NECFS,NEFS1,NEFS2,NEFS3,NCE,SUBN)
9251 IF(NEFT(LN))9252,218,9252
9252 WRITE(3,9256)
9256 FORMAT(/,10X,'DADOS RELATIVOS AO GRADIENTE TERMICO',/4(1X,'ELEMEN
```

T

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 16

```
      ITG',3X,'TEMP MEDIA',3X)/)
      IWD=NEFT(LN)
      DO 9253 J=1,IWD
      READ(2,9255)R1,T1,R2,T2,IN1,IN2,ITEMP
9255  FORMAT(4F15.5,3I5)
      IN1=IN1-NCE
      IN2=IN2-NCE
      DO 9254 I1=IN1,IN2
      I=I1
      CALL TEMPAX(T1,R1,T2,R2,ALFAZ,ALFAR,FEQ,JI,JJ,JK,ITEMP,I,SUBN,TM,L
IN,NCJ)
9254  CONTINUE
9253  CONTINUE
      DO 9259 IRT=1,NEL
9259  LIA(IRT)=IRT+NCE
      WRITE(3,9257)(LIA(I),TM(I),I=1,NEL)
9257  FORMAT(4(3X,I3,8X,F3.0,8X))
      GO TO 218

C
C   CARGAS TOTAIS COMBINADAS
C
308  DO 333 J=1,NNL
      IF(LL(J))329,328,329
328  K=J-LCL(J)
      GO TO 332
329  IF(LL(J)-1)330,330,331
330  K=N+LCL1(J)
      GO TO 332
331  K=N+NLI+LCL2(J)
332  DO 333 LN=1,NCA
      FTC(K,IN)=FTC(K,LN)+FDA(J,LN)+FEQ(J,LN)
333  CONTINUE
      IF(ITP-1)3330,3330,3331
3330  IL1=2
```

T.

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 17

```
GO TO 3332
3331  IL1=3
3332  IF(SUBN-NSUS) 3340,367,3340
C
C    FORMACAO DAS MATRIZES NECESSARIAS NO RETORNO
C
3340  DO 334 J=1,N
      DO 334 LN=1,NCA
        FDA(J,LN)=0.0
        DO 334 K=1,N
334    FDA(J,LN)=FDA(J,LN)+S(J,K)*FTC(K,LN)
        N1=N+1
        DO 335 J=1,N
          DO 335 I=N1,NNL1
            S(J,I)=0.0
            DO 335 K=1,N
335    S(J,I)=S(J,I)+S(J,K)*S(I,K)
          JD=26*(SUBN-1)+1
          WRITE(10,JD)S,FDA,FTC,JI,JJ,JK,JL,LL,LTE,NEL,N,NCE,NCJ,NL,NL1,NL2,
            INJU,NJL1A,NEFT
C
C    REORGANIZACAO DAS MATRIZES X E Y
C
      NJL1A=NL1/IL1
      IA=NJU-NJL1A
      DO 336 J=1,NJL1A
        KA=J+IA
        X(J)=X(KA)
336    Y(J)=Y(KA)
C
C    MATRIZES RESIDUAIS DE RIGIDEZ E CARGA
C
      DO 361 J=N1,NNL1
        IA=J-N
```

T

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 18

```
DO 361 LN=1,NCA
FTC(IA, LN)=FTC(J, LN)
DO 361 K=1,N
361 FTC(IA, LN)=FTC(IA, LN)-S(J, K)*FDA(K, LN)
DO 362 J=N1, NN1
DO 362 K=N1, NN1
DO 362 I=1,N
362 S(J, K)=S(J, K)-S(J, I)*S(I, K)
DO 363 J=1, NL1
IA=J+N
DO 363 K=1, NL1
KA=K+N
363 S(J, K)=S(IA, KA)
NCE=NCE+NEL
NCJ=NCJ+NUJ-NL1/IL1
GO TO 9999
```

C
C DESLOCAMENTOS DOS PONTOS NODAIS - ULTIMA SUBESTRUTURA.
C

```
367 DO 368 J=1,N
DO 368 LN=1,NCA
D(J, LN)=0.0
DO 368 K=1,N
368 D(J, LN)=D(J, LN)+S(J, K)*FTC(K, LN)
IA=4*NUJ
DO 368 LN=1,NCA
DO 368 J=1, IA
VEGA(J, LN)=0.0
3680 LEGA(J, LN)=0
GO TO 387
```

C
C DESLOCAMENTOS DOS PONTOS NODAIS - OUTRAS SUBESTRUTURAS.
C REORGANIZACAO DAS MATRIZES VEGA E LEGA.
