

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
DEPARTAMENTO DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS - DME

Breno Ferreira Sá
Pedro Henrique de Mendonça Tavares Maia

SELEÇÃO DE METODOLOGIA PARA O CÁLCULO DE
RESERVAS DO IBNR VIA MACHINE LEARNING

RIO DE JANEIRO
2024

Breno Ferreira Sá
Pedro Henrique de Mendonça Tavares Maia

SELEÇÃO DE METODOLOGIA PARA O CÁLCULO DE
RESERVAS DO IBNR VIA MACHINE LEARNING

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito necessário para obtenção do grau de Bacharel em Ciências Atuariais e Estatística

Rio de Janeiro, abril de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

BRENO FERREIRA SÁ
PEDRO HENRIQUE DE MENDONÇA TAVARES MAIA

Esta Monografia foi julgada adequada para a obtenção do título de Bacharel em Ciências Atuariais e Estatística, sendo aprovada em sua forma final pela banca examinadora:

Orientador: Prof. Rafael Souza dos Santos
Universidade Federal do Rio de Janeiro -
UFRJ

Orientador: Prof. João Batista de Morais
Pereira
Universidade Federal do Rio de Janeiro -
UFRJ

Prof. Flávia Maria Pinto Ferreira Landim
Universidade Federal do Rio de Janeiro -
UFRJ

Prof. Hugo Tremonte de Carvalho
Universidade Federal do Rio de Janeiro -
UFRJ

Rio de Janeiro, 17 de abril de 2024.

Resumo

As provisões técnicas, resultantes do gerenciamento do risco, representam os diversos compromissos financeiros futuros que as entidades de seguros têm com seus clientes. Este trabalho teve como propósito estudar uma delas, a reserva do IBNR (Provisão de Sinistros Ocorridos e Não Avisados, ou em inglês, Incurred But Not Reported). Ao longo do tempo, o cálculo das reservas atuariais passaram por uma evolução, indo desde a aplicação de metodologias clássicas, como o método *Chain Ladder*, até a adoção de modelos estocásticos para avaliar a evolução dos sinistros. Apesar da quantidade de teorias e métodos, há uma escassez relativa de orientação sobre a seleção adequada das técnicas de reserva e o momento oportuno para sua aplicação. Dessa maneira, revisamos as técnicas de reserva tradicionais no contexto de *Machine Learning* com o objetivo de escolher as melhores combinações para os modelos de reserva. Assim, demonstramos que a utilização de um algoritmo para seleção dos modelos pode resultar em estimativas mais precisas das reservas e investigamos as circunstâncias em que diferentes métricas auxiliam nessa escolha.

Palavras-chave: IBNR, Triângulo de *Runoff*, *Chain Ladder*, *Bornhuetter-Ferguson*, *Cape Cod* Generalizado, *Machine Learning*, Acontecido *versus* Esperado

Abstract

Technical reserves, which result from risk management, represent the various future financial commitments that insurance companies have with their clients. The purpose of this project was to study one of them, the IBNR (Incurred But Not Reported) reserve. Over time, the calculation of actuarial reserves has developed, from the application of classic methodologies, such as the Chain Ladder method, to the adoption of stochastic models to assess the claims development. Despite the number of theories and methods, there is a relative lack of guidance on the appropriate selection of reserving techniques and the timing of their application. We have therefore reviewed traditional reserving techniques in the context of Machine Learning in order to choose the best combinations for reserving models. Thus, we demonstrate that using an algorithm to select the models can result in more accurate estimates of reservations and we investigate the circumstances in which different metrics help in this choice.

Keywords: *IBNR, Runoff Triangle, Chain Ladder, Bornhuetter-Ferguson, Generalized Cape Cod, Machine Learning, Actual versus Expected*

Lista de ilustrações

Figura 1 – Primeiras Iterações do Algoritmo	32
Figura 2 – Divisão dos Dados da SCOR	40
Figura 3 – Comparações das Métricas para as Combinações do Método BF	41
Figura 4 – Comparações das Métricas para as Combinações do Método GCC . . .	43
Figura 5 – Comparação Entre os Melhores Modelos de Cada Metodologia	44

