

27/8/69

1

VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE VIGA COMPRIMIDA

APOIADA SÔBRE SISTEMA MASSA-MOLA

HELIO DIAS DA CUNHA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Fernando Lami  
Presidente  
Paulo de Carvalho Ferreira  
Sydney Lamek

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

- 1969 -

AGRADECIMENTOS

Ao professor Paulo Alcântara Gomes pela valiosa e dedicada orientação. À Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Banco Nacional do Desenvolvimento Econômico (BNDE), à Universidade Federal de Goiás, à Secretaria de Educação e Cultura do Estado de Goiás, pela oportunidade de realizar este trabalho. A todos os Professores do Programa de Engenharia Civil da Coordenação dos Programas Pós-Graduados de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro (COPPE - UFRJ).

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS .....	ii
ÍNDICE .....	iii.
RESUMO .....	v
SUMMARY .....	vi

## Capítulos:

I - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO MOVIMENTO DE UMA VIGA .....	1
1.1 - Expressão da energia de deformação .....	1
1.2 - Equação de Euler .....	5
1.3 - Equação diferencial de vibrações transversais de uma viga .....	9
1.4 - Condições de contorno .....	10
II - VIBRAÇÕES LIVRES DE VIGAS.....	12
2.1 - Vigas sem solicitação axial .....	12
2.2 - Vigas com carga de compressão .....	15
2.3 - Ortogonalidade das funções características.	21
III- VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE VIGA APOIADA SÔBRE SISTEMA MASSA-MOLA .....	25
3.1 - Viga sem carga axial .....	25
3.2 - Viga comprimida com sistema massa-mola	31
3.3 - Viga comprimida apoiada em dois sistemas massa-mola .....	35

3.4 - Aplicações e outras condições de contorno	35
IV - RESULTADOS .....	42
SÍMBOLOGIA .....	46
REFERÊNCIAS .....	48
PROGRAMA .....	49
TABELAS .....	50
GRÁFICOS .....	61

## R E S U M O

O principal problema abordado neste trabalho é a determinação das frequências naturais de vibrações transversais de viga com carga axial, que tem uma massa concentrada e mola, localizadas num ponto qualquer ao longo do comprimento da viga. O caso de uma viga com duas massas e molas é também analisado.

Soluções exatas para uma viga com massa concentrada por métodos clássicos foram encontradas por Karman<sup>5</sup> para viga simplesmente apoiada com massa concentrada no ponto médio e por Prescott<sup>6</sup> para viga em balanço com massa concentrada na extremidade livre. A extensão das soluções para o efeito de uma mola pode ser feita por processos clássicos somente para os casos especiais mencionados.

Soluções aproximadas para a menor frequência natural de um sistema viga-massa-mola podem ser obtidos pelo método da energia de Rayleigh-Ritz<sup>4,8</sup> mas nem sempre é possível determinar o grau de aproximação.

O método utilizado faz uso de uma expansão em termos do conjunto de funções ortogonais associadas com os modos normais de vibração de uma viga. Tal método foi usado para o caso particular de viga em balanço sem carga de compressão com sistema massa-mola por Young<sup>1</sup>.

## S U M M A R Y

The principal problem undertaken is this work is the determination of the natural frequencies of lateral vibrations of a beam with axial load, which carries a concentrated mass and spring located at any point along the length of the beam. The case of a beam with two concentrated masses and springs is also analysed.

Exact solutions for a beam with concentrated mass by classical methods was found by Karman<sup>5</sup> for a simply supported beam with concentrated mass at its mid-point and by Prescott<sup>6</sup> for a cantilever beam with concentrated mass at its free end. The extension of the solutions to include the effect of a spring can be made by classical methods only for the special cases mentioned.

Approximate solutions for the lowest natural frequency of a beam, mass, and spring system may be obtained by the Rayleigh-Ritz<sup>4,8</sup> energy methods but it is not always possible to determine the degree of approximation.

The method adopted makes use of a series expansion in terms of the set of orthogonal functions associated with the normal modes of vibration of a beam. Such a method was used for the particular case of an axially unloaded cantilever beam with mass and spring by Young.<sup>2</sup>

## CAPÍTULO - I

### DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO MOVIMENTO DE UMA VIGA

#### 1.1- Expressão da energia de deformação.

Consideremos uma viga de comprimento  $L$ , de material isótropo, elástico e homogêneo. A viga tem seção constante e é solicitada por força axial  $q$  e um carregamento transversal  $p(x,t)$ , conforme figura 1.1

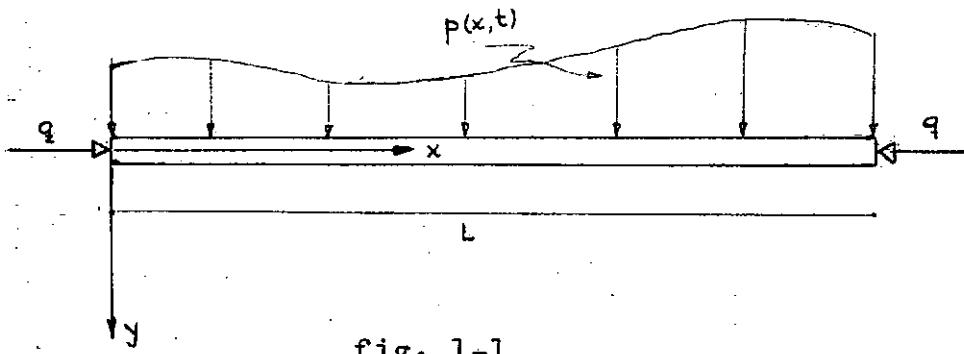


fig. 1-1

No que segue são consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras:

1.1.1 - Uma seção qualquer da viga permanece plana após a deformação;

1.1.2 - As deformações sofridas pela viga são pe

quenas;

1.1.3 - As dimensões transversais da viga são pe quenas comparadas com a dimensão longitudinal e a energia de deformação devida ao esforço cortante pode ser desprezada bem como os efeitos da inércia rotatória.

Na expressão da energia potencial de deformação te remos então três parcelas, correspondentes ao momento fletor, à carga axial e ao carregamento transversal.

Para obtermos a contribuição da flexão na energia de deformação lembramos que o trabalho específico de deformação (trabalho por unidade de volume) é

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon \quad (1-1a)$$

Tomando agora duas seções próximas, após a flexão (fig.1-2) onde:

$ds=ab$  = comprimento do eixo neutrino entre as seções consideradas;

$y$  = distância de uma fibra genérica ao eixo neutro;

$\epsilon$  = deflexão lateral;

$ds=b_1 b'$  = alongamento de uma fibra genérica

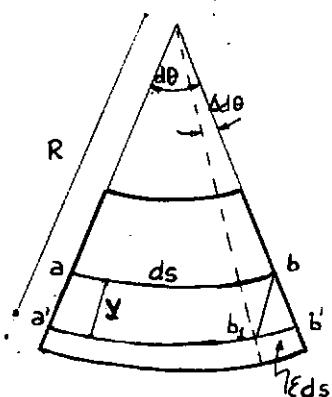


fig. 1-2

- $\Delta\theta$  = ângulo que compreende as seções consideradas;
- $\Delta d\theta$  = ângulo que compreende o alongamento  $\delta ds$ ;
- R = raio de curvatura da fibra genérica;
- $\epsilon$  = alongamento específico da fibra genérica;
- $\sigma$  = tensão;
- E = módulo de elasticidade

podemos colocar pela figura

$$\epsilon = \frac{b_1 b'}{ab} = \frac{y}{R} \quad (1-1b)$$

Como  $ds = -Rd\theta$  e levando em conta que as deformações são pequenas, o que permite escrever  $\theta \approx \tan\theta \approx dy/dx$  e  $ds \approx dx$ , fica então  $1/R = -\partial^2 y / \partial x^2$ .

Dai o alongamento específico pode ser expresso por

$$\epsilon = -y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1-1c)$$

Pela lei da Hooke,

$$\sigma = E\epsilon \quad (1-1d)$$

Levando as expressões de  $\sigma, \epsilon$  na equação (1-1a) obtemos

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} E Y^2 \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]^2 \quad (1-1e)$$

Então a contribuição da flexão ao trabalho de de formaçāo pode ser obtida de

$$U_f = \iiint_V \frac{1}{2} E Y^2 (y_{xx})^2 dV \quad (1-1f)$$

onde a integral se estende em todo o volume V da viga, representando  $y_{xx}$  a segunda derivada da deflexão y em relação a x. A integral acima pode ser colocada na forma

$$U_f = \iint_S y^2 ds \cdot \int_0^L \frac{1}{2} E (y_{xx})^2 dx \quad (1-1g)$$

A integral

$$\iint_S y^2 ds = J \quad (1-1h)$$

é o momento de inércia da seção S em relação ao eixo z, normal ao plano xy, fig. 1-1. Podemos exprimir finalmente o trabalho de deformação devido à flexão pela expressão

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^L E J (y_{xx})^2 dx \quad (1-1)$$

A energia potencial de deformação decorrente da força axial é

$$U_q = - q \cdot \Delta L = - q (L - L_1) \quad (1-2a)$$

onde  $L_1$  é o comprimento da viga deformada.

Lembrando que

$$\frac{dx}{ds} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2$$

e

$$L_1 = \int_0^L \frac{dx}{ds} ds$$

$$U_q = -q L + q \int_0^L \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right] ds \quad (1-2b)$$

ou ainda

$$U_q = -\frac{1}{2} \int_0^L q \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 ds \quad (1-2c)$$

e finalmente, como  $ds \approx dx$

$$U_q = -\frac{1}{2} \int_0^L q (y_x)^2 dx \quad (1-2)$$

A carga distribuída corresponde a energia potencial  
armazenada.

$$U_p = - \int_0^L p y dx \quad (1-3)$$

A expressão final da energia potencial para o tipo de carregamento mencionado é, pois

$$U = \int_0^L \left[ -\frac{1}{2} EJ (y_{xx})^2 - \frac{1}{2} q (y_x)^2 - py \right] dx \quad (1-4)$$

### 1.2 - Equação de Euler.

Dada a integral definida

$$U = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y_x, y_{xx}, \dots y_x^{(n)}) dx \quad (1-5)$$

onde  $G$  é uma função dada de  $n + 2$  variáveis, e  $y(x)$  satisfaaz certas condições de continuidade e a certas condições de contorno forçadas, procuramos determinar a função  $y(x)$  que torna a integral (1-5) um mínimo.

Segundo Bolza<sup>12</sup> a função  $G$  deve ser contínua com suas derivadas parciais até a ordem  $n+1$  para todos os valores de  $y, y_x, y_{xx}, \dots y_x^{(n)}$  e para todos os valores de  $x$  no intervalo  $x_0 \leq x \leq x_1$ . As funções admissíveis  $y(x)$  devem constituir uma classe de funções  $V$ , unívocas e contínuas - com suas derivadas até a ordem  $n$  no intervalo  $x_0 \leq x \leq x_1$ . Uma função da classe  $V$  deve satisfazer nos extremos  $(x_0, x_1)$  a várias relações do tipo  $a_0 + a_1 y + a_2 y_x + a_3 y_{xx} + \dots + a_n y_x^{(n-1)} = 0 \quad (1-5a)$

conforme Langhaar<sup>2</sup>, que são condições forçadas de contorno.

Consideremos uma variação admissível  $\rho\eta(x)$  onde  $\rho$  é uma constante arbitrária e  $\eta(x)$  uma função arbitrária de  $x$ , o que implica que  $y + \rho\eta$  seja da classe  $V$  desde que  $y(x)$  o seja. A variação da integral (1-5) tomando derivadas de  $y$  até a segunda ordem é

$$\Delta U = \int_{x_0}^{x_1} [G(x, y + \rho\eta, y_x + \rho\eta_x, y_{xx} + \rho\eta_{xx}) - G(x, y, y_x, y_{xx})] dx \quad (1-6)$$

Desenvolvendo em série de Taylor obtemos

$$\Delta U = \int_{x_0}^{x_1} \rho (\eta \frac{\partial G}{\partial y} + n_x \frac{\partial G}{\partial y_x} + n_{xx} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}}) dx + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^{x_1} \rho^2 (\eta \frac{\partial G}{\partial y} + n_x \frac{\partial G}{\partial y_x} + n_{xx} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}})^2 dx + \dots = \delta U + \frac{1}{2} \delta^2 U + \dots \quad (1-7)$$

A primeira integral é chamada a primeira variação de  $U$ , designada por  $\delta U$ ; a segunda integral é a segunda variação de  $U$ . A condição para que a integral (1-5) tenha um mínimo (Langhaar<sup>2</sup>) é que  $\delta U$  se anule para todas as variações admissíveis  $n(x)$ .

