PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE MARÉ EM CANAIS COMUNICANDO-SE COM UM RESERVATÓRIO

ROBSON SARMENTO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Rui Carlos Vieira da Silva
Presidente

Carlos Russo

Cirilo Massarani

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
MAIO DE 1971

A meus pais,
irmão e
Magaly

A G R A D E C I M E N T O S

- Aos professores Rui Carlos Vieira da Silva e Alain Vuez

- Ao CNPq., COPPE, UFES

- Ao Corpo Discente e Administrativo da COPPE.

- Ao Laboratório de Hidraulica do DNPVN

S I N O P S E

Êste trabalho tem por finalidade o estudo do fenômeno resultante da propagação de marés em interior de canais comunicando-se com um reservatório.

A passagem da onda oceânica na foz de um canal, origina uma onda que se propaga dentro do canal.

Três teorias são aplicadas para êste fenômeno:

1 - A onda propagada é considerada uma onda de translação, propagando-se de acôrdo com certas leis conhecidas. O problema é tratado sob o ponto de vista da dissipação de energia da onda pelo atrito dentro dos limites do canal;

2 - As equações das ondas longas são consideradas (continuidade e movimento). As equações são resolvidas através método diferenças-finitas explicito;

3 - As equações das ondas longas são soluciona-

das através método diferenças-finitas implicito.

De acôrdo com cada uma das teorias, são calculadas as velocidades e alturas para o canal do pôrto de Laguna. Os resultados são confrontados com dados observados no mesmo local.

Tendo em vista os bons resultados obtidos por ambas teorias (1 e 2), concluimos que elas são aplicáveis com êxito na simulação das velocidades e alturas no canal, sob condições idênticas as do problema aqui tratado.

S I N O P S I S

The main objective of this paper is the study of the resulthing phenomena of the propagation of tides in Inland channels, which are in close communication with a reservoir.

The passage of the ocean tidal wave in front of the mouth of a channel, sets up therein a wave, which is propagated into the channel.

Three theories are presented to study this phenomenon:

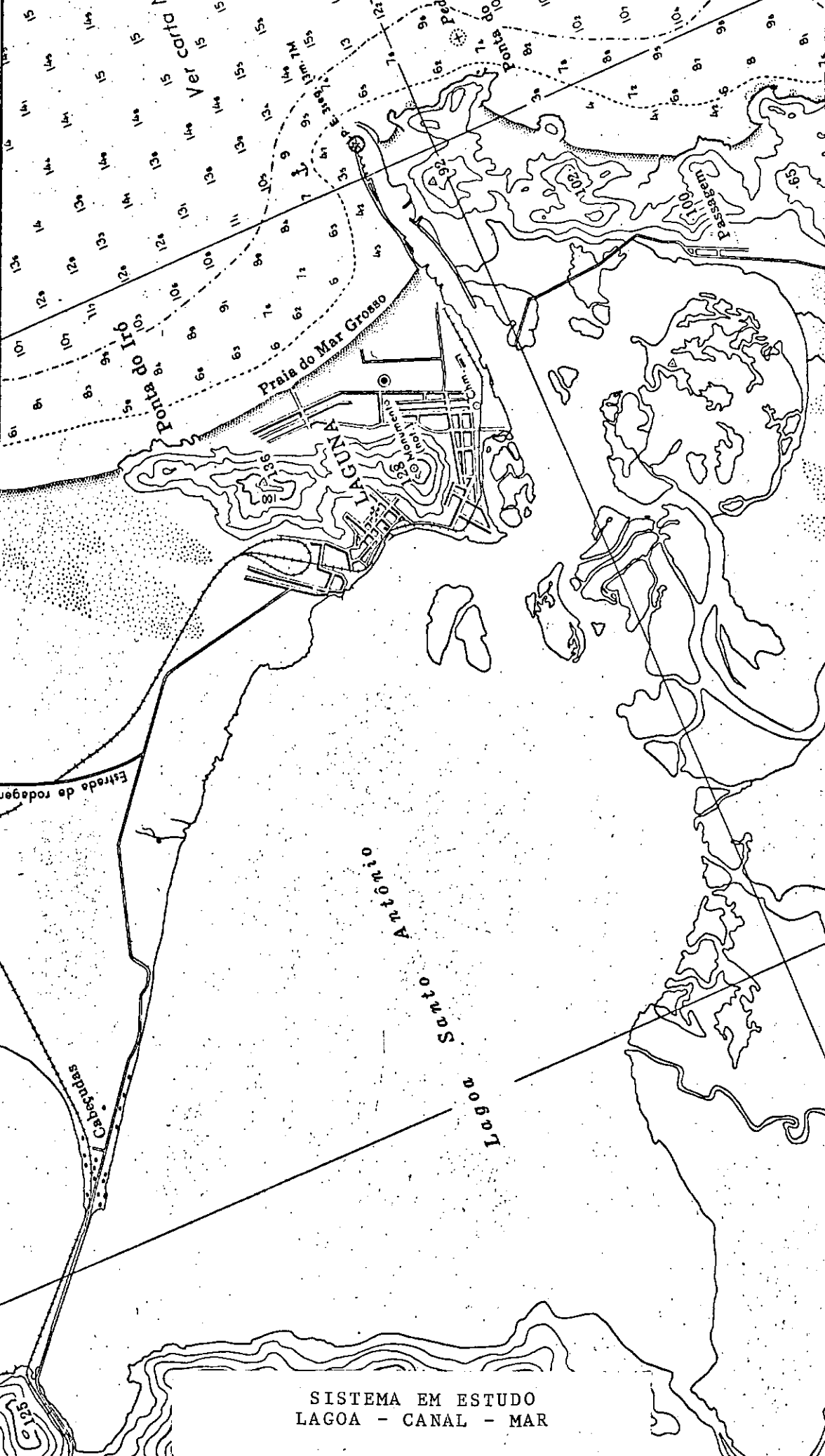
1 - The propagated wave is considered a wave of translation, and this propagation obeys the well known laws. The problem is dealth with by considering the expenditure of the wave energy, by friction within the limits of the channel;

2 - The equations of continuity and motion of longwaves were taken into consideration in this case. The solution of these equations is treated with explicite finite-difference method;

3 - The equations of long waves are solved with implicit finite-difference method.

The velocity and the height for the channel of Laguna's for are calculated according each one of these theories. The results were checked those, previously observed, at the same place.

If we take into consideration the good results presented by both theories (1 and 2), we conclude that they can be successifuly applied on the simulation of the velocity and height in the channel, under identycal conditions we have in the problem, here discussed.



SISTEMA EM ESTUDO
LAGOA - CANAL - MAR

I N D I C E

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

a) Resumo Histórico 3

b) Importância Prática do Estudo 6

CAPÍTULO II - INFLUÊNCIA DAS MARÉS EM CANAIS COMUNICANDO-SE COM UM RESERVATÓRIO - PRINCÍPIO DA ENERGIA

a) Energia da onda de translação 7

b) Influência da variação de largura do canal 10

c) Propagação da maré em um canal comunicando-se com um reservatório..... 13

d) Equações de Airy 18

- Discussão das condições de contôrno 20

- Soluções das Equações 22

1 - Canal com extremidade fechada 22

2 - Canal comunicando-se com um lago 34

- Exemplo de aplicação 62

CAPÍTULO III - EQUAÇÕES DAS ONDAS LONGAS APLICADAS AO ESTUDO DA INFLUÊNCIA DE MARÉS EM CANAIS COMUNICANDO-SE COM RESERVATÓRIO.

- Equações das ondas longas 70
- Solução das equações através método diferença finita explicito 74
- Exemplo de aplicação 79

CAPÍTULO IV - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DAS ONDAS LONGAS ATRAVÉS MÉTODO DIFERENÇA FINITA IMPLICITO

- Teoria 82
- Procedimento numérico do método para solução das equações 95
- Exemplo de aplicação 103

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA 109

CONCLUSÕES 111

ANEXO I

ANEXO II

ANEXO III

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO

A passagem de uma onda de maré na foz de um canal dá origem a uma onda que se propaga através do mesmo.

Êste estudo trata do fenômeno resultante da propagação da onda originada pela maré no interior de canais.

As condições sob as quais a onda se propaga são também influênciadas pelo tipo do sistema com o qual o terminal do canal se comunica.

Três casos são encontrados na natureza:

1) Sistema tendo um nível constante

2) Sistema tendo um nível variável

3) Canal comunicando-se em ambos terminais com um sistema de maré.

O segundo capítulo trata do princípio da energia no caso da propagação de uma onda.

Os canais em geral não são tão grandes a ponto

de absorver tôda a energia da onda propagada. Vamos ver o que acontece no terminal do canal com a energia não absorvida pelo atrito: de acôrdo com a teoria da reflexão de ondas esta energia é propagada de volta ao canal na forma de onda refletida; sendo que a sua energia está também sujeita a perdas por atrito; Se esta energia não é totalmente consumida no curso do transito da onda refletida, uma segunda onda refletida é originada para montante, e assim indefinidamente até práticamente tôda a energia da onda propagada ter sido absorvida pelo atrito dentro dos limites do canal.

Estas ondas, propagadas e refletidas, existem simultâneamente no canal, e elas interferirão para todos os pontos de acôrdo com as leis de interferência de ondas simultâneas. Então a onda observada no canal será a resultante formada destas interferências.

O perfil longitudinal de uma onda não é senoidal contudo ela pode ser considerada sem êrro apreciável,daqui, a onda propagada, incluindo a resultante e tôdas ondas refletidas, podem ser consideradas como senoidais.

Para aplicar esta teoria, usa-se neste estudo as equações de Airy (equações de movimento e continuidade), com os dados do pôrto de Laguna, a teoria é aplicada fazendo-se cálculos de acôrdo com as equações acima mencionadas,

e então comparando os resultados calculados com os resultados observados.

O terceiro capítulo trata da influência das marés, em canais comunicando-se com um reservatório, através das equações das ondas longas, ou seja as marés são tratadas como ondas longas. Partindo-se das equações da continuidade e movimento juntamente com as condições de contôrno e as condições iniciais para as velocidades e as alturas, determinamos maregramas e velocidades para seções do canal. O método empregado para a solução das equações é o explícito. O estudo é aplicado ao canal do pôrto de Laguna.

O quarto capítulo trata da solução das equações das ondas longas através método implícito mais recente devido à Amein e Fang. Destaca-se a importância dêste método devido à plena liberdade nas escolhas das dimensões das malhas retangulares, Δx e Δt, nas equações diferenças que substituem as equações acima mencionadas, ou sejam às da continuidade e movimento. Aplicação é procedida analisando-se movimento de marés no canal do pôrto de Laguna.

a) Resumo Histórico

Aproximadamente dois mil anos atraz, os naturalistas Strabo e Plint estudaram uma relação entre os corpos

celestes e o movimento do oceano. Foi também constatado por Kepler que as forças de atração da lua e do sol influiam no sistema. O primeiro a estudar matemáticamente a origem das marés foi Newton através do seu trabalho Philosophiae Naturalis Principia Matematica (Londres, 1687). Das posições do sol e da lua êle pode explicar o fenômeno da preamar e baixa mar.

Em 1738 a Academia de Ciência Francesa deu um novo avanço a teoria das marés, devida a Newton; através dos estudos procedidos por Bernouilli. Contudo a teoria de Newton era desmerecedora de certo grau de certeza, e que portanto deveria receber um tratamento da teoria hidrodinâmica, teoria esta que foi desenvolvida por Laplace no seu trabalho "A Mecânica Celeste". Entretanto esta teoria apresentava falhas, mas era muito conveniente para mostrar como observações de marés deveriam ser analizadas para propósitos práticos e teóricos.

Em 1868 surge o método harmônico, desenvolvido por Thompson.

Após a análise harmônica, novos métodos para cálculos dos constituintes harmônicos foram extendidos por Darwin e outros investigadores.

Seguindo o trabalho de Newton, Bernouilli, e La-

place, o problema das marés foi tratado por Airy, e também Poincaré desenvolveu modêlos matemáticos. Cabe destacar também os métodos analíticos devidos a: Taylor, Proudman, Van Dantzig e Lauwerier.

Em 1900 Massau dá uma importante contribuição a teoria das marés, a qual tratava do método das características. Contudo naquela época o seu trabalho não foi bem recebido, devido ao não entendimento do uso prático da teoria; mas com o desenvolvimento dos métodos de cálculo numérico, principalmente o de Holsters, a teoria de Massau foi totalmente adotada.

A teoria das características vem sendo estudada até hoje, em todo o mundo, principalmente na França.

Após a 2a. Guerra Mundial, métodos baseados nas propriedades das equações diferenciais parciais hiperbólicas foram aplicados ao movimento das marés. Êste trabalho é devido a Massau, sendo que o assunto foi também abordado por Schonfeld.

Estudos de marés vem sendo desenvolvido no curso dos anos; destacando-se o de Parson para o "Cape Cod Canal" e o livro de Pillsbury sôbre cálculos de marés.

Atualmente os estudos de marés estão sendo trata

dos através computadores, sendo que o primeiro pesquisador a seguir tal procedimento foi W. Hansen.

b) Importância prática do presente estudo

Geralmente em se tratando de marés, o engenheiro está mais interessado respectivamente nos valores máximos das amplitudes e das velocidades.

A importância prática do estudo é evidente. Nos projetos de canais nós devemos estabelecer a altura necessária da sua seção para prever uma certa cheia. Na construção de canais de navegação velocidades e alturas máximas do fluxo são necessárias para estabelecimento de formatos de navios. Outrossim informações sôbre níveis d'água, de interêsse para: molhes (diques), comportas de drenagem e informações sôbre correntes de interêsse para: energia, proteção de praia, assoreamento em canais. Podemos ainda destacar a importância com relação à levantamentos hidrográficos e projetos portuários.

C A P Í T U L O II

INFLUÊNCIA DAS MARÉS EM CANAIS COMUNICANDO-SE COM UM RESERVATÓRIO (PRINCÍPIO DA ENERGIA)

Nêste capítulo procederemos ao estudo dos canais sujeitos às marés, comunicando-se no seu terminal à montante com um reservatório.

Considerações teóricas são discutidas para estabelecer o mecanismo da propagação.

A onda originada pela maré será tratada como uma onda de translação.

a) Energia da onda de translação

A energia total de uma onda de translação, será constante no caso de inexistência do atrito, mas caso contrário a energia será reduzida continuamente pelo mesmo. A energia para qualquer ponto consiste de duas partes iguais, energia potencial sendo representada pela altura da onda acima do nível médio, e energia cinética representada pela velocidade da água.

Seja:

ϕ - velocidade da onda

L - largura do canal para o nível do mar.

D - altura reduzida do canal.

h - altura da onda referida ao nível médio do mar para qualquer ponto x, para o tempo t.

v - velocidade da água, para qualquer ponto x e tempo t.

A expressão para a energia potencial por unidade de comprimento de onda será:

$$E_p = \frac{1}{2} \rho \ell h^2 g$$

referência é feita para Milne Thompson (13) para estabelecimento da última equação.

E a energia cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \therefore E_c = \frac{1}{2} \rho \ell (D + h) v^2$$

Seja: A representação abaixo:

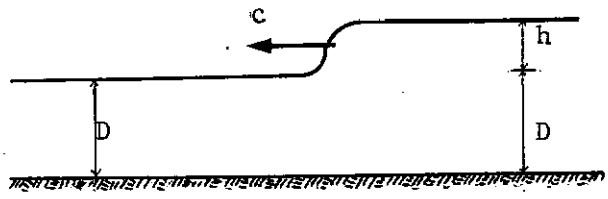


Figura 1

Pela continuidade hidraulica (Rich (12)).

$$v(D + h) = c\ h$$

$$\therefore \quad v = \frac{c.h}{(D + h)}$$

Substituindo êste valor para a velocidade na expressão da energia cinética teremos:

$$E_c = \frac{1}{2} \rho\ \ell\ (D + h) \frac{c^2 . h^2}{(D + h)^2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \ell \frac{c^2}{(D + h)} \cdot h^2$$

mas da teoria das ondas, em águas pouco profundas

$$c = \sqrt{g H}$$

no nosso caso

$$H = D + h$$

$$\therefore \quad c^2 = g (D + h) \quad \therefore \quad \frac{c^2}{D + h} = g$$

logo virá:

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \ell g \cdot h^2$$

O que nos demonstra a igualdade da energia cinética com a potencial, como inicialmente dito.

A expressão para a energia de uma onda de translação será:

$$E = \frac{1}{2} \rho g \ell h^2 + \frac{1}{2} g \rho \ell (D + h) v^2$$

b) <u>Influência da variação de largura do canal</u>

Seja o canal representado abaixo:

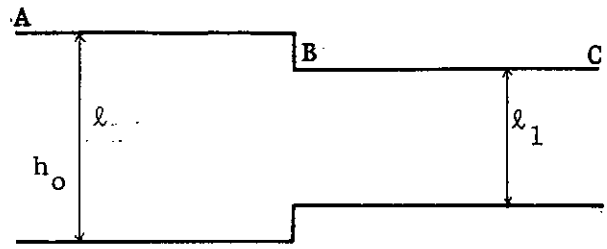


Figura 2

Seja:

h_o = Altura da onda em A.

h_1 = Altura da onda em B ($h_1 \neq h_o$ em virtude do atrito).

A energia da onda em B será:

$$E = \rho \, g \, \ell \, h_1^2 .$$

Devido a redução da largura em B, sòmente uma parte desta energia pode ser propagada em BC.

Seja:

h = A verdadeira altura para B

Então a energia para B virá:

$$E_1 = \rho\ g\ \ell_1\ h^2$$

A energia a qual não é transmitida através B, se manifestará em uma onda refletida retornando para A.