Lista de tabelas

Tabela 1 – Sinistros de Propriedades Pagos (em milhões de reais)	12
Tabela 2 – Triângulo de <i>Runoff</i> Incremental - Sinistros de Propriedades	13
Tabela 3 – Triângulo de <i>Runoff</i> Cumulativo - Sinistros de Propriedades	14
Tabela 4 – Triângulo de <i>Runoff</i> - Ano Observado	14
Tabela 5 – Triângulo de <i>Runoff</i> Cumulativo Teórico	15
Tabela 6 – Fatores idade-idade	18
Tabela 7 – Médias dos fatores idade-idade	19
Tabela 8 – Fatores de Desenvolvimento Seleccionados	20
Tabela 9 – Fatores Cumulativos de Desenvolvimento de Sinistros	21
Tabela 10 – Projeção dos Sinistros Finais - CL	22
Tabela 11 – Projeção dos Sinistros Finais - Sinistralidade Esperada	23
Tabela 12 – Porcentagens de Sinistros Reportados e Não Reportados	25
Tabela 13 – Projeção dos Sinistros Finais - BF	26
Tabela 14 – Prêmio de Esgotamento e Sinistralidade Projetada	27
Tabela 15 – Projeção dos Sinistros Finais - CC	28
Tabela 16 – Projeção dos Sinistros Finais - GCC ($D = 0,75$)	30
Tabela 17 – Hiperparâmetros do Método BF	33
Tabela 18 – Hiperparâmetros do Método GCC	34
Tabela 19 – Prêmio Emitido - Carteira de Automóveis SCOR	38
Tabela 20 – Exposto Simulado - Carteira de Automóveis SCOR	39
Tabela 21 – Resultados do Método CL	40
Tabela 22 – Melhores Hiperparâmetros Encontrados para o Método BF	41
Tabela 23 – Ranking dos Melhores Parâmetros Encontrados para o Método BF, quando aplicados nos dados de teste	42
Tabela 24 – Melhores Hiperparâmetros Encontrados para o Método GCC	42
Tabela 25 – Ranking dos Melhores Parâmetros Encontrados para o Método GCC, quando aplicados nos dados de teste	43
Tabela 26 – Comparação dos Modelos Utilizando Dados de Treino	44
Tabela 27 – Comparação dos Modelos Utilizando Dados de Teste	45

Lista de abreviaturas e siglas

IBNR - *Incurred But Not Reported*; Provisão de Sinistros Ocorridos e Não Avisados

SUSEP - Superintendência de Seguros Privados

CL - *Chain Ladder*

BF - *Bornhuetter-Ferguson*

CC - *Cape Cod*

GCC - *Generalized Cape Cod*; *Cape Cod* Generalizado

CDF - *Claim Development Factors*; Fator de Desenvolvimento de Sinistros

E(LR) - *Expected Loss Ratio*, Sinistralidade Esperada;

AvE - *Actual versus Expected*; Acontecido versus Esperado

RMSE - *Root Mean Squared Error*; Raiz do Erro Quadrático Médio

EQ_t - Erro Quadrático do Total (ponderado)

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	MODELOS CLÁSSICOS DE ESTIMAÇÃO DE IBNR	12
2.1	Triângulo de Desenvolvimento de Sinistros	12
2.1.1	Triângulo de <i>Runoff</i> Utilizado	15
2.2	Metodologias	16
2.2.1	<i>Chain Ladder</i>	16
2.2.2	<i>Bornhuetter-Ferguson</i>	23
2.2.3	<i>Cape Cod</i> e <i>Cape Cod</i> Generalizado	26
3	ALGORITMO PARA SELEÇÃO DO MÉTODO	31
3.1	Construção do Algoritmo	32
3.2	Hiperparâmetros	33
3.3	Métricas (<i>scoring</i>)	35
3.3.1	Acontecido versus Esperado	35
3.3.2	Raiz do Erro Quadrático Médio	35
3.3.3	<i>Scoring</i> do AvE	36
3.3.4	Erro Quadrático do Total (ponderado)	36
3.4	Etapas do Algoritmo	37
4	ESTUDO DE CASO	38
4.1	<i>Chain Ladder</i>	40
4.2	<i>Bornhuetter-Ferguson</i>	40
4.3	<i>Cape Cod</i> Generalizado	42
4.4	Metodologia Recomendada	44
5	CONCLUSÃO	46
	REFERÊNCIAS	48
	APÊNDICE A – TRIÂNGULO RUNOFF	50
	APÊNDICE B – ALGORITMO EM PYTHON	51
	APÊNDICE C – TABELA DE VALORES	60
	ANEXO A – TRIÂNGULO RUNOFF SCOR	63

1 Introdução

As provisões técnicas representam montantes mantidos por empresas cujo principal produto é o gerenciamento de riscos. Essas empresas podem incluir seguradoras, resseguradoras, entidades de previdência privada aberta ou fechada, empresas de capitalização, entre outras. Estas provisões honram os diversos compromissos financeiros futuros dessas empresas em relação aos seus clientes ou participantes. Esses valores são, portanto, registrados no passivo dessas empresas e compreendem o excedente dos valores pagos pelos clientes sobre os riscos e custos assumidos pelas empresas.

Esses compromissos futuros podem se referir a valores já identificados ou, mais frequentemente, envolver estimativas. Portanto, o cálculo das provisões técnicas requer obrigatoriamente a intervenção de um atuário, um profissional que define os parâmetros de segurança na gestão de riscos por meio da aplicação de teorias financeiras e probabilidades.

