



RECONSTRUÇÃO DE FALHAS EM SISTEMAS COM ATRASOS VARIANTES DE MEDIÇÃO UTILIZANDO OBSERVADORES POR MODOS DESLIZANTES

Hardy Leonardo da Cunha Pereira Pinto

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Liu Hsu

Tiago Roux de Oliveira

Rio de Janeiro

Março de 2019

RECONSTRUÇÃO DE FALHAS EM SISTEMAS COM ATRASOS VARIANTES
DE MEDIÇÃO UTILIZANDO OBSERVADORES POR MODOS DESLIZANTES

Hardy Leonardo da Cunha Pereira Pinto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Liu Hsu, Dr. d'État

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc.

Prof. Amit Bhaya, Ph.D.

Dr. Mário Cesar Mello Massa de Campos, Dr.ECP.

Prof. João Manoel Gomes da Silva Jr., Dr.

Prof. José Cláudio Geromel, Dr. d'État

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2019

Pinto, Hardy Leonardo da Cunha Pereira

Reconstrução de Falhas em Sistemas com Atrasos Variantes de Medição Utilizando Observadores por Modos Deslizantes/Hardy Leonardo da Cunha Pereira Pinto. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XIV, 132 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Liu Hsu

Tiago Roux de Oliveira

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 117 – 127.

1. Sistemas com Atrasos. 2. Observadores. 3. Modos Deslizantes. 4. Reconstrução de Falhas. 5. Completação de Poços. I. Hsu, Liu *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Dedico este trabalho a minha
esposa Flávia, aos meus filhos
Eduardo e Juliana, a meus pais
Wanda e Hermínio e aos meus
irmãos Hermínio, Flávio e
Rafael.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a meus orientadores professor Liu Hsu e professor Tiago Roux de Oliveira por sua dedicação e disposição em partilhar o conhecimento e orientar a pesquisa de forma a obter os resultados desejados.

Aos meus gerentes e colegas de trabalho no Centro de Pesquisas Leopoldo Américo Miguez de Mello (CENPES-PETROBRAS), pelo apoio nas horas em que a atividade de pesquisa na tese demandou mais de minha atenção. Não incluirei nomes para não cometer a injustiça de esquecer alguém.

Aos meus pais e irmãos por terem sempre sido uma inspiração em dedicação ao trabalho e ao estudo, incentivando a sempre buscar o melhor. Uma homenagem especial aos meus saudosos avós, que estariam por certo muito felizes com mais essa conquista.

O agradecimento mais especial vai a minha esposa Flávia e aos meus filhos Eduardo e Juliana, por terem abraçado este desafio, me apoiando e dando força quando a coragem e o otimismo me faltaram, mesmo custando a eles um pouco do tempo de convivência.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

RECONSTRUÇÃO DE FALHAS EM SISTEMAS COM ATRASOS VARIANTES DE MEDIÇÃO UTILIZANDO OBSERVADORES POR MODOS DESLIZANTES

Hardy Leonardo da Cunha Pereira Pinto

Março/2019

Orientadores: Liu Hsu

Tiago Roux de Oliveira

Programa: Engenharia Elétrica

Apresenta-se, nesta tese, um novo método para a reconstrução de sinais de falhas de atuador em sistemas que apresentam atrasos de medição, através do uso de observadores por modos deslizantes. O atraso considerado é arbitrário, podendo ser constante ou variante no tempo, além de ser incerto. A abordagem proposta tem como vantagem ser aplicável para sistemas com atrasos sem limitação de duração, ao contrário do que ocorre em outros métodos da literatura. A técnica desenvolvida é aplicada ao caso de sistemas com saída amostrada onde, para melhorar a qualidade da reconstrução da falha, é possível aguardar por mais amostras e usar métodos de interpolação mais eficientes. Para o uso em um sistema de controle em malha fechada que rejeite o efeito da falha na saída, propõe-se a utilização de um preditor para estimar os valores do estado e da falha em tempo presente. É apresentado um observador-preditor usando a técnica de *PDE-Backstepping* combinado a uma lei de controle por modos deslizantes para regular a saída a zero, com rejeição do sinal de falha. Além deste, outro observador-preditor foi desenvolvido utilizando métodos de identificação por mínimos quadrados para estimação de parâmetros desconhecidos da falha, suposta parametrizada. Uma aplicação dos métodos desenvolvidos a um modelo simplificado para válvulas de completação inteligente utilizadas em poços de petróleo e gás natural também é apresentada. Em suma, as principais contribuições desta tese são o desenvolvimento de um observador com deslocamento no tempo para a reconstrução de falhas em sistemas com atraso de medição arbitrariamente longos e para sistemas com saídas amostradas e sua aplicação para o desenvolvimento de estratégias de controle em malha fechada para sistemas com atraso de medição.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

FAULT RECONSTRUCTION IN SYSTEMS WITH VARIANT MEASUREMENT DELAYS USING SLIDING MODE OBSERVERS

Hardy Leonardo da Cunha Pereira Pinto

March/2019

Advisors: Liu Hsu

Tiago Roux de Oliveira

Department: Electrical Engineering

This thesis presents a novel method for actuator fault reconstruction under measurement delays by means of sliding mode observers. The delay duration is considered arbitrary, and may be constant or time-variant, possibly uncertain. The proposed approach has the advantage of being applicable to systems with measurements delays with no limitation regarding its duration, contrasting to other methods of the literature. The developed technique is applied to the case of sampled-output systems, where is possible to wait for some samples and apply more efficient interpolation filters to improve fault reconstruction. The use of a predictor to estimate the state and fault signals in current time allows the application of this method to design a closed loop control law that rejects or attenuates the effect of the fault on the system output. An observer-predictor strategy is developed using the *PDE-Backstepping* method, which combined to a sliding mode control law is used to regulate the system output to zero, rejecting the fault effect. Another observer predictor is developed using least-squares identification methods to estimate unknown parameters of a fault assumed parametrized. An application of the developed methods to a simplified model of an intelligent completion valve used in oil and gas industry is also presented. In summary, the main contributions of this thesis are the development of a time-shifted observer to reconstruct failures in systems with arbitrarily long measurement delays and in systems with sampled outputs, and their application to the development of closed loop control strategies for systems with measurement delays.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.1.1 Petróleo e Gás Natural	1
1.1.2 Exploração e Produção	2
1.1.3 Perfuração e Completação de Poços	3
1.1.4 Completação Inteligente	5
1.1.5 Confiabilidade da Completação Inteligente	8
1.2 Manutenção Baseada em Condição	9
1.2.1 Conceitos Básicos de Confiabilidade de Equipamentos	9
1.2.2 Manutenção Baseada na Condição e Diagnóstico de Equipamentos	10
1.3 Objetivo	11
1.4 Organização	11
2 Revisão Bibliográfica	13
2.1 Monitoração de Condição em Válvulas de Completação	13
2.1.1 Atuadores Hidráulicos	13
2.1.2 Manutenção Baseada em Condição	14
2.1.3 Detecção, Isolamento e Reconstrução de Falhas	15
2.2 Observadores por Modos Deslizantes para Reconstrução de Falhas	17
2.3 Observadores-Preditores para Sistemas com Atrasos de Medição	19
2.4 Discussão Sobre a Condição de Variação Lenta do Atraso	20
3 Modelo Matemático para Completação Inteligente	23
3.1 Modelo Simplificado	24
3.1.1 Modelo com fluido incompressível	24
3.1.2 Modelo para o Atrito	27
3.1.3 Modelo incluindo compressibilidade do fluido	28

3.2	Sumário dos resultados	31
4	Reconstrução de Falhas de Atuador em Sistemas com Atraso de Medição	32
4.1	Formulação do problema	32
4.2	Observador com Deslocamento no Tempo	33
4.2.1	Atraso conhecido	35
4.2.2	Sistemas com incertezas de atraso e paramétricas	40
4.3	Exemplos e Simulações Numéricas	45
4.3.1	Atraso Constante Conhecido	46
4.3.2	Atraso Variante no Tempo Conhecido	46
4.3.3	Atraso Constante com Incerteza na Duração	47
4.3.4	Atraso Variante no Tempo com Incerteza na Duração	48
4.4	Aplicação a Sistemas Amostrados	48
4.4.1	Definição do problema	49
4.4.2	Reconstruindo o sinal em tempo contínuo de suas amostras	50
4.4.3	Métodos para reconstrução de sinais amostrados	51
4.4.4	Influência do erro de reconstrução	53
4.4.5	Simulações Numéricas e Exemplo	57
4.5	Sumário dos Resultados	61
5	Observador-Preditor Utilizando <i>PDE-Backstepping</i>	62
5.1	Formulação do Problema	62
5.1.1	Descrição do Sistema	62
5.1.2	Perturbação Estruturada	63
5.1.3	Sistema Aumentado	64
5.2	Observador de Entrada Desconhecida baseado em <i>PDE-Backstepping</i>	64
5.2.1	Equações do Observador	65
5.2.2	Análise de Convergência do Observador Proposto	66
5.2.3	Representações Alternativas do Observador	70
5.3	Projeto de controlador por modos deslizantes	71
5.3.1	Caso de Grau Relativo Unitário	71
5.3.2	Análise de Estabilidade em Malha Fechada	72
5.3.3	Caso de Grau Relativo Não-Unitário	74
5.4	Simulação numérica	75
5.5	Sumário dos Resultados	76
6	Observador-Preditor com Identificador por Mínimos Quadrados	79
6.1	Formulação do Problema	79
6.1.1	Definição do sistema	79

6.1.2	Estimação dos sinais atrasados	80
6.1.3	Modelo para o sinal de falha	80
6.1.4	Mínimos Quadrados Recursivos	81
6.1.5	Filtro <i>Least-Mean Squares</i> em Tempo Contínuo	83
6.2	Preditor Baseado na Fórmula de Variação de Constantes	85
6.3	Aplicação a Completação Inteligente	87
6.3.1	Simulação Numérica	88
6.4	Sumário dos Resultados	94
7	Preditor em Malha Aberta na Presença de Incertezas	95
7.1	Formulação do Problema	95
7.1.1	Descrição do Sistema	95
7.2	Observador-Preditor	97
7.2.1	Preditor para Sistemas Sujeitos a Incertezas	97
7.2.2	Observador Super-Twisting	98
7.2.3	Observador-preditor	99
7.3	Controlador por modos deslizantes	99
7.3.1	Lei de Controle	100
7.3.2	Análise de Estabilidade	102
7.4	Simulações Numéricas	105
7.5	Sumário dos Resultados	106
8	Conclusão	111
8.1	Contribuições	111
8.2	Aplicabilidade do estudo	113
8.3	Tópicos para Continuidade da Pesquisa	113
8.3.1	Perturbações Não Modeladas	113
8.3.2	Incertezas Paramétricas nos Preditores	114
8.3.3	Reconstrução de falhas de sensor	114
8.4	Produção Bibliográfica	115
	Referências Bibliográficas	117
A	Métodos de Lyapunov para Estabilidade de Sistemas com Atrasos	128
A.1	Método de <i>Lyapunov-Razumikhin</i>	128
A.2	Método de <i>Lyapunov-Krasovskii</i>	130

Lista de Figuras

1.1	Sonda terrestre	3
1.2	<i>Blowout Preventer</i> (BOP)	4
1.3	Esquemático simplificado de uma completção inteligente.	6
1.4	Ganhos econômicos da completção inteligente.	7
1.5	Gráfico típico para confiabilidade no tempo.	10
3.1	Diagrama de blocos para a modelagem da completção inteligente. . .	24
3.2	Esquemático simplificado sistema de acionamento do pistão.	25
3.3	Modelos para forças de atrito	27
3.4	Esquemático do equivalente elétrico do modelo da válvula, incluindo a compressibilidade.	29
4.1	Reconstrução de sinal de falha em sistema sujeito a atraso constante. .	46
4.2	Reconstrução de falha em sistema sujeito a atraso variante no tempo. .	47
4.3	Reconstrução de falha em sistema sujeito a atraso constante incerto. .	48
4.4	Reconstrução de falha em sistema sujeito a atraso variante no tempo incerto.	49
4.5	Diagrama de blocos da estratégia de reconstrução de falhas proposta para sistemas com saída amostrada.	51
4.6	Comparação entre os filtros de reconstrução ZOH, FOH, IFOH, e ISOH para o sinal $y(t) = \sin(5t)$ amostrado a um período $T_s = 0,1s$. .	52
4.7	Reconstrução de falha de um sistema amostrado com 20ms de tempo de amostragem utilizando um retentor de ordem zero (ZOH).	58
4.8	Reconstrução de falha de um sistema amostrado com 60ms de tempo de amostragem utilizando um retentor de ordem zero (ZOH).	59
4.9	Reconstrução de falha de um sistema amostrado com 20ms de tempo de amostragem utilizando um retentor interpolativo de primeira ordem (IFOH).	59
4.10	Reconstrução de falha de um sistema amostrado com 60ms de tempo de amostragem utilizando um retentor interpolativo de primeira ordem (IFOH).	60

4.11	Reconstrução de falha de um sistema amostrado com 20ms de tempo de amostragem utilizando um retentor interpolativo de segunda ordem (ISOH).	60
4.12	Reconstrução de falha de um sistema amostrado com 60ms de tempo de amostragem utilizando um retentor interpolativo de segunda ordem (ISOH).	61
5.1	Diagrama de Blocos apresentando um sistema representado por uma ODE com um atraso de medição representado por uma PDE.	65
5.2	Comparação do sinal de saída para a lei de controle proposta	76
5.3	Sinal de perturbação senoidal (tracejado) e sua estimativa (sólido).	77
5.4	Sinal de perturbação senoidal (tracejado) e sua estimativa (sólido), quando as matrizes do sistema A , B e A_d apresentam incertezas.	77
5.5	Comparação do sinal de saída para a lei de controle proposta na presença de incertezas	78
6.1	Diagrama para a estratégia proposta.	87
6.2	Comparação dos valores real e reconstruído para a força de atrito atrasada $F_r(x_2(t - \tau_o))$	91
6.3	Erro de estimação dos sinais apresentados na Figura 6.2.	91
6.4	Comparação dos valores real e estimado par ao atrito utilizando o algoritmo de indentificação RLS com $\beta = 5$	92
6.5	Erro de estimativa da força de atrito em (6.18) para os sinais apresentados na Figura 6.4.	92
6.6	Variáveis de estado x_1, x_2 comparado a suas estimativas \hat{x}_1, \hat{x}_2	93
6.7	Erro de estimação para os sinais apresentados na Figura 6.6.	93
7.1	Variáveis de estado x_1 e x_2 , e saída y do exemplo proposto, estabilizado pela lei de controle (7.35).	106
7.2	Variável de estado x_1 e sua estimativa \hat{x}_1 obtida utilizando o preditor (7.6).	107
7.3	Variável de estado x_2 e sua estimativa \hat{x}_2 obtida utilizando o preditor (7.6).	107
7.4	Sinal de perturbação d (azul) e sua estimativa $\hat{d} = B_1^\dagger \hat{\xi}$ (vermelho) obtida em tempo finito pelo observador (7.11).	107
7.5	Gráfico da variável de deslizamento s , mostrando que o modo deslizante é atingido em tempo finito.	108
7.6	Sinal de controle u evidenciando o modo deslizante.	108
7.7	Variáveis de estado x_1 e x_2 e saída y do exemplo proposto com incertezas estabilizado pela lei de controle (7.35).	108

7.8	Variável de estado x_2 e sua estimativa \hat{x}_2 obtida utilizando o preditor (7.6) para o sistema com incertezas.	109
7.9	Sinal de perturbação d e a estimativa das perturbações $\hat{\xi}$ obtida pela equação (7.14)	109

Lista de Tabelas

4.1	Métricas de erro para os casos estudados	58
6.1	Sumário do método proposto	86
6.2	Parâmetros de simulação para a ICV	88

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

1.1.1 Petróleo e Gás Natural

O petróleo é uma mistura de hidrocarbonetos de ocorrência natural com larga utilização na sociedade moderna. Sua origem é incerta, mas a hipótese mais aceita é a de que a parte insolúvel da matéria orgânica (lipídios, proteínas e carboidratos) soterrada ao longo de eras geológicas é modificada pela ação de pressão e temperatura dando origem ao querogênio; dependendo das condições em que esta transformação ocorre, o querogênio dá origem ao petróleo, ao gás natural ou a grafite.

A moderna indústria do petróleo começou a tomar forma no século XIX, quando se buscava alternativas para os combustíveis mais utilizados na época: o carvão, a turfa e o óleo de baleia. Em 1847, o químico escocês James Young desenvolveu o processo de obtenção do querosene através de destilação do petróleo ou do betume, tornando-o um combustível viável para a iluminação. Com o aumento da demanda pelo novo combustível iniciaram-se as prospecções por novas reservas de petróleo que permitissem uma produção maior que a obtida de afloramentos naturais. Assim, foram perfurados poços em várias regiões do mundo, em especial Romênia, Azerbaijão (que foi por muitos anos o principal produtor de petróleo), no Canadá e nos Estados Unidos. Neste cenário, a perfuração de um poço com capacidade de produção de 2m^3 por dia na Pensilvânia pelo coronel Edwin Drake, é considerado por muitos autores o início da exploração de petróleo nos Estados Unidos [1].

O surgimento do automóvel no final do século XIX, acelerou o desenvolvimento da indústria do petróleo, destinando frações antes desprezadas (óleo diesel e nafta) e aumentando o lucro dos processos de refino. Aos poucos também foi introduzida a petroquímica, com o aparecimento de borrachas sintéticas, baquelite e plásticos no início do século XX. A demanda crescente levou ao desenvolvimento de novas técnicas de exploração, não mais baseada apenas na geologia mas também em con-

ceitos geofísicos, tais como levantamentos sísmicos e métodos potenciais. Foram desenvolvidas sondas rotativas que permitiram a exploração de poços cada vez mais profundos. Com o final da Segunda Guerra Mundial e o início da chamada Guerra Fria, houve uma modificação no panorama geopolítico dos principais produtores que levou a busca por petróleo no mar para suprir uma demanda cada vez maior por petróleo. Este processo foi acelerado fortemente com o aumento dos preços do petróleo na década de 1970, onde nossa tecnologia já era fortemente dependente deste produto.

No Brasil, foi só em 1941 que um campo com importância comercial foi descoberto no município de Candeias, no estado da Bahia. Em 1953, o então presidente Getúlio Vargas instituiu o monopólio estatal do petróleo e criou a Petrobras, com o intuito de desenvolver a produção e o refino do petróleo no Brasil. A exploração foi inicialmente concentrada na área do recôncavo baiano e nos estados de Sergipe e Alagoas. Na década de 70, com a crise do petróleo, a Petrobras concentrou sua exploração nas bacias marítimas, descobrindo o campo de Garoupa no ano de 1974. Hoje, mais de 90% do petróleo produzido no Brasil vem dos campos marítimos. Esta proporção deve aumentar fortemente nos próximos anos devido descoberta dos campos Pré-sal nas bacias sedimentares do Sudeste (Espírito Santo, Campos e Santos) em 2005, e com o declínio da produção dos campos terrestres.

1.1.2 Exploração e Produção

A indústria do petróleo pode ser dividida em duas grandes áreas de atuação: o *upstream*, que representa as atividades de exploração e produção de petróleo e gás natural e o *downstream* que cuida do refino e comercialização dos produtos.

Após a fase exploratória, onde são localizadas as jazidas de petróleo e gás natural, inicia-se a fase de produção, também denominada explotatória. A partir dos dados obtidos na exploração é feita a engenharia de reservatórios, planejando a melhor forma de produzir a jazida de forma a garantir o retorno do investimento. Características físicas e químicas das rochas e dos fluidos presentes são utilizadas para dimensionar e posicionar os poços produtores, utilizados para recuperar o petróleo e o gás natural do reservatório, mantendo sua produção sob controle e os poços injetores, através dos quais se injeta água (que pode ser água produzida juntamente com o óleo e posteriormente separada ou água captada do mar ou de mananciais) ou gás (gás natural de pouco valor comercial ou CO₂) de forma a manter a pressão da rocha reservatório, atrasando a diminuição da produção pela depleção do campo. Ao se despressurizar, o volume poroso tende a diminuir, o que leva a uma menor permeabilidade e conseqüentemente a redução do fator de recuperação (relação entre o volume total de hidrocarbonetos e seu volume recuperável).

1.1.3 Perfuração e Completação de Poços



Figura 1.1: Sonda Terrestre¹

Uma vez definidas as locações dos poços exploratórios ou explotatórios, é iniciada a fase de perfuração através de sondas rotativas (Figura 1.1). O método de perfuração rotativa consiste em atuar através da aplicação de rotação e peso sobre uma broca na extremidade de uma tubulação denominada coluna de perfuração. Um sistema de polias (conhecido como “catarina”) e guinchos é utilizado para elevar os tubos para a posição vertical onde eles são torquados à broca ou a coluna já existente. Esta coluna será rotacionada através de um motor elétrico (*topdrive*, mais utilizado em sondas de maior porte) conectado diretamente a catarina ou através de uma mesa rotativa, que se acopla a coluna através de um eixo de seção poligonal (eixo *kelly*). O conjunto é baixado até o contato com a rocha sendo perfurada, onde a força de contato é monitorada e controlada pelo sondador pela medição do peso da coluna no topo da catarina.

Um sistema de bombeamento injeta um fluido de perfuração através da coluna e da broca, com a finalidade de manter uma contrapressão sobre o reservatório, impedindo a produção de hidrocarbonetos, além de lubrificar a broca e de trazer os fragmentos de rochas resultantes do processo de perfuração (cascalhos) de volta a superfície. O retorno deste fluido se dá pelo espaço anular entre a parede do poço e a coluna de perfuração. Um sistema de peneiras separa os cascalhos que são amostrados para análise por geólogos e descartados. O fluido de perfuração utilizado deve apresentar uma densidade que garanta a pressão hidrostática para uma

¹(“Rig wind river” por The Pinedale Field office of the BLM. Licenciado sob Domínio público, via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rig_wind_river.jpg)

operação segura: se muito baixa, ocorre uma produção descontrolada denominada *blow-out*; se muito alta, o fluido penetra na formação rochosa podendo contaminar lençóis ou prejudicar a produtividade. O fluido também apresenta características não-newtonianas (tixotropismo) de forma a manter os cascalhos em suspensão no caso de uma parada do bombeamento. Para reservatórios onde a janela de pressão para o fluido é muito estreita, pode ser utilizada a técnica de MPD (*Managed Pressure Drilling* - Perfuração com Pressão Controlada) no qual um sistema de controle é utilizado para ajustar a pressão na cabeça do poço, permitindo o uso de um fluido com densidade menor.



Figura 1.2: *Blowout Preventer*²

Durante todas as etapas de construção de um poço é utilizado um conjunto de válvulas do tipo gaveta denominado BOP (*Blow-out Preventer*, figura 1.2) que tem como função assegurar que o poço possa ser controlado no caso de uma produção indesejável de hidrocarbonetos. Caso seja percebida uma variação súbita no peso sobre a broca, causada pelo influxo de gás ou óleo no poço e consequente modificação do empuxo, o conjunto BOP é acionado. Sistemas de elastômeros vedam o espaço ao redor da coluna de perfuração (anular) enquanto gavetas de acionamento rápido esmagam e cortam os tubos de perfuração impedindo que os hidrocarbonetos

²“Blowout Preventer (BOP)” por Matthew C. de Valle. Licenciado através do Creative Commons CC-BY-2.0 - [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blowout_Preventer_\(BOP\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blowout_Preventer_(BOP).jpg)

cheguam a superfície.

O poço é perfurado em etapas com diâmetros progressivamente decrescentes. Em geral, em poços submarinos, a primeira fase tem diâmetro de 30 a 36 polegadas e a última etapa tem diâmetro de 8,5 polegadas. Em cada fase, brocas e fluidos diferentes são utilizados de acordo com a geologia das camadas de rocha a serem atravessadas. De uma forma geral, ao final de cada etapa de perfuração é descida uma coluna de tubos de revestimento que tem como função prover integridade estrutural ao poço. Ao redor destes tubos, é feita uma cimentação de forma a garantir o isolamento hidráulico entre diferentes camadas do poço. A cimentação é feita bombeando-se uma pasta de cimento e aditivos pela própria coluna de revestimento até que esta saia pela extremidade inferior e complete o espaço entre a coluna e o poço.

A fase seguinte na construção de um poço é denominada completação e consiste em equipar um poço para permitir que este opere de forma segura e econômica durante sua vida produtiva. O principal elemento da completação é a chamada coluna de produção ou injeção, uma tubulação que conduz os fluidos produzidos ou injetados do reservatório de petróleo às instalações de superfície ou vice-versa. Na coluna de produção são instalados equipamentos como válvulas de segurança (as chamadas DHSV - *Downhole Safety Valves*), obturadores para isolamento do anular de zonas produtoras (*packers*), e dispositivos de elevação artificial como bombas hidráulicas ou sistemas de elevação por gás (*gas-lift*). Sensores de pressão e temperatura também são afixados na coluna de produção ou injeção através de alojadores específicos. Finalmente, um conjunto de válvulas conhecido como “árvore de natal” é instalado sobre a cabeça do poço para permitir a interrupção da produção ou da injeção em eventos de manutenção ou como medida de segurança.

1.1.4 Completação Inteligente

Na indústria de petróleo, chama-se de poço inteligente um sistema capaz de coletar, transmitir e analisar dados de completação, produção e reservatório e tomar ações para melhor controlar os processos de produção e completação a fim de maximizar o valor do ativo. O método de completação de poços que, através de um sistema remoto ou local de monitoração e controle, simultâneos e em tempo real, de cada trecho ou zona produtora/injetora potencialmente atuante permite a utilização do conceito de poços inteligentes é denominado completação inteligente [2].

A completação inteligente é um método de completação seletiva, em que zonas produtoras ou injetoras são isoladas umas das outras através de obturadores (*packers*). Conectando cada zona a coluna de produção ou injeção, comum a todas elas, é colocada uma válvula do tipo camisa deslizante que é capaz de abrir, fechar ou

restringir o fluxo. Um sensor de pressão e temperatura é instalado no espaço anular entre o tubo de produção ou injeção e o revestimento de cada zona permitindo sua monitoração. Acima do obturador mais superior (*packer* de produção), é instalado um sensor para medir a pressão e a temperatura internas a coluna de produção ou injeção. A Figura 1.3 apresenta uma representação esquemática de duas zonas equipadas com completação inteligente. Acima destas zonas poderíamos ter apenas tubulação e uma válvula de segurança de sub-superfície; abaixo, um tampão ou outra zona idêntica às anteriores.

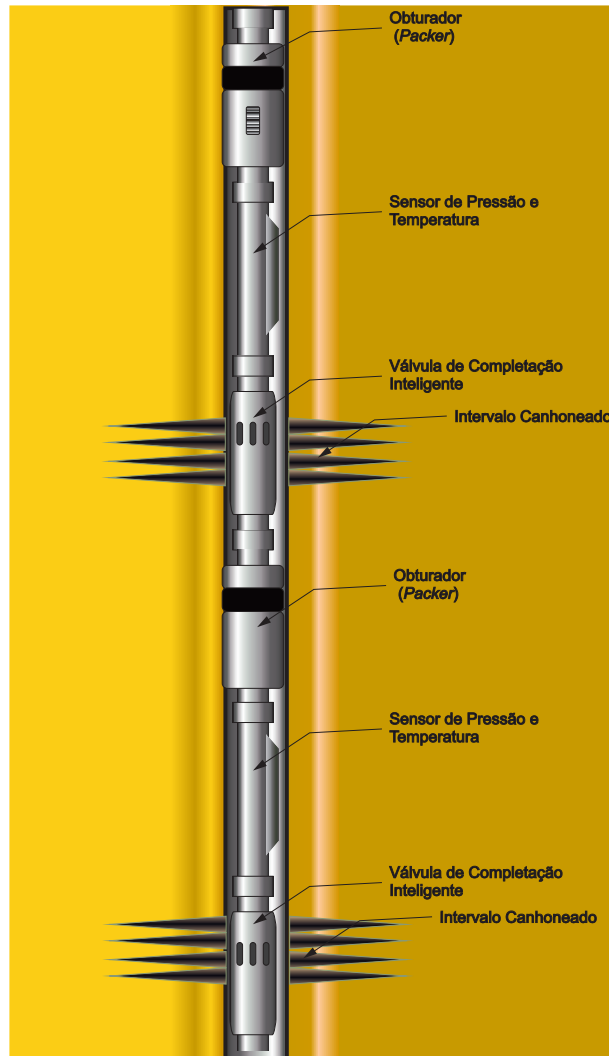


Figura 1.3: Esquemático simplificado de duas zonas equipadas com completação inteligente.

O principal objetivo do uso de completação inteligente é o gerenciamento de reservatórios em tempo real, através do mapeamento contínuo das pressões e temperaturas ao longo do reservatório por zona, do controle dos fluidos produzidos e injetados por zona, da execução de teste de formação/produção de cada zona aberta e isolada, sem necessitar de intervenção com sonda e de teste de interferência entre múltiplos

poços, verificando a influência de cada zona injetora em cada zona produtora dos poços do campo. Este gerenciamento em tempo real permite uma otimização da produção, maximizando a produção de óleo (aumento de receita operacional) e, simultaneamente, minimizando a quantidade de água produzida (redução de custo operacional). Busca-se antecipar a receita do campo, o que aumenta o retorno de investimento, e aumentar o fator de recuperação, que é a porcentagem do óleo existente no reservatório que efetivamente é produzido [2, 3]. A produção em múltiplas zonas através da completação inteligente também permite a redução de investimento na produção de um campo através da diminuição de número de poços necessários, o que também implica em aumento do retorno financeiro do projeto de exploração.

A Figura 1.4 ilustra como o fluxo de caixa de um campo (caso base em vermelho) pode ser modificado pela adoção da completação inteligente (em azul). A área abaixo dos gráficos impacta diretamente na receita total do campo, e é influenciada pelo aumento do fator de recuperação e pela redução do investimento pela diminuição do número de poços. A antecipação da produção por sua vez impacta o retorno do investimento por adiantar o fluxo de caixa do campo.

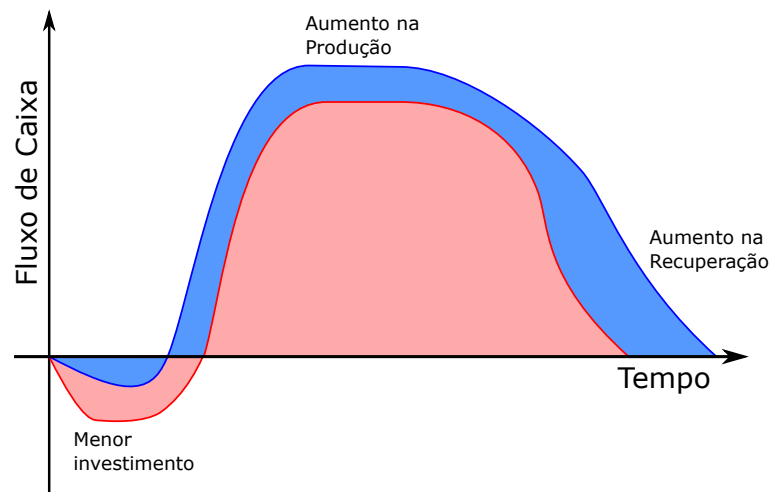


Figura 1.4: Ganhos econômicos pela adoção da completação inteligente (em azul), comparando o fluxo de caixa do caso base (em vermelho)

Uma vez que a completação inteligente disponibiliza sensoriamento e atuação nas zonas produtoras de um poço, é possível utilizar os dados adquiridos para diagnóstico preditivo da produção, verificando através de modelos se estão ocorrendo danos a formação, incrustação, produção precoce de água e comunicação entre zonas. Este diagnóstico permite ao engenheiro de reservatório antecipar medidas de mitigação que impeçam ou minimizem o impacto na receita.

1.1.5 Confiabilidade da Completação Inteligente

A descoberta do Pré-sal estimulou ainda mais o uso da completção inteligente, por esta permitir a produção de múltiplos intervalos produtores em um único poço, reduzindo o investimento em construção de poços e permitir a otimização da produção face a incerteza de operar em um campo com características muito diversas das encontradas tradicionalmente nas bacias sedimentares brasileiras.

De forma a garantir o retorno do investimento feito nos equipamentos de completção inteligente, um de seus requisitos é operar durante toda a vida produtiva do poço ou, no mínimo, não ser a responsável por intervenções para manutenção. Isto implica que a completção inteligente deve operar sem manutenção corretiva por um período de dez a quinze anos. Para atingir esta meta, os equipamentos são submetidos a intensos testes de confiabilidade e vida acelerada que asseguram o correto funcionamento dentro dos envelopes operacionais esperados. Apesar disso, os equipamentos ainda sofrem degradação com o passar do tempo e podem acabar sendo instaladas em condições diversas das previstas pelos estudos geológicos.

Podemos dividir o sistema de completção inteligente em subsistemas, dentre os quais o de monitoração e o de controle de fluxo são os mais importantes. O subsistema de monitoração é baseado em cristais osciladores de quartzo, com um transmissor digital associado. Além da natural degradação do transdutor devido ao seu envelhecimento, as falhas que mais ocorrem são as relacionadas aos conectores elétricos utilizados para sua instalação. Devido ao uso de monitoração de fundo de poço ser mais abrangente que somente a aplicação na completção inteligente, suas ferramentas de diagnósticos estão muito mais desenvolvidas que as dos demais componentes.

O subsistema de controle de fluxo é composto por obturadores (*packers*), que tem como função isolar dois segmentos do anular formado entre a coluna de produção/injeção e o revestimento, e por válvulas de completção inteligente. Estas são, tipicamente, do tipo camisa deslizante, comunicando o anular ao interior da coluna de produção ou injeção. Um mecanismo de acionamento move uma camisa com orifícios no sentido longitudinal do corpo da válvula. A área de abertura da válvula é dada pela superposição dos orifícios da camisa com os do corpo da válvula.

Os mecanismos de acionamento destas válvulas podem ser hidráulicos, eletro-hidráulicos ou elétricos. Nos dois primeiros, os mais comuns, um pistão hidráulico balanceado é utilizado para mover a camisa da válvula a partir do suprimento de potência hidráulica vindo de uma unidade localizada na superfície. Através de tubos capilares de 1/4" de diâmetro, fluido de controle (óleo ou uma mistura de água e glicol) é bombeado até uma das câmaras o pistão da válvula empurrando-o no sentido de abertura ou fechamento e retorna, vindo da outra câmara do pistão a

superfície. No caso dos sistemas hidráulicos, não há nenhuma monitoração direta de posição ou pressão nas câmaras da válvula; todas as medições são indiretas, através da pressão de acionamento e da vazão de retorno. Isto pode dificultar a avaliação do funcionamento destes equipamentos, uma vez que os tubos capilares podem ter comprimentos de até 6000 metros.

As válvulas, tal como todo tipo de acionador hidráulico linear, são sujeitas a danos mecânicos por desgaste, tais como vazamentos entre as câmaras ou destas para o exterior. Para minimizar a probabilidade deste tipo de defeito ocorrer, as válvulas possuem selos redundantes, que são qualificados para um certo número de acionamentos durante o teste de vida acelerada. Como um elemento de controle, estas são expostas ao processo de produção e podem sofrer também ação de agentes externos que podem causar falhas: finos de produção (e.g. areia) ou partículas de propante (sólidos utilizados para manter uma fratura aberta após o processo de estimulação por fraturamento hidráulica, conhecido como *fracking*) podem migrar para o espaço entre a camisa e o corpo danificando a vedação dos selos; pedaços de rocha (cascalho) podem se prender no orifício da válvula dificultando seu fechamento.

Devido a variação de pressão e regimes de escoamento pela geometria das válvulas, é esperado que ocorram incrustações orgânicas (e.g. parafinas, asfaltenos) ou inorgânicas (e.g. CaCO_3 , BaSO_4 , SrSO_4) que podem aumentar o atrito entre a camisa e o corpo, dificultando ou até mesmo restringindo a sua movimentação. Em particular, no Pré-sal é esperado uma alta tendência a incrustação por carbonato de cálcio, devido a rocha reservatório ser deste mineral, o que leva a uma séria preocupação em relação a componentes móveis expostos ao fluxo de produção [4–6].

1.2 Manutenção Baseada em Condição

1.2.1 Conceitos Básicos de Confiabilidade de Equipamentos

Um conceito de grande importância na indústria é o de confiabilidade dos equipamentos, que pode ser descrita como a probabilidade de um equipamento ou sistema de desempenhar com sucesso a missão para o qual foi projetada. Esta probabilidade varia com o tempo de utilização do equipamento ou sistema. Da mesma forma, pode-se definir a disponibilidade de um equipamento com a proporção de tempo que ele esteve disponível para uso em relação ao tempo desde que foi instalado (incluindo os tempos de reparo). De forma a aumentar a confiabilidade e a disponibilidade dos equipamentos, um plano de manutenção deve ser estabelecido.

Apesar de cada equipamento ter um modelo próprio para a função de confiabilidade no tempo, o modelo chamado “Curva da Banheira” (Figura 1.5), característico da indústria eletrônica, ganhou notoriedade na área por apresentar características

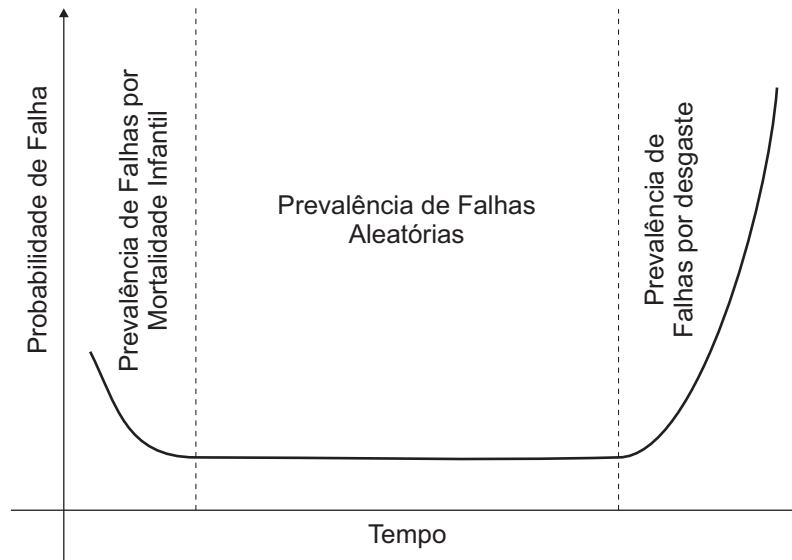


Figura 1.5: Gráfico conhecido como “Curva da Banheira”, utilizado em engenharia de confiabilidade como exemplo típico da evolução da confiabilidade no tempo.

importantes da evolução da confiabilidade no tempo. Os equipamentos com maior tempo de uso, devido ao desgaste, apresentam uma menor confiabilidade (maior probabilidade de falha). Na outra extremidade, equipamentos muito novos apresentam uma probabilidade alta de falha também, por ainda não terem sido suficientemente testados nas condições reais da aplicação. Através de processos de qualificação mais adequados aos cenários reais ou da aplicação de critérios mais robustos para o projeto é possível mitigar a chamada “mortalidade infantil” dos equipamentos. Ainda assim, estes ainda podem falhar antes do fim esperado de sua vida útil. A substituição ou reparo destes equipamentos é chamada de manutenção corretiva, que implica em perda de produção e gastos não previstos [7, 8].

A partir do estudo de confiabilidade de um equipamento ou sistema, é possível determinar o ponto em que a probabilidade de falha ou a disponibilidade estejam abaixo do aceitável para operação, a chamada vida útil. A substituição ou reparo ao final da vida útil esperada é chamada de manutenção preventiva e tem como objetivo evitar que paradas de produção não programadas impactem o processo industrial [7, 8].

1.2.2 Manutenção Baseada na Condição e Diagnóstico de Equipamentos

Apesar de buscar reduzir gastos com manutenções corretivas planejando paradas específicas, estratégias de manutenção preventiva ainda podem implicar em custos elevados. Como a vida útil é calculada com base em um processo estocástico não há como garantir que a manutenção será feita no tempo correto. Se efetuada muito

cedo pode resultar na substituição de um equipamento que ainda está confiável. Por outro lado, se efetuada tardiamente, pode levar a planta industrial a operar em um estado degradado, comprometendo sua eficiência.

Com o objetivo de otimizar a vida útil de um equipamento ou sistema, aumentando sua disponibilidade e reduzindo os gastos com manutenção, uma estratégia baseada na condição [7–10] pode ser adotada. Nesta, o equipamento ou sistema tem sua operação monitorada continuamente e, a partir dos dados obtidos, sua confiabilidade é reavaliada incluindo uma previsão de sua evolução no tempo. O programa de manutenção é atualizado de forma a permitir que esta seja realizada apenas quando necessário. Evitando-se paradas não programadas ou a substituição de equipamentos que ainda estejam com o desempenho adequado, a disponibilidade do equipamento ou sistema é estendida.

Para a adoção de uma estratégia baseada em condição, é necessário monitorar o equipamento ou sistema em questão para detectar anomalias e prever até quando uma anomalia pode ser tolerada ou contornada antes que se torne uma falha.

1.3 Objetivo

A maioria das válvulas de completação inteligente hoje utilizadas são dispositivos acionados remotamente por linhas hidráulicas cujo comprimento pode variar entre três e sete quilômetros em um poço submarino. Uma vez que a frente de pressão em um fluido se desloca à velocidade de propagação do som neste, é esperado que haja um atraso entre o acionamento e a movimentação, assim como entre esta e o retorno de fluido à superfície que pode chegar a 10% do tempo de movimentação da válvula.

O objetivo desta tese é estabelecer métodos, baseado em observadores de estado por modos deslizantes, que permita o diagnóstico de falhas de atuadores em sistemas com atrasos de monitoração, tendo como motivação os sistemas de acionamento hidráulicos comumente utilizados na indústria do petróleo, em particular os sistemas de completação inteligente.

1.4 Organização

O restante desta Tese é organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre os principais tópicos abordados. No Capítulo A são apresentadas os teoremas de Lyapunov-Krasovskii e Lyapunov-Razumikhin, importantes ferramentas na análise de estabilidade de sistemas apresentando atrasos. Uma modelagem simplificada para válvulas de completação inteligente, utilizadas na indústria da petróleo e gás natural, é apresentada no Capítulo 3.

O Capítulo 4 desta tese é baseado no artigo [11], versão estendida para revista do artigo [12], e apresenta o conceito de reconstrução de falhas em sistemas apresentando atraso de medição utilizando o método do deslocamento no tempo (*Time-Shift approach*). O Capítulo 5 baseia-se nos artigos [13] e [14] e apresenta o desenvolvimento de um observador-preditor baseado no método *PDE-Backstepping*, bem como uma lei de controle por modos deslizantes para rejeição do efeito de falhas de atuador na saída de um sistema apresentando atraso de medição. O Capítulo 6 reproduz os resultados do artigo [15], versão estendida para revista do artigo [16], e apresenta um observador-preditor baseado no conceito de reconstrução de falhas em sistemas apresentando atraso de medição utilizando o método do deslocamento no tempo (*Time-Shift approach*), associado a identificação de falhas por métodos dos mínimos quadrados e por um preditor de malha aberta. Neste capítulo é apresentado um exemplo de aplicação a detecção de falhas em uma válvula de completação inteligente. O capítulo 7 apresenta o conteúdo do artigo [17], onde um observador baseado no algoritmo Super-Twisting é utilizado para reconstruir uma falha não modelada, a partir do conhecimento de parte dos estados em tempo presente. Também neste capítulo, uma lei de controle por modos deslizantes é utilizada para rejeitar os efeitos da falha de atuador na saída do sistema.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Monitoração de Condição em Válvulas de Completação

2.1.1 Atuadores Hidráulicos

As válvulas de completação inteligente são geralmente acionadas por um atuador hidráulico linear de dupla ação (pistão balanceado) e linhas hidráulicas capilares para transportar o fluido de acionamento até as suas câmaras. Sistemas de potência hidráulica tais como os pistões de dupla ação apresentam modelagem bem documentada na literatura [18, 19]. Suas linhas de acionamento são tubos capilares rígidos de tal forma que o fluido transportado se encontra sempre um regime de escoamento laminar. O artigo de LUO *et al.* [20] apresenta um modelo a parâmetros concentrados, voltado para linhas hidráulicas longas em umbilicais de acionamento de equipamentos submarinos, as quais possuem características muito similares àquelas das completações inteligentes. No modelo obtido os autores demonstram que o efeito da indutância hidráulica pode ser desprezado no caso de linhas hidráulicas muito longas. Outro modelo possível para uma linha hidráulica longa [21] é considerá-la uma linha de transmissão com um atraso de propagação τ dependente da velocidade do som no fluido e do comprimento da linha hidráulica:

$$\tau = \frac{l_{pipe}}{v} \quad (2.1)$$

onde v é a velocidade do som no fluido hidráulico e l_{pipe} é o comprimento total da linha hidráulica.