C


```

369  SUBN=SUBN-1
      JD=26*(SUBN-1)+1
      READ(10*JD)S,FDA,FTC,JI,JJ,JK,JL,LL,LTE,NEL,N,NCE,NCJ,NL,NL1,NL2,
1NJU,NJL1A,NEFT
      N1=N+1
     >NNL=N+NL
     >NNL1=N>NNL1
      IF(ITP-1)9621,9622,9622
9621  JA=4*(NL1/IL1)
      IA=4*NJU-JA
      GO TO 9623
9622  JA=3*(NL1/IL1)
      IA=3*NJU-JA
9623  DO 370 LN=1,NCA
      DO 370 J=1,JA
      KA=IA+J
      VEGA(KA,LN)=VEGA(J,LN)
370  LEGA(KA,LN)=LEGA(J,LN)
      DO 371 LN=1,NCA
      DO 371 J=1,IA
      VEGA(J,LN)=0.0
371  LEGA(J,LN)=0
      DO 385 IA=N1>NNL1
      J>NNL1+N1-IA
      KA=J-N
      DO 385 LN=1,NCA
385  D(J,LN)=DJ(KA,LN)
      DO 386 J=1,N
      DO 386 LN=1,NCA
      D(J,LN)=FDA(J,LN)
      DO 386 K=N1>NNL1
386  D(J,LN)=D(J,LN)-S(J,K)*D(K,LN)

```

C

C

ORGANIZACAO DA MATRIZ DOS DESLOCAMENTOS COM A NUMERACAO

T

DOCUMENTO
ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 20

C INICIALMENTE ARBITRADA

C

387 J=N+NL1+1
DO 391 IA=1,NNL
JA=NNL+1-IA
IF(LL(JA)-2)388,390,388

388 J=J-1
DO 389 LN=1,NCA
389 DJ(JA,LN)=D(J,LN)
GO TO 391

390 DO 3900 LN=1,NCA

3900 DJ(JA,LN)=0.0

391 CONTINUE

C

C CALCULO DAS REACOES NOS APOIOS

C

IF(NL2)396,402,396

396 IA=N+NL1+1
DO 397 K=IA,NNL
DO 397 LN=1,NCA
RA(K,LN)=-FTC(K,LN)
DO 397 J=1,NNL1

397 RA(K,LN)=RA(K,LN)+S(K,J)*D(J,LN)
K=N+NL1

DO 401 KA=1,NNL
IF(LL(KA)-2)400,398,400

398 K=K+1
DO 399 LN=1,NCA

399 RA(KA,LN)=RA(K,LN)
GO TO 401

400 DO 4000 LN=1,NCA

4000 RA(KA,LN)=0.0

401 CONTINUE

C

T

DOCUMENTO ILEGIVEL

JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 21

```
C      IMPRESSAO DOS RESULTADOS JA OBTIDOS
C
402    WRITE(3,40) SUBN
40      FORMAT(/10X,'RESULTADOS PARA SUBESTRUTURA NO.',I3,6X,'*****'
1      '*****')
      WRITE(3,41)
41      FORMAT(/10X,'DESLOCAMENTOS DOS NOS'//3(3X,'NO',7X,'D1',
19X,'D2',9X,'D3',4X)/)
      KA=NJU-NL1/1L1
      DO 403 J=1,KA
403      LIA(J)=J+NCJ
      DO 405 LN=1,NCA
      WRITE(3,42) LN
42      FORMAT(/10X,'CARREGAMENTO NO.',I3/)
      IF(IIP-1)4030,4030,404
4030    WRITE(3,44)(LIA(J),DJ(2*J-1,LN),DJ(2*J,LN),J=1,KA)
      GO TO 405
404      WRITE(3,43)(LIA(J),DJ(3*J-2,LN),DJ(3*J-1,LN),DJ(3*J,LN),J=1,KA)