A forma como uma seguradora aloca seus recursos financeiros desempenha um papel crucial na determinação de seus vínculos com os agentes do mercado. Para um segurado, a subprovisão de capital pode implicar que seu sinistro futuro não seja totalmente coberto em caso de ocorrência. Por outro lado, do ponto de vista do acionista, um excesso de provisão de capital pode resultar na redução ou até mesmo na absorção do retorno de investimento.

Dessa maneira, quantificar bem as provisões técnicas é fundamental para garantir a estabilidade financeira, cumprir regulamentações, tomar decisões estratégicas informadas e manter a transparência nas operações financeiras da empresa. No âmbito de provisões de sinistros, temos o IBNR (Sinistros Ocorridos e Não Avisados, ou em inglês *Incurred But Not Reported*), que segundo o Art. 9º da Circular SUSEP nº 648 [SUSEP 2021], deverá ser constituído para a cobertura dos valores esperados a liquidar relativos a sinistros ocorridos e não avisados até a data-base de cálculo. Assim, supondo uma data base k , temos sinistros que já ocorreram, contudo ainda não foram comunicados à entidade de seguros, seja por falta de conhecimento da apólice pelo beneficiário ou por razões inerentes ao negócio. Como, ao final do período fiscal, a seguradora precisa estimar a quantidade desses tipos de sinistros para conduzir suas análises de resultados, é feito o cálculo do IBNR.

Internacionalmente, os atuários têm se esforçado para calcular a estimativa mais precisa desde que [Bornhuetter e Ferguson 1972] destacaram a importância das reservas incorridas, mas não reportadas. Isso desencadeou uma extensa literatura sobre técnicas de preservação de perdas, exemplificada pelo trabalho de [Merz M. e Wüthrich 2008]. Posteriormente, diversas correntes importantes surgiram nessa literatura, incluindo aprimoramentos em técnicas de reserva para a obtenção de melhores estimativas, reformulações

dessas técnicas para calcular estatisticamente as medidas de incerteza e, mais recentemente, a aplicação de *Machine Learning* para abordar o desafio das reservas de IBNR.

Desse modo, diversas novas metodologias de reserva para IBNR foram desenvolvidas, incluindo técnicas como *Chain Ladder* (CL) e *Bornhuetter-Ferguson* (BF), com essa última inspirando outros métodos posteriormente, como *Cape Cod* (CC) e sua variação *Generalized Cape Cod* (GCC). Além disso, à medida que as práticas para análise de reservas evoluem, diversas adaptações menores dessas técnicas têm sido sugeridas. Essas modificações, por vezes, podem carecer de uma justificativa teórica específica, mas, ainda assim, são comumente aplicadas na prática.

Entretanto, apesar da multiplicidade de técnicas disponíveis para estimar as reservas de IBNR, há uma falta substancial de diretrizes claras sobre como escolher entre essas diversas abordagens. Na prática, os atuários frequentemente recorrem a uma abordagem heurística para orientar a seleção do modelo de reserva, como, por exemplo, optar pela técnica BF para reservas de anos de ocorrências menos desenvolvidos, ou seja, com pouca informação da perda incorrida; ou pela técnica CL para anos de acidentes mais avançados, quando as informações já estão consolidadas. Devido à falta de sistematização na escolha da técnica e na sua aplicação, justificar os valores de reserva do IBNR perante auditores e reguladores pode, por vezes, representar um desafio.

Com o intuito de otimizar a escolha da metodologia, iremos usar uma abordagem via *Machine Learning* na qual o atuário pode analisar as propriedades dos métodos tradicionais de reserva a partir da perspectiva dinâmica da reserva, com o objetivo de auxiliar na seleção de modelos. Será investigado o desempenho dos modelos selecionados por meio dessa estrutura para produzir previsões de desenvolvimento de sinistros com a melhor estimativa possível. A literatura base abordada foi desenvolvida previamente por [Balona e Richman 2020], em que eles sugerem que o atuário estabeleça reservas para anos consecutivos, incorporando a informação dos anos anteriores. Posteriormente, recomendam que se investigue o resultado de cada exercício de reserva anterior, tomando como base a experiência real contida na base de valores já conhecidos. Com o intuito de avaliar o impacto das metodologias empregadas na reserva desses anos anteriores, são definidas métricas que mensuram a acurácia dos métodos utilizados.

Dessa maneira, o projeto está fundamentado com o Segundo Capítulo discutindo a fundamentação teórica da metodologia, seguido pela exposição do algoritmo de *Machine Learning* no Terceiro Capítulo. Concluiremos com um estudo de caso no Quarto Capítulo, em que serão utilizados os métodos: CL, BF e GCC com o objetivo de selecionar o método que melhor se ajusta aos nossos dados oriundos da carteira de automóveis da resseguradora SCOR no artigo [SCOR 2010], e por fim as conclusões estarão dispostas no Quinto Capítulo.