A energia refletida será dada por:

$$E_2 = E - E_1 = \rho\ g\ \ell\ h_1^2 - \rho\ g\ \ell_1\ h^2 =$$

$$= \rho\ g\ (\ell\ h_1^2 - \ell_1\ h^2)$$

mas

$$E_2 = \rho\ g\ \ell\ (h - h_1)^2$$

Igualando-se as duas expressões para E_2 teremos:

$$\ell\ h_1^2 - \ell_1\ h^2 = \ell h^2 - 2\ell\ h\ h_1 + \ell h_1^2$$

$$\therefore \quad h = \frac{2\ \ell\ h_1}{\ell + \ell_1} \qquad (1)$$

Analisemos a fórmula anterior (equação (1)):

1) $\ell_1 < \ell \qquad h > h_1$

Ex: $\ell_1 = 0$, $h = 2h_1$

2) $\ell_1 > \ell \qquad h < h_1$

Ex: $\ell_1 = \infty$, $h = 0$

Então a propagação de uma onda em canal que comunica-se com um reservatório, continuará dentro do reservatório com amplitude diferente da sua forma inicial. A amplitude deve variar de acôrdo com a lei expressa pela fórmula anteriormente estabelecida, na qual se - ℓ_1 É muito grande ou infinito, h , deve ser muito pequeno ou zero.

c) <u>Propagação da maré em um canal comunicando-se com um reservatório.</u>

Seja um canal horizontal de seção transversal constante.

O reservatório é tido como nível constante. Va-

mos estudar as diversas configurações da curva de remanso no canal.

Seja a figura abaixo:

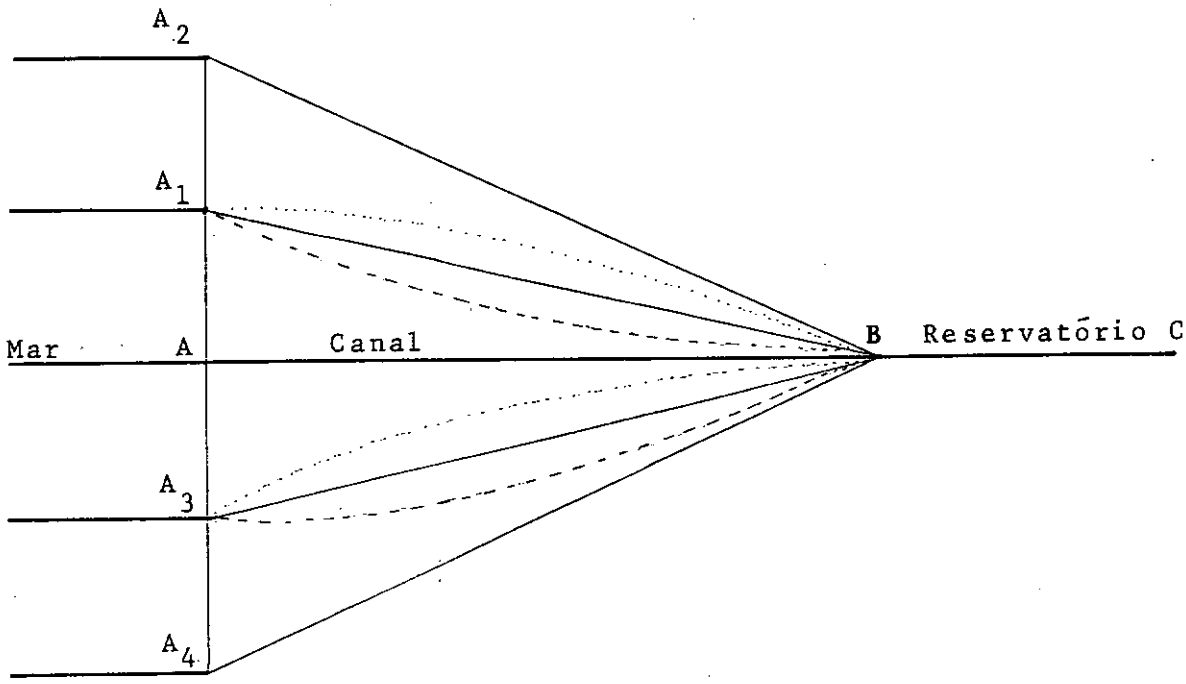


Figura 3

AB é o nível médio do mar suposto ser o mesmo de BC (Reservatório).

A_2 , A_4 = Os níveis extremos alcançado pela maré

Como sabemos o nível no canal é constantemente variado.

Teremos sòmente o estado de equilíbrio quando o nível permanecer sem movimento por um certo tempo.

Quando o nível cresce de A para A_2, êle cresce relativamente mais rápido para A do que para qualquer outro ponto de $\overline{AB}$, e a curva de nível toma uma forma concava para cima (representada na figura por uma linha tracejada).

Quando o nível desce de A_2 para A, a curva de nível será convexa para cima, como indicado na figura peças linhas pontilhadas.

Quando o nível vai descendo para A_3, a curva de remanso no canal será convexa para cima, e será concava quando o nível passa por A_3 subindo.

Então as curvas em linhas tracejadas representam os níveis no canal durante a cheia, e as linhas pontilhadas os níveis durante a vazante.

Sob estas condições, as velocidades para cada ponto do canal serão pequenas no momento de meia maré, quando o nível passa através o nível médio; elas serão máxima, na cheia ou vazante, no momento que a diferença de nível é máxima.

O reservatório foi definido como suficientemente grande, de maneira tal quê o volume introduzido nêle pela onda de maré, não altera o seu nível. Consequentemente, sua superfície permanesce com nível constante, o qual é também assumido ter o mesmo nível médio do mar e do canal.

Seja a equação babaixo:

$$E = \rho g \ell h^2$$

Vemos que a altura da onda varia inversamente com a largura ℓ do canal. De acôrdo com a última equação e a demonstração da influência na variação na largura do canal, se a largura do canal é pequena, h será pequena. Assim desde que o reservatório constitui uma expansão infinita na largura do canal, ℓ será muito grande, aproximando-se do infinito, e h será pequeno, aproximando-se de zero. Consequentemente, a onda de translação deverá desaparecer na saida do canal dentro do reservatório. Rich (11) revela que não sòmente a onda desaparece na saída, mas que a influência do reservatório em decrescer a altura da onda é refletida de volta por todo o comprimento do canal, causando para as alturas e velocidades de todos pontos do canal diferirem de seus valores teóricos.

Para achar a explicação dêste fenômeno imaginamos a propagação da maré em um canal como sendo formada por uma série de ondas de translação ou sejam sucessivos fluxos e refluxos. O fluxo é acompanhado por uma certa velocidade do fluxo d'água no canal. A cessação das forças de inercia em oposição ao fluxo resultará em um decréscimo desta velocidade do fluxo. Esta cessação das forças de inercia criará um fluxo negativo na saida o qual é propagado de volta ao canal.

A altura do fluxo negativo na saida será igual à aquele do fluxo, sendo que a sua soma deverá ser zero, e as velocidades resultantes dos dois fluxos, estando na mesma direção, somarão os seus valores, ou seja a velocidade será duas vêzes a teorica.

Como já vimos a energia da onda de translação consiste de duas partes iguais, a energia potencial e a cinética, potencial sendo devido a altura da onda e cinética devido a velocidade do fluxo d'água. Sabemos também que a soma desta energia para qualquer ponto é constante, e também um tipo de energia é convertido em outro. Quando o fluxo encontra o reservatório a sua energia cinética deve ter-se consumida. A outra metade, a potencial, deve ser convertida em cinética, desta maneira haverá um aumento na velocidade da água o qual originará o fluxo negativo.

Então cada onda positiva dará origem a uma onda negativa do reservatório e vice versa. Mas devido ao atrito, cada onda sucedente virá cada vez menor, até deixar de existir.

O perfil resultante do canal para qualquer instante será a soma algébrica de tôdas alturas de ondas para aquêle instante e a velocidade resultante será a soma de tôdas as velocidades.

d) Às equações de Airy para marés

Uma das melhores aproximações para o cálculo de marés em canais é por meio das equações diferenciais de Sir George Airy. Passemos à apresentação das equações.

Seja a figura abaixo:

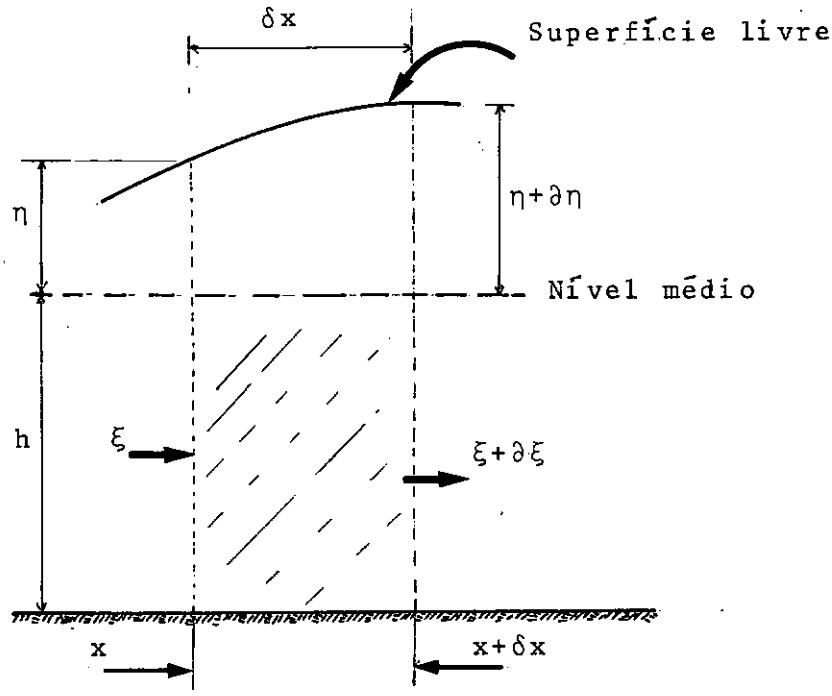


Figura 4

Partindo da 2a. lei de Newton Airy estabeleceu as seguintes equações de fluxo em canais de maré:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + f \frac{\partial \xi}{\partial t} - gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \qquad (2)$$

$$\eta = - h \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad (3)$$

Nas quais:

η - superelevação da superficie livre d'água

ξ - movimento devido ao transiente

h - é a altura reduzida do canal; que é a altura de uma seção retangular tendo a mesma área e largura quando a seção média atual, é medida da elevação média da maré.

f - $\dfrac{g\, f_o\, X}{W\, A}$

X - perimetro molhado da seção transversal média do canal.

A - área da seção transversal média do canal

W - peso especifico d'água

f_o - coeficiente tal quê a força de atrito por metro quadrado de superfície do canal é igual a $f_o V$.

Referência é feita para Rich (11) para estabelecimento das equações, e discussões mais detalhadas.

Discussão sôbre as condições de contorno

1 - O terminal do canal é estrangulado; então as condições de contorno serão:

$$x = 0 \quad , \quad \eta = \eta_o \text{ sen } \frac{2\pi t}{T}$$

$$x = L \quad , \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

L = comprimento do canal

T = periodo da maré (44715 seg)

2 - Para o caso de um canal tendo variação de maré para um terminal e um lago para o outro terminal:

$$x = 0 \quad , \quad \eta = \eta_o \text{ sen } \frac{2\pi t}{T}$$

$$x = L \quad , \quad \eta = 0$$

3 - Quando existe variação de maré para cada terminal, o procedimento é calcular o efeito para cada extremo separadamente, usando as condições de contôrno anteriores, e somando-se os efeitos ter-se-á o resultado.

Exemplo ilustrativo é apresentado nêste trabalho para demonstrar a aplicabilidade do método para o caso do canal comunicando-se com um reservatório no seu terminal, usando-se os dados do porto de Laguna. Para procedimento do estudo se faz necessário antes de tudo a resolução do sistema.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + f \frac{\partial \xi}{\partial t} - gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

$$\eta + h \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

Será tratado aqui a solução do sistema baseado em dois tipos de condições de contorno:

1) - Canal com o seu fim estrangulado.

2) - Canal comunicando-se com um grande reservatório no seu terminal, com aplicação ao pôrto de Laguna.

1) - Equações de Airy para canal estrangulado:

As equações de Airy serão agora resolvidas pelas transformada de Laplace: nós procederemos a derivação das equações para a amplitude e velocidade:

Temos da equação de Airy:

$$gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi}{\partial t^2} + f \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

multiplicando ambos lados por e^{-pt} dt e integrando de 0 a ∞:

$$gh \frac{\partial}{\partial x^2} \int_0^\infty e^{-pt} \xi \, dt = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial \xi}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) dt +$$

$$+ f \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial}{\partial t} (\xi) \, dt$$

$$gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \left[e^{-pt} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) \right]_0^\infty + \int_0^\infty p e^{-pt} \frac{\partial}{\partial t} (\xi) \, dt +$$

$$+ f \left[e^{-pt} \xi \right]_0^\infty + f \int_0^\infty p e^{-pt} \xi \, dt$$

$$gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 + p \left[e^{-pt} \xi \right]_0^\infty + p^2 \int_0^\infty e^{-pt} \xi \, dt + 0 +$$

$$+ f p \bar{\xi}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial x^2} - \frac{(p+f)P}{gh} \bar{\xi} = 0$$

A solução desta equação é:

$$\bar{\xi} = C_1 e^{\sqrt{\frac{p^2+pf}{gh}} x} + C_2 e^{\sqrt{\frac{p^2+pf}{gh}} x}$$

Por conveniência seja:

$$\beta = \sqrt{\frac{p^2+pf}{gh}} \quad , \quad \text{então.}$$

$$\bar{\xi} = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} \tag{4}$$

A segunda equação de Airy é:

$$\eta = - h \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Multiplicando ambos lados por $e^{-pt}dt$ e integrando de 0 a ∞:

$$\int_0^\infty e^{-pt} \eta \, dt = -h \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-pt} \xi \, dt$$

$$\bar{\eta} = -h \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x}$$

$$\bar{\eta} = -h\, C_1 \beta\, e^{\beta x} + h\, C_2\, \beta\, e^{-\beta x} \qquad (5)$$

Como tinhamos visto na discussão nas condições de contôrno, para canal estrangulado.

para $\quad x = L\,, \quad \xi = 0 \quad E \quad \bar{\xi} = 0$

para $\quad x = 0\,, \quad \eta = \eta_o \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \quad E$

$$\bar{\eta} = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T}}{p^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

Substituindo êstes valores de contôrno nas equações (4) e (5) nós eliminamos as constantes de integração C_1 e C_2 e obtemos a seguinte expressão para a transformada de Laplace para a amplitude:

$$\bar{\eta} = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T} \left(e^{\beta x - 2\beta L} + e^{-\beta x} \right)}{\{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2\} \quad \{1 + e^{-2\beta L}\}}$$

Colocando $\{1 + e^{-2\beta L}\}^{-1}$ por sua série equivalente nós obtemos:

$$\bar{\eta} = \eta_o \frac{2\pi}{T} \left[\frac{e^{\beta x - 2\beta L} + e^{-\beta x}}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} \right] \left[1 - e^{-2\beta L} + \right.$$

$$\left. + e^{-4\beta L} - e^{-6\beta L} + \ldots \right]$$

ou:

$$\bar{\eta} = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T}}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[e^{-\frac{(2nL+x)}{gh}(p+f)p} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + e^{-\frac{(2nL+2L-x)}{gh} - (p+f)\,p} \right] \right\}$$

A transformação acima pode ser considerada como o produto de duas transformações do tipo:

$$\phi_1 (p) = \frac{p}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2}$$

e

$$\phi_2(p) = \begin{cases} e^{-\frac{(2nL+x)}{\sqrt{gh}}\sqrt{(p+f)p}} \Big/ p \\ \\ e^{-\frac{(2nL+2L-x)}{\sqrt{gh}}\sqrt{(p+f)p}} \Big/ p \end{cases}$$

A inversão de $\phi_1(p)$ é

$$\cos\frac{2\pi t}{T} \supset \frac{p}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2}$$

E a inversão de $\phi_2(p)$ é

$$e^{-\frac{f}{2}\frac{(2nL+x)}{\sqrt{gh}}} H\left(\lambda - \frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) + \frac{f}{2}\frac{(2nL+x)}{\sqrt{gh}}$$

$$\int_{\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}}^{\lambda} e^{-\frac{f}{2}\lambda} \frac{I_1\left[\frac{f}{2}\sqrt{\lambda^2 - (\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}})^2}\right]}{\sqrt{\lambda^2 - (\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}})^2}} d\lambda \supset$$

$$\supset \sim e^{-\frac{(2nL+x)}{\sqrt{gh}}\sqrt{(p+f)p}}$$

também:

$$e^{-\frac{f}{2}\frac{(2nL+2L-x)}{\sqrt{gh}}} H\left(\lambda - \frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right) +$$

$$+ \frac{f}{2} \frac{(2nL+2L-x)}{\sqrt{gh}}$$

$$\int_{\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}}^{\lambda} e^{-\frac{f}{2}\lambda} \frac{I_1\left(\frac{f}{2}\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)^2}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)^2}} d\lambda \supset$$

$$\supset e^{-\frac{(2nL+2L-x)}{\sqrt{gh}}\sqrt{(p+f)p}}$$

Na qual I_1 é a função de Bessel modificada de primeira espécie e H é a função unitária de Heaviside.