Integrando por partes, lembrando que

$$\int n_x \frac{\partial G}{\partial y_x} dx = n_x \frac{\partial G}{\partial y_x} - \int n_x \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y_x} dx \quad (1-8a)$$

$$\int n_{xx} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} dx = n_{xx} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} - \int n_x \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} dx \quad (1-8b)$$

$$\int n_x \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} dx = n_x \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} - \int n_x \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} dx \quad (1-8c)$$

a primeira variação se torna

$$\delta U = \rho \left[ \eta \left( \frac{\partial G}{\partial y_x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} \right) \Big|_{x_0}^{x_1} + n_x \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} \Big|_{x_0}^{x_1} + \right. \\ \left. + \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y_x} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} \right) \eta \, dx \right] \quad (1-8)$$

Uma condição necessária para a nulidade de  $\delta U$  para todas as variações admissíveis de  $\eta(x)$  é que os termos fora da integral em (1-8) se anulem, isto é

$$\eta \left( \frac{\partial G}{\partial y_x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} \right) \Big|_{x_0}^{x_1} + n_x \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} \Big|_{x_0}^{x_1} = 0 \quad (1-9)$$

A condição acima decorre do fato de  $\eta$  poder ser escolhido de maneira a anular a integral em (1-8) independendo dos valores de  $\eta$  e  $n_x$  nos pontos extremos  $(x_0, x_1)$ . A equação (1-9) deve ser satisfeita por todos os valores das constantes  $\eta(x_0), \eta(x_1), n_x(x_0), n_x(x_1)$  que satisfazem as condições forçadas de contorno. Da condição de mínimo relativo da integral  $\delta U$  e tendo em vista a equação (1-9), concluímos que

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y_x} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} \right) \eta \, dx = 0 \quad (1-10)$$

equação que deve ser satisfeita para toda as variações admisíveis  $\eta$  da classe V. Podemos inferir daí que o integrando é nulo e como  $\eta$  pode ter um valor diferente de zero no intervalo  $x_0 \leq x \leq x_1$ , vem

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y_x} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} = 0 \quad (1-11)$$

que é a equação de Euler do cálculo variacional.

As equações (1-9) e (1-11) representam condições necessárias e suficientes para que seja um extremo o valor da integral  $U$  definida acima.

A função  $y(x)$  pode ter descontinuidades isoladas em sua primeira e segunda derivada, segundo Langhaar<sup>2</sup>, como mostrou Weierstrass e fornece um valor extremo de  $U$  desde que satisfaça à equação (1-11) em qualquer intervalo entre as sucessivas descontinuidades.

### 1.3 - Equação diferencial de vibrações transversais de uma viga.

A integral (1-4) representa a energia potencial de deformação de uma viga de inércia constante  $J$ , com quaisquer condições de extremidades, carregada conforme foi definido na seção 1.1.

A condição de estabilidade da viga é que seja mínima sua energia potencial de deformação, logo o integrando de (1-4) deve satisfazer a equação de Euler.

A função  $G$  da integral (1-5) tem a forma

$$G = \frac{1}{2} \left[ EJ (y_{xx})^2 - q (y_x)^2 \right] - p y \quad (1-12)$$

Então obtemos

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial G}{\partial y} = - p \\ \frac{\partial G}{\partial y_x} = - q y_x \\ \frac{\partial G}{\partial y_{xx}} = EJ y_{xx} \end{array} \right\} \quad (1-13)$$

A substituição na equação (1-11) fornece

$$-p - \frac{d}{dx} (-q y_x) + \frac{d^2}{dx^2} (EJ \cdot y_{xx}) = 0 \quad (1-14)$$

Como queremos estudar o movimento transversal dos pontos da viga, a força distribuída é a soma do carregamento aplicado  $p(x,t)$  com a força de inércia, dada pelo produto da massa por unidade de comprimento pela aceleração, e de sentido contrário ao da aceleração, isto é  $- \frac{m}{L} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , sendo  $m$  a massa total da viga.

Ficamos então com

$$-p(x,t) + \frac{m}{L} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

ou ainda

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{m}{L} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (1-15)$$

#### 1.4 - Condições de contorno

Ao resolver a equação (1-15) devem ser consideradas

das as várias condições de extremidades a que pode estar sujeita a viga. As condições de contorno serão utilizadas na determinação das constantes de integração.

Essas condições são:

a) viga simplesmente apoiada

$$\left. \begin{array}{l} y(0,t) = y(L,t) = 0 \\ y_{xx}(0,t) = y_{xx}(L,t) = 0 \end{array} \right\} \quad (1-15a)$$

b) viga em balanço

$$\left. \begin{array}{l} y(0,t) = y_x(0,t) = 0 \\ y_{xx}(L,t) = y_{xxx}(L,t) = 0 \end{array} \right\} \quad (1-15b)$$

c) viga engastada em  $x = 0$  e apoiada em  $x = L$

$$\left. \begin{array}{l} y(0,t) = y_x(0,t) = 0 \\ y(L,t) = y_{xx}(L,t) = 0 \end{array} \right\} \quad (1-15c)$$

d) viga engastada nas extremidades

$$\left. \begin{array}{l} y(0,t) = y(L,t) = 0 \\ y_x(0,t) = y_x(L,t) = 0 \end{array} \right\} \quad (1-15d)$$

## CAPÍTULO - II

### VIBRAÇÕES LIVRES DE VIGAS

#### 2.1 - Vigas sem solicitação axial.

Se a viga não está sujeita a carregamento transversal e a carga de compressão sua equação diferencial é a (1-15) onde fazemos  $q=0$  e  $p(x,t) = 0$ , ficando

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m}{L} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2-1)$$

Esta equação admite uma solução do tipo  $y = u(x) \cdot \sin \omega t$  onde  $u(x)$  é função somente de  $x$ . A substituição nos leva a

$$EJ \frac{d^4 u}{dx^4} - \frac{m}{L} \omega^2 u = 0 \quad (2-2)$$

Colocando

$$\alpha = m \omega^2 / EJL \quad (2-3)$$

a equação se torna

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - \alpha^4 u = 0 \quad (2-4)$$

A solução geral da (2-4) é da forma

$$u = C_1 (\operatorname{senh} \alpha x + \operatorname{sen} \alpha x) + C_2 (\cosh \alpha x + \cos \alpha x) + C_3 (\operatorname{senh} \alpha x - \operatorname{sen} \alpha x) + C_4 (\cosh \alpha x - \cos \alpha x) \quad (2-5)$$

As constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  são determinadas pelas condições de contorno da viga. No caso de viga simplesmente apoiada estas condições são:

$$\left. \begin{array}{l} u(0) = u(L) = 0 \\ \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=0} = \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=L} = 0 \end{array} \right\} \quad (2-6)$$

Levadas à equação (2-5) encontramos

$$C_2 = C_4 = 0 \quad (2-7)$$

$$\begin{aligned} C_1 (\operatorname{senh} \alpha L + \operatorname{sen} \alpha L) + C_3 (\operatorname{senh} \alpha L - \operatorname{sen} \alpha L) &= 0 \\ C_1 (\operatorname{senh} \alpha L - \operatorname{sen} \alpha L) + C_3 (\operatorname{senh} \alpha L + \operatorname{sen} \alpha L) &= 0 \end{aligned} \quad (2-8)$$

onde tiramos a relação

$$\frac{C_1}{C_3} = - \frac{\operatorname{senh} \alpha L - \operatorname{sen} \alpha L}{\operatorname{senh} \alpha L + \operatorname{sen} \alpha L} \quad (2-9)$$

A compatibilidade do sistema (2-8) exige que seja nulo o determinante dos coeficientes de  $C_1$  e  $C_3$ , ou seja

$$\begin{bmatrix} \operatorname{senh} \alpha L + \operatorname{sen} \alpha L & \operatorname{senh} \alpha L - \operatorname{sen} \alpha L \\ \operatorname{senh} \alpha L - \operatorname{sen} \alpha L & \operatorname{senh} \alpha L + \operatorname{sen} \alpha L \end{bmatrix} = 0$$

que nos leva à equação de frequência

$$\operatorname{sen} \alpha L = 0 \quad (2-10)$$

As soluções de (2-10) fornecem as frequências naturais de vibração da viga. A equação (2-10) tem um número infinito de soluções dadas por

$$\alpha_n L = n\pi \quad (2-11)$$

e como

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{m} \frac{EJL}{L^2}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\alpha_n^4 \cdot EJL}{m}} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJL}{m}}, \quad n=1, 2, \dots \quad (2-12)$$

Aos valores característicos  $\alpha_n$  dados por (2-11) correspondem funções características definidas pelas equações (2-5), (2-7), (2-9). Lembrando que  $\operatorname{sen} \alpha L = 0$  a (2-9) fornece  $C_1 = -C_3$  e daí

$$u = 2 C_1 \operatorname{sen} \alpha x \quad (2-13)$$

Tomando  $2 C_1 = \sqrt{2}$  a função característica fica

$$g_n(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha_n x \quad (0 \leq x \leq L), \quad (n=0, 1, 2, \dots \infty) \quad (2-14)$$

A cada valor de  $n$  corresponde um modo de vibração da viga dado por (2-14) e uma frequência de vibração obtida em (2-12). Os quatro primeiros modos de vibração estão representados na fig. 2-1.

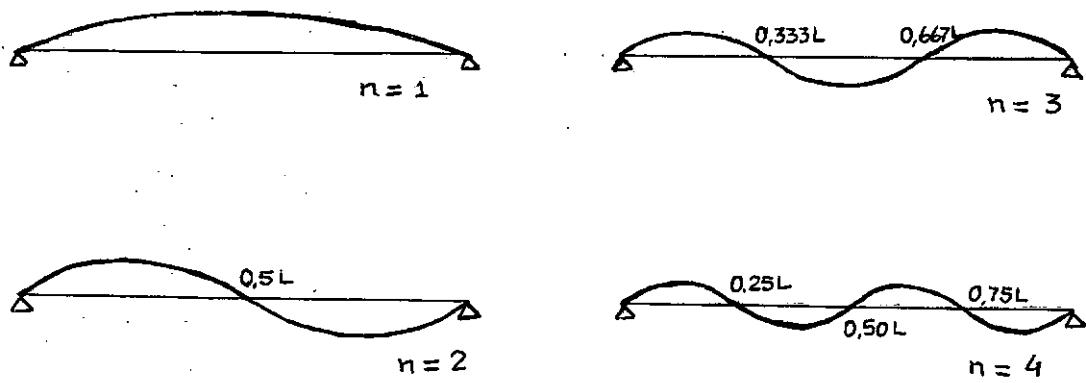


fig. 2-1

## 2.2 - Viga com carga de compressão.

Na equação (1-15) fazendo  $p(x,t) = 0$  obtemos a equação de vibrações livres de viga comprimida, que é

$$\text{EJ} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{m}{L} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2-15)$$

equação que admite uma solução na forma  $y = u(x) \operatorname{sen} \omega t$ .

A substituição transforma a (2-15) em

$$\text{EJ} \frac{d^4 u}{dx^4} + q \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{m}{L} \omega^2 u = 0 \quad (2-16)$$

Colocando agora

$$\left. \begin{array}{l} \lambda^2 = q L^2/EJ \\ \delta^4 = m\omega^2 L^3/EJ \end{array} \right\} \quad (2-17)$$

a equação passa a ser

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{\lambda^2}{L^2} \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\delta^4}{L^4} u = 0 \quad (2-18)$$

Uma mudança de variáveis com  $x = L\phi$  transforma a equação (2-18) em

$$\frac{d^4 u}{d\phi^4} + \lambda^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2} - \delta^4 u = 0 \quad (2-19)$$

Introduzindo a notação

$$H = \left[ -\frac{\lambda^2}{2} + \left( \frac{\lambda^4}{4} + \delta^4 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (2-20)$$

$$q = \left[ \frac{\lambda^2}{2} + \left( \frac{\lambda^4}{4} + \delta^4 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (2-21)$$

aplicamos à equação (2-19) a transformação de Laplace, obtendo

$$\bar{u}(r) r^4 - u(0) r^3 - u'(0)r^2 - u''(0)r - u'''(0) + \lambda^2 \left[ \bar{u}(r)r^2 - u(0)r - u'(0) \right] - \delta^4 \cdot \bar{u}(r) = 0 \quad (2-22)$$

onde

$$\bar{u}(r) = \int_0^{\infty} e^{-r\phi} u(\phi) d\phi \quad (2-23)$$

é a transformada de Laplace da função  $u(\phi)$ .