2 Modelos Clássicos de Estimação de IBNR

Neste capítulo será fornecido o embasamento teórico das técnicas CL, BF e GCC para estimativa de reservas que serão utilizadas posteriormente na elaboração do algoritmo, apresentado no Capítulo 3, para seleção da melhor técnica a ser utilizada, e no estudo de caso, apresentado no Capítulo 4.

2.1 Triângulo de Desenvolvimento de Sinistros

Em uma seguradora, é comum ocorrer atrasos no registro de sinistros e na definição final do valor total que a empresa precisa dispor para arcar com os sinistros ocorridos durante um determinado período. Da mesma forma, pode haver atrasos entre a ocorrência do sinistro e a notificação à seguradora por parte do segurado.

Logo, esses fatores devem ser cuidadosamente considerados pela companhia para permitir o cálculo mais preciso possível de suas provisões técnicas. Em outras palavras, a seguradora deve prestar atenção ao desenvolvimento de seus sinistros. Geralmente, a organização desses dados é realizada com base no ano de ocorrência.

Ao fixar um ano de ocorrência dos sinistros, é possível analisar o desenvolvimento de todos os sinistros ocorridos em um determinado período, contemplando tanto os que já foram liquidados por completo quanto os que apenas apresentam valor em reserva em um ramo ou carteira específica da seguradora.

Dessa maneira, um triângulo de desenvolvimento é uma tabela que mostra as alterações no valor da reserva ou de valores pagos dos sinistros ocorridos ao longo do tempo. Por exemplo, a Tabela 1 resume os valores pagos por uma seguradora por sinistros decorrentes de acidentes de uma carteira de seguros de propriedades, os quais ocorreram em 2021, 2022 e 2023 e seus desenvolvimentos ao final de cada um desses anos.

Tabela 1 – Sinistros de Propriedades Pagos (em milhões de reais).

Ano de Ocorrência	Final de 2021	Final de 2022	Final de 2023
2021	100	20	15
2022		80	25
2023			120

Fonte: Autoria própria.

Assim, com informações semelhantes às apresentadas na Tabela 1, é montada uma tabela de desenvolvimento dos sinistros, mais conhecida como Triângulo de *Runoff*, que

irá envolver a estimação da reserva através do agregado dos sinistros ocorridos no final de um ano calendário e seus desenvolvimentos.

É importante observar que também seria possível utilizar outros intervalos de tempo como semestres, trimestres ou meses, sem ocorrer a perda de generalidade de acordo com o objeto de estudo do atuário.

Suponha que estamos observando os sinistros no final de cada ano, em que eles de maneira agregadas são denotados por $X_{i,j}$ de acordo com o ano em que ocorreu uma perda, $i \in \{k_0, \dots, k_0 + I\}$, e o ano de desenvolvimento, $j \in \{0, \dots, J\}$, que seria o período decorrido entre o ano de ocorrência do sinistro e o ano em que ele foi reportado à seguradora ou teve sua estimativa de perda reestimada. O termo k_0 representa o primeiro ano do triângulo, sendo $k_0 = 2021$ no exemplo da Tabela 1. Note que, sem perda de generalidade, os anos podem ser representados por índices.

Retornando ao exemplo apresentado na Tabela 1 para elucidar essa notação, considere adicionalmente que a carteira de seguros de propriedade tenha tido 4 sinistros que aconteceram em 2021 decorrente de incêndios e foram avisados no mesmo ano, com os valores de 10, 30, 20, 40 milhões de reais, respectivamente. Sendo assim, o prejuízo total decorrente de sinistros ocorridos em 2021 sendo analisados no final de 2021 seria de 100 milhões, $X_{2021,0} = 100$ M. Contudo, passado um ano dessa estimativa, a seguradora foi avisada que tiveram outros 2 sinistros que ocorreram em 2021 e seus valores foram de 5 e 15 milhões, respectivamente. Assim, a soma de sinistros avisados em 2022 que ocorreram no ano anterior foi de 20 milhões de reais, $X_{2021,1} = 20$ M.

Dessa maneira, utilizando as informações da Tabela 1, é possível montar um Triângulo de *Runoff* Incremental para os sinistros, $X_{i,j}$, de acidentes em propriedades ocorridos entre 2021 e 2023, que é disposta na Tabela 2.

Tabela 2 – Triângulo de *Runoff* Incremental - Sinistros de Propriedades.

Ano de Ocorrência	Desenvolvimento		
	0	1	2
2021	100	20	15
2022	80	25	
2023	120		

Fonte: Autoria própria.