2.1.2 Manutenção Baseada em Condição

Um histórico das origens da manutenção baseada em condição e sua aplicação na indústria é apresentado em [7], com foco em máquinas para a fabricação mecânica. São apresentadas e comparadas três estratégias para manutenção: corretiva, quando é feita após uma parada do equipamento pela ocorrência de uma falha; preventiva, onde a manutenção é agendada com base na estimativa *a priori* da vida útil do equipamento e antes da ocorrência de uma falha e preditiva ou baseada em condição, onde o estado dos equipamentos é monitorado para permitir a definição do ponto ótimo de parada para a manutenção. Um outro ponto importante apresentado é a classificação das falhas como *hard faults*, aquelas que ocorrem abruptamente em um equipamento, levando a uma perda imediata de qualidade de produção ou a uma parada, e as *soft faults* que são aquelas em que o sistema ou equipamento vai gradualmente perdendo a capacidade de cumprir a sua função ao longo do tempo.

Assim como no artigo anterior, JARDINE *et al.* [8] apresentam como principais etapas necessárias para a adoção de uma manutenção baseada em condição:

- Aquisição de dados: devem ser monitorados sinais ou características que possam servir como indicação ou estar correlacionados ao estado de funcionamento do equipamento ou sistema.
- Processamento de dados: os sinais devem ser processados para permitir uma detecção de que o equipamento ou sistema está operando fora de sua condição ideal e um diagnóstico de suas prováveis causas.
- Suporte a decisão: Um sistema deve ajudar a analisar o diagnóstico feito e auxiliar a elaboração de um plano de manutenção adequado de forma a minimizar o impacto de paradas ou maximizar a disponibilidade do equipamento.

COBLE e HINES [22] usam a mesma abordagem para a infraestrutura necessária, mas dividem o processamento de dados em duas fases: detecção, que constitui em verificar se a falha ocorreu e diagnóstico, que procura identificar as prováveis causas. Este artigo também separa o suporte a decisão em duas fases: prognóstico, que consiste em avaliar o maior tempo em que é possível operar com o equipamento degradado mas dentro dos limites de tolerância do processo e planejamento, feito a partir do prognóstico realizado. Este artigo também classifica os estágios iniciais de uma falha como anomalias (quando ainda é possível operar o sistema ou equipamento), restringindo o termo falha para um evento que leve a parada do equipamento.

Uma revisão mais recente de técnicas de manutenção baseada em condição aplicadas a plantas de geração eólica pode ser vista em [23]. Este artigo destaca que

esta estratégia de manutenção vem ganhando mais força a medida que se vem observando que muitos dos modelos de confiabilidade utilizados apresentam grandes incertezas ou simplesmente não são os mais apropriados.

2.1.3 Detecção, Isolamento e Reconstrução de Falhas

Inicialmente, é importante conceituar os termos detecção, isolamento e reconstrução de falhas, através de seus objetivos. Na detecção, o que se busca e verificar se o sistema está funcionando normalmente ou apresentando uma falha, abrupta ou incipiente. No isolamento, sabendo-se que o sistema apresenta uma falha, busca-se identificar qual subsistema está falhando e o tipo da falha que está ocorrendo. A reconstrução de falhas é uma ferramenta de diagnóstico que busca determinar características como amplitude, frequência ou forma de um sinal de perturbação que representa a falha.

O livro de ISERMANN [24] sobre detecção e tolerância a falha apresenta uma introdução mais detalhada à engenharia de confiabilidade e aos métodos de detecção e diagnóstico de falhas mais utilizados, dentre os quais a detecção por observadores de estado.

Recentemente, GAO *et al.* [25, 26] publicaram um artigo de levantamento do estado da arte para a área de diagnóstico de falhas, dividido em duas partes, uma apresentando métodos baseados em sinais ou modelos e outra dedicada a sistemas baseados em bases de conhecimento ou abordagens híbridas. Os métodos baseados em sinais utilizam as entradas e saídas do sistema sem considerar o seu modelo de forma explícita. Através da análise de características destes sinais em tempo e frequência e do conhecimento prévio do comportamento destes na presença ou ausência de falhas são feitas avaliações para o diagnóstico. Já nos métodos baseados em bases de conhecimentos, uma grande massa de dados históricos de entrada e saída são analisados por sistemas de detecção de padrões como redes neurais, *Support Vector Machines*, análise de componentes principais, entre outros, para identificar características que possam suportar o diagnóstico das falhas. Estes métodos não necessitam de um conhecimento prévio de modelos, quer detalhados ou simplificados, entretanto requerem uma grande massa de dados históricos do funcionamento do equipamento e de similares.

Os métodos baseados em modelos podem ser divididos em determinísticos ou estocásticos. No primeiro tipo, observadores de estados são utilizados para detecção e isolamento, através da geração de resíduos. Estes observadores são especificamente projetados para o subsistema e para a categoria de falha a ser detectada. Outra possibilidade é o uso de observadores para reconstrução da falha [11–17, 27–35], através do uso, em geral, de técnicas mais avançadas de estimação de estados tais

como observadores por modos deslizantes, observadores adaptativos, entre outros. O artigos [30, 36] são exemplos de aplicação de observadores de entrada desconhecida (*UIO - Unknown Input Observer*) aplicado a detecção de falhas através dos resíduos de observação. Uma visão abrangente de observadores para estado e perturbação simultâneos pode ser encontrada nos artigos de levantamento de RADKE e GAO [37] e CHEN *et al.* [38].

Um exemplo de aplicação na área de petróleo é a detecção de problemas de conexões em colunas de perfuração proposto por WILLERSRUD *et al.* [39]. Um observador adaptativo detecta e isola falhas a partir do modelo dinâmico do processo de perfuração. Uma vez detectado e isolado, um segundo observador localiza a falha. Para a decisão tanto do tipo da falha quanto para a sua localização, um classificador por máxima verossimilhança é utilizado. Em uma abordagem híbrida, o artigo de DEMETRIOU e POLYCARPOU [40] utiliza um estimador de falhas baseado em redes neurais utilizando funções de base radial (*RBF - Radial Basis Functions*) e um modelo de aprendizado adaptativo para a detecção de falhas. Posteriormente, utilizando este resultado, ZHANG *et al.* [41] incluíram um banco de estimadores dedicados a isolar a falha, acionado a partir da detecção anterior. Um critério de decisão é aplicado ao resíduo destes estimadores para isolar a falha.

Nos métodos estocásticos, a principal ferramenta utilizada é o filtro de Kalman, utilizado para gerar resíduos para o detecção e isolamento de falhas. O artigo de AN e SEPEHRI [42] apresenta uma aplicação de detecção de falha em atuadores hidráulicos lineares utilizando filtros de Kalman Estendidos (*EKF - Extended Kalman Filters*) para estimação dos estados e geração de resíduos, demonstrando que, através de uma modelagem adequada do atuador é possível detectar falhas a partir dos resíduos de estimação. A modelagem utilizada se baseia em um aparato experimental desenvolvido para este propósito que utiliza um atuador real como elemento para testes e tem muitos pontos em comum com as válvulas de completção inteligente, podendo servir de base para o desenvolvimento de seu modelo. Posteriormente, esta modelagem foi utilizada no artigo de SEPASI e SASSANI [43] que apresentou uma detecção em tempo real utilizando um *Unscented Kalman Filter* (UKF) e no artigo de MING *et al.* [44] que utilizou um observador linear robusto obtido a partir de uma linearização do modelo apresentado. MUENCHHOF e ISERMANN [45] comparam o desempenho da detecção utilizando EKF com um método baseado em equações de paridade.

Uma outra aplicação voltada para o controle de atuadores hidráulicos lineares foi apresentada no artigo de LOUKIANOV *et al.* [46], onde uma estimativa da posição do atuador é obtida através de um observador linear e utilizada para fechar a malha de um controlador por modos deslizantes, permitindo que o atuador acompanhe um sinal de referência gerado por um oscilador caótico.

2.2 Observadores por Modos Deslizantes para Reconstrução de Falhas

Observadores de estados por modos deslizantes [47–50] são baseados em um caso particular de sistemas de estrutura variável no qual o estado do observador e consequentemente sua saída são levados a permanecer em uma superfície de deslizamento escolhida. O artigo [51] apresenta um levantamento do histórico e dos principais resultados neste tema.

Uma das referências iniciais no uso de observadores por modos deslizantes é o artigo de SLOTINE *et al.* [47], onde é proposto um observador com realimentações linear e não-linear, permitindo o estabelecimento de um modo deslizante, demonstrando que é possível obter uma maior robustez a incertezas de parâmetros que um observador linear (Luenberger) ao custo de uma maior sensibilidade a ruídos. O artigo de WALCOTT e ZAK [52] deu um outro grande passo no desenvolvimento destes observadores, apresentando as condições que devem ser atendidas por um sistema linear para que seja possível ser obtida uma dinâmica de erro estável em uma estrutura por modos deslizantes.

O artigo de EDWARDS *et al.* [27] apresenta uma das primeiras utilizações dos observadores por modos deslizantes para a reconstrução de sinais que representam falhas, a partir do projeto de observador por modos deslizantes proposto no artigo de EDWARDS e SPURGEON [49]. O método é baseado na manipulação do sinal de injeção de erro de saída para a reconstrução da falha. Injeção de erro de saída é a nomenclatura utilizada pelos autores do artigo como o análogo em observadores ao sinal denominado controle equivalente por UTKIN [48] para controladores por modos deslizantes e representa o sinal contínuo necessário para manter o observador na superfície de deslizamento. Este sinal não é acessível diretamente (já que o sinal injetado é na realidade descontínuo), mas é possível utilizar uma aproximação contínua com resultados satisfatórios [53].

TAN e EDWARDS [28] estendem o método apresentado em [27] de forma a incluir uma metodologia de reconstrução de falhas de sensor a partir do uso de um segundo observador por modos deslizantes em cascata e também um método de obtenção dos ganhos do observador por através de desigualdades matriciais lineares, de forma a tornar o observador menos sensível a ruído. Em um artigo posterior [29], estes mesmos autores estenderam a metodologia de reconstrução de falhas para aumentar a robustez à incertezas limitadas em norma. O artigo demonstra que através da escolha dos ganhos do observador e de uma modificação na manipulação do sinal de injeção de erro de saída, é possível reconstruir a falha minimizando a influência da incerteza. O artigo apresenta um método de escolha dos ganhos baseado em um critério \mathcal{H}_∞ , utilizando um conjunto de desigualdades matriciais

lineares denominado *Bounded Real Lemma* [54].

No artigo de SEURET *et al.* [55] é proposto um observador de modos deslizantes para sistemas que apresentam atrasos na entrada e no estado e uma perturbação limitada em norma. A parcela descontínua tem como principal objetivo dominar a perturbação e as incertezas relacionadas a utilização de uma estimativa do atraso, não sendo utilizada para reconstrução de falhas. O observador apresenta convergência exponencial e atinge o modo deslizante em tempo finito. Há uma dependência entre os ganhos do observador e a duração de atraso, limitando sua aplicabilidade. A duração máxima do atraso e os ganhos para o observador são obtidos por uma desigualdade matricial linear, oriunda da análise de estabilidade que é feita por um funcional de *Lyapunov-Krasovskii*. RAOUFI e ZINOBER [56] estendem este método para sistemas não lineares, cuja não-linearidade é Lipschitz, com convergência assintótica. Este artigo apresenta um observador adaptativo que permite reconstruir uma perturbação desconhecida, de uma forma muito similar ao método proposto em [27].

HAN *et al.* [32] apresentam um observador por modos deslizantes e de alto ganho para sistemas com saída amostrada. Um retentor de ordem zero [57] tipicamente utilizado em sistemas amostrados é modelado como uma saída que apresenta um atraso variante no tempo, representado por uma onda do tipo “dente de serra” com derivada unitária. O sistema apresenta uma perturbação limitada em norma, representando a falha a ser reconstruída e uma segunda perturbação também limitada agrupando incertezas de modelagem e que é rejeitada pelo observador. Os ganhos e o limite superior do tempo de amostragem são obtidos a partir de um funcional de *Lyapunov-Krasovskii* e de uma desigualdade linear matricial. O termo de injeção descontínuo, apesar de ser utilizado para reconstruir a falha quando o modo deslizante é atingido, não é utilizado para a convergência do observador e este não atinge um modo deslizante ideal. Os autores demonstram que o observador proposto é capaz de reconstruir a falha independente do atingimento do modo deslizante, a partir do erro de saída. O método de reconstrução é baseado nos propostos em [28, 29]. Devido ao funcional utilizado, há uma limitação em relação ao período máximo de amostragem que deve ser pequeno o suficiente para garantir a convergência. Os autores utilizaram o mesmo método para sistemas com atraso de saída variante no tempo, sem a restrição em relação a derivada ou a forma do atraso em um artigo posterior [33]. Novamente, o tempo de amostragem é limitado a um valor suficientemente pequeno. No exemplo proposto no artigo, o atraso é de apenas 13ms, com *chattering* e um longo transiente.

2.3 Observadores-Preditores para Sistemas com Atrasos de Medição

Apesar de a bibliografia para a reconstrução de falhas em sistemas com atrasos de medição ser bastante limitada, é possível encontrar diversos artigos que apresentam observadores de estado para este problema.

Em sistemas com atrasos apenas na medição, o controle é geralmente feito baseado em um preditor [58]. Para sistemas estáveis com atrasos de medição constantes, uma lei de controle baseada no *Preditor de Smith* [59] é frequentemente adotada. Neste método, a lei de controle é projetada a partir do sistema nominal (sem atrasos) e o atraso é compensado através da malha de realimentação. Este método foi posteriormente estendido para sistemas instáveis ou representados por equações de estado [60, 61].

Um preditor em malha aberta, baseado na solução analítica da equação diferencial, é desenvolvido em [62] e [63], através de métodos de Lyapunov, sendo capaz de lidar com atrasos de entrada e de medição variantes no tempo e simultâneos. Este artigo demonstra que no caso de atrasos somente na saída, a predição é exata sem ser necessário impor condições à taxa de variação do atraso. Apesar de amplamente utilizados, a maioria dos preditores propostos exige o conhecimento do modelo e do atraso, não sendo robustos a incertezas ou perturbações. O artigo de LÉCHAPPÉ *et al.* [64], para sistemas lineares perturbados apresentando atraso constante e conhecido, utiliza uma medição atrasada da perturbação como estimativa sem atraso. Para perturbações constantes ou de variação lenta o resultado é uma estimativa com resíduo pequeno. Em [65], um observador é desenvolvido para sistemas apresentando atrasos constantes e conhecidos com perturbação. Uma estimativa da perturbação é obtida através de aproximação por uma série de Taylor truncada. Para obtenção das derivadas necessárias, é utilizado um banco de filtros estritamente próprios. Para atrasos longos, este método irá requerer derivadas de ordens superiores, o que o torna mais propenso a erros numéricos.

Para um sistema não-linear com um atraso longo (os autores usam o termo não-negligenciável) e conhecido de medição, GERMANI *et al.* [66] apresentam uma cascata de observadores de alto ganho que individualmente funcionam como preditores para pequenos atrasos, funcionando em conjunto como um preditor de estado. Os autores demonstram que a cascata apresenta convergência exponencial. O sistema observado não apresenta nenhuma perturbação e não é analisada a influência do ruído na estimação dos estados. AHMED-ALI *et al.* [67] estendem este trabalho para uma classe de sistemas que apresentam uma não linearidade do tipo triangular e uma cascata de observadores idênticos, simplificando o processo de obtenção dos ganhos. Os autores demonstram que apesar de cada observador da cascata apresen-

tar uma limitação no atraso máximo, a cascata pode ser feita de qualquer tamanho, permitindo estimar os estados em sistemas com atrasos longos. A principal limitação neste método é que os atrasos devem ser constantes e conhecidos. COUTINHO *et al.* [68] fazem uso deste observador para permitir o uso de um controlador por modos deslizantes para controle do sistema. No entanto, esta estratégia só pode ser aplicada a sistemas com atrasos de medição de duração constante. Mesmo no caso de durações mais curtas, o número de observadores na cascata pode ser muito elevado, dificultando seu uso em certas aplicações [69].

Para monitoração de dutos de gás liquefeito de petróleo com comprimentos longos e alguns pontos de monitoração ao longo do caminho, TORRES *et al.* [70] utilizam uma cascata de observadores aproximando a equação diferencial parcial a uma equação diferencial ordinária através do método de diferenças finitas, transformando o problema em um sistema a parâmetros concentrados.

Em KRSTIC e SMYSHLYAEV [71], é apresentada a derivação de um observador-preditor baseada na modelagem do atraso como uma equação diferencial parcial (EDP) de transporte, preservando a dimensão infinita do sistema causada pelo atraso. Utilizando a técnica de *backstepping* para equações diferenciais parciais proposta por [72], é obtido um preditor que é robusto a incerteza na estimação do estado e que pode ser apresentado como um observador linear de estado atrasado, em cascata com um preditor em malha aberta. Utilizando esta mesma modelagem, o autor ainda apresenta controladores para sistemas com estados ou entrada atrasados ou estruturas de controladores para algumas classes de sistemas não-lineares. Em sistemas apresentando perturbações ou incertezas, métodos adaptativos podem ser utilizados de forma a minimizar sua influência [73, 74].

2.4 Discussão Sobre a Condição de Variação Lenta do Atraso

Em uma grande parte das publicações envolvendo atrasos de duração variante no tempo, são assumidas hipóteses quanto a sua duração e a sua taxa de variação. As condições mais comumente encontradas são [74–77]:

- (H2.1) O atraso conhecido $\tau(t)$ é positivo e apresenta um limite superior uniforme tal que $0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}$.
- (H2.2) A primeira derivada do atraso $\dot{\tau}(t)$ existe, é estritamente menor que um assegurando que $t - \tau(t)$ é monotonicamente crescente.

$$\dot{\tau}(t) \leq d < 1 \tag{2.2}$$

A primeira hipótese apresenta que o atraso deve ser positivo e limitado. Obviamente,

um atraso negativo significaria que o sistema no tempo presente seria afetado pelo valor futuro de um dos sinais, violando a causalidade. A segunda hipótese caracteriza os chamados atrasos de variação lenta, em oposição aos atrasos de variação rápida, onde não há esta restrição [75, 78, 79]. Ela garante que $t - \tau(t)$ é estritamente crescente, o que significa que a informação atrasada ou a quantidade de interesse afeta o sistema seguindo uma ordem cronológica [80, 81]. Esta condição é normalmente encontrada em atrasos cuja origem é um processo de natureza mecânica ou química e, por este motivo, será adotada ao longo desta tese. No entanto, algumas discussões sobre a sua importância do ponto de vista de teoria de sistemas [80, 82] vem chamando a atenção na literatura e merecem ser citadas.

Primeiramente, consideremos o caso específico em que $\dot{\tau}(t) = 1$. Neste caso, teremos que $t - \tau(t)$ é uma constante e o sinal permanecerá constante para qualquer tempo, limitando a possibilidade de análise de estabilidade. Apesar disso, esta é uma forma utilizada para modelar sistemas amostrados e reconstruídos utilizando um retentor de ordem zero (*Zero Order Hold - ZOH*): entre as amostras, o sinal em questão (por exemplo a saída amostrada de um sistema) apresenta um atraso em forma de rampa de inclinação unitária, de tal forma que $x(t - \tau(t)) = x(nT_s)$, $\forall t \in [nT_s, (n + 1)T_s]$, onde n é o índice da amostra e T_s é o período de amostragem. A cada nova amostra, o sinal é atualizado para o tempo presente com o atraso indo instantaneamente a zero e conseqüentemente com $\dot{\tau}(t) = -\infty$. Em [32], os autores projetaram um observador para reconstrução de falhas, utilizando um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente da duração do atraso para a análise de convergência. Este funcional, por assumir um majorante constante para o atraso, é independente da sua taxa de variação, mas limita a duração máxima a valores suficientemente pequenos.

A condição de atraso de variação rápida ($\dot{\tau}(t) \geq 1$) implica em diversos problemas teóricos, em relação a causalidade, consistência, existência e unicidade de solução e a possibilidade de descrição por um espaço de estados [80, 82, 83]. Em [80], são apresentados exemplos que demonstram cada um dos problemas teóricos. Reproduziremos aqui o exemplo referente a causalidade. Seja o sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t - \tau(t)),$$

onde A é inversível. Seja $\varepsilon > 0$ uma constante pequena.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \dot{x}(t + \varepsilon) &= Ax(t - \tau(t)) - Ax(t + \varepsilon - \tau(t + \varepsilon)) \\ &= A[x(t - \tau(t)) - x(t - \tau(t) + \varepsilon(1 - \dot{\tau}(t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2))] \end{aligned}$$

Então, obtemos:

$$x(t - \tau(t) + \varepsilon(1 - \dot{\tau}(t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2))) = x(t - \tau(t)) + A^{-1}[\dot{x}(t) - \dot{x}(t + \varepsilon)]$$

Observe que se $\dot{\tau}(t) > 1$ temos $(1 - \dot{\tau}(t)) < 0$ e o sinal $x(t - \tau(t) + \varepsilon(1 - \dot{\tau}(t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)))$ passa a depender de um valor futuro $x(t - \tau(t))$, violando a causalidade. Esta violação vem do fato de que quando $\dot{\tau}(t) > 1$, a função $t - \tau(t)$ é estritamente decrescente [82].

Uma forma mais geral de se expressar a condição em relação a atrasos variantes no tempo necessária e suficiente para evitar problemas de natureza teórica (que podem ocorrer mesmo em alguns casos onde $\dot{\tau}(t) < 1$) é a seguinte [80]: a função $t - \tau(t)$ deve ser estritamente crescente e inversível. Apesar de existir na literatura métodos voltados a análise de sistemas apresentando atrasos de variação rápida (quando $\dot{\tau}(t) \geq 1$, tais como em sistemas que apresentam saltos ou interrupções), estes são, de forma geral, baseado em um relaxamento do conceito de solução [80], tais como considerar majorantes constantes para os atrasos.

Capítulo 3

Modelo Matemático para Completção Inteligente

Um dos motivadores desta tese é o diagnóstico de falhas dos acionadores hidráulicos das válvulas de completção inteligente hidráulicas. Estas válvulas são acionadas por um pistão balanceado bidirecional onde fluido hidráulico é bombeado para uma de suas duas câmaras, que possuem mesma área de acionamento, conforme a figura 3.2 abaixo. O modelo de acionador hidráulico linear é bastante documentado na literatura referente a sistemas de potência hidráulica [18, 19] e seu desenvolvimento será mostrado a seguir.

O fluido hidráulico de acionamento é transportado até a válvula através de linhas hidráulicas que por serem longas e delgadas (quilômetros de comprimento e milímetros de diâmetro interno) apresentam um comportamento de escoamento laminar, onde a vazão é proporcional a diferença de pressão, de forma análoga ao comportamento resistivo em circuitos elétricos:

$$\Delta P_{pipe} = R_{pipe} \cdot q_{pipe} \quad (3.1)$$

$$R_{pipe} = \frac{128\mu_{fluid}\ell_{pipe}}{\pi d_{pipe}^4} \quad (3.2)$$

onde μ_{fluid} é a viscosidade do fluido em centistokes, ℓ_{pipe} e d_{pipe} são o comprimento e o diâmetro da linha hidráulica em metros, ΔP_{pipe} é o diferencial de pressão na linha hidráulica, R_{pipe} é sua resistência hidráulica e q_{pipe} é a vazão volumétrica.

A frente de pressão em um escoamento se desloca a velocidade do som no meio onde se propaga (neste caso, o fluido hidráulico). Desta forma, como as linhas hidráulicas podem ter quilômetros de comprimento uma pressão aplicada a linha hidráulica levará alguns segundos para ser percebida na outra extremidade. Assim, se utilizarmos um modelo a parâmetros concentrados para as linhas de acionamento será necessário considerarmos um atraso de propagação devido ao comprimento.

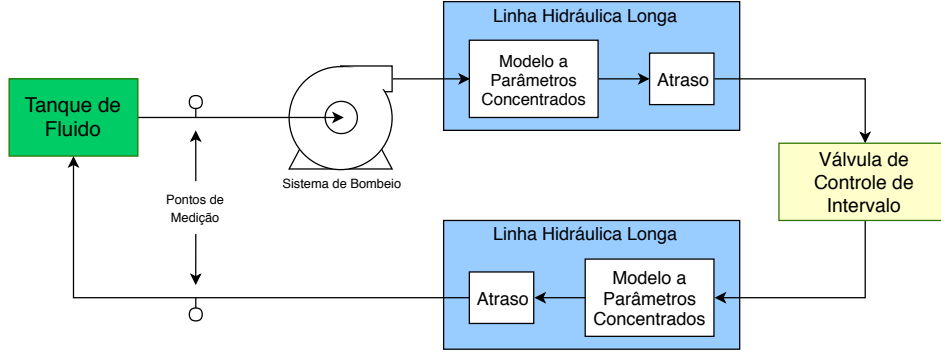


Figura 3.1: Diagrama de blocos para a modelagem da completação inteligente mostrando as linhas hidráulicas como um modelo a parâmetros concentrados mais um atraso.

A figura 3.1 apresenta uma modelagem possível para o sistema de completação inteligente.

3.1 Modelo Simplificado

3.1.1 Modelo com fluido incompressível

De forma a simplificar o problema, será considerado inicialmente o uso de um fluido de acionamento completamente incompressível e o uso de linhas rígidas. Tal premissa não é inverossímil se considerarmos o uso de fluidos de controle base óleo, que apresentam uma compressibilidade baixíssima. Desta forma, podemos considerar a vazão de entrada do sistema (q_i) e a vazão de saída (q_o) como sendo iguais a vazão de suprimento ($q_s = q_i = q_o$). Além disso, será considerada uma fonte de pressão ideal, onde a pressão de suprimento do sistema hidráulico (P_s) fica constante para qualquer vazão de suprimento. As pressões serão manométricas, de tal forma que a pressão atmosférica será representada por 0 psi.

Seja m_p a massa do pistão, x_p sua posição, S_p sua área transversal, F a força resultante aplicada a este e $F_r(\dot{x}_p)$ a força de atrito intrínseca ao pistão (resultante de todas as forças de atrito em ação sobre o pistão). Descrevendo o movimento do pistão utilizando a segunda lei de Newton e a própria definição de pressão as seguintes expressões são obtidas:

$$m_p \ddot{x}_p = F - F_r(\dot{x}_p) \quad (3.3)$$

$$F = S_p (P_i - P_o) \quad (3.4)$$

$$m_p \ddot{x}_p = S_p (P_i - P_o) - F_r(\dot{x}_p) \quad (3.5)$$

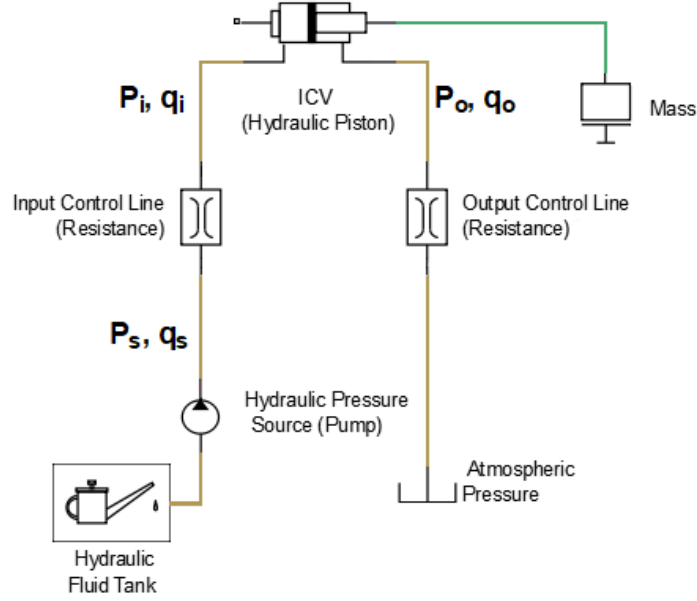


Figura 3.2: Modelo simplificado do sistema de acionamento do pistão. Uma bomba ideal (pressão constante e independente da vazão) bombeia fluido através de uma linha curta até a câmara de abertura. O fluido que sai da câmara de fechamento é retornado por uma linha idêntica ao tanque.

Como o fluido é incompressível e o comportamento da linha de acionamento é puramente resistivo, é possível descrever as pressões nas câmaras do pistão da seguinte forma [18, 19]:

$$(P_s - P_i) = R_i q_i \quad (3.6)$$

$$(P_o - 0) = R_o q_o \quad (3.7)$$

$$P_i = P_s - R_i q_i \quad (3.8)$$

$$P_o = R_o q_o \quad (3.9)$$

onde R_i e R_o são respectivamente as resistências hidráulicas das linhas de entrada e de saída. Por conservação de massa, vê-se também que a vazão é dada pela variação do volume e uma vez que a área do pistão é constante, temos:

$$q_s = q_i = q_o = S_p \dot{x}_p \quad (3.10)$$

Substituindo 3.10 em 3.8 e 3.9:

$$P_i = P_s - R_i S_p \dot{x}_p \quad (3.11)$$

$$P_o = R_i S_p \dot{x}_p \quad (3.12)$$

Aplicando 3.11 e 3.12 em 3.5:

$$m_p \ddot{x}_p = S_p (P_s - R_i S_p \dot{x}_p - R_o S_p \dot{x}_p) - F_r(\dot{x}_p) \quad (3.13)$$

$$m_p \ddot{x}_p = S_p P_s - S_p^2 (R_i + R_o) \dot{x}_p - F_r(\dot{x}_p) \quad (3.14)$$

Como o fluido é incompressível, a vazão é proporcional a velocidade do pistão e pode ser considerada a saída do sistema. Utilizando a posição e a velocidade como estados do sistema e a pressão da fonte como entrada ($x_1 := x_p$, $x_2 := \dot{x}_p$ e $u := P_s$) e considerando um tempo morto τ para a propagação da pressão nas linhas de acionamento, pode-se escrever a equação de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m} (S_p u(t - \tau) - S_p^2 (R_i + R_o) x_2(t) - F_r(x_2(t))) \\ y(t) = S_p \dot{x}_1(t - \tau) \end{cases} \quad (3.15)$$

ou em forma matricial:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{S_p^2(R_i+R_o)}{m_p} \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{S_p}{m_p} \end{bmatrix}}_B u(t - \tau) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_r(x_2(t))}{m_p} \end{bmatrix}}_{\Phi(x_2(t))} \quad (3.16)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & S_p \end{bmatrix}}_C x(t - \tau) \quad (3.17)$$

É necessário também incluir a não linearidade que caracteriza o batente de fim de curso do pistão. Uma forma possível de implementar é através de uma força adicional que representa a reação do batente, o que pode levar a problemas de convergência na simulação. Uma forma mais simples, adequada para simulação, é incluir uma saturação do tipo:

$$x = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & x_1 < 0 \text{ e } x_2 < 0; \\ \begin{bmatrix} x_{p,\max} \\ 0 \end{bmatrix}, & x_1 > x_{p,\max} \text{ e } x_2 > 0; \\ x, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.18)$$

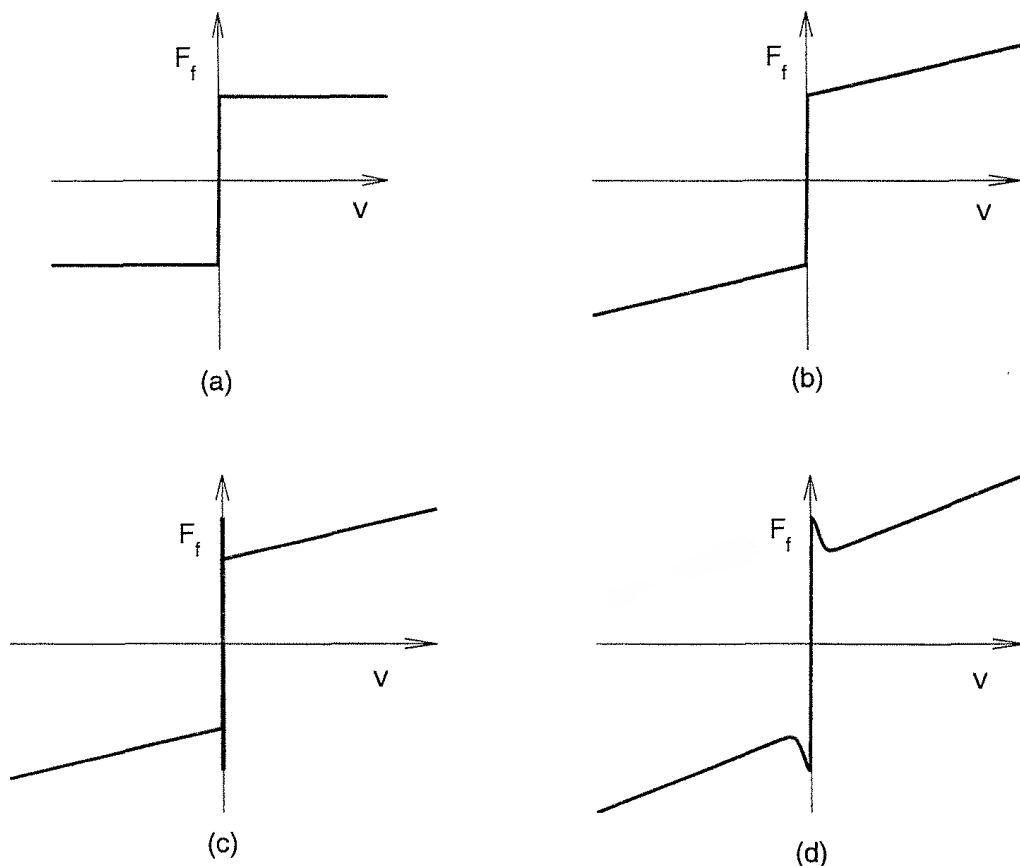


Figura 3.3: Modelos para forças de atrito: (a) Atrito Coulomb; (b) Atrito Coulomb com atrito viscoso linear adicionado; (c) Atritos estático, Coulomb e viscoso linear adicionados; (d) Atritos estático, Coulomb e viscoso linear adicionados, com efeito Stribeck. (Reproduzido de Khalil, 2002 [84])

onde $x_{p,\max}$ é o máximo valor da posição da válvula

3.1.2 Modelo para o Atrito

A força de atrito é sempre uma força resistiva ao sentido do movimento, atuando paralelamente a superfície de contato. Quando o corpo está em repouso, uma força de atrito estática se apresenta, procurando manter o corpo em repouso para qualquer força que atue até o seu limite, em geral dado por um valor proporcional a força normal do corpo a superfície. Uma vez em movimento, o corpo apresenta uma força de atrito Coulomb, que possui valor constante proporcional a força normal do corpo a superfície por uma constante de atrito cinemático ou dinâmico (Figura 3.3(a)). A resistência do fluido a frente do movimento causa um atrito adicional viscoso, proporcional a velocidade do corpo e que é adicionada ao atrito Coulomb, como pode ser visto na Figura 3.3(b) e na Figura 3.3(c), onde é representado um atrito estático maior que o dinâmico.

Um modelo bastante utilizado para o atrito do pistão [18, 19, 42, 85] é o apresentado na Figura 3.3(d). Ao iniciar o movimento o corpo é sujeito a um aumento de lubrificação causada pelo descolamento entre as superfícies, que causa uma redução da força de atrito, num processo denominado Efeito Stribeck.

Em torno da velocidade zero, os modelos de atrito apresentam uma descontinuidade que pode se tornar problemática para a simulação de sistemas que apresentem atrito. Uma solução possível de ser adotada é criar uma pequena região ao redor da velocidade zero na qual a força de atrito é diretamente proporcional a velocidade. Outra possibilidade é utilizar o modelo de Karnopp [42, 86], onde o atrito é constante em uma pequena região ao redor da velocidade zero. Este modelo é dado pelas equações:

$$\begin{cases} F_c(\dot{x}) = \text{sign}(\dot{x}) \left[f_{st} + (f_{st} - f_{sl}) e^{-\frac{|\dot{x}|}{a}} + d\dot{x} \right], & |\dot{x}| > v_{th} \\ F_c(\dot{x}) = f_{st} \cdot \text{sign}(\dot{x}), & |\dot{x}| \leq v_{th} \end{cases} \quad (3.19)$$

onde f_{st} é a força de atrito estático (*sticktion*), f_{sl} é a força de atrito cinemático (*slippage*), v_{th} é a velocidade de descolamento, a é a taxa de decaimento do efeito Stribeck e d é o coeficiente do atrito viscoso.

3.1.3 Modelo incluindo compressibilidade do fluido

O modelo desenvolvido anteriormente pode ser estendido para incluir a compressibilidade do fluido. Da mesma forma que anteriormente, temos pela segunda lei de Newton:

$$m_p \ddot{x}_p = S_p (P_i - P_o) - F_r(\dot{x}) \quad (3.20)$$

Considerando o fator de compressibilidade do fluido hidráulico β , a vazão de entrada ou saída será dada pela variação do volume da câmara (V_i para a de entrada e V_o para a de saída) pelo movimento do pistão mais a variação de volume causada pela compressão do fluido [18, 19, 87]:

$$q_i = S_p \dot{x} + \frac{1}{\beta} V_i \dot{P}_i = S_p \dot{x}_p + \frac{S_p x_p}{\beta} \dot{P}_i \quad (3.21)$$

$$q_o = S_p \dot{x} + \frac{1}{\beta} V_o \dot{P}_o = S_p \dot{x}_p + \frac{S_p (x_{p,\max} - x_p)}{\beta} \dot{P}_o \quad (3.22)$$

Nota 3.1.1. A compressibilidade dos elementos de transmissão do fluido (tubulação

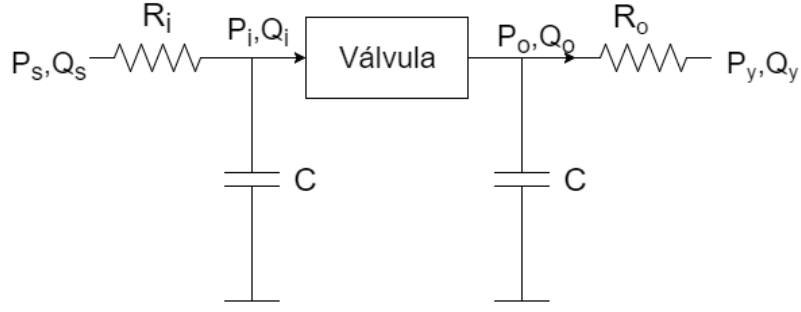


Figura 3.4: Esquemático do equivalente elétrico do modelo hidráulico da válvula de completção inteligente, incluindo a compressibilidade.

e corpo do pistão) podem ser todos unificados no parâmetro β pela expressão:

$$\beta_{equiv} = \frac{\beta_{fluido} \beta_{tubo}}{\beta_{fluido} + \beta_{tubo}} \quad (3.23)$$

No caso de linhas rígidas metálicas, no entanto, este valor se aproxima da compressibilidade do fluido.

Neste modelo as linhas hidráulicas devem incluir, além do componente resistivo causado pelo rugosidade da tubulação e restrições ao fluxo, um fator capacitivo, determinado pela compressibilidade do fluido e pela elasticidade das linhas. A linha hidráulica será aproximada aqui por um sistema de primeira ordem mais tempo morto, causado pelo tempo de propagação da onda de pressão pela linha [19, 21, 87], conforme esquemático apresentado na Figura 3.4.

Sendo S_t a área de fluxo da linha hidráulica, V_t o seu volume e l_{pipe} o seu comprimento, a capacitância hidráulica pode ser descrita por:

$$C = \frac{S_t l_{pipe}}{\beta} = \frac{V_t}{\beta} \quad (3.24)$$

A vazão na entrada da câmara da válvula q_i será dada pela expressão:

$$q_i = \frac{P_s - P_i}{R_i} - \frac{\dot{P}_i V_t}{\beta} \quad (3.25)$$

Considerando a conservação da massa, podemos substituir a equação acima na expressão para a vazão de entrada na válvula (3.21) e obter uma expressão para a taxa de variação de pressão na câmara de entrada:

$$\begin{aligned} \frac{P_s - P_i}{R_i} - \frac{\dot{P}_i V_t}{\beta} &= S_p \dot{x}_p + \frac{S_p x_p}{\beta} \dot{P}_i \\ \dot{P}_i &= \frac{\beta}{V_t + S_p x_p} \left(\frac{P_s}{R_i} - \frac{P_i}{R_i} - S_p \dot{x}_p \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Da mesma forma, é possível se obter a taxa de variação de pressão na saída:

$$\dot{P}_o = \frac{\beta}{V_t + S_p(x_p - x_{p,\max})} \left(S_p \dot{x}_p - \frac{P_o}{R_o} \right) \quad (3.27)$$

Assim, temos as seguintes equações para descrever o sistema:

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \frac{1}{m_p} (S_p (P_i - P_o) - F_r(\dot{x}_p)) \\ \dot{P}_i &= \frac{\beta}{V_t + S_p x_p} \left(\frac{P_s}{R_i} - \frac{P_i}{R_i} - S_p \dot{x}_p \right) \\ \dot{P}_o &= \frac{\beta}{V_t + S_p (x_p - x_{p,\max})} \left(S_p \dot{x}_p - \frac{P_o}{R_o} \right) \end{cases} \quad (3.28)$$

O volume deslocado na câmara de uma válvula de completção inteligente é bem menor que o volume da linha hidráulica (menor que 2,5%) permitindo que utilizemos a aproximação:

$$V_t + S_p x_p \approx V_t \quad (3.29)$$

de tal forma que as equações de \dot{P}_i e em \dot{P}_o podem ser aproximadas por equações lineares.

Considerando que a tomada da saída está na pressão de referência (atmosférica, por exemplo) e que a linha hidráulica impõe um atraso $\tau = vl$, onde v é a velocidade do som no fluido hidráulico [21], é possível verificar que a vazão de saída q_y é dada por:

$$q_y = \frac{P_o(t - \tau)}{R_o} \quad (3.30)$$

A pressão de alimentação P_s também está sujeita ao atraso imposto pela propagação da onda de pressão de tal forma que o sinal de entrada pode ser representado por $P_s = u(t - \tau)$

Assim, escolhendo como vetor de estado $x = col \{x_p, \dot{x}_p, P_i, P_o\}$ e a vazão de retorno como variável de saída $y(t) = q_y(t) = P_o(t - \tau)/R_o$, podemos escrever as equações de estado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_p}{m_p} & \frac{-S_p}{m_p} \\ 0 & -\frac{S_p\beta}{V_t} & -\frac{\beta}{V_t R_i} & 0 \\ 0 & \frac{S_p\beta}{V_t} & 0 & -\frac{\beta}{V_t R_o} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\beta}{V_t R_i} \\ 0 \end{bmatrix} u(t - \tau) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m_p} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_r(\dot{x}) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_o} \end{bmatrix} x(t - \tau) \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Tal como no modelo simplificado, faz-se necessário também incluir a não linearidade que caracteriza o batente de fim de curso do pistão, utilizando a equação (3.18).

3.2 Sumário dos resultados

Neste capítulo apresentamos uma modelagem simplificada para o atuador das válvulas de completação inteligente de acionamento hidráulico direto. A primeira abordagem considera o fluido incompressível, de tal forma que as linhas hidráulicas de controle são representadas por elementos resistivos lineares, dado o escoamento capilar, com um atraso de transporte causado pelo tempo de propagação da frente de pressão. Este modelo é compatível com sistemas acionados por fluidos hidráulicos base óleo, onde a quantidade de gás dissolvida é pequena o suficiente para permitir desprezar a compressibilidade. Para a modelagem do atrito, que tem origem nos selos hidráulicos, um modelo clássico do tipo *stick-slip* foi adotado.