Podemos então colocar

$$\bar{u}(r) = \frac{u(0)r(r^2 + \lambda^2) + u'(0)(r^2 + \lambda^2) + u''(0)r + u'''(0)}{r^4 + \lambda^2 \cdot r^2 - \delta^4} \quad (2-24)$$

É fácil constatar que

$$r^4 + \lambda^2 r^2 - \delta^4 = (r^2 - H^2)(r^2 + Q^2) \quad (2-25)$$

o que permite escrever

$$\bar{u}(r) = \frac{u(0)r(r^2 + \lambda^2) + u'(0)(r^2 + \lambda^2) + u''(0)r + u'''(0)}{(r^2 - H^2)(r^2 + Q^2)} \quad (2-26)$$

Para efetuar a transformação inversa da equação (2-26) colocamos o produto que aparece no denominador sob forma de soma conforme a expressão seguinte

$$\frac{1}{(r^2 - H^2)(r^2 + Q^2)} = \frac{1}{H^2 + Q^2} \left( \frac{1}{r^2 - H^2} - \frac{1}{r^2 + Q^2} \right) \quad (2-27)$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \bar{u}(r) &= \frac{1}{H^2 + Q^2} \left( \frac{1}{r^2 - H^2} - \frac{1}{r^2 + Q^2} \right) \left[ u(0)r(r^2 + \lambda^2) + \right. \\ &\quad \left. u'(0)(r^2 + \lambda^2) + u''(0)r + u'''(0) \right] \quad (2-28) \end{aligned}$$

Lembrando que a transformada inversa das funções que aparecem em (2-28) tem os valores abaixo

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ r^3 \left[ \frac{1}{r^2 - H^2} - \frac{1}{r^2 + Q^2} \right] \right\} = H^2 \cosh H\varphi + Q^2 \cos Q\varphi$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ r \left[ \frac{1}{r^2 - H^2} - \frac{1}{r^2 + Q^2} \right] \right\} = \cosh H\varphi - \cos Q\varphi$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ r^3 \left[ \frac{1}{r^2 - H^2} - \frac{1}{r^2 + Q^2} \right] \right\} = H \operatorname{senh} H\varphi + Q \operatorname{sen} Q\varphi$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{r^2 - H^2} - \frac{1}{r^2 + Q^2} \right\} = \frac{1}{H} \operatorname{senh} H\varphi - \frac{1}{Q} \operatorname{sen} Q\varphi$$

(2-29)

e utilizando a notação

$$A(\varphi) = \frac{1}{H^2 + Q^2} (H^2 \cosh H\varphi + Q^2 \cos Q\varphi)$$

$$B(\varphi) = \frac{1}{H^2 + Q^2} (\cosh H\varphi - \cos Q\varphi) \quad (2-30)$$

$$C(\varphi) = \frac{1}{H^2 + Q^2} (H \operatorname{senh} H\varphi + Q \operatorname{sen} Q\varphi)$$

$$D(\varphi) = \frac{1}{H^2 + Q^2} \left( \frac{1}{H} \operatorname{senh} H\varphi - \frac{1}{Q} \operatorname{sen} Q\varphi \right)$$

a equação (2-28), após a transformação inversa de Laplace fica

$$u(\varphi) = u(0) \left[ A(\varphi) + \lambda^2 B(\varphi) \right] + u'(0) \left[ C(\varphi) + \lambda^2 D(\varphi) \right] \\ + u''(0) B(\varphi) + u'''(0) D(\varphi) \quad (2-31)$$

Das quatro condições de contorno da viga obtemos um sistema de quatro equações homogêneas, que permite determinarmos três constantes de integração em função da quarta. Igualando a zero o determinante do sistema chegamos a uma equação transcendental que tem um número infinito de raízes  $\omega_1, \omega_2, \dots$  cada uma das quais está associada a um modo de vibração.

No caso de viga simplesmente apoiada as quatro condições de contorno são

$$u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0 \quad (2-32)$$

Dai temos

$$u(\varphi) = u'(0) \left[ C(\varphi) + \lambda^2 D(\varphi) \right] + u'''(0) D(\varphi) \quad (2-33)$$

e ainda

$$u(1) = u'(0) \left[ C(1) + \lambda^2 D(1) \right] + u'''(0) D(1) = 0$$

$$u''(1) = u'(0) \left[ C''(1) + \lambda^2 D''(1) \right] + u'''(0) D''(1) = 0 \quad (2-34)$$

A compatibilidade dos sistema exige que seja

$$\begin{bmatrix} C(1) + \lambda^2 D(1) & D(1) \\ C''(1) + \lambda^2 D''(1) & D''(1) \end{bmatrix} = 0 \quad (2-35)$$

Tendo em conta as expressões das funções  $C(\varphi)$  e  $D(\varphi)$  em (2-30) a equação (2-35) após simplificações imediatas fornece

$$\operatorname{sen} Q = 0 \quad (2-36)$$

ou

$$Q = n\pi$$

e ainda, tendo em conta a equação (2-20)

$$\left[ \frac{\lambda^2}{2} + \left( \frac{\lambda^4}{4} + \delta^4 \right)^{1/2} \right]^{1/2} = n\pi \quad (2-37)$$

Com as expressões definidas em (2-17), encontramos

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJL}{m} \left( 1 - \frac{q L^2}{n^2 \pi^2 EJ} \right)} \quad (2-38)$$

O resultado definido por (2-38) mostra que

- a) a frequência de vibração da viga decresce quando cresce a força  $q$  de compressão; se a força é de tração a frequência cresce à medida que a força aumenta;
- b) quando  $\omega=0$  ocorre instabilidade elástica da viga por

flambagem, sendo a carga de flambagem dada por

$$q_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{L^2} \quad (2-39)$$

A equação de frequência (2-36) e o sistema (2-34) levadas a (2-33) dão, após simplificações

$$u(\varphi) = C \operatorname{sen} Q\varphi \quad (2-40)$$

A equação característica é

$$g_n(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen} Q_n \frac{x}{L} \quad (2-41)$$

sendo  $0 \leq x \leq L$ ,  $Q_n = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots \infty$

### 2.3 - Ortogonalidade das funções características

Os modos de vibração de uma viga possuem a propriedade de ortogonalidade, conforme foi estudado extensivamente por Felgar<sup>11</sup>, que permite a solução de sistemas compostos que será feito no capítulo III. Outros tipos de estruturas compostas foram estudados utilizando-se esta propriedade, por Serbin<sup>9</sup> e Saibel<sup>10</sup>. Assim, se  $g_i(x)$  e  $g_j(x)$  são modos correspondentes a duas frequências  $\omega_i$  e  $\omega_j$ , são satisfeitas as relações

$$\int_0^L g_i(x) g_j(x) dx = 0 \quad i \neq j$$

$$\int_0^L [g_i(x)]^2 dx = L \quad (2-42)$$

No caso de não haver carga axial as funções  $g_i(x)$  e  $g_j(x)$  satisfazem à equação

$$\frac{d^4 g_n}{dx^4} - \alpha^4 g_n = 0 \quad n = i, j \quad \alpha^4 = \frac{m \omega^2}{EJL} \quad (2-43a)$$

Considerando a viga deformada estaticamente por uma carga  $p(x)$ , podemos escrever

$$\frac{d^4 g_n}{dx^4} = \frac{p_n}{EJ}, \text{ daí } p_n = \alpha_n^4 g_n EJ \quad n=i,j$$

Aplicando aos carregamento  $p_i$ ,  $p_j$  o teorema da reciprocidade dos deslocamentos de Betti, temos

$$\int_0^L g_i(x) p_j(x) dx = \int_0^L g_j(x) p_i(x) dx \quad (2-43b)$$

ou ainda

$$\int_0^L g_i(x) \alpha_j^4 g_j(x) EJ dx = \int_0^L g_j(x) \alpha_i^4 g_i(x) EJ dx \quad (2-43c)$$

que simplificada fornece

$$(\alpha_j^4 - \alpha_i^4) \int_0^L g_i g_j dx = 0 \quad (2-43d)$$

Se  $\omega_i \neq \omega_j$ ,  $\alpha_i \neq \alpha_j$ , consequentemente

$$\int_0^L g_i(x) g_j(x) dx = 0 \quad i \neq j \quad (2-43)$$

Na integral

$$\int_0^L \left[ g_n(x) \right]^2 dx = \text{constante}$$

a escolha do coeficiente da função  $g_n(x)$  permite obtermos um valor pré-escolhido para a integral. No caso de viga simplesmente apoiada,  $g_n(x) = C \sin \alpha_n x$

então

$$\int_0^L \left[ g_n(x) \right]^2 dx = C^2 \int_0^L \sin^2 \alpha_n x dx = C^2 \cdot \frac{L}{2}$$

Para que o valor da integral seja L basta tomarmos  $C = \sqrt{2}$ .

No caso da viga comprimida  $g_i(x)$  e  $g_j(x)$  satisfazem à equação

$$EJ \frac{d^4 g_n}{dx^4} + q \frac{d^2 g_n}{dx^2} - \frac{m}{L} \omega_n^2 g_n = 0 \quad n=i, j$$

Colocando

$$EJ \frac{d^4 g_n}{dx^4} = \frac{m}{L} \omega_n^2 g_n - q \frac{d^2 g_n}{dx^2} \quad n=i, j$$

e tratando o segundo membro como um carregamento estático (Nowacki<sup>3</sup>),

$$P_n = \frac{m}{L} \omega_n^2 g_n - q \frac{d^2 g_n}{dx^2} \quad n=i, j$$

o teorema de Betti permite colocar

$$\int_0^L p_i g_j dx = \int_0^L p_j g_i dx \quad (2-44a)$$

ou ainda

$$\frac{m}{L} (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L g_i g_j dx - q \int_0^L (g_i'' g_j - g_j'' g_i) dx = 0 \quad (2-44b)$$

Integrando por partes a integral  $I = \int g_i'' g_j dx$   
encontramos

$$I = \left[ g_i' g_j \right]_0^L - \int_0^L g_i' g_j' dx = \left[ g_i' g_j - g_j' g_i \right]_0^L + \int_0^L g_i g_j'' dx \quad (2-44c)$$

Levando o resultado da integração de I à equação  
(2-44b) encontramos finalmente

$$\frac{m}{L} (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L g_i g_j dx - q \left[ g_i' g_j - g_j' g_i \right]_0^L = 0$$

o que garante a ortogonalidade de  $g_n(x)$  desde que se tenha

$$\left[ g_i' g_j - g_j' g_i \right]_0^L = 0 \quad (2-44)$$

A condição (2-44) é satisfeita para viga simplesmente apoiada, engastada nos extremos, ou engastada em um extremo e apoiada no outro.

## CAPÍTULO - III

### VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE VIGA APOIADA EM SISTEMA

#### MASSA—MOLA

##### 3.1 - Viga sem carga axial

Consideramos uma viga sujeita a quaisquer condições de contorno com massa suspensa num ponto da mesma. A massa é ligada a uma mola conforme figura 3-1 onde se tem

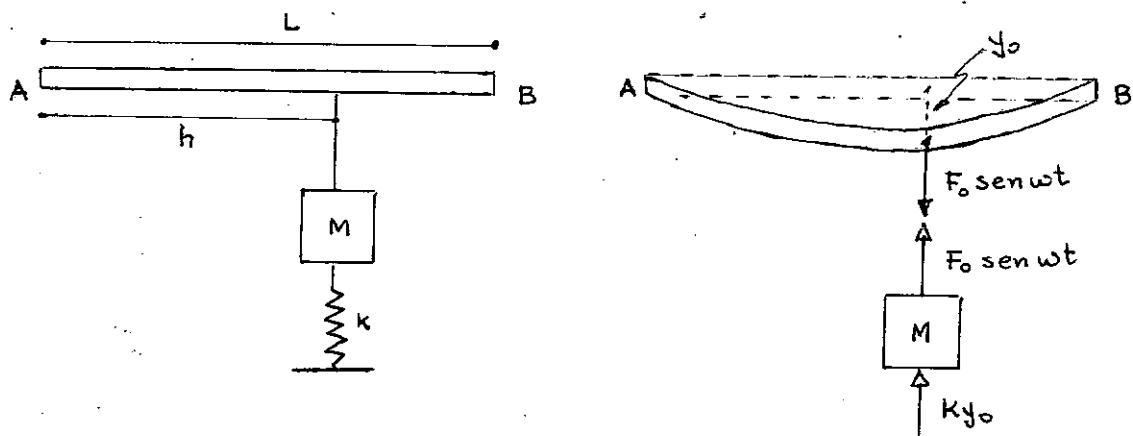


fig. 3-1

L = comprimento da viga

m = massa da viga

M = massa suspensa

k = constante elástica da mola

$y_o$  = deflexão num instante  $t$  do ponto de suspensão

$h$  = distância do ponto A ao ponto de suspensão da massa.