Pelo teorema da convolução

$\phi(p) = \phi_1(p) \quad \phi_2(p)$ e

$$f(t) = \int_{o}^{t} f_2(t - \lambda)\, f_2(\lambda)\, d\lambda$$

Conseguentemente a inversão de $\bar{\eta}$ (p) é

$$\eta\ (t) = \eta_o \frac{2\pi}{T} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \int_{\frac{2nL+x}{gh}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T} (t - \lambda) \cdot$$

$$\left\{ e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)} + \frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) \int_{\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}}^{\lambda} e^{-\frac{f}{2}} \frac{I_1\left(\frac{f}{2}\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)^2}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL + x}{\sqrt{gh}}\right)^2}}\, d\lambda \right\} d\lambda$$

$$+ \eta_o \frac{2\pi}{T} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\frac{2nL+2L-x}{gh}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T} (t - \lambda) \cdot$$

$$\left\{ e^{-\frac{f}{2}\lambda\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)} + \frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right) \int_{\frac{2nL+2L+x}{\sqrt{gh}}}^{\lambda} e^{-\frac{f}{2}\lambda} \frac{I_1\left[\frac{f}{2}\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)}\right]}{\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)^2}} d\lambda \right\} d\lambda \qquad (6)$$

Para o fim do canal x = L, as duas expressões

$$\left(\frac{2nL + L}{\sqrt{gh}}\right) \text{ e } \left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right)$$

vem iguais, logo:

Para x = L

$$\eta = 2\eta_o \frac{2\pi}{T} \int_{\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T}(t - \lambda).$$

$$\left\{ e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right)} + \frac{f}{2}\left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right) \right.$$

$$\cdot \int_{\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}}^{\lambda} \left\{ \frac{e^{-\frac{f}{2}\lambda}\, I_1\left[\frac{f}{2}\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right)^2}\right]}{\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right)^2}}\, d\lambda \right\} d\lambda$$

$$t > \frac{2nL+L}{\sqrt{gh}} \qquad (7)$$

Integrando o 1º têrmo com {} nós obtemos

$$2\eta_o \frac{2\pi}{T}\, e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right)} \int_{\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}} \cos \frac{2\pi}{T}(t-\lambda)\, d\lambda =$$

$$= 2\eta_o^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right)} \operatorname{sen}\left(t - \frac{(2nL+L)}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T} \qquad (8)$$

Para integrar o segundo termo com {} colocamos a função de Bessel I_1 por sua série equivalente

$$I_1(\theta) = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta^3}{16} + \frac{\theta^5}{384} + \ldots\ldots$$

nêste caso particular, convergência é tão rápida que nós precisamos reter sòmente o 1º têrmo da série: a segunda integra

ção então vem:

$$2\eta_o \frac{2\pi}{T} \int_{\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T}(t-\lambda) \frac{f^2}{8} \frac{2nL+L}{\sqrt{gh}} \int_{\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}}^{\lambda}$$

$$e^{-\frac{f}{2}\lambda} d\lambda \, d\lambda = 2n_o \frac{f}{4} \left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right)$$

$$e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right)} \operatorname{sen} \left(t - \frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T} -$$

$$- 2\eta_o \frac{2\pi}{T} \frac{f\pi}{4} \left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right) \int_{\frac{2nL+L}{gh}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T}(t-\lambda) \, e^{-\frac{f}{2}} d\lambda \tag{9}$$

O segundo membro de (8)

$$- 2\eta_o \frac{2\pi}{T} \frac{f}{4} \left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right) \left[\cos \frac{2\pi}{T} \cdot \right.$$

$$\left\{ \frac{e^{-\frac{f}{2}\lambda}\left(-\frac{f}{2} \cos \frac{2\pi\lambda}{T} + \frac{2\pi}{T} \operatorname{sen} \frac{2\pi\lambda}{T}\right)}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \right\} +$$

$$+ \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \left\{ \frac{e^{-\frac{f}{2}\lambda} \left(-\frac{f}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi\lambda}{T} - \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi\lambda}{T}\right)}{\frac{f}{4}^{2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{2}} \right\}_{\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}}^{t}$$

Na expressão precedente a contribuição do limite superior de integração, envolvendo

$e^{-\frac{f}{2}t}$ será de magnitude desprezível, e tendendo para zero quanto $t \to \infty$

Para o limite superior nós obteremos:

$$- 2\eta_o \frac{2\pi}{T} \frac{f}{4} \left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right) e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right)}$$

$$\frac{\frac{f}{2} \cos \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{2\pi\left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right)}{T} - \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \operatorname{sen} \frac{2\pi\left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f}{4}^{2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{2}} +$$

$$\frac{\frac{f}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \operatorname{sen} \frac{2\pi\left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right)}{T} + \frac{2\pi}{T} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{2\pi\left(\frac{2nL+L}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f}{4}^{2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{2}} \qquad (10)$$

A solução final consistirá de uma série infinita com alternantes sinais mais e menos compreendendo os 3 têrmos (8), (9), (10)

2) Canal sujeito à maré num terminal e comunicando-se com um grande lago de nível constante no 2º terminal.

As condições de contôrno para êste caso são; para o fim (maré) $x = 0$;

$$\eta = \eta_o \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \quad e$$

$$\bar{\eta} = \eta_o \frac{\frac{2\pi}{T}}{p^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

Para o terminal no lago:

$$x = L \ , \quad \eta = 0 \ , \quad \bar{\eta} = 0$$

Substituindo êstes valores na equação (5)

$$0 = - h\, C_1\, \beta\, e^{\beta L} + h\, C_2\, \beta\, e^{-\beta L}$$

Nós obtemos:

$$C_2 = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T}}{h\beta} \quad \frac{1}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} \quad \frac{1}{1 - e^{-2\beta L}}$$

$$C_1 = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T}}{h\beta} \quad \frac{1}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} \quad \frac{e^{-2\beta L}}{1 - e^{-2\beta L}}$$

Substituindo êstes valores na equação (5)

$$\bar{\eta} = \eta_o \frac{2\pi}{T} \quad \frac{1}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} \quad \frac{e^{-\beta x} - e^{\beta x - 2\beta L}}{1 - e^{-2\beta L}}$$

Colocando o fator $(1 - e^{-2\beta L})^1$ por sua série equivalente nós obteremos:

$$\bar{\eta} = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T}}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} (e^{-\beta x} - e^{\beta x - 2\beta L}) (1 + e^{-2\beta L} +$$

$$+ e^{-4\beta L} + e^{-6\beta L} + \ldots\ldots)$$

ou:

$$\bar{\eta} = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T}}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} \left(e^{-\beta x} - e^{\beta x - 2\beta L} + e^{-\beta x - 2\beta L} - \right.$$

$$\left. - e^{\beta x - 4\beta L} + e^{-\beta x - 4\beta L} - \ldots\ldots \right)$$

$$= \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T}}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[e^{-(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}) \sqrt{(p+f)p}} - \right.$$

$$\left. - e^{-(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}) \sqrt{(p+f)p}} \right]$$

As transformações acima são as mesmas que aquelas prèviamente invertidas para o caso de canal estrangulado, a única diferença sendo que o Σ não é seguido pelo parenteses $(-1)^n$ e o sinal algébrico entre os dois têrmos em e com o | | é menos em vez de mais. De acôrdo nós podemos escrever como antes:

$$\eta = \eta_o \frac{2\pi}{T} \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{\frac{2nL+x}{gh}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T}(t-\lambda) \left\{ e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)} \right.$$

$$\left. + \frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) \int_{\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}}^{\lambda} e^{-\frac{f}{2}\lambda} \frac{I_1\left[\frac{f}{2}\sqrt{\lambda^2-\left(\frac{2nL+x}{gh}\right)^2}\right]}{\sqrt{\lambda^2-\left(\frac{2nL+x}{gh}\right)^2}} d\lambda \right\} d\lambda$$

$$\lambda > \frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}$$

$$- \eta_o \frac{2\pi}{T} \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{\frac{(2nL+2L-x)}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T}(t-\lambda) .$$

$$\left\{ e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)} + \right.$$

$$+ \frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right) \int_{\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}}^{\lambda} e^{-\frac{f}{2}\lambda}$$

$$\left. \cdot \frac{I_1\left[\frac{f}{2}\sqrt{\lambda^2-\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)^2}\right]}{\sqrt{\lambda^2-\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)^2}} d\lambda \right\} d\lambda \qquad \lambda > \frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}} \quad (11)$$

No caso onde $x = L \longrightarrow \eta = 0$

Seja o desenvolvimento de n

$$\eta = x + y$$

$$\dot{x} = I + II$$

$$\dot{y} = III + IV$$

Desenvolvimento de x , $\dot{x} = I + II$

$$I = \eta_o \frac{2\pi}{T} e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)} \int_{\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T}(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$I = \eta_o e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)} \operatorname{sen}\left(t - \frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T}$$

e

$$II = \eta_o \frac{2\pi}{T} \int_{\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos 2\pi (t-\lambda)\frac{f}{8}^{2} \cdot \frac{2nL + x}{\sqrt{gh}} \cdot$$

$$\cdot \int_{\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}}^{\lambda} e^{-\frac{f}{2}\lambda}\, d\lambda\, d\lambda =$$

$$= \eta_o \frac{f}{4} \cdot \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)} \operatorname{sen}\left(t - \frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)\frac{2\pi}{T} -$$

$$- \eta_o \frac{2\pi}{T} \frac{f}{4} \cdot \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) \int_{\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T}(t-\lambda) e^{-\frac{f}{2}\lambda} \, d\lambda =$$

$$II = \eta_o \frac{f}{4} \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)} \operatorname{sen}\left(t - \frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T} -$$

$$- \eta_o \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{f}{4} \cdot \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) \left[\cos \frac{2\pi t}{T} \cdot \right.$$

$$\cdot \left\{ \frac{e^{-\frac{f}{2}\lambda}\left(-\frac{f}{2}\cos\frac{2\pi\lambda}{T} + \frac{2\pi}{T}\operatorname{sen}\frac{2\pi\lambda}{T}\right)}{\frac{f}{4}^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \right\} +$$

$$\left. + \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{T} \left\{ \frac{e^{-\frac{f}{2}\left(-\frac{f}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi\lambda}{T} - \frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi\lambda}{T}\right)}}{\frac{f}{4}^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \right\} \right]_{\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}}^{t}$$

Na expressão anterior a contribuição do limite superior de integração, envolvendo $e^{-f/2\ t}$ será de grandeza desprezível, e tendendo a zero quando $t \rightarrow \infty$, para o limite inferior de integração teremos:

$$II = \eta_o \frac{f}{4} \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)} \operatorname{sen}\left(t-\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)\frac{2\pi}{T} -$$

$$- \eta_o \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{f}{4} \cdot \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\frac{f}{2} \cos \frac{2\pi t}{T} \cdot \cos \frac{2\pi\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} + \right.$$

$$+ \frac{-\frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \operatorname{sen} \frac{2\pi\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

$$+ \frac{\frac{f}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \operatorname{sen} \frac{2\pi\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} +$$

$$+ \frac{\frac{2\pi}{T} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{2\pi \left(\frac{2nL + x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \Bigg]$$

Desenvolvimento de $\dot{y}$:

$$\dot{y} = III + IV$$

$$III = \eta_o \frac{2\pi}{T} \int_{\frac{(2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T} (t-\lambda) . e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)} . d\lambda =$$

$$= \eta_o e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)} . \operatorname{sen} \left(t - \frac{(2nL+2L-x)}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T}$$

$$III = \eta_o e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)} . \operatorname{sen} \left(t - \frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T}$$

$$IV = \eta_o \frac{2\pi}{T} \int_{\frac{(2nL+2L-x)}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos . \frac{2\pi}{T} (t-\lambda) . \frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right) .$$

$$\int_{\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}}^{\lambda} e^{-\frac{f}{2}\lambda} \frac{I_1 \left(\frac{f}{2} \cdot \lambda^2 - \frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)}{\lambda^2 - \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)^2} d\lambda d\lambda =$$

$$= \eta_o \frac{2\pi}{T} \int_{\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T} (t-\lambda) . \frac{f^2}{8} . \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right).$$

$$\int_{\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}}^{\lambda} e^{-\frac{f}{2}\lambda} d\lambda \, d\lambda =$$

$$= \eta_o \frac{f}{4} \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right) e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)} .$$

$$\cdot \operatorname{sen}\left(t - \frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T} -$$

$$- \eta_o \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{f}{4} \left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right) \cdot$$

$$\int_{\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T} (t - \lambda)\, e^{-\frac{f}{2}\lambda}\, d\lambda =$$

$$= \eta_o \frac{f}{4} \cdot \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right) e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)} \cdot$$

$$\operatorname{sen}\left(t - \frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T} -$$

$$- \eta_o \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{f}{4} \cdot \left(\frac{2nL+2L - x}{\sqrt{gh}}\right) \left[\cos \frac{2\pi t}{T} \cdot \right.$$

$$\cdot \frac{e^{-\frac{f}{2}\lambda}\left(-\frac{f}{2} \cos \frac{2\pi\lambda}{T} + \frac{2\pi}{T} \operatorname{sen} \frac{2\pi\lambda}{T}\right)}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} +$$

$$+ \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \; \frac{e^{-\frac{f}{2}\lambda}\left(-\frac{f}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi\lambda}{T} - \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi\lambda}{T}\right)}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \Bigg]_{\frac{2nL+2L-x}{gh}}^{t}$$

Na expressão precedente a contribuição do limite superior de integração envolvendo $e^{-f/2t}$ será de grandeza desprezivel, tendendo para zero quando $t \to \infty$, para o limite inferior teremos:

$$IV = \eta_o \frac{f}{4} \cdot \left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right) e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sen} \left(t - \frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T} -$$

$$- \eta_o \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{f}{4} \left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right) e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\frac{f}{2} \cos \frac{2\pi t}{T} \cdot \cos \frac{2\pi\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} - \right.$$

$$- \frac{\frac{2\pi}{T} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} +$$

$$+ \frac{\frac{f}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \operatorname{sen} \frac{2\pi\left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} +$$

$$\left. + \frac{\frac{2\pi}{T} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \cdot \cos \frac{2\pi\left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \right]$$

Após desenvolvimentos teremos para I, II, III, IV as seguientes expressões:

$$I = A1 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} - B1 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$$II = \phi 1 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} - P1 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$$III = A2 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} - B2 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$$IV = \phi 2 \text{ sen } \frac{2\pi t}{T} - P2 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

Nas quais:

$$A1 = \eta_o \, e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)} \cdot \cos \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T}$$

$$B1 = \eta_o \, e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)} \cdot \text{sen} \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T}$$

$$C1 = \eta_o \frac{f}{4} \cdot \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)}$$

$$D1 = \frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$E1 = \frac{f}{2} \cdot \cos \frac{2\pi \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}$$

$$F1 = \frac{2\pi}{T} \text{ sen } \frac{2\pi \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}$$

$$G1 = \frac{f}{2} \cdot \text{ sen } \frac{2\pi \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}$$

$$H1 = \frac{2\pi}{T} \cdot \cos \frac{2\pi \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}$$

$$\phi 1 = C1 \cos \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{C1}{D1} (G1 + H1)$$

$$P1 = C1 \text{ sen } \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{C1}{D1} \cdot (E1 - F1)$$

$$A2 = \eta_o \, e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)} \cdot \cos \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T}$$

$$B2 = \eta_o \, e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)} \cdot \text{ sen}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T}$$

$$C2 = \eta_o \cdot \frac{f}{4} \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right) e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)}$$

$$E2 = \frac{f}{2} \cdot \cos \frac{2\pi \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}$$

$$F2 = \frac{2\pi}{T} \cdot \text{sen} \frac{2\pi \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}$$

$$G2 = \frac{f}{2} \cdot \text{sen} \frac{2\pi \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}$$

$$H2 = \frac{2\pi}{T} \cdot \cos \frac{2\pi \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}$$

$$\phi 2 = C2 \cdot \cos \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right) \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{C2}{D1} (G2+H2)$$

$$P2 = C2 \cdot \text{sen}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)\frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{C2}{D1}(E2-F2)$$

E fazendo

$$COEFS = A1 + \phi 1 - A2 - \phi 2$$

$$COEFC = -B1 - P1 + B2 + P2$$

Teremos finalmente

$$\eta = COEFS \ \text{sen}\ \frac{2\pi t}{T} + COEFC \cos \frac{2\pi t}{T} \qquad (12)$$

Esta é a expressão para a amplitude da onda de maré para qualquer ponto no canal. Esta expressão exprime a onda inicial e suas sucessivas reflexões. O cálculo de ondas refletidas sucessivas deverá ser procedido até a variação da soma dos parâmetros COEFS e COEFC ser de magnitude desprezada.