Finalmente, um modelo considerando a compressibilidade dos fluidos (como em sistemas utilizando acionamento por água-glicol, por exemplo) é proposto. Neste modelo, as linhas de acionamento são modeladas como um sistema de primeira ordem mais tempo morto e o modelo de atrito é o mesmo anterior. No caso do uso de sistemas com acionamento eletro-hidráulico, a grande diferença é que o atraso de entrada não precisa ser considerado, uma vez que válvulas solenóides de acionamento se encontram diretamente acopladas aos pórticos do pistão acionador da válvula.

Capítulo 4

Reconstrução de Falhas de Atuador em Sistemas com Atraso de Medição

Neste capítulo, será apresentado um novo método baseado em um deslocamento no tempo (*time-shift approach*). Este método permite o projeto de um observador por modos deslizantes para sistemas apresentando atrasos de medição variantes no tempo e com duração arbitrária. Sem utilizar funcionais de Lyapunov-Krasovskii, o observador pode ser utilizado para reconstrução de falhas de atuador se o sistema deslocado no tempo satisfizer as condições usuais de fase mínima e grau relativo unitário. Como vantagem adicional, o método é robusto a incertezas na duração do atraso, sem comprometer o atingimento do modo deslizante. O preço a ser pago é que o sinal de falha reconstruído também é atrasado pelo deslocamento no tempo, o que é aceitável em certas aplicações, como no caso de sistemas hidráulicos submarinos. Além disso, a reconstrução do sinal completo, mesmo atrasado, preserva os transientes o que é importante para o diagnóstico das causas da falha ou para a detecção de falhas curtas ou intermitentes.

4.1 Formulação do problema

Considere um sistema linear, invariante no tempo apresentando um atraso de medição variante no tempo $\tau(t) > 0$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ff(t) \\ y(t) = Cx(t - \tau(t)) \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$. O sinal de entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é conhecido (mensurável), o estado do sistema $x(t) \in \mathbb{R}^n$ não é mensurável, e $y(t) \in \mathbb{R}^p$

é o sinal de saída. O sinal de perturbação desconhecido $f(t) \in \mathbb{R}^q$, $q \leq p < n$, representa os efeitos de uma falha de atuador.

O objetivo principal é desenvolver um método capaz de reconstruir o sinal de falha do atuador $f(t)$ somente a partir da entrada conhecida e do sinal de saída $y(t)$ que apresenta um atraso $\tau(t)$.

São feitas as seguintes hipóteses:

(H4.1) As matrizes A , B , C , F são conhecidas. B e F possuem posto completo.

(H4.2) O atraso $\tau(t)$ é diferenciável e satisfaz $0 < \tau(t) \leq \bar{\tau}$ para uma constante conhecida $\bar{\tau}$. Sua derivada no tempo $\dot{\tau}(t)$ satisfaz:

$$\underline{d} \leq \dot{\tau}(t) \leq d < 1, \quad |\dot{\tau}(t)| \leq r_d \quad (4.2)$$

onde r_d , d e \underline{d} são constantes conhecidas, e \underline{d} pode ser negativa. Estas condições devem ser satisfeitas simultaneamente.

(H4.3) O sinal de falha $f(t)$ é limitado em norma por uma constante conhecida $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\|f(t)\| \leq \alpha \quad (4.3)$$

(H4.4) O par (A, C) é observável e os zeros invariantes de (A, F, C) estão no semiplano negativo.

(H4.5) $\text{posto}(CF) = \text{posto}(F) = q$.

(H4.6) Os valores passados de $u(t)$ no intervalo $t \in [t - \tau, t]$ estão disponíveis para a reconstrução de falha.

4.2 Observador com Deslocamento no Tempo

Das hipóteses **(H4.4)** e **(H4.5)**, pode-se assumir que o sistema (4.1) já se encontra na forma canônica para projetos de observadores proposta em [50, Lema 6.1]:

$$\begin{aligned} A &= \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right], & B &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \\ F &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix}, & F_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \end{bmatrix} \\ C &= \left[0 \mid T \right], & T^T T &= I \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$, $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é ortogonal, $B_2 \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $F_2 \in \mathbb{R}^{p \times q}$. A matriz $F_0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ é não singular.

Vamos definir as seguintes variáveis atrasadas:

$$\begin{aligned}x_\tau(t) &= x(t - \tau(t)), \quad f_\tau(t) = f(t - \tau(t)), \\u_\tau(t) &= u(t - \tau(t)).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Aplicando a regra da cadeia a $\dot{x}_\tau(t)$:

$$\dot{x}_\tau(t) = \frac{dx_\tau(t)}{dt} = (1 - \dot{\tau}(t)) \frac{dx(t - \tau(t))}{d(t - \tau(t))}\tag{4.6}$$

$$\dot{x}_\tau(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) [Ax(t - \tau(t)) + Bu(t - \tau(t)) + Ff(t - \tau(t))]\tag{4.7}$$

podemos escrever o sistema (4.1) em função das variáveis atrasadas, na forma abaixo:

$$\begin{cases} \dot{x}_\tau(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) [Ax_\tau(t) + Bu_\tau(t) + Ff_\tau(t)] \\ y(t) = Cx_\tau(t) \end{cases}\tag{4.8}$$

Observe que o sistema deslocado no tempo não possui um atraso de saída explícito. O objetivo então, é projetar um observador para o sistema deslocado no tempo (4.8) que seja capaz de reconstruir a falha atrasada $f_\tau(t)$ a partir do sinal de saída $y(t)$ e do sinal de entrada $u(t)$. Para este fim serão utilizadas generalizações para sistemas com atrasos de medição dos observadores por modos deslizantes existentes nas literaturas .

Nota 4.2.1. *O método do deslocamento no tempo também pode ser aplicado a algumas classes de sistemas não lineares. Por exemplo, considere o sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \phi(x(t)) + Bu(t) + Ff(t) \\ y(t) = Cx(t - \tau(t)) \end{cases}$$

onde a função conhecida $\phi(x(t))$ é Lipschitz em $x(t)$. Aplicando o método acima, o sistema é transformado para

$$\begin{cases} \dot{x}_\tau(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) [Ax_\tau(t) + \phi(x_\tau(t)) + Bu_\tau(t) + Ff_\tau(t)] \\ y(t) = Cx_\tau(t). \end{cases}$$

Esta classe de sistemas é comumente encontrada na literatura e é bastante simples estender os resultados a seguir para obter um observador apropriado para a reconstrução de falhas.

4.2.1 Atraso conhecido

Inicialmente iremos considerar casos mais favoráveis onde o atraso $\tau(t)$ é plenamente conhecido. Desta forma, a entrada atrasada $u_\tau(t) = u(t - \tau(t))$ está disponível para utilização no observador, a partir da hipótese **(H4.6)**.

Considere o seguinte observador por modos deslizantes:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_\tau(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) [A\hat{x}_\tau(t) + Bu_\tau(t) - G_l e_y + G_n \nu] \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}_\tau(t) \end{cases} \quad (4.9)$$

onde o erro de observação de saída $e_y(t)$ e o erro de observação de estado $e(t)$ são definidos como:

$$e(t) \triangleq \hat{x}_\tau(t) - x_\tau(t) \quad (4.10)$$

$$e_y(t) \triangleq \hat{y}(t) - y(t) = Ce(t) \quad (4.11)$$

onde G_l é escolhido de forma que a matriz $(A - G_l C)$ seja Hurwitz. Das equações (4.8), (4.9), e (4.10), pode-se verificar que o erro de observação de estado $e(t)$ é governado pela dinâmica:

$$\dot{e}(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) [(A - G_l C)e(t) + G_n \nu - F f_\tau(t)] \quad (4.12)$$

$$e_y(t) = Ce(t) \quad (4.13)$$

O termo descontínuo de injeção ν é dado por:

$$\nu = -\rho \frac{P_0 e_y}{\|P_0 e_y\|} \quad (4.14)$$

onde $P_0 > 0$ é uma matriz a ser escolhida no projeto. O ganho ρ deverá ser projetado de forma que o modo deslizante $e_y(t) \equiv 0$ seja atingido em tempo finito.

Nota 4.2.2. Quando o atraso de medição $\tau(t)$ é constante ($\dot{\tau}(t) = 0$), as equações (4.9) e (4.12) para o observador proposto são levadas àquelas apresentadas no artigo [27], originalmente propostas para a reconstrução de falhas em sistemas sem atrasos. No nosso caso, são estimados os estados atrasados no lugar dos atrasos no tempo presente.

A matriz G_n é escolhida de forma a ter a estrutura:

$$G_n = \begin{bmatrix} -L \\ I_{p \times p} \end{bmatrix} T^T, \quad (4.15)$$

onde a matriz ortogonal T é definida em (4.4). A matriz $L = [L_1 \ 0] \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$, com $L_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (p-q)}$, é escolhida de tal forma que $LF_2 = 0$ e que $A_{11} + LA_{21}$ seja

Hurwitz, nos casos em que $p < q$. Quando $p = q$, não será possível determinar a matriz L . Neste caso é necessário considerar também que $\det(\text{CF}) \neq 0$ na hipótese **(H4.4)**. Neste caso, o sistema (A, F, C) possui fase mínima e grau relativo unitário e existem exatamente $(n - p)$ zeros invariantes e, conseqüentemente, A_{11} é Hurwitz.

Utilizando a mudança de coordenadas $e \mapsto \bar{e} = T_L e$, onde T_L é uma matriz de transformação linear não-singular definida como:

$$T_L = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L \\ 0 & T \end{bmatrix}, \quad \bar{e} = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{bmatrix}, \quad e_y = \bar{e}_2, \quad (4.16)$$

a dinâmica do erro de observação pode ser descrita como:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) (\mathcal{A}_{11} \bar{e}_1(t) + (\mathcal{A}_{12} - \mathcal{G}_{l,1}) e_y(t)) \\ \dot{\bar{e}}_2(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) (\mathcal{A}_{21} \bar{e}_1(t) + (\mathcal{A}_{22} - \mathcal{G}_{l,2}) e_y(t) + \nu - \mathcal{F}_2 f_\tau(t)) \end{cases} \quad (4.17)$$

onde as matrizes $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}_l)$ correspondem às matrizes (A, C, F, G_l) transformadas para o novo sistema de coordenadas. As matrizes $\mathcal{G}_{l,1}$ e $\mathcal{G}_{l,2}$ são partições da matriz transformada $\mathcal{G}_l = T_L G_l$ com as dimensões apropriadas. As partições de \mathcal{A} são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11} &= A_{11} + LA_{21}, & \mathcal{A}_{12} &= (A_{12} + LA_{22} - A_{11}L - LA_{21})T^T, \\ \mathcal{A}_{21} &= TA_{21}, & \mathcal{A}_{22} &= TA_{22}T^T - TA_{21}LT^T. \end{aligned}$$

É possível observar em (4.17) que o modo deslizante é governado pelos autovalores de $\mathcal{A}_{11} = A_{11} + LA_{21}$, que é Hurwitz. Escolhendo $\mathcal{G}_{l,1} = \mathcal{A}_{12}$ e $\mathcal{G}_{l,2} = \mathcal{A}_{22} - \mathcal{A}_{22}^*$, onde $\mathcal{A}_{22}^* \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é uma matriz estável selecionada para o projeto, o sistema (4.17) se torna triangular. Conseqüentemente, o sistema (4.17) será levado a:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) (\mathcal{A}_{11} \bar{e}_1(t)) \\ \dot{\bar{e}}_2(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) (\mathcal{A}_{21} \bar{e}_1(t) + \mathcal{A}_{22}^* e_y(t) + \nu - \mathcal{F}_2 f_\tau(t)) \end{cases} \quad (4.18)$$

e verifica-se que os autovalores de $A - G_l C$ são a união dos autovalores de \mathcal{A}_{11} e de \mathcal{A}_{22}^* . Nas coordenadas de (4.4), G_l é dada por:

$$G_l = T_L^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{22} - \mathcal{A}_{22}^* \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

A matriz simétrica $P_0 > 0$ em (4.14) deve ser selecionada de forma a satisfazer $(\mathcal{A}_{22}^*)^T P_0 + P_0 (\mathcal{A}_{22}^*) < 0$. Então, existe uma matriz $P > 0$, satisfazendo $(A -$

$G_l C)^T P + P(A - G_l C) < 0$, com a seguinte estrutura [88, Eq (4.67)]:

$$P = T_L^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix} T_L. \quad (4.20)$$

Então, a convergência do observador (4.9) ao sistema deslocado no tempo (4.8) pode ser demonstrada no seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. *Considere o sistema the τ -atrasado (4.8), satisfazendo as hipóteses (H4.1) a (H4.6) e seu observador (4.9), com ν in (4.14), matrizes G_n and G_l definidas in (4.15) e (4.19), respectivamente. Se o ganho ρ do termo descontínuo (4.14) satisfaz*

$$\rho \geq \alpha \|CF\| + \eta_0, \quad (4.21)$$

onde η_0 é um escalar positivo arbitrário, então o erro de observação de estado $e(t)$ converge exponencialmente a zero. O erro de saída $e_y(t)$ atinge zero em tempo finito $t = t_s$ e um modo deslizante é iniciado em $\mathcal{S} = \{e : e_y = Ce = 0\}$, $\forall t \geq t_s$.

Demonstração. Como em [88, Proposition 4.1] para sistemas sem atrasos, considere a função de Lyapunov $V_1(e) = e^T P e$, com $e(t)$ de (4.12) e $P > 0$ de (4.20), para a prova de convergência. Seja

$$A_o \triangleq A - G_l C. \quad (4.22)$$

Derivando a função de Lyapunov ao longo das trajetórias de (4.12),obtêm-se:

$$\dot{V}_1(e) = (1 - \dot{\tau}(t)) (e^T (A_o^T P + P A_o) e - 2e^T P F f_\tau + 2e^T P G_n \nu) \quad (4.23)$$

Selecionando por construção $P G_n \triangleq C^T P_0$ e $P F \triangleq C^T P_0 C F$, temos:

$$\dot{V}_1(e) = (1 - \dot{\tau}(t)) (e^T (A_o^T P + P A_o) e - 2e^T C^T P_0 C F f_\tau(t) + 2e^T C^T P_0 \nu) \quad (4.24)$$

Como A_o é Hurwitz, temos que $A_o^T P + P A_o = -Q$, $Q = Q^T > 0$. Sabe-se também que $e_y = C e$. Utilizando o majorante definido na hipótese (H4.3), e substituindo (4.14) na expressão (4.24), chega-se a :

$$\dot{V}_1(e) \leq (1 - \dot{\tau}(t)) \left(-\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 - 2e^T C^T P_0 C F f_\tau(t) - 2\rho e_y^T P_0 \frac{P_0 e_y}{\|P_0 e_y\|} \right), \quad (4.25)$$

$$\dot{V}_1(e) \leq (1 - \dot{\tau}(t)) \left(-\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 - 2\|P_0 e_y\| \|CF\| \alpha - 2 \frac{\|P_0 e_y\|^2}{\|P_0 e_y\|} \right), \quad (4.26)$$

$$\dot{V}_1(e) \leq (1 - \dot{\tau}(t)) (-\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 - 2\|P_0 e_y\| (\rho - \|CF\| \alpha)). \quad (4.27)$$

Da hipótese **(H4.2)** sabemos que $(1 - \dot{\tau}(t)) > 0$. Uma vez que $-\lambda_{\min}(Q)\|e\|^2 < 0$, aplicando (4.21), obtemos:

$$\dot{V}_1(e) \leq (1 - \dot{\tau}(t))(-2\|P_0 e_y\|\eta_0) \quad (4.28)$$

$$\dot{V}_1(e) < 0, \quad \forall e \neq 0 \quad (4.29)$$

mostrando que o erro $e(t)$ converge assintoticamente.

Agora, considere a função de Lyapunov $V_2(e_y) = e_y^T P_0 e_y$, com $e_y(t)$ de (4.18) e P_0 de (4.20). Derivando $V_2(e_y)$ ao longo das trajetórias de (4.18), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(e_y) &= (1 - \dot{\tau}) \left(e_y^T (P_0 \mathcal{A}_{22}^* + (\mathcal{A}_{22}^*)^T P_0) e_y(t) \right. \\ &\quad \left. + 2e_y^T P_0 \mathcal{A}_{21} \bar{e}_1(t) + 2e_y^T P_0 \nu - 2e_y^T P_0 \mathcal{F}_2 f(t) \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pela mudança de variáveis (4.16), verifica-se que $\mathcal{F}_2 = TF$ e, portanto, $\|\mathcal{F}_2\| = \|CF\|$. Considerando que $(\mathcal{A}_{22}^*)^T P_0 + P_0 (\mathcal{A}_{22}^*) < 0$, e aplicando (4.21), a seguinte inequação pode ser obtida:

$$\dot{V}_2(\bar{e}_y) \leq (1 - \dot{\tau}) \left(2\|P_0 e_y\| \|\mathcal{A}_{21} \bar{e}_1\| - 2\rho e_y^T P_0 \frac{P_0 e_y}{\|P_0 e_y\|} + 2\|P_0 e_y\| \|\mathcal{F}_2\| \alpha \right), \quad (4.31)$$

$$\dot{V}_2(\bar{e}_y) \leq (1 - \dot{\tau}) [-2\|P_0 e_y\| (\rho - \|\mathcal{A}_{21} \bar{e}_1\| - \|CF\| \alpha)], \quad (4.32)$$

$$\dot{V}_2(\bar{e}_y) \leq (1 - \dot{\tau}) (-2\|P_0 \bar{e}_y\| (\eta_0 - \|\mathcal{A}_{21} \bar{e}_1\|)) \quad (4.33)$$

Da expressão (4.29), pode ser visto que e_1 atinge o conjunto $\Omega_\eta = \{e_1 : \|\mathcal{A}_{21} \bar{e}_1\| < \eta_0 - \eta\}$ em tempo finito e nele permanece, para um escalar $\eta > 0$. Neste domínio, a inequação (4.33) pode ser reescrita como:

$$\dot{V}_2(\bar{e}_y) \leq (1 - \dot{\tau}) (-2\eta \|P_0 \bar{e}_y\|) \quad (4.34)$$

$$\dot{V}_2(\bar{e}_y) \leq -2\eta(1 - \dot{\tau}) \sqrt{\|P_0^{-1}\|} \sqrt{V_2} \quad (4.35)$$

que mostra que o erro de saída e_y é levado a zero em tempo finito e um modo deslizante é iniciado na superfície $\mathcal{S} = \{e : Ce = 0\}$. \square

Uma vez que o modo deslizante é atingido em tempo finito, temos $e_y(t) \equiv \dot{e}_y(t) \equiv 0$ e de (4.17), o erro $\bar{e}_1(t)$ será governado por:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) (\mathcal{A}_{11} \bar{e}_1(t)) \\ 0 = (1 - \dot{\tau}(t)) (\mathcal{A}_{21} \bar{e}_1(t) + \nu_{eq} - \mathcal{F}_2 f_\tau(t)) \end{cases} \quad (4.36)$$

onde ν_{eq} é o sinal de injeção de erro de saída equivalente (no mesmo sentido de controle equivalente [48]), que representa o sinal de controle contínuo necessário para manter o modo deslizante.

Corolário 4.2.1. *Nas condições do Teorema 4.2.1, o sinal de perturbação atrasado $f_\tau(t)$ em (4.5) pode ser reconstruído com precisão arbitrária, quando $\delta \rightarrow 0$, pela expressão*

$$\hat{f}_\tau(t) = \mathcal{F}_2^\dagger \nu_\delta \quad (4.37)$$

onde ν_δ é a aproximação contínua de ν_{eq} definida como:

$$\nu_\delta = -\rho \frac{P_0 e_y}{\|P_0 e_y\| + \delta} \quad (4.38)$$

para um pequeno parâmetro escalar $\delta > 0$, e \mathcal{F}_2^\dagger é a pseudo-inversa à esquerda de $\mathcal{F}_2 = T_L F_2$, dada por:

$$\mathcal{F}_2^\dagger \triangleq (\mathcal{F}_2^T \mathcal{F}_2)^{-1} \mathcal{F}_2^T. \quad (4.39)$$

Demonstração. Uma vez que pela hipótese **(H4.5)** a matriz F possui posto completa, a pseudo-inversa à esquerda de Moore-Penrose [89, Seção 6.3] para \mathcal{F}_2 existe como definida em (4.39). Desta forma, a estimativa \hat{f}_τ para o sinal de falha τ -atrasado $f_\tau(t)$ é dado pela expressão (4.37). Do Teorema 4.2.1, vê-se que o modo deslizante $e_y \equiv 0$ é atingido em tempo finito e o erro de observação de estados $\bar{e}_1(t) \rightarrow 0$ exponencialmente. Então, de acordo com (4.36), obtemos:

$$\nu_{eq} \rightarrow \mathcal{F}_2 f_\tau(t). \quad (4.40)$$

O sinal de injeção de erro de saída equivalente ν_{eq} pode ser aproximado por ν_δ dado pela expressão (4.38), com uma escolha de δ suficientemente pequeno, para se obter o grau de acurácia desejado [53]. \square

A principal vantagem do procedimento de deslocamento no tempo apresentado acima é a possibilidade de determinar os ganhos do observador sem a necessidade da utilização de métodos específicos para sistemas com atrasos, tal como *Lyapunov-Krasovskii* ou *Lyapunov-Razumikhin* [78, 79, 90]. Em geral, estes métodos restringem a duração do atraso a um valor suficientemente pequeno. Além disso, estas abordagens resultam em problemas de factibilidade de Inequações Matriciais Lineares (*LMI - Linear Matrix Inequalities*), adicionando uma maior complexidade numérica e analítica ao projeto do observador [81].

Na abordagem apresentada, um modo deslizante ideal pode ser alcançado na teoria, mesmo na presença de atrasos arbitrariamente longos, evitando na prática o problema de *chattering* de baixa frequência. O preço a ser pago é que a falha é identificada atrasada e existe um erro residual entre o sinal de falha real e sua estimativa.

No entanto, observadores projetados utilizando os métodos de *Lyapunov-Krasovskii* ou *Lyapunov-Razumikhin* também apresentam erros residuais e não identificam exatamente o sistema. Em [33], o observador é projetado utilizando uma saída atrasada tal como o sistema original de tal forma que o termo descontínuo depende do sinal de erro atrasado. Neste caso não é possível atingir um modo deslizante ideal e a reconstrução está sujeita aos efeitos de *chattering* (ver [33, Remark 3]).

A reconstrução de falha e estado atrasados pode ser utilizada em uma estratégia de controle que generaliza o *Preditor de Smith* [59] para atrasos variantes no tempo. Uma lei de controle pode ser projetada para estabilizar a saída do modelo atrasado. Então, a partir de um preditor em malha aberta, uma segunda malha é utilizada para atenuar ou rejeitar o efeito das perturbações não compensadas por causa do atraso.

4.2.2 Sistemas com incertezas de atraso e paramétricas

O conhecimento completo de todos os parâmetros da planta e do atraso $\tau(t)$ é pouco realista. Assim, é necessário acomodar alguma incerteza nas características da planta. Para isto, mostraremos que estas incertezas podem ser agrupadas como um termo adicional de perturbação, reduzindo o problema de reconstrução de falhas a formulação proposta por TAN e EDWARDS [29].

Primeiramente, considere que o atraso pode ser modelado como $\tau(t) = \hat{\tau} + \tau_v(t)$, onde $\hat{\tau}$ é um atraso de saída constante e conhecido e $\tau_v(t)$ o termo de incerteza variante no tempo. Adicionalmente, considere que as incertezas paramétricas podem ser agrupadas no sinal limitado $D\varsigma(x, t)$, $\|\varsigma(x, t)\| \leq \beta_\varsigma$, onde $\varsigma \in \mathbb{R}^l$, e $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$ é uma matriz de distribuição. Então, o sistema (4.1) se torna:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ff(t) + D\varsigma(x, t) \\ y(t) = Cx(t - \tau(t)) \end{cases} \quad (4.41)$$

Aplicando o procedimento de deslocamento no tempo, o sistema atrasado pode ser descrito como (ver (4.5)):

$$\begin{cases} \dot{x}_\tau(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) [Ax_\tau(t) + Bu_\tau(t) + Ff_\tau(t) + D\varsigma_\tau(x, t)] \\ y(t) = Cx_\tau(t) \end{cases} \quad (4.42)$$

onde $\varsigma_\tau(t) = \varsigma(t - \tau(t))$.

Uma vez que $\dot{\tau}(t)$ é desconhecido, o observador será projetado considerando apenas uma estimativa constante (nominal) do atraso $\hat{\tau}$, usando a equação (4.9)

com $\dot{\tau}(t) = 0$ e usando a estimativa do sinal de entrada atrasado $\hat{u}(t) = u(t - \hat{\tau})$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_\tau(t) = A\hat{x}_\tau(t) + B\hat{u}(t) - G_l e_y + G_n \nu \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}_\tau(t) \end{cases} \quad (4.43)$$

onde $e_y(t)$ é definido em (4.11) e ν em (4.14). As matrizes G_n e G_l são determinadas como em (4.15) e (4.19) respectivamente.

O erro de observação de estados apresenta a seguinte dinâmica:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - G_l C)e(t) + G_n \nu - F f_\tau(t) + B\tilde{u}(t) - D\varsigma_\tau(t) \\ &+ \dot{\tau}(t) [Ax_\tau(t) + Bu_\tau(t) + F f_\tau(t) + D\varsigma_\tau(t)] \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde $f_\tau = f(t - \tau(t))$ e $\tilde{u}(t) = \hat{u}(t) - u_\tau(t)$.

Pode ser visto na equação (4.44) termos atrasados incertos dependentes de $u(t)$, $u_\tau(t)$ e $x_\tau(t)$ estão presentes na dinâmica do erro. Para limitar sua influência no projeto do ganho do termo descontínuo ρ e no desempenho do observador, assumiremos as seguintes hipóteses adicionais:

(H4.7) O sistema é estável ou está estabilizado, de tal forma que a matriz A é Hurwitz.

(H4.8) O sinal $u(t)$ representa uma perturbação externa conhecida (mensurável). Além disso, é limitado em norma por $\|u(t)\| \leq \beta_u$, por uma constante conhecida $\beta_u > 0, \forall t$.

Para o erro de estimação $\tilde{u}(t)$, da hipótese **(H4.8)** também podemos assumir:

(H4.9) O erro da estimativa de entrada $\tilde{u}(t)$ é zero se o atraso é exatamente conhecido e aumenta com a sua incerteza $|\tau_v(t)| = |\hat{\tau} - \tau| < \epsilon_v$. Portanto, pode ser assumido que uma função classe \mathcal{K} [84], $\beta_v(\epsilon_v)$ existe de tal forma que $\|\tilde{u}(t)\| < \beta_v(\epsilon_v)$.

Nota 4.2.3. *As condições assumidas na hipótese **(H4.7)** podem surgir quando o sistema é estabilizado localmente, mas monitorada em uma localidade remota sujeita a atrasos, onde será realizada a reconstrução da falha. Este é um preço a ser pago para podermos considerar sistemas incertos sujeitos a atrasos arbitrariamente longos. Como discutido na literatura de sistemas atrasados, se sistemas instáveis forem assumidos, a incerteza de atraso deve ser pequena o suficiente para que o termo atrasado $x_\tau(t)$ possa ser propriamente compensado na lei de controle.*

Vamos definir $M = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_x)}{\lambda_{\min}(P_x)}}$, $\kappa_1 = \|P_x B\|$, $\kappa_2 = \|P_x F\|$, e $\kappa_3 = \|P_x D\|$, onde $P_x > 0$ é uma matriz simétrica utilizada na função de Lyapunov $V_x(x) = x^T P_x x$. Baseado na hipótese **(H4.7)**, o sistema (4.41) é BIBS (*bounded-input, bounded-state*) estável. Das hipóteses **(H4.3)**, **(H4.8)** e lembrando que $\|\varsigma(x, t)\| \leq \beta_\varsigma$, pode-se ver

que $x(t)$ estará limitado a:

$$\|x\| \leq Mc_\epsilon, \quad (4.45)$$

onde $c_\epsilon = 2(\kappa_1\beta_u + \kappa_2\alpha + \kappa_3\beta_\varsigma) + \epsilon$, para $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. Uma vez que $x(t)$ é limitado e considerando o limite r_d para $\dot{\tau}(t)$ na hipótese **(H4.2)**, é possível agregar os três últimos termos de (4.44) como um sinal limitado em norma $\xi(t)$, $\|\xi(t)\| \leq \bar{\xi}$, tal que:

$$\xi(t) \triangleq B\tilde{u}(t) - D\varsigma_\tau(t) + \dot{\tau}(t)[Ax_\tau(t) + Bu_\tau(t) + Ff_\tau(t) + D\varsigma_\tau(t)], \quad (4.46)$$

$$\bar{\xi} \triangleq \|B\|\beta_v(\epsilon_v) + \frac{r_d\|B\|\beta_u}{2} + 2r_d\|A\|Mc_\epsilon + r_d\|F\|\alpha + (1 + r_d)\|D\|\beta_\varsigma. \quad (4.47)$$

O vetor de incerteza $\xi = [\xi_1^T \ \xi_2^T]$ é particionado de acordo com vetor de erro $\bar{e} = [\bar{e}_1^T \ \bar{e}_2^T]$. Então, após a mudança de coordenadas (4.16) e aplicando (4.19) e (4.15), as equações para a dinâmica do erro se tornam:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) = \mathcal{A}_{11}\bar{e}_1(t) + (\xi_1(t) + L\xi_2(t)), \\ \dot{\bar{e}}_2(t) = \mathcal{A}_{21}\bar{e}_1(t) + \mathcal{A}_{22}^*e_y(t) + \nu - \mathcal{F}_2f_\tau(t) + T\xi_2(t). \end{cases} \quad (4.48)$$

Então, o seguinte teorema pode ser enunciado

Teorema 4.2.2. *Considere o sistema τ -atrasado incerto (4.42), satisfazendo as hipóteses **(H4.1)** a **(H4.9)**, e seu observador (4.43), onde a matriz G_n é determinada por 4.15 e G_l é dada por 4.19. Se o ganho ρ do termo descontínuo (4.14) for escolhido de acordo com:*

$$\rho \geq 2 \frac{\|TA_{21}\|\mu_0}{\|P\|} \bar{\xi} + \|TF_2\|\alpha + \|TM_2\|\bar{\xi} + \eta_0 \quad (4.49)$$

onde $M_2 = [0^{p \times (n-p)} \ I^{p \times p}]$, $\mu_0 = -\lambda_{\max}((A - G_l C)^T P + P(A - G_l C))$, com $P > 0$ dada em (4.20), $\bar{\xi}$ dada em (4.47) e η_0 sendo um escalar positivo arbitrário, então o erro de observação de estado $e(t)$ é limitado e o erro de saída $e_y(t)$ atinge zero em tempo finito $t = t_s$ de tal forma que um modo deslizante é iniciado em $\mathcal{S} = \{e : e_y = Ce = 0\}$, $\forall t \geq t_s$.

Demonstração. Substituindo (4.46) em (4.44), obtém-se:

$$\dot{e}(t) = (A - G_l C)e(t) + G_n \nu - Ff_\tau(t) + \xi(t). \quad (4.50)$$

Uma vez que os termos incertos em (4.50) foram agrupados no sinal limitado $\xi(t)$, é necessário apenas seguir os passos de [29, Lemma 1 and Proposition 2], usando as funções de Lyapunov $V_3(e) = e^T P e$, com $e(t)$ definida em (4.50), para a prova

do limite do erro, e $V_4(e_y) = e_y^T P_0 e_y$, com $e_y(t)$ definida em (4.48), para a prova do atingimento do modo deslizante. Considere a função de Lyapunov $V_1(e) = e^T P e$, com $e(t)$ de (4.12) e $P > 0$ de (4.20), para a prova de convergência. Seja

$$A_o \triangleq A - G_l C. \quad (4.51)$$

Derivando a função de Lyapunov ao longo das trajetórias de (4.50), obtêm-se:

$$\dot{V}_1(e) = (1 - \dot{\tau}(t)) (e^T (A_o^T P + P A_o) e - 2e^T P F f_\tau + 2e^T P G_n \nu + 2e^T P \xi(t)) \quad (4.52)$$

Selecionando por construção $P G_n \triangleq C^T P_0$ e $P F \triangleq C^T P_0 C F$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(e) = (1 - \dot{\tau}(t)) & (e^T (A_o^T P + P A_o) e - 2e^T C^T P_0 C F f_\tau(t) \\ & + 2e^T C^T P_0 \nu + 2e^T P \xi(t)) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Como A_o é Hurwitz, temos que $A_o^T P + P A_o = -Q$, $Q = Q^T > 0$. Sabe-se também que $e_y = C e$. Utilizando o majorante definido na hipótese **(H4.3)**, e substituindo (4.49) na expressão (4.53), chega-se a :

$$\dot{V}_1(e) \leq (1 - \dot{\tau}(t)) (-\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + 2\|e\| \|P\| \bar{\xi} - 2\|P_0 e_y\| (\rho - \|CF\| \alpha)), \quad (4.54)$$

$$\dot{V}_1(e) \leq (1 - \dot{\tau}(t)) (-\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + 2\|e\| \|P\| \bar{\xi}), \quad (4.55)$$

$$\dot{V}_1(e) \leq (1 - \dot{\tau}(t)) \|e\| (-\lambda_{\min}(Q) \|e\| + 2\|P\| \bar{\xi}). \quad (4.56)$$

Isto mostra que o erro e irá atingir um conjunto $\Omega_e = \{e : \|e\| < 2\|P\| \bar{\xi} / (\lambda_{\min}(Q)) + \varepsilon\}$, para $\varepsilon > 0$ e nele permanecerá.

Agora, considere a função de Lyapunov $V_2(e_y) = e_y^T P_0 e_y$, com $e_y(t)$ de (4.48) e P_0 de (4.20). Derivando $V_2(e_y)$ ao longo das trajetórias de (4.48), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(e_y) = (1 - \dot{\tau}) & (e_y^T (P_0 \mathcal{A}_{22}^* + (\mathcal{A}_{22}^*)^T P_0) e_y(t) + e_y^T P_0 T M_2 \xi \\ & + 2e_y^T P_0 \mathcal{A}_{21} \bar{e}_1(t) + 2e_y^T P_0 \nu - 2e_y^T P_0 \mathcal{F}_2 f(t)). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Pela mudança de variáveis (4.16), verifica-se que $\mathcal{F}_2 = T F$ e, portanto, $\|\mathcal{F}_2\| = \|CF\|$. Considerando que $(\mathcal{A}_{22}^*)^T P_0 + P_0 (\mathcal{A}_{22}^*) < 0$, e aplicando (4.21), a seguinte inequação pode ser obtida:

$$\dot{V}_2(\bar{e}_y) \leq (1 - \dot{\tau}) [-2\|P_0 e_y\| (\rho - \|\mathcal{A}_{21} \bar{e}_1\| - \|CF\| \alpha - \|T M_2\| \bar{\xi})], \quad (4.58)$$

$$\dot{V}_2(\bar{e}_y) \leq (1 - \dot{\tau}) (-2\eta_0 \|P_0 \bar{e}_y\|) \quad (4.59)$$

$$\dot{V}_2(\bar{e}_y) \leq -2(1 - \dot{\tau}) \eta_0 \sqrt{\|P_0^{-1}\|} \sqrt{V_2} \quad (4.60)$$

que mostra que o erro de saída e_y é levado a zero em tempo finito e um modo

deslizante é iniciado na superfície $\mathcal{S} = \{e : Ce = 0\}$. □

Durante o modo deslizante $e_y(t) \equiv 0$, a equação da dinâmica do erro (4.48) se torna:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) = \mathcal{A}_{11}\bar{e}_1(t) + (\xi_1(t) + L\xi_2(t)), \\ 0 = \mathcal{A}_{21}\bar{e}_1(t) + \nu_{eq} - \mathcal{F}_2 f_\tau(t) + T\xi_2(t). \end{cases} \quad (4.61)$$

Ao contrário do caso onde não há incertezas paramétricas ou de duração de atraso ($\xi(t) = 0$), aqui o erro \bar{e}_1 não converge a zero e depende da perturbação $\xi(t)$. No entanto, o efeito das incertezas pode ser minimizado de acordo com o procedimento a seguir.

Considere a matriz de escala $W \triangleq \begin{bmatrix} W_1 & F_0^{-1} \end{bmatrix}$ onde $W_1 \in \mathbb{R}^{q \times (p-q)}$ é uma matriz a ser projetada, e F_0 é o bloco inferior da matriz F em (4.4). A matriz W será utilizada para reconstrução do sinal de falha através da expressão:

$$\hat{f}_\tau(t) = WT^T \nu_{eq} \quad (4.62)$$

Multiplicando a segunda equação de (4.61) por WT^T e rearrumando os termos, podemos obter:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) = \mathcal{A}_{11}\bar{e}_1(t) + (\xi_1(t) + L\xi_2(t)) \\ \hat{f}_\tau(t) = -WT^T \mathcal{A}_{21}\bar{e}_1(t) - W\xi_2(t) + f_\tau(t) \end{cases} \quad (4.63)$$

Desta forma, a estimativa do sinal de falha é dada por:

$$\hat{f}_\tau(t) = f_\tau(t) + G(s)\xi(t) \quad (4.64)$$

onde $G(s)$ é uma função de transferência entre o sinal $\xi(t)$ e a estimativa do sinal de falha e é definida como:

$$G(s) = -WT^T \mathcal{A}_{21} [(sI - \mathcal{A}_{11})^{-1}(M_1 + LM_2)] - WM_2 \quad (4.65)$$

onde $M_1 = [I^{(n-p) \times (n-p)} \quad 0^{(n-p) \times p}]$ e $M_2 = [0^{p \times (n-p)} \quad I^{p \times p}]$. O ganho \mathcal{H}_∞ da função de transferência $G(s)$, γ , pode ser minimizado utilizando o *Bounded Real Lemma* [54] de forma a obter um valor apropriado para a matriz W :

$$\begin{bmatrix} \hat{P}\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{11}^T\hat{P} & * & * \\ -(M_1 + LM_2)^T\hat{P} & -\gamma I & * \\ -WA_{21} & -WM_2 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.66)$$

A matriz $\hat{P} > 0$, e as matrizes L e W devem ser determinadas de forma a minimizar γ , enquanto garantam que $P > 0$ com a forma apresentada em (4.20) e que $(A - G_l C)^T P + P(A - G_l C) = -Q$, $Q = Q^T > 0$.

4.3 Exemplos e Simulações Numéricas

Considere o exemplo proposto por [27] e utilizado também nas referências [32, 50], de um pêndulo invertido sobre um carrinho, linearizado ao redor do ponto de equilíbrio. As matrizes para a representação em espaço de estados (4.1) já transformados para a forma canônica (4.4) são:

$$A = \begin{bmatrix} -0.1738 & 0 & 36.9771 & -6.2589 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0091 & 0 & 1.9333 & -1.9872 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1.0095 \\ 0 \\ 0 \\ -0.3205 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.3205 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

O sistema foi estabilizado por realimentação de estados, com os pólos de malha fechada localizados em $\{-4.2, -4.4, -4.6, -4.8\}$. O observador irá reconstruir a falha atrasada $f_\tau(t)$ utilizando a entrada exógena $u(t)$ e a saída do sistema $y(t)$.

O observador para a reconstrução da falha (4.9) é obtido através dos seguintes passos:

1. Determine a matriz $L = [L_1 \ 0] \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$, com $L_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (p-q)}$, tal que $LF_2 = 0$ e $A_{11} + LA_{21}$ seja Hurwitz. Esta solução não é única. Neste exemplo, escolhemos $L = [0 \ -9.83 \ 0]$ que trivialmente faz com que $A_{11} + LA_{21} = [-10]$.
2. Utilizando L e T (ver (4.4)), determine T_L em (4.16), obtendo a matriz transformada $\mathcal{A} = T_L A T_L^{-1}$ e suas partições.
3. Escolha a matriz estável $\mathcal{A}_{22}^* \in \mathbb{R}^{(p \times p)}$ e determine a matriz G_l em (4.19) utilizando T_L e as partições de \mathcal{A} . Esta solução também não é única. Neste exemplo, escolhemos $\mathcal{A}_{22}^* = \text{diag}(-15, -16, -17)$ para alocar os pólos de $A - G_l C$ em $\{-10, -15, -16, -17\}$.
4. Então, de (4.15) e (4.19) obtemos:

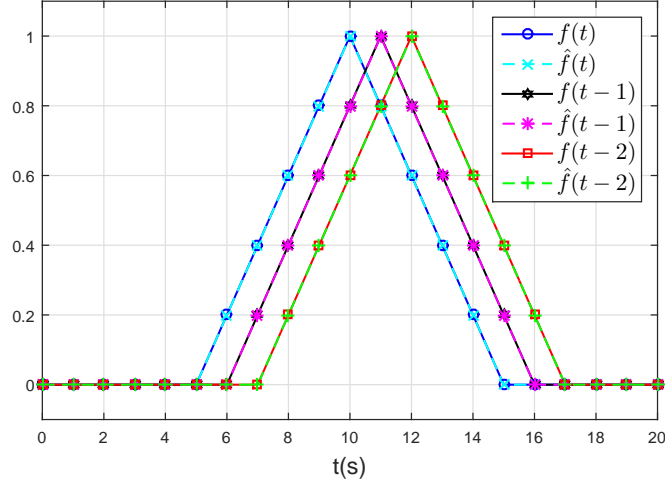


Figura 4.1: Comparação da reconstrução de sinal de falha para três durações de atraso de medição.

$$G_n = \begin{bmatrix} 0 & 9.83 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G_l = \begin{bmatrix} 0 & 192.49 & 6.29 \\ -15 & 0 & -1 \\ 0 & 25.82 & 0 \\ 0 & 1.84 & 1 - 5.01 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

5. Escolha P_0 satisfazendo $(\mathcal{A}_{22}^*)^T P_0 + P_0 (\mathcal{A}_{22}^*) < 0$. Trivialmente, $P_0 = I$.

O sinal de falha utilizado foi um pulso triangular com duração de 10 segundos, iniciando aos 5 segundos de simulação, tal como o utilizado no artigo de EDWARDS *et al.* [27].

4.3.1 Atraso Constante Conhecido

O ganho $\rho = -3$ foi escolhido de forma a atender a inequação (4.21), uma vez que para observadores a escolha de η_0 não é crítica. A Figura 4.1 mostra o resultado do sistema apresentando atrasos de medição constante $\tau = 1s$ e $\tau = 2s$, bem como o a reconstrução em sistema sem atraso. Pode-se observar que não ocorre *chattering* mesmo com um valor para δ muito baixo, da ordem de 1×10^{-4} . Nenhum parâmetro precisou ser reajustado ou recalculado para as diferentes durações de atraso.

4.3.2 Atraso Variante no Tempo Conhecido

A Figura 4.2 mostra o resultado do sistema apresentando atrasos de medição variante no tempo $\tau(t) = 1, 1 + 0,5 \sin(0,3t)$. O mesmo valor pode ser mantido para $\delta = 1 \times 10^{-4}$. O sistema foi capaz de reconstruir a falha atrasada sem *chattering*.