Quando o sistema vibra livremente a força transmitida à viga pela massa varia senoidalmente com uma frequência igual à frequência de vibração dos sistema. Podemos então imaginar o sistema constituído de duas partes, (a) a viga submetida a uma força variando harmônica F = F<sub>0</sub>senωt e a massa suportada por uma mola e sujeita a uma força igual e oposta à que age na viga.

O movimento de uma viga solicitada por uma força transversal  $f(x)$  sen ωt é descrito pela equação

$$\text{EJ} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m}{L} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x) \text{ sen } \omega t \quad (3-1)$$

Tomando a solução na forma  $y=v(x) \text{ sen } \omega t$  e substituindo, a equação passa a ser

$$\text{EJ} \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{m}{L} \omega^2 = f(x) \quad (3-2)$$

Conforme foi exposto por Karman<sup>5</sup> e Rayleigh<sup>4</sup> uma função  $f(x)$  com descontinuidades finitas no intervalo  $0 \leq x \leq L$  pode ser representada por uma série linear de funções  $g_n(x)$  que formem no intervalo  $0 \leq x \leq L$  um conjunto ortogonal. A função  $g_n(x)$  define os modos de vibração livre da viga, dada pela equação (2-14) no caso de viga simplesmen-

te apoiada.

Podemos, então, colocar

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) \quad (3-3)$$

sendo o coeficiente  $a_n$  determinado utilizando-se a condição de ortogonalidade. Multiplicando-se os dois membros de (3-3) por  $g_i(x)$  e integrando ao longo do comprimento da viga, teremos

$$\int_0^L f(x) g_i(x) dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) g_i(x) dx \quad (3-4)$$

Para todos os valores de  $i \neq n$  a integral da direita se anula. Para  $i=n$ .

$$\int_0^L [g_n(x)]^2 dx = L \quad (3-5)$$

dai

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) g_n(x) dx \quad (3-6)$$

No presente caso  $f(x)$  é uma força aplicada  $F_o$  em  $x=h$ , dai

$$a_n = \frac{F_o}{L} g_n(h) \quad (3-7)$$

Colocando também

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n(x) \quad (3-8)$$

e substituindo em (3-2) a equação passa a ser

$$\text{EJ} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{d^4 g_n(x)}{dx^4} - \frac{m}{L} \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n(x) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) \quad (3-9)$$

Como  $g_n(x)$  satisfaz à equação (2-4) podemos escrever

$$\frac{d^4 g_n(x)}{dx^4} = \alpha_n^4 g_n(x)$$

que fornece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \text{EJ} \alpha_n^4 - \frac{m}{L} \omega^2 \right) b_n g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)$$

o que permite colocar

$$\left( \text{EJ} \alpha_n^4 - \frac{m}{L} \omega^2 \right) b_n = a_n$$

Por outro lado vimos anteriormente que

$$\frac{\text{EJ} \alpha_n^4 L}{m} = \omega_n^2$$

onde

$$b_n (\omega_n^2 - \omega^2) = \frac{L}{m} a_n$$

onde  $\omega_n$  são as frequências naturais da viga sózinha e  $\omega$  fre

quência de vibração dos sistema. Tendo em conta o valor en  
contrado para  $a_n$ , temos então

$$b_n = \frac{La_n}{m(\omega_n^2 - \omega_1^2)} = \frac{F_0}{m\omega_1^2} \cdot \frac{\frac{g_n(h)}{\omega_n^2 - \omega_1^2}}{\frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \quad (3-10)$$

Conseqüentemente podemos escrever

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_0 \operatorname{sen} \omega t}{m\omega_1^2} \cdot \frac{\frac{g_n(h)}{\omega_n^2 - \omega^2}}{\frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \quad (3-11)$$

No ponto  $x=h$  a deflexão é

$$y_0(t) = y(h,t) = \frac{F_0 \operatorname{sen} \omega t}{m\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{g_n(h)}{\omega_n^2 - \omega^2} \right] \quad (3-12)$$

A frequênci natural do sistema é obtida a partir da equação do movimento da massa  $M$  dada abaixo

$$M \frac{d^2 y_0}{dt^2} + ky_0 = -F_0 \operatorname{sen} \omega t$$

cuja solução é do tipo

$$y_0 = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{cos} \omega t$$

levando à equação obtemos

$$A = F_0 / k - M\omega^2 \quad B=0$$

e consequentemente

$$y_o(t) = - \frac{F_o \operatorname{sen} \omega t}{k - M\omega^2} \quad (3-14)$$

Comparando as equações (3-12) e (3-14) obtemos uma equação que permite a determinação da frequência de vibração do sistema, que é

$$\frac{\frac{1}{m} - \frac{k}{m\omega^2}}{\frac{1}{m\omega^2}} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(h)^2}{\omega_n^2 - \omega_1^2} \quad (3-15)$$

Introduzindo a notação

$$k_v = 3EJ / L^3 \quad (3-16)$$

onde  $k_v$  pode ser tomada como uma constante elástica da viga, considerada como uma mola, de massa desprezível, a menor frequência de vibração da viga pode ser expressa por

$$\omega_1^2 = \alpha_1^4 \frac{EJL}{m} = \frac{\alpha_1^4 L^4}{3} \frac{k_v}{m} \quad (3-17)$$

chamando

$$c = \frac{3}{\alpha_1^4 L^4} = 0,03$$

no caso da viga simplesmente apoiada, utilizando valor de  $\alpha_1$  encontrado no artigo 2-1, podemos colocar

$$m = \frac{k}{c \omega_1^2} \quad (3-18)$$

A substituição de (3-18) na equação (3-15) transforma esta em

$$\frac{1}{\frac{M}{m} - c \frac{k}{k_v} \frac{\omega_1^2}{\omega^2}} = \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{g_n(h)}{\frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \right]^2 \quad (3-19)$$

Como a relação  $\frac{\omega_n}{\omega_1}$  cresce rapidamente com n, a frequência de vibração pode ser obtida com grande precisão com os cinco primeiros valores de n. No caso de viga simplesmente apoiada,  $\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^4 = n^4$ .

A expressão (3-19) é válida para qualquer condição de contorno da viga bastando para tanto tomar a função característica  $g_n(x)$ , as frequências de vibração livre  $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$  e o coeficiente  $c = \frac{3}{16} \frac{L^4}{4}$  correspondentes à condição de contorno considerada.

### 3.2 - Viga comprimida com sistema massa-mola.

No caso da viga ser solicitada axialmente por uma força de compressão q a equação diferencial passa a ser

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{m}{L} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x) \sin \omega t \quad (3-20)$$

onde  $f(x) \sin \omega t$  é a força que age transversalmente.

Uma substituição  $y = v(x) \operatorname{sen} \omega t$  torna a equação à forma

$$\text{EJ } \frac{d^4v}{dx^4} + q \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{m}{L} \omega^2 v = f(x) \quad (3-21)$$

Colocando

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L} F_0 g_n(h)$$

uma vez que a força transmitida pela massa à viga é  $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$ , agindo no ponto  $x=h$ .

Colocando também

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n(x)$$

e levando à equação (3-21) encontramos

$$\begin{aligned} \text{EJ } & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{d^4 g_n(x)}{dx^4} + q \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{d^2 g_n(x)}{dx^2} - \frac{m}{L} \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n(x) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) \quad (3-22) \end{aligned}$$

A função característica  $g_n(x)$  satisfaz à equação

$$\text{EJ } \frac{d^4 g_n(x)}{dx^4} = -q \frac{d^2 g_n(x)}{dx^2} + \frac{m}{L} \omega_n^2 g_n(x) \quad (3-23)$$

Dai a equação (3-22) se escreve também

$$\frac{m}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 b_n g_n(x) - \frac{m}{L} \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)$$

(3-24)

A equação (3-24) permite concluirmos que para qualquer valor de  $n$  deve ser satisfeita a relação

$$\frac{m}{L} (\omega_n^2 - \omega^2) b_n = a_n$$

ou ainda

$$b_n = \frac{La_n}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} = \frac{F_0}{m\omega_1^2} \frac{g_n(h)}{\frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_1^2}} \quad (3-25)$$

Recainos então na mesma equação vista no artigo 3.1.

$$\frac{1}{\frac{M}{m} - \frac{k}{m\omega^2}} = \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[g_n(h)]^2}{\frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_1^2}} \quad (3-26)$$

A aplicação de (3-26) para cada tipo de condições de contorno da viga está condicionada à utilização da função característica  $g_n(x)$  e das frequências naturais de vibração livre  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  correspondentes. A função característica deve ser ortogonal, isto é, deve satisfazer a condição (2-43).

No caso particular de viga simplesmente apoiada com carga de compressão  $q$ , a função característica é

$$g_n(x) = \sqrt{2} \sin \frac{Qx}{L} = \sqrt{2} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad 0 \leq x \leq L$$

(3-27)

sendo  $Q$  definido pela equação (2-20) e as frequências são obtidas por

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJL}{m} \left(1 - \frac{qL^2}{n^2 \pi^2 EJ}\right)}$$

Lembrando que

$$k_v = \frac{3EJ}{L^3}$$

a primeira frequência natural é dada pela relação

$$\omega_1^2 = \frac{\frac{4}{3}k_v}{3m} - \frac{\pi^2 q}{Lm} = \frac{k_v}{m} \left( \frac{4}{3} - \frac{\pi^2 q}{Lk_v} \right) \quad (3-28)$$

Dai vem

$$m = \frac{k_v}{\phi(q)\omega_1^2} \quad (3-29)$$

onde

$$\phi(q) = \frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{\pi^2 q}{k_v L}} \quad (3-30)$$

A frequência de vibração do sistema é dada pela

equação (3-31) obtida da (3-26) com o valor de  $m$  fornecido por (3-29)

$$\frac{1}{\frac{M}{m} - \emptyset \frac{k}{k_v} \frac{\omega_1}{\omega^2}} = \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ g_n(h) \right]^2}{\frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \quad (3-31)$$

Observamos que se  $q=0$ ,  $\emptyset(q) = \frac{3}{N^4} = c$ , recaímos na expressão (3-19) que dá a frequência de vibração do sistema para viga simplesmente apoiada, sem carga de compressão.

### 3.3 - Viga comprimida apoiada em dois sistemas massa-mola.

Consideremos viga simplesmente apoiada nas extremidades solicitada por força axial de compressão  $q$ , tendo suspensas nos pontos de abscissa  $h_1$  e  $h_2$  massas  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente conforme figura 3-2. As massas estão ligadas a molas de massa desprezível e constante elástica  $k$ . O estudo feito é válido para outras condições de contorno desde que a função característica  $g_n(x)$  que dá os modos de vibração livre da viga seja ortogonal no intervalo  $0 \leq x \leq L$ .

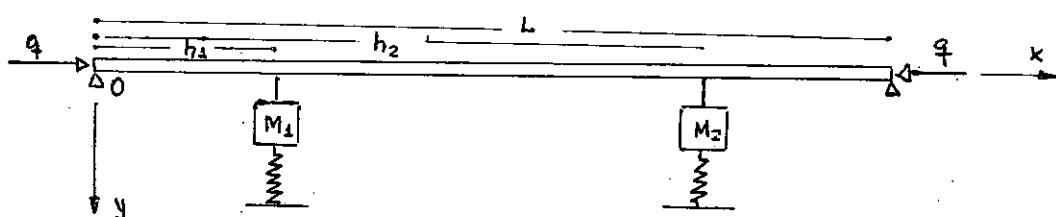


fig. 3-2

Quando o sistema vibra, as fôrças transmitidas à viga pelas massas serão respectivamente  $F_1 \sin \omega t$  e  $F_2 \sin \omega t$  onde  $\omega$  é a frequência de vibração do sistema.