Expressão para velocidade no canal:

Temos que:

$$V = \frac{d\xi}{dt}$$

A forma operacional é: $\overline{V} = p\,\overline{\xi}$

$$p\,\overline{\xi} = C_1\, p\, e^{\beta x} + C_2\, p\, e^{-\beta x} =$$

$$\frac{-\eta_o \frac{2\pi}{T} p\, e^{\beta x - \beta L} + \eta \frac{2\pi}{T} p\, e^{-\beta x + \beta L}}{h_\beta \{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2\} \{e^{\beta L} + e^{-\beta L}\}} =$$

$$= \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T} (p\, e^{-\beta x} - p\, e^{\beta x - 2\beta L})}{h_\beta \{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2\} \{1 + e^{-2\beta L}\}}$$

colocando $\{1 + e^{-2\,L}\}^{-1}$ por sua série equivalente obteremos:

$$\overline{V} = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T}\sqrt{gh}}{h} \quad \frac{p}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{(e^{-\beta x} - e^{\beta x - 2\beta L})\ (1 - e^{-2\beta L} + e^{-4\beta L} - e^{-6\beta L} \ldots)}{\sqrt{(p + f)\, p}} =$$

$$= \eta_o \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{g}{h}} \frac{p}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{e^{-\beta x} - e^{\beta x - 2\beta L} - e^{-\beta x - 2\beta L} + e^{\beta x - 4\beta L} - e^{\beta x - 6\beta L}}{\sqrt{(p + f)\, p}}$$

$$\overline{V} = \eta_o \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{g}{h}} \left(\frac{p}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2}\right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\beta(2nL+x)} - e^{-\beta(2nL+2L-x)}}{\sqrt{(p + f)\, p}}$$

As transformações acima podem ser consideradas como produto de duas transformações:

$$\phi_1(p) = \frac{p}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} \subset \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$$\phi_2(p) = \frac{e^{-(\frac{2nL + x}{\sqrt{gh}})\sqrt{(p + f)\, p}}}{\sqrt{(p + f)\, p}} \subset$$

$$C e^{-\frac{f}{2}t} I_o \left[\frac{f}{2} \sqrt{t^2 - \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)^2} \right]$$

$$t > \frac{2nL + x}{\sqrt{gh}}$$

$$\frac{e^{-\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)\sqrt{(p+f)p}}}{\sqrt{p + f)p}} C$$

$$C e^{-\frac{f}{2}t} I_o \left[\frac{f}{2} \sqrt{t^2 - \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)^2} \right]$$

$$t > \frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}$$

Sendo I_o função de Bessel de la. espécie. Pelo teorema da convolução:

$$\phi(p) = \phi_1(p) \quad \phi_2(p)$$

E

$$f(t) = \int_o^t f_1(t - \lambda) f_2(\lambda) d\lambda$$

Consequentemente a inversão de $\overline{V}$ será:

$$V = \eta_o \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{g}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot$$

$$\cdot \int_{\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T}(t-\lambda) \; e^{-\frac{f}{2}\lambda} \cdot$$

$$\cdot I_o\left[\frac{f}{2}\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL+x}{gh}\right)^2}\right] d\lambda -$$

$$- \eta_o' \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{g}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot$$

$$\cdot \int_{\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T}(t-\lambda) \; e^{-\frac{f}{2}\lambda} \cdot$$

$$\cdot I_o\left[\frac{f}{2}\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)^2}\right] d\lambda \qquad (13)$$

mas: $$I_o(\theta) = 1 + \frac{\theta^2}{4} + \frac{\theta^4}{64}$$

Uma boa aproximação é alcançada quando

$$I_o(\theta) = 1.$$

A equação (13) se aplica ao caso do canal com o terminal estrangulado, pois quando x = L, teremos V = 0

Seja agora o caso do canal com o terminal aberto:

A transformada de Laplace para a velocidade é:

$$\overline{V} = p\overline{\xi}$$

$$\overline{\xi} = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}$$

Colocando-se os valores de C_1 e C_2

$$\overline{V} = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T}}{h\beta} \cdot \frac{p}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} \cdot \frac{e^{-\beta x} + e^{\beta x - 2\beta L}}{1 - e^{-2\beta L}}$$

Colocando o fator $(1 - e^{-2\beta L})$ por sua série correspondente nós obteremos:

$$\overline{V} = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T} p}{h_\beta \left(p^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)\right)^2} \left(e^{-\beta x} + e^{\beta x - 2\beta L} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 + e^{-2\beta L} + e^{-4\beta L} + e^{-6\beta L} + \ldots \right)$$

$$\overline{V} = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T} p}{h^\beta \left(p^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right)} \left(e^{-\beta x} + e^{\beta x - 2\beta L} + \right.$$

$$\left. + e^{-\beta x - 2\beta L} + e^{\beta x - 4\beta L} + e^{-\beta x - 4\beta L} + e^{\beta x - 6\beta L} \ldots \right)$$

$$= \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T} p}{h_\beta \left(p^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)\sqrt{(p+f)p}} + \right.$$

$$\left. + e^{-\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)\sqrt{(p+f)f}} \right]$$

Logo; seguindo desenvolvimentos anteriores:

$$V = \eta_o \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{g}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \cdot$$

$$\cdot \int_{\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T} (t - \lambda) \; e^{-\frac{f}{2}\lambda} \cdot$$

$$\cdot \; I_o \left[\frac{f}{2} \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)^2} \right] d\lambda \qquad t > \frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}$$

$$+ \; \eta_o \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{g}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \cdot$$

$$\cdot \int_{\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T} (t - \lambda) \; e^{-\frac{f}{2}\lambda} \cdot$$

$$\cdot \; I_o \left[\frac{f}{2} \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right)^2} \right] d\lambda$$

$$t > \left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)$$

(14)

Para o terminal do canal, x = L teremos para V:

$$V = 2\eta_o \frac{2\pi}{T} \frac{g}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \cdot$$

$$\cdot \int_{\frac{2nL + x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos \frac{2\pi}{T} (t - \lambda) \; e^{-\frac{f}{2}\lambda} \cdot$$

$$\cdot \; I_o \left[\frac{f}{2} \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL + x}{\sqrt{gh}}\right)^2} \right] d\lambda$$

Desenvolvimento da expressão (14):

Temos que:

$$I_o(\theta) = 1 + \frac{\theta^2}{4} + \frac{\theta^4}{64} + \ldots$$

Mas $I_o(\theta) = 1$; nos fornece uma boa aproximação logo:

$$I_o \left[\frac{f}{2} \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL + x}{\sqrt{gh}}\right)} \right] = 1$$

E $$I_o\left[\frac{f}{2}\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right)^2}\right] = 1$$

Logo (14) virá:

$$V = \eta_o \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{g}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \cdot$$

$$\cdot \int_{\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos\frac{2\pi}{T}(t - \lambda)\, e^{-\frac{f}{2}\lambda}\, d\lambda +$$

$$+ \eta_o \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{g}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \cdot$$

$$\int_{\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}}^{t} \cos\frac{2\pi}{T}(t - \lambda)\, e^{-\frac{f}{2}\lambda}\, d\lambda \qquad (15)$$

Após desenvolvimentos, teremos:

$$V = \eta_o \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{g}{h}} \cdot e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\frac{f}{2} \cdot \cos\frac{2\pi t}{T} \cdot \cos\frac{2\pi\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} -$$

$$- \frac{\frac{2\pi}{T} \cdot \cos\frac{2\pi t}{T} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} +$$

$$+ \frac{\frac{f}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{T} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} +$$

$$+ \frac{\frac{2\pi}{T} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{T} \cdot \cos\frac{2\pi\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} +$$

$$+ \eta_o \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{g}{h}} \cdot e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{gh}}\right)} \cdot$$

$$\frac{\frac{f}{2} \cdot \cos\frac{2\pi t}{T} \cdot \cos\frac{2\pi\left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} -$$

$$- \frac{\frac{2\pi}{T} \cdot \cos\frac{2\pi t}{T} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi\left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} +$$

$$+ \frac{\frac{f}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{T} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi\left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} +$$

$$+ \frac{\frac{2\pi}{T} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{T} \cdot \cos\frac{2\pi\left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \qquad (16)$$

Considerando:

$$A3 = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T} \frac{g}{h} \cdot e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL + x}{\sqrt{gh}}\right)}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

$$B3 = \frac{\eta_o \frac{2\pi}{T} \frac{g}{h} \cdot e^{-\frac{f}{2}\left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right)}}{\frac{f^2}{4} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

$$C3 = \cos \frac{2\pi \left(\frac{2nL + x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}$$

$$D3 = \operatorname{sen} \frac{2\pi \left(\frac{2nL + x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}$$

$$E3 = \cos \frac{2\pi \left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}$$

$$F3 = \operatorname{sen} \frac{2\pi \left(\frac{2nL + 2L - x}{\sqrt{gh}}\right)}{T}$$

$$COEVS = A3 \left(\frac{f}{2} \cdot D3 + \frac{2\pi}{T} \cdot C3\right) +$$

$$+ B3 \left(\frac{f}{2} F3 + \frac{2\pi}{T} \cdot E3\right)$$

$$COEVC = A3 \left(\frac{f}{2} \cdot C3 - \frac{2\pi}{T} \cdot D3\right) +$$

$$+ B3 \left(\frac{f}{2} E3 - \frac{2\pi}{T} \cdot F3\right) \qquad (17)$$

Teremos finalmente a expressão para a velocidade em qualquer ponto do canal:

$$V = COEVS \text{ sen } \frac{2\pi t}{T} + COEVC \cos \frac{2\pi t}{T} \qquad (18)$$

O cálculo a ser procedido deverá ser o mesmo para a equação (12).

Aplicação dêste estudo é efetuado para o pôrto de Laguna, de acôrdo com o programa para computador no anexo 1.

OS DADOS (20/11/57)

$L = 1890$ m

$HR = \frac{960}{180}$ m

$FO = 0.000138$

$PM = 300$ m

$AR = 960\ m^2$

$W = 1000\ kg/m^3$

$NETAO = 0.20$ m

$X = 1890$ m

$f_o = 0.0378\ kg/m^2$

- OS RESULTADOS:

Obtemos as seguintes expressões para a seção X = 1890 m

- Para as amplitudes:

$$\eta = -0.062 \text{ sen } \frac{2\pi t}{T} - 0.170 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

- Para as velocidades

$$V = 0.952 \text{ sen } \frac{2\pi t}{T} - 0.556 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

Derivando e igualando a zero a expressão da amplitude teremos o valor máximo para a mesma.

$$\eta = - 0.062 \text{ sen } \frac{2\pi t}{T} - 0.170 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = - 0.062 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} +$$

$$+ 0.170 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \text{sen } \frac{2\pi t}{T} = 0$$

$$\text{tg } \frac{2\pi t}{T} = - \frac{0.062}{0.170} = 0.342 : \frac{2\pi t}{T} = 20^{\circ}$$

Logo o valor máximo de virá:

$$\eta_{max} = -0.062 \times \text{sen } 20º - 0.170 \cdot \cos 20º$$

$$\eta_{max} = -0.062 \times 0.342 - 0.170 \times 0.939$$

$$\eta_{max} = -0.0212 - 0.159$$

$$\eta_{max} \cong -0.180 \text{ m}$$

Procedendo-se da mesma maneira quanto à velocidade:

$$V = 0.952 \text{ sen } \frac{2\pi t}{T} - 0,556 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0.952 \cdot \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} + 0.556 \times \frac{2\pi}{T} \cdot$$

$$\cdot \text{ sen } \frac{2\pi t}{T} = 0$$

$$\text{tg } \frac{2\pi t}{T} = -\frac{0.952}{0.556} \cong 1.712$$

$$\therefore \frac{2\pi t}{T} \cong 60º$$

Logo o valor máximo de V virá:

$$V_{max} = 0.952 \times 0.866 - 0.556 \times 0.5$$

$$V_{max} \cong 0.600 \text{ m/seg}$$

C A P Í T U L O III

EQUAÇÕES DAS ONDAS LONGAS APLICADAS AO ESTUDO DA INFLUÊNCIA DE MARÉS EM CANAIS COMUNICANDO-SE COM RESERVATÓRIO

No capítulo precedente tratamos da influência das marés em canais comunicando-se com um reservatório, baseados na premissa de que a onda originada pela maré se portava como uma simples onda de translação.

Um estudo mais generalizado, trata das equações das ondas longas em canais e que passamos a apresentar, sendo que a solução das equações é procedida através das diferenças finitas (método explicito).

As marés serão tidas como ondas longas, tendo em vista que as marés têem um periodo bastante razoável, e amplitudes apreciáveis. Se faz necessário então algumas considerações sôbre ondas longas. As ondas estão divididas em dois grupos principais ou sejam:

Ondas superficiais
Ondas longas

Nas ondas de superficie o movimento d'água é restrito a certas alturas. O movimento da particula d'água decresce com a profundidade.

Para ondas longas o movimento d'água alcança o fundo. Uma onda poderá ser identificada como uma onda longa quando a relação entre o seu comprimento de onda e sua amplitude fôr maior do que 2, caso contrário ela será uma onda superficial.

Nas ondas longas as acelerações e velocidades verticais são desprezadas.

A propagação de uma onda longa será influenciada principalmente pelo atrito com o leito.

O movimento de uma longa (maré) em um canal pode ser descrito por duas equações diferenciais, uma expressando a conservação de massa (equação da continuidade, e a outra expressando o equilibrio de forças e movimento na direção do comprimento do canal (equação dinâmica).

Passemos então ao estudo destas equações.

Seja a figura a seguir.

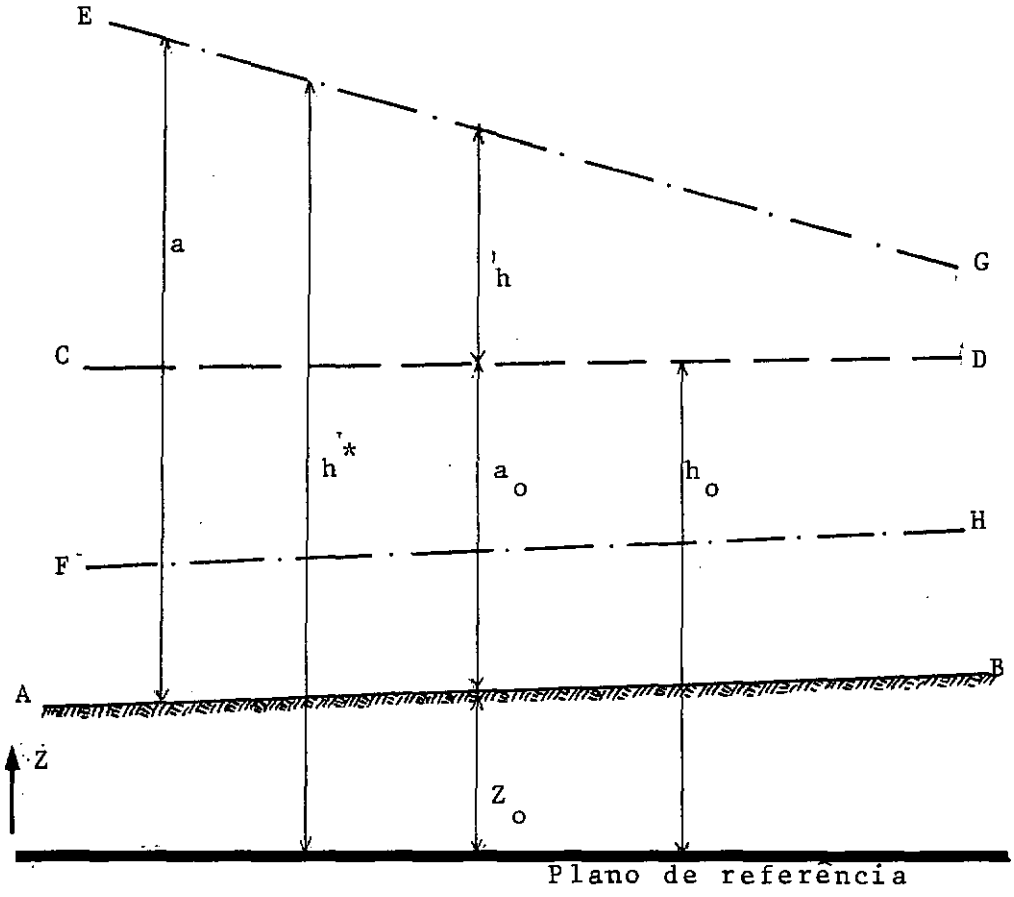


Figura 5

CD - NIVEL MÉDIO D'AGUA

EG - NIVEL DA PREAMAR

FH - NIVEL DA BAIXAMAR

AB - LEITO

EQUAÇÕES DE MARÉ:

As equações de maré que serão consideradas são as equações do movimento e continuidade para uma área bidimensional, ou sejam, as equações para ondas longas em águas pouco profundas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \Omega v = -g\frac{\partial h^*}{\partial x} - g\frac{|u|u}{c^2 a} \tag{19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \Omega u = -g\frac{\partial h^*}{\partial y} - g\frac{|v|v}{c^2 a} \tag{20}$$

$$\frac{\partial Au}{\partial x} + \frac{\partial Av}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \tag{21}$$

Nas quais os eixos $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são tomados anti-horários no plano de referência horizontal, $|v|$ é o módulo do vetor velocidade V do qual $\underline{u}$ e $\underline{v}$ são as componentes determinadas como valores médios na vertical,

Ω é o parâmetro de coriolis,

$\underline{h}^*$ - é a altura do nível d'água com respeito ao plano de referência

$\underline{a}$ - é a altura abaixo do nível d'água

$\underline{c}$ - é o coeficiente de chezy, a densidade ρ é tomada igual a 1.

Em escoamentos unidimensionais, $v = 0$; $V = u$ e a equação (20) não será levada em consideração, e a equação (21) virá:

$$\frac{\partial Au}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

sendo

A - área da seção transversal do rio

b - largura do rio

Cálculos com rios, são unidimensionais, sendo que os oceanos requerem tratamento bidimensional. As forças de coriolis são desprezadas em cálculos unidimensionais.

Então teremos para a propagação de marés em rios as seguintes equações:

Equação da continuidade

$$\frac{\partial Au}{\partial x} + b\,\frac{\partial h}{\partial t} = 0 \qquad (22)$$

Equação do movimento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = g\,\frac{\partial h^*}{\partial x} - g\,\frac{|u|u}{c^2 a} \qquad (23)$$

Referência é feita para Dronkers (4) e IPPEN (7), para estabelecimento das equações (22) e (23), e discussões mais detalhadas.

OBS.:

1) - As equações não incluem à ação do vento.

2) - A declividade é nula. (I = 0).

Então em um rio o movimento de uma onda longa, tal como a maré, é usualmente considerada unidimensional e as componentes da aceleração e velocidade não são consideradas nas direções transversais e verticais.

Passemos agora a solução do sistema (22) e (23).

Cálculo unidimensional de maré usando o método das diferenças finitas:

Os quocientes diferenciais, $\frac{\partial h}{\partial t}$ ... são substituidos por quocientes diferença, tal como:

$$\frac{hm^{n+1} - hm^{n}}{\Delta t}$$

ou

$$\frac{hm^{n+1} - hm^{n-1}}{2\ \Delta t}$$

Respectivamente chamados diferença pra frente e diferença central.

Sendo quê:

hm^{n} - representa o nível da água para o tempo n Δt na seção m do rio.

As equações diferenças finitas, as quais substituem as equações diferenciais para cálculos com o

computador, são diferentes para métodos explicitos e implicitos.