Além dessa abordagem, a maneira mais usual de análise do desenvolvimento dos sinistros é a partir do acumulado dos sinistros, ou seja, vamos incrementando as novas estimativas e perdas em cada ano de análise. De acordo com [Balona e Richman 2020], os triângulos utilizados em cada ano de ocorrência são iguais ao número períodos de desenvolvimento, isto é, $I = J$, e sem desenvolvimento esperado após o período de

desenvolvimento J . Logo, iremos denotar os sinistros acumulados como

$$C_{i,j} = \sum_{\ell=0}^j X_{i,\ell}.$$

Dessa maneira, o $C_{i,j}$ será o valor total incorrido ou pago pela seguradora aos seus segurados em decorrência de sinistros ocorridos no ano i , mas que foram reportados em até j períodos. Seguindo nosso exemplo de sinistros de propriedades ocorridos em 2021 e com períodos de desenvolvimento de 0 e 1 ano, teríamos $C_{2021,0} = 100$ M e $C_{2021,1} = 120$ M, respectivamente.

Portanto, utilizando as informações da Tabela 1, de maneira semelhante à Tabela 2, é possível montar um Triângulo de *Runoff* para os sinistros acumulados, $C_{i,j}$, de acidentes em propriedades ocorridos entre 2021 e 2023, que é disposta na Tabela 3.

Tabela 3 – Triângulo de *Runoff* Cumulativo - Sinistros de Propriedades.

Ano de Ocorrência	Desenvolvimento		
	0	1	2
2021	100	120	135
2022	80	105	
2023	120		

Fonte: Autoria própria.

A partir das Tabelas 2 e 3, é possível notar que tem-se dois triângulos formados, um superior com as informações já conhecidas e um inferior em branco, pois estas informações ainda são desconhecidas ao final de 2023 e podem ser estimadas para tentar-se entender o desenvolvimento esperado.

Ao analisar as reservas dos sinistros acumulados num mesmo período de interesse para anos de ocorrências diferentes temos o índice k , sendo $k \in \{k_0, \dots, K\}$. Ele equivale ao ano de avaliação ou ano observado, e portanto verificamos esse índice através das diagonais, nas quais $i + j = k$, conforme está disposto na Tabela 4.

Tabela 4 – Triângulo de *Runoff* - Ano Observado.

Ano de Ocorrência	Desenvolvimento		
	0	1	2
2021	2021	2022	2023
2022	2022	2023	
2023	2023		

Fonte: Autoria própria.

De tal maneira, define-se a reserva do triângulo observado no ano k , Δ^k , como

$$\Delta^k = \{C_{i,j}^k; i + j \leq k\}.$$

Em que Δ^k refere-se ao subtriângulo de tamanho $k \leq J$, que está contido no triângulo observado. Em outras palavras, Δ^k é o triângulo completo ao final do ano k , contendo as informações conhecidas até então. Portanto, a Tabela 3 representa o triângulo Δ^{2023} . De maneira geral, o sobreposto k - como em $C_{i,j}^k$ - indica o triângulo referente ao ano k , ou seja, que contém apenas as informações desenvolvidas até o ano k , com ano de ocorrência i e ano de desenvolvimento j tais que $i + j \leq k$.

Com o intuito de ilustrar um triângulo de *Runoff* genérico para qualquer período de interesse, tem-se a Tabela 5 com os $C_{i,j}$ denotando os sinistros acumulados no ano i com período de desenvolvimento j . Nela foi assumido $k_0 = 0$

Tabela 5 – Triângulo de *Runoff* Cumulativo Teórico.

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento							
	0	1	2	...	j	...	$J-1$	J
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$...	$C_{0,j}$...	$C_{0,J-1}$	$C_{0,J}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,j}$...	$C_{1,J-1}$	
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,j}$...		
...			
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$...				
...					
$I-1$	$C_{I-1,0}$	$C_{I-1,1}$						
I	$C_{I,0}$							

Fonte: Autoria própria.

Além disso, com o propósito de assegurar a constituição de reservas adequadas para cobrir as obrigações da empresa em relação aos sinistros, são retidos passivos correspondentes a uma projeção dos sinistros a serem registrados no futuro.

O objetivo de estudo da formulação de um Triângulo de *Runoff*, além de acompanhar a evolução dos sinistros ao longo do tempo, é fornecer uma base para estimativas futuras, ou seja, projetar o triângulo inferior da Tabela 5, cujos valores ainda são desconhecidos no tempo J , monitorando como esses sinistros se desenvolvem conforme mais informações se tornam disponíveis. Com essa finalidade surgem as metodologias que serão apresentadas em sequência neste capítulo.