O movimento da viga é descrito pelas equações (3-20), (3-21) e (3-6) sendo que neste caso a função  $f(x)$  representa duas fôrças concentradas  $F_1$  em  $x=h_1$  e  $F_2$  em  $x=h_2$ . A integração da equação (3-6) para este tipo de carregamento dá

$$a_n = \frac{F_1}{L} g_n(h_1) + \frac{F_2}{L} g_n(h_2) \quad (3-32)$$

e a correspondente expressão para a deflexão  $y$  se torna

$$y = \frac{\sin \omega t}{m \omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{F_1 g_n(h_1)}{\omega_n^2} + \frac{F_2 g_n(h_2)}{\omega_n^2}}{\frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \cdot g_n(x) \quad (3-33)$$

As deflexões em  $x=h_1$  e  $x=h_2$  são dadas por

$$y_1(t) = (y)_{x=h_1} = \frac{\sin \omega t}{m \omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{F_1 [g_n(h_1)]^2}{\omega_n^2} + \frac{F_2 g_n(h_2) g_n(h_1)}{\omega_n^2}}{\frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \quad (3-34)$$

$$y_2(t) = (y)_{x=h_2} = \frac{\sin \omega t}{m \omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{F_1 g_n(h_1) g_n(h_2)}{\omega_n^2} + \frac{F_2 [g_n(h_2)]^2}{\omega_n^2}}{\frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \quad (3-35)$$

A equação do movimento da massa  $M_1$  é

$$M_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + ky_1 = -F_1 \sin \omega t \quad (3-36)$$

cuja solução é

$$y_1 = -\frac{F_1 \sin \omega t}{k - M_1 \omega^2} \quad (3-37)$$

e análogamente, a deflexão no ponto  $x=h_2$  vale

$$y_2 = -\frac{F_2 \sin \omega t}{k - M_2 \omega^2} \quad (3-38)$$

Comparando as equações (3-34) com (3-37) e (3-35) com (3-38) obtemos as duas equações

$$\frac{\frac{F_1}{M_1} - \frac{K}{m \omega^2}}{\frac{F_1}{M_1} - \frac{K}{m \omega^2}} = F_1 \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{g_n(h_1)}{\omega_n^2 - \omega_1^2} \right]^2 + F_2 \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(h_1) g_n(h_2)}{\omega_n^2 - \omega_1^2} \quad (3-39)$$

$$\frac{\frac{F_2}{M_2} - \frac{k}{m \omega^2}}{\frac{F_2}{M_2} - \frac{k}{m \omega^2}} = F_2 \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{g_n(h_2)}{\omega_n^2 - \omega_1^2} \right]^2 + F_1 \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(h_1) g_n(h_2)}{\omega_n^2 - \omega_1^2} \quad (3-40)$$

Utilizando a relação  $m = \frac{k_v}{\emptyset \omega_1^2}$  onde

$k_v, \omega, \emptyset$  são definidos pelas equações (3-16), (3-28), (3-30) e usando a notação

$$A(\omega) = \frac{\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ g_n(h_1) \right]^2}{\omega_1^2 \left[ \frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right]} \quad (3-41)$$

$$B(\omega) = \frac{\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(h_1) g_n(h_2)}{\omega_1^2 \left[ \frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right]} \quad (3-42)$$

$$C(\omega) = \frac{\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ g_n(h_2) \right]^2}{\omega_1^2 \left[ \frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right]} \quad (3-43)$$

as equações (3-39) e (3-40) passam a ser

$$\frac{1}{\frac{M_1}{m} - \emptyset \frac{k}{k_v} \frac{\omega_1^2}{\omega^2}} = A(\omega) + \frac{F_2 B(\omega)}{F_1} \quad (3-44)$$

$$\frac{1}{\frac{M_2}{m} - \emptyset \frac{k}{k_v} \frac{\omega_1^2}{\omega^2}} = \frac{F_1}{F_2} B(\omega) + C(\omega) \quad (3-45)$$

Eliminando  $F_1$  e  $F_2$  das duas equações encontramos

$$\frac{1}{\frac{M_2}{m} - \emptyset \frac{k}{k_v} \frac{\omega_1^2}{\omega^2}} = \frac{\left[ B(\omega) \right]^2}{\frac{1}{\frac{M_1}{m} - \emptyset \frac{k}{k_v} \frac{\omega_1^2}{\omega^2}} - A(\omega)} + C(\omega) \quad (3-46)$$

### 3.4 - Aplicações a outras condições de contorno.

A aplicabilidade do método exposto é condicionada à ortogonalidade das funções características que definem os modos de vibração da viga. No caso de vigas em balanço comprimidas as funções características não são ortogonais.

Os modos de vibração de viga em balanço comprimidas por força axial  $q$  são dados pela equação

$$G_n(x) = - \frac{H_n \operatorname{senh} H_n x + Q_n \operatorname{sen} Q_n x}{H_n^2 \cosh H_n x + Q_n^2 \cos Q_n x} (\cosh H_n \frac{x}{L} - \cos Q_n \frac{x}{L}) + \\ + \frac{1}{H_n} \operatorname{senh} H_n \frac{x}{L} - \frac{1}{Q_n} \operatorname{sen} Q_n \frac{x}{L} \quad (3-47)$$

e as correspondentes frequências de vibração são obtidas da equação de frequência

$$H^4 + Q^4 + 2H^2Q^2 \cosh H \cos Q + (H^2 - Q^2)^2 H Q \operatorname{senh} H \operatorname{sen} Q = 0 \quad (3-48)$$

e onde  $H$  e  $Q$  são funções de  $\omega$ , definidas pelas relações - (3-20) e (3-21).

No caso particular de  $q=0$ ,  $H=Q=\alpha L$  e a equação de frequência passa a ser

$$1 + \cosh \alpha L \cos \alpha L = 0 \quad (3-49)$$

As frequências de vibração correspondentes à equação (3-48) podem conforme Nowacki<sup>3</sup>, ser obtidas com boa aproximação pela expressão

$$\omega_n^2 = \omega_{n,0}^2 \left(1 - \frac{q}{q_{cr}}\right) \quad (3-50)$$

onde  $\omega_{n,0}$  é a frequência da viga para  $q=0$  (soluções da equação (3-49)) e  $q_{cr}$  é a carga crítica, dada por

$$q_{cr} = (2n-1)^2 \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (3-51)$$

A função característica pode ser ortogonalizada utilizando-se o processo de Gram-Schmidt. As funções encontradas é aplicável o método exposto de expansão da solução da equação diferencial em série de funções.

Dado um conjunto de funções  $G_1(x), G_2(x), \dots$  não ortogonais num intervalo  $(0,L)$  existe um conjunto de funções correspondentes  $g_1(x), g_2(x) \dots$  que são ortogonais. Para encontrar as funções  $g_n(x)$  fazemos

$$r_1(x) = G_1(x) \quad g_1(x) = \frac{r_1(x)}{\sqrt{(r_1, r_1)}} \quad (3-52)$$

$$r_{i+1}(x) = G_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^i (g_k, G_{i+1}) g_k(x) \quad i=1, 2, \dots \quad (3-53)$$

onde

$$(g_k, G_{i+1}) = \int_0^L g_k(x) G_{i+1}(x) dx \quad (3-54)$$

é o produto escalar das duas funções  $g_k(x)$  e  $G_{i+1}(x)$ .

Assim, encontrada a função  $g_1(x)$  por (3-52), a fórmula de recorrência (3-53) permite determinar as funções  $g_2(x)$ ,  $g_3(x) \dots g_n(x)$ . Como as frequências de vibração do sistema como o discutido no artigo 3.2 são dadas com suficiente precisão com os cinco primeiros termos da série que aparece na solução, (equação (3-46)) basta que seja utilizada quatro vezes a equação (3-53) para se chegar à solução.

O conjunto de funções  $g_n(x)$  encontrado por (3-52) e (3-53) é orthonormal, isto é

$$\int_0^L [g_n(x)]^2 dx = 1 \quad (3-55)$$

$$\int_0^L g_n(x) g_m(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

dai o coeficiente da expansão em série  $a_n$  será dado neste caso por

$$a_n = \int_0^L f(x) g_n(x) dx \quad (3-56)$$

## CAPÍTULO - IV

### RESULTADOS

A equação (3-46) fornece as frequências de vibração de viga simplesmente apoiada com massa concentrada e mola, sendo a viga solicitada axialmente por uma força  $q$  de compressão. No caso particular  $q=0$  a equação se identifica com (3-19). Na ausência dos sistema massa-mola ( $M=0$ ,  $k=0$ ) as frequências da vibração dadas por (3-46) são as próprias frequências de vibração livre da viga.

Para analisar a variação do sistema com a carga de compressão  $q$ , a relação  $k/k_v$  e a relação  $M/m$  podemos colocar a equação (3-46) na forma.

$$\frac{k}{k_v} = \frac{1}{\phi(q)} \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \left[ \frac{M}{m} - \frac{1}{f_1(\omega/\omega_1)} \right] \quad (4-1)$$

onde

$$f_1(\omega/\omega_1) = \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ g_n(h) \right]^2}{\frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \quad (4-2)$$

Fixando  $M/m$  podemos variar  $\omega/\omega_1$ , e tabelar  $k/k_v$  para vários valores de  $q$ . Teremos então em gráficos, para

cada valor fixado de  $M/m$ , uma família de curvas, uma para cada  $q$  às quais fornecem  $\omega/\omega_1$ , para cada valor de  $k/k_v$ .

Para simplificar a obtenção desses gráficos tabelamos  $\emptyset(q)$  e  $\omega_n^2/\omega_1^2$  ( $n=1,2,3,4,5$ ) para vários valores de  $q$  (tabela 1). Para efeito de construção da tabela podemos colocar

$$\emptyset(q) = \frac{1}{\frac{\pi^4}{3} \left(1 - \frac{q}{\frac{\pi^2 EJ}{m L^2}}\right)} = \frac{3}{\pi^4 (1-R)} \quad (4-3)$$

onde

$$R = \frac{q}{\frac{\pi^2 EJ}{m L^2}} \quad (4-4)$$

e ainda

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} = \frac{\frac{4}{L^4} \cdot \frac{EJL}{m} \left(1 - \frac{q L^2}{\frac{\pi^2}{n^2} \frac{EJ}{m}}\right)}{\frac{\pi^4}{L^4} \cdot \frac{EJL}{m} \left(1 - \frac{q L^2}{\frac{\pi^2}{n^2} EJ}\right)} = n^2 \left(\frac{n^2 - R}{1 - R}\right) \quad (4-5)$$

Na análise dos resultados é interessante lembrar que a primeira frequência natural de vibração da viga varia com a força de compressão de acordo com a expressão

$$\left(\frac{\omega_{1,r}}{\omega_{1,o}}\right)^2 = 1 - R \quad (4-6)$$

onde  $\omega_{1,r}$  é a primeira frequência de vibração da viga com primida e  $\omega_{1,o}$ , a primeira frequência da viga sem carga de compressão.

Uma primeira conclusão que podemos tirar é que man tidos constantes os demais parâmetros, as frequências de vibração do sistema crescem à medida que se aumenta a relação  $k/k_v$ , sendo menos sensível esta variação para os mais altos modos de vibração. A variação das frequências com a relação  $k/k_v$  se torna menos sensível também para maiores valores da relação  $M/m$ .

É interessante observar que para determinados valores de  $k/k_v$ , com  $M/m$  fixado, a relação  $\omega/\omega_1$  cresça quando se faz crescer a carga de compressão. Embora à primeira vista pareça que a frequência do sistema cresça com a carga de compressão, o denominador  $\omega_1$  que é a frequência da viga sem massa-mola diminui com  $q$  mais rapidamente que aumenta  $\omega/\omega_1$ , na verdade isto quer dizer que no sistema viga-massa-mola a frequência de vibração decresce menos rapidamente que na viga sózinha, com o aumento de  $q$ .

Para valores menores de  $k/k_v$ , fixado  $M/m$ , a frequência de vibração do sistema diminui mais rapidamente com  $q$  que a frequência da viga sózinha. É evidente, uma vez que a constante de mola  $k$  é um elemento estabilizador para o sistema. O inverso ocorre para um valor fixado  $k/k_v$ , considerando-se a relação  $M/m$ : a frequência de vibração do sistema decresce com o aumento da carga de compressão menos rápido que a frequência de vibração da viga sózinha, para valores baixos de  $M/m$ . Para valores elevados de  $M/m$  o sistema passa

a vibrar com menor frequência que a viga sózinha, aumentando-se q.

A posição da massa concentrada foi tomada no caso particular com  $h=0,3L$ . Para outras posições da massa o procedimento é inteiramente análogo.

No caso de duas massas concentradas e molas a equação (3-46) pode ser colocada na forma

$$\frac{k}{k_v} = \frac{1}{\theta(q)} \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \left[ \frac{M_2}{m} - \frac{1}{f_2(\omega)} \right] \quad (4-7)$$

sendo  $f_2(\omega)$  o segundo membro da equação (3-46). Fixando-se  $M_1/m$  podemos tabelar a função  $f_2(\omega)$  atribuindo-se valores à relação  $\omega/\omega_1$ , para vários valores de  $q$ . Em seguida para os valores  $\omega/\omega_1$  correspondentes e para cada  $q$ , obtemos  $k/k_v$ , desde que fixemos também  $M_2/m$ . Podemos ter então para cada par de valores  $M_1/m$ ,  $M_2/m$ , uma família de curvas, que possibilitam a determinação da frequência para cada valor de  $q$ .