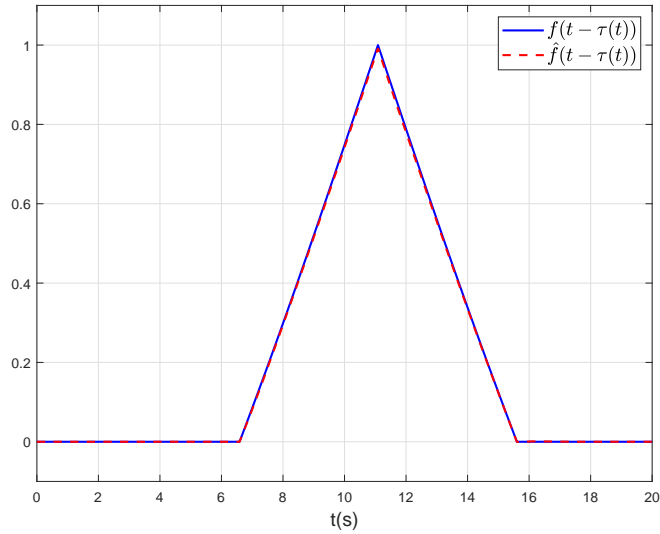


Figura 4.2: Reconstrução do sinal de falha do sistema de exemplo, sujeito a um atraso variante no tempo $\tau(t) = 1, 1 + 0,5 \sin(0,3t)$ e com uma entrada $u(t) = \sin(0,5t)$

4.3.3 Atraso Constante com Incerteza na Duração

Para os casos com incertezas, foi aplicada Uma entrada exógena $u(t) = 1 \sin(0,5t)$. Passos adicionais foram necessários ao projeto do observador:

1. Determinar ρ satisfazendo (4.49). Para o nosso exemplo, foi utilizado o valor constante $\rho = -3$.
2. Determinar a matriz de escala $W = [W_{1,1} \quad W_{1,2} \quad F_0^{-1}]$ utilizada na equação de reconstrução (4.62). Como $\xi(t) = B\tilde{u}(t)$, a equação (4.64) pode ser reescrita como $\hat{f}_\tau(t) = f_\tau(t) + G_u(s)\tilde{u}(t)$, onde $G_u(s) = G(s)B$. Substituindo valores, obtemos:

$$G_u(s) = -\frac{s - 1.01W_{1,2} + 9.97}{s + 10}. \quad (4.69)$$

Da função de transferência acima, pode ser visto que $W_{1,1}$ não influencia $G_u(s)$ e, portanto, foi escolhido como zero. O valor de $W_{1,2}$ foi determinado de forma manual, uma vez que se tratava do ajuste de um único parâmetro, como $W_{1,2} = 7.5$ utilizando o diagrama de Bode de $G_u(s)$ de tal forma que a matriz $W = \begin{bmatrix} 0 & 7.5 & -3.12 \end{bmatrix}$ minimiza o erro de reconstrução da falha para menos de 1%.

A Figura 4.1 mostra o resultado do sistema apresentando atrasos de medição constante $\tau = 1, 1s$, $\tau = 2, 2s$ e $\tau = 3, 3s$ subestimado pelos valores $\hat{\tau} = 1s$, $\hat{\tau} = 2s$ e $\hat{\tau} = 3s$. Novamente, não ocorreu o *chattering* mesmo com um valor para δ muito

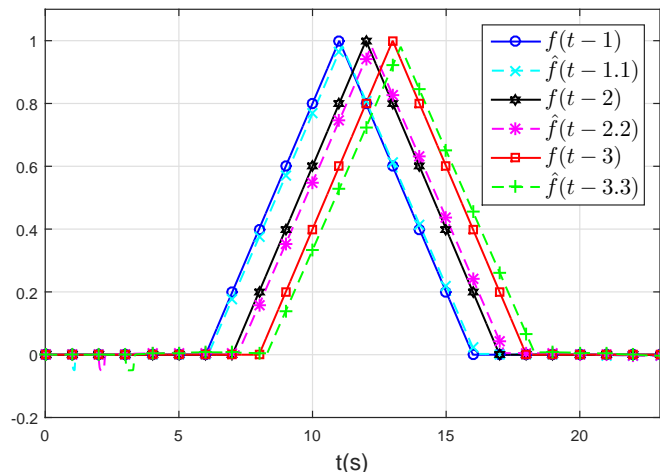


Figura 4.3: Comparação da reconstrução de sinal de falha para três durações de atraso de medição, a partir de uma estimativa de duração de atraso subestimada em 10% do valor nominal.

baixo, da ordem de 1×10^{-4} . Nenhum parâmetro precisou ser reajustado ou recalculado para as diferentes durações de atraso.

4.3.4 Atraso Variante no Tempo com Incerteza na Duração

A Figura 4.4 mostra o resultado do sistema apresentando atrasos de medição variante no tempo $\tau(t) = 1 + 0,5 \sin(0,3t)$, estimado por um atraso constante $\hat{\tau} = 1$. Uma entrada $u(t) = 1 \sin(0,5t)$ foi aplicada. O sistema foi capaz de reconstruir a falha atrasada sem *chattering*, mas devido a necessidade de aumentar o valor da modulação do termo descontínuo do observador ρ , foi necessário ajustar o valor da constante δ utilizada para a aproximação contínua ν_δ . Ainda que muito pequena, já que o ganho da transferência entre o erro de estimação de entrada \tilde{u} e a reconstrução da falha foi minimizado pela matriz de escala W , ainda é possível ver a influência das incertezas na reconstrução do sinal.

4.4 Aplicação a Sistemas Amostrados

Nesta seção iremos considerar o caso de sistemas com saída amostrada por um intervalo de amostragem constante h , o que ocorre na prática quando o sinal medido não está disponível continuamente. Em [32], a saída amostrada é reconstruída por um retentor de ordem zero (*Zero-Order Hold* – ZOH), que é modelado por um atraso de medição variante no tempo. Ao contrário disto, a ideia apresentada aqui é reconstruir o sinal de saída em tempo contínuo a partir das amostras. Então, o sinal original amostrado pode ser visto como um sinal em tempo contínuo com um atraso de medição constante de um intervalo de amostragem. Para melhorar a

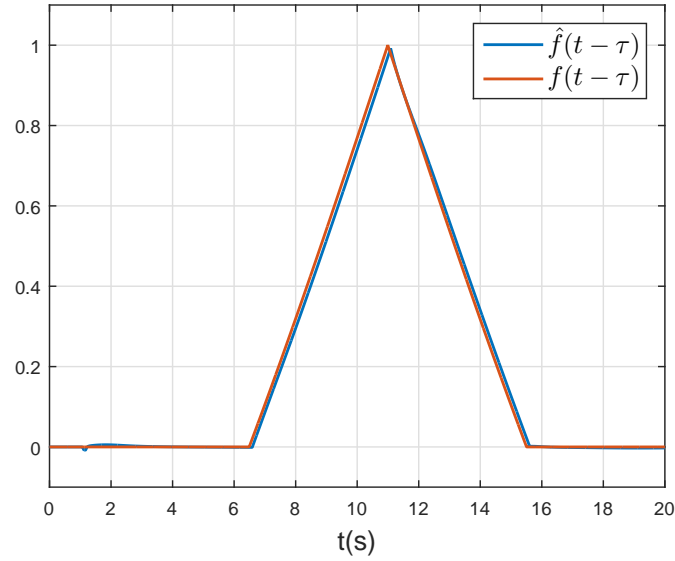


Figura 4.4: Reconstrução do sinal de falha do sistema de exemplo, sujeito a um atraso variante no tempo $\tau(t) = 1, 1 + 0,5 \sin(0,3t)$, estimado por um atraso constante $\hat{\tau} = 1, 1$, e sujeito a uma entrada $u(t) = \sin(0,5t)$

qualidade da reconstrução, é possível aguardar por mais amostras e usar métodos de interpolação mais eficientes. Isso é equivalente a reduzir o problema *deliberadamente* a um sistema com atrasos de medição constante de $n_s \in \mathbb{N}$ períodos de amostragem, onde n_s é o número de amostras. Então, o método de deslocamento no tempo apresentado na seção 4.2 é aplicado diretamente ao sistema reconstruído.

4.4.1 Definição do problema

Considere um sistema linear invariante no tempo com saída amostrada

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ff(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ y_k = y(kh) \end{cases} \quad (4.70)$$

onde $k \in \mathbb{N}$ é o índice da amostra, e h é o período de amostragem. O sinal de saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ não está disponível diretamente, apenas sua versão amostrada y_k que só é válida nos instantes $t = kh$. O sinal de entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é mensurável e o estado do sistema $x(t) \in \mathbb{R}^n$ não estão disponíveis. O sinal desconhecido de perturbação $f(t) \in \mathbb{R}^q$, $q \leq p < n$ representa o efeito de uma falha do atuador. Considere que as hipóteses **(H4.1)**-**(H4.6)** também são válidas para o sistema (4.70).

O objetivo é estimar o sinal contínuo no tempo de falha $f(t)$ dos sinais disponíveis e do modelo da planta.

4.4.2 Reconstruindo o sinal em tempo contínuo de suas amostras

O método mais utilizado para reconstrução do sinal $y(t)$ em tempo contínuo é o filtro retentor de ordem zero (*Zero-Order Hold* – ZOH). De uma forma geral, a saída reconstruída apresenta um erro de aproximação que, para observadores, se comporta como uma perturbação na medição de saída. Apesar dos SMOs possuírem alguma tolerância a perturbações, uma perturbação de saída pode deteriorar fortemente seu desempenho e filtros causais como o ZOH podem levar a um erro de aproximação inaceitável para o SMO. Assim, um filtro de reconstrução mais apropriado deve ser escolhido de tal forma que o erro de aproximação seja pequeno o suficiente. Filtros de reconstrução por interpolação apresentam menores erros de aproximação [91] mas tem a desvantagem de serem não causais.

A estratégia proposta, como delineada acima, é intencionalmente permitir um atraso de $n_s \in \mathbb{N}$ períodos de amostragem o sinal de saída reconstruída y_R dada por

$$y_R(t) = Cx(t - n_s h) + e_r(t). \quad (4.71)$$

onde e_r é o erro de reconstrução.

Das equações (4.70) e (4.71), o sistema resultante com saída reconstruída em tempo contínuo é descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ff(t) \\ y_R(t) = Cx(t - n_s h) + e_r(t) \end{cases} \quad (4.72)$$

Uma vez que o atraso é constante e conhecido, a hipótese **(H4.2)** é válida com $\tau = n_s h$ and $\dot{\tau}(t) = 0$, é o método de deslocamento no tempo apresentado na seção 4.2 pode ser diretamente aplicada para reconstruir o sinal de perturbação atrasado $f_\tau \triangleq f(t - n_s h)$. Para isto, o SMO é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_\tau(t) = A\hat{x}_\tau(t) + Bu_\tau(t) - G_l e_y + G_n \nu \\ e_y(t) = \hat{y}_R(t) - y_R(t) \\ \hat{y}_R(t) = C\hat{x}_\tau(t) \end{cases} \quad (4.73)$$

onde $\hat{x}_\tau(t) = \hat{x}(t - n_s h)$ é a estimativa do estado atrasado e $u_\tau(t) = u(t - n_s h)$.

O termo descontínuo de injeção de erro ν é dado por:

$$\nu = -\rho \frac{P_0 e_y}{\|P_0 e_y\|} \quad (4.74)$$

O ganho ρ é escolhido de forma que o modo deslizante $e_y(t) \equiv 0$ seja atingido em tempo finito. As matrizes $P_0 > 0$, G_l e G_n são projetadas como na seção 4.2.1.

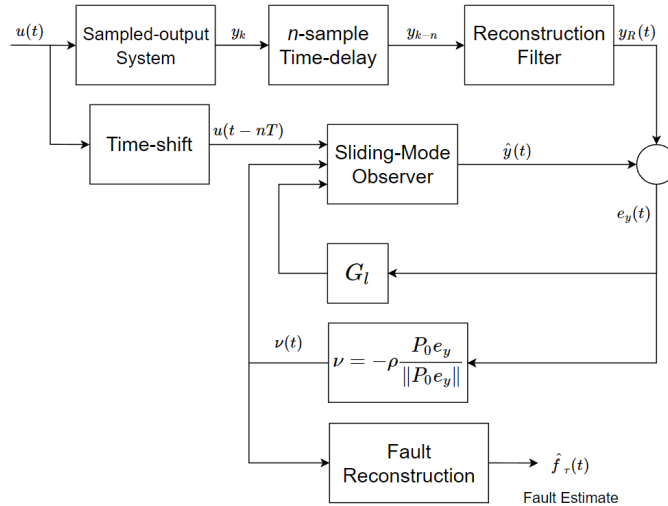


Figura 4.5: Diagrama de blocos da estratégia de reconstrução de falhas proposta para sistemas com saída amostrada.

4.4.3 Métodos para reconstrução de sinais amostrados

O método mais simples de reconstrução de sinais amostrados é o retentor de ordem zero (ZOH), no qual o valor apresentado é mantido constante até que um novo valor esteja disponível:

$$y_{ZOH}(t) = y(kh), \quad \forall t \in [kh, (k+1)h). \quad (4.75)$$

Como este filtro é causal e sua implementação é bastante simples, é o mais comumente usado na maior parte das aplicações.

Outro filtro causal é o retentor de primeira ordem (*First-Order Hold - FOH*):

$$y_{FOH}(t) = y(kh) + [y(kh) - y((k-1)h)] \frac{t - kh}{h},$$

$$\forall t \in [kh, (k+1)h). \quad (4.76)$$

O filtro retentor de primeira ordem por interpolação (*Interpolation First-Order Hold - IFOH*) também pode ser utilizado para reconstruir dados amostrados, através de uma interpolação linear entre a amostra atual e a próxima [91]. Uma vez que ambas as amostras são utilizadas na interpolação, o erro é zero a cada nova amostra e não há saltos descontínuos. Por outro lado, devido a sua dependência de uma amostra futura, o IFOH é um processo não causal. Entretanto, se permitirmos o atraso de uma amostra, o IFOH pode ser implementado como um algoritmo causal:

$$y_{IFOH}(t) = y((k-1)h) + [y(kh) - y((k-1)h)] \frac{t - kh}{h},$$

$$\forall t \in [kh, (k+1)h). \quad (4.77)$$

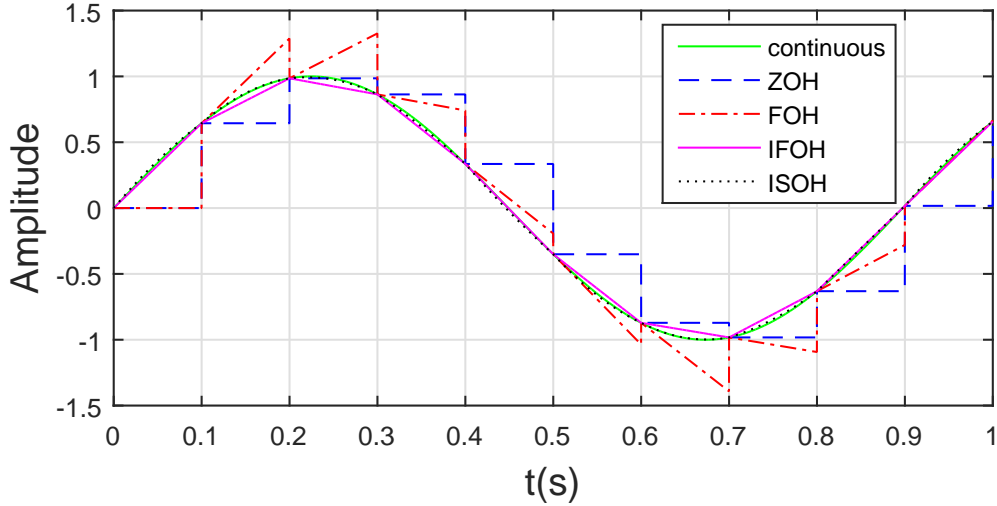


Figura 4.6: Comparação entre os filtros de reconstrução ZOH, FOH, IFOH, e ISOH para o sinal $y(t) = \sin(5t)$ amostrado a um período $T_s = 0,1s$.

O artigo de LOZANO *et al.* [92] comparou o IFOH ao ZOH, mostrando que o primeiro apresenta menor distorção harmônica total, apesar do maior custo computacional. O artigo de ZHANG e CHONG [93] apresenta um retentor de segunda ordem (*Second-Order Hold - SOH*) baseado na expansão de séries de Taylor para aumentar a acurácia de reconstrução. Por ser extrapolativo, o SOH apresenta saltos descontínuos a cada nova amostra, tal como o FOH.

Aqui, propomos o uso de um retentor de segunda ordem por interpolação (*Interpolation Second-Order Hold - ISOH*), obtido aguardando-se duas amostras de atraso e utilizando o método de interpolação polinomial de Lagrange [94] para reconstruir o sinal. Uma vez que as amostras são utilizadas para a interpolação, não ocorrem saltos descontínuos. A expressão para o ISOH pode ser escrita na forma matricial como:

$$y_{ISOH}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 \\ 1 & 2h & (2h)^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y((k-2)h) \\ y((k-1)h) \\ y(kh) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix},$$

$$\forall t \in [kh, (k+2)h) \quad (4.78)$$

A figura 4.6 apresenta um sinal senoidal amostrado reconstruído utilizando todos os filtros apresentados, e comparados com o ZOH e com o sinal original em tempo contínuo.

4.4.4 Influência do erro de reconstrução

Das equações (4.72) e (4.73), o erro de observação de estado $e(t) = \hat{x}_\tau(t) - x_\tau(t)$ é governado por:

$$\dot{e}(t) = Ae(t) - G_l e_y(t) + G_n \nu - F f_\tau(t), \quad (4.79)$$

onde $x_\tau(t) = x(t - n_s h)$ e $f_\tau = f(t - n_s h)$, são o estado e o sinal de falha atrasados, respectivamente.

Aplicando a mudança de coordenadas $\bar{e} = T_L e(t)$ como em (4.16), a dinâmica do erro pode ser escrita como :

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) = \mathcal{A}_{11} \bar{e}_1(t) + \mathcal{A}_{12} \bar{e}_2(t) - \mathcal{G}_{l,1} e_y(t) \\ \dot{\bar{e}}_2(t) = \mathcal{A}_{21} \bar{e}_1(t) + \mathcal{A}_{22} \bar{e}_2(t) - \mathcal{G}_{l,2} e_y(t) + \nu - \mathcal{F}_2 f_\tau(t) \end{cases} \quad (4.80)$$

Da estrutura de C em (4.4) e T_L em (4.16) pode ser visto que $\bar{e}_2(t) = Ce(t)$. Então, da equação (4.73), verifica-se que:

$$e_y(t) = Ce(t) - e_r(t) = \bar{e}_2(t) - e_r(t) \quad (4.81)$$

$$\dot{e}_y(t) = \dot{\bar{e}}_2(t) - \dot{e}_r(t) \quad (4.82)$$

Substituindo (4.81) e (4.82) em (4.80), obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) &= \mathcal{A}_{11} \bar{e}_1(t) + \mathcal{A}_{12}(e_y(t) + e_r(t)) - \mathcal{G}_{l,1} e_y(t) \\ \dot{\bar{e}}_2(t) + \dot{e}_r(t) &= \mathcal{A}_{21} \bar{e}_1(t) + \mathcal{A}_{22}(e_y(t) + e_r(t)) - \mathcal{G}_{l,2} e_y(t) + \nu - \mathcal{F}_2 f(t) \end{cases} \quad (4.83)$$

Rearrmando os termos, a dinâmica do erro é descrita então como:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) = \mathcal{A}_{11} \bar{e}_1(t) + (\mathcal{A}_{12} - \mathcal{G}_{l,1}) e_y(t) + \mathcal{A}_{12} e_r(t) \\ \dot{\bar{e}}_2(t) = \mathcal{A}_{21} \bar{e}_1(t) + (\mathcal{A}_{22} - \mathcal{G}_{l,2}) e_y(t) + \nu - \mathcal{F}_2 f(t) + \mathcal{A}_{22} e_r(t) - \dot{e}_r(t) \end{cases} \quad (4.84)$$

Para analisar a influência do erro de reconstrução, a seguinte hipótese será adotada:

(H4.10) Para um filtro reconstrutor interpolador de ordem n_s , a saída $y(t)$ e sua $(n_s + 1)$ -ésima derivada, $y^{(n_s+1)}(t)$, são contínuas no intervalo $t \in [(k - n)h, kh]$ e $y^{(n+1)}(t)$ é limitada em norma por uma constante conhecida $\bar{y}^{(n+1)}$,

$$\left\| \frac{d^{(n+1)}y(t)}{dt^{(n+1)}} \right\| \leq \bar{y}^{(n+1)}. \quad (4.85)$$

Então, um limite para o erro de reconstrução e_r (4.71) para uma interpolação poli-

nomial de ordem n_s pode ser determinada por [94, Teorema 6.2]:

$$\|e_r(t)\| \leq \frac{M_{n_s+1}}{(n_s+1)!} \pi_{n_s+1}(t), \quad \forall t \in [(k-n_s)h, kh], \quad (4.86)$$

onde

$$\begin{aligned} \pi_{n_s+1}(t) &= (t - kh)(t - (k-1)h) \dots (t - (k-n_s)h), \\ M_{n_s+1} &= \max_{\zeta \in ((k-n_s)h, kh)} \|y^{(n_s+1)}(\zeta)\|. \end{aligned}$$

Além disso, para $n_s \geq 1$, um limite para $\dot{e}_r(t)$ pode ser escrito como [94, Corollary 6.1]:

$$\|\dot{e}_r(t)\| \leq \frac{(n_s h)_s^n M_{n_s+1}}{n_s!}, \quad \forall t \in [(k-n_s)h, kh]. \quad (4.87)$$

Para o ZOH, aplicando $n_s = 0$, pode ser visto que

$$\|e_r(t)\| \leq h \max_{\zeta \in (kh, (k+1)h)} \|\dot{y}(\zeta)\| \leq h\bar{y}^{(1)}. \quad (4.88)$$

A derivada do erro de reconstrução \dot{e}_r não é limitada em norma, uma vez que no ZOH o erro de reconstrução apresenta um salto descontínuo a cada nova amostra.

Para o caso do IFOH ($n_s = 1$), o erro de reconstrução é dado por:

$$\|e_r(t)\| \leq \frac{h^2}{8} \max_{\zeta \in ((k-1)kh, kh)} \|\ddot{y}(\zeta)\| \leq \frac{h^2}{8} \bar{y}^{(2)}, \quad (4.89)$$

$$\|\dot{e}_r(t)\| \leq h\bar{y}^{(2)}. \quad (4.90)$$

Para o ISOH ($n_s = 2$), temos:

$$\|e_r(t)\| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} \max_{\zeta \in ((k-2)kh, kh)} \|y^{(3)}(\zeta)\| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} \bar{y}^{(3)}, \quad (4.91)$$

$$\|\dot{e}_r(t)\| \leq 2h^2 \bar{y}^{(3)}. \quad (4.92)$$

Uma vez que o grau relativo entre $f(t)$ e $y(t)$ é unitário, derivando o sinal de saída $y(t)$, é possível se obter um limite superior a partir do limite para o sinal de falha $f(t)$ da hipótese **(H4.4)**. Consequentemente, as derivadas n_s -ésimas de $y(t)$ podem ser limitadas em norma pelos limites das $(n_s - 1)$ derivadas de $f(t)$, que existem para sinais de falha suficientemente suaves. Considerando que o grau relativo entre $u(t)$ e $y(t)$ é n^* , um limite superior pode ser obtido do limite das $\max(0, n_s - n^*)$ derivadas de $u(t)$, onde ordem 0 significa $u(t)$ limitada.

Para determinar o ganho ρ que permite que o modo deslizante seja atingido no

conjunto $\mathcal{S} = \{e_y : e_y = Ce = 0\}$, um filtro de aproximação de primeira ordem (*First Order Approximation Filter - FOAF*) [95, Lema 2] pode ser utilizado para estimar o estado \bar{e}_1 do sistema de erro (4.84).

Sob a hipótese **(H4.10)**, um limite superior instantâneo para o erro de reconstrução $\|e_r(t)\| \leq \beta_r$ é conhecido e da equação (4.86), sua derivada também é limitada $\|\dot{e}_r(t)\| \leq \beta_d$. Seja γ_0 a margem de estabilidade de $G_y(s) \triangleq (sI - \mathcal{A}_{11})^{-1}(\mathcal{A}_{12} - \mathcal{G}_{l,1})$ e γ_R a margem de estabilidade de $G_R(s) \triangleq (sI - \mathcal{A}_{11})^{-1}\mathcal{A}_{12}$. Como $(A - G_l C)$ é Hurwitz por projeto, pode ser assumido que $\gamma_0 \leq \gamma_R$. Seja $\gamma \triangleq \gamma_0 - \delta_0$, onde $\delta_0 > 0$ é uma constante arbitrária. Aplicando [95, Lema 2] à equação de $\bar{e}_1(t)$ em (4.84), pode ser visto que:

$$\|\bar{e}_1\| \leq \beta_{e_1} \triangleq e^{-\gamma t} * (c_1 \|e_y(t)\| + c_2 \beta_r) + c_3 e^{-(\lambda_0 - \delta_0)} \|e_1(0)\| \quad (4.93)$$

onde $\lambda_0 := \min_j \{-\operatorname{Re}(\lambda_j)\}$ é a margem de estabilidade de \mathcal{A}_{11} , e

$$c_1 = \frac{\|P_e(\mathcal{A}_{12} - \mathcal{G}_{l,1})\|}{\lambda_{\max}(P_e)}, \quad c_2 = \frac{\|P_e \mathcal{A}_{12}\|}{\lambda_{\max}(P_e)}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_e)}{\lambda_{\min}(P_e)}}, \quad (4.94)$$

onde $P_e > 0$ satisfaz a equação de Lyapunov $(\mathcal{A}_{11}^T P_e + P_e \mathcal{A}_{11}) = -2I$.

Uma vez que \bar{e}_1 é limitada, um modo deslizante $e_y \equiv 0$ pode ser atingido em tempo finito. Então, uma reconstrução da falha do atuador pode ser obtida, adicionada a um sinal filtrado do erro de reconstrução, o que destaca a importância da escolha de um filtro de interpolação de ordem apropriada para minimizar o erro de reconstrução.

Para um sistema com saída amostrada (4.70) com um período de amostragem h e um número de amostras n_s correspondendo ao deslocamento no tempo total $\tau = n_s h$ requerido pelo algoritmo de reconstrução para o sinal em tempo contínuo (ver (4.71)), podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4.4.1. *Considere o observador (4.73) projetado para estimar os estados da planta (4.72), satisfazendo as hipóteses **(H4.1)** ao **(H4.6)**, e com sua dinâmica do erro definida em (4.84). Sob a hipótese **(H4.10)**, o erro de reconstrução é limitado por $\|e_r(t)\| \leq \bar{e}_r$, pela equação (4.86), e sua derivada é limitada por $\|\dot{e}_r(t)\| \leq \bar{e}_r$ de acordo com a equação (4.87). Escolhendo o ganho ρ do termo descontínuo de injeção de erro ν (4.74) do observador, de forma a satisfazer*

$$\rho \geq \|\mathcal{A}_{21}\| \beta_{e_1} + \|\mathcal{A}_{22}\| \beta_r + \|\mathcal{F}_2\| \alpha + \beta_d + \eta, \quad (4.95)$$

com $\eta > 0$ sendo uma constante arbitrária, então um modo deslizante no conjunto $\mathcal{S} = \{e_y \in \mathbb{R}^p : e_y = 0\}$ é atingido em tempo finito, onde $e_y(t)$ é dado por (4.73). Além disso, durante o modo deslizante, o sinal de falha atrasada $f_\tau(t) = f(t - n_s h)$

é estimado por:

$$\hat{f}_\tau(t) = \mathcal{F}_2^\dagger \nu_\delta \quad (4.96)$$

como no Corolário 4.2.1. A estimativa obedece, com acurácia arbitrária se $\delta \rightarrow 0$, a expressão:

$$\hat{f}_\tau(t) = f_\tau(t) - \mathcal{F}_2^\dagger (\mathcal{A}_{21}\bar{e}_1(t) + \mathcal{A}_{22}e_r - \dot{e}_r). \quad (4.97)$$

Demonstração. Considere a função de Lyapunov para o erro de observação de saída $V_y = e_y^T P_0 e_y$, onde $P_0 > 0$ é definido em (4.20). Como $(A - G_l C)$ é Hurwitz por projeto e considerando a estrutura de P em (4.20), P_0 é a solução para a equação de Lyapunov $P_0 (\mathcal{A}_{22} - \mathcal{G}_{l,2}) + (\mathcal{A}_{22} - \mathcal{G}_{l,2})^T P_0 = -I$. A derivada de V_y ao longo das trajetórias de (4.84) é:

$$\dot{V}_y = -e_y^T e_y + 2e_y^T P_0 (\mathcal{A}_{21}\bar{e}_1 + \mathcal{A}_{22}e_r + \mathcal{F}_2 f_\tau - \dot{e}_r) - 2\rho \|e_y^T P_0\| \quad (4.98)$$

Aplicando os limites β_{e_1} , obtido em (4.93), \bar{e}_r de (4.86), $\dot{\bar{e}}_r$ da equação (4.87), e α da hipótese **(H4.3)**, a seguinte inequação pode ser escrita:

$$\dot{V}_y \leq -\|e_y\|^2 + 2\|P_0 e_y\| (\|\mathcal{A}_{21}\|\beta_{e_1} + \|\mathcal{A}_{22}\|\beta_r + \|\mathcal{F}_2\|\alpha + \beta_d - \rho) \quad (4.99)$$

Pode ser visto então que se ρ for dado como (4.95), a inequação (4.99) se torna:

$$\dot{V}_y \leq -\|e_y\|^2 - 2\eta \|P_0 e_y\| \quad (4.100)$$

mostrando que o conjunto \mathcal{S} é atingido em tempo finito.

quando o modo deslizante $e_y \equiv \dot{e}_y \equiv 0$ é atingido, da equação (4.84) temos:

$$\nu_{eq} = -\mathcal{A}_{21}\bar{e}_1(t) + \mathcal{F}_2 f_\tau(t) - \mathcal{A}_{22}e_r + \dot{e}_r \quad (4.101)$$

Então, de acordo com o Corolário 4.2.1, da seção 4.2.1, o sinal de falha pode ser estimado pelo controle equivalente utilizando

$$\hat{f}_\tau(t) = \mathcal{F}_2^\dagger \nu_\delta. \quad (4.102)$$

Rearrmando os termos de (4.101), obtém-se a expressão para a falha reconstruída (4.97), quando $\delta \rightarrow 0$. \square

Deste resultado pode se verificar que um sinal filtrado erro de reconstrução influencia aditivamente o sinal de estimativa da falha. Observe que durante o modo deslizante $e_y \equiv 0$, da equação (4.84) temos $\dot{\bar{e}}_1(t) = \mathcal{A}_{11}\bar{e}_1 + \mathcal{A}_{12}e_r(t)$, então \bar{e}_1 de-

pende apenas do erro de reconstrução. O erro de reconstrução e_r e sua derivada \dot{e}_r podem ser feitos arbitrariamente pequenos escolhendo uma taxa de amostragem h menor nas equações (4.86) e (4.87). Finalmente, pode se verificar a partir da equação (4.97) que $\hat{f}_\tau(t)$ aproxima $f_\tau(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Utilizando n_s amostras, é possível utilizar um polinômio de grau n_s pelo mesmo método. Na verdade, esta técnica pode ser também utilizada com *splines* ou outros métodos de interpolação, considerando o efeito do erro de reconstrução no Teorema 4.4.1.

4.4.5 Simulações Numéricas e Exemplo

Considere o exemplo proposto na seção 4.3, com a saída amostrada. A falha é representada por um sinal senoidal $f(t) = 0.6 \sin(5t)$ aplicado a entrada ($F = B$). Simulações numéricas foram feitas para os períodos de amostragem de 20ms, 40ms, 60ms, 80ms e 100ms, comparando o desempenho de reconstrução entre o retentor de ordem zero (ZOH), o retentor interpolativo de primeira ordem (IFOH) e o retentor interpolativo de segunda ordem (ISOH). Para obter uma comparação quantitativa, a Raiz Quadrada do Erro Médio Quadrático (*Root Mean Squared Error* – (RMSE) e o Erro Absoluto Médio (*Mean Absolute Error* – MAE), definidos como:

$$RMSE_{x(t)} = \sqrt{\mathbb{E}[x^2(t) - x_R^2(t)]} \quad (4.103)$$

$$MAE_{x(t)} = \mathbb{E}[|x(t) - x_R(t)|] \quad (4.104)$$

foram calculados para cada um dos casos simulados e estão apresentados na Tabela 4.1.

A métrica MAE é mais adequada a erros que apresentam uma distribuição uniforme, enquanto que a métrica RMSE é mais adequada a erros com distribuição gaussiana, penalizando mais fortemente os erros de maior amplitude e os valores aberrantes [96].

Pode-se observar que o ISOH apresentou melhor desempenho na reconstrução da falha em todos os períodos de amostragem estudados, apresentando menores métricas de erro. As Figuras 4.7 a 4.12 apresentam a reconstrução de falhas para as estratégias estudadas aqui para os períodos de amostragem de 20ms e 60 ms.

Tabela 4.1: Métricas de erro para os casos estudados

Tipo de Reconstrução	T_s (ms)	RMSE	MAE
ZOH	20	1.3×10^{-1}	9.3×10^{-2}
	40	1.9×10^{-1}	1.5×10^{-1}
	60	2.2×10^{-1}	1.7×10^{-1}
	80	3.5×10^{-1}	2.8×10^{-1}
	100	3.5×10^{-1}	2.8×10^{-1}
IFOH	20	7.7×10^{-3}	5.7×10^{-3}
	40	1.6×10^{-2}	1.2×10^{-2}
	60	2.5×10^{-2}	1.9×10^{-2}
	80	3.5×10^{-2}	2.7×10^{-2}
	100	4.7×10^{-2}	3.7×10^{-2}
ISOH	20	2.1×10^{-3}	1.6×10^{-3}
	40	2.6×10^{-3}	1.8×10^{-3}
	60	4.4×10^{-3}	2.9×10^{-3}
	80	7.6×10^{-3}	5.5×10^{-3}
	100	1.2×10^{-2}	9.4×10^{-3}

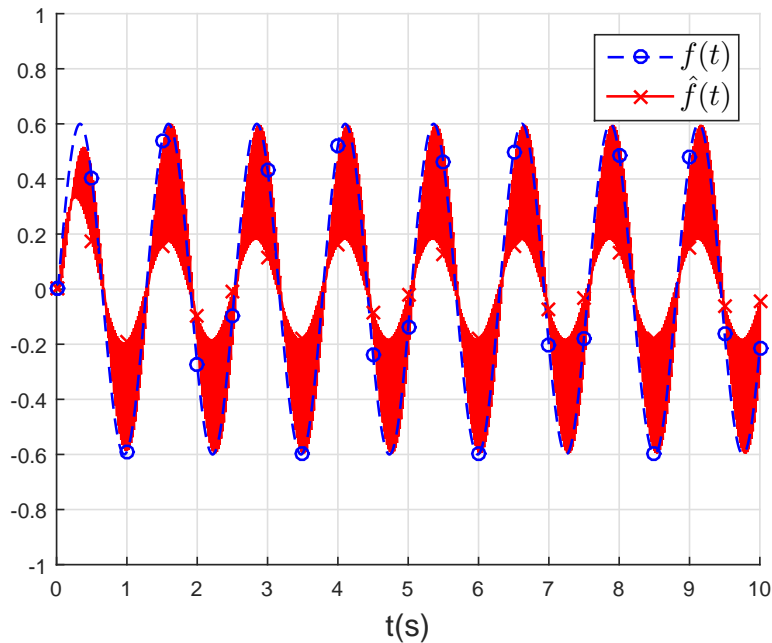


Figura 4.7: Reconstrução de falha de um sistema amostrado com 20ms de tempo de amostragem utilizando um retentor de ordem zero (ZOH). Observe que a reconstrução da falha apresenta um ruído causado pelas transições entre amostras.

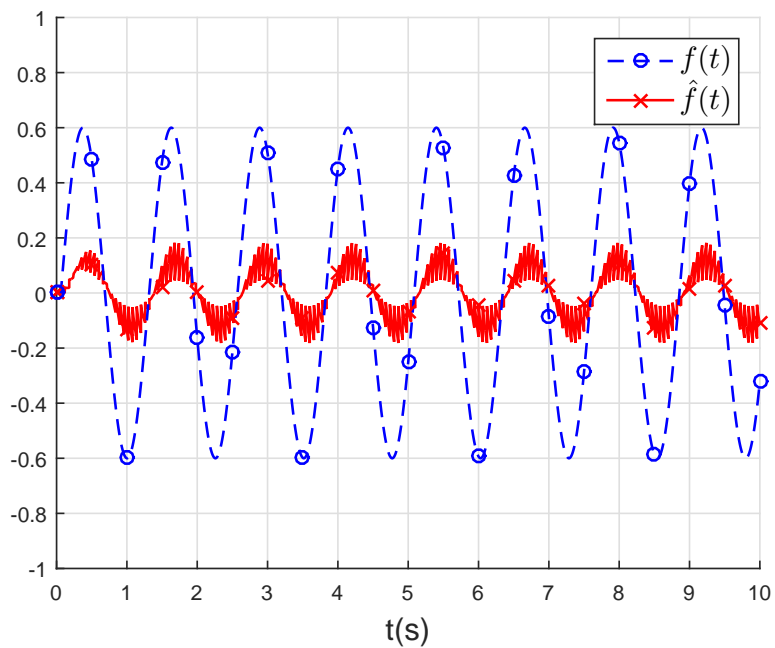


Figura 4.8: Reconstrução de falha de um sistema amostrado com 60ms de tempo de amostragem utilizando um retentor de ordem zero (ZOH).

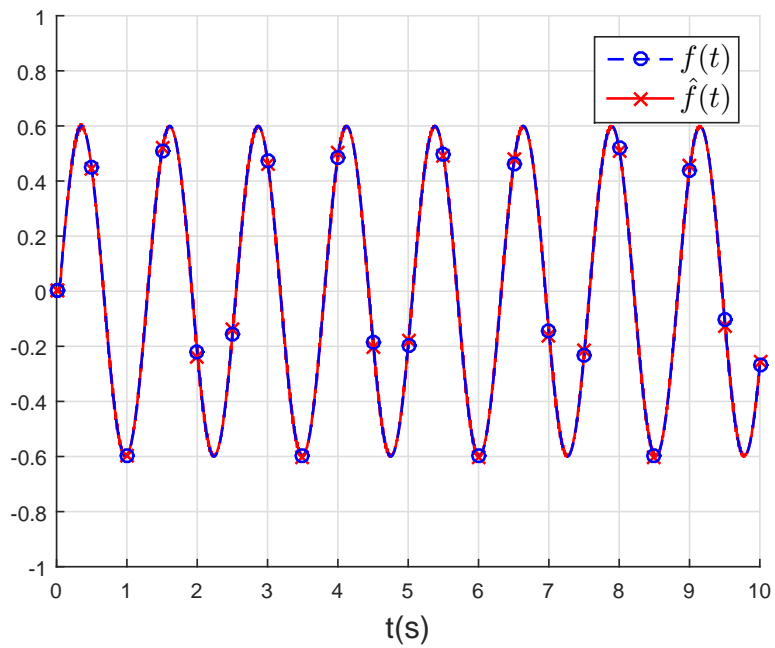


Figura 4.9: Reconstrução de falha de um sistema amostrado com 20ms de tempo de amostragem utilizando um retentor interpolativo de primeira ordem (IFOH).

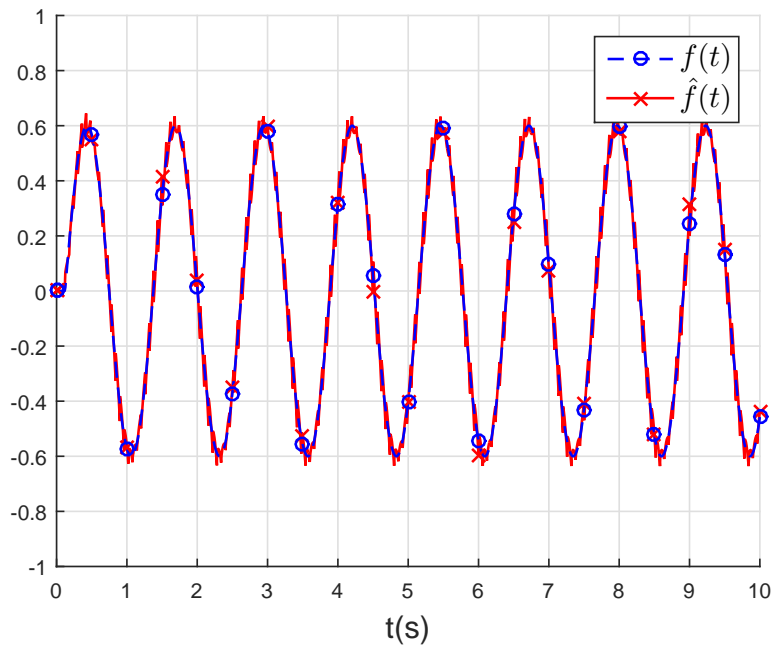


Figura 4.10: Reconstrução de falha de um sistema amostrado com 60ms de tempo de amostragem utilizando um retentor interpolativo de primeira ordem (IFOH).

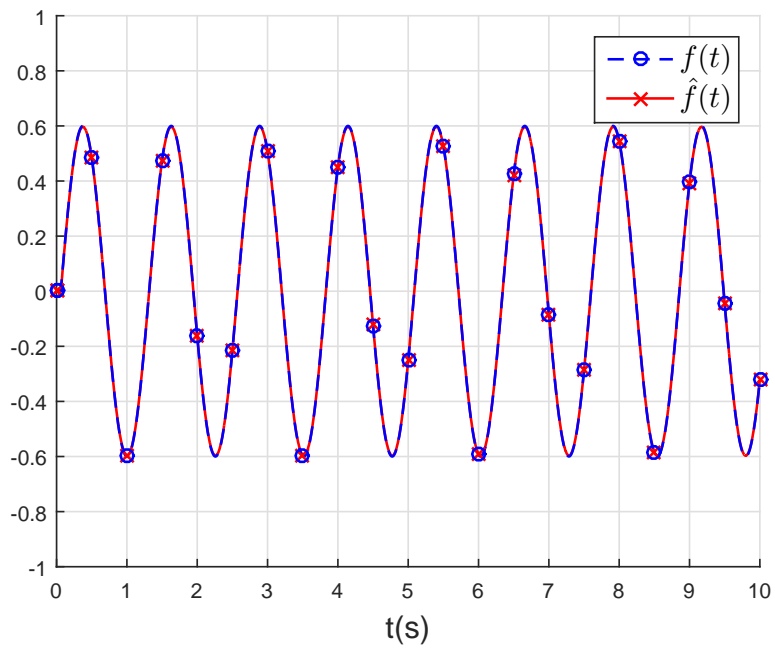


Figura 4.11: Reconstrução de falha de um sistema amostrado com 20ms de tempo de amostragem utilizando um retentor interpolativo de segunda ordem (ISOH).

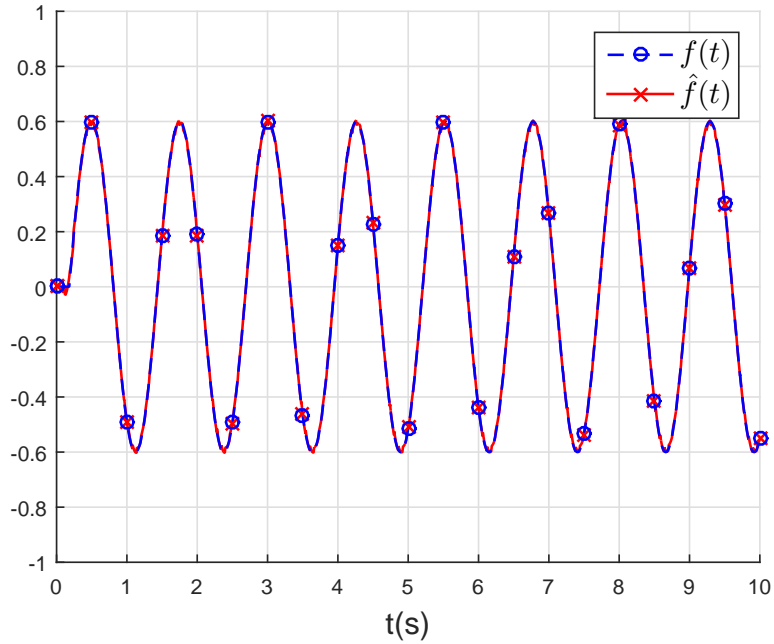


Figura 4.12: Reconstrução de falha de um sistema amostrado com 60ms de tempo de amostragem utilizando um retentor interpolativo de segunda ordem (ISOH).