43      FORMAT(3(I5,2X,3F11.7))
44      FORMAT(3(I5,2X,2F11.7,11X))
405      CONTINUE
      IF(NL2)406,410,406
406      WRITE(3,50)
50      FORMAT(/10X,'REAcoes NOS APOIOS' // 3X,'NO',15X,'RA1',12X,'RA2',
1,12X,'RA3'/)
      DO 409 LN=1,NCA
      WRITE(3,42) LN
      IF(IIP-1)4060,4060,4064
4060    DO 4063 K=1,NJU
      KA=2*K
      IF(LL(KA-1)-2)4061,4062,4061
4061    IF(LL(KA)-2)4063,4062,4063
4062    IA=NCJ+K
      WRITE(3,51) IA,RA(KA-1,LN),RA(KA,LN)
```

DOCUMENTO
ILEGIVEL

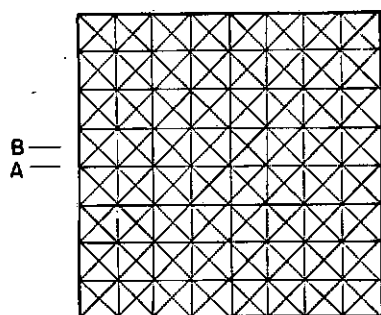
JOSE INACIO DANTAS - METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

PAG 22

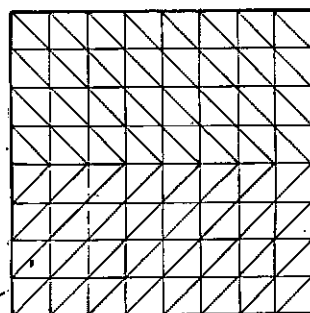
```
4063 CONTINUE
GO TO 409
4064 DO 4080 K=1,NJU
KA=3*K
IF(LL(KA-2)-2)407,408,407
407 IF(LL(KA-1)-2)4070,408,4070
4070 IF(LL(KA)-2)4080,408,4080
408 IA=NCJ+K
WRITE(3,51)IA,RA(KA-2,LN),RA(KA-1,LN),RA(KA,LN)
51 FORMAT(15,5X,3F15.4)
4080 CONTINUE
409 CONTINUE
C
C CALCULO DOS ESFORÇOS GENERALIZADOS NOS NOS DOS ELEMENTOS
C
410 DO 413 I1=1,NEL
I=I1
IF(I1P-1)9100,4100,4101
9100 CALL TFSAX(DJ,I,VEGA,LEGA,SUBN,NCA,NEFT)
GO TO 413
4100 CALL TENSA(DJ,I,VEGA,LEGA,SUBN,NCA)
GO TO 413
4101 IF(LTE(I))412,411,412
411 CALL EGET(DJ,I,VEGA,LEGA,SUBN,NCA)
GO TO 413
412 CALL EGER(DJ,I,VEGA,LEGA)
413 CONTINUE
C
C CALCULO DA MEDIA DOS ESFORÇOS GENERALIZADOS NOS PONTOS NODAIS
C
CALL MEGE(NJL1A,NJU,VEGA,LEGA,NCA,NCJ,I1P)
IF(SUBN-1)9993,9993,369
END
```

7.2 - CONVERGÊNCIA

A verificação experimental da convergência do método para a função deslocamento adotada foi executada com a análise do anel circular de seção quadrada, submetido a pressão radial dirigida do seu interior para o exterior. Foram testadas quatro malhas, obtendo-se resultados mais próximos dos exatos a medida que estas se refinavam. Seguem-se gráficos, tabelas, etc, correspondentes.

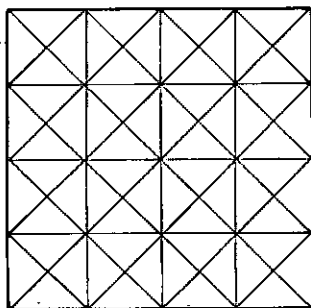


MALHA COM 145 NÓS



MALHA COM 81 NÓS

MALHA COM 48 NÓS



MALHA COM 25 NÓS

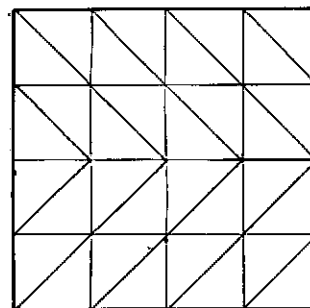


FIGURA I - CONFIGURAÇÃO DE MALHAS UTILIZADAS NO PROBLEMA AXISSIMÉTRICO.