2.1.1 Triângulo de *Runoff* Utilizado

Ao longo deste trabalho, - com o intuito de exemplificar as abordagens das metodologias apresentadas na Seção 2.2 e apresentar uma aplicação do algoritmo desenvolvido na Seção 3.1 através do estudo de caso apresentado no Capítulo 4 - será utilizado uma base de dados que está presente no artigo *SCOR's loss development triangles and reserves as of December 2010* da [SCOR 2010], uma resseguradora mundial com sede na França e filiais espalhadas ao redor do mundo, apresentado no Anexo A. Esses dados são referentes

à evolução dos sinistros acumulados incorridos (Sinistros Pagos + Sinistros Pendentes) por ano de ocorrência para os seguros de automóveis de contratos automáticos não proporcionais e facultativos, para os anos de ocorrência de 1996 a 2010. Assim, existem quinze diagonais no triângulo, com datas de avaliação anual de 31 de dezembro de 1996 a 31 de dezembro de 2010. Os dados de sinistros reportados contidos nestes quadros são líquidos de resseguro e incluem as despesas administrativas da regularização dos sinistros.

Originalmente, os dados estavam dispostos em porcentagem de sinistralidade, que é o resultado da razão entre sinistros incorridos e prêmio. Contudo, como estamos interessados inicialmente apenas nos sinistros incorridos, foi feita a multiplicação da sinistralidade pelo prêmio gerando o Apêndice A. Adicionalmente, o prêmio emitido estava em milhões de euros, mas, com o intuito de simplificar os cálculos sem perda de generalidade, assumimos o prêmio em milhares de euros. Assim, utilizaremos o triângulo de *Runoff* apresentado no Apêndice A, que possui uma estrutura similar ao apresentado na Tabela 5.

2.2 Metodologias

Em entidades de seguros são comumente utilizados métodos determinísticos para se estimar as provisões adequadas de uma carteira, já que eles apresentam vantagens na facilidade de implementação numa base de dados em comparação a outras abordagens. Segundo [Martin 2015], essa técnica exige decisões por parte de um atuário com base na sua experiência ou conhecimentos especializados para aplicar as técnicas a um conjunto de dados sobre perdas.

Dessa forma, serão apresentadas 3 metodologias dentre as mais utilizadas para a estimação do IBNR.

2.2.1 *Chain Ladder*

O método fundamenta-se na suposição de que podemos antecipar a atividade futura de sinistros para um determinado ano de ocorrência ou ano de subscrição com base na análise da atividade histórica dos sinistros até esse ano. A premissa central dessa técnica é que a frequência e o pagamento de sinistros futuros seguirão padrões semelhantes aos observados no passado.

Através do *Chain Ladder* (CL), também conhecido como Método do Desenvolvimento de Sinistros, fundamentado por [Cramer 1922], os atuários calculam a estimativa de sinistros não pagos ao subtrair os sinistros efetivamente pagos dos sinistros finais projetados. Ao utilizar dados referentes ao ano de acidente, essa estimativa de sinistros não pagos abrange tanto os casos pendentes quanto os sinistros já conhecidos. Para determinar o IBNR estimado por meio da técnica de desenvolvimento, a subtração dos sinistros repor-

tados dos sinistros finais projetados é realizada. Alternativamente, o IBNR é equivalente à estimativa total de sinistros não pagos, excluindo os casos pendentes.

De acordo com [Friedland 2010], o procedimento do cálculo se baseia em 7 passos em que serão desenvolvidos individualmente.

1. Compilar os dados dos sinistros em um triângulo de desenvolvimento

Inicialmente temos que acumular os sinistros em um triângulo de dados de maneira similar à Tabela 5. Conforme mencionado na Seção 2.1.1, utilizaremos como exemplo o triângulo presente no Apêndice A, sobre sinistros incorridos. Porém, é importante mencionar que também poderia ser utilizada a mesma metodologia para os sinistros pagos.

2. Calcular os fatores idade-idade

O passo seguinte é calcular os fatores idade-idade. Estes medem a variação dos sinistros registrados de uma data de avaliação para a seguinte. A convenção para se referir aos fatores de idade é escrever da forma "período inicial - período final", com o índice representando o ano de ocorrência. Por exemplo, o fator idade-idade que refere-se à variação dos sinistros reportados no período de 12 meses, em relação aos reportados no período de 24 meses, dentre aqueles ocorridos no ano de 2002 é referido como o fator $[12 - 24]_{2002}$. Para calcular esse fator idade-idade, dividimos os sinistros reportados em 24 meses pelos sinistros reportados em 12 meses para o ano de 2002.

Dessa maneira, se quisermos o fator 12 - 24 para o ano de ocorrência 2002, temos:

$$\begin{aligned} \text{Fator } [12 - 24]_{2002} &= \frac{\text{Sinistros de 2002 reportados dentro de 24 meses}}{\text{Sinistros de 2002 reportados dentro de 12 meses}} \\ &= \frac{91.620}{33.300} \\ &= 2,75. \end{aligned}$$

Esse processo é repetido para todas as linhas e colunas, dando origem à Tabela 6. Note que o triângulo dos fatores idade-idade tem uma diagonal a menos que o triângulo de dados original.