4.5 Sumário dos Resultados

Uma abordagem por deslocamento no tempo para o projeto de um observador por modos deslizantes foi proposta para reconstruir sinais de falhas de atuadores em sistemas apresentando atrasos de medição de duração arbitrária. Pelo método proposto, um modo deslizante ideal pode ser teoricamente alcançado, evitando problema de *chattering* mesmo com atrasos variantes no tempo de longa duração. O preço a ser pago é que o sinal reconstruído também apresenta um atraso correspondente ao deslocamento no tempo empregado, o que ainda é aceitável para algumas aplicações relevantes como, por exemplo, em sistemas astronáuticos ou para equipamentos para exploração de petróleo em águas profundas, onde grandes atrasos de comunicação são esperados. Um método de reconstrução de falhas para sistemas apresentando saída amostradas foi demonstrado a partir do uso do método de deslocamento no tempo, em conjunto com filtros interpoladores em tempo contínuo.

Capítulo 5

Observador-Preditor Utilizando PDE-*Backstepping*

O Observador proposto para reconstrução de falhas utilizando o método de deslocamento no tempo (*time-shift*) apenas permite estimar as variáveis atrasadas. Para permitir fechar a malha de realimentação em um sistema de controle, no entanto, um preditor deverá ser utilizado de forma a estimar os valores do estado e da falha em tempo presente. Neste capítulo, estendemos o observador-preditor proposto em [71], para sistemas com atraso de medição variantes no tempo e considerando observador de entrada desconhecida para sistemas com atrasos de medição. Para permitir a obtenção de uma estimativa em tempo presente da falha, esta possui um modelo conhecido, no caso um sistema dinâmico externo [97]. Para rejeitar ou pelo menos atenuar o efeito destes sinais de perturbação, casados ou não, no sinal de saída, é proposta uma realimentação de saída, usando controle por modos deslizantes.

5.1 Formulação do Problema

5.1.1 Descrição do Sistema

Considere um sistema linear invariante no tempo que apresenta um sinal de perturbação desconhecido e não-mensurável $d(t)$, que pode ser casado ou descasado. O sistema também apresenta um atraso de medição variante no tempo conhecido $\tau(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Fd(t) \\ y(t) = Cx(t - \tau(t)), \end{cases} \quad (5.1)$$

onde as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ são conhecidas. Tanto o sinal de entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ quanto o de saída $y(t) \in \mathbb{R}$ estão disponíveis. No entanto, o estado do sistema $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e o sinal de perturbação $d(t) \in \mathbb{R}$ não são

diretamente mensuráveis.

O objetivo é projetar um sistema de controle por realimentação de saída, que permita rejeitar os efeitos de uma perturbação persistente na saída de um sistema com atraso de medição, levando-a a zero [98].

As seguintes hipóteses são assumidas para o sistema:

(H5.1) O atraso conhecido $\tau(t)$ é positivo e apresenta um limite superior uniforme tal que $0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}$.

(H5.2) A primeira derivada do atraso $\dot{\tau}(t)$ existe, é estritamente menor que um, e é limitada em norma, assegurando que $t - \tau(t)$ é monotonicamente crescente.

$$|\dot{\tau}(t)| \leq h, \quad 0 \leq h < 1 \quad (5.2)$$

(H5.3) B possui posto completo, *i.e.*, $\text{posto}(B) = m$.

(H5.4) O par (A, C) é observável.

(H5.5) O par (A, B) é controlável.

Por meio de uma transformação linear, o sistema pode ser levada a forma canônica:

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $x_1 \in \mathbb{R}^{(n-m)}$, $x_2 \in \mathbb{R}^m$, $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{1 \times (n-m)}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, e $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é não singular. Observe que $F_2 \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ representa a porção casada de F e $F_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times 1}$ representa a porção descasada.

Na forma canônica (5.3), uma hipótese adicional é feita

(H5.6) A matriz A_{11} é Hurwitz, *i.e.*, o sistema possui fase mínima de $u(t)$ para $x_2(t)$.

5.1.2 Perturbação Estruturada

Em sistemas industriais, é prática comum a realização de um estudo de confiabilidade durante a fase de projeto de forma a antecipar e mitigar os modos de falha mais prováveis, baseado em informação a respeito de sua natureza (física de falha) [8]. Aqui será assumido que o sinal de perturbação $d(t)$ pode ser modelado pela saída de um sistema dinâmico linear invariante no tempo externo [37, 97]:

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) \\ d(t) = C_d x_d(t) \end{cases}, \quad (5.4)$$

onde $A_d \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ e $C_d \in \mathbb{R}^{1 \times n_d}$. É assumido que nem $d(t)$ nem o estado $x_d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ são diretamente mensuráveis.

Também é assumido que:

(H5.7) O par (A_d, C_d) é observável.

Esta é uma condição básica para o projeto do observador para a perturbação.

Em relação a matriz A_d , de forma a garantir que o sinal de perturbação é limitado, é feita a seguinte hipótese:

(H5.8) Nenhum autovalor de A_d possui parte real positiva e os autovalores com parte real zero são simples.

Apesar de as matrizes (A_d, C_d) serem supostas conhecidas, o sinal de perturbação $d(t)$ e seu vetor de estados x_d devem ser estimados.

5.1.3 Sistema Aumentado

Para o projeto de um observador de entrada desconhecida [37], utilizamos uma representação aumentada combinando o sistema (5.1) e o modelo da perturbação (5.4). Definindo o vetor de estado $z(t) \triangleq [x_d^T(t) \quad x^T(t)]^T$, o sistema aumentado pode ser descrito por:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_a z(t) + B_a u(t) \\ y(t) = C_a z(t - \tau(t)) \end{cases} \quad (5.5)$$

onde:

$$A_a \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_d & 0 \\ \hline FC_d & A \end{array} \right], \quad B_a \triangleq \left[\begin{array}{c} 0 \\ B \end{array} \right], \quad C_a \triangleq [0 \mid C] \quad (5.6)$$

As hipóteses **(H5.4)** e **(H5.7)** asseguram que o sistema aumentado (A_a, C_a) também é observável.

5.2 Observador de Entrada Desconhecida baseado em *PDE-Backstepping*

Um Observador de Entrada Desconhecida (*Unknown Input Observer* - UIO) será apresentado para o sistema aumentado apresentando atraso de medição, baseado no método *PDE-Backstepping* [72, 75], utilizando uma equação diferencial parcial (*Partial Differential Equation* - PDE) para modelar o atraso de medição variante no tempo. Assim, é possível prever o estado no tempo presente, mesmo na presença da perturbação.

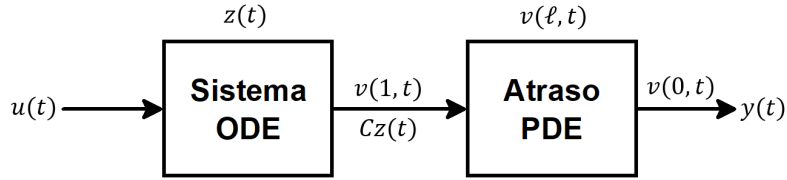


Figura 5.1: Diagrama de Blocos apresentando um sistema representado por uma Equação Diferencial Ordinária (ODE - *Ordinary Differential Equation*) com um atraso de medição representado por uma Equação Diferencial Ordinária (PDE - *Partial Differential Equation*).

5.2.1 Equações do Observador

O atraso de medição do sistema aumentado (5.5) pode ser representado por uma PDE de transporte:

$$v_t(\ell, t) = \pi(\ell, t)v_\ell(\ell, t) \quad (5.7)$$

onde $\pi(\ell, t)$ representa a velocidade de propagação e $\ell \in [0, 1]$ é uma variável espacial que é mapeia o atraso no domínio $[\tau(t), 0]$ de tal forma que $\ell = 1$ corresponde a nenhum atraso e $\ell = 0$ corresponde a $\tau(t)$, como pode ser visto na Figura 5.1. De forma a representar o atraso de medição, a PDE de transporte escolhida deverá apresentar a solução:

$$v(\ell, t) = C_a z(t + (\ell - 1)\tau(t)). \quad (5.8)$$

Derivando nas variáveis temporal e espacial, obtemos:

$$v_t(\ell, t) = C_a z'(t + (\ell - 1)\tau(t)) (\dot{\tau}(t)(\ell - 1) + 1), \quad (5.9)$$

$$v_\ell(\ell, t) = C_a z'(t + (\ell - 1)\tau(t)) \tau(t), \quad (5.10)$$

e podemos ver que a velocidade de propagação deverá ser

$$\pi(\ell, t) = (\dot{\tau}(t)(\ell - 1) + 1) / \tau(t). \quad (5.11)$$

Assim, as equações de estado do sistema podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= A_a z(t) + B_a u(t) \\ v_t(\ell, t) &= \pi(\ell, t)v_\ell(\ell, t) \\ v(1, t) &= C_a z(t) \\ y(t) &= v(0, t) \quad (= C_a z(t - \tau(t))) \end{cases} \quad (5.12)$$

O observador é desenvolvido como uma extensão do apresentado em [75, Seção

3.1] para atraso de medição constante, e é descrito por:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) &= A_a \hat{z}(t) + B_a u(t) + e^{A_a \tau(t)} L (y(t) - \hat{v}(0, t)) \\ \hat{v}_t(\ell, t) &= \pi(\ell, t) \hat{v}_\ell(\ell, t) + C_a e^{A_a \ell \tau(t)} L (y(t) - \hat{v}(0, t)) \\ \hat{v}(1, t) &= C_a \hat{z}(t) \end{cases} \quad (5.13)$$

onde $\hat{z} = [\hat{x}_d^T(t) \quad \hat{x}^T(t)]^T$ é a estimativa do estado aumentado z , composto pela estimativa dos estados da perturbação, \hat{x}_d , e do sistema original, \hat{x} . A matriz L é escolhida de tal forma que $A_a - LC_a$ é Hurwitz.

5.2.2 Análise de Convergência do Observador Proposto

O método *PDE-backstepping* permite uma prova formal de estabilidade para o sistema de erro do observador. Introduzindo as variáveis de erro:

$$\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t), \quad \tilde{v}(\ell, t) = v(\ell, t) - \hat{v}(\ell, t), \quad (5.14)$$

a dinâmica de erro do observador é dada por:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}(t) &= A_a \tilde{z}(t) - e^{A_a \tau(t)} L \tilde{v}(0, t) \\ \tilde{v}_t(\ell, t) &= \pi(\ell, t) \tilde{v}_\ell(\ell, t) - C_a e^{A_a \ell \tau(t)} L \tilde{v}(0, t) \\ \tilde{v}(1, t) &= C_a \tilde{z}(t) \end{cases} \quad (5.15)$$

Baseado na transformação *PDE-Backstepping* proposta para observadores projetados para sistemas com atrasos de medição constantes [75, Seção 3.1], [71], e utilizando a variável ℓ como no observador (5.13), a seguinte transformação é obtida.

$$\tilde{w}(\ell, t) = \tilde{v}(\ell, t) - C_a e^{A_a(\ell-1)\tau(t)} \tilde{z}(t), \quad (5.16)$$

Derivando no tempo, obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t(\ell, t) &= -C_a e^{A_a(\ell-1)\tau(t)} (A_a \tilde{z}(t) - e^{A_a \tau(t)} L \tilde{v}(0, t)) + \tilde{v}_t(\ell, t) \\ &\quad - C_a e^{A_a(\ell-1)\tau(t)} A_a(\ell-1) \dot{\tau}(t) \tilde{z}(t), \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} &= -C_a e^{A_a(\ell-1)\tau(t)} (A_a \tilde{z}(t) - e^{A_a \tau(t)} L \tilde{v}(0, t)) + \pi(\ell, t) \tilde{v}_\ell(\ell, t) \\ &\quad - C_a e^{A_a \ell \tau(t)} L \tilde{v}(0, t) - C_a e^{A_a(\ell-1)\tau(t)} A_a(\ell-1) \dot{\tau}(t) \tilde{z}(t), \end{aligned} \quad (5.18)$$

e na variável espacial, temos:

$$\tilde{w}_\ell(\ell, t) = \tilde{v}_\ell(\ell, t) - C_a e^{A_a(\ell-1)\tau(t)} A_a \tau(t) \tilde{z}(t). \quad (5.19)$$

Verifica-se então que

$$\tilde{w}_t(\ell, t) = \pi(\ell, t)\tilde{w}_\ell(\ell, t), \quad (5.20)$$

$$\tilde{w}(1, t) = 0. \quad (5.21)$$

o que de leva a PDE de transporte em (5.15) para uma forma homogênea. Pode ser visto da condição inicial (5.21) que a variável transformada $\tilde{w}(\ell, t)$ converge em tempo finito, já que é esperado que a PDE atinja $\ell = 1$ em tempo finito.

Aplicando esta transformação a (5.15), a dinâmica do erro de observação pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}(t) &= (A_a - e^{A_a\tau(t)} LC_a e^{-A_a\tau(t)}) \tilde{z}(t) - e^{A_a\tau(t)} L\tilde{w}(0, t) \\ \tilde{w}_t(\ell, t) &= \pi(\ell, t)\tilde{w}_\ell(\ell, t) \\ \tilde{w}(1, t) &= 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

que possui uma estrutura triangular conveniente.

Utilizando um funcional Lyapunov-Krasovskii [75], podemos demonstrar que o estado do observador (5.13) converge para o estado do sistema (5.5). Uma prova formal para o caso de atrasos de medição variantes no tempo é apresentada a seguir.

Teorema 5.2.1. *O sistema de erro de observação (5.15) para o observador proposto em (5.13) é exponencialmente estável na origem, no sentido da norma:*

$$\left(\|z(t) - \hat{z}(t)\|^2 + \int_0^1 (v(\ell, t) - \hat{v}(\ell, t))^2 d\ell \right)^{1/2}, \quad (5.23)$$

e, conseqüentemente, (\hat{z}, \hat{v}) converge exponencialmente para (z, v) .

Demonstração. Baseado nas hipóteses **(H5.1)** e **(H5.2)** feitas sobre o atraso e sua taxa de variação, pode ser visto que:

$$\pi(0, t) = \frac{1 - \dot{\tau}(t)}{\tau(t)} \geq \pi_0 > 0. \quad (5.24)$$

Seja M um majorante para $\|e^{A_a\tau(t)}\|$, onde $\|e^{A_a\tau(t)}\| \leq e^{\|A_a\|\bar{\tau}} < M$. Sabendo que $e^{A_a\tau(t)}$ e A são comutáveis, podemos verificar que como $A_a - LC_a$ é Hurwitz por projeto, a matriz:

$$A_o \triangleq (A_a - e^{A_a\tau(t)} LC_a e^{-A_a\tau(t)}) \quad (5.25)$$

apresentará autovalores estáveis para qualquer valor de $\tau(t)$. Se a taxa de variação de $\tau(t)$ for suficientemente pequena, pode ser mostrado [84, Lema 9.9] que a equação de Lyapunov $P(\tau(t))A_o + A_o^T P(\tau(t)) = -Q$, $Q > 0$ possui uma solução positiva

definida única $P(\tau(t))$, para cada valor de $\tau(t)$.

Vamos inicialmente analisar a forma transformada (5.22) do sistema de erro, utilizando o funcional de Lyapunov-Krasovskii [75, eq. (6.57)]:

$$V(t) = V_1(\tilde{z}) + aV_2(t), \quad (5.26)$$

$$V_1(\tilde{z}) = \tilde{z}^T P \tilde{z}, \quad (5.27)$$

$$V_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{b\ell} \tilde{w}^2(\ell, t) d\ell, \quad (5.28)$$

onde $a > 0$ e $b > 0$ são constantes que serão determinadas mais a frente.

Derivando $V_1(\tilde{z})$ ao longo das trajetórias de (5.22), podemos escrever:

$$\dot{V}_1(\tilde{z}) = -\tilde{z}^T Q \tilde{z} + \tilde{z}^T P'(\tau(t)) \dot{\tau}(t) \tilde{z} - 2\tilde{z}^T P(\tau(t)) e^{A_a \tau(t)} L \tilde{w}(0, t), \quad (5.29)$$

onde $P'(\tau(t)) = dP(\tau(t))/d(\tau(t))$. Suponha conhecido um limite superior \bar{p} para $\|P'(\tau(t))\|$ e $q \triangleq \lambda_{\min}(Q) - \bar{p}h$. Então, a seguinte inequação pode ser obtida:

$$\dot{V}_1(\tilde{z}) \leq -\lambda_{\min}(Q) \|\tilde{z}\|^2 + \bar{p}h \|\tilde{z}\|^2 - 2\|\tilde{z}\| \bar{p}M \|L\| \tilde{w}(0, t), \quad (5.30)$$

$$\dot{V}_1(\tilde{z}) \leq -q \|\tilde{z}\|^2 - 2\|\tilde{z}\| \bar{p}M \|L\| \tilde{w}(0, t). \quad (5.31)$$

Então, completando os quadrados, pode ser demonstrado que

$$\dot{V}_1(\tilde{z}) \leq -q \|\tilde{z}\|^2 + \frac{2(\bar{p}M \|L\|)^2}{q} \tilde{w}^2(0, t). \quad (5.32)$$

Usando (5.20) e (5.21), e integração por partes, a derivada de $V_2(t)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \int_0^1 e^{b\ell} \tilde{w}(\ell, t) \pi(\ell, t) \tilde{w}_\ell(\ell, t) d\ell = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{bx} \pi(\ell, t) d\tilde{w}^2(\ell, t) = \\ &= \frac{e^{bx}}{2} \pi(\ell, t) \tilde{w}^2(\ell, t) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (b\pi(\ell, t) + \pi_\ell(\ell, t)) e^{b\ell} \tilde{w}^2(\ell, t) d\ell = \\ &= -\frac{\pi(0, t) \tilde{w}^2(0, t)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 (b\pi(\ell, t) + \pi_\ell(\ell, t)) e^{b\ell} \tilde{w}^2(\ell, t) d\ell. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Para que o último termo de (5.33) seja negativo, é necessário que

$$\begin{aligned} b\pi(\ell, t) + \pi_\ell(\ell, t) &= b \frac{(\dot{\tau}(t)(\ell - 1) + 1)}{\tau(t)} + \frac{\dot{\tau}(t)}{\tau(t)} = \\ &= \frac{(b(\ell - 1) + 1)\dot{\tau}(t) + b}{\tau(t)} > 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Das hipóteses **(H5.1)** e **(H5.2)**, temos que $\tau(t) > 0$ e $\dot{\tau}(t) \geq -h$. Uma vez que o numerador de (5.34) é linear em ℓ , a equação (5.33) possui seu mínimo em um dos extremos $\ell = 0$ ou $\ell = 1$, então:

$$b\pi(\ell, t) + \pi_\ell(\ell, t) \geq \frac{\min \{b - h, b + (b - 1)h\}}{\tau(t)}. \quad (5.35)$$

Escolhendo $b > h$, temos $b\pi(\ell, t) + \pi_\ell(\ell, t) > 0$. Então, substituindo (5.35) em (5.33), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &\leq -\frac{\pi_0}{2}\tilde{w}^2(0, t) \\ &\quad - \frac{\min \{b - h, b + (b - 1)h\}}{2\tau(t)} \int_0^1 e^{b\ell} \tilde{w}^2(\ell, t) d\ell. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Finalmente, definindo

$$\beta = \frac{\min \{b - h, b + (b - 1)h\}}{1 + h} > 0, \quad (5.37)$$

é possível verificar que

$$\dot{V}_2(t) \leq -\frac{\pi_0}{2}\tilde{w}^2(0, t) - \pi_0\beta V_2(t). \quad (5.38)$$

Escolhendo $a = 4(\bar{p}M\|L\|)^2 / (\pi_0q)$ e aplicando (5.32) e (5.38) em (5.26), obtemos a seguinte inequação:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{q}{2}\|\tilde{z}\|^2 - \pi_0\beta \frac{4(\bar{p}M\|L\|)^2}{\pi_0q} V_2(t), \quad (5.39)$$

Definindo $\mu = \min \left\{ \pi_0\beta, \frac{q}{2\bar{p}} \right\}$, Podemos verificar da definição de $V(t)$ em (5.26) que $\dot{V}(t) \leq -\mu V(t)$, e, pelo lema de comparação, que

$$V(t) \leq e^{-\mu t} V(0), \quad \forall t \geq 0, \quad (5.40)$$

Este resultado mostra que o sistema de erro (\tilde{z}, \tilde{w}) é exponencialmente estável na origem em relação a norma

$$\Omega(t) = \|\tilde{z}(t)\|^2 + \int_0^1 \tilde{w}^2(\ell, t) d\ell. \quad (5.41)$$

Definindo P_{\min} e P_{\max} como os limites inferior e superior de $\|P(\tau(t))\|$, respectivamente, podemos mostrar que

$$\psi_1\Omega(t) \leq V(t) \leq \psi_2\Omega(t), \quad (5.42)$$

onde

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \min \left\{ P_{\min}, \frac{2(\bar{p}M\|L\|)^2}{q} \right\}, \\ \psi_2 &= \min \left\{ P_{\max}, \frac{2(\bar{p}M\|L\|)^2}{q} e^b \right\}.\end{aligned}\quad (5.43)$$

Consequentemente,

$$\Omega(t) \leq \frac{\psi_2}{\psi_1} e^{-\mu t} \Omega(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (5.44)$$

A partir deste resultado é possível demonstrar a estabilidade do sistema (\tilde{z}, \tilde{v}) no sentido da norma

$$\Xi(t) = \|\tilde{z}(t)\|^2 + \int_0^1 \tilde{v}^2(\ell, t) d\ell, \quad (5.45)$$

determinando a relação entre as normas $\Omega(t)$ e $\Xi(t)$. Utilizando a transformação *PDE-Backstepping* inversa:

$$\tilde{v}(\ell, t) = \tilde{w}(\ell, t) + C e^{A(\ell-1)\tau(t)} \tilde{z}(t), \quad (5.46)$$

constantes positivas ϕ_1 e ϕ_2 podem ser determinadas, de tal forma que a relação entre $\Omega(t)$ e $\Xi(t)$ é dada por $\phi_1 \Xi(t) \leq \Omega(t) \leq \phi_2 \Xi(t)$ e consequentemente

$$\Xi(t) \leq \frac{\phi_2 \psi_2}{\phi_1 \psi_1} e^{-\mu t} \Xi(0), \quad (5.47)$$

mostrando que o sistema (\tilde{z}, \tilde{v}) é estável na origem no sentido da norma (5.23). \square

5.2.3 Representações Alternativas do Observador

Baseado em (5.13) demonstra-se que o observador pode ser representado em termos de suas variáveis de saída [75, Corolário 3.1] como

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = A_a \hat{z}(t) + B_a u(t) + e^{A_a \tau(t)} L (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_a \hat{z}(t - \tau(t)) + C_a \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_a(\theta-t)} L (y(\theta) - \hat{y}(\theta)) d\theta \end{cases} \quad (5.48)$$

Alternativamente, como em [75, Seção 6.3] e em [71], se o sinal de entrada $u(t)$ tem seus valores passados conhecidos no intervalo $t \in [t - \tau(t), t]$, pode ser mostrado que a representação

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) (A_a \zeta(t) + B_a u(t - \tau(t)) + L (y(t) - C_a \zeta(t))) \\ \hat{z}(t) = e^{A_a \tau(t)} \zeta(t) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_a(\theta-t)} B u(\theta) d\theta \end{cases} \quad (5.49)$$

onde $\zeta = \hat{z}(t - \tau(t))$, é equivalente tanto a versão baseada em PDE de transporte (5.13) quanto a que utiliza as variáveis de saída na implementação (5.48). Observe que esta representação consiste em um observador de estado atrasado em cascata com um preditor obtido a partir da solução da equação diferencial do sistema aumentado baseada na fórmula de variação de constantes [60, 61, 99, 100].

5.3 Projeto de controlador por modos deslizantes

No sistema aumentado (5.5), apenas o sinal de saída está disponível, apresentando um atraso de medição. Para projetar um controlador por modos deslizantes, podemos utilizar a estimativa do estado do sistema no tempo presente, obtida através do observador (5.13), definindo a seguinte variável de deslizamento:

$$\hat{\sigma} = S\hat{z} \quad (5.50)$$

onde $\hat{\sigma} \in \mathbb{R}^m$, e $S \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_d)}$ é uma matriz de posto completo a ser escolhida para projetar a superfície de deslizamento $\mathcal{S} = \{\hat{z} : S\hat{z} = 0\}$. Além disso, as seguintes variáveis auxiliares serão definidas:

$$\sigma = Sz, \quad \tilde{\sigma} = S\tilde{z}. \quad (5.51)$$

Da equação (5.14), pode ser visto que:

$$\tilde{\sigma} = \sigma - \hat{\sigma} \quad (5.52)$$

Para escolher a matriz S , considere o sistema aumentado (5.5) e a representação do sistema original na forma apresentada em (5.3):

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) \\ \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + F_1 C_d x_d(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + F_2 C_d x_d(t) + B_2 u(t) \end{cases} \quad (5.53)$$

5.3.1 Caso de Grau Relativo Unitário

Assuma $C = [0 \quad C_2]$. Assim, observe que o grau relativo de u para x_2 é uniformemente unitário uma vez que B_2 é não-singular pela hipótese **(H5.3)**. Uma lei de controle SMC pode ser projetada de forma a regular x_2 para zero e conseqüentemente também levar o sinal de saída y a zero. A escolha natural para S é então,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & I^{m \times m} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

e, então, $\hat{\sigma} = S\hat{z} = \hat{x}_2(t)$. Quando um modo deslizante é atingido em \mathcal{S} , a variável de deslizamento é levada a $\hat{\sigma} = 0$. Desta forma, considerando (5.51) e (5.52), temos que $\hat{\sigma} = S\hat{z} = Sz - \tilde{\sigma} = 0$. Por substituição de S , verifica-se que

$$\hat{x}_2(t) = x_2(t) - \tilde{\sigma} = 0. \quad (5.55)$$

Pelo Teorema 5.2.1, pode ser visto que $\tilde{\sigma} = S\tilde{z}$ é um termo exponencialmente decrescente. Desta forma, x_2 converge exponencialmente para zero e, em consequência, $y(t) = C_2x_2(t - \tau(t))$ também será levado a zero, rejeitando a perturbação.

Para determinar a lei de controle, a partir da equação (5.48) temos que

$$\dot{\hat{\sigma}} = S\dot{\hat{z}}(t) = SA_a\hat{z}(t) + SB_a u(t) + SL_\tau(t)(y(t) - \hat{y}(t)), \quad (5.56)$$

onde $L_\tau(t) \triangleq e^{A_a\tau(t)} L$, $\|L_\tau(t)\| \leq M\|L\|$. Da hipótese **(H5.3)** verifica-se que, como a matriz S possui posto completo, a matriz SB_a é não-singular. Então, aplicando o método do controle equivalente [50, 101], é possível obter o sinal de controle equivalente u_{eq} da solução da equação $\dot{\hat{\sigma}} = 0$:

$$\begin{aligned} SA_a\hat{z}(t) + SB_a u_{\text{eq}}(t) + SL_\tau(t)(y(t) - \hat{y}(t)) &= 0, \\ u_{\text{eq}}(t) &= -(SB_a)^{-1}SA_a\hat{z}(t) - (SB_a)^{-1}SL_\tau(t)(y(t) - \hat{y}(t)). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Adicionando um termo linear estabilizante e um termo descontínuo que leva o estado a superfície de deslizamento, a lei de controle proposta pe dada por:

$$u(t) = u_{\text{eq}}(t) - (SB_a)^{-1}kS\hat{z} - (SB_a)^{-1}\rho(t)\frac{\hat{\sigma}}{\|\hat{\sigma}\|}, \quad (5.58)$$

onde $k > 0$ é o ganho do termo estabilizante e a modulação $\rho(t)$ é uma função escalar positiva limitada por

$$\rho(t) \geq \eta \quad (5.59)$$

onde $\eta > 0$ é uma constante arbitrária. Também observe que se $\rho(t) = 0$ for utilizado, uma lei de controle linear que também é capaz de rejeitar a perturbação é obtida.

5.3.2 Análise de Estabilidade em Malha Fechada

Teorema 5.3.1. *Considere o sistema com atraso de medição (5.1), atendendo as hipóteses **(H5.1)** to **(H5.6)**, na presença de uma perturbação $d(t)$ modelada pelo sistema dinâmico externo (5.4), atendendo as hipóteses **(H5.7)** and **(H5.8)**. Utilizando a estimativa de estado para o sistema (5.5) obtida pelo observador-preditor*

(5.48) para construir a variável de deslizamento $\hat{\sigma} = \hat{x}_2$ e a lei de controle (5.58), as seguintes propriedades são apresentadas:

1. Um modo deslizante ideal $\hat{\sigma}(t) \equiv 0$ é atingido em tempo finito, não maior que $\|\hat{\sigma}(0)\|/\eta$.
2. O estado x_2 e, conseqüentemente o sinal de saída $y(t) = C_2x_2$ convergem exponencialmente a zero, para todas as condições iniciais.
3. Todos os sinais do sistema de malha fechada permanecem uniformemente limitados.

Demonstração. Aplicando a lei de controle (5.58) a equação (5.56), obtém-se:

$$\dot{\hat{\sigma}} = -k\hat{\sigma} - \rho(t) \frac{\hat{\sigma}}{\|\hat{\sigma}\|}. \quad (5.60)$$

Usando a função de Lyapunov $V_3(\hat{\sigma}) = (\hat{\sigma}^T \hat{\sigma})/2$, pode-se verificar que:

$$\dot{V}_3(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}^T \dot{\hat{\sigma}} \leq -k\|\hat{\sigma}\|^2 - \rho(t)\|\hat{\sigma}\|. \quad (5.61)$$

Então, uma vez que $k > 0$ e substituindo a equação (5.59), obtemos

$$\dot{V}_3(\hat{\sigma}) \leq -\eta\|\hat{\sigma}\|. \quad (5.62)$$

Da definição de V_3 , pode-se observar que

$$\dot{V}_3(\hat{\sigma}) \leq -\sqrt{2}\eta\sqrt{V_3(\hat{\sigma})}, \quad (5.63)$$

demonstrando que a superfície de deslizamento é atingida em um tempo finito $t_f < \|\hat{\sigma}(0)\|/\eta$ e permanece nela por todo tempo futuro, *i.e.*, $\hat{\sigma}(t) \equiv 0$, $\forall t \geq t_f$, o que mostra que o modo deslizante é ideal.

Do Teorema 5.2.1, pode ser visto que $\tilde{\sigma} = S\tilde{z}$ é um termo exponencialmente decrescente. Considerando (5.51) e (5.52), verifica-se que $\sigma \rightarrow 0$ exponencialmente. Assim, x_2 converge a zero exponencialmente e, como $y(t) = C_2x_2(t - \tau(t))$, a saída será levada a zero, rejeitando a perturbação.

Durante o modo deslizante, o sistema apresenta a forma reduzida

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) \\ \dot{x}_1(t) = A_{11} x_1(t) + F_1 C_d x_d(t) \end{cases} \quad (5.64)$$

Uma vez que o sistema possui fase mínima, dada a hipótese **(H5.6)**, a matriz A_{11} é Hurwitz e que, pela hipótese **(H5.8)**, $x_d(t)$ é limitado, então podemos ver que o

estado x_1 também é limitado. Além disso, do Teorema 5.2.1, pode ser concluído que como x_1 e x_d são limitados, suas estimativas também são limitadas. \square

Os resultados acima são relevantes mesmo para atrasos constantes [13]. A força do Teorema 5.3.1 é que, enquanto preditores não são explicitamente disponíveis para controle não linear em geral, uma vez que nem sempre é possível resolver sistemas não lineares explicitamente, quando a planta é linear existe um preditor explícito que pode ser utilizado mesmo com uma lei de controle não linear.

5.3.3 Caso de Grau Relativo Não-Unitário

Agora, considere $C = [C_1 \ 0]$. Neste caso, o grau relativo de u para x_1 não é mais unitário. No entanto, ainda é possível utilizar a lei de controle (5.58), através da escolha de uma superfície de deslizamento apropriada, que seja capaz de rejeitar ou atenuar os efeitos da perturbação $d(t)$ na saída do sistema.

Para projetar a nova matriz S , considere inicialmente a variável de deslizamento $\hat{\sigma} = S\hat{z}$ e as variáveis auxiliares σ e $\tilde{\sigma}$ definidas em (5.51). Para escolher a matriz S , considere ainda o sistema representado como em (5.53). A matriz S pode ser particionada de acordo com $z = [x_d^T \ x_1^T \ x_2^T]^T$, de tal forma que

$$S = [S_F \ S_1 \ I^{m \times m}] \quad (5.65)$$

onde $S_F \in \mathbb{R}^{m \times n_d}$ e $S_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$.

Quando um modo deslizante é atingido em S , a variável de deslizamento é levada a $\hat{\sigma} = 0$. Então, considerando as equações (5.51) e (5.52), temos que $\hat{\sigma} = S\hat{z} = Sz - \tilde{\sigma} = 0$ e, aplicando a definição de S (5.65), obtemos

$$S_F x_d(t) + S_1 x_1(t) + x_2(t) - \tilde{\sigma} = 0. \quad (5.66)$$

Rearrmando os termos, pode ser verificado que o estado x_2 é governado pela equação algébrica:

$$x_2 = -S_F x_d(t) - S_1 x_1(t) + \tilde{\sigma}. \quad (5.67)$$

Do Teorema 5.2.1, pode ser visto que $\tilde{\sigma} = S\tilde{z}$ é um termo exponencialmente decrescente. Substituindo (5.67) em (5.53), é obtido o sistema na forma reduzida

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) \\ \dot{x}_1(t) = (A_{11} + A_{12} S_1) x_1(t) \\ \quad + (F_1 C_d - A_{12} S_F) x_d(t) + A_{12} \tilde{\sigma} \end{cases} \quad (5.68)$$

Observando a equação (5.68) acima, de forma a estabilizar o estado x_1 e consequentemente a saída $y_1(t) = C_1 x_1(t)$, S_1 deve ser escolhida de forma que $(A_{11} + A_{12}S_1)$ seja Hurwitz, o que é sempre possível, dada a hipótese **(H5.5)** [50, Proposition 3.3].

Se a matriz A_{12} possuir posto completo, a porção descartada da perturbação pode ser rejeitada escolhendo $S_F = A_{12}^\dagger F_1 C_d$, onde $A_{12}^\dagger \triangleq (A_{12}^T A_{12})^{-1} A_{12}$ é a pseudo-inversa a esquerda de A_{12} [89], fazendo com que $(F_1 C_d - A_{12} S_F) = 0$. Neste caso, pode se verificar que $\|x_1\| \rightarrow 0$ exponencialmente

5.4 Simulação numérica

Para demonstrar o funcionamento da estratégia proposta neste capítulo, um sistema massa-mola-amortecedor, intencionalmente instabilizado com um fator de amortecimento negativo com uma entrada representando uma força atuando será utilizado. O sinal senoidal de perturbação $d(t) = -(\pi/8) \sin(10t)$ é inserido na equação de velocidade (\dot{x}_1). Esta perturbação foi escolhida de forma a ser completamente descartada da entrada ($F \in \mathcal{R}(B^\perp)$). O sistema apresenta um atraso de medição variante no tempo $\tau(t) = 1 + 0.1 \sin(t)$.

As matrizes de estado para os sistema e a perturbação são:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_d &= \begin{bmatrix} 0 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

O observador-preditor foi implementado como na equação (5.49) por necessitar de menor complexidade computacional, com L escolhida para que os autovalores de $(A_a - LC_a)$ sejam $\{-12, -11, -10, -9\}$. A lei de controle por modos deslizantes como proposta em (5.58) foi projetada com $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, um ganho estabilizante linear $k = 1$, e uma modulação constante (ganho) $\rho(t) = 0.5$.

Na figura 5.2 comparamos três leis de controle: 1) a lei SMC proposta em (5.58); 2) uma lei de controle linear obtida a partir de (5.58), fazendo $\rho(t) = 0$; 3) uma lei de controle linear $u = -K\hat{x} - K_d\hat{x}_d$ como a descrita em [97, eq (4.22) e discussão subsequente]. A aplicação da última lei de controle ao sistema resulta em

$$\dot{x} = (A - BK)x + (FC_d - BK_d)x_d + \pi_z \quad (5.70)$$

onde π_z é um termo exponencialmente decrescente devido ao erro de observação. De acordo com [97] a matriz de distribuição da perturbação $(FC_d - BK_d)$ deve ser minimizada em norma. No entanto, neste caso em particular, a norma é minimizada por $K_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, uma vez que F e B são ortogonais. As leis de controle por modos

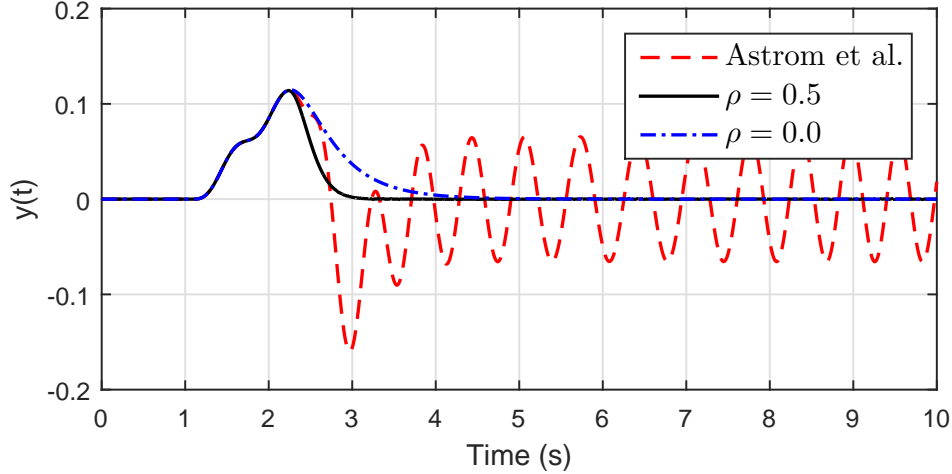


Figura 5.2: Comparação do sinal de saída para o controlador linear de [97] (tracejado), a lei de controle proposta em (5.58) com $\rho = 0.5$ (sólida), e a lei de controle linear obtida de (5.58) usando $\rho = 0$ (traço-ponto).

deslizantes e linear obtidas de (5.58) foram capazes de rejeitar completamente a perturbação, com a lei SMC sendo mais rápida que a linear. Por outro lado, não foi possível rejeitar a perturbação utilizando a lei de controle de [97].

Para verificar o desempenho do sistema em malha fechada em relação a incertezas paramétricas, as matrizes

$$\delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ .5 & .5 \end{bmatrix}, \quad \delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ .2 \end{bmatrix}, \quad \delta A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.71)$$

foram adicionadas a A , B e A_d respectivamente, enquanto o observador e a lei de controle foram projetados considerando seus valores nominais (5.69). A figura 5.4 compara o sinal de perturbação e sua estimativa obtida pelo observador-preditor, quando estão presentes incertezas paramétricas, mostrando um resíduo de estimação esperado. A figura 5.5 mostra o sinal de saída do sistema em malha fechada para o sistema apresentando as incertezas paramétricas acima, comparando as leis de controle propostas. A lei de controle por modos deslizantes proposta em (5.58) com $k = 2$ e $\rho(t) = 0.5$ (linha sólida) foi capaz de levar a saída a um pequeno sinal residual, enquanto a lei de controle linear obtida de (5.58) usando o mesmo ganho linear mas com $\rho(t) = 0$ (linha traço-ponto) não foi capaz de estabilizar o sistema.

5.5 Sumário dos Resultados

Um observador-preditor para sistemas lineares com atrasos de medição variantes no tempo foi projetado usando a técnica de *PDE-Backstepping* e combinada a uma lei de controle por modos deslizantes para regular a saída a zero, com rejeição de

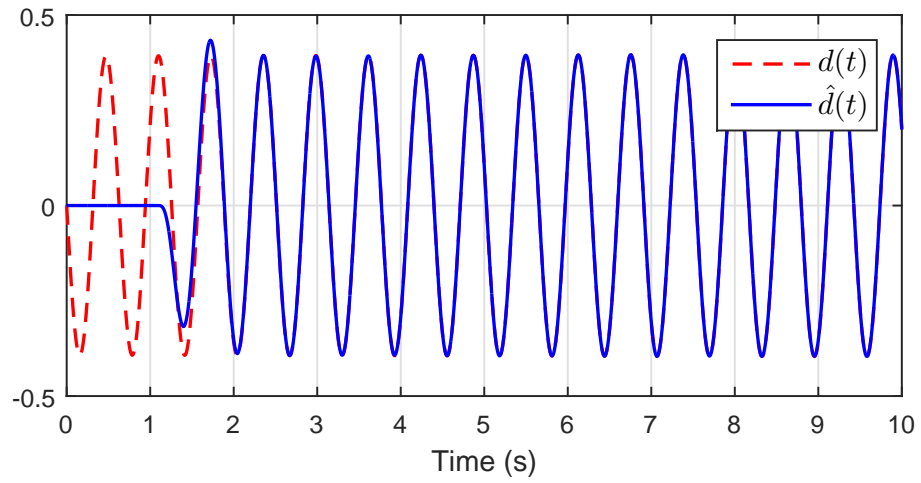


Figura 5.3: Sinal de perturbação senoidal (tracejado) e sua estimativa (sólido).

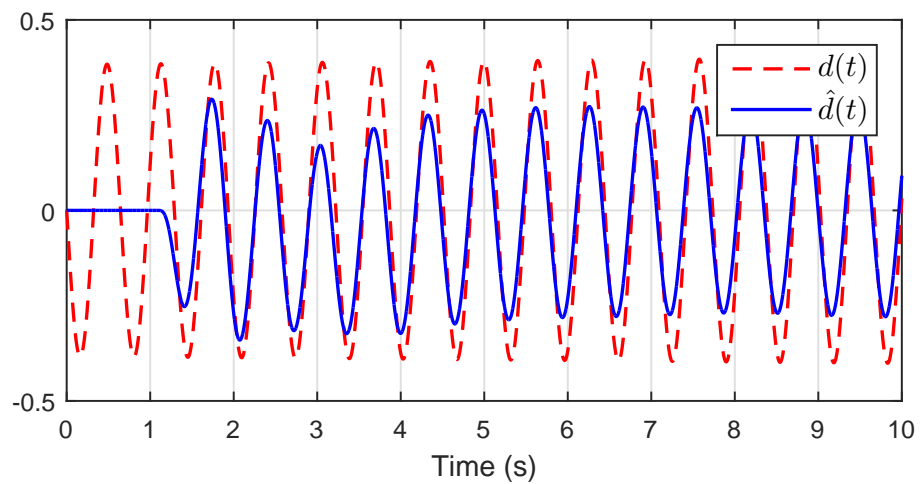


Figura 5.4: Sinal de perturbação senoidal (tracejado) e sua estimativa (sólido), quando as matrizes do sistema A , B e A_d apresentam incertezas.

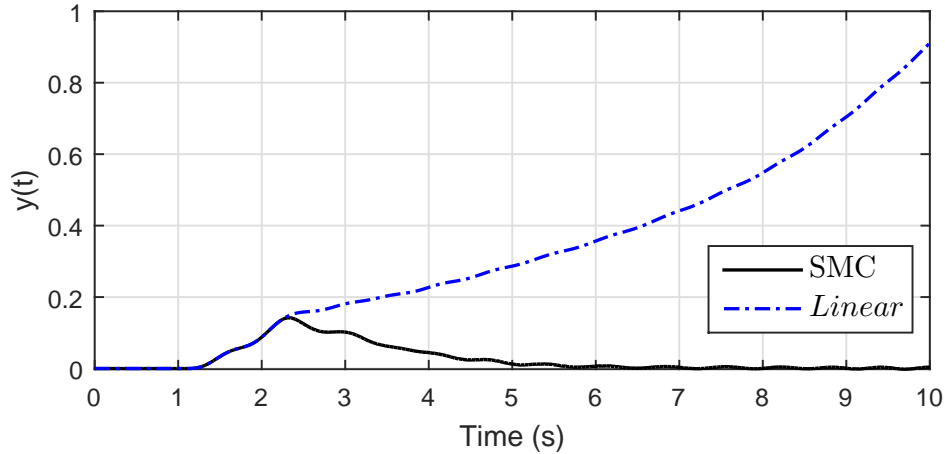


Figura 5.5: Comparação do sinal de saída para o sistema em malha-fechada apresentando incertezas nas matrizes A , B e A_d , utilizando a lei de controle por modos deslizantes proposta em (5.58) com $\rho = 0.5$ (sólido), e a lei de controle linear obtida de (5.58) com $\rho = 0$ (traço-ponto).

perturbação. Não se faz necessária nenhuma restrição a duração do atraso além de ser limitada superiormente. Os resultados de simulação indicam que a estratégia de controle proposta é robusta a incertezas no modelo da planta.