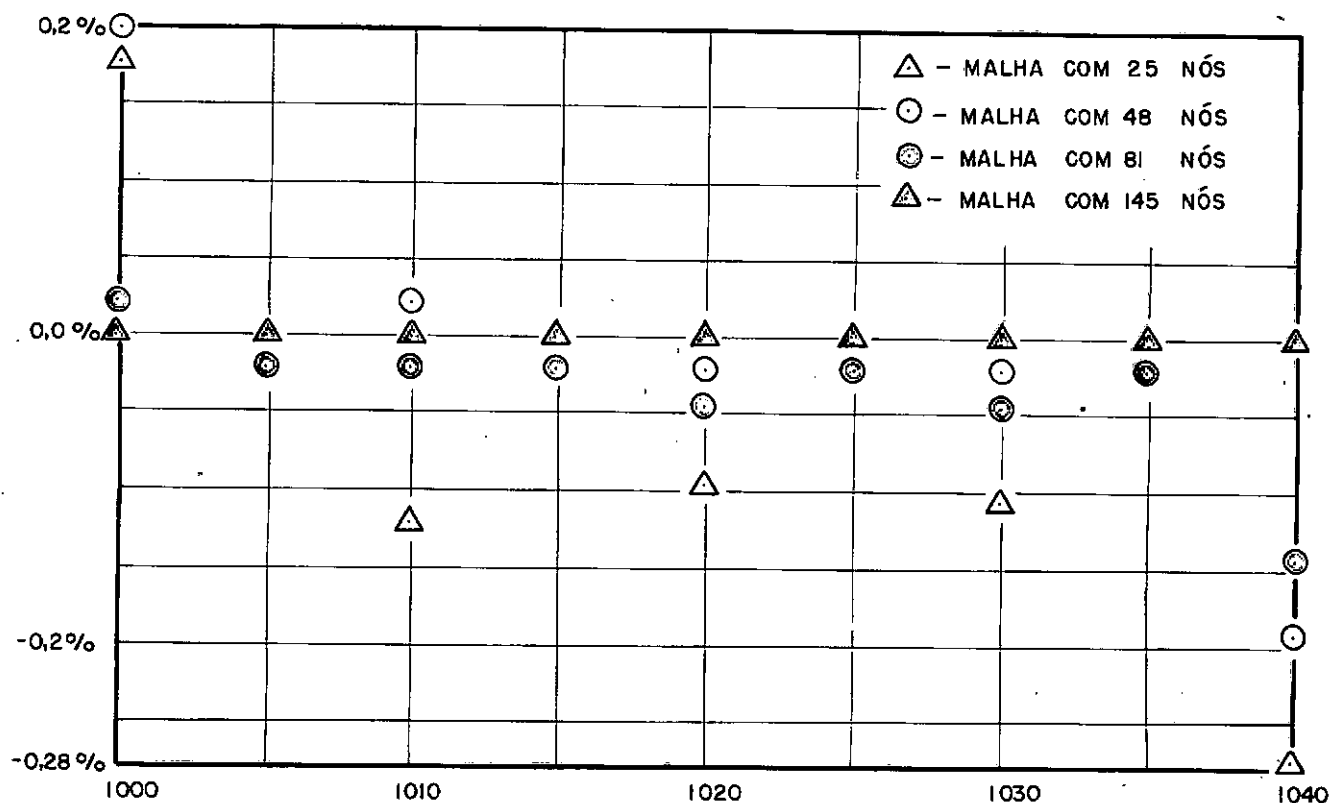


FIGURA 4 - VALORES DA RELAÇÃO $\frac{(X_e - X_e)}{X_e}$, ONDE:

X_e - TENSÃO CIRCUNFERENCIAL OBTIDA
 X_e - TENSÃO CIRCUNFERENCIAL EXATA

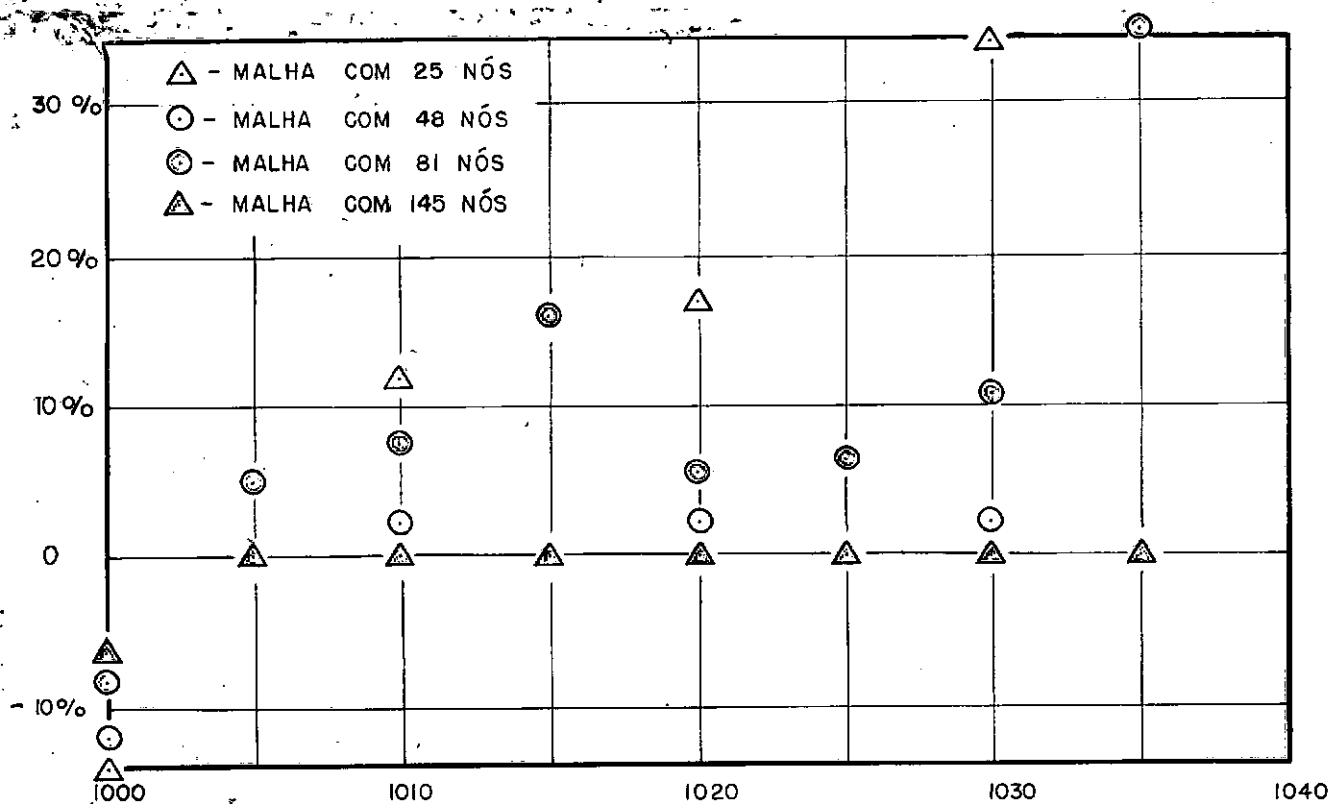


FIGURA 5 - VALORES DA RELAÇÃO $\frac{(X_e - X_e)}{X_e}$, ONDE: X_e - TENSÃO RADIAL OBTIDA