## SIMBOLOGIA

- $a_n, b_n$  = coeficientes de expansões em série de funções definidos no texto.
- $c = \frac{3}{\pi^4}$  = coeficiente que relaciona a menor frequência natural de vibração da viga com a constante elástica da viga e a massa.
- E = módulo de elasticidade longitudinal da viga.
- $f_1 (\omega/\omega_i)$  = função de definida no texto
- F = força
- $g_n(x)$  = função característica que define o modo de vibração da viga.
- h = distância da massa concentrada à extremidade esquerda da viga.
- J = momento de inércia em relação ao eixo Oz
- k = constante da mola na qual é presa a massa concentrada
- $k_v = 3EJ/L^3$  = constante elástica da viga
- L = comprimento da viga
- m = massa total da viga
- M = massa ligada à viga
- $p(x,t)$  = carregamento transversal
- q = força axial de compressão

- $t$  = variável tempo
- $u(x), v(x)$  = funções de  $x$  que definem deflexão da viga.
- $x$  = abcissa de um ponto do eixo da viga.
- $y$  = deflexão lateral.
- $z$  = direção normal ao plano  $xy$ .
- $A(\varphi), B(\varphi), C(\varphi), D(\varphi)$  = funções de  $\varphi = x/L$  definidas no texto
- $C_1, C_2, C_3, C_4$  = constantes de integração.
- $\alpha_n = \frac{m\omega_n^2}{n^2 EJL}$  = valores característicos.
- $\omega$  = frequência natural do sistema
- $\omega_n$  = frequência natural do enésimo modo de vibração da viga
- $\emptyset(q)$  = função da carga de compressão definida pela equação (3-30).
- $\lambda = qL^2/EJ$  = função da carga de compressão
- $\delta = m\omega^2 L^3/EJ$  = função de  $\omega$
- $H, Q$  = funções de  $\lambda$  e  $\delta$  definidas pela equação (2-20).
- $U$  = energia potencial
- $R = \frac{q}{n^2 EJ/L^2}$  = relação
- $f_2(\varphi)$  = função definida no texto

## REFERÊNCIAS

- 1 - Young, D., "Vibration of a Beam With Concentrated Mass, Spring and Dashpot", JOURNAL OF APPLIED MECHANICS", vol. 15, TRANSACTIONS OF ASME, vol. 70, 1948.
- 2 - Langhaar, H.L., "Energy Methods in Applied Mechanics", Wiley, New York, 1962.
- 3 - Nowacki, W., "Dynamics of Elastic Systems", Chapman and Hall Ltd, London, 1963.
- 4 - Rayleigh, Lord, "Theory of Sound", Dover, New York, 1945.
- 5 - Karman, T.von - Biot, M.A., "Mathematical Methods in Engineering", McGraw - Hill, New York, 1940.
- 6 - Prescott, J., "Applied Elasticity", Dover, New York, 1946.
- 7 - Temple, G.E.J. - Bickey, W.G., "Rayleigh's Principle and Its Applications to Engineering", Oxford University Press, London, 1933.
- 8 - Timoshenko, S., "Vibration Problems in Engineering", D. Van Nostrand, New York, 1937.
- 9 - Serbin, H., "Vibrations of Composite Structures", Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 12. 1945.
- 10 - Saibel, E., "Vibrations Frequencies of Continuos Beams", Journal of the Aeronautical Sciences, vol.11, 1944.
- 11 - Felgar, R.P., "The Orthogonal Functions of Beams Vibrating Transversely", Tese de Mestrado, University of Texas, Austin, 1947.
- 12 - Bolza, O., "Lectures on the Calcul of Variations", Stechert Hafner, New York, 1931.

```

PROGRAMA PARA DETERMINACAO DE FREQUENCIAS DE VIBRACAO
DE VIGAS COMPRIMIDAS COM SISTEMA MASSA MOLA
TESE DE MESTRADO - HELIO DIAS DA CUNHA
REAL MSM
DIMENSION G(10,5),RELW(10,5),FI(10),R(10),X(10,10),
1 RESUL(10,10),AUX(10)
WRITE(3,101)
101 FORMAT('1')
PI=3.141592
DO 20 I=1,10
R(I)=.1*I-.1+.1E-8
FI(I)=3./((PI**4)*(1.-R(I)))
DO 20 J=1,5
G(I,J)=1.4142*SIN(J*PI*.3)
20 RELW(I,J)=(J**2)*(J**2-R(I))/(1.-R(I))
WRITE(3,10) (R(I),FI(I),(RELW(I,J),J=1,5),I=1,10)
10 FORMAT(3X,F4.2,2X,F5.3,5F9.3/)
WRITE(3,101)
DO 70 I=1,10
DO 70 N=1,10
SOMA=0.
DO 40 J=1,5
DO 30 JI=2,10,2
KL=(JI-2.)/2.+1.
30 AUX(KL)=JI/10.
DO 71 JI=2,6
71 AUX(JI+4)=JI
IF(ABS(RELW(I,J)-AUX(N)**2)-1.E-6)15,15,40
15 RESUL(I,N)=1.E 37
GO TO 70
40 SOMA=SOMA+G(I,J)**2/(RELW(I,J)-AUX(N)**2)
RESUL(I,N)=AUX(N)**2*SOMA
70 CONTINUE
WRITE(3,60)((RESUL(I,J),J=1,5),I=1,10)
60 FORMAT (5E12.3/)
WRITE(3,60)((RESUL(I,J),J=6,10),I=1,10)
MSM=.5
103 WRITE(3,101)
DO 50 I=1,10
DO 50 J=1,10
IF(RESUL(I,J)-1.E 36)17,17,16
16 PART = MSM
GO TO 50
17 PART = MSM-1.0/RESUL(I,J)
50 X(I,J)=1/FI(I)*(AUX(J)**2)*PART
WRITE(3,60)((X(I,J),J=1,5),I=1,10)
WRITE(3,60)((X(I,J),J=6,10),I=1,10)
MSM=2.*MSM
IF(MSM-4.)103,103,35
35 CALL EXIT

```

TABELA I

$\emptyset(R)$  e  $\omega_n^2/\omega_i^2$  PARA VÁRIOS VALORES DE R

q

$$R = \frac{m^2 E J}{L^2}$$

$$\emptyset(R) = 3/m^4(1 - R)$$

$$\omega_n^2/\omega_i^2 = n^2 [(n^2 - R)/(1 - R)]$$

R	$\emptyset(R)$	$\omega_n^2 / \omega_i^2$				
		n \ 1	2	3	4	5
0.00	0.030	1.000	16.000	81.000	256.000	625.000
0.10	0.034	1.000	17.333	89.000	282.666	691.666
0.20	0.038	1.000	19.000	98.999	316.000	775.000
0.30	0.043	1.000	21.142	111.857	358.857	882.142
0.40	0.051	1.000	24.000	128.999	416.000	1025.000
0.50	0.061	1.000	28.000	153.000	496.000	1225.000
0.60	0.076	1.000	34.000	188.999	615.999	1524.999
0.70	0.102	1.000	43.999	248.999	815.999	2024.999
0.80	0.153	1.000	63.999	368.999	1215.999	3024.999
0.90	0.307	1.000	123.999	728.998	2415.996	6024.990

TABELA II-A

 $f_1(\omega/\omega_1)$  PARA VALORES DE R

$$f_1(\omega/\omega_1) = \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^5 \frac{[g_n(h)]^2}{\omega_n^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}$$

$\omega/\omega_1$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0.594E-01	0.268E 00	0.780E 00	0.240E 01	INFINITO
0,1	0.590E-01	0.267E 00	0.777E 00	0.240E 01	INFINITO
0,2	0.586E-01	0.265E 00	0.773E 00	0.239E 01	INFINITO
0,3	0.582E-01	0.264E 00	0.769E 00	0.238E 01	INFINITO
0,4	0.577E-01	0.262E 00	0.765E 00	0.237E 01	INFINITO
0,5	0.573E-01	0.260E 00	0.761E 00	0.237E 01	INFINITO
0,6	0.568E-01	0.258E 00	0.756E 00	0.236E 01	INFINITO
0,7	0.562E-01	0.256E 00	0.752E 00	0.235E 01	INFINITO
0,8	0.557E-01	0.254E 00	0.747E 00	0.234E 01	INFINITO
0,9	0.551E-01	0.251E 00	0.741E 00	0.233E 01	INFINITO

TABELA II-B

 $f_1(\omega/\omega_1)$  PARA VALORES DE R

$\omega/\omega_1$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
R	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
0,0	-0.110E 01	0.931E 00	INFINITO	-0.614E 01	-0.421E 01
0,1	-0.117E 01	0.551E 00	0.204E 02	-0.704E 01	-0.449E 01
0,2	-0.123E 01	0.218E 00	0.836E 01	-0.871E 01	-0.488E 01
0,3	-0.129E 01	-0.767E-01	0.433E 01	-0.129E 02	-0.547E 01
0,4	-0.136E 01	-0.339E 00	0.230E 01	-0.464E 02	-0.656E 01
0,5	-0.142E 01	-0.576E 00	0.108E 01	0.138E 02	-0.931E 01
0,6	-0.149E 01	-0.789E 00	0.269E 00	0.375E 01	-0.337E 02
0,7	-0.155E 01	-0.983E 00	-0.319E 00	0.108E 01	0.689E 01
0,8	-0.161E 01	-0.116E 01	-0.764E 00	-0.158E 00	0.104E 01
0,9	-0.168E 01	-0.132E 01	-0.111E 01	-0.884E 00	-0.573E 00

TABELA III-A

$k/k_v$  PARA  $M/m = 0,5$

$$k/k_v = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \left[ \frac{M}{m} - \frac{1}{f_1(\omega/\omega_1)} \right]$$

$\frac{\omega}{\omega_1}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
R	-0.212E 02	-0.167E 02	-0.912E 01	0.175E 01	0.162E 02
0,1	-0.192E 02	-0.151E 02	-0.827E 01	0.156E 01	0.146E 02
0,2	-0.172E 02	-0.135E 02	-0.741E 01	0.136E 01	0.129E 02
0,3	-0.151E 02	-0.119E 02	-0.653E 01	0.118E 01	0.113E 02
0,4	-0.131E 02	-0.103E 02	-0.565E 01	0.995E 00	0.974E 01
0,5	-0.110E 02	-0.867E 01	-0.475E 01	0.815E 00	0.811E 01
0,6	-0.888E 01	-0.700E 01	-0.383E 01	0.639E 00	0.649E 01
0,7	-0.672E 01	-0.530E 01	-0.290E 01	0.470E 00	0.487E 01
0,8	-0.453E 01	-0.356E 01	-0.195E 01	0.306E 00	0.324E 01
0,9	-0.228E 01	-0.180E 01	-0.991E 00	0.149E 00	0.162E 01

TABELA III-B

 $k/k_v$  PARA M/m = 0,5

$\frac{\omega}{\omega_1}$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
R	0.182E 03	-0.167E 03	0.259E 03	0.537E 03	0.861E 03
0,0	0.158E 03	-0.345E 03	0.210E 03	0.468E 03	0.760E 03
0,1	0.136E 03	-0.953E 03	0.158E 03	0.399E 03	0.659E 03
0,2	0.115E 03	0.276E 04	0.978E 02	0.328E 03	0.558E 03
0,3	0.961E 02	0.603E 03	0.208E 02	0.254E 03	0.457E 03
0,4	0.779E 02	0.326E 03	-0.108E 03	0.173E 03	0.354E 03
0,5	0.608E 02	0.206E 03	-0.668E 03	0.758E 02	0.247E 03
0,6	0.445E 02	0.132E 03	0.565E 03	-0.102E 03	0.124E 03
0,7	0.290E 02	0.795E 02	0.187E 03	0.110E 04	-0.106E 03
0,8	0.142E 02	0.366E 02	0.726E 02	0.132E 03	0.262E 03
0,9					

TABELA IV-A

 $k/k_v$  PARA  $M/m = 1,0$ 

$\omega/\omega_1$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
R					
0,0	-0.205E 02	-0.141E 02	-0.327E 01	0.121E 02	0.324E 02
0,1	-0.186E 02	-0.128E 02	-0.301E 01	0.109E 02	0.292E 02
0,2	-0.166E 02	-0.114E 02	-0.273E 01	0.968E 01	0.259E 02
0,3	-0.147E 02	-0.101E 02	-0.244E 01	0.845E 01	0.227E 02
0,4	-0.127E 02	-0.876E 01	-0.214E 01	0.722E 01	0.194E 02
0,5	-0.106E 02	-0.737E 01	-0.183E 01	0.601E 01	0.162E 02
0,6	-0.862E 01	-0.596E 01	-0.150E 01	0.479E 01	0.129E 02
0,7	-0.653E 01	-0.452E 01	-0.115E 01	0.358E 01	0.974E 01
0,8	-0.440E 01	-0.304E 01	-0.791E 00	0.238E 01	0.649E 01
0,9	-0.222E 01	-0.154E 01	-0.406E 00	0.118E 01	0.324E 01