3. Calcular as médias dos fatores idade-idade

Depois de completar o triângulo dos fatores idade-idade, o próximo passo é calcular as médias dos fatores idade-idade com o objetivo de identificar tendências ou padrões históricos nos padrões de sinistros. Os atuários utilizam uma grande variedade de médias para os fatores idade-idade.

Tabela 6 – Fatores idade-idade.

Ano de Ocorrência	Fatores Idade - Idade																
	12-24	24-36	36-48	48-60	60-72	72-84	84-96	96-108	108-120	120-132	132-144	144-156	156-168	168-180			
1996	6,49	1,63	1,21	1,13	1,03	1,04	1,09	1,04	1,07	1,06	0,99	1,00	1,03	1,00			
1997	3,40	1,48	1,15	1,08	1,08	1,13	1,05	1,02	1,06	1,01	1,03	1,04	1,02				
1998	3,06	1,10	1,17	1,11	1,17	1,04	1,01	1,06	1,02	1,02	1,02	1,04					
1999	5,29	1,21	1,16	1,17	1,04	1,03	1,04	1,01	1,05	1,02	1,02						
2000	3,22	1,37	1,40	1,08	1,07	1,07	1,01	1,02	1,00	1,02							
2001	3,65	1,50	1,18	1,17	1,09	1,05	1,03	1,04	1,02								
2002	2,75	1,40	1,16	1,09	1,01	1,00	1,06	1,04									
2003	3,51	1,27	1,15	1,03	1,02	1,02	1,01										
2004	3,13	1,32	1,08	1,04	1,01	0,98											
2005	2,54	1,18	1,13	1,18	1,07												
2006	2,80	1,24	1,15	1,14													
2007	2,38	1,34	1,13														
2008	2,80	1,22															
2009	2,82																
2010																	

Fonte: Autoria própria.

Na elaboração da Tabela 7 foram calculadas a média aritmética, média ponderada e média geométrica dos últimos três anos.

Esses cálculos foram feitos da seguinte maneira:

- Média aritmética: Soma dos três últimos fatores idade-idade, dividida por 3. Para o fator 12-24 meses, por exemplo, calcula-se a média aritmética dos fatores de 12-24 meses para os anos de ocorrência de 2007 a 2009; e assim temos: $\frac{2,38+2,80+2,82}{3} = 2,67$.
- Média ponderada: Média dos três últimos fatores idade-idade ponderada pelos sinistros reportados no período inicial. Por exemplo, os valores de sinistros reportados dentro de 12 meses para os anos de acidente de 2007 a 2009 foram, respectivamente, 22.780, 26.248 e 19.564. Assim, para o fator 12-24 meses temos: $\frac{(22.780 \times 2,38) + (26.248 \times 2,80) + (19.564 \times 2,82)}{22.780 + 26.248 + 19.564} = 2,67$.
- Média geométrica: Raiz cúbica do produto dos três últimos fatores idade-idade. Por exemplo, a média geométrica para os últimos três anos com 12-24 meses é igual a $(2,38 \times 2,80 \times 2,82)^{1/3} = 2,66$.

Tabela 7 – Médias dos fatores idade-idade.

	12-24	24-36	36-48	48-60	60-72
Média Aritmética	2,67	1,27	1,13	1,12	1,04
Média Ponderada	2,67	1,26	1,13	1,11	1,03
Média Geométrica	2,66	1,26	1,13	1,12	1,04

	72-84	84-96	96-108	108-120	120-132
Média Aritmética	1,00	1,03	1,03	1,02	1,02
Média Ponderada	1,00	1,03	1,03	1,02	1,02
Média Geométrica	1,00	1,03	1,03	1,02	1,02

	132-144	144-156	156-168	168-180
Média Aritmética	1,02	1,03	1,02	1,00
Média Ponderada	1,02	1,03	1,02	1,00
Média Geométrica	1,02	1,03	1,02	1,00

Fonte: Autoria própria.

Os atuários muitas vezes colocam maior confiança na experiência mais recente, uma vez que estes dados refletem melhor o efeito das últimas alterações nos ambientes interno e externo da seguradora justificando nossa escolha pela média dos últimos 3 anos.

4. Selecionar os fatores de desenvolvimento dos sinistros

O fator de desenvolvimento de sinistros selecionado (também referido como fator idade-idade selecionado) representa o crescimento antecipado no intervalo de desenvolvimento subsequente. Ao selecionar os fatores de desenvolvimento de sinistros, os atuários examinam os dados históricos de desenvolvimento de sinistros, os fatores idade-idade e as várias médias dos fatores idade-idade. É também prática comum rever a seleção de fatores de desenvolvimento de sinistros do ano anterior.

Neste estudo, após serem analisados todos os fatores idade-idade e as várias médias, optou-se por selecionar a média ponderada como referência de estudo. Esses fatores selecionados se encontram dispostos na Tabela 8.