 X_e - TENSÃO RADIAL EXATA

7.3 - RESULTADOS

Apresenta-se aqui os resultados obtidos na análise do anel circular de seção quadrada.

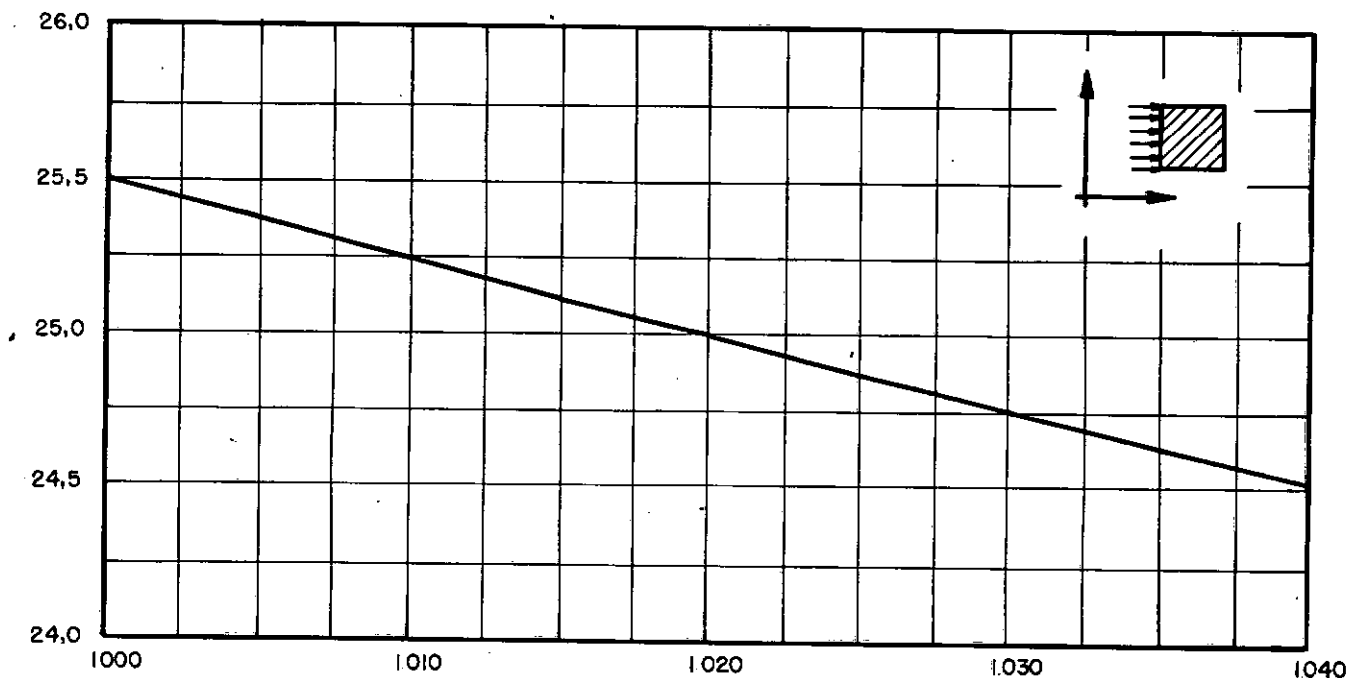


FIGURA 2 - TENSÕES CIRCUNFERENCIAIS EXATAS AO LONGO DO RAIO DE ANEL DE 40X40 cm COM RAIO INTERNO DE 1000 cm, SUBMETIDO A PRESSÃO RADIAL UNITÁRIA.