Nos esquemas explicitos os valores desconhecidos para um certo ponto para um dado momento $(n+1)\,\Delta t$ são expressados como uma função daquêles para o tempo $n\Delta t$. Dadas as condições iniciais, os valores para $t = 0$, assim bem como as condições de contorno para $x = 0$, nós poderemos obter passo a passo as funções h_m^n e u_m^n para todo $n\,\Delta\,t$.

Nos esquemas implicitos os valores desconhecidos para um dado momento $(n + 1)\,\Delta t$ também dependem dos valores visinhos desconhecidos para o tempo $(n+1)\,\Delta t$.

Seja agora a solução pròpriamente dita do sistema (22) e (23), segundo o método explícito.

Sejam as equações:

$$\frac{\partial A u}{\partial x} + b\,\frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = g\,\frac{\partial h^*}{\partial x} - g\,\frac{|u|u}{c^2 a}$$

Da figura 5 temos que

$$h^* = z_o + a_o + h$$

Mas $z_o = 0$

$$\therefore \quad h^* = a_o + h \qquad \therefore \quad h = h^* - a_o$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{\partial a_o}{\partial t}$$

Mas $\frac{\partial a_o}{\partial t} = 0$

$$\therefore \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h^*}{\partial t}$$

E, $$\frac{\partial A u}{\partial x} = u \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial u}{\partial x}$$

E seja $H = h^*$

Introduzindo-se as condições acima as equações passam a ser:

$$u \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{g}{c^2 H} |u| u \qquad (25)$$

Substituindo as várias derivadas por diferenças finitas pra frente:

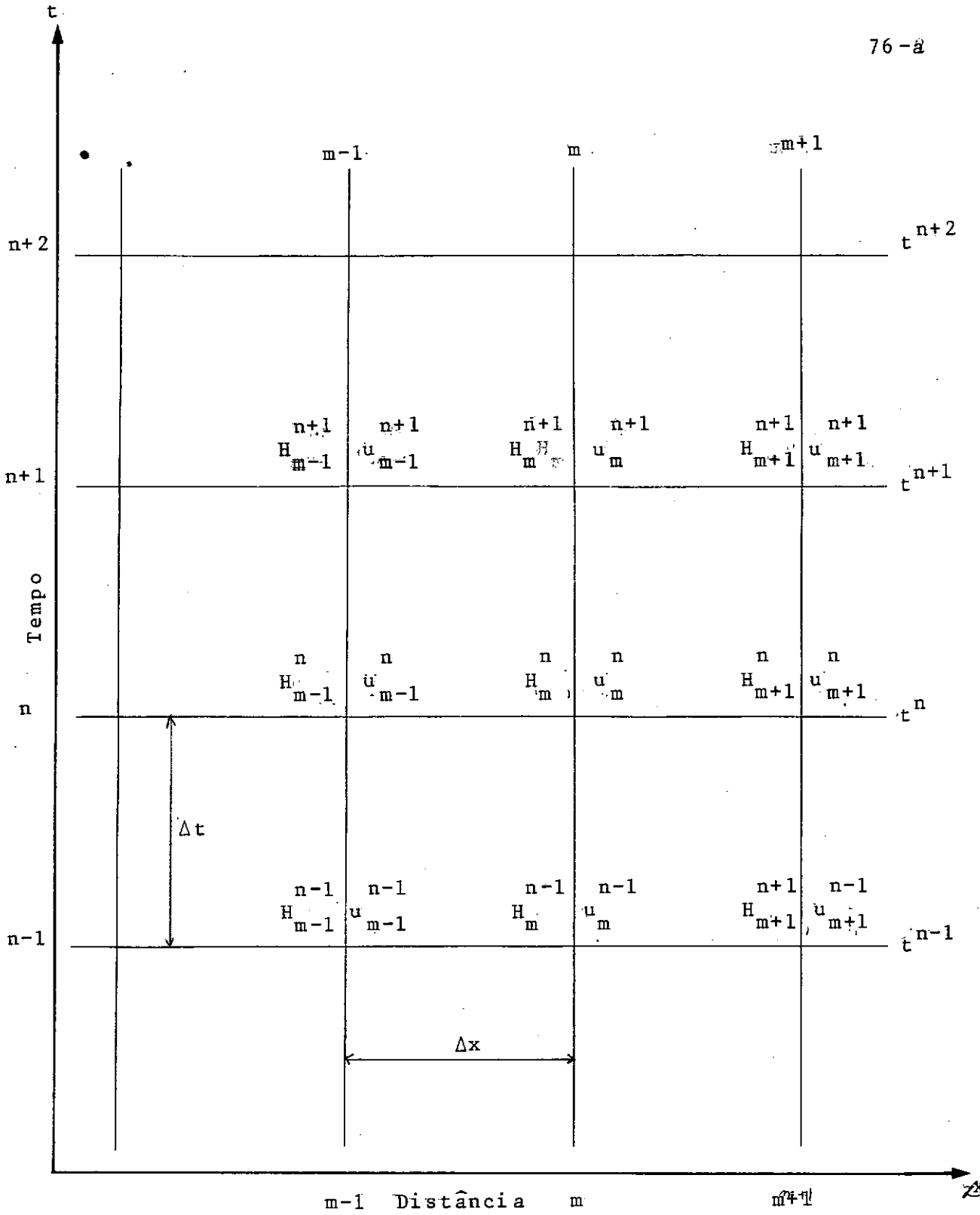
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_m^n - H_m^{n-1}}{\Delta t}$$

Levando êstes valores em (25) teremos para a altura d'agua:



Plano (x,t) para método explícito.

$$H_m^{\,n} = H_{m-1}^{n} + \frac{\Delta x}{g \cdot \Delta t} \cdot u_m^{n-1} + \frac{1}{g} \cdot u_m^{n-1} \cdot$$

$$\cdot\ u_{m-1}^{n} - \frac{\Delta x\ u_m^{\,n}}{g\ \Delta t} \cdot$$

$$1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}\, u_m^{n-1} + \frac{g \cdot \Delta t}{c^2}\ \frac{|u_m^{n-1}|}{H_m^{n-1}} \qquad (26)$$

Seja a equação (24)

$$u\ \frac{\partial A}{\partial x} + A\ \frac{\partial u}{\partial x} + b\ \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Substituindo as derivadas parciais pelas respectivas diferenças finitas teremos para a velocidade:

$$u_m^{\,n} = \frac{\Delta t\ A_m\ u_{m-1}^{n} - \Delta x b\ H_m^{\,n} + \Delta x b\ H_m^{n-1}}{\Delta t\ |2A_m - A_{m-1}|} \qquad (27)$$

Para explicitarmos o valor de H_m^n, substituindo (27) em (26).

Teremos:

$$H_m^{\,n} = \frac{H_{m-1}^{n} + \frac{\Delta x}{g\,\Delta t} \cdot u_m^{n-1} + \frac{1}{g} \cdot u_m^{n-1} \cdot u_{m-1}^{n} -}{M.N} -$$

$$- \frac{- \frac{\Delta x}{g\Delta t} \quad 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot u_m^{n-1} + \frac{g \cdot t}{c^2} \cdot \frac{u_m^{n-1}}{H_m^{n-1}}}{M.N} \cdot$$

$$\cdot \frac{\frac{\Delta t\, A_m\, u_{m-1}^{n} + \Delta x . b \,.\, H_m^{n-1}}{\Delta t\, (2\, A_m - A_{m-1})}}{M.N} \qquad (28)$$

Sendo

$$M = 1 - \frac{\Delta x}{g\Delta t}\left[1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot U_m^{u-1} + \frac{a \cdot \Delta t}{c^2} \cdot \frac{|u_m^{n-1}|}{H_m^{n-1}}\right] \qquad N = \frac{\Delta x \cdot b}{\Delta t\ (2A_m - A_{m-1})}$$

Entrando-se com as condições iniciais e de contorno na equação (28) obteremos o valor de H_m^n. De posse dêste valor poderemos calcular u_m^n através da expressão (27)

Para exemplo, calculos de maregramas são feitos para o canal do porto de laguna, a seguir:

1º - Os dados: (20-11-57)

a) Mapa topográfico da bacia do canal

b) Seções transversais do canal

c) Registro de maré na foz e ao longo do canal

d) Registros de velocidades nos pontos acima mencionados.

e) Coeficiente de rugosidade n da fórmula de Manning.

2º - As suposições

a) O coeficiente de Chezy é obtido através da fórmula de Manning:

$$C = \frac{1.49 \cdot R^{1/6}}{n}$$

Sendo n o coeficiente de Manning.

b) O leito do canal é constituido por grãos muito finos, e segundo tabela encontrada na referência (12) pg. 109;

$$n = 0.024$$

c) Como não são conhecidas as condições iniciais ao longo do canal, fêz-se a hipótese da linearidade para as mesmas, pois eram conhecidos registros de velocidades e marés na foz e na lagoa situada a montante do canal com nível constante.

3 - Estabilidade e convergência do método explicito

A condição de estabilidade para métodos explícitos em prática é usualmente assumida para rios como sendo; de acôrdo com Dronkers (4):

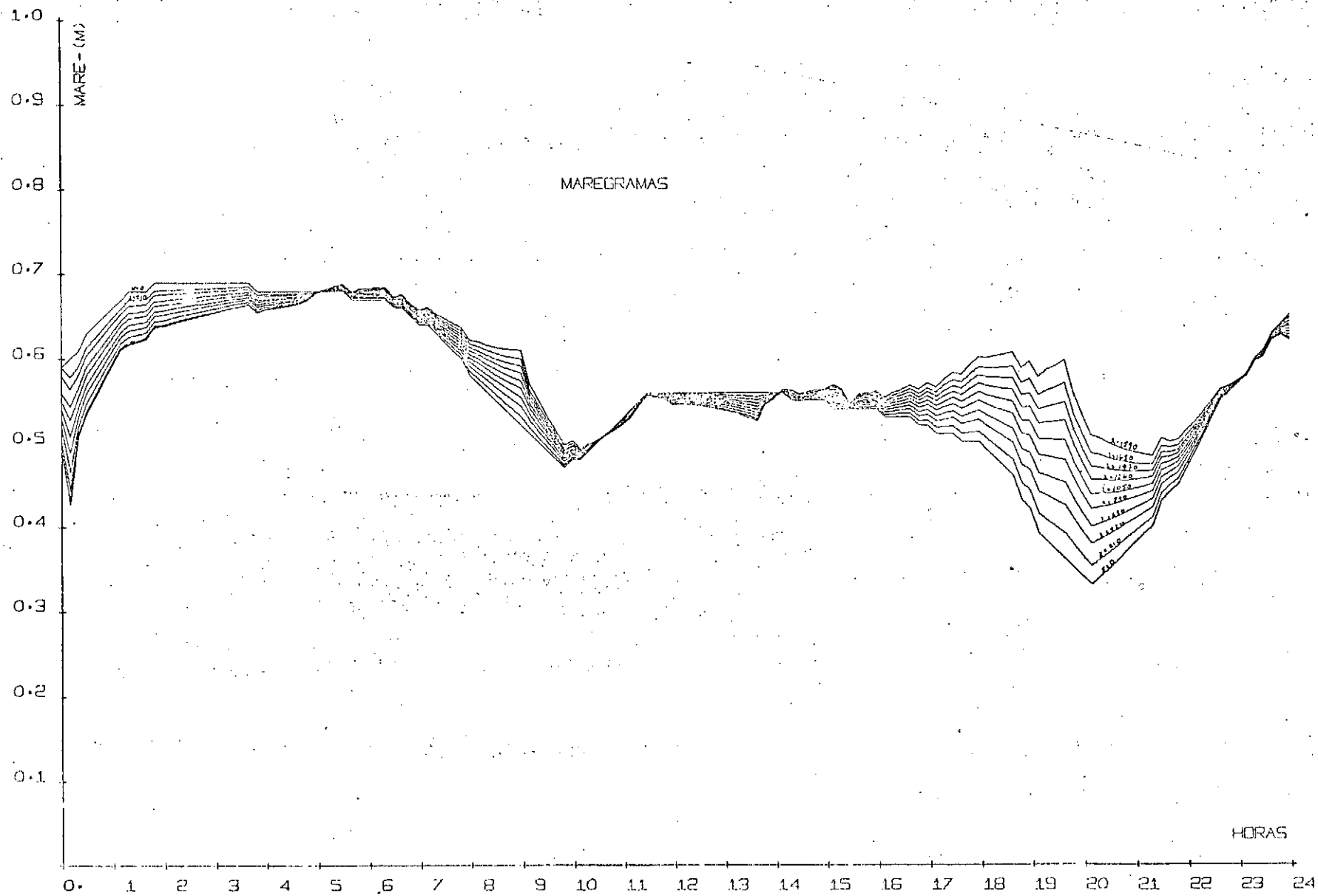
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} < (g\ a_m)^{1/2}$$

a_m - amplitude máxima da maré.

A taxa de convergência é geralmente achada experimentalmente por comparando-se soluções com decrescentes tamanhos de Δx e Δt.

4 - Os cálculos.

O canal foi esquematizado em 9 seções, cada com 210 m de comprimento. Para cada seção foram estudadas a maré e as velocidades no canal, e plotado o seu respectivo maregrama, de acôrdo com a figura a seguir:



PLANTA P/ CANAL DO PORTO DE LAGUNA

C A P Í T U L O IV

SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DAS ONDAS LONGAS ATRAVÉS MÉTODO IMPLÍCITO

Êste capítulo apresenta o estudo de um método implícito para a solução numérica das equações das ondas longas tratadas no capítulo anterior.

Os métodos explicitos apresentam em geral, pouca rapidez de convergência e o tempo de processamento nos procedimentos numéricos se apresentam superiores aos dos métodos implícitos. Portanto se faz necessário a apresentação do método implícito devido a Amein e Fang (1) e (2) pois apresenta rapidez de convergência e de processamento nos cálculos, superior a dos métodos explícitos.

TEORIA

As equações para fluxo não permanente em canais são: (Ref. (12))

$$\frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} + q = 0 \ldots \qquad (29)$$

(eq. conservação de massa)

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial Y}{\partial x} = g\, S_f - \frac{qv}{A} + gS_o \ldots \quad (3$$

(eq. do movimento)

sendo que:

V - velocidade média

A - área transversal do canal

x - distância na direção do fluxo

Y - tirante d'água

t - tempo

q - fluxo lateral por unidade de tempo e por unidade de comprimento do canal.

g - aceleração da gravidade

S_o - inclinação do leito

S_f - inclinação de atrito

Temos que também A = A(y), logo:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dA}{dy} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (31)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{dy} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \qquad (32)$$

$\frac{dA}{dy}$ é a largura do canal B(y) para a altura y.

Fazendo então $\frac{dA}{dy} = B$, Eq. (29) virá:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{A}{B} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{q}{B} = 0 \quad \ldots (33)$$

As equações a serem usadas aqui serão eq.(30) e eq.(33). Ou sejam:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{A}{B} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{q}{B} = 0 \ldots (33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g\, S_o - g\, S_f - \frac{qv}{A} \ldots$$

(30)

As condições iniciais, podem ser dadas como

os valores da velocidade e da altura para algum tempo inicial para seções no canal. No caso de se estudando marés, as condições de contôrno necessárias e suficientes podem ser maregramas para ambos fins do canal.

A solução do sistema anterior é procedida em duas etapas: na primeira etapa as equações diferenciais são substituidas por equações algébricas, e na segunda etapa a solução das equações algébricas é obtida.

A solução numérica das equações (33) e (30) é efetuada sôbre uma malha de pontos no plano - (x, t), como mostra a figura a seguir:

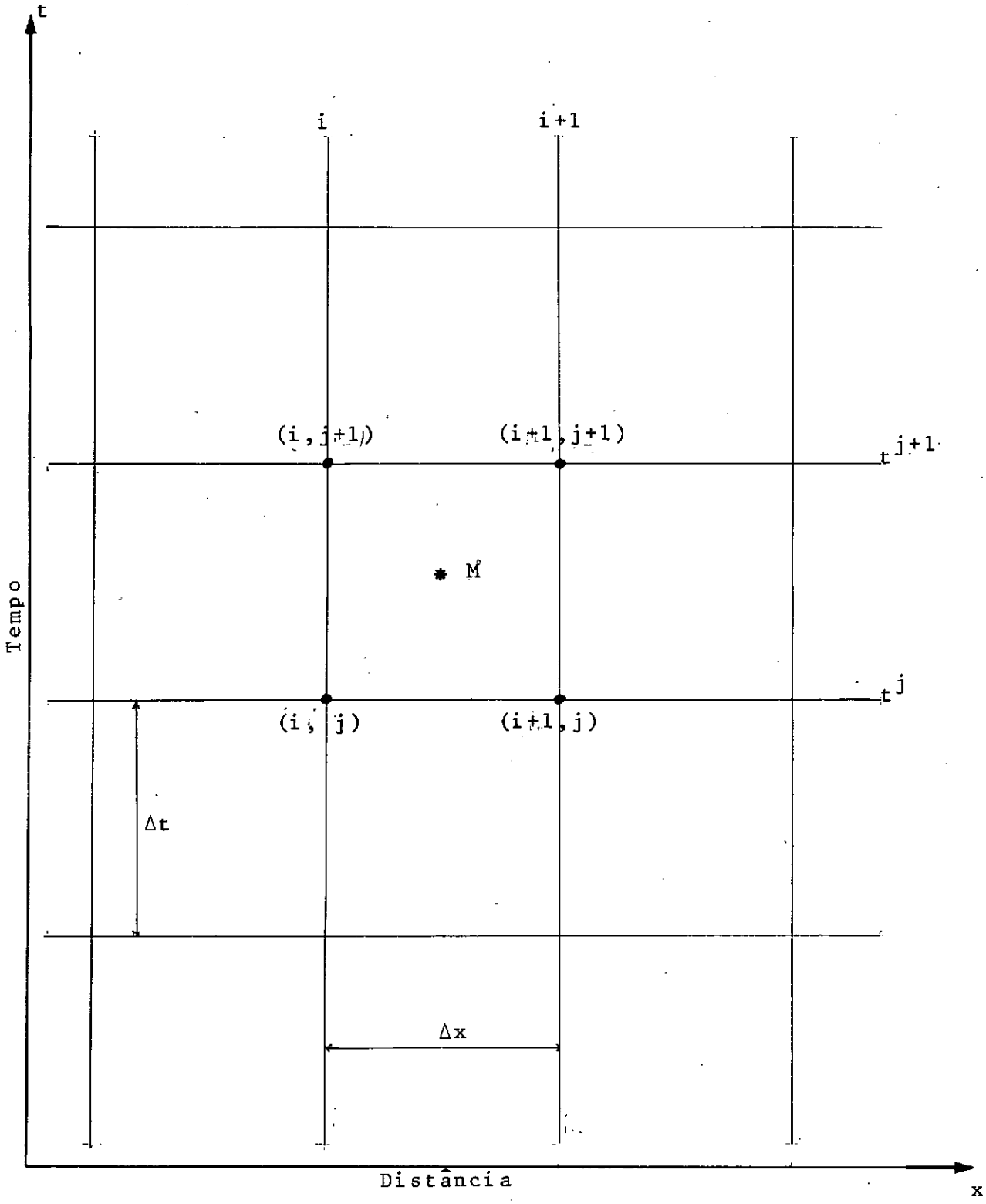


Fig. 6 - Plano (x,t) para método implícito

Vamos supor que tôdas variáveis sejam conhecidas para todos os pontos da malha na linha t^j, ou seja para o tempo t^j, e que se deseja os valores das variáveis na linha t^{j+1} ou seja no tempo t^{j+1}.