TABELA IV-B

$k/k_v$  PARA  $M/m = 1,0$

$w/w_1$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
R	0.247E 03	-0.214E 02	0.519E 03	0.943E 03	0.144E 04
0,0	0.216E 03	-0.213E 03	0.444E 03	0.834E 03	0.128E 04
0,1	0.187E 03	-0.837E 03	0.365E 03	0.723E 03	0.112E 04
0,2	0.160E 03	0.287E 04	0.279E 03	0.612E 03	0.967E 03
0,3	0.135E 03	0.691E 03	0.176E 03	0.497E 03	0.808E 03
0,4	0.110E 03	0.399E 03	0.209E 02	0.376E 03	0.647E 03
0,5	0.868E 02	0.264E 03	-0.564E 03	0.238E 03	0.481E 03
0,6	0.640E 02	0.176E 03	0.643E 03	0.190E 02	0.299E 03
0,7	0.420E 02	0.108E 03	0.239E 03	0.118E 04	0.101E 02
0,8	0.207E 02	0.513E 02	0.985E 02	0.172E 03	0.320E 03

TABELA V-A

 $k/k_v$  PARA  $M/m = 2,0$ 

$\omega/\omega_1$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
R	-0.192E 02	-0.892E 01	0.840E 01	0.329E 02	0.649E 02
0,0	-0.174E 02	-0.813E 01	0.750E 01	0.296E 02	0.584E 02
0,1	-0.156E 02	-0.732E 01	0.661E 01	0.263E 02	0.519E 02
0,2	-0.138E 02	-0.649E 01	0.573E 01	0.229E 02	0.454E 02
0,3	-0.119E 02	-0.565E 01	0.486E 01	0.196E 02	0.389E 02
0,4	-0.100E 02	-0.477E 01	0.401E 01	0.164E 02	0.324E 02
0,5	-0.810E 01	-0.388E 01	0.317E 01	0.131E 02	0.259E 02
0,6	-0.614E 01	-0.296E 01	0.235E 01	0.982E 01	0.194E 02
0,7	-0.414E 01	-0.201E 01	0.154E 01	0.654E 01	0.129E 02
0,8	-0.209E 01	-0.102E 01	0.762E 00	0.326E 01	0.649E 01

TABELA V-B

$k/k_v$  PARA  $M/m = 2,0$

$\frac{\omega}{\omega_0}$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	
R	0,0	0,376E 03	0,270E 03	0,103E 04	0,175E 04	0,261E 04
0,1	0,333E 03	0,492E 02	0,912E 03	0,156E 04	0,233E 04	
0,2	0,291E 03	-0,603E 03	0,781E 03	0,137E 04	0,206E 04	
0,3	0,251E 03	0,307E 04	0,643E 03	0,118E 04	0,178E 04	
0,4	0,213E 03	0,866E 03	0,488E 03	0,984E 03	0,150E 04	
0,5	0,175E 03	0,545E 03	0,280E 03	0,782E 03	0,123E 04	
0,6	0,138E 03	0,381E 03	-0,356E 03	0,562E 03	0,948E 03	
0,7	0,103E 03	0,264E 03	0,799E 03	0,262E 03	0,650E 03	
0,8	0,680E 02	0,167E 03	0,343E 03	0,134E 04	0,243E 03	
0,9	0,336E 02	0,805E 02	0,150E 03	0,254E 03	0,437E 03	

TABELA VI-A

$k/k_v$  PARA  $M/m = 4,0$

$\omega/\omega_1$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
R	-0.166E 02	0.146E 01	0.317E 02	0.744E 02	0.129E 03
0,0	-0.151E 02	0.121E 01	0.285E 02	0.670E 02	0.116E 03
0,1	-0.135E 02	0.986E 00	0.253E 02	0.595E 02	0.103E 03
0,2	-0.119E 02	0.775E 00	0.220E 02	0.520E 02	0.909E 02
0,3	-0.103E 02	0.584E 00	0.188E 02	0.446E 02	0.779E 02
0,4	-0.873E 01	0.415E 00	0.157E 02	0.371E 02	0.649E 02
0,5	-0.706E 01	0.271E 00	0.125E 02	0.297E 02	0.519E 02
0,6	-0.536E 01	0.154E 00	0.936E 01	0.222E 02	0.389E 02
0,7	-0.362E 01	0.677E-01	0.622E 01	0.148E 02	0.259E 02
0,8	-0.183E 01	0.149E-01	0.310E 01	0.742E 01	0.129E 02

TABELA VI-B

 $k/k_v$  PARA M/m = 4,0

R \	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
0,0	0.636E 03	0.855E 03	0.207E 04	0.337E 04	0.495E 04
0,1	0.567E 03	0.575E 03	0.184E 04	0.302E 04	0.444E 04
0,2	0.499E 03	-0.135E 03	0.161E 04	0.267E 04	0.393E 04
0,3	0.433E 03	0.348E 04	0.137E 04	0.231E 04	0.342E 04
0,4	0.368E 03	0.121E 04	0.111E 04	0.195E 04	0.291E 04
0,5	0.305E 03	0.838E 03	0.800E 03	0.159E 04	0.240E 04
0,6	0.242E 03	0.615E 03	0.587E 02	0.121E 04	0.188E 04
0,7	0.180E 03	0.439E 03	0.111E 04	0.749E 03	0.135E 04
0,8	0.119E 03	0.284E 03	0.551E 03	0.167E 04	0.711E 03
0,9	0.596E 02	0.138E 03	0.254E 03	0.416E 03	0.671E 03

GRÁFICO T

FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DE VIGA SIMPLESMENTE APOIADA COM SISTEMA MASSA-MOLA EM  $h = 0,3 \text{ L}$ .

$$M/m = 0,5$$

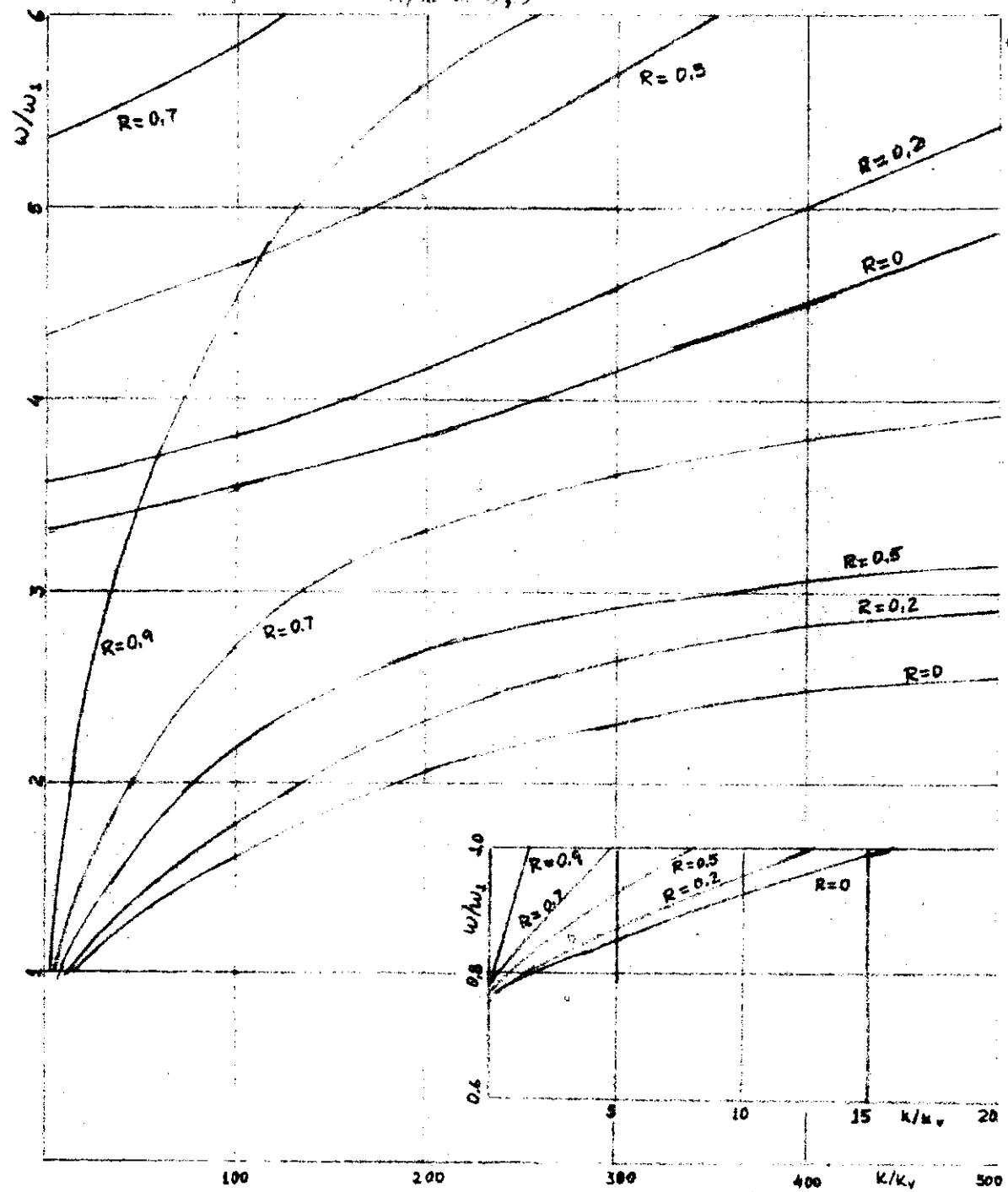


GRÁFICO II  
FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DE VIGA SIMPLESMENTE APOIADA COM SISTEMA MASSA-MOLA EM  $h = 0,3 L$ .

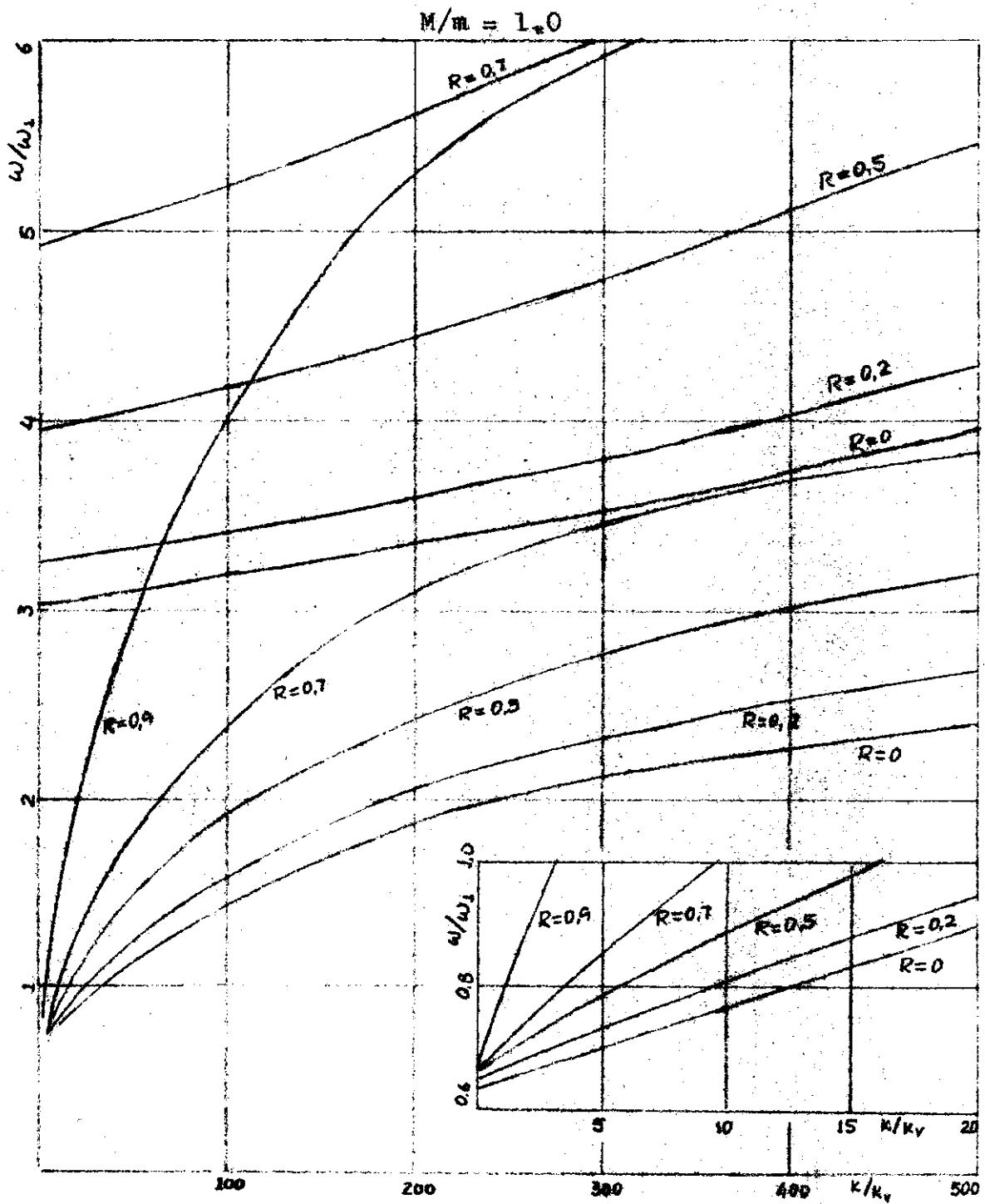


GRÁFICO III

FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DE VIGA SIMPLESMENTE APOIADA COM SISTEMA MASSA-MOLA EM  $h = 0,3 L$ .