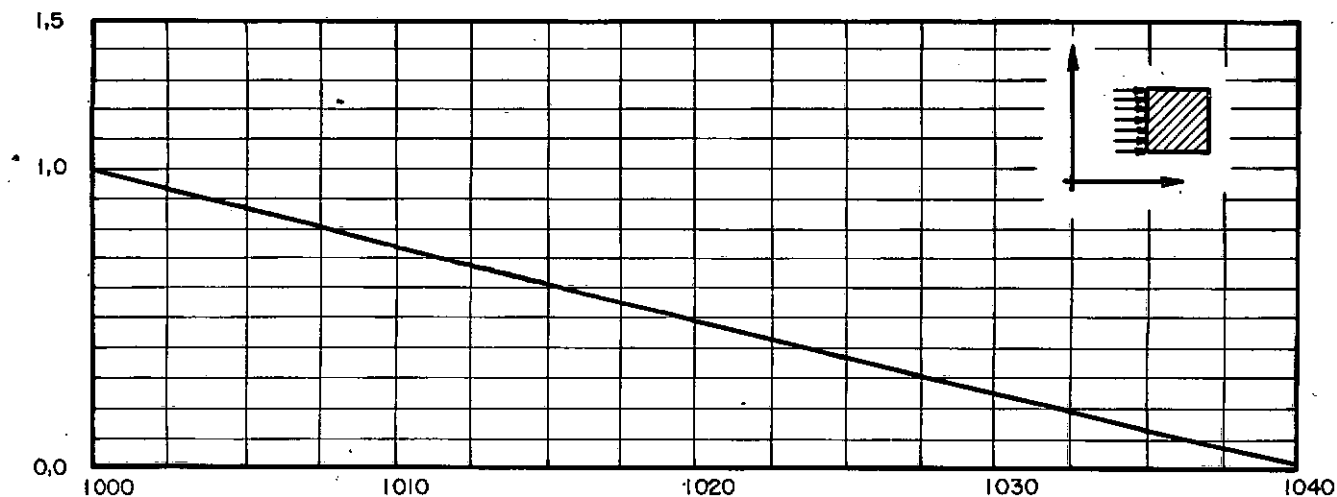


FIGURA 3 - TENSÕES RADIAIS EXATAS NO ANEL SUBMETIDO A PRESSÃO RADIAL UNITÁRIA

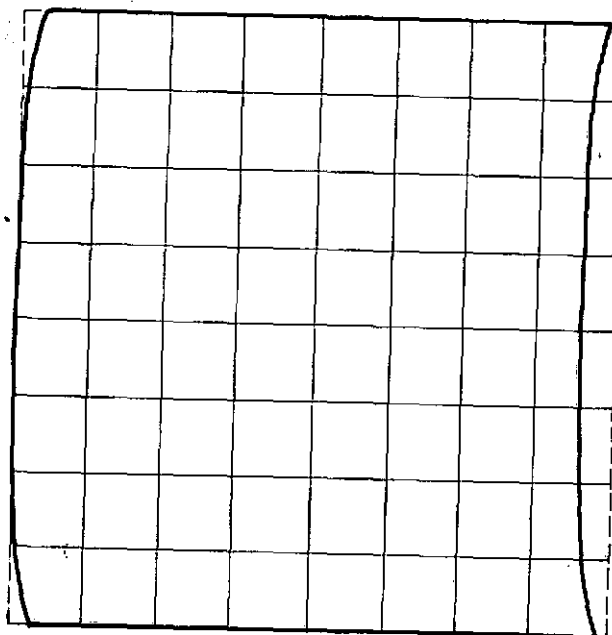


FIGURA 6 - POSIÇÃO DEFORMADA DO ANEL,
RELATIVA À POSIÇÃO INICIAL.