Tomando-se uma malha formada por quatro pontos identificados pelas interseções das linhas verticais X_i e X_{i+1} com as linhas horizontais t^j e t^{j+1}, as equações de fluxo não permanente são aplicadas em diferenças finitas para o ponto M (centro da malha dos quatro pontos).

Para o ponto M teremos:

$$\alpha\ (M) = \frac{1}{4}\left[(\alpha_i^j + \alpha_{i+1}^j + \alpha_i^{j+1} + \alpha_{i+1}^{j+1})\right] \quad (34)$$

$$\frac{\partial\alpha(M)}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x}\left[(\alpha_{i+1}^j + \alpha_{i+1}^{j+1}) - (\alpha_i^j + \alpha_i^{j+1})\right]$$

(35)

$$\frac{\partial\alpha(M)}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t}\left[(\alpha_i^{j+1} + \alpha_{i+1}^{j+1}) - (\alpha_i^j + \alpha_{i+1}^j)\right]$$

(36)

Sendo que $\underline{\alpha}$ pode representar V, Y, S_f, B,... tal quê V, Y, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, ... para o ponto $\underline{M}$ são representadas em têrmos dos valores das variáveis para os quatros pontos da malha.

Quando Y, V, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, ... nas equações(33) e (30) são substituidos por seus analogos das equações(34) (35) e (36) as seguintes equações diferenças são obtidas:

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(Y_{i+1}^{j+1} + Y_i^{j+1}\right) - \left(Y_{i+1}^{j} + Y_i^{j}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\Delta x} V_{i+(1/2)}^{j+1/2)} \left(Y_{i+1}^{j+1} + Y_{i+1}^{j}\right) - \left(Y_i^{j+1} + Y_i^{j}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\Delta x}\left(\frac{A}{B}\right)_{i+(1/2)}^{j+(1/2} \left(V_{i+1}^{j} + V_{i+1}^{j+1}\right) - \left(V_i^{j} + V_i^{j+1}\right) -$$

$$- \left(\frac{q}{B}\right)_{i+(1/2)}^{j+(1/2)} = 0 \;\ldots\ldots \qquad (37)$$

E

$$\frac{g}{2\Delta x}\left(Y_{i+1}^{j+1} + Y_{i+1}^{j}\right) - \left(Y_{i}^{j+1} + Y_{i}^{j}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\Delta t}\left(V_{i+1}^{j+1} + V_{i}^{j+1}\right) - \left(V_{i+1}^{j} + V_{i}^{j}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\Delta x} V_{i+(1/2)}^{j+(1/2)} \left(V_{i+1}^{j+1} + V_{i+1}^{j}\right) - \left(V_{i}^{j} + V_{i}^{j+1}\right) +$$

$$+ \frac{g}{4}\left(S_{fi}^{j} + S_{fi+1}^{j} + S_{fi}^{j+1} + S_{i+1}^{j+1}\right) -$$

$$- \left(\frac{g}{\Delta x}\right)\left(Z_{i}^{j} - Z_{i+1}^{j}\right) + q\left(\frac{V}{A}\right)_{i+(1/2)}^{j+(1/2)} = 0 \ldots$$

(38)

Nas quais:

$$V_{i+(1/2)}^{j+(1/2)} = \frac{1}{4}\left(V_{i}^{j} + V_{i+1}^{j} + V_{i}^{j+1} + V_{i+1}^{j+1}\right)$$

$$\left(\frac{V}{A}\right)_{1+(1/2)}^{j+(1/2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{V_i^j}{A_i^j} + \frac{V_{i+1}^j}{A_{i+1}^j} + \frac{V_i^{j+1}}{A_i^{j+1}} + \frac{V_{i+1}^{j+1}}{A_{i+1}^{j+1}}\right)$$

$$\left(\frac{q}{B}\right)_{i+(1/2)}^{j+(1/2)} = \frac{q}{4}\left(\frac{1}{B_i^j} + \frac{1}{B_{i+1}^j} + \frac{1}{B_i^{j+1}} + \frac{1}{B_{i+1}^{j+1}}\right)$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{i+(1/2)}^{j+(1/2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{A_i^j}{B_i^j} + \frac{A_{i+1}^j}{B_{i+1}^j} + \frac{A_i^{j+1}}{B_i^{j+1}} + \frac{A_{i+1}^{j+1}}{B_{i+1}^{j+1}}\right)$$

Da fórmula de Manning temos quê:

$$S_{fi}^j = \frac{(m_i^j)^2 \; V_i^j \; |V_i^j| \; (P_i^j)^{4/3}}{(A_i^j)^{4/3}} \; ; \quad P_i^j = \text{perímetro molhado.}$$

Nas equações (37) e (38) tôdas as variáveis c/ superescritos (j) são conhecidas e tôdas com superescrito (j+1) são desconhecidas. As equações contêm sòmente 4 incognitas, que são as alturas e velocidades para os pontos (i, j+1), (i+1, j+1). Contudo, duas incógnitas são comuns

para quaisquer duas malhas retangulares contiguas. Por si mesmas, elas não são suficientes para avaliar as incógnitas dos pontos (i, j+1),(i+1, j+1). Como existem N pontos sobre a linha (j+1), existem (N-1) malhas retangulares e (N-1) pontos interiores. A combinação de tôdas as malhas retangulares provêem 2(N-1) equações para a determinação de 2N incógnitas duas equações adicionais para determinar tôdas as incógnitas são supridas pelas condições de contôrno:

$$G_o\ (Y_1) = Y_1^{j+1} - f_1\ (t^{j+1}) = 0 \qquad (39)$$

$$F_N\ (Y_N,\ V_N) = Y_N^{j+1} - f_N\ (V_N^{j+1}) = 0 \qquad (40)$$

Consequentemente o sistema de equações (37), (38), (39) e (40) poderá ser resolvido. Nêste sistema de equações os valores das variáveis para o tempo t^j são conhecidos, e podem ser tratados como constantes.

As equações (37) e (38) podem ser reescritas como:

$$F_i\ (Y_i,\ V_i,\ Y_{i+1},\ V_{i+1}) = (Y_{i+1} + Y_i) +$$

$$+\ a + \frac{1}{4}\ \frac{\Delta t}{x}\ (Y_{i+1} - Y_i)\ (V_i + V_{i+1} + b) +$$

$$+\ c\ (V_i + V_{i+1}) + d + \frac{1}{4}\ \frac{\Delta t}{\Delta x}\ (\frac{A_i}{B_i}\ \ \frac{A_{i+1}}{B_{i+1}}).$$

$$(V_{i+1} - V_i + e) + \frac{1}{4}\ \frac{\Delta t}{\Delta x}\ (h\ V_{i+1} + mV_i + P) +$$

$$+\ \frac{\Delta t}{2}\ .\ q\ .\ (\frac{1}{B_i} + \frac{1}{B_{i+1}} + w) = 0 \qquad (41)$$

E

$$G_i\ (Y_i,\ V_i,\ Y_{i+1},\ V_{i+1}) = (Y_{i+1} - Y_i + a') +$$

$$+\ \frac{\Delta x}{g\Delta t}\ (V_i + V_{i+1} + b') +$$

$$+ \frac{1}{4g} (V_{i+1}^2 + c' V_{i+1} + d' V_i - V_i^2 + e') +$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta x (S_{f_i} + S_{f_{i+2}} + h') +$$

$$+ \frac{\Delta x}{2g} \cdot q \cdot \left(\frac{V_i}{A_i} + \frac{V_{i+1}}{A_{i+1}} + m'\right) = 0 \quad \ldots \quad (42)$$

Nas quais:

$$a = - (Y_{i+1}^j + Y_i^j)$$

$$b = V_i^j + V_{i+1}^j$$

$$c = \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} (Y_{i+1}^j + Y_i^j)$$

$$d = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} (Y_{i+1}^j - Y_i^j) (V_i^j + V_{i+1}^j)$$

$$e = V_{i+1}^j - V_i^j$$

$$h = \frac{A_i^j}{B_i^j} + \frac{A_{i+1}^j}{B_{i+1}^j}$$

$$m = - h$$

$$P' = h \cdot \ell$$

$$W = \frac{1}{B_i^j} + \frac{1}{B_{i+1}^j}$$

$$a' = Y_{i+1}^j - Y_i^j$$

$$b' = - (V_{i+1}^j + V_i^j$$

$$c' = 2 V_{i+1}^j$$

$$d' = - 2 V_i^j$$

$$\ell' = V_i^j \cdot V_{i+1}^j - (V_i^j)^2 + (V_{i+1}^j)^2 - V_{i+1}^j \cdot V_i^j$$

$$h' = S^{j}_{f_i} + S^{j}_{f_{i+1}}$$

$$m' = \frac{V^{j}_{i}}{A^{j}_{i}} + \frac{V^{j}_{i+1}}{A^{j}_{i+1}}$$

As equações (39), (40), (41) e (42) simulam as equações do fluxo não permanente juntamente com as condições de contôrno por meio de um sistema de equações diferenças finitas. As equações constituem um sistema de 2N . equações algébricas não lineares. Podemos agrupá-las na seguinte forma:

$$G_o\ (Y_1,\ V_1) = 0$$

$$F_1\ (Y_1,\ V_1,\ Y_2,\ V_2) = 0$$

$$G_1\ (Y_1,\ V_1,\ Y_2,\ V_2) = 0$$

.....

.....

$$F_i\ (Y_i,\ V_i,\ Y_{i+1},\ V_{i+1}) = 0$$

$$G_i\ (Y_i,\ V_i,\ Y_{i+1},\ V_{i+1}) = 0$$

.....

.....

$$F_{N-1}\ (Y_{N-1},\ V_{N-1},\ Y_N,\ V_N) = 0$$

$$G_{N-1}\ (Y_{N-1},\ V_{N-1},\ Y_N,\ V_N) = 0$$

$$F_N\ (Y_N,\ V_N) = 0 \qquad (43)$$

OBS.: $F_i \rightarrow$ Equação da continuidade

$G_i \rightarrow$ Equação do movimento

SOLUÇÃO DO SISTEMA (43)

O método de iteração de Newton é usado para a solução dêste sistema. O método consiste em se assumir valores para as incógnitas. Quando êstes valores são substituidos nas equações (43), o segundo membro das equações po-

derá não desaparecer mas adquirá valores conhecidos como residuos. Soluções são obtidas por ajustando os valores até cada residuo desaparecer ou ser reduzido à uma quantidade desejada.

Seja

K → ciclo de iteração.

Os valores das incógnitas ao fim do ciclo K serão denotados pelo superescrito K. Deseja-se aproximar os valores de 2N incógnitas através o (K+1) ciclo.

Os valores dos residuos para o K ciclo de iteração são:

$$G_o \quad (Y_1^k, V_i^k) = R_2^k, 0$$

$$F_1 \quad (Y_1^k, V_1^k, Y_2^k, V_2^k) = R_1^k, 1$$

$$G_1 \quad (Y_1^k, V_1^k, Y_2^k, V_2^k) = R_2^k, 1$$

.....

.....

$$F_1 \quad (Y_i^k, V_i^k, Y_{i+1}^k, V_{i+1}^k) = R_2^k, i$$

$$G_i \quad (Y_i, V_i, Y_{i+1}, V_{i+1}) = R_{2,\,i}^{k}$$

.....

.....

$$F_{N-1} \quad (Y_{N-1}^{k}, V_{N-1}^{k}, Y_N^{k}, V_N^{k}) = R_{1,\,N-1}^{k}$$

$$G_{N-1} \quad (Y_{N-1}^{k}, V_{N-1}^{k}, Y_N^{k}, V_N^{k}) = R_{2,\,N-1}^{k}$$

$$F_N \quad (Y_{n-1}^{k}, V_N^{k}) = R_{1,\,N}^{k} \qquad (44)$$

Os residuos e as derivadas parciais da equação (43) são relacionados, de acôrdo com o método de iteração de Newton por:

$$\frac{\partial G_o}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial G_o}{\partial v_1} dv_1 = R_{2,\,0}^{k}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F_1}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial F_1}{\partial v_2} dv_2 = R_{1,1}^{k}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial G_1}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial G_1}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial G_1}{\partial v_2} dv_2 = R^k_{2,1}$$

.....

.....

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial F_i}{\partial v_i} dv_i + \frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}} dy_{i+1} + \frac{\partial F_i}{\partial v_{i+1}} dv_{i+1} = R^k_{1,i}$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial G_i}{\partial v_i} dv_i + \frac{\partial G_i}{\partial y_{i+1}} dy_{i+1} + \frac{\partial G_i}{\partial v_{i+1}} dv_{i+1} = R^k_{2,1}$$

.....

.....

$$\frac{\partial G_{N-1}}{\partial y_{N-1}} dy_{N-1} + \frac{\partial G_{N-1}}{\partial v_{N-1}} dv_{N-1} + \frac{\partial G_{N-1}}{\partial v_N} dy_N + \frac{\partial G_{N-1}}{\partial v_{N-1}} dv_{N-1} = R^k_{2,N-1}$$

$$\frac{\partial F_N}{\partial y_N} dy_N + \frac{\partial F_N}{\partial v_N} dv_N = R^k_{1,N} \qquad (45)$$

Nas quais:

$$dY_1 = Y_1^{k+1} - Y_1^k$$

$$dV_1 = V_1^{k+1} - V_1^k$$

.....

.....

$$dY_i = Y_i^{k+1} - Y_i^k$$

$$dV_i = V_i^{k+1} - V_i^k$$

$$dY_N = Y_N^{k+1} - Y_N^k$$

$$dV_N = V_N^{k+1} - V_N^k \qquad (46)$$

Equação (45) é um sistema de 2N equações lineares em 2N incógnitas. A solução do sistema fornecerá os valores de Y_1^{k+1}, V_1^{k+1}, ..., Y_i^{k+1}, V_i^{k+1}, ..., Y_N^{k+1}, V_N^{k+1}, os quais são os valores das incógnitas para o ciclo de iteração (k+1). O procedimento poderá ser repetido tantas vezes até a desejada diferença entre os valores de qualquer incógnita em dois ciclos de iterações ser

menor do que um valor prèviamente estabelecido. Os valores das variáveis achadas no último ciclo de iteração serão tomados como os valores das variáveis para o tempo (j+1) e os cálculos prosseguirão para o tempo (j+2).

A convergência do procedimento depende da escolha inicial para valores das incógnitas. Se obterá rápida convergência adotando-se valores do tempo anterior.

Os coeficientes do sistema linear (45) são obtidos diferenciando-se as equações (41) e (42), ou sejam:

$$\frac{\partial F_i}{\partial Y_i} = 1 - \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}(V_i + V_{i+1} + b) +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}(V_{i+1} - V_{i+1} + e)\left(1 - \frac{A_i}{B_i^2}\cdot\frac{dB_i}{dY_i}\right) -$$

$$- \frac{q}{\partial 2}\cdot\frac{\Delta t}{B_i^2}\cdot\frac{dB_i}{dY_i} \qquad (47)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial Y_{i+1}} = 1 + \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_i + V_{i+1} + b) +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{i+1} - V_i + e) \quad 1 - \left(\frac{A_{i+1}}{B^2_{i+1}}\right) \left(\frac{dB_{i+1}}{dY_{i+1}}\right) -$$

$$- \frac{q}{2} \cdot \frac{\Delta t}{B^2_{i+1}} \cdot \frac{dB_{i+1}}{dY_{i+1}} \quad \ldots\ldots \qquad (48)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial V_i} = \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} (Y_{i+1} - Y_i + c) -$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{A_i}{B_i} + \frac{A_{i+1}}{B_{i+1}}\right) + \frac{m}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \ldots \qquad (49)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial V_{i+1}} = \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} (Y_{i+1} - Y_i + c) +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{A_i}{B_i} + \frac{A_{i+1}}{B_{i+1}}\right) + \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} h \ldots \quad (50)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial Y_i} = - 1 - \frac{2}{3} \Delta x \; S_{fi} \left(\frac{1}{P_i} \cdot \frac{dP_i}{dY_i} - \frac{B_i}{A_i}\right) -$$

$$- q \frac{\Delta x}{2g} V_i \frac{B_i}{A_i^2} \ldots\ldots \quad (51)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial Y_{i+1}} = 1 + \frac{2}{3} \Delta x \; S_{f_{i+1}} \left(\frac{1}{P_{i+1}} \cdot \frac{dP_{i+1}}{dY_{i+1}} - \frac{B_{i+1}}{A_{i+1}}\right) -$$

$$- q \frac{\Delta x}{2g} V_{i+1} \frac{B_{i+1}}{(A_{i+1})^2} \ldots\ldots \quad (52)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial V_i} = \frac{1}{g} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{4g} (d' - 2V_i) +$$

$$+ \quad \Delta x \; \frac{S_{fi}}{V_i} \cdot \frac{x}{2g} \cdot \frac{q}{A_i} \; V_i \; \ldots\ldots \qquad (53)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial V_{i+1}} = \frac{1}{g} \; \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{4g} \; (c' + 2V_{i+1}) \; +$$

$$+ \quad \Delta x \; \frac{S_{f_{i+1}}}{V_{i+1}} + \frac{\Delta x}{2g} \cdot \frac{q}{A_{i+1}} \; V_{i+1} \; \ldots. \qquad (54)$$

APLICAÇÃO

A aplicação do método implícito para a solução numérica das equações do fluxo permanente é ilustrada por um exemplo. O problema a ser considerado nêste exemplo é o movimento de maré no canal do pôrto de Laguna do qual temos dados como: maregramas, mapas topográficos, e outras medições e informações necessárias.