O resultado mais relevante é que um modo deslizante ideal pode ser obtido para plantas com um atraso de medição arbitrariamente longo utilizando o preditor *PDE-Backstepping*. Além disso, a força do Teorema 5.3.1 é que, enquanto preditores não são explicitamente disponíveis para controle não linear em geral, uma vez que nem sempre é possível resolver sistemas não lineares explicitamente, quando a planta é linear existe um preditor explícito que pode ser utilizado mesmo com uma lei de controle não linear.

Capítulo 6

Observador-Preditor com Identificador por Mínimos Quadrados

Neste capítulo, uma estratégia de observação-predição capaz de estimar estado e o sinal de falha ou perturbação em tempo presente a partir dos sinais de entrada e de saída de um sistema que apresenta um atraso de medição variante no tempo de duração arbitrária. As estimativas são obtidas utilizando-se um observador por modos deslizantes com deslocamento no tempo tal como o apresentado no Capítulo 4 em conjunto com um preditor em malha aberta. Para permitir o uso do preditor, o sinal de falha deve ser adiantado para o tempo presente. Para permitir esta predição sem violar a causalidade, é necessário assumir algum conhecimento de sua natureza. Assim, o sinal de falha é modelado como uma soma de funções regressoras conhecidas, ponderadas por parâmetros desconhecidos, que são estimados através de métodos de mínimos quadrados.

6.1 Formulação do Problema

6.1.1 Definição do sistema

Considere o seguinte sistema linear apresentando um atraso de medição conhecido $\tau(t) \geq 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ff(t) \\ y(t) = Cx(t - \tau(t)) \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, e $F \in \mathbb{R}^{n \times l}$. O sinal de entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é conhecido, o estado do sistema $x(t) \in \mathbb{R}^n$ não é mensurável, e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é o sinal

de saída. O sinal de perturbação desconhecido $f(t) \in \mathbb{R}^l$, $l \leq p < n$, representa o efeito de uma falha de atuador. São feitas as seguintes hipóteses:

(H6.1) As matrizes A , B , C , e F são conhecidas. B e F possuem posto completo.

(H6.2) O atraso $\tau(t)$ é diferenciável e satisfaz $0 < \tau(t) \leq \bar{\tau}$ para uma constante conhecida $\bar{\tau}$, e sua derivada no tempo $\dot{\tau}(t)$ satisfaz:

$$\underline{r} \leq \dot{\tau}(t) \leq \bar{r} < 1, \quad |\dot{\tau}(t)| \leq r \quad (6.2)$$

onde r , $\bar{r} > 0$ e \underline{r} são constantes, e \underline{r} pode ser negativa. Estas condições devem ser satisfeitas simultaneamente.

(H6.3) O sinal de perturbação (falha) $f(t)$ é limitado em norma por:

$$\|f(t)\| \leq \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (6.3)$$

(H6.4) O par (A,C) é observável e os zeros invariantes da tripla (A, F, C) se situam no semiplano lateral esquerdo.

(H6.5) $\text{posto}(CF) = \text{posto}(F) = l$.

(H6.6) Os valores passados de $u(t)$ para $t \in [t - \tau, t]$ estão disponíveis para o método de reconstrução de falha.

Das hipóteses **(H6.4)** e **(H6.5)**, assume-se que o sistema (6.1) já se encontra na forma canônica para projeto de observadores [50], como apresentada em (4.4).

6.1.2 Estimação dos sinais atrasados

O objetivo é projetar um observador-preditor que possa estimar o estado e o sinal de perturbação em tempo presente, a partir do sinal de entrada $u(t)$ e do sinal de saída $y(t)$, o qual apresenta um atraso de medição variante no tempo $\tau(t)$ de duração arbitrária. Para tanto, iremos considerar o sistema representado em sua forma τ -atrasada como em (4.8), o que permite utilizar o observador na forma apresentada na Seção 4.2.1 e o método de reconstrução de falha atrasada apresentada no Corolário 4.2.1 para obtermos as estimativas de estado e falha atrasadas, $\hat{x}_\tau(t)$ e $\hat{f}_\tau(t)$.

6.1.3 Modelo para o sinal de falha

Para podermos obter uma estimativa em tempo presente do sinal de perturbação $f(t)$ de sua versão τ -atrasada $f_\tau(t)$, algum conhecimento de sua natureza é necessário. Assim, considera-se que o sinal de perturbação $f(t) = [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_l]^T$ tem cada

uma de suas componentes $f_i(t)$ modeladas como:

$$f_i(t) = d_{i0} + \sum_{k=1}^{\bar{k}} d_{ik} \phi_k(t), \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (6.4)$$

com constantes desconhecidas d_{i0} e d_{ik} e sinais contínuos conhecidos $\phi_k(t)$, $i = 1, 2, \dots, l$, $k = 1, 2, \dots, \bar{k}$. Definindo:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \phi_1(t) & \phi_2(t) & \cdots & \phi_k(t) \end{bmatrix}^T, \quad (6.5)$$

$$d_i = \begin{bmatrix} d_{i0} & d_{i1} & d_{i2} & \cdots & d_{ik} \end{bmatrix}^T, \quad (6.6)$$

cada componente $f_i(t)$ pode também ser escrita como:

$$f_i(t) = d_i^T \Phi(t). \quad (6.7)$$

6.1.4 Mínimos Quadrados Recursivos

Utilizando o observador definido em (4.9), uma estimativa do sinal de perturbação atrasado $\hat{f}_\tau(t)$ é obtido pelo método definido no Corolário 4.2.1. Utilizando a equação (6.7), cada elemento $\hat{f}_{\tau,i}(t)$ de $\hat{f}_\tau(t)$ pode ser descrito como:

$$\hat{f}_{\tau,i}(t) = \hat{d}_i^T \Phi_\tau(t), \quad (6.8)$$

$$\hat{d}_i = \begin{bmatrix} \hat{d}_{i0} & \hat{d}_{i1} & \hat{d}_{i2} & \cdots & \hat{d}_{ik} \end{bmatrix}^T, \quad (6.9)$$

onde $\Phi_\tau(t) = \Phi(t - \tau(t))$, \hat{d}_i é uma estimativa de d_i em (6.6), e as constantes \hat{d}_{ik} são estimativas de suas componentes d_{ik} , $i = 1, 2, \dots, l$, $k = 1, 2, \dots, \bar{k}$. Uma vez que a estimativa do sinal de perturbação $\hat{f}_\tau(t)$ e as funções regressoras atrasadas $\Phi_\tau(t)$ estão disponíveis, é possível obter uma estimativa do vetor de pesos \hat{d} utilizando um método de identificação.

O método dos mínimos quadrados é um dos métodos de identificação mais antigos e talvez um dos mais utilizados. Ele ajusta um modelo matemático na forma apresentada em (6.7) a uma série de dados observados, no nosso caso $\hat{f}_\tau(t)$, minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre os dados observados e computados. No nosso caso em particular, utilizaremos o algoritmo de Mínimos Quadrados Recursivos (*Recursive Least Squares* - RLS) em Tempo Contínuo com fator de esquecimento [102, Seção 4.3.6], para cada componente $\hat{f}_{\tau,i}(t)$ de $\hat{f}_\tau(t)$.

Considere o erro normalizado:

$$e_{\hat{f}_{\tau,i}} = \frac{\hat{f}_{\tau,i} - \hat{d}_i(t)^T \Phi_{\tau}(t)}{\mu^2}, \quad (6.10)$$

$$\mu^2 = 1 + \Phi_{\tau}(t)^T \Phi_{\tau}(t), \quad (6.11)$$

onde $\hat{d}_i(t)$ é o valor instantâneo da estimativa \hat{d}_i no algoritmo RLS e μ^2 é um fator normalizador. Este fator não terá papel crítico, uma vez que sabemos que $\hat{f}_{\tau,i}$ e $\Phi_{\tau}(t)$ são limitadas.

O algoritmo determina uma *matriz de covariância* K_i , utilizando a equação diferencial:

$$\dot{K}_i = \beta K_i - K_i \frac{\Phi_{\tau}(t) \Phi_{\tau}(t)^T}{\mu^2} K_i, \quad K_i(0) = K_{i,0}, \quad (6.12)$$

onde a estimativa inicial $K_{i,0}$ é uma matriz simétrica positiva definida. O fator de esquecimento $\beta > 0$ previne que K_i se torne muito pequena, reduzindo demasiadamente a velocidade do processo de adaptação. Por outro lado, utilizar um valor muito grande para β pode instabilizar a matriz K_i . Neste caso, é possível utilizar um limite para a norma da matriz de covariância, fazendo que $\dot{K}_i = 0$ quando $\|K_i\| > R_0$, onde $R_0 > 0$ é uma matriz constante.

As estimativas \hat{d}_i são atualizadas utilizando:

$$\dot{\hat{d}}_i(t) = K_i e_{\hat{f}_{\tau,i}} \Phi_{\tau}(t). \quad (6.13)$$

Este algoritmo é equivalente a minimizar a função custo

$$J(\hat{d}_i) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\beta(t-\theta)} \frac{(\hat{f}_{\tau,i} - \hat{d}_i^T \Phi_{\tau}(t))^2}{\mu^2} d\theta + \frac{1}{2} e^{-\beta t} (\hat{d}_i(t) - \hat{d}_i(0))^T K_{i,0}^{-1} (\hat{d}_i(t) - \hat{d}_i(0)), \quad (6.14)$$

de onde pode se observar que o fator de esquecimento β minimiza a influência tanto da escolha do valor inicial para a estimativa $\hat{d}_i(0)$ quanto de valores passados. A velocidade de convergência do algoritmo pode então ser controlada pela seleção de um valor inicial $\hat{d}_i(0)$ adequado ao problema e pelo ajuste do fator de esquecimento β .

Uma das principais vantagens da lei adaptativa (6.12)-(6.13) é que pode ser demonstrado [102, Teorema 4.3.2] que $e_{\hat{f}_{\tau,i}}$, $\dot{\hat{d}}_i(t)$ e $\hat{d}_i(t)$ são limitados mesmo se $\Phi_{\tau}(t)$ não for limitada. Além disso, é garantido que se $\Phi_{\tau}(t)$ for limitado e persistentemente excitante, a estimativa $\hat{d}_i(t)$ converge exponencialmente para o valor ótimo \hat{d}_i .

Utilizando a estimativa do vetor de pesos $\hat{d}_i(t)$, uma estimativa para a falha

em tempo presente $\hat{f}(t)$ pode ser obtida das funções regressoras $\Phi(t)$ através da expressão:

$$\hat{f}_i(t) = \hat{d}_i(t)^T \Phi(t), \quad i = 0, 1, \dots, l, \quad (6.15)$$

$$\hat{f}(t) = \begin{bmatrix} \hat{f}_1(t) & \hat{f}_2(t) & \dots & \hat{f}_q(t) \end{bmatrix}^T. \quad (6.16)$$

Definindo o erro de estimação do perturbação:

$$e_f(t) \triangleq \hat{f}(t) - f(t). \quad (6.17)$$

O Corolário 4.2.1 mostra que a estimativa atrasada da falhas $\hat{f}_\tau(t) \rightarrow f_\tau(t)$ para $t \rightarrow \infty$. Usando as estimativas \hat{d}_i , podemos ver que:

$$e_f(t) \triangleq \left(\hat{d}_i(t) - d_i \right)^T \Phi(t). \quad (6.18)$$

Como $\hat{d}_i(t)$ é obtido da estimativa atrasada da perturbação $\hat{f}_\tau(t)$, $e_f(t)$ será minimizado com $e_{\hat{f}_{\tau,i}}$ pelo algoritmo de identificação, mas ainda dependerá da precisão da reconstrução dada pela escolha de δ em (4.38).

6.1.5 Filtro *Least-Mean Squares* em Tempo Contínuo

O algoritmo RLS apresentado na seção anterior somente pode ser aplicado quando as funções regressoras são determinísticas. Quando estas são funções estocásticas, uma opção para a identificação é aplicar um filtro *Least-Mean Squares* (LMS) em Tempo Contínuo [103, 104] que é descrito aqui. Este é um dos algoritmos mais utilizados em filtragem adaptativa devido a baixa complexidade computacional e pela propriedade de convergência em ambientes estacionários [105, Cap. 3].

Assim, considere o valor esperado (média estatística) para o erro quadrático:

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= \mathbf{E}[(\hat{f}_{\tau,i}(t) - \hat{d}_i^T \Phi_\tau(t))^2] \\ &= \mathbf{E}[\hat{f}_{\tau,i}(t)^2] - 2\mathbf{E}[\hat{f}_{\tau,i}(t)\Phi_\tau^T(t)]\hat{d}_i + \hat{d}_i^T \mathbf{E}[\Phi_\tau(t)\Phi_\tau^T(t)]\hat{d}_i \\ &= \mathbf{E}[\hat{f}_{\tau,i}(t)^2] - 2\mathcal{P}_i^T \hat{d}_i + \hat{d}_i^T \mathcal{R}_i \hat{d}_i. \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde $\mathbf{E}[\cdot]$ é a média estatística de $[\cdot]$,

$$\mathcal{P}_i = \mathbf{E}[\hat{f}_{\tau,i}(t)\Phi_\tau(t)], \quad (6.20)$$

$$\mathcal{R}_i = \mathbf{E}[\Phi_\tau(t)\Phi_\tau^T(t)], \quad (6.21)$$

e $\hat{f}_{\tau,i}(t)$ e \hat{d}_i^T são definidas em (6.8) e (6.9).

O vetor $\mathcal{P}_i \in \mathbb{R}^{(k+1)}$ é a correlação cruzada entre $\hat{f}_{\tau,i}(t)$ e $\Phi_\tau(t)$ em atraso zero

e $\mathcal{R}_i \in \mathbb{R}^{(\bar{k}+1) \times (\bar{k}+1)}$ é a matriz de auto-correlação de $\Phi_\tau(t)$ em atraso zero. Uma propriedade importante da matriz de auto-correlação é que ela é simétrica positiva semidefinida. Na prática, como em geral as funções regressoras são escolhidas como sendo linearmente independentes, na maior parte dos casos a matriz in \mathcal{R}_i pode ser assumida como sendo positiva definida [105, Seção 2.3]. Além disso, como \mathcal{R}_i é uma matriz Hermitiana, todos os seus autovalores são reais.

O mínimo de ξ_i pode ser encontrado fazendo o seu gradiente em relação a \hat{d}_i igual a zero:

$$\nabla_{\hat{d}_i} \xi_i = -2\mathcal{P}_i + 2\mathcal{R}_i \hat{d}_i = 0. \quad (6.22)$$

A solução ótima de Wiener é dada então por $\hat{d}_{i,\text{opt}} = \mathcal{R}_i^{-1} \mathcal{P}_i$. Este resultado também pode ser obtido através da solução quando $t \rightarrow \infty$ de:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{d}_i(t) &= -\frac{\gamma}{2} \nabla_{\hat{d}_i} \xi_i, \\ \frac{d}{dt} \hat{d}_i(t) &= -\gamma \mathcal{R}_i \hat{d}_i(t) + \gamma \mathcal{P}_i, \end{aligned} \quad (6.23)$$

onde $\gamma > 0$ é uma constante positiva arbitrária (ganho ou fator de adaptação). A matriz de autocorrelação \mathcal{R}_i e o vetor de correlação cruzada \mathcal{P}_i não estão disponíveis diretamente. Assim, propomos o seguinte algoritmo para obtenção de uma estimativa em tempo contínuo:

$$\mathcal{P}_i(t) = \begin{cases} \hat{f}_{\tau,i}(0) \Phi_\tau(0) & , t = 0 \\ \frac{1}{t} \int_0^t \hat{f}_{\tau,i}(\theta) \Phi_\tau(\theta) d\theta & , t > 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

$$\mathcal{R}_i(t) = \begin{cases} \Phi_\tau(0) \Phi_\tau^T(0) & , t = 0 \\ \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_\tau(\theta) \Phi_\tau^T(\theta) d\theta & , t > 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

Substituindo (6.24) e (6.25) em (6.23), obtemos:

$$\frac{d}{dt} \hat{d}_i(t) = -\gamma \mathcal{R}_i(t) \hat{d}_i(t) + \gamma \mathcal{P}_i(t), \quad (6.26)$$

que é o algoritmo LMS em tempo contínuo. A equação (6.26) é um sistema linear variante no tempo forçado. Da hipótese **(H6.3)** e levando em conta que todos as componentes de $\Phi(t)$ são contínuas e limitadas, pode ser visto que $\mathcal{P}_i(t)$ também é limitada. Desta forma, pode ser verificado que o sistema (6.26) é BIBO (*Bounded-Input, Bounded-Output*) em relação a $\gamma \mathcal{P}_i(t)$ e que a norma de $\hat{d}_i(t)$ é limitada por [104, eq. (17)]:

$$\|\hat{d}_i(t)\| \leq \|\hat{d}_i(0)\| e^{-\gamma \mu_R t} + \gamma \int_0^t e^{-\gamma \mu_R (t-\theta)} \|\mathcal{P}_i(\theta)\| d\theta \quad (6.27)$$

com $0 < \mu_R < \lambda_{\min}(\mathcal{R}_i(t))$, onde $\lambda_{\min}(\mathcal{R}_i(t))$ é o mínimo dos autovalores de $\mathcal{R}_i(t)$. Da equação (6.27) pode ser visto que a velocidade de convergência depende do parâmetro γ e da condição inicial $\hat{d}_i(0)$.

A estimativa da falha em tempo presente $\hat{f}(t)$ pode então ser obtida usando a expressão (6.15) tal como no algoritmo RLS.

6.2 Preditor Baseado na Fórmula de Variação de Constantes

Aqui, revisitaremos a expressão apresentada na Seção 5.2.3 como uma das alternativas ao preditor obtido a partir da representação do atraso por uma PDE de transporte. Como o sistema (6.1) é linear, o estado corrente $x(t)$ pode ser obtido através do estado atrasado $x_\tau(t) = x(t - \tau(t))$, utilizando a solução analítica para o sistema baseada na fórmula de Variação de Constantes [106], [100, Seção 4.4]:

$$x(t) = e^{A\tau(t)} x_\tau(t) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A(t-\theta)} [Bu(\theta) + Ff(\theta)] d\theta \quad (6.28)$$

se todos os sinais forem conhecidos.

Utilizando as estimativas $\hat{x}_\tau(t)$ e $\hat{f}_\tau(t)$ obtidas do observador (4.9), e considerando que a falha foi modelada como em (6.7), uma estimativa para o sinal de perturbação em tempo presente $\hat{f}(t)$ é obtida utilizando um dos algoritmos de identificação propostos, o RLS (6.12)-(6.13) ou o LMS (6.24)-(6.26). Então, substituindo $x_\tau(t)$ por $\hat{x}_\tau(t)$ e $f(t)$ por $\hat{f}(t)$, a estimativa do estado corrente é obtida pela expressão:

$$\hat{x}(t) = e^{A\tau(t)} \hat{x}_\tau(t) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A(t-\theta)} [Bu(\theta) + F\hat{f}(\theta)] d\theta. \quad (6.29)$$

O erro de predição $e_x(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ será então dado por:

$$e_x(t) = e^{A\tau(t)} e(t) + F \int_{t-\tau(t)}^t e^{A(t-\theta)} e_f(\theta) d\theta \quad (6.30)$$

No Teorema 4.2.1 é mostrado que o erro de estimação do estado atrasado $e(t)$ converge exponencialmente a zero. Desta forma, pode ser visto que o erro de estimação irá atingir seu mínimo juntamente com $e_f(t)$. Além disso, uma vez que o erro é integrado durante um período de tempo de duração $\tau(t)$, este resíduo será menor para atrasos mais curtos.

A tabela 6.1 apresenta as equações completas para a estratégia de observador-preditor proposta e que é ilustrada na figura 6.1.

Tabela 6.1: Sumário do método proposto

<p>1) Sistema</p>	<p>i. Descrição do sistema: $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ff(t) \\ y(t) = Cx(t - \tau(t)) \end{cases}$</p> <p>ii. Modelo de falha: $\Phi(t) = [1 \ \phi_1(t) \ \phi_2(t) \ \cdots \ \phi_k(t)]^T,$ $d_i = [d_{i0} \ d_{i1} \ d_{i2} \ \cdots \ d_{ik}]^T,$ $f_i(t) = d_i^T \Phi(t).$</p>
<p>2) Representação do sistema deslocada no tempo</p> <p>Nota: Contribuição original desta tese, publicada em [11, 12, 15, 16]</p>	<p>i. Variáveis atrasadas: $x_\tau(t) = x(t - \tau(t)), \ f_\tau(t) = f(t - \tau(t)),$ $u_\tau(t) = u(t - \tau(t)).$</p> <p>ii. Representação deslocada no tempo: $\begin{cases} \dot{x}_\tau(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) [Ax_\tau(t) + Bu_\tau(t) + Ff_\tau(t)] \\ y(t) = Cx_\tau(t) \end{cases}$</p>
<p>3) <i>Time shifted</i> SMO</p> <p>Nota: Contribuição original desta tese, publicada em [11, 12, 15, 16]</p>	$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_\tau(t) = (1 - \dot{\tau}(t)) [A\hat{x}_\tau(t) + Bu_\tau(t) - G_l e_y + G_n \nu] \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}_\tau(t) \end{cases}$
<p>4) a) Identificação de falha por RLS (Regressores determinísticos)</p>	<p>i. Erro normalizado: $e_{\hat{f}_{\tau,i}} = \frac{\hat{f}_{\tau,i} - d_i(t)^T \Phi_\tau(t)}{\mu^2}, \quad \mu^2 = 1 + \Phi_\tau(t)^T \Phi_\tau(t).$</p> <p>ii. Matriz de covariância: $\dot{K}_i = \beta K_i - K_i \frac{\Phi_\tau(t) \Phi_\tau(t)^T}{\mu^2} K_i, \quad K_i(0) = K_{i,0}.$</p> <p>iii. Atualização da estimativa: $\dot{\hat{d}}_i(t) = K_i e_{\hat{f}_{\tau,i}} \Phi_\tau(t).$</p>
<p>4) b) Identificação de falha por LMS (Regressores estocásticos)</p> <p>Nota: Algoritmo das estimativas é contribuição original desta tese, publicado em [15, 16]</p>	<p>i. Estimativa da correlação cruzada: $\mathcal{P}_i(t) = \begin{cases} \hat{f}_{\tau,i}(0) \Phi_\tau(0) & , t = 0 \\ \frac{1}{t} \int_0^t \hat{f}_{\tau,i}(\theta) \Phi_\tau(\theta) d\theta & , t > 0 \end{cases}$</p> <p>ii. Estimativa da autocorrelação: $\mathcal{R}_i(t) = \begin{cases} \Phi_\tau(0) \Phi_\tau^T(0) & , t = 0 \\ \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_\tau(\theta) \Phi_\tau^T(\theta) d\theta & , t > 0 \end{cases}$</p> <p>iii. Atualização da Estimativa: $\dot{\hat{d}}_i(t) = -\gamma \mathcal{R}_i(t) \hat{d}_i(t) + \gamma \mathcal{P}_i(t).$</p>
<p>5) Predição do sinal de falha</p>	$\hat{f}_i(t) = \hat{d}_i(t)^T \Phi(t), \quad i = 0, 1, \dots, l.$
<p>6) Predição do estado em malha aberta</p>	$\hat{x}(t) = e^{A\tau(t)} \hat{x}_\tau(t) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A(t-\theta)} [Bu(\theta) + F\hat{f}(\theta)] d\theta$

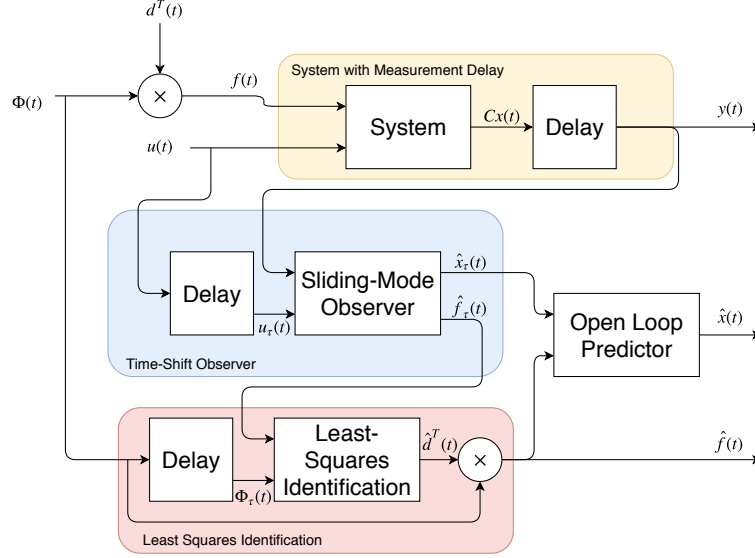


Figura 6.1: Diagrama para a estratégia proposta.

6.3 Aplicação a Completação Inteligente

De forma a demonstrar uma aplicação em um cenário real para a estratégia proposta vamos considerar o modelo simplificado de atuador hidráulico para válvulas de completção inteligente proposto na seção 3.1, descrito pela equação (3.15). Neste problema, o atrito é desconhecido mas pode ser descrito utilizando um modelo estático+Coulomb+viscoso [84, sec 1.2.3], como apresentado na Figura 3.3 (c), pela expressão:

$$\begin{cases} F_r(\dot{x}_p) = F_S, & \dot{x}_p < v_{th} \\ F_r(\dot{x}_p) = F_C + k_1 \dot{x}_p, & \dot{x}_p \geq v_{th} \end{cases} \quad (6.31)$$

onde F_S é a força de atrito estática, F_C é a força de atrito Coulomb próxima a velocidade zero, k_1 é o coeficiente de atrito e v_{th} é o limiar de velocidade onde ocorre a mudança do comportamento de estático para viscoso. Desta expressão, pode ser visto que após o limiar ser ultrapassado, o atrito pode ser modelado como em (6.4), com $d_0 = F_C$, $d_1 = k_1$ e $\phi_1(t) = \dot{x}_p$.

O objetivo será identificar os parâmetros de atrito logo após a instalação, que servirão de linha base para o acionador. No caso de ocorrência de incrustação na válvula ocorrerá um aumento no coeficiente de atrito devido ao material depositado [4–6].

6.3.1 Simulação Numérica

Devido a natureza do atrito, pode ser visto que o sinal desconhecido $f(x_2(t)) = F_r(\dot{x}_p)$ é limitado, satisfazendo a hipótese **(H6.3)**. Assim, o observador deslocado no tempo proposto em (4.9) pode ser utilizado para obter uma estimativa atrasada da força de atrito. Como a matriz C em (3.17) é conhecida, a variável atrasada $x_2(t - \tau_o)$ é obtida dividindo a vazão de saída (q_o , medida) pela área do pistão (S_p , conhecida). Adicionalmente, se a velocidade de deslocamento da camisa da válvula é variada de forma que x_2 seja um sinal persistentemente excitante, o algoritmo RLS apresenta garantia da convergência [102, Teorema 4.3.4], permitindo a obtenção de estimativas para F_C e k_1 em (6.31). Estes parâmetros representam a informação desejada para o diagnóstico da força de atrito na válvula. Assim, aplicando a versão implícita da equação (6.29)

$$\hat{x}(t) = e^{A\tau_o} \hat{x}_\tau + \int_{t-\tau_o}^t e^{A(t-\theta)} [Bu(\theta) + F\hat{f}(x_2(\theta))] d\theta, \quad (6.32)$$

obtemos uma estimativa em tempo presente das variáveis de estado, completando o diagnóstico.

Uma simulação numérica é utilizada para validar a estratégia. A tabela 6.2 apresenta os parâmetros da válvula de completção inteligente (ICV), inspirados em um modelo comercial, utilizados na simulação. Esta válvula é projetada para ser deslocada com uma pressão diferencial de atuação maior que 3000 psi.

Tabela 6.2: Parâmetros de simulação para a ICV

Parâmetro	Valor (em unidades SI)
Massa do pistão (m_p)	100 Kg
Área do pistão (S_p)	$10^{-6} m^2$
Comprimento da linha (ℓ_{pipe})	600 m
Resistência total de entrada (r_i)	$1.47 \times 10^{14} Pa \cdot s/m^3$
Resistência total de saída (r_o)	$4.91 \times 10^{13} Pa \cdot s/m^3$
Atraso de propagação (τ_o)	0.4107 s
Atrito Estático (F_S)	$2.08 \times 10^4 N$ (*)
Atrito Coulomb (F_C)	$2.08 \times 10^4 N$ (†)
Coefficiente de atrito viscoso (k_1)	$2.60 \times 10^4 N \cdot s/m$
Deslocamento máximo do pistão ($x_{p,max}$)	0.3 m

(*) equivalente a uma pressão de 3000 psi aplicada ao pistão.

(†) equivalente a uma pressão de 2900 psi aplicada ao pistão.

Devido aos valores de alguns parâmetros apresentarem uma magnitude muito grande, a equação de velocidade foi escalada por um fator 10^{-6} , de forma a evitar que a matriz A ficasse mal condicionada. Aplicando os valores dos parâmetros, as

matrizes da representação de estados na forma canônica para observadores (4.4) são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & -1.96 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-8} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Quando as variáveis de estado são utilizadas fora do laço de integração, para cálculo do atrito ou para a avaliação do batente, elas são escaladas de volta pelo fator 10^6 para que estas possam ser computadas em unidades do SI. Uma pressão de atuação $P_s = 3010 + 100 \sin(15t)$ (psi) foi utilizada para o deslocamento da válvula de forma a garantir um sinal de velocidade persistentemente excitante, garantindo a convergência do algoritmo RLS.

A posição do pistão (x_1) é uma variável não-observável. No entanto, é possível assumir que a condição inicial é conhecida para as duas variáveis de estado, uma vez que o pistão pode ser deslocado até um batente na posição $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ antes do diagnóstico ser efetuado. Apesar de no modelo simplificado utilizado o estado atrasado $x_2(t - \tau_o)$ ser mensurável, utilizaremos um observador para estado atrasado, já que esta pode não ser uma condição real em outras aplicações. Um observador deslocado no tempo (4.9) pode ser projetado para reconstruir a força de atrito atrasada $f(x_2(t - \tau_o))$.

Como o sistema já se encontra na forma canônica para observadores (4.4), o observador para reconstrução de falhas (4.9) é projetado da seguinte forma:

1. Escolha uma matriz estável $\mathcal{A}_{22}^* \in \mathbb{R}^{(p \times p)}$ e determine a matriz G_l em (4.19) utilizando as partições de \mathcal{A} . Esta solução não é única e utilizamos $\mathcal{A}_{22}^* = [-10]$ para alocar os pólos de $A - G_l C$ em $\{0, -10\}$, levando-se em conta que o pólo em 0 vem de um estado não-observável e, portanto, não pode ser mudado. Em teoria, isto poderia resultar em um sinal não limitado no sistema de malha fechada. Para evitar este problema, uma função de saturação (batente) em (3.18) é implementada no observador de forma a manter x_1 limitada.
2. De (4.15) e (4.19) obtemos:

$$G_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G_l = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.008 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

3. Escolha P_0 satisfazendo $(\mathcal{A}_{22}^*)^T P_0 + P_0 (\mathcal{A}_{22}^*) < 0$. No nosso caso $P_0 = 0.05$ foi utilizado.
4. Determine ρ satisfazendo (4.21). No nosso caso, utilizamos uma constante $\rho = 2.7 \times 10^4$.

5. Para reconstruir a falha, foi utilizado $\delta = 0.5 \times 10^{-6}$ para a aproximação do controle equivalente ν_δ em (4.38).

As Figuras 6.2 e 6.3 comparam o valor real de $f(x_2(t - \tau_o))$ com sua estimativa $\hat{f}(x_2(t - \tau_o))$, mostrando uma reconstrução bastante precisa (menos de 1 psi de diferença). O atrito é representado como força por área do pistão em psi, de forma a permitir uma comparação com a pressão de atuação.

Utilizando a estimativa da força de atrito $\hat{f}(x_2(t - \tau_o))$, é possível aplicar o algoritmo RLS descrito pelas equações (6.12) e (6.13) para estimar os parâmetros $d_0 = F_C$ e $d_1 = k_1$ da equação (6.31), usando o estado atrasado medido $x_2(t - \tau_o)$ como função regressora conhecida $\phi_1(t - \tau_o)$ em (6.8). A Figura 6.4 compara os valores real e estimado para o atrito utilizando o algoritmo RLS com fator de esquecimento $\beta = 5$ em (6.12). A Figura 6.5 mostra o erro de estimação do atrito $e_f(t) = f(x_2(t)) - \hat{f}_{RLS}(x_2(t))$, onde $\hat{f}_{RLS}(x_2(t))$ é a estimativa de $f(x_2(t))$ identificada utilizando o algoritmo RLS. Após algum transiente, o erro rapidamente decai a menos de 2 psi. O tempo de convergência pode ser reduzido se a escolha inicial para os parâmetros fosse mais próxima aos valores reais, o que poderia acontecer, por exemplo em atuações consecutivas da válvula.

O desempenho da estratégia de observador-preditor proposta é comparada com a apresentada em [64] onde a estimativa atrasada para a falha é utilizada como estimativa em tempo presente na equação (6.32). As Figuras 6.6 e 6.7 comparam as variáveis de estado e suas estimativas obtidas utilizando o preditor em malha aberta (6.32), mostrando uma boa convergência da estratégia proposta após alguns segundos. As estimativas de posição e velocidade da válvula podem ser utilizadas para verificar o seu correto funcionamento. Por outro lado, uma vez que a perturbação apresenta variações rápidas, a estratégia proposta por LÉCHAPPÉ *et al.* [64] obtém estimativas para os estados com erros residuais maiores.

O método aplicado para este problema considerou que o estado atrasado $x_2(t - \tau_o)$ é mensurável, o que não pode ser verdadeiro para outras aplicações. Na verdade, utilizando o modelo que leva em conta a compressibilidade do fluido, o efeito da dinâmica das linhas capilares de controle faria com que a saída do sistema não fosse diretamente proporcional a velocidade. Neste caso, a estimativa $\hat{x}_2(t - \tau_o)$ obtida do observador deslocado no tempo poderia ser utilizada para a reconstrução pelo algoritmo RLS e no preditor em malha aberta.

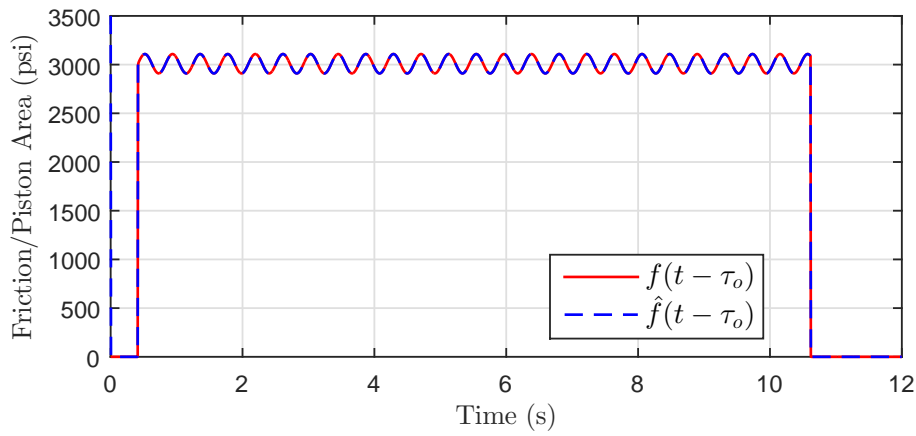


Figura 6.2: Comparação dos valores real e reconstruído para a força de atrito atrasada $F_r(x_2(t - \tau_o))$ obtida usando o observador deslocado no tempo do Corolário 4.2.1. A válvula fo atuada com uma pressão $P_s = 3010 + 100 \sin(15t)$ (psi). O atrito é representado como força por área do pistão de forma a permitir sua comparação com a pressão de atuação.

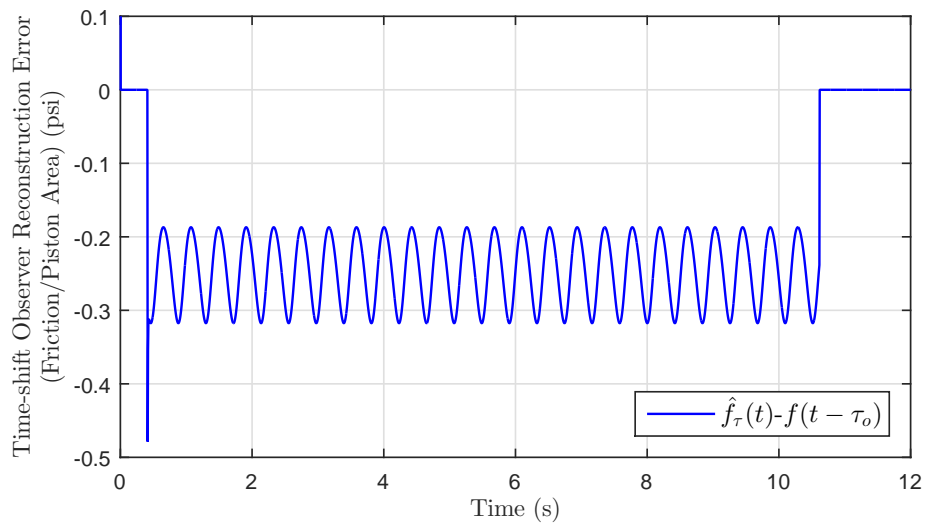


Figura 6.3: Erro de estimação dos sinais apresentados na Figura 6.2. O resíduo máximo do erro é da ordem de 0.5 psi, que é consideravelmente pequeno quando comparado com as magnitudes do sinal de atrito $f(t)$ (em torno de 3000 psi).

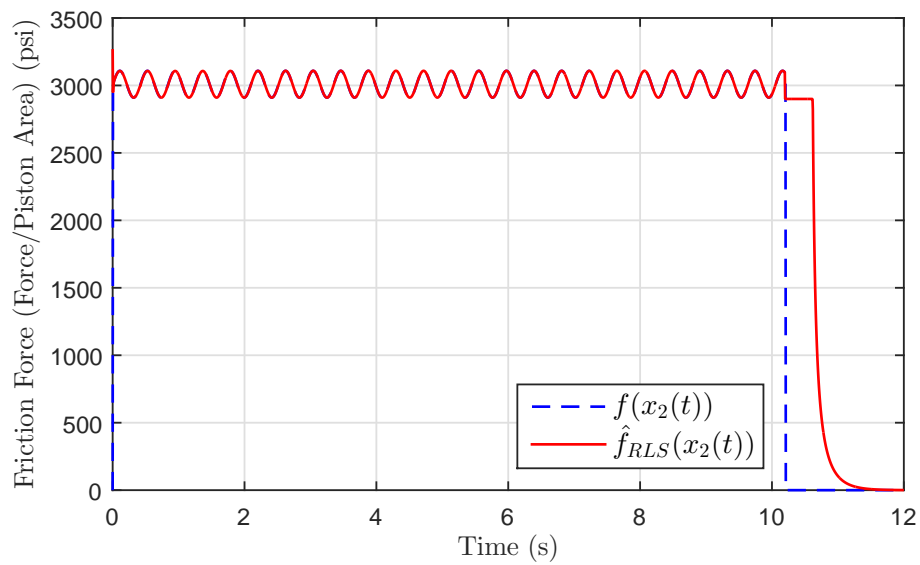


Figura 6.4: Comparação dos valores real e estimado para o atrito utilizando o algoritmo de indentificação RLS com $\beta = 5$.

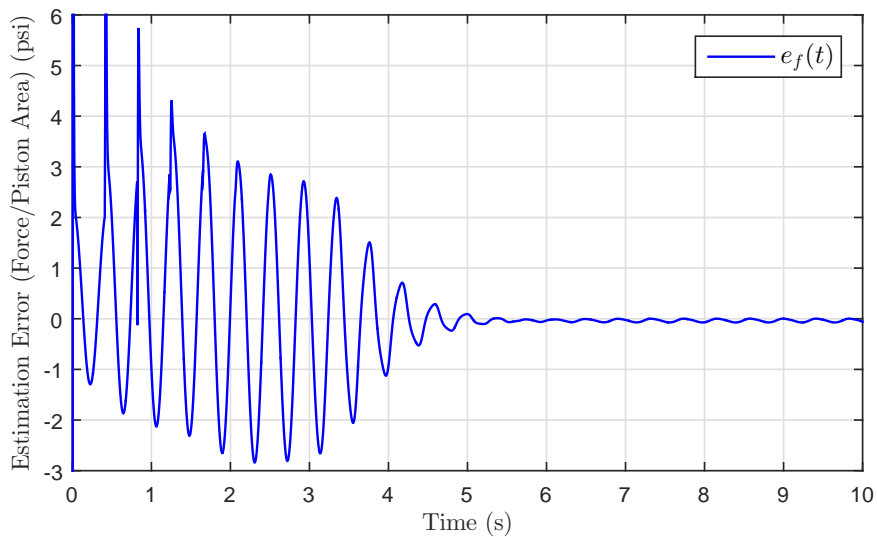


Figura 6.5: Erro de estimativa da força de atrito em (6.18) para os sinais apresentados na Figura 6.4.

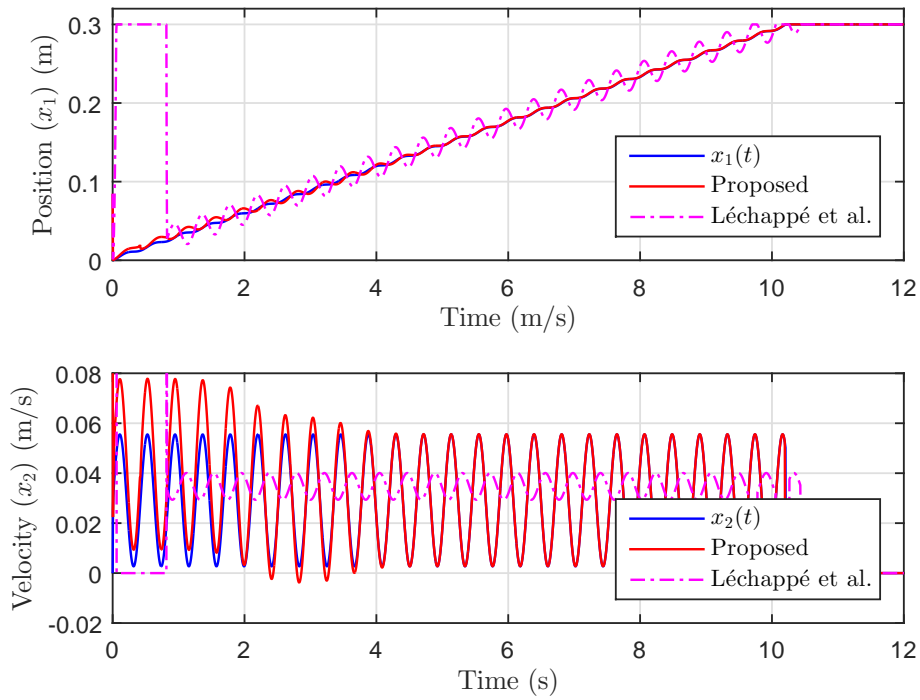


Figura 6.6: Variáveis de estado x_1, x_2 comparado a suas estimativas \hat{x}_1, \hat{x}_2 , obtidas usando o método proposto (Tabela 6.1), e suas estimativas utilizando o preditor proposto em [64].