$$M/m = 4,0$$

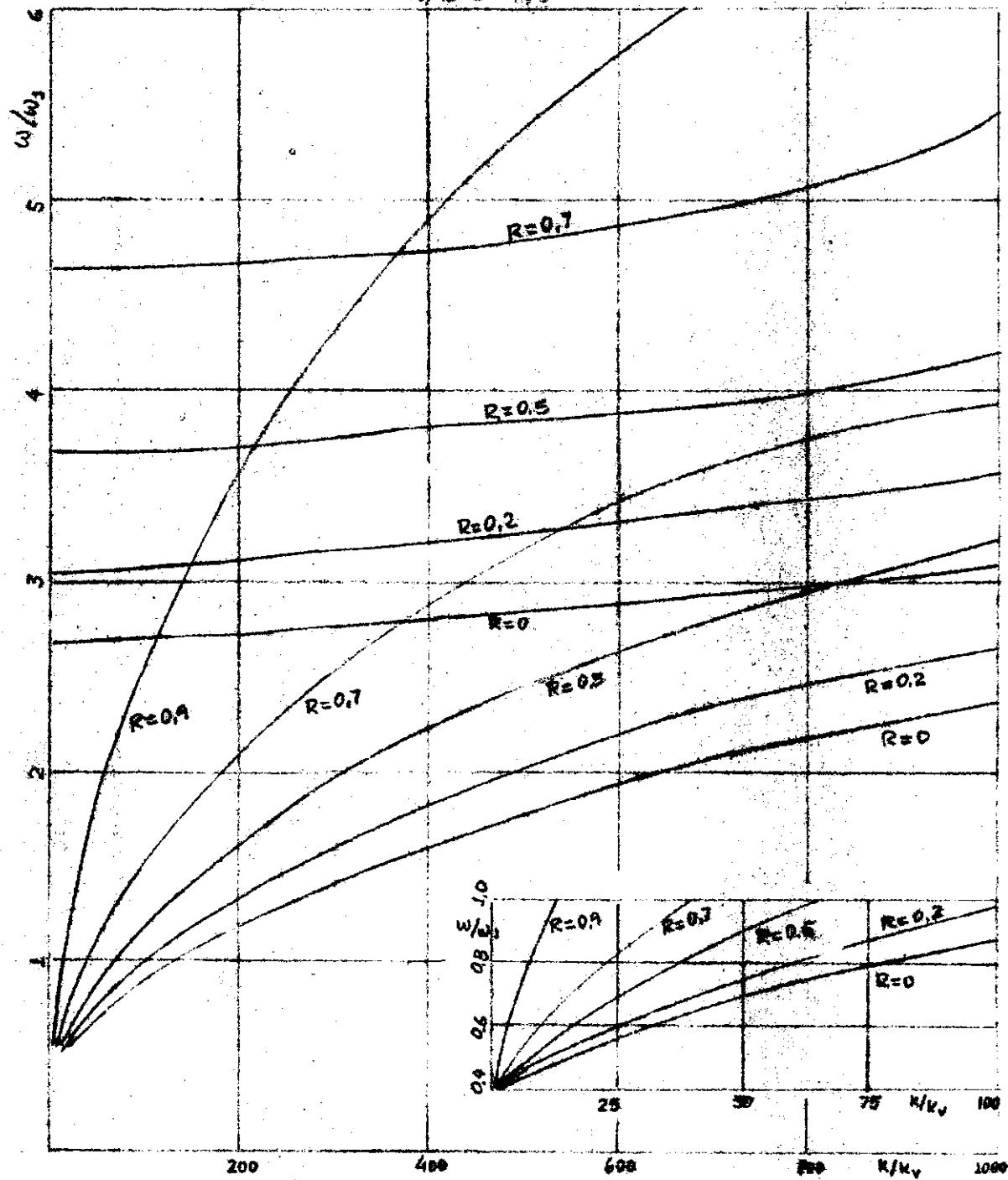


GRÁFICO IV  
FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DE VIGA SIMPLESMENTE APOIADA COM SISTEMA MASSA-MOLA EM  $b = 0,3 L$ .

$R = 0$

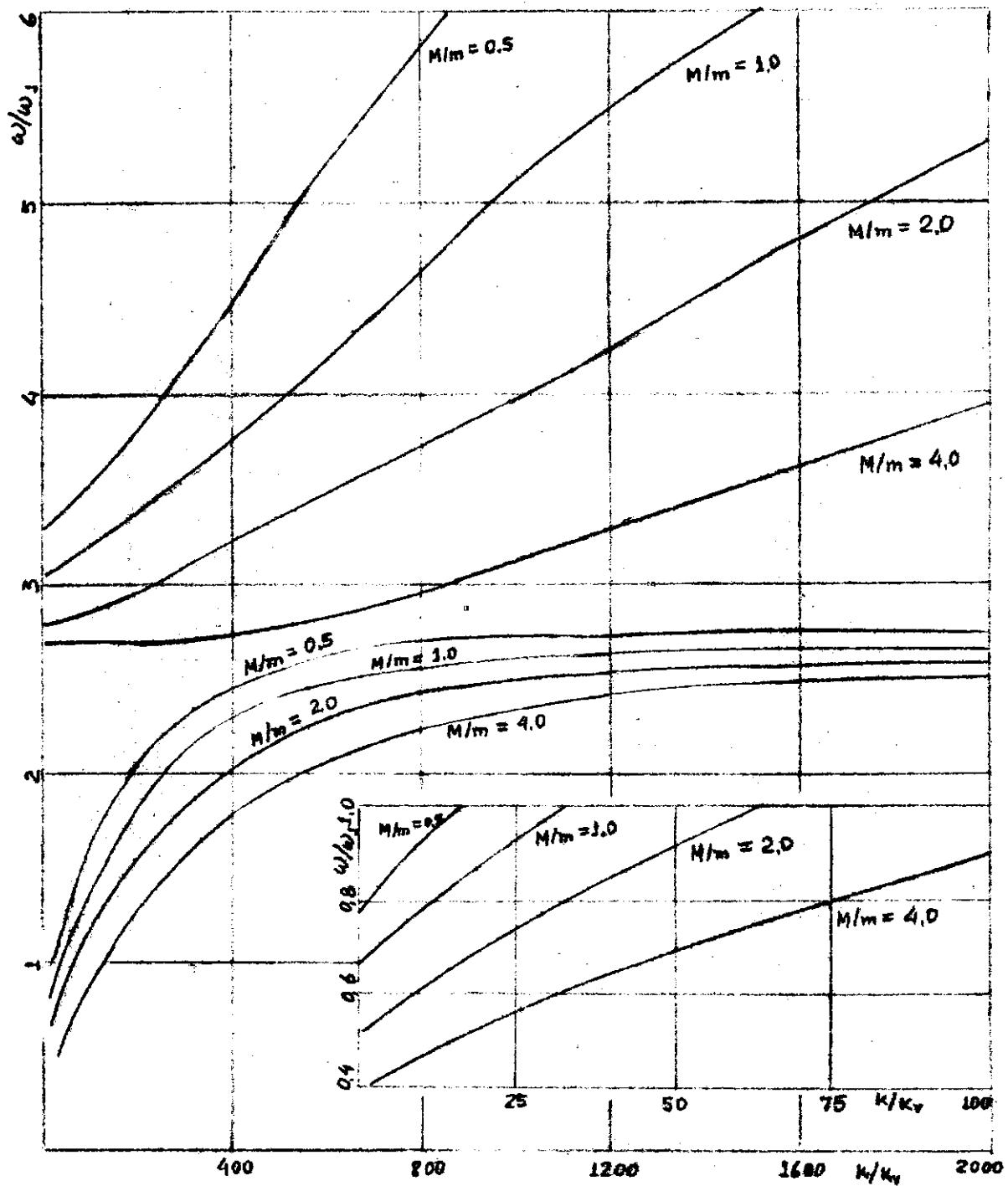
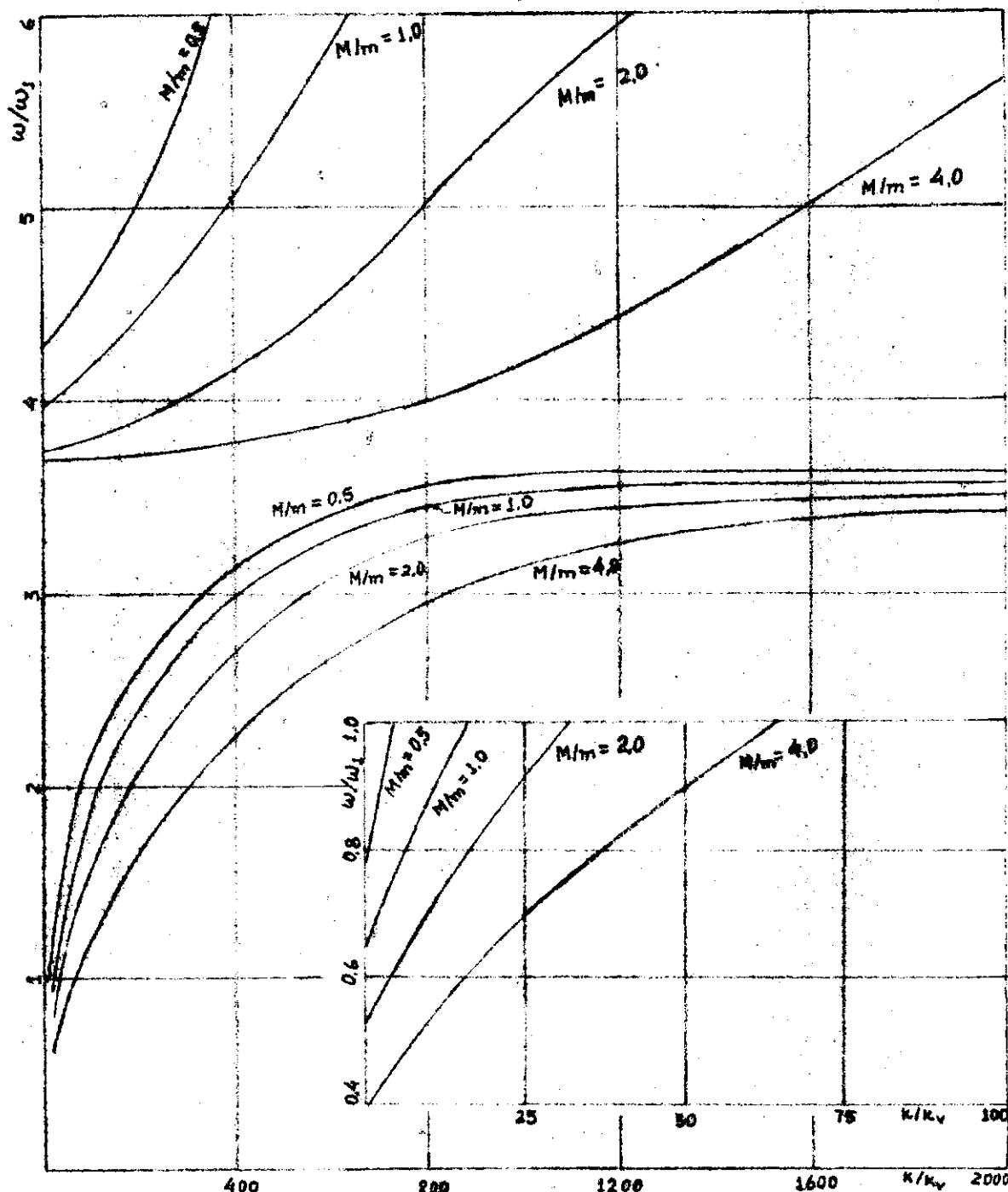


GRÁFICO V

FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DE VIGA SIMPLESMENTE APOIADA COM SISTEMA MASSA-MOLA EM  $h = 0,3 L$ .

$$R = 0,5$$



## GRÁFICO VI

FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DE VIGA SIMPLESMENTE APOIADA COM SISTEMA MASSA-MOLA EM  $h = 0,3 L$ .