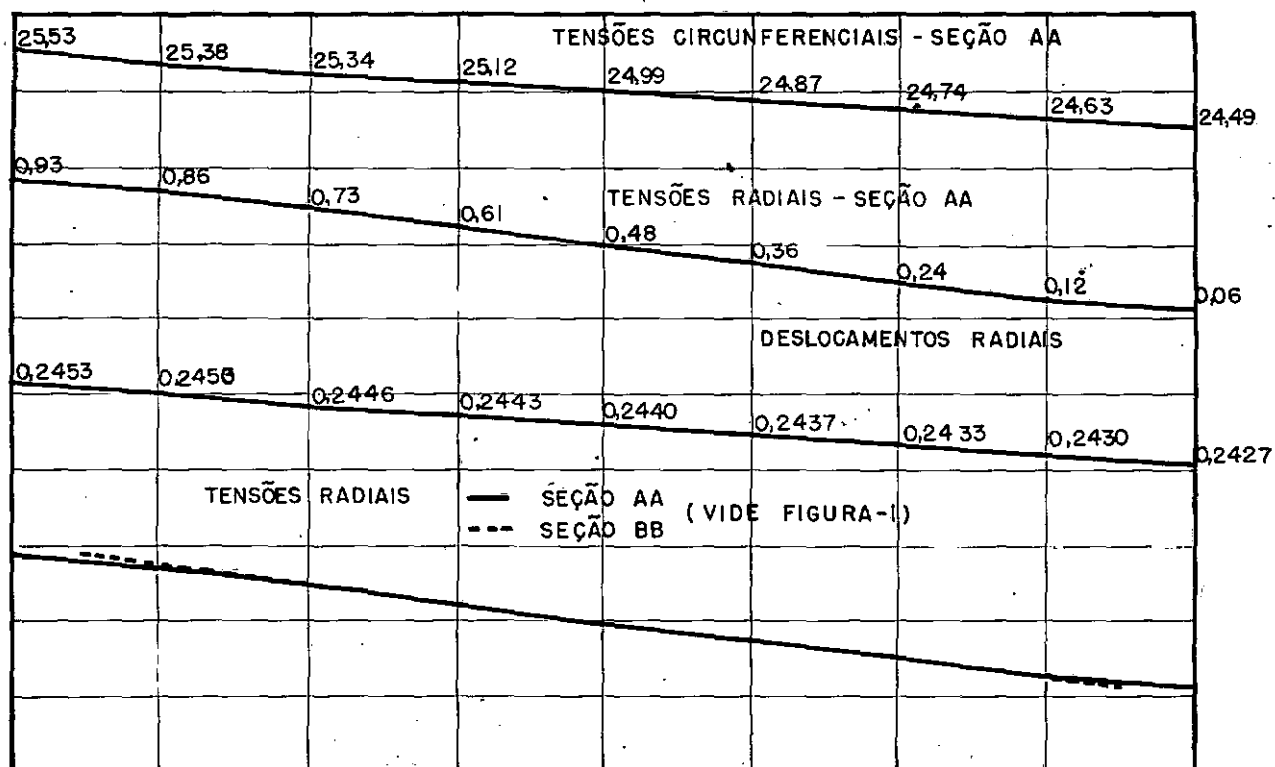


FIGURA 7 - TENSÕES RADIAIS E CIRCUNFERENCIAIS NO ANEL DE 40X40 cm
UTILIZANDO MALHA COM 145 NÓS.

C A P Í T U L O V I I I

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A aplicação do método dos elementos finitos a problemas axissimétricos, com adoção de elemento anular de seção triangular, com dois deslocamentos generalizados por nó, pela precisão dos resultados obtidos com o programa automático, constituiu-se em completo sucesso. Certamente em momento algum o autor pretendeu ou obteve originalidade, mas dotou a COPPE de uma ferramenta necessária a trabalhos futuros de maior envergadura.

Em virtude da unidade de processamento disponível possibilitar ao analista até quatorze algarismos significativos nos resultados, foi possível ampliar a análise, enfocando também cascas axissimétricas. E por tratar-se de elementos finitos de seção triangular, o ajuste de uma malha a uma geometria qualquer é tarefa relativamente simples.

Como próximas etapas de trabalho, destacam-se a inclusão de forças de massa e esforços de origem térmica variando no interior do subdomínio, além de um estudo mais detalhado dos algoritmos de integração utilizados no programa automático. Um item que deve certamente merecer muita atenção é o tamanho máximo da matriz que pode ser invertida sem erros

de truncamento apreciáveis, no sistema /360. Além disso, a conveniência das rotinas utilizadas atualmente para a inversão deveria ser testada. Com vistas a melhorar o tempo de computação, um remanejamento dos INPUT/OUTPUT se faz necessário, além da eventual utilização do compilador H para fins de otimização. Certos recursos disponíveis no /360 não foram utilizados, destacando-se aí a possibilidade de se selecionar variáveis reais a serem tratadas em precisão dupla. Atualmente tôdas o são, algumas desnecessariamente. Além disso, o acesso a memórias periféricas ainda não é o mais perfeito e a estrutura de OVERLAY criada poderia certamente ser otimizada, já que após a estruturação do programa, as partições da memória central acessíveis aos usuários foram modificadas. Não obstante isto, o tempo de CPU utilizado em análise elástica de problema seja axissimétrico, seja de placas, seja de elasticidade plana, sugere a exequibilidade de adaptar o programa ao mêtodo "STEP by STEP" de análise plástica. Finalmente, em estã-gio posterior e para o qual um simples remanejamento do programa existente não seria suficiente, poder-se-ia tratar de problema axissimétrico com cargas não simétricas desenvolvidas em série de FOURIER.