Tabela 8 – Fatores de Desenvolvimento Selecionados.

Tempo (Meses)	12-24	24-36	36-48	48-60	60-72
Fatores	2,67	1,26	1,13	1,11	1,03
Tempo (Meses)	72-84	84-96	96-108	108-120	120-132
Fatores	1,00	1,03	1,03	1,02	1,02
Tempo (Meses)	132-144	144-156	156-168	168-180	180-Último
Fatores	1,02	1,03	1,02	1,00	1,00

Fonte: Autoria própria.

5. Selecionar o fator de cauda

Por vezes, os dados não fornecem períodos de desenvolvimento suficientes. Isto ocorre quando os fatores de desenvolvimento para os períodos de desenvolvimento mais maduros disponíveis são ainda significativamente superiores a 1,00. Quando isto ocorre, o atuário terá que determinar um fator de cauda para levar os sinistros do último período de desenvolvimento observável para um valor final.

Visto que temos 15 períodos de desenvolvimento e numa base de dados de mesma carteira, a [Friedland 2010] seleciona um fator de cauda de sinistro reportados de 1,00 e também um fator idade-idade de 1,00 para o último intervalo, no nosso caso o fator 168-180. Isto significa que não é esperado qualquer desenvolvimento adicional nos sinistros comunicados após 168 meses. Iremos assumir os mesmos valores como *benchmark*.

6. Calcular os fatores de desenvolvimento dos sinistros cumulativos

Esses fatores de desenvolvimento de sinistros acumulados são calculados através de multiplicações sucessivas, começando com o fator de cauda e o fator idade-idade mais antigo. O fator cumulativo de desenvolvimento de sinistros (ou *Cumulative Claim*

Development Factors), CDF, projeta o crescimento total sobre as avaliações restantes. Os fatores cumulativos de desenvolvimento dos sinistros são também conhecidos como fatores de idade até ao último e fatores de desenvolvimento dos sinistros até ao último.

Com base nos fatores idade idade selecionados no Passo 4 e no fator de cauda no Passo 5, calculamos os seguintes CDFs:

- CDF Reportado em 180 meses:
Fator de cauda selecionado (180-Último) = 1,00;
- CDF Reportado em 168 meses:
(Fator de cauda selecionado) x (Fator de desenvolvimento selecionado 168-180)
= 1,00 x 1,00 = 1,00;
- CDF Reportado em 156 meses:
=(Fator de cauda selecionado) x (Fator de desenvolvimento selecionado 168-180)
x (Fator de desenvolvimento selecionado 156-168)
= (CDF em 168 meses) x (Fator de desenvolvimento selecionado 156-168 meses)
= 1,00 x 1,02 = 1,02.

Até chegarmos, no CDF 12-24:

- CDF Reportado em 12 meses:
= (CDF em 24 meses) x (Fator de desenvolvimento selecionado 12-24 meses)
= 1,93 x 2,67 = 5,14.

Dessa maneira, fazendo para cada CDF Reportado, gera-se a Tabela 9.

Tabela 9 – Fatores Cumulativos de Desenvolvimento de Sinistros.

Tempo (Meses)	12	24	36	48	60
Fatores	5,14	1,93	1,53	1,35	1,22

Tempo (Meses)	72	84	96	108	120
Fatores	1,18	1,18	1,15	1,11	1,09

Tempo (Meses)	132	144	156	168	180
Fatores	1,07	1,05	1,02	1,00	1,00

Fonte: Autoria própria.

7. Projetar os sinistros finais

Os sinistros finais são iguais ao produto da última avaliação de sinistros (os montantes apresentados na última diagonal dos triângulos de sinistros) e os fatores de desenvolvimento de sinistros cumulativos adequados. No nosso exemplo, a última diagonal do

triângulo é a avaliação de 31 de dezembro de 2010. Cada ano de acidente tem uma idade associada em 31 de dezembro de 2010. Por exemplo, o ano do acidente de 2010, em 31 de dezembro de 2010, tem 12 meses. O ano do acidente de 2009, em 31 de dezembro de 2010, tem 24 meses. Da mesma forma, neste exemplo, o ano de acidente mais antigo no nosso período de experiência é 1996 que, em 31 de dezembro de 2010, tem 180 meses. Determinamos o fator de desenvolvimento de sinistros cumulativo adequado com base na idade de cada ano de acidente; em seguida, multiplicamos os sinistros reportados de cada ano de acidente na última avaliação pelo seu fator de idade até ao último (ou seja, fator cumulativo de desenvolvimentos dos sinistros).

Dessa forma, temos a Tabela 10 com os sinistros projetados para cada ano de ocorrência.

Tabela 10 – Projeção dos Sinistros Finais - CL.

Ano de Ocorrência