De acôrdo com os dados temos maregramas para a estação x = 0 e x = 1890 m. O que nós desejamos é obter pelo método anteriormente mencionado o maregrama e as velo

cidades para x = 1890 m.

- Os dados

a) área seção média - AR = 960,00 m^2

b) coeficiente de Manning - n = 0.024

c) velocidade média no canal - V_m = 0.74 m/seg.

d) perimetro molhado médio - P_m = 300.00 m

e) condições iniciais:

Y(2,1) = 5.76 m

V(1,1) = 1.20 m/seg.

V(2,1) = 0.42 m/seg.

f) condição de contôrno

Y(1,x) = t ; x = 1,25

g) largura média do canal - BR = 180,00

Em virtude dos maregramas nos fornecerem tirantes d'água horários o Δt virá:

Δt = 1 hora = 3600 seg., e tendo em vista o estudo para a estação x = 1890 m logo virá:

x = 1890 m.

As equações (43) para êste caso serão:

$G_o\ (Y_1) = 0$ - condição de contôrno

$F_1(Y_1, V_1, Y_2, V_2) = 0$ - eq. continuidade

$G_1(Y\ , V\ , Y\ , V\ ) = 0$ - eq. movimento

Ou ainda em diferenças finitas:

$$G_o(Y_1) = R_1$$

$$(Y_2 + Y_1) + a + \frac{1}{4}\ \frac{\Delta t}{\Delta x}\ (Y_2 - Y_1)\ (V_1 + V_2 + b) +$$

$$+ c\ (V_1 + V_2) + d + \frac{1}{4}\ \frac{\Delta t}{\Delta x}\ \left(\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}\right)(V_2 - V_1 + \ell) +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}\ (h\ V_2 + m\ V_1 + p) = R_2$$

$$(Y_2 - Y_1 + a') + \frac{\Delta x}{g\Delta t}(V_1 + V_2\, b') +$$

$$+ \frac{1}{4g}(V_2^2 + c'V_2 + d'V_1 - V_1^2 + \ell') +$$

$$+ \frac{1}{2}\Delta x\,(S_{f_i} + S_{f_2} + h') = R_3$$

Os residuos, R_1, R_2, R_3, e as derivadas parciais são relacionados, de acôrdo com o método de iteração de Newton pelas equações (45), ou sejam:

$$\frac{\partial G_o}{\partial V_i}\, dV_1 = R_1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial V_1}\, dV_1 + \frac{\partial F_1}{\partial Y_2}\, dY_2 + \frac{\partial F_1}{\partial V_2}\, dV_2 = R_2$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial V_1}\, dV_1 + \frac{\partial G_1}{\partial Y_2}\, dY_2 + \frac{\partial G_1}{\partial V_2}\, dV_2 = R_3$$

Nas quais:

$$dV_1 = V_1^{k+1} - V_1^{k}$$

$$dY_2 = Y_2^{k+1} - Y_2^{k}$$

$$dV_2 = V_2^{k+1} - V_2^{k}$$

E as incógnitas serão:

V (I, J + 1)

V (I + 1, J + 1)

Y (I + 1, J + 1)

Os cálculos:

Para cada tempo, a convergência do esquema de iteração dependerá da escolha dos valores iniciais para as incógnitas V(I, J + 1), V(I + 1, J + 1), Y(I + 1, J + 1). Os valores das variáveis do tempo anterior podem ser adotados como valores iniciais. Procedendo-se desta maneira a convergência deverá ser obtida no máximo no 2 ciclo k de iteração. Então partindo-se dos valores das condições iniciais foram achadas no 1º ciclo de iteração os seguintes residuos:

	Y(2, 1)	= 5.76
Condições iniciais	V(1, 1)	= 1.20
	V(2, 1)	= 0.42

Residuos	R_2	= 15.382
	R_3	= 0.354

Observando-se os valores de R_2 e R_3 vemos que há convergência quanto à equação do movimento (R_3), e quanto à equação da continudade (R_2) podemos dizer que há certa convergência, mas não com um grau de precisão elevado.

A solução numérica das equações do fluxo não permanente pelo método implicito foi programada de acôrdo com programa no Anexo III. A subroutina SIMQ foi usada para a solução do sistema de equações lineares (45) pelo método de eliminação de GAUSS. Em todo o procedimento numérico a solução do sistema linear era normal, de acôrdo com a própria subroutina.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

1 - AMEIN, FANG, "Implicit Flood Routing in natural Channels", Journal of the Hydraulic Division, asce, Vol. 96, NO HY12, Prol. paper 7716, december,1970, pp. Z481-2500.

2 - AMEIN, M., "An Implicit Method for numerical flood Routing," Water resources research, 4(4), 1968,pp. 719-726.

3 - DEFANT, A. Physical Oceanography, vols. 1 e 2 Pergamon Press, Oxford, 1961.

4 - DRONKERS J. J. Tidal computations - North-Holland Publishing company - Amsterdam, 1964.

5 - DRONKERS, J. J., "Tidal computations for rivers, coastal areas, and seas", Journal of the Hydraulics division, asce, vol. 95, NO AY1, Proc. Paper 6323, Jan., 1967.

6 - FORSYTHE & WASOW - Finite-Difference methods for partial differential equations John Wiley & sons , inc. New York, 1960.

7 - IPPEN - Estuary and Coastune Hydrodynamics, McGraw-Hill Book company, Inc. - New York, 1966.

8 - LARRAS J. - Embouchures, Estuaires, lagunes et deltas Eyrolles, 1964.

9 - LARRAS J. - Cours D'hydraulique maritime et de travaux maritimes Dunop, Paris, 1961.

10 - LIGGET, J. J., and Woolhiser, D. A., "Difference solution of the Shallow-water equation", Journal of the engineering mechanics division, ASCE, No. EMZ, Proc. Paper 5189, April, 1967.

11 - RICH GEORGE R. Hidraulic Transients Dover publications, Inc., New York, 1963. 335 p.

12 - VEN TE CHOW - Open-Channel Hydraulics Mc Graw-Hill Book company, Inc - New York, 1966 - 109 p.

13 - THOMPSON MILNE - Theoretical Hidrodynamics - Mac Millun - 1968 - 5a. ed. - Inglaterra - 385 p.

C O N C L U S Õ E S

O estudo procedido nos capítulos II, III, IV, permitiu o emprêgo comparativo de três métodos para solução do problema de propagação de uma onda de maré no caso de um canal, tendo a montante um reservatório com nível constante. Os cálculos foram efetuados para o sistema mar-canal-lagôa, existente no Porto de Laguna em Santa Catarina. O maregrama existente na lagoa permitiu verificar que o nível até, pràticamente, não varia com o tempo.

No capítulo II, as equações de Airy são integradas para condições de contôrno, compatíveis com o sistema referido. Neste caso, utilizamos na solução, desenvolvimentos matemáticos idênticos aos utilizados por Rich para o caso de um canal com terminal estrangulado. Êste exemplo encontra-se, aliás, ilustrado no mesmo capítulo. Os resultados obtidos não se revelaram suficientemente satisfatórios, quando comparados com as observações,para valôres máximos de amplitude e velocidade. Isto evidencia que a aproximação do maregrama por uma senóide, não conduz a um valor preciso da amplitude máxima calculada.

No capítulo III, utilizamos um método de diferenças finitas explícito. Os cálculos foram efetuados num computador

IBM-1130 e apresentaram , além de uma exelente convergência, para valôres Δx = 210m e Δt = 10min., resultados satisfatórios para as alturas e velocidade máximas quando comparados com os observados.

No capítulo IV, tentamos aplicar às equações de ondas longas, o método implícito desenvolvido por Fang e Amein. Enquanto foi constatado uma rápida convergência na equação de movimento, o mesmo não se deu com a equação da continuidade. A observação da tendência no processamento numérico da solução,pérmitiu verificar que , para obtenção de convergência na equação de continuidade, deveríamos tomar para Δt valôres menores que o adotado. Todavia, para $t < 10$min. a precisão no apropriamento das alturas a partir dos maregramas que definem as condições de contôrno é incompatível com a precisão desejada para o método. Podemos concluir que, para maregramas usuais, êste fato, se não invalida, pelo menos limita a utilização do método implícito ao problema estudado.

A comparação dos três (3) métodos se encontra no - QUADRO I. Evidentemente não existe resultados para o terceiro método tendo em vista a não convergência da equação de continuidade, como nós mencionamos no parágrafo anterior.

QUADRO I

COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DAS TRÊS TEORIAS, APLICADAS AO FENÔMENO DA PROPAGAÇÃO DE ONDA DE MARÉ EM CANAL COMUNICANDO-SE COM RESERVATÓRIO.

FLUXO D'ÁGUA NO CANAL

			Valores calculados (máximos)		Valores medidos (máximos)	
Teoria	Δx (m)	Δt (min)	Altura (m)	Velocidade (m/seg)	Altura (m)	Velocidade (m/seg)
1- Onda de Translação	-	-	5.18	0.60	5.80	1.00
2- Ondas Longas (método explicito)	210	10	5.68	0.99	5.80	1.00
3- Ondas Longas (método implicito)	-	-	-	-	5.80	1.00

SIMBOLOS CAPÍTULO II

c - velocidade de propagação da onda

h, h_o, h_1 - altura da onda referida ao nível médio do mar

V - velocidade da água, para qualquer ponto x e tempo t.

E_p - energia potencial da onda

E_c - energia cinética da onda

m - massa d'água

ℓ, ℓ_1, b - largura do canal

ρ - massa especifica d'água

D - altura reduzida

g - aceleração da gravidade

E, E_2, E_1 - energia total da onda

A, A_1, A_2, A_3, A_4 - níveis alcançados pelo mar

η - superelevação da superficie livre d'água

ξ - deslocamento devido a onda

f - coeficiente de atrito

X - perimetro molhado da seção transversal média do canal

A - área da seção transversal média do canal

W - pêso especifico d'água

f_o - coeficiente tal quê a força de atrito por metro quadrado de superficie do canal é igual $A\ f_o\ .\ V$

x - eixo longitudinal do canal

L - comprimento do canal

T - período da maré (44715 seg)

η_o - amplitude inicial da maré

p - parâmetro associado com a definição da transformada de Laplace

t - tempo

$\overline{\xi}$ - transformada de Laplace de ξ

$\overline{\eta}$ - transformada de Laplace de η

C_1, C_2 - constantes

$\theta, \lambda, \beta, \phi_1(p), \phi_2(p)$ - funções

$\supset$ - inversa da transformada de Laplace

$H(x)$ - função unitária de Heaviside

I_1 - função de Bessel modificada de primeira espécie

I_o - função de Bessel de 1a. espécie

$A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, \Phi_1, P_1, A_2, B_2, C_2, E_2, F_2, G_2, H_2, \Phi_2, P_2,$

COEFS, COEFC - Funções

$\overline{V}$ - transformada de Laplace de V

$A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3$, COEVS, COEVC - Funções

SÍMBOLOS CAPÍTULO III

h - distância da preamar ao nível médio

h^* - distância da preamar ao plano de referência

a - distância da preamar ao leito do canal

a_o - distância do nível médio ao leito do canal

h_o - distância do nível médio ao plano de referência

Z_o - distância do leito do canal ao plano de referência

Z - direção perpendicular ao plano de referência

I - declividade do canal

u,v- componentes do vetor velocidade V

Ω - parâmetro de coriolis

c - coeficiente de Chezy

h_m^n - altura d'água para a seção m no tempo n

u_m^n - velocidade d'água para a seção m no tempo n.

Δx - intervalo de comprimento

Δt - intervalo de tempo

H - nível da preamar em relação ao plano de referência

A_m - área da seção transversal m do canal

R - raio hidraulico

n - coeficiente de manning

a_m - amplitude máxima da maré

SÍMBOLOS CAPÍTULO IV

V - velocidade média no canal

A - área da seção transversal do canal

x - distância na direção do fluxo

Y - tirante d'água

q - fluxo d'água lateral por unidade de tempo e por unidade de comprimento do canal

S_o - inclinação do leito do canal

S_f - inclinação da superfície d'água do canal

B - variação da seção transversal do canal na direção Y

t - tempo

α - uma função que pode representar: S_o, S_f, V, Y, ...

i,j,k - indices usados como subescritos e super escritos

V_i^j - velocidade d'água no canal na seção i para o tempo j

Y_i^j - tirante d'água no canal na seção i para o tempo j

Δx - intervalo de comprimento

Δt - intervalo de tempo

P - perimetro molhado

F,G- funções

a, b, c, d, e, h, m, p', W, a', b', c', d', e', h', m' - constantes

M - ponto sôbre o plano x, t

N - número de seções ao longo do canal

R - êrro residual

A N E X O I

PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES (12) e (18) (soluções das equaçõe de Airy).

PROCEDIMENTOS PARA PROGRAMAÇÃO

"IMPUT"

1) PARAMETROS GEOMÉTRICOS DO CANAL

L - comprimento do canal

HR - altura reduzida

X - seção em estudo

Fo - coeficiente de atrito

PM - perimetro molhado

AR - área da seção transversal do canal

2) CONDIÇÃO INICIAL

NETAO - amplitude inicial da onda obtida no maregrama observado: para a seção x = 0 (foz do canal).

"OUT PUT"

1) SOMAS(J), SOMAC(J) - coeficientes respectivamente para o seno e o cosseno da equação (12) (amplitudes)

2) SOMVS(M), SOMVC(M) - coeficientes respectivamente para o seno e o cosseno da equação (18) (velocidades)

```
PAGE   1    A 63

// JOB T  00FF 10FF                                    A 63                119

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        00FF        00FF        0000
  0001        10FF        10FF        0001
                          2013        0002

V2 M05   ACTUAL 32K  CONFIG 32K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(2501 READER,1403 PRINTER)
*ONE WORD INTEGERS
      REAL NETAO
      DIMENSION COEFS(10),COEFC(10),SOMAS(10),SOMAC(10),COEVS(4 ),COEVC(
     14 ),SOMVS(4 ),SOMVC(4 )
C-----DADOS
      L=2600
      HR=5.34
      NETAO=0.20
      X=1890.
      FO=0.0378
      PM=300.
      AR=960.
      W=1000.
      F=(9.81*FO*PM/(W*AR))
      WRITE(5,15)
   15 FORMAT(////,5X,'CALCULO P/ AMPLITUDES',////)
      WRITE(5,4)
    4 FORMAT(5X,'COEFICIENTE DO SENO',5X,'COEFICIENTE DO COSSENO')
      DO 2 N1=1,10
      N=N1-1
      TEMP1=(2*N*L+X)/(SQRT(9.81*HR))
      A1=NETAO*EXP(-(F/2)*TEMP1)*COS(TEMP1*0.000141)
      B1=NETAO*EXP(-(F/2)*TEMP1)*SIN(TEMP1*0.000141)
      C1=NETAO*(F/4)*TEMP1*EXP((-F/2)*TEMP1)
      D1=((F**2)/4)+(0.000141**2)
      E1=(F/2)*COS(TEMP1*0.000141)
      F1=0.000141*SIN(0.000141*TEMP1)
      G1=(F/2*SIN(0.000141*TEMP1))
      H1=0.000141*COS(0.000141*TEMP1)
      O1=(C1*COS(TEMP1*0.000141)-0.000141*(C1*(G1+H1)/D1))
      P1=(C1*SIN(0.000141*TEMP1)-0.000141*(C1*(E1-F1)/D1))
      TEMP2=(2*N*L+2*L-X)/(SQRT(9.81*HR))
      A2=NETAO*EXP((-F/2)*TEMP2)*COS(0.000141*TEMP2)
      B2=NETAO*EXP((-F/2)*TEMP2)*SIN(0.000141*TEMP2)
      C2=NETAO*(F/4)*TEMP2*EXP((-F/2)*TEMP2)
      E2=(F/2)*COS(0.000141*TEMP2)
      F2=0.000141*SIN(0.000141*TEMP2)
      G2=(F/2)*SIN(0.000141*TEMP2)
      H2=0.000141*COS(0.000141*TEMP2)
```

```
      O2=(C2*COS(0.000141*TEMP2)-0.000141*(C2*(G2+H2)/D1))
      P2=(C2*SIN(0.000141*TEMP2)-0.000141*(C2*(E2-F2)/D1))
      COEFS(N+1)=A1+O1-A2-O2
      COEFC(N+1)=-B1-P1+B2+P2
      WRITE(5,3)COEFS(N+1),COEFC(N+1)
    3 FORMAT(/,12X,F8.3,24X,F8.3)
    2 CONTINUE
      WRITE(5,8)
    8 FORMAT(///,5X,'SOMA DOS COEFICIENTES DO SENO',5X,'SOMA DOS COEFICI
     1ENTES DO COSSENO',///)
      TEMP4=0.
      TEMP5=0.
      DO 6 J=1,10
      SOMAS(J)=COEFS(J)+TEMP4
      TEMP4=SOMAS(J)
      SOMAC(J)=COEFC(J)+TEMP5
      TEMP5=SOMAC(J)
      WRITE(5,7)SOMAS(J),SOMAC(J)
    7 FORMAT(//,12X,F8.3,24X,F8.3)
    6 CONTINUE
C-----CALCULO PARA AS VELOCIDADES
      WRITE(5,16)
   16 FORMAT(////,5X,'CALCULO P/ VELOCIDADES',////)
      WRITE(5,14)
   14 FORMAT(5X,'COEFICIENTE DO SENO',5X,'COEFICIENTE DO COSSENO',////)
      DO 9 N3=1,4
      N2=N3-1
      A3=(NETAO*0.000141*SQRT(9.81/HR)*EXP(-F/2*((2*N2*L+X)/(SQRT(9.81/H
     1R)))))/(F**2/4+0.000141**2)
      B3=(NETAO*0.000141*SQRT(9.81/HR)*EXP(-F/2*((2*N2*L+2*L-X)/(SQRT(9.
     181/HR))))))/((F**2)/4+0.000141**2)
      C3=COS(0.000141*(2*N2*L+X)/SQRT(9.81/HR))
      D3=SIN(0.000141*(2*N2*L+X)/SQRT(9.81/HR))
      E3=COS(0.000141*(2*N2*L+2*L-X)/SQRT(9.81/HR))
      F3=SIN(0.000141*(2*N2*L+2*L-X)/SQRT(9.81/HR))
      COEVS(N2+1)=A3*((F/2)*D3+0.000141*C3)+B3*((F/2)*F3+0.000141*E3)
      COEVC(N2+1)=A3*((F/2)*C3-0.000141*D3)+B3*((F/2)*E3-0.000141*F3)
      WRITE(5,10)COEVS(N2+1),COEVC(N2+1)
   10 FORMAT(//,12X,F8.3,24X,F8.3)
    9 CONTINUE
      WRITE(5,13)
   13 FORMAT(//,5X,'SOMA DOS COEFICIENTES DO SENO',5X,'SOMA DOS COEFICIE
     1NTES DO COSSENO',//)
      TEMP6=0.
      TEMP7=0.
      DO 11 M=1,4
      SOMVS(M)=COEVS(M)+TEMP6
      TEMP6=SOMVS(M)
      SOMVC(M)=COEVC(M)+TEMP7
      TEMP7=SOMVC(M)
      WRITE(5,12)SOMVS(M),SOMVC(M)
```

```
PAGE   3    A 63

  12  FORMAT(//,12X,F8.3,24X,F8.3,//)
  11  CONTINUE
      CALL EXIT
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON       0  VARIABLES     220  PROGRAM    1482

 END OF COMPILATION

// XEQ
```