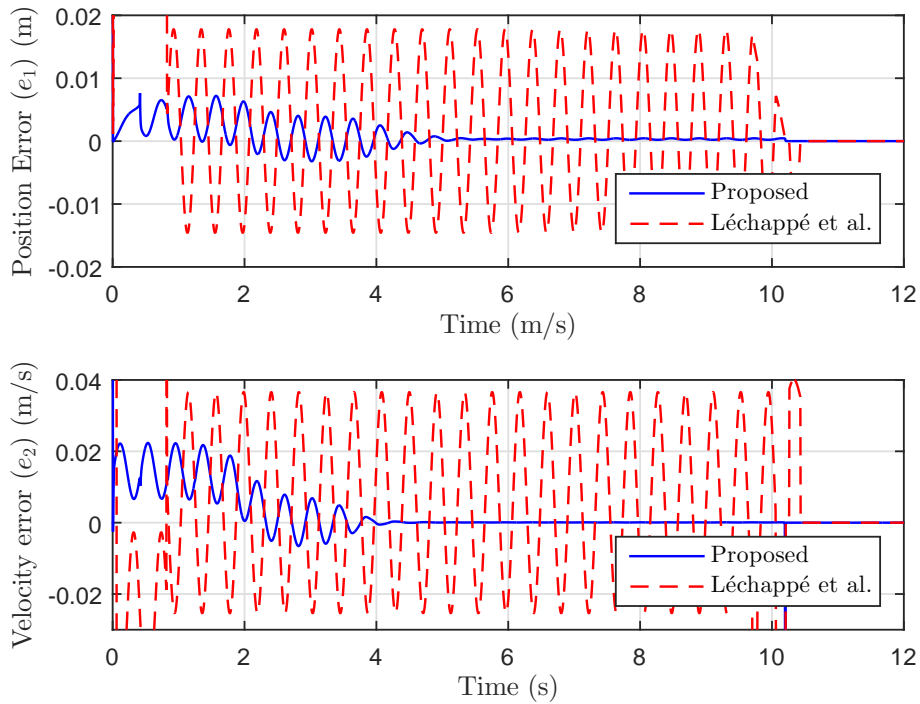


Figura 6.7: Erro de estimação para os sinais apresentados na Figura 6.6.

6.4 Sumário dos Resultados

Este capítulo apresentou uma estratégia de observador-preditor por modos deslizantes para estimação de estado e reconstrução de falhas em tempo presente, para sistemas que apresenta atraso de medição variante no tempo de duração arbitrária. O método faz uso do observador por modos deslizantes desenvolvido no Capítulo 4 para obter estimativas atrasadas do estado e da falha. Utilizando um método de identificação por mínimos quadrados, é possível estimar os parâmetros desconhecidos do modelo da falha e, conseqüentemente, obter sua estimativa em tempo presente. Então, utilizando um preditor em malha aberta é possível obter também a estimativa do estado. Apesar de simples, não foi encontrada na literatura estratégia similar.

Foi apresentada também a utilização desta estratégia em uma aplicação de engenharia de poços a fim de diagnosticar a movimentação de uma válvula de completação inteligente. Observe que, apesar de ter sido utilizada identificação por mínimos quadrados, outros modelos de falha mais gerais podem ser utilizados em conjunto com outros métodos de identificação como, por exemplo, Redes Neurais.

Capítulo 7

Preditor em Malha Aberta na Presença de Incertezas

Este capítulo apresenta um método para estabilização de sistemas lineares invariantes no tempo apresentando atrasos de medição variantes no tempo conhecidos e sujeitos a um sinal de perturbação casada que pode estar representando uma falha de atuador. Parte dos estados são conhecidos (medidos) no tempo presente. A metodologia utiliza um preditor em malha aberta em conjunto com um observador baseado no Algoritmo *Super-Twisting*. O observador permite a reconstrução do sinal de perturbação não modelado, sendo robusto a incertezas paramétricas, enquanto o preditor avança no tempo o sinal de saída atrasado. Uma lei de controle por modos deslizantes é projetada para obter a estabilização global do sistema mesmo na presença de incertezas paramétricas e atrasos.

7.1 Formulação do Problema

7.1.1 Descrição do Sistema

Considere um sistema linear invariante no tempo que apresenta uma falha de atuador representada por uma entrada desconhecida e não-mensurável $d(t) \in \mathbb{R}^p$ e possíveis incertezas paramétricas, agrupadas no termo $\delta(x, t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + d(t)] + D\delta(x, t) \\ y(t) = Cx(t - \tau(t)), \end{cases} \quad (7.1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada conhecida do sistema. A saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $q \leq p < n$, apresenta um atraso de medição variante no tempo conhecido $\tau(t)$. As matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times h}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são consideradas conhecidas.

Por simplicidade, adotaremos a notação $x := x(t)$ para as variáveis no tempo presente e $x_\tau := x(t - \tau(t))$ para variáveis atrasadas.

Neste sistema, o vetor de estado x é parcialmente conhecido, de tal forma que o sistema pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} (u + d) + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \delta(x, t) \\ y(t) = x_{\tau,2}, \end{cases} \quad (7.2)$$

onde $x_{\tau,2} := x_2(t - \tau(t))$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n-p}$ é conhecido e $x_2 \in \mathbb{R}^p$ é não-mensurável. As matrizes A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} e B_1 possuem as dimensões adequadas. Essa classe de sistemas pode representar, por exemplo, um caso onde x_1 modela a dinâmica de um atuador, tal como uma válvula piloto, e x_2 a dinâmica do processo, cujo efeito só será percebido de forma atrasada na saída.

Sobre o sistema, as seguintes hipóteses são assumidas

(H7.1) O vetor de estados $x_1(t)$ é conhecido no tempo presente.

(H7.2) A falha do atuador $d(t)$ é limitada em norma de tal forma que:

$$\|d(t)\| \leq \alpha. \quad (7.3)$$

(H7.3) A derivada do atraso $\dot{\tau}$ é limitada em norma por uma constante conhecida $\bar{r} > 0$, não necessariamente pequena, tal que:

$$\|\dot{\tau}\| \leq \bar{r}. \quad (7.4)$$

(H7.4) O par (A, B) é controlável.

(H7.5) A matriz B possui posto completo.

(H7.6) Os efeitos das incertezas paramétricas $\delta(x, t)$ são limitados em norma por

$$\|\delta(x, t)\| \leq \bar{\delta}\|x\|, \quad (7.5)$$

onde $\bar{\delta} > 0$ é uma constante conhecida.

Apesar do estado x_1 ser medido pela hipótese **(H7.1)**, utilizaremos um observador para esta variável de forma a obter a reconstrução da perturbação. Além disso, observe que neste caso, que o modelo para as incertezas paramétricas na hipótese **(H7.6)** é mais geral que o utilizado na seção 4.2.2.

O objetivo é desenvolver uma lei de controle que permita estabilizar o sistema, mesmo na presença da falha $d(t)$ e de incertezas paramétricas, além de permitir a reconstrução do sinal de falha para diagnóstico do sistema.

7.2 Observador-Preditor

Nesta seção será desenvolvido um observador-preditor capaz de estimar o valor presente da variável x_2 bem como reconstruir a perturbação d , a partir da saída do sistema y .

7.2.1 Preditor para Sistemas Sujeitos a Incertezas

Inicialmente consideremos o sistema (7.2) sem a presença de incertezas paramétricas ($\delta(x, t) = 0$). Considerando a hipótese (H7.1), é possível verificar que a variável x_2 pode ser vista como um sistema linear com uma entrada conhecida, o vetor de estado x_1 , e uma saída atrasada $y = x_2(t - \tau(t))$. Assim, é possível se obter uma estimativa \hat{x}_2 a partir da solução exata do sistema sem incertezas, pelo método de variação de constantes [60, 63, 75], dada por:

$$\hat{x}_2 = e^{A_{22}\tau(t)}x_{\tau,2} + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_{22}(t-\theta)}A_{21}x_1(\theta)d\theta. \quad (7.6)$$

A principal vantagem desta abordagem é que, sendo o sistema totalmente conhecido, o valor estimado \hat{x}_2 é uma previsão exata de x_2 a partir de seu valor atrasado $x_{\tau,2}$, obtida em tempo finito.

No caso de existirem incertezas paramétricas, a solução exata para o sistema de x_2 será dada por

$$x_2 = e^{A_{22}\tau(t)}x_{\tau,2} + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_{22}(t-\theta)}[A_{21}x_1(\theta) + D_2\delta(x, \theta)]d\theta. \quad (7.7)$$

Desta forma, utilizando o preditor (7.6), a predição estará sujeita a um resíduo $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$. A partir de (7.6) e (7.7), verificamos que

$$\tilde{x}_2 = \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_{22}(t-\theta)}D_2\delta(x, \theta)d\theta. \quad (7.8)$$

Por esta expressão, podemos ver que, além da magnitude das incertezas, a duração do atraso tem uma influência significativa na magnitude do resíduo, que pode ser majorado por

$$\|\tilde{x}_2\| \leq \bar{r}\bar{\delta}\|e^{A_{22}\tau(t)}D_2\| \sup_{\theta \in [t-\tau(t), t]} (\|x(\theta)\|). \quad (7.9)$$

7.2.2 Observador Super-Twisting

A partir da estimativa \hat{x}_2 é possível utilizar um observador por modos deslizantes de segunda ordem, utilizando o Algoritmo *Super-Twisting* (STA) [107, 108] para obter uma estimativa do sinal de falha $d(t)$. Definindo a variável de erro:

$$\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1, \quad (7.10)$$

podemos definir o observador como em:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}\hat{x}_2 + B_1u + \nu \\ \nu = -k_1 \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|^{1/2}} + k_2\tilde{x}_1 + \hat{\xi} \\ \dot{\hat{\xi}} = -k_3 \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|} - k_4\tilde{x}_1 \end{cases} \quad (7.11)$$

onde \hat{x}_1 é a estimativa do estado x_1 e \hat{x}_2 é o valor predito de x_2 obtido pelo observador-preditor proposto na seção 7.2.1. Observe que a predição \hat{x}_2 obtida anteriormente é exata no caso de não haver incertezas paramétricas ou no atraso. No caso onde há incertezas, é possível que o resíduo \tilde{x}_2 não seja zero. Neste caso, o observador STA poderá ser capaz de tratar as incertezas como parte do sinal de falha.

A partir das hipóteses **(H7.2)** e **(H7.6)**, é possível utilizar diretamente o procedimento em [107, eq. 25] para determinar os ganhos k_1, \dots, k_4 , de forma a garantir que um modo deslizante $\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_1 \equiv 0$ seja atingido em tempo finito. Procedimentos semelhantes para determinação dos ganhos (ver [109] e [110]) também podem ser utilizados.

A dinâmica do erro de observação \tilde{x}_1 pode ser escrita, incluindo efeitos de incertezas como:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{x}_2 + B_1d + D_1\delta(x, t) - \nu \\ \nu = -k_1 \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|^{1/2}} + k_2\tilde{x}_1 + \hat{\xi} \\ \dot{\hat{\xi}} = -k_3 \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|} - k_4\tilde{x}_1 \end{cases} \quad (7.12)$$

Após o modo deslizante ser atingido, pode-se ver que:

$$\begin{cases} 0 = 0 + A_{12}\tilde{x}_2 + B_1d + D_1\delta(x, t) - \nu \\ \nu = \hat{\xi}, \quad \dot{\hat{\xi}} = 0 \end{cases} \quad (7.13)$$

Rearrmando a primeira equação, obtém-se:

$$\hat{\xi} = B_1d + D_1\delta(x, t) + A_{12}\tilde{x}_2, \quad (7.14)$$

que representa uma estimativa do efeito da falha e das perturbações em x_1 . Ob-

serve que no caso em que não há incertezas paramétricas, o sinal $\hat{\xi}$ pode ser usado diretamente para se obter uma reconstrução do sinal de falha d .

Observe-se que no caso em que não há incertezas, $\delta(x, t) = 0$ e a previsão é exata, ou seja $\tilde{x}_2 = 0$. Assim, após um tempo, teremos:

$$\hat{\xi} = B_1 d \quad (7.15)$$

A partir da hipótese **(H7.6)**, pode-se assumir que B_1 possui pseudo-inversa $B_1^\dagger = (B_1^T B_1)^{-1} B_1^T$ [89, pag. 122] tal que:

$$\hat{d} \approx B_1^\dagger \hat{\xi} \quad (7.16)$$

Observe também que no caso com incertezas, o sinal \hat{d} ainda poderá ser utilizado como um sinal de controle para remover a perturbação d e reduzir a influência das incertezas paramétricas no sistema.

7.2.3 Observador-preditor

Podemos então agrupar o preditor (7.6) e o observador (7.11) em um observador-preditor para sistemas com atraso de medição e vetor de estado parcialmente conhecido:

$$\begin{cases} \hat{x}_2 = e^{A_{22}\tau(t)} x_{\tau,2} + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_{22}(t-\theta)} A_{21} x_1(\theta) d\theta \\ \dot{\hat{x}}_1 = A_{11} \hat{x}_1 + A_{12} \hat{x}_2 + B_1 u + \nu \\ \nu = -k_1 \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|^{1/2}} + k_2 \tilde{x}_1 + \hat{\xi} \\ \dot{\hat{\xi}} = -k_3 \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|} - k_4 \tilde{x}_1 \end{cases} \quad (7.17)$$

onde $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$.

Este preditor é capaz de obter estimativas para o estado x_2 e para a perturbação e incertezas agregadas $\hat{\xi}$ em tempo finito. No caso sem incertezas, podemos obter uma reconstrução da falha d diretamente do sinal $\hat{\xi}$, considerando a hipótese **(H7.5)**.

7.3 Controlador por modos deslizantes

Uma vez obtidas as estimativas \hat{x}_2 e $\hat{\xi}$ e considerando a hipótese **(H7.4)**, podemos projetar uma lei de controle por modos deslizantes de forma a obter a estabilização em tempo finito, com robustez às incertezas do modelo.

7.3.1 Lei de Controle

Primeiramente, vamos definir o vetor

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (7.18)$$

que contém o estado medido x_1 e a estimativa \hat{x}_2 obtida pelo preditor (7.6), ambos no tempo presente. A variável de deslizamento pode ser definida como

$$s(t) = S\bar{x} = \begin{bmatrix} I & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (7.19)$$

onde S é uma matriz a ser projetada, de tal forma que SB seja não-singular.

De (7.6) obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 &= (1 - \dot{\tau})e^{A_{22}\tau} \dot{x}_{\tau,2} + \dot{\tau}A_{22}e^{A_{22}\tau}x_{\tau,2} + A_{21}x_1 - (1 - \dot{\tau})e^{A_{22}\tau}A_{21}x_{\tau,1} \\ &+ A_{22} \int_{t-\tau}^t e^{A_{22}(t-\theta)} A_{21}x_1(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Utilizando-se (7.2) e (7.6) para fazer as substituições apropriadas, verifica-se que

$$\dot{\hat{x}}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}\hat{x}_2 + (1 - \dot{\tau})e^{A_{22}\tau}D_2\delta(x, t - \tau). \quad (7.21)$$

Para simplificar a notação, definamos

$$\zeta_1(x, t) := D_1\delta(x, t), \quad (7.22)$$

$$\zeta_2(x, t) := (1 - \dot{\tau})e^{A_{22}\tau}D_2\delta(x, t - \tau). \quad (7.23)$$

Considere a transformação linear

$$T := \begin{bmatrix} I & S_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (7.24)$$

tal que

$$\begin{bmatrix} s \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (7.25)$$

Podemos, então, escrever nestas coordenadas:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \begin{bmatrix} s \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} (u + d) + \begin{bmatrix} \zeta_1(x, t) + S_2 \zeta_2(x, t) \\ \zeta_2(x, t) \end{bmatrix} \\ y(t) = x_{\tau, 2}, \end{cases} \quad (7.26)$$

onde $\bar{A}_{11} = A_{11} + S_2 A_{21}$, $\bar{A}_{12} = S_2 A_{22} + A_{12} - \bar{A}_{11} S_2$, $\bar{A}_{21} = A_{21}$ e $\bar{A}_{22} = A_{22} - A_{21} S_2$.

Para projetar a matriz S , vamos inicialmente considerar a equação (7.26) para $\dot{\hat{x}}_2$ quando não há incertezas paramétricas, ou seja, quando $\zeta_2(x, t) = 0$. Durante o modo deslizando teremos $s = 0$ e, então,

$$\dot{\hat{x}}_2 = \bar{A}_{22} \hat{x}_2, \quad (7.27)$$

ou seja, durante o deslizamento, a dinâmica será governada por $\bar{A}_{22} = A_{22} - A_{21} S_2$. A hipótese **(H7.4)** assegura que o par (A_{22}, A_{21}) é controlável (ver [27, Prop. 3.3]) e, desta forma, qualquer técnica de realimentação de estados pode ser utilizada para projetar S_2 de tal forma que \bar{A}_{22} seja Hurwitz.

Consideremos a lei de controle

$$u = u_d + u_{\text{nom}} + u_{\text{SM}}, \quad (7.28)$$

onde u_d é o termo utilizado para rejeição de perturbação, u_{nom} é a parcela nominal do controle e u_{SM} é um termo chaveado que servirá para levar o sistema ao modo deslizando $s \equiv 0$.

Inicialmente, vamos observar a equação para x_1 em (7.2):

$$\dot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + B_1 (u + d) + \zeta_1(x, t). \quad (7.29)$$

Da equação (7.14) podemos definir:

$$u_d = -B_1^\dagger \hat{\xi} = -d - B_1^\dagger D_1 \delta(x, t) - B_1^\dagger A_{12} \tilde{x}_2. \quad (7.30)$$

Aplicando (7.22) e (7.30) a (7.29), verificamos que esta se torna:

$$\dot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} \hat{x}_2 + B_1 [u_{\text{nom}} + u_{\text{SM}}]. \quad (7.31)$$

já que $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$. Observe que u_d é capaz de rejeitar a perturbação d e a parte casada das incertezas paramétricas $A_{12} \tilde{x}_2$ e $\zeta_1(x, t)$.

Considerando a lei de controle u_d aplicada, podemos projetar u_{nom} utilizando o método do controle equivalente [101], através da solução da equação $\dot{s} = 0$ para o

sistema nominal (sem incertezas), e considerando que a equação de x_1 já está na forma (7.31). Assim, supondo $u_{SM} = 0$, podemos escrever

$$0 = SA\bar{x} + SB(u_{nom}). \quad (7.32)$$

Como SB é não-singular por construção, temos

$$u_{nom} = -(SB)^{-1}SA\bar{x}. \quad (7.33)$$

Finalmente, definimos um termo chaveado que levará o sistema a um modo deslizante:

$$u_{SM} = -\rho(SB)^{-1}\text{sign}(s), \quad (7.34)$$

onde $\text{sign}(s) = [\text{sign}(s_1) \cdots \text{sign}(s_{n-p})]^T$ e $\rho > 0$ deve ser suficientemente grande para majorar as incertezas e perturbações não rejeitadas pelos demais termos.

Assim, a lei de controle pode ser escrita de forma completa

$$u = -B_1^\dagger \hat{\zeta} - (SB)^{-1}SA\bar{x} - \rho(SB)^{-1}\text{sign}(s). \quad (7.35)$$

7.3.2 Análise de Estabilidade

Aplicando (7.35) em (7.26), obtemos

$$\begin{cases} \dot{s} &= S_2\zeta_2(x, t) - \rho\text{sign}(s) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \bar{A}_{21}s + \bar{A}_{22}\hat{x}_2 + \zeta_2(x, t) \\ y = x_{\tau,2} &= \hat{x}_{\tau,2} + \tilde{x}_{\tau,2}. \end{cases} \quad (7.36)$$

A partir do sistema em malha fechada (7.36), é possível verificar que o modo deslizante é atingido em tempo finito pelo seguinte teorema.

Teorema 7.3.1. *A lei de controle (7.35) aplicada ao sistema (7.2), sujeito às hipóteses (H7.1) a (H7.6), com*

$$\rho \geq \phi\bar{\delta}(1 + \bar{r})\|e^{A_{22}\tau}D_2\|\|x\| + \eta \quad (7.37)$$

onde $\eta > 0$ e $\phi > 1$ são constantes arbitrárias, leva o sistema a um modo deslizante $s = S\bar{x} \equiv 0$ em tempo finito.

Demonstração. Seja a função de Lyapunov $V = s^T s/2$. Derivando V ao longo das

trajetórias de (7.36) e utilizando a definição de $\zeta_2(x, t)$ em (7.23), obtemos

$$\dot{V} = s^T S_2 \zeta_2(x, t) - \rho s^T \text{sign}(s), \quad (7.38)$$

$$\dot{V} = (1 - \dot{\tau}) s^T e^{A_{22}\tau} D_2 \delta(x, t - \tau) - \rho s^T \text{sign}(s). \quad (7.39)$$

Observe que

$$s^T \text{sign}(s) = \|s\|_1 \geq \|s\|_2, \quad (7.40)$$

$$-\rho s^T \text{sign}(s) \leq -\rho \|s\|_2. \quad (7.41)$$

Como \dot{V} apresenta um termo atrasado, usaremos o Teorema de Razumikhin [78, Teorema 1.4]. Suponha que $\|x(t + \theta)\| < \phi \|x(t)\|$, para $\phi > 1$, $-\tau(t) \leq \theta \leq 0$. Então,

$$\|V(x(t + \theta))\| < \phi^2 \|V(x(t))\|. \quad (7.42)$$

Além disso, teremos que:

$$\|\delta(x, t + \theta)\| \leq \bar{\delta} \|x(t + \theta)\| \leq \phi \bar{\delta} \|x(t)\|, \quad (7.43)$$

$$\|\delta(x, t - \tau)\| \leq \phi \bar{\delta} \|x(t)\|. \quad (7.44)$$

Assim, usando **(H7.3)**, temos

$$\dot{V} \leq -\|s\| [\rho - \phi \bar{\delta} (1 + \bar{r}) \|e^{A_{22}\tau} D_2\| \|x(t)\|]. \quad (7.45)$$

Se

$$\rho \geq \phi \bar{\delta} (1 + \bar{r}) \|e^{A_{22}\tau} D_2\| \|x\| + \eta, \quad (7.46)$$

então

$$\dot{V} \leq -\eta \|s\| < 0, \quad (7.47)$$

mostrando que s é Globalmente Assintoticamente Estável. Além disso, como

$$\dot{V} \leq -\eta \sqrt{V}. \quad (7.48)$$

é possível ver que a superfície de deslizamento $s \equiv 0$ é atingida em tempo finito. \square

Na equação (7.39) é possível observar um termo dependente da taxa de variação do atraso $\dot{\tau}$, oriundo da perturbação $\zeta_2(x, t)$. Para obter o majorante apresentado na equação (7.45), faz-se necessário que $\dot{\tau}$ seja limitado, o que é assumido pela hipótese

(H7.3). No caso de um sistema sem incertezas paramétricas, teremos $\delta(x, t) = 0$ na equação (7.39) e esta hipótese poderá ser relaxada, já que \dot{V} não apresentará o termo dependente do atraso.

Uma vez atingido o modo deslizante, é possível verificar que o sistema em malha fechada (7.36) é assintoticamente estável através do seguinte corolário.

Corolário 7.3.1. *Quando o modo deslizante nas condições do Teorema 7.3.1 é atingido, o sistema (7.36), sujeito às hipóteses (H7.1) a (H7.6) é assintoticamente estável se existir uma matriz $P_2 > 0$ tal que $P_2 \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T P_2 = -I$ e*

$$\bar{\delta} < \frac{1}{2\phi\lambda_{\max}(P_2)(1 + \bar{r}) \left(\sqrt{1 + \|S_2\|^2} \right) \|e^{A_{22}\tau} D_2\|}. \quad (7.49)$$

onde $\phi > 1$ é uma constante arbitrária como no Teorema 7.3.1, e $\lambda_{\max}(P_2)$ é o maior autovalor da matriz P_2 .

Demonstração. Quando o modo deslizante for atingido, teremos $s \equiv 0$ e a dinâmica do sistema, obtida da equação (7.36), será

$$\dot{\hat{x}}_2 = \bar{A}_{22}\hat{x}_2 + \zeta_2(x, t). \quad (7.50)$$

Observe que \bar{A}_{22} é Hurwitz por projeto, então podemos assumir que existe uma matriz positiva definida simétrica $P_2 > 0$ tal que $P_2 \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T P_2 = -I$. Então, considere a função de Lyapunov $V_2(\hat{x}_2) = \hat{x}_2^T P_2 \hat{x}_2$. Sua derivada ao longo das trajetórias de (7.50) é:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\hat{x}_2) &= -\hat{x}_2^T \hat{x}_2 + 2\hat{x}_2^T P_2 \zeta_2(x, t) \\ &\leq -\|\hat{x}_2\|^2 + 2\lambda_{\max}(P_2) \|\hat{x}_2\| \|\zeta_2(x, t)\| \\ &= -\lambda_{\max}(P_2) \|\hat{x}_2\| [\mu \|\hat{x}_2\| - 2\|\zeta_2(x, t)\|], \end{aligned} \quad (7.51)$$

onde $\mu := 1/\lambda_{\max}(P_2)$.

Por (7.23), sabemos que

$$\zeta_2(x, t) = (1 - \dot{\tau})e^{A_{22}\tau} D_2 \delta(x, t - \tau) \quad (7.52)$$

depende de uma variável atrasada e, portanto, iremos novamente utilizar o Teorema de Razumikhin. Durante o modo deslizante, temos que $x_1 = -S_2 \hat{x}_2$, então $\|x\| \leq \left(\sqrt{1 + \|S_2\|^2} \right) \|\hat{x}_2\|$. Assim, utilizando (7.44), podemos escrever

$$\|\delta(x, t - \tau)\| \leq \phi \bar{\delta} \left(\sqrt{1 + \|S_2\|^2} \right) \|\hat{x}_2\|. \quad (7.53)$$

Desta forma, substituindo (7.53) em (7.52)

$$\dot{V}_2(\hat{x}_2) \leq -\lambda_{\max}(P_2)\|\hat{x}_2\|^2[\mu - \beta_1], \quad (7.54)$$

$$\beta_1 := 2\phi\bar{\delta}(1 + \bar{r}) \left(\sqrt{1 + \|S_2\|^2} \right) \|e^{A_{22}\tau} D_2\|. \quad (7.55)$$

Se $\beta_1 < \mu$, teremos $\dot{V}_2(\hat{x}_2) \leq 0$, nas condições do Teorema de Razumikhin, o que mostra que o sistema é assintoticamente estável, sempre que

$$2\phi\bar{\delta}(1 + \bar{r}) \left(\sqrt{1 + \|S_2\|^2} \right) \|e^{A_{22}\tau} D_2\| < \frac{1}{\lambda_{\max}(P_2)} \quad (7.56)$$

e nos permite chegar à condição (7.49). \square

Do Corolário 7.3.1, podemos ver que $\hat{x}_2 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Como durante o modo deslizante $x_1 = -S_2\hat{x}_2$, também podemos verificar que $x_1 \rightarrow 0$. Além disso, $\|x\| \leq \left(\sqrt{1 + \|S_2\|^2} \right) \|\hat{x}_2\|$ e por **(H7.6)**, temos que o efeito da perturbação também será levado a zero e, como consequência, $\tilde{x}_2 \rightarrow 0$ pela equação (7.8). Assim, teremos também $x_2 \rightarrow 0$, demonstrando que o sistema é estabilizado, apesar da presença de falhas e incertezas paramétricas limitadas pela condição (7.49).

Observe que a hipótese **(H7.6)** permite que o sistema seja estabilizado na origem. É possível relaxar esta hipótese utilizando um majorante mais geral para incerteza paramétrica, do tipo $\|\delta(x, t)\| \leq \bar{\delta}_1\|x\| + \bar{\delta}_2$. Neste caso, no entanto, as variáveis de estado ficam limitadas a uma região suficientemente pequena ao redor da origem.

7.4 Simulações Numéricas

Para demonstrar o método proposto, foi utilizado um sistema sem incertezas ($\delta(x, y) = 0$) com a forma (7.2), onde:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.57)$$

Foi utilizado um sinal de falha de atuador $d(t) = 0.1 \sin(2t) + 0.2 \cos(3t)$ e um atraso de saída constante $\tau(t) = 0.5s$. Os ganhos foram determinados de forma a atender o método apresentado em [107, eq. 25], e fixados em $k_1 = k_3 = 5$ e $k_2 = k_4 = 2$. O sistema não apresentava incertezas e foi utilizada a lei de controle (7.35), com $S = [1 \ -5]$ e $\rho = 2$, constante.

A Figura 7.1 mostra as variáveis de estado x_1 (azul) e x_2 (preto) e saída y (vermelho) do exemplo proposto estabilizado pela lei de controle (7.35), projetada a partir do estado x_1 e das estimativas $\hat{\xi}$ e \hat{x}_2 obtidas pelo observador (7.17). A Figura 7.3 compara x_2 (azul) e sua estimativa \hat{x}_2 (vermelho) obtida utilizando o preditor

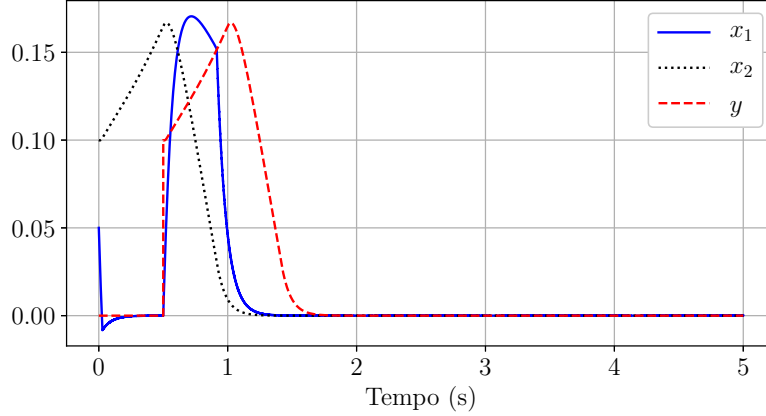


Figura 7.1: Variáveis de estado x_1 (azul) e x_2 (preto) e saída y (vermelho) do exemplo proposto, estabilizado pela lei de controle (7.35), projetada a partir do estado x_1 e das estimativas $\hat{\xi}$ e \hat{x}_2 obtidas pelo observador (7.17).

(7.6) evidenciando que a predição ocorre em tempo finito.

A Figura 7.4 mostra o sinal de falha d e sua estimativa $\hat{d} = B_1^\dagger \hat{\xi}$, onde $B_1^\dagger = (B_1^T B_1)^{-1} B_1^T$ é a pseudo-inversa de B_1 [89, pag. 122], obtida a partir do observador (7.11), também convergindo em tempo finito. Nas figuras 7.5 e 7.6 podem ser vistas, respectivamente, a variável de deslizamento s e o sinal de controle u .

Para testar a robustez do método a incertezas, foi utilizado

$$D = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \delta(x, t) = x. \quad (7.58)$$

O ganho da lei de controle foi ajustado para $\rho = 5$ apenas para aumentar a velocidade de convergência. A Figura 7.7 mostra que o sistema ainda é estabilizado pela lei de controle, apesar da incerteza. Na Figura 7.8 vemos que a estimativa \hat{x}_2 apresenta um erro grande devido a incerteza paramétrica. A Figura 7.9 mostra que o observador STA utilizado para reconstruir a perturbação consegue estimar o resíduo \tilde{x}_2 , permitindo seu uso na lei de controle.

7.5 Sumário dos Resultados

Foi apresentado um método para estabilização de sistemas lineares invariantes no tempo apresentando um atraso de medição variante no tempo conhecido e sujeitos a uma perturbação casada que pode representar uma falha de atuador. Parte dos estados são conhecidos sem atrasos. A metodologia utilizou um preditor em malha aberta em conjunto com um observador baseado no Algoritmo *Super-Twisting*. O uso deste observador permitiu a reconstrução do sinal de perturbação, sendo também robusto a incertezas paramétricas. Uma vantagem obtida nesta configuração é que

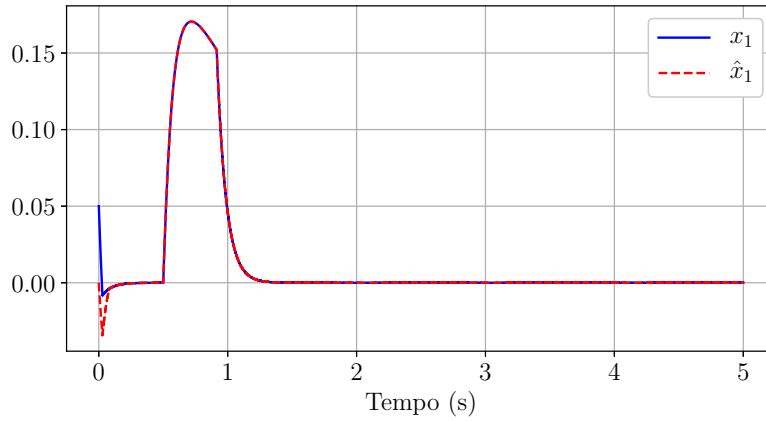


Figura 7.2: Variável de estado x_1 (azul) e sua estimativa \hat{x}_1 (vermelho) obtida utilizando o preditor (7.6), mostrando que a predição ocorre em tempo finito.

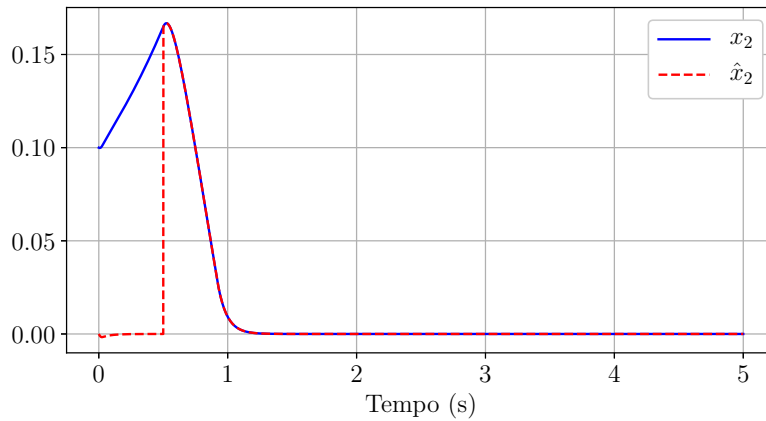


Figura 7.3: Variável de estado x_2 (azul) e sua estimativa \hat{x}_2 (vermelho) obtida utilizando o preditor (7.6), mostrando que a predição ocorre em tempo finito.

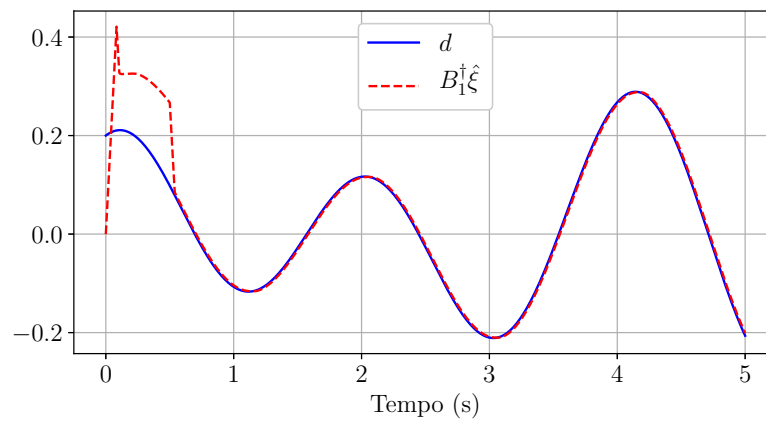


Figura 7.4: Sinal de perturbação d (azul) e sua estimativa $\hat{d} = B_1^\dagger \hat{\xi}$ (vermelho) obtida em tempo finito pelo observador (7.11).

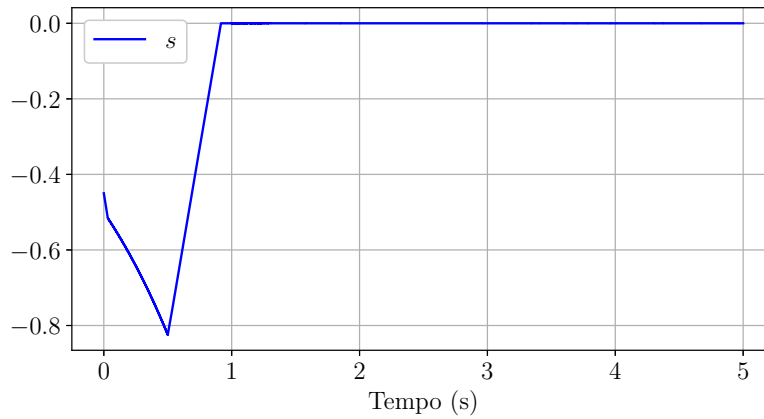


Figura 7.5: Gráfico da variável de deslizamento s , mostrando que o modo deslizante é atingido em tempo finito. Também pode se observar que o controle começa a atuar passado o atraso inicial.

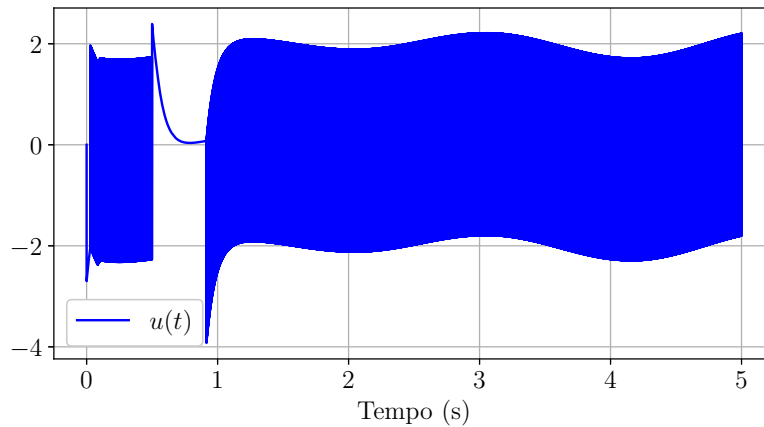


Figura 7.6: Sinal de controle u evidenciando o modo deslizante.

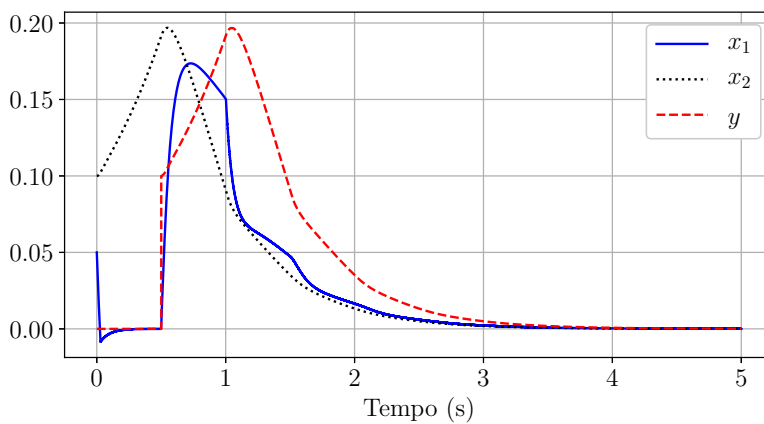


Figura 7.7: Variáveis de estado x_1 (azul) e x_2 (preto) e saída y (vermelho) do exemplo proposto com incertezas estabilizado pela lei de controle (7.35), projetada a partir do estado x_1 e das estimativas $\hat{\xi}$ e \hat{x}_2 obtidas pelo observador (7.17).

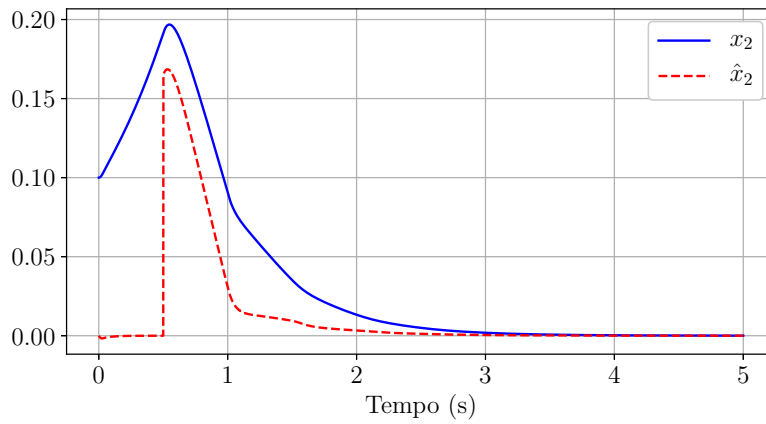


Figura 7.8: Variável de estado x_2 (azul) e sua estimativa \hat{x}_2 (vermelho) obtida utilizando o preditor (7.6) para o sistema com incertezas, evidenciando que a estimativa apresenta um resíduo como esperado.

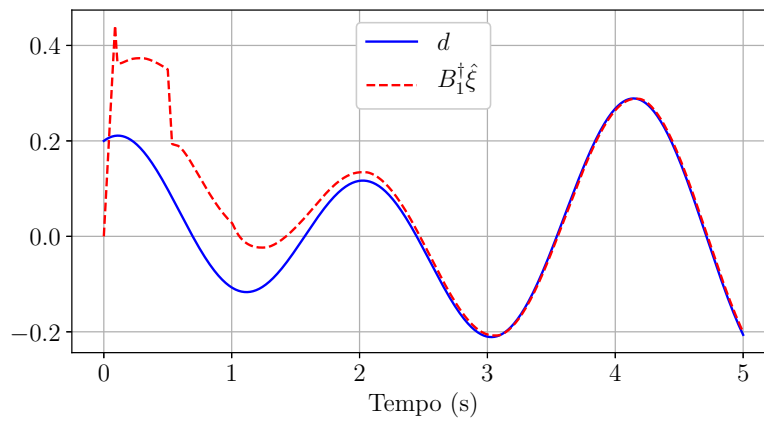


Figura 7.9: Sinal de perturbação d (azul) e a estimativa das perturbações $\hat{\xi}$ (vermelho) obtida pela equação (7.14). Observe que a estimativa também está acomodando o erro de estimação de x_2 .

mesmo utilizando um preditor em malha aberta, ainda foi possível estimar o estado e as falhas em tempo finito.

Uma lei de controle por modos deslizantes foi projetada para obter a estabilização global do sistema apresentando robustez a incertezas. Utilizando o Teorema de Razumikhin foi mostrado que o modo deslizante é atingido em tempo finito, mesmo na presença de perturbações e atrasos, além de garantir-se que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável.

Capítulo 8

Conclusão

8.1 Contribuições

Um observador por modos deslizantes foi desenvolvido para permitir a reconstrução de falhas em sistemas com atraso de medição, através da representação do sistema em termos das variáveis de estado atrasadas. As dinâmicas do observador e do erro de observação são independentes do atraso. Desta forma, abordagem aqui apresentada tem como principal vantagem não necessitar da aplicação de métodos específicos para sistemas com atraso, tais como o de *Lyapunov-Krasovskii* ou o de *Lyapunov-Razumikhin* [78, 90] para o projeto do observador. Uma vez que o erro de observação saída não se apresenta atrasado, foi demonstrado que é teoricamente possível ser atingido um modo deslizante ideal evitando o problema de *chattering*, mesmo com atrasos variantes no tempo de longa duração. O preço a ser pago é que o sinal reconstruído também apresenta um atraso correspondente ao deslocamento no tempo empregado, o que ainda é aceitável para algumas aplicações relevantes como, por exemplo, em sistemas astronáuticos ou para águas profundas, onde grandes atrasos de comunicação são esperados. Utilizando este método, é possível reconstruir o sinal de perturbação independentemente da duração do atraso, que pode inclusive ser variante no tempo. Foi demonstrado também que é possível minimizar a influência de incertezas paramétricas e de atraso, agrupando-os em um termo único e utilizando a abordagem proposta no artigo de TAN e EDWARDS [29], que se vale do *Bounded Real Lemma* de CHILALI e GAHINET [54].

A partir do método de deslocamento no tempo desenvolvido, em conjunto com filtros interpoladores em tempo contínuo, foi proposta uma estratégia para a reconstrução de falhas para sistemas apresentando saída amostradas. Este é um resultado interessante pois a mesma metodologia poderia ser utilizada para sistemas apresentando outras funções de transferência na medição no lugar do filtro interpolador. Um exemplo de aplicação seria o uso de filtro por medianas [111] que poderia ser

utilizado para aumentar a robustez do sistema a ruído de saída.

Para o objetivo de detecção e diagnóstico de falhas, a identificação do sinal de perturbação, mesmo atrasado, apresenta grande importância. Por não haver descarte de informação, é possível analisar o sinal de perturbação mesmo em seu transiente inicial e comparar com os modos de falha esperados de acordo com um estudo *FMECA (Failure Modes Effects and Criticality Analysis)* [112], ferramenta padrão da indústria na avaliação de confiabilidade de equipamentos. Esta comparação permitirá a identificação do modo de falha associado aquele padrão de perturbação e indicará a melhor estratégia para sua mitigação ou correção, viabilizando desta forma a adoção de políticas de manutenção baseadas em condição.