N O T A Ç Õ E S

$ \quad $	matriz quadrada ou retangular
$\{ \quad \}$	matriz coluna
$ B ^T$	matriz transposta da matriz $ B $
$\{\delta\}^e$	deslocamentos nodais do elemento <u>e</u>
$\{\delta_i\}$	deslocamentos do n $\bar{o}$ <u>i</u>
$\{\tau\}$	deslocamentos em um ponto do elemento
$ K ^e$	matriz de rigidez do elemento <u>e</u> associada aos deslocamentos nodais $\{\delta\}^e$
$ \bar{K} ^e, K' ^e$	matriz de rigidez do elemento <u>e</u> , a primeira calculada no seu centroide, a segunda contendo t $\bar{e}$ mpos corretivos, as duas matrizes somadas redundando na matriz de rigidez exata do elemento
$ K_{RS} ^e$	matriz de rigidez do elemento <u>e</u> , correspondente as f $\bar{o}$ rças generalizadas em n $\bar{o}$ R para deslocamentos generalizados unit $\bar{a}$ rios em n $\bar{o}$ S
$\{R\}$	matriz das f $\bar{o}$ rças diretamente aplicadas aos n $\bar{o}$ s
$\{p\}$	matriz associada ao carregamento de elemento, <u>a</u> grupando as f $\bar{o}$ rças de massa
$\{F\}_{\xi_0}^e$	matriz das cargas nodais correspondentes ao elemento <u>e</u> equivalentes a deforma $\bar{c}$ ões iniciais
$\{F\}_P^e$	matriz das cargas nodais correspondentes ao elemento <u>e</u> , equivalentes a f $\bar{o}$ rças de massa

$\{\xi\}^e$	deformações totais em um ponto do elemento <u>e</u>
$\{\xi_0\}^e$	deformações iniciais em um ponto do elemento <u>e</u>
$\{\sigma\}^e$	tensões em um ponto do elemento <u>e</u>
$ N $	matriz de transformação que associa os deslocamentos nodais $\{\delta\}^e$ aos deslocamentos $\{\xi\}$
$ B $	matriz de transformação que associa os deslocamentos nodais $\{\delta\}^e$ às deformações $\{\xi\}^e$
$ D $	matriz de transformação que associa as deformações $\{\xi\}^e$ às tensões $\{\sigma\}^e$
Δ	área do triângulo de nós <i>ijk</i>
α_z, α_r	coeficientes de dilatação térmica nas direções <u>axi</u> al e radial respectivamente
α	coeficiente de dilatação térmica
θ	acréscimo de temperatura em um ponto do elemento <u>e</u>
ν	coeficiente de Poisson
E	módulo de elasticidade
G	módulo de elasticidade transversal
E_r, E_z, ν_r	
ν_z, G_z	constantes elásticas referentes a anisotropia <u>es</u> tratifcada
u, v	deslocamentos de um ponto de um elemento, o <u>primei</u> ro radial, o segundo axial.
u_i, v_i	deslocamentos associados ao nó <u>i</u>

R, Z coordenadas de um ponto de um elemento

R_i, Z_i coordenadas associadas ao nó i

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ZIENKIEWICZ, O.C. e CHEUNG, Y.K. - *The finite element method in structural and continuum mechanics*. McGraw - Hill, 1968.
2. VASCONCELLOS, A. - *O método dos elementos finitos: fundamentos teóricos - automatização — aplicações a problemas de placas e de elasticidade plana*. Tese de D.Sc., COPPE, 1970.
3. CLOUGH, R.W. e RASHID, Y. - *Finite element analysis of axi-symmetric solids*. PROC. ASCE, 91, EM.1, pag.71, 1965.
4. WILSON, E.L. - *Structural analysis of axi-symmetric solids*. J.A.I.A.A., V.3, págs. 2269-74, 1965.
5. ARANTES e OLIVEIRA, E.R. - *The finite element method in structural mechanics*. Tese de M.Sc., M.I.T., 1966.
6. IRONS, B.M. - *Engineering applications of numerical integration in stiffness methods*. J.A.I.A.A., V.4, págs. 2035-37, 1966.
7. TIMOSHENKO, S. e GOODIER, J.N. - *Theory of elasticity*. McGraw - Hill, 1951.
8. PRZEMIENIECKI, J.S. - *Theory of matrix structural analysis*. McGraw - Hill, 1968.

9. ARANTES e OLIVEIRA, E.R. - Tendências ac
tuais do cálculo estático de estruturas. 2^{as} Jornadas Luso-Bra
sileiras de engenharia civil, 1967.

10. WEAVER JR., W. - Computer programs for s-
tructural analysis, D. Van Nostrand, 1967.