A N E X O II

PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DAS ONDAS LONGAS, ATRAVÉS MÉTODO EXPLICITO

PROCEDIMENTOS PARA PROGRAMAÇÃO

"IMPUT"

1) PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DO CANAL

COEFM - coeficiente de Manning

P (M) - perimetro molhado da seção transversal M do canal

SEC(M)- área seção transversal M do canal

B (M) - largura da seção transversal M do canal

2) DIMENSÕES DA MALHA DO PLANO (x, t)

DELX - intervalo de comprimento Δx

DELT - intervalo de tempo Δt

3) CONDIÇÕES DE CONTÔRNO

U(1, N) - velocidade d'água no canal para a seção 1 no tempo N.

N = 1, ... NI, sendo NI o nº de intervalos obtido de acôrdo com os registros de velocidades observados adotados para a seção 1, defasados de DELT.

H(1, N) - altura d'água no canal para a seção 1 no tempo N.

N = 1, ... NI, sendo NI o nº de intervalos

obtido de acôrdo com os registros de maré observados adotados para a seção 1, defasados de DELT.

4) CONDIÇÕES INICIAIS

U (M, 1) - velocidade d'água no canal para a seção M no tempo inicial 1.

M = 1, ... M1, sendo M1 nº de seções em estudo no canal. Êstes valôres de U(M,1) deverão ser obtidos de registros observados para as respectivas seções M, distanciadas de DELX.

H(M, 1) - altura d'água no canal para a seção M no tempo inicial 1.

M = 1, ... M1, sendo M1 nº de seções em estudo no canal. Êstes valores de H (M, 1) deverão ser obtidos nos maregramas observados para as respectivas seções M, distanciadas de DELX.

"OUT PUT"

1 - H(M, N) - altura d'água no canal para a seção M no tempo N. Obtem-se valores da altura ao longo do tempo para a seção M (maregramas)

2) U (M, N) - velocidade d'água no canal para a seção M no tempo N. Obtem-se valores para a velocidade ao longo do tempo para a seção M.

```
PAGE   1    A 63

// JOB T  00FF 10FF                                    A 63                  119

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        00FF        00FF        0000
  0001        10FF        10FF        0001
                          20FF        0002

V2 M05   ACTUAL 32K  CONFIG 32K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(2501READER,1403PRINTER,PLOTTER)
*ONE WORD INTEGERS
      DIMENSION SEC(10),B(10),U(10,145),H(10,145),TEMP(145),P(10),C(10),
     1H1(10,145),J1(10),JO(10)
C-----PARAMETROS DE ENTRADA
      CALL START
      COEFM=0.024
      DELX=210.
      DELT=600.
      NI=145
      READ(8,5)(P(M),M=1,10)
  5   FORMAT(10F8.0)
      READ(8,10)(SEC(M),M=1,10)
  10  FORMAT(10F8.0)
      READ(8,15)(B(M),M=1,10)
  15  FORMAT(10F8.0)
      DO 4 L=1,10
      C(L)=1.00/(COEFM)*(SEC(L)/P(L))**(1./6.)
      WRITE(5,6)C(L)
  6   FORMAT(F8.3)
  4   CONTINUE
C-----CONDICOES DE CONTORNO
      READ(8,20)(U(1,N),N=1,NI)
      READ(8,20)(H(1,N),N=1,NI)
  20  FORMAT(10F8.2)
      DO 30 K=1,NI
      TEMP(K)=K
  30  CONTINUE
      READ(8,35)(H(M,1),M=1,10)
  35  FORMAT(10F8.4)
      READ(8,40)(U(M,1),M=1,10)
  40  FORMAT(10F8.2)
      CALL SCALF(0.3/2.54,30./2.54,1.,0.)
      CALL FGRID(0,1.,0.,6.,24)
      CALL FGRID(1,1.,0.,0.1,10)
      CALL FPLOT(-2,TEMP(1),(H(1,1)-5.))
      DO 45 L=2,NI
      CALL FPLOT(0,TEMP(L),(H(1,L)-5.))
  45  CONTINUE
      DO 50 M=2,10
```

```
      DO 55 N=2,NI
      A=H(M-1,N)+DELX*U(M,N-1)/(9.8*DELT)+U(M,N-1)*U(M-1,N)/9.8
      D=DELX/(9.8*DELT)*(1+DELT/DELX*U(M,N-1)+9.8*DELT*ABS(U(M,N-1))/(C(
     1M)**2*H(M,N-1)))
      E=(DELT*SEC(M)*U(M-1,N)+DELX*B(M)*H(M,N-1))/(DELT*(2*SEC(M)-SEC(M-
     11)))
      F=DELX*B(M)/(DELT*(2*SEC(M)-SEC(M-1)))
      H(M,N)=(A-D*E)/(1-D*F)
      U(M,N)=(DELX*B(M)*H(M,N-1)-DELX*B(M)*H(M,N)+SEC(M)*DELT*U(M-1,N))/
     1(DELT*(2*SEC(M)-SEC(M-1)))
   55 CONTINUE
      DO 66 M1=1,10
      DO 66 N1=1,NI
   66 H1(M1,N1)=H(M1,N1)-5.
      CALL FPLOT(3,TEMP(1),H1(M,1))
      DO 60 J=2,NI
      CALL FPLOT(2,TEMP(J),H1(M,J))
   60 CONTINUE
   50 CONTINUE
      WRITE(5,47)
   47 FORMAT('1',54X,'MAREGRAMAS',///)
      WRITE(5,48)
      DO 64 K=1,10
   64 JO(K)=K
      WRITE(5,49)(JO(K),K=1,10)
      WRITE(5,48)
      DO 70 I=1,NI
      WRITE(5,46) I,(H(M,I),M=1,10)
   70 WRITE(5,48)
   46 FORMAT(10X,'*',2X,I3,2X,'*',10(1X,F6.2,1X,'*'))
   48 FORMAT(10X,99('*'))
   49 FORMAT(10X,'*',6X,'*',10(3X,I2,3X,'*'))
      WRITE(5,41)
   41 FORMAT('1',54X,'VELOCIDADES',///)
      WRITE(5,48)
      DO 65 K=1,10
   65 J1(K)=K
      WRITE(5,49)(J1(K),K=1,10)
      WRITE(5,48)
      DO 80 I=1,NI
      WRITE(5,46)I,(U(M,I),M=1,10)
   80 WRITE(5,48)
      CALL FPLOT(3,TEMP(1),0.)
      ORIGE=0.
      CALL FCHAR(TEMP(1),-0.03,0.15,0.15,0.)
      WRITE(7,84) ORIGE
   84 FORMAT(F2.0)
      N=7
      DO 85 J=1,24
      CALL FCHAR(TEMP(N),-0.03,0.15,0.15,0.)
```

```
      WRITE(7,90)J
   90 FORMAT(I2)
      N=N+6
   85 CONTINUE
      YP=0.1011
      DO 95 M=1,10
      CALL FCHAR(-6.,YP,0.15,0.15,0.)
      WRITE(7,100) YP
  100 FORMAT(F4.1)
   95 YP=YP+0.1
      CALL FCHAR(TEMP(138),0.03,0.15,0.15,0.)
      WRITE(7,105)
  105 FORMAT('HORAS')
      CALL FCHAR(TEMP(4),0.9,0.15,0.15,1.57)
      WRITE(7,110)
  110 FORMAT('MARE-(M)')
      CALL FCHAR(TEMP(60),0.8,0.15,0.15,0.)
      WRITE(7,115)
  115 FORMAT('MAREGRAMAS')
      CALL FCHAR(TEMP(60),-0.1,0.15,0.15,0.)
      WRITE(7,120)
  120 FORMAT('PESQUISA P/ CANAL DO PORTO DE LAGUNA')
      CALL TIME(TEMPO)
      TEMPO=TEMPO/1000 .
      WRITE(5,15555)TEMPO
15555 FORMAT(/////,' TEMPO DE EXECUCAO =',F6.2,' SEGUNDOS')
      CALL EXIT
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON      0  VARIABLES   9136  PROGRAM   1406

 END OF COMPILATION

// XEQ
```

A N E X O III

PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DAS ONDAS LONGAS, ATRAVÉS MÉTODO IMPLICITO

PROCEDIMENTOS PARA PROGRAMAÇÃO

"IMPUT"

1 - PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DO CANAL

AR - área da seção transversal do canal

BR - largura do canal

PE - perimetro molhado

CM - coeficiente de Manning

VM - velocidade média

2 - DIMENSÕES DA MALHA NO PLANO (x, t)

DELX - intervalo de comprimento

DELT - intervalo de tempo

3 - CONDIÇÕES DE CONTÔRNO

Y(1, L) - altura d'água no canal para a seção 1 no tempo L.

L = 1, ... L1, sendo L1 o período de tempo adotado. Êstes valores de Y(1, L).... Y(1,L1) são obtidos do maregrama observado para a seção 1, defasados de DELT

4 - CONDIÇÕES INICIAIS

Y (2, 1) - altura d'água no canal na seção 2 no tempo 1.

V (1, 1) - velocidade d'água no canal na seção 1 no tempo 1.

V (2, 1) - velocidade d'água no canal na seção 2 no tempo 1.

Os valores anteriores são obtidos de registro observado para a altura e velocidade nas respectivas seções.

"OUT PUT"

1 - V (I, J + 1) - velocidade no canal na seção I no tempo J + 1.

2 - Y (I + 1, J + 1) - velocidade no canal na seção I + 1 no tempo J + 1.

3 - V (I + 1, J + 1) - velocidade no canal na seção I + 1 no tempo J + 1.

Os valores acima serão obtidos quando durante o processamento os valores de R_1 e R_2 (residuos) tenderem para zero ou para um determinado valor previamente desejado.

```
PAGE   1    A 63

// JOB T  00FF 10FF                                    A 63                    119

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        00FF        00FF        0000
  0001        10FF        10FF        0001
                          2013        0002

V2 M05   ACTUAL 32K  CONFIG 32K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(2501READER,1403PRINTER)
*ONE WORD INTEGERS
      REAL M
      DIMENSION Y(2,25),V(2,25),T(3,3),W(3)
C-----CONDICOES DO CONTORNO
      READ(8,1)(Y(1,L),L=1,25)
   1  FORMAT(10F8.2)
C-----CONDICOES INICIAIS
      Y(2,1)=3.76
      V(1,1)=1.20
      V(2,1)=0.42
C-----CALCULOS
      I=1
      J=1
      GO=Y(1,2)
      Y(2,2)=Y(2,1)
      V(2,2)=V(2,1)
      V(1,2)=V(1,1)
      DO 3 K=1,100
C-----PARAMETROS GEOMETRICOS DO CANAL
      AR=960.
      BR=180.
      PE=300.
      CM=0.024
      VM=0.74
      SF=(CM**2*0.74**2*300**(4./3.))/(960**(4./3.))
      DELX=1890.
      DELT=3600.
      A=-(Y(I+1,J)+Y(I,J))
      B=V(I,J)+V(I+1,J)
      C=0.25*DELT/DELX*(Y(I+1,J)-Y(I,J))
      D=0.25*DELT/DELX*(Y(I+1,J)-Y(I,J))*(V(I,J)+V(I+1,J))
      E=V(I+1,J)-V(I,J)
      H=2*AR/BR
      M=-H
      P=H*E
      A1=Y(I+1,J)-Y(I,J)
      B1=-V(I+1,J)-V(I,J)
      C1=2*V(I+1,J)
      D1=-2*V(I,J)
```

```
      E1=V(I,J)*V(I+1,J)-V(I,J)**2+V(I+1,J)**2-V(I+1,J)*V(I,J)
      H1=2*SF
      R1=Y(I+1,J+1)+Y(I,J+1)+A+0.25*DELT/DELX*(Y(I+1,J+1)-Y(I,J+1))*(V(I
     1,J+1)+V(I+1,J+1)+B)+C*(V(I,J+1)+V(I+1,J+1))+D+0.25*DELT/DELX*2*AR/
     2BR*(V(I+1,J+1)-V(I,J+1)+E)+0.25*DELT/DELX*(H*V(I+1,J+1)+M*V(I,J+1)
     3+P)
      R2=Y(I+1,J+1)-Y(I,J+1)+A1+DELX/(9.81*DELT)*(V(I,J+1)+V(I+1,J+1)+B1
     1)+0.25/9.81*(V(I+1,J+1)**2+C1*V(I+1,J+1)+D1*V(I,J+1)-V(I,J+1)**2+E
     21)+0.5*DELX*(2*SF+H1)
      WRITE(5,9) R1,R2
    9 FORMAT(5X,F8.3,5X,F8.3)
      IF(ABS(R1)-0.4)8,8,11
    8 IF(ABS(R2)-0.4)10,10,11
   10 WRITE(5,12) Y(I+1,J+1),V(I+1,J+1),V(I,J+1)
   12 FORMAT(5X,F5.3,5X,F5.3,5X,F5.3)
      I=1
      J=J+1
      IF(J-25) 13,13,14
   13 GO=Y(1,J+1)
      Y(I+1,J+1)=Y(I+1,J)
      V(I+1,J+1)=V(I+1,J)
      V(I,J+1)=V(I,J)
      GO TO 3
C-----PARAMETROS DA SIMQ
   11 T(1,1)=DELX/(9.81*DELT)+0.25/9.81*(C1+2*V(I+1,J+1))+DELX*SF/V(I+1,
     1J+1)
      T(1,2)=0.
      T(1,3)=0.
      T(2,1)=0.25*DELT/DELX*(Y(I+1,J+1)-Y(I,J+1)+C)-0.25*DELT/DELX*(2*AR
     1/BR)+M/4*DELT/DELX
      T(2,2)=1.+0.25*DELT/DELX*(V(I,J+1)+V(I+1,J+1)+B)+0.25*DELT/DELX*(V
     1(I+1,J+1)-V(I,J+1)+E)
      T(2,3)=0.25*DELT/DELX*(Y(I+1,J+1)-Y(I,J+1)+C)+0.25*DELT/DELX*(2*AR
     1/BR)+0.25*DELT/DELX*H
      T(3,1)=DELX/(9.81*DELT)+0.25/9.81*(D1-2*V(I,J+1))
      T(3,2)=1.+0.666*DELX*SF*(-BR/AR)
      T(3,3)=DELX/(9.81*DELT)+0.25/9.81*(C1+2*V(I+1,J+1))+DELX*SF/V(I+1,
     1J+1)
      W(1)=GO
      W(2)=R1
      W(3)=R2
      CALL SIMQ(T,W,3,KS)
      WRITE(5,15) KS
   15 FORMAT(5X,I1)
      TEMP1=V(I,J+1)+W(1)
      TEMP2=Y(I+1,J+1)+W(2)
      TEMP3=V(I+1,J+1)+W(3)
      V(I,J+1)=TEMP1
      Y(I+1,J+1)=TEMP2
      V(I+1,J+1)=TEMP3
    3 CONTINUE
```

```
PAGE   3    A 63

  14  CALL EXIT
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON       0  VARIABLES     316  PROGRAM   1218

 END OF COMPILATION

// XEQ
```