O método de reconstrução de falhas pode ser utilizado também para identificação de uma não-linearidade aditiva, tal como a força de atrito no modelo de válvula (ver Nota 4.2.1). Na prática, após o comissionamento do equipamento a ser monitorado, uma identificação das não-linearidades não modeladas ou desconhecidas pode ser obtida utilizando o observador proposto. Considerando apenas a parte linear como modelo inicial, o sinal de perturbação reconstruído estará representando as não-linearidades e incertezas ao longo do tempo. Como também se é obtida uma estimativa do estado, é possível obter uma representação da não-linearidade em função do estado. Este modelo base seria considerado parte do funcionamento normal do equipamento e modificações em seu comportamento indicariam falhas. Este tipo de aplicação é bastante interessante para sistemas que apresentam não-linearidades como forças de atrito em mancais, conjuntos de selos ou outras que apresentam falhas oriundas de desgaste progressivo (*soft-faults* como definido em ISERMANN [24]). Nestes sistemas, a manutenção baseada na condição apresenta maior possibilidade de ganhos por permitir maximizar o tempo em operação do equipamento.

Para permitir fechar a malha de realimentação em um sistema de controle, rejeitando o sinal da falha, foram propostos preditores para estimar os valores do estado e da falha em tempo presente. Inicialmente, um observador-preditor para sistemas lineares com atrasos de medição variantes no tempo foi projetado usando a técnica de *PDE-Backstepping*, em um caso onde a falha foi modelada por um sistema dinâmico externo. O observador desenvolvido permitiu obter estimativas do estado do sistema e da perturbação em tempo presente, sem se fazer necessária nenhuma restrição a duração do atraso além de ser limitada superiormente. O observador-preditor obtido foi combinado a uma lei de controle por modos deslizantes para regular a saída a zero, com rejeição de perturbação. Os resultados de simulação indicam que a estratégia de controle proposta é robusta a incertezas no modelo da planta. Um modo deslizante ideal pode ser obtido para plantas com um atraso de medição arbitrariamente longo utilizando o preditor *PDE-Backstepping*. Além disso, a força do Teorema 5.3.1 é que, enquanto preditores não são explicitamente disponíveis para

controle não linear em geral, uma vez que nem sempre é possível resolver sistemas não lineares explicitamente, quando a planta é linear existe um preditor explícito que pode ser utilizado mesmo com uma lei de controle não linear.

Uma segunda estratégia de observação-predição foi desenvolvida para quando a falha é modelada como uma soma de funções regressoras conhecidas, ponderadas por parâmetros desconhecidos, de forma a obter uma estratégia mais abrangente. As estimativas atrasadas são obtidas utilizando-se um observador por modos deslizantes com deslocamento no tempo tal como o apresentado no Capítulo 4 e então levadas ao tempo presente pelo uso de um preditor em malha aberta. Para permitir o uso do preditor, a estimativa de falha deve ser adiantada para o tempo presente, o que é feito através de uma identificação dos parâmetros desconhecidos por um método de mínimos quadrados. Foi mostrado que esta estratégia, pode ser utilizada para a identificação do modelo de atrito de uma válvula de completção inteligente além de permitir seu diagnóstico em acionamentos subsequentes.

8.2 Aplicabilidade do estudo

Como destacado anteriormente, a manutenção baseada em condição vem ganhando força na indústria. No contexto atual da chamada Indústria 4.0 [113], este conceito vem sendo aplicado desde a monitoração de sistemas até os chamados Gêmeos Digitais (*Digital Twins*), modelos acoplados ao sistema real que simulam sua condição de operação, integrando conhecimento de algoritmos orientados a dados com modelos baseados na física da operação [114]. Assim, observadores-preditores com reconstrução de falha podem ser integrados aos modelos de plantas, permitindo a inclusão de diagnósticos e prognósticos para os sistemas monitorados, permitindo a adoção de estratégias preditivas de manutenção. Ainda no contexto de Transformação Digital, é esperado que a maioria dos sistemas apresentem medição amostrada. Ainda assim é possível utilizar os algoritmos desenvolvidos para reconstrução de falha, através do uso de filtros reconstrotores.

Utilizando os sinais estimados, é possível desenvolver estratégias de controle tolerante a falhas, maximizando o tempo de operação do sistema, permitindo adequar a janela de manutenção a uma oportunidade de parada operacional

8.3 Tópicos para Continuidade da Pesquisa

8.3.1 Perturbações Não Modeladas

Um problema de maior complexidade se apresenta quando não é possível utilizar um modelo para a falha. Desta forma, a informação da evolução da falha no tempo

após a estimativa $(t - \tau(t))$ não está disponível para avançar a estimativa do estado atrasado para o tempo atual. Uma possibilidade é utilizar a técnica proposta por DEMIRCIOGLU e GAWTHROP [115] para utilização em controle preditivo. Para estimar o sinal a frente é utilizada uma cascata de diferenciadores estritamente próprios para recompor o sinal por uma série de MacLaurin truncada. Esta técnica, no entanto não permite a predição de horizontes muito longos de tempo, para os quais derivadas de ordens elevadas seriam necessárias, amplificando ruído e instabilizando o processo. Outra possibilidade é a utilização de modelos baseados em aproximadores universais, tais como redes neurais, para permitir a predição.

8.3.2 Incertezas Paramétricas nos Preditores

Os resultados de simulação no exemplo utilizando o preditor *PDE-Backstepping* indicam que a estratégia de controle proposta é robusta a incertezas no modelo da planta. Uma análise de estabilidade para o sistema em malha fechada na presença de incertezas paramétricas e de duração do atraso pode ser realizada para estabelecer quais são as condições para as quais o sistema apresenta robustez. Esta análise pode ser feita a partir da metodologia *PDE-Backstepping* como em [75, Cap. 4] ou utilizando o preditor em malha aberta a partir do método de variação das constantes, tal como feito para atrasos de duração constante em [64].

8.3.3 Reconstrução de falhas de sensor

Como a motivação deste trabalho foram os sistemas de completção, todos os métodos desenvolvidos aqui foram voltados para as falhas de atuadores, já que o sensoriamento é feito na superfície e a manutenção ou troca de elementos sensores é simples. O atraso neste caso é resultante do próprio processo e não necessariamente do elemento sensor. No entanto, para uma maior abrangência da solução desenvolvida, seria interessante estender a metodologia para permitir também avaliar falhas de sensores. Métodos como o proposto por TAN e EDWARDS [28] poderiam ser aplicados utilizando a abordagem de deslocamento no tempo para reconstrução de falhas de sensor, utilizando os mesmos princípios propostos.

8.4 Produção Bibliográfica

As seguintes publicações decorrem desta Tese:

- Artigo publicado em periódico:
 - Pinto, H. L. C. P., Oliveira, T. R., Hsu, L. **Fault Reconstruction for Delay Systems via Least Squares and Time-Shifted Sliding Mode Observers**, *Asian Journal of Control*, Special Issue on ‘SMC based observation, identification, uncertainties compensation and fault detection’, v. 21, n.1, pp. 52–69, DOI:10.1002/asjc.2024, 2019.
- Artigo aceito para publicação em periódico:
 - Pinto, H. L. C. P., Oliveira, T. R., Hsu, L. **Sliding Mode Observer for Fault Reconstruction of Time-Delay and Sampled-Output Systems - a Time Shift Approach**, *Automatica*, 2019.
- Artigos apresentados em congressos internacionais:
 - Pinto, H. L. C. P., Oliveira, T. R., Hsu, L., Krstic, M. **Sliding Mode Control for Disturbance Rejection in Systems with Measurement Delay using PDE-Backstepping Predictor**. In: *The 2018 American Control Conference*, Milwaukee, EUA, pp. 4099 – 4104, 2018.
 - Pinto, H. L. C. P., Oliveira, T. R., Hsu, L. **Time-Shift Sliding Mode Predictor for Fault Reconstruction of Time-Delay Systems Using Least Squares Identification**. In: *15th International Workshop on Variable Structure Systems and Sliding Mode Control (VSS18)*, Graz, Austria, 2018.
- Artigos apresentados em congressos nacionais:
 - PINTO, H. L. C. P., OLIVEIRA, T. R., HSU, L. **Reconstrução de Falhas em Sistemas com Atrasos Arbitrários de Saída Utilizando Observadores por Modos Deslizantes**. In: *XXI Congresso Brasileiro de Automática - CBA2016*, pp. 3009 – 3014, 2016.
 - Pinto, H. L. C. P., Oliveira, T. R., Hsu, L. **Rejeição de Perturbação em Sistemas com Atrasos Variantes no Tempo Utilizando Predictor PDE-Backstepping**. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, pp. 1416 – 1421, 2017.

- Pinto, H. L. C. P., Oliveira, T. R., Hsu, L. **Estabilização De Sistemas Incertos Com Atraso De Saída via Observador-preditor Baseado No Algoritmo *Super-twisting***. In: *XXII Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2018*, João Pessoa, PB, Brasil, 2018.

Referências Bibliográficas

- [1] THOMAS, J. E. *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*. 2 ed. Rio de Janeiro, Interciência/Petrobras, 2004.
- [2] SILVA JR., M. F., PINTO, H. L. C. P., IZETTI, R. G. “Poços Inteligentes na Petrobras”, *Boletim Técnico da Produção de Petróleo*, v. 1, n. 2, pp. 273–292, dez. 2006.
- [3] PINTO, H. L. C. P., SILVA JR., M. F., IZETTI, R. G., et al. “Integrated Multi-zone Low Cost Intelligent Completion for Mature Fields”. In: *Society of Petroleum Engineers. Intelligent Energy Conference and Exhibition*, Amsterdam, maio 2006.
- [4] BEZERRA, M. C. M., ROSARIO, F. F., ROSA, K. R. S. A. “Scale Management in Deep and Ultradeep Water Fields”. In: *Offshore Technology Conference*, Rio de Janeiro, out. 2013.
- [5] GRAHAM, G. M., BEZERRA, M. C. M., GOODWIN, N., et al. “Minimizing Scale Deposition Through Surface Enhancement in Downhole Tools”. In: *Offshore Technology Conference Brasil*, Rio de Janeiro, out. 2013.
- [6] HAMID, S., DE JESUS, O., JACINTO, C. M. C., et al. “A Practical Method of Predicting Chemical Scale Formation In Well Completions”. In: *SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition*, Jakarta, out. 2013.
- [7] MARTIN, K. F. “A Review by Discussion of Condition Monitoring and Fault Diagnosis in Machine Tools”, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, v. 34, n. 4, pp. 527–551, 1994.
- [8] JARDINE, A., LIN, D., BANJEVIC, D. “A Review on Machinery Diagnostics and Prognostics Implementing Condition-based Maintenance”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 20, n. 7, pp. 1483–1510, 2006.
- [9] ZIO, E. “Prognostics and Health Management of Industrial Equipment”. In: Kadry, S., Kadry, S. (Eds.), *Diagnostics and Prognostics of Engineering Sys-*

tems: Methods and Techniques, IGI Global, cap. 17, pp. 333–356, Hershey, PA, USA, 2012.

- [10] SILVA JR, M. F., RADESPIEL, E. S., JACINTO, C. M. C. “A Diagnostic and Prognostic Framework for Integrated Reservoir-Completion Management Using Intelligent Well Data”. In: *2013 Offshore Technology Conference OTC Brasil*, Rio de Janeiro, October 2013.
- [11] PINTO, H. L. C. P., OLIVEIRA, T. R., HSU, L. “Sliding Mode Observer for Fault Reconstruction of Time-Delay and Sampled-Output Systems - a Time Shift Approach (*provisoriamente aceito*)”, *Automatica*, 2019.
- [12] PINTO, H. L. C. P., OLIVEIRA, T. R., HSU, L. “Reconstrução de Falhas em Sistemas com Atrasos Arbitrários de Saída Utilizando Observadores por Modos Deslizantes”. In: *XXI Congresso Brasileiro de Automática - CBA2016*, pp. 3009 – 3014, Vitória, ES, Brasil, 2016.
- [13] PINTO, H. L. C. P., OLIVEIRA, T. R., HSU, L., et al. “Sliding Mode Control for Disturbance Rejection in Systems with Measurement Delay using PDE-Backstepping Predictor”. In: *The 2018 American Control Conference*, pp. 4099 – 4104, Milwaukee, EUA, 2018.
- [14] PINTO, H. L. C. P., OLIVEIRA, T. R., HSU, L. “Rejeição de Perturbação em Sistemas com Atrasos Variantes no Tempo Utilizando Preditor PDE-Backstepping”. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, pp. 1416 – 1421, Porto Alegre, RS, Brasil, 2017.
- [15] PINTO, H. L. C. P., OLIVEIRA, T. R., HSU, L. “Fault reconstruction for delay systems via least squares and time-shifted sliding mode observers”, *Asian Journal of Control*, v. 21, n. 1, pp. 52–69, 2019.
- [16] PINTO, H. L. C. P., OLIVEIRA, T. R., HSU, L. “Time-Shift Sliding Mode Predictor for Fault Reconstruction of Time-Delay Systems Using Least Squares Identification”. In: *15th International Workshop on Variable Structure Systems and Sliding Mode Control (VSS18)*, Graz, Austria, 2018.
- [17] PINTO, H. L. C. P., OLIVEIRA, T. R., HSU, L. “Estabilização De Sistemas Incertos Com Atraso De Saída via Observador-preditor Baseado No Algoritmo *Super-twisting*”. In: *XXII Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2018*, João Pessoa, PB, Brasil, 2018.
- [18] MERRIT, H. *Hydraulic Control Systems*. 1 ed. New York, John Wiley & sons, 1967.

- [19] WATTON, J. *Modelling, Monitoring and Diagnostic Techniques for Fluid Power Systems*. 1 ed. London, Springer, 2007.
- [20] LUO, G., GU, L., LI, L., et al. “Hydraulic capacitance compensation for long umbilical lines in hydraulic control system of Offshore Subsea Christmas Trees”. In: *2012 Oceans*, 2012.
- [21] KRUS, P., WEDDFELT, K., PALMBERG, J.-O. “Fast Pipeline Models for Simulation of Hydraulic Systems”, *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, v. 116, n. 1, pp. 132–136, 1994.
- [22] COBLE, J., HINES, J. “Applying the General Path Model to Estimation of Remaining Useful Life”, *International Journal of Prognostics and Health Management*, v. 2, n. 1, 2011.
- [23] KANDUKURI, S. T., KLAUSEN, A., KARIMI, H. R., et al. “A Review of Diagnostics and Prognostics of Low-speed Machinery Towards Wind Turbine Farm-level Health Management”, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 53, n. 01, pp. 697–708, 2016.
- [24] ISERMANN, R. *Fault-Diagnosis Systems: An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance*. 1 ed. Berlin, Springer-Verlag, 2006.
- [25] GAO, Z., CECATI, C., DING, S. X. “A Survey of Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Techniques—Part I: Fault Diagnosis With Model-Based and Signal-Based Approaches”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 62, n. 6, 2015.
- [26] GAO, Z., CECATI, C., DING, S. X. “A Survey of Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Techniques Part II: Fault Diagnosis with Knowledge-Based and Hybrid/Active Approaches”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 62, n. 6, 2015.
- [27] EDWARDS, C., SPURGEON, S. K., PATTON, R. J. “Sliding Mode Observers for Fault Detection and Isolation”, *Automatica*, v. 36, n. 4, pp. 541–553, jan. 2000.
- [28] TAN, C. P., EDWARDS, C. “Sliding Mode Observers for Detection and Reconstruction of Sensor Faults”, *Automatica*, v. 38, n. 10, pp. 1815–1821, 2002.
- [29] TAN, C. P., EDWARDS, C. “Sliding Mode Observers for Robust Detection and Reconstruction of Actuator and Sensor Faults”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 13, n. 5, pp. 443–463, 2003.

- [30] CHAKRABARTY, A., CORLESS, M. J., BUZZARD, G. T., et al. “State and Unknown Input Observers for Nonlinear Systems With Bounded Exogenous Inputs”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, n. 11, pp. 5497–5510, 2017.
- [31] FLOQUET, T., BARBOT, J. P., PERRUQUETTI, W., et al. “On the robust fault detection via a sliding mode disturbance observer”, *International Journal of Control*, v. 77, n. 7, pp. 622–629, 2004.
- [32] HAN, X., FRIDMAN, E., SPURGEON, S. K. “Sampled-data Sliding Mode Observer for Robust Fault Reconstruction: A Time-delay Approach”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 351, n. 4, pp. 2125–2142, 2014.
- [33] HAN, X., FRIDMAN, E., SPURGEON, S. “Sliding Mode Observer for Robust Fault Reconstruction of Time Delay Systems”. In: Malisoff, M., Pepe, P., Mazenc, F., et al. (Eds.), *Recent Results on Nonlinear Delay Control Systems: In honor of Miroslav Krstic*, Advances in Delays and Dynamics 4, Springer International Publishing, pp. 183–203, 2016.
- [34] HUI, S., ZAK, S. “Observer Design for Systems with Unknown Inputs”, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, v. 15, pp. 431–446, 2005.
- [35] KOMMURI, S. K., DEFOORT, M., KARIMI, H. R., et al. “A Robust Observer-based Sensor Fault-tolerant Control for PMSM in Electric Vehicles”, *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, v. 63, n. 12, pp. 7671–7681, 2016.
- [36] CHEN, J., PATTON, R. J., ZHANG, H.-Y. “Design of Unknown Input Observers and Robust Fault Detection Filters”, *International Journal of Control*, v. 63, n. 1, pp. 85–105, 1996.
- [37] RADKE, A., GAO, Z. “A Survey of State and Disturbance Observers for Practitioners”. In: *IEEE 2006 American Control Conference - Minneapolis, MN, USA*, 2006.
- [38] CHEN, W. H., YANG, J., GUO, L., et al. “Disturbance-Observer-Based Control and Related Methods: An Overview”, *IEEE T. Ind. Electron.*, v. 63, n. 2, pp. 1083–1095, 2016.
- [39] WILLERSRUD, A., BLANKE, M., IMSLAND, L., et al. “Fault Diagnosis of Downhole Drilling Incidents Using Adaptive Observers and Statistical Change Detection”, *Journal of Process Control*, v. 30, pp. 90–103, 2015.

- [40] DEMETRIOU, M., POLYCARPOU, M. “Incipient Fault Diagnosis of Dynamical Systems Using Online Approximators”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 43, 1998.
- [41] ZHANG, X., POLYCARPOU, M., PARISINI, T. “A Robust Detection and Isolation Scheme for Abrupt and Incipient Faults in Nonlinear Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, 2002.
- [42] AN, L., SEPEHRI, N. “Hydraulic Actuator Circuit Fault Detection Using Extended Kalman Filter”. In: *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003*, v. 5, pp. 4261–4266, Denver, CO, USA, 2003.
- [43] SEPASI, M., SASSANI, F. “On-line Fault Diagnosis of Hydraulic Systems Using Unscented Kalman Filter”, *International Journal of Control, Automation and Systems*, v. 8, n. 1, pp. 149–156, 2010.
- [44] MING, T., XIANG ZHANG, Y., YONG ZHANG, X. “Fault Detection for Electro-Hydraulic Valve-Controlled Single Rod Cylinder Servo System Using Linear Robust Observer”. In: *2009 International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation*, pp. 639–642, Zhangjiajie, Hunan, China, 2009.
- [45] MUENCHHOF, M., ISERMANN, R. “Performance Evaluation of Kalman Filter for Fault Detection of Hydraulic Actuators”, *IFAC Proceedings*, v. 40, n. 7, pp. 692–697, 2007.
- [46] LOUKIANOV, A. G., RIVERA, J., ORLOV, Y. V., et al. “Robust Trajectory Tracking for an Electrohydraulic Actuator”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 56, n. 9, pp. 0–3531, 2009.
- [47] SLOTINE, J.-J. E., HEDRICK, J. K., MISAWA, E. A. “On Sliding Observers for Nonlinear Systems”, *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, v. 109, n. 3, pp. 245–252, 1987.
- [48] UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization (Communications and Control Engineering)*. Berlin, Springer, 1992.
- [49] EDWARDS, C., SPURGEON, S. K. “On the Development of Discontinuous Observers”, *International Journal of Control*, v. 59, n. 5, pp. 1211–1229, 1994.
- [50] EDWARDS, C., SPURGEON, S. *Sliding Mode Control: Theory And Applications*. New York, Taylor & Francis, 1998.

- [51] SPURGEON, S. K. “Sliding Mode Observers: A Survey”, *International Journal of Systems Science*, v. 39, n. 8, pp. 751–764, 2008.
- [52] WALCOTT, B., ZAK, S. “State observation of nonlinear uncertain dynamical systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 32, n. 2, pp. 166–170, 02 1987.
- [53] BURTON, J. A., ZINOBER, A. S. I. “Continuous Approximation of Variable Structure Control”, *International Journal of Systems Science*, v. 17, n. 6, pp. 875–885, 1986.
- [54] CHILALI, M., GAHINET, P. “ \mathcal{H}_∞ Design with Pole Placement Constraints: An Lmi Approach”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 3, pp. 358–367, 3 1996.
- [55] SEURET, A., FLOQUET, T., RICHARD, J. P., et al. “A Sliding Mode Observer for Linear Systems with Unknown Time Varying Delay”. In: *2007 American Control Conference*, pp. 4558–4563, July 2007.
- [56] RAOUFI, R., ZINOBER, A. S. I. “Sliding Mode Adaptive State Observation for Time-delay Uncertain Nonlinear Systems”. In: *IEEE 2008 American Control Conference (ACC '08)*, pp. 5248–5253, Seattle, WA, 2008.
- [57] OPPENHEIM, A. V., SCHAFER, R. W. *Discrete-Time Signal Processing*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA, Prentice Hall, 2009.
- [58] MIRKIN, L., RASKIN, N. “Every Stabilizing Dead-time Controller Has an Observer-predictor Based Structure”, *Automatica*, v. 39, n. 10, pp. 1747–1754, 2003.
- [59] SMITH, O. J. M. “Closer Control of Loops with Dead Time”, *Chemical Engineering Progress*, v. 53, n. 5, pp. 217–219, 1957.
- [60] ARTSTEIN, Z. “Linear Systems with Delayed Controls: A Reduction”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 27, n. 4, pp. 869–879, 1982.
- [61] WATANABE, K., ITO, M. “An Observer for Linear Feedback Control Laws of Multivariable Systems With Multiple Delays in Controls and Outputs”, *System & Control Letters*, v. 1, n. 1, pp. 54–59, 1981.
- [62] LÉCHAPPÉ, V., MOULAY, E., PLESTAN, F. “Prediction-based Control for LTI Systems with Uncertain Time-varying Delays and Partial State Knowledge”, *International Journal of Control*, v. 91, n. 6, pp. 1403–1414, 2017.

- [63] LÉCHAPPÉ, V., MOULAY, E., PLESTAN, F. “Prediction-based Control of LTI Systems with Input and Output Time-varying Delays”, *Systems & Control Letters*, v. 112, pp. 24–30, 2018.
- [64] LÉCHAPPÉ, V., MOULAY, E., PLESTAN, F., et al. “New Predictive Scheme for the Control of LTI Systems with Input Delay and Unknown Disturbances”, *Automatica*, v. 52, pp. 179–184, 2015.
- [65] SANZ, R., GARCIA, P., ALBERTOS, P. “Enhanced Disturbance Rejection for a Predictor-based Control of LTI Systems with Input Delay”, *Automatica*, v. 72, pp. 205 – 208, 2016. ISSN: 0005-1098. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.05.019>.
- [66] GERMANI, A., MANES, C., PEPE, P. “A New Approach to State Observation of Nonlinear Systems with Delayed Output”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 1, pp. 96–101, 2002.
- [67] AHMED-ALI, T., CHERRIER, E., LAMNABHI-LAGARRIGUE, F. “Cascade High Gain Predictors for a Class of Nonlinear Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 1, pp. 224–229, jan. 2012.
- [68] COUTINHO, C. L., OLIVEIRA, T. R., CUNHA, J. P. V. S. “Output-feedback Sliding Mode Control Via Cascade Observers for Global Stabilisation of a Class of Nonlinear Systems with Output Delay”, *International Journal of Control*, v. 87, n. 11, pp. 2327–2337, 2014.
- [69] HOLLOWAY, J., KRSTIC, M. “Predictor Observers for Proportional Navigation Systems Subjected to Seeker Delay”, *IEEE T. Contr. Syst. T.*, v. 24, n. 6, pp. 2002–2015, 2016.
- [70] TORRES, L., VERDE, C., BESANÇON, G., et al. “High-gain Observers for Leak Location in Subterranean Pipelines of Liquefied Petroleum Gas”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 24, n. 6, pp. 1127–1141, 2012.
- [71] KRSTIC, M., SMYSHLYAEV, A. “Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays”, *Syst. Control Lett.*, v. 57, pp. 750–758, 2008.
- [72] SMYSHLYAEV, A., KRSTIC, M. “Backstepping Observers for a Class of Parabolic PDEs”, *Systems & Control Letters*, v. 54, n. 7, pp. 613–625, 2005.

- [73] BRESCH-PIETRI, D., KRSTIC, M. “Adaptive Trajectory Tracking Despite Unknown Input Delay and Plant Parameters”, *Automatica*, v. 45, n. 9, 2009.
- [74] KRSTIC, M. “Lyapunov Stability of Linear Predictor Feedback for Time-Varying Input Delay”, *IEEE T. Automat. Contr.*, v. 55, n. 2, pp. 554–559, 2010.
- [75] KRSTIC, M. *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Basel, Birkhäuser, 2009.
- [76] KRSTIC, M. “Compensation of Infinite-Dimensional Actuator and Sensor Dynamics”, *IEEE Contr. Syst. Mag.*, v. 30, n. 1, pp. 22–41, 2010.
- [77] LI, X., DECARLO, R. A. “Robust Sliding Mode Control of Uncertain Time Delay Systems”, *International Journal of Control*, v. 76, n. 13, pp. 1296–1305, 2003.
- [78] GU, K., KHARITONOV, V. L., CHEN, J. *Stability of Time-Delay Systems (Control Engineering)*. 1 ed. Boston, Birkhauser, 2003.
- [79] FRIDMAN, E. “Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems”, *European Journal of Control*, v. 20, n. 6, pp. 271–283, 11 2014.
- [80] MICHIELS, W., VERRIEST, E. I. *A Look at Fast Varying and State Dependent Delays from a Systems Theory Point of View*. TW reports, Department of Computer Science, K.U.Leuven; Leuven, Belgium, 2011.
- [81] SEURET, A., GOUAISBAUT, F., BAUDOUIN, L. *D1.1 - Overview of Lyapunov Methods for Time-delay Systems*. Research Report Rapport LAAS n°16308, LAAS-CNRS, 2016.
- [82] VERRIEST, E. “Well-posedness of problems involving time-varying delays”. In: *Proceedings of the 2010 International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems, Budapest, Hungary*, 2010.
- [83] VERRIEST, E. I. “Inconsistencies in systems with time-varying delays and their resolution”, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, v. 28, n. 2, pp. 147–162, 2011.
- [84] KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. 3rd ed ed. New Jersey, Prentice Hall, 2002.
- [85] ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B., DUPONT, P., WIT, C. C. D. “A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction”, *Automatica*, v. 30, n. 7, pp. 1083–1138, 1994.

- [86] KARNOPP, D. “Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems”, *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, v. 107, pp. 100–103, 1985.
- [87] WHITE, F. *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill, 2006.
- [88] ALWI, H., EDWARDS, C., TAN, C. P. *Fault Detection and Fault-Tolerant Control Using Sliding Modes*. Advances in Industrial Control. 1 ed. London, Springer-Verlag, 2011.
- [89] STRANG, G. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley Cambridge Press, 2009.
- [90] FRIDMAN, E. *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Systems & Control: Foundations & Applications. 1 ed. Basel, Birkhauser, 2014.
- [91] CLEVELAND, W. “First-order-hold Interpolation Digital-to-analog Converter with Application to Aircraft Simulation”, *NASA Technical Note D-8331*, 1976.
- [92] LOZANO, A., ROSELL, J., PALLAS-ARENY, R. “On the Zero- and First-order Interpolation in Synthesized Sine Waves for Testing Purposes”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 41, n. 6, pp. 820–823, 1992.
- [93] ZHANG, Z., CHONG, K. T. “Second Order Hold Based Discretization Method of Input Time-Delay Systems”. In: *IEEE 2007 International Symposium on Information Technology Convergence (ISITC 2007)*, Jeonju, Korea, pp. 348–352, 2007.
- [94] SÜLI, E., MAYERS, D. F. *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge, Cambridge University Press, 2003.
- [95] HSU, L., COSTA, R. R., DA CUNHA, J. P. V. S. “Model-Reference Output-Feedback Sliding Mode Controller for a Class of Multivariable Nonlinear Systems”, *Asian Journal of Control*, v. 5, n. 4, pp. 543–556, 2003. ISSN: 1934-6093.
- [96] CHAI, T., DRAXLER, R. R. “Root Mean Square Error (RMSE) or Mean Absolute Error (MAE)? – Arguments against Avoiding RMSE in the Literature”, *Geoscientific Model Development*, v. 7, n. 3, pp. 1247–1250, 2014.
- [97] ASTROM, K. J., WITTENMARK, B. *Computer-Controlled Systems*. Prentice-Hall, 2001.

- [98] YANG, J., LI, S., YU, X. “Sliding-Mode Control for Systems With Mismatched Uncertainties via a Disturbance Observer”, *IEEE T. Ind. Electron.*, v. 60, n. 1, pp. 160–169, 2013.
- [99] KLAMKA, J. “Observer for Linear Feedback Control of Systems With Distributed Delays in Controls and Outputs”, *Syst. Control Lett.*, v. 1, n. 5, pp. 326–331, 1982.
- [100] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. *Elementary Differential Equations*. Wiley, 2012.
- [101] SHTESSEL, Y., EDWARDS, C., FRIDMAN, L., et al. *Sliding Mode Control and Observation*. 1 ed. New York, Springer, 2014.
- [102] IOANNOU, P. A., SUN, J. *Robust Adaptive Control*. (out of print). Prentice Hall, 1996. Available online at: http://www-rcf.usc.edu/~ioannou/Robust_Adaptive_Control.htm.
- [103] MANDIC, D. P., KANNA, S., A. G. CONSTANTINIDES, A. G. “On the Intrinsic Relationship Between the Least Mean Square and Kalman Filters [Lecture Notes]”, *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 32, n. 6, pp. 117–122, 2015.
- [104] KARNI, S., ZENG, G. “The Analysis of the Continuous-time LMS Algorithm”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 37, n. 4, pp. 595–597, 1989.
- [105] DINIZ, P. S. R. *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*. Springer, 2002.
- [106] ZHOU, B., LIU, Q., MAZENC, F. “Stabilization of Linear Systems with Both Input and State Delays by Observer-predictors”, *Automatica*, v. 83, pp. 368 – 377, 2017.
- [107] NAGESH, I., EDWARDS, C. “A Multivariable Super-twisting Sliding Mode Approach”, *Automatica*, v. 50, pp. 984–988, 2014.
- [108] CHALANGA, A., KAMAL, S., FRIDMAN, L., et al. “Implementation of Super-Twisting Control: Super-Twisting and Higher Order Sliding-Mode Observer-Based Approaches”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 63, n. 6, pp. 3677–3685, 2016.
- [109] LEVANT, A. “Sliding Order and Sliding Accuracy in Sliding Mode Control”, *International Journal of Control*, v. 58, n. 6, pp. 1247–1263, 1993.

- [110] MORENO, J. A., OSORIO, M. “A Lyapunov Approach to Second-order Sliding Mode Controllers and Observers”. In: *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2856–2861, 2008.
- [111] TUKEY, J. W. “Nonlinear (nonsuperposable) methods for smoothing data”, *Conference Record of EASCON*, pp. 674–674, 1974.
- [112] U. S. DEPARTMENT OF DEFENSE. *Procedures for Performing a Failure Mode, Effects and Criticality Analysis*. Relatório técnico, U. S. Department of Defense, 1980.
- [113] HERMANN, M., PENTEK, T., OTTO, B. “Design Principles for Industrie 4.0 Scenarios”. In: *2016 49th Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS)*, pp. 3928–3937, Jan 2016.
- [114] LEE, J., LAPIRA, E., BAGHERI, B., et al. “Recent advances and trends in predictive manufacturing systems in big data environment”, *Manufacturing Letters*, v. 1, n. 1, pp. 38 – 41, 2013. ISSN: 2213-8463.
- [115] DEMIRCIOGLU, H., GAWTHROP, P. “Continuous-time Generalized Predictive Control (CGPC)”, *Automatica*, v. 27, pp. 55–74, 1991.
- [116] HALE, J. K., LUNEL, S. M. V. *Introduction to Functional Differential Equations*. 1 ed. New York, Springer-Verlag, 1993.
- [117] HALE, J. K. *Theory of functional differential equations*. Applied mathematical sciences 3. 2 ed. New York, Springer-Verlag, 1977.
- [118] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. P. *Inequalities*. Cambridge, Cambridge University Press, 1988.

Apêndice A

Métodos de Lyapunov para Estabilidade de Sistemas com Atrasos

Neste capítulo iremos apresentar um breve resumo dos principais resultados voltados para a análise de estabilidade no domínio do tempo para sistemas apresentando atrasos, os métodos de *Lyapunov-Razumikhin* e de *Lyapunov-Krasovskii*. Ambos apresentam relação direta com o segundo método de Lyapunov.

Para a apresentação dos métodos, considere o sistema atrasado genérico [81]:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_\tau(t)), \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

onde $x_\tau(t) = x(t - \tau(t))$, com $\tau(t) > 0$ para todo $t > 0$. A função $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}^n$ é localmente Lipschitz no segundo argumento, sendo \mathcal{C} o conjunto de funções contínuas que mapeiam o intervalo $[-\bar{\tau}, 0]$ em \mathbb{R}^n e $\bar{\tau}$ o maior atraso necessário para definir integralmente a condição inicial. Será assumido que $f(t, 0) = 0$, garantindo que o sistema possui $x(t) \equiv 0$ como uma solução trivial. Também será assumido que o campo de vetores f em (A.1) é limitado para valores limitados de seus argumentos.

A.1 Método de *Lyapunov-Razumikhin*

Neste método, a análise de estabilidade é feita utilizando uma função de Lyapunov $V(t, x(t))$ adequada ao sistema quando o atraso é zero. Assim, considere o Teorema abaixo [78, 79, 81], [116, Pag. 152]:

Teorema A.1.1. (*Teorema de Lyapunov-Razumikhin*) *Suponha que $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}^n$ mapeia $\mathbb{R} \times (\text{conjuntos limitados em } \mathcal{C})$ em conjuntos limitados de \mathbb{R}^n . Seja u, v e $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ funções contínuas não-decrescentes, sendo $u(s)$ e $v(s)$ positivas para*

$s > 0$, $u(0) = v(0) = 0$, e v estritamente crescente. A solução trivial de (A.1) é uniformemente estável se existe uma função contínua e diferenciável $V(t, x(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ positiva definida, ou seja, tal que

$$u(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)) \leq v(\|x(t)\|) \quad (\text{A.2})$$

e cuja derivada ao longo das trajetórias de (A.1) satisfaça

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|) \quad (\text{A.3})$$

se

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)), \quad \forall \theta \in [-\tau(t), 0]. \quad (\text{A.4})$$

Além disso, se $w(s) > 0$ para $s > 0$, e existir uma função contínua não-decrescente $p(s) > s$ para $s > 0$ tal que a condição (A.4) é fortalecida para

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|) \quad (\text{A.5})$$

se

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t))), \quad \forall \theta \in [-\tau(t), 0], \quad (\text{A.6})$$

então a função V é dita uma função de Lyapunov-Razumikhin e a solução trivial de A.1 é uniforme e assintoticamente estável. Adicionalmente, se $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ então a solução é global, uniforme e assintoticamente estável.

A ideia principal do teorema de Lyapunov-Razumikhin consiste em que é suficiente garantir que $\dot{V}(t, x(t))$ seja negativa definida apenas nas trajetórias que tendem a escapar de uma vizinhança do ponto de equilíbrio.

Para ilustrar uma aplicação deste teorema, consideremos o exemplo proposto em [117, Pag. 129] e [116, Pag. 154]. Seja o sistema:

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) - b(t)x(t - \tau(t)) \quad (\text{A.7})$$

onde a , b e τ são funções contínuas e limitadas em \mathbb{R} , $|b(t)| \leq a(t)$ e $0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $V(x(t)) = x^2/2$, temos que:

$$\dot{V}(x(t)) = -a(t)x^2(t) - b(t)x(t)x(t - \tau(t)). \quad (\text{A.8})$$

Se $|x(t)| \geq |x(t - \tau(t))|$, temos que $V(x(t)) \geq V(x(t - \tau(t)))$. Além disso,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &\leq -a(t)x^2(t) + |b(t)||x(t)||x(t - \tau(t))|, \\ \dot{V}(x(t)) &\leq -a(t)x^2(t) + |b(t)||x(t)|^2, \\ \dot{V}(x(t)) &\leq -[a(t) - |b(t)|]x(t)^2.\end{aligned}\tag{A.9}$$

Como $|b(t)| \leq a(t)$, temos que $\dot{V}(x(t)) \leq -\varepsilon\|x(t)\|^2$, para $0 < \varepsilon < [a(t) - |b(t)|]$, $\forall t > 0$ e, pelo Teorema A.1.1, a solução $x=0$ é uniformemente estável.

Considere agora que $a(t) > \delta > 0$ e existe uma constante $0 < k < 1$ tal que $|b(t)| \leq k\delta$. Seja um funcional $p(s) = q^2s$, onde $q > 1$ é uma constante. Utilizando novamente a função $V(x(t)) = x^2/2$, temos que

$$p(V(x)) = \frac{q^2x^2(t)}{2}.\tag{A.10}$$

Se $q|x(t)| \geq |x(t - \tau(t))|$, temos que $p(V(x(t))) \geq V(x(t - \tau(t)))$. Assim,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &\leq -\delta x^2(t) + k\delta|x(t)||x(t - \tau(t))| \\ \dot{V}(x(t)) &\leq -\delta x^2(t) + k\delta qx^2(t), \\ \dot{V}(x(t)) &\leq -(1 - qk)\delta x^2(t).\end{aligned}\tag{A.11}$$

Como $k < 1$, existe um $q > 1$ tal que $(1 - qk) > 0$. Assim, a segunda parte do Teorema A.1.1 é satisfeita e a solução $x=0$ é uniforme e assintoticamente estável.

Neste exemplo simples, a função de Lyapunov-Razumikhin obtida é independente da duração do atraso. De acordo com o problema a ser analisado, pode ser mais difícil a obtenção de uma função que atenda ao Teorema A.1.1 de forma independente da duração ou da taxa de atraso (ver demais exemplos em [116, 117]). Em outros casos, faz-se necessário recorrer a desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities* - LMI) para determinar a estabilidade [79, Seção 3.1],[78]. Além disso, os resultados obtidos através do método de Lyapunov-Razumikhin são em geral bastante conservadores [79, 81].

A.2 Método de *Lyapunov-Krasovskii*

O método mais utilizado para análise de estabilidade de sistemas apresentando atrasos é o de Lyapunov-Krasovskii. Este consiste em uma extensão do segundo método de Lyapunov para aplicação em equações diferenciais funcionais. No lugar de uma função de “energia” utilizada em equações diferenciais ordinárias utiliza-se um funcional positivo definido $V(t, x_\tau(t))$, levando em conta todo o estado de dimensionalidade infinita $x_\tau(t)$. Tal como no método de Lyapunov, o funcional deve ser

decrecente ao longo das trajetórias do sistema.

Considere o funcional contínuo $V(t, x_\tau(t)) : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}^n$ e seja $x_\tau(t, \phi)$ a solução de (A.1) em um tempo $\tau \geq t$ com a condição inicial $x_\tau = \phi$. Define-se a derivada Dini superior a direita como:

$$\dot{V}(t, \phi) = \limsup_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} [V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(t, \phi)) - V(t, \phi)]. \quad (\text{A.12})$$

Com estas definições apresentadas, o método de *Lyapunov-Krasovskii* pode ser formalizado pelo teorema abaixo [78, 79, 81], [116, Teorema 2.1].

Teorema A.2.1. (*Teorema de Lyapunov-Krasovskii*) *Suponha que $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}^n$ mapeia $\mathbb{R} \times (\text{conjuntos limitados em } \mathcal{C})$ em conjuntos limitados de \mathbb{R}^n . Sejam u, v e $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ funções contínuas não-decrescentes, sendo que $u(s)$ e $v(s)$ são positivas para $s > 0$ e $u(0) = v(0) = 0$. A solução trivial de (A.1) é uniformemente estável se existe um funcional contínuo e diferenciável $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ positivo definido, ou seja, tal que*

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c) \quad (\text{A.13})$$

e cuja derivada ao longo das trajetórias de (A.1) é negativa, satisfazendo

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|). \quad (\text{A.14})$$

Se $w(s) > 0$, para $s > 0$, então a solução trivial de A.1 é uniforme e assintoticamente estável. Adicionalmente, se $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ então a solução é global, uniforme e assintoticamente estável.

Para demonstrar a utilização deste teorema, vamos considerar o exemplo proposto em [79]. Seja o sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)), \quad (\text{A.15})$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$ é diferenciável. As matrizes A e A_1 são constantes e $n \times n$. Para este sistema, vamos utilizar um funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(t, x_\tau(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds \quad (\text{A.16})$$

onde $P > 0$ e $Q > 0$ são matrizes $n \times n$. Derivando (A.16) ao longo das trajetórias

de (A.15), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_\tau(t)) &= 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) \\ &\quad - (1 - \dot{\tau}(t))x^T(t - \tau(t))Qx(t - \tau(t)), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_\tau(t)) &= x^T(t)(A^T P + PA + Q)x(t) + x^T(t)PA_1x(t - \tau) \\ &\quad + x^T(t - \tau)A_1^T Px(t) - (1 - \dot{\tau}(t))x^T(t - \tau(t))Qx(t - \tau(t)). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Observe que como $Q > 0$, é desejável que $\dot{\tau}(t) \leq d < 1$, para que o último termo seja negativo. Esta condição para o atraso é denominada variação lenta e é bastante usual em sistemas com atraso [76, 79, 80, 82]. Adotando esta hipótese e definindo o vetor $\xi(t) = [x^T(t) \quad x^T(t - \tau)]^T$, podemos escrever a partir da equação (A.18):

$$\dot{V}(t, x_\tau(t)) \leq \xi^T(t) \underbrace{\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PA_1 \\ A_1^T P & -(1 - d)Q \end{bmatrix}}_{\triangleq W} \xi(t). \quad (\text{A.19})$$

Se $W < 0$ então temos que $\dot{V}(t, x_\tau(t)) \leq -\varepsilon \|x(t)\|^2$, para $\varepsilon > 0$. É possível observar que a partir do funcional adotado (A.16), obtivemos uma LMI que mostra que a condição para estabilidade não é dependente da duração de atraso, apesar de ser dependente de sua taxa de variação. Por este motivo o funcional utilizado neste exemplo resulta em uma condição independente do atraso (*Delay-independent condition*) [79, 81].

Observe que factibilidade de $W > 0$ em (A.19) depende de que as matrizes A e $A \pm A_1$ sejam Hurwitz e, desta forma, este funcional não é aplicável para estabilização de sistemas lineares instáveis. Além disso, ele só pode ser aplicado a atrasos cuja derivada seja estritamente menor que um (atrasos de variação lenta). Existem diversos outros funcionais de Lyapunov-Krasovskii que podem ser utilizados para análise de estabilidade de sistemas com atrasos, mas a maioria implicará em condições dependentes da duração do atraso [81, 90]. Em muitos destes, a derivada do funcional ainda apresentará termos integrais. Para tanto, ferramentas matemáticas como as desigualdades de Jensen e Wirtinger [118] são utilizadas, o que adiciona complexidade analítica ao método. No relatório de SEURET *et al.* [81] (disponível na Internet no endereço <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01369516>) são apresentados diversos exemplos e uma comparação da complexidade e do grau de conservadorismo de diversos funcionais de Lyapunov-Krasovskii aplicados a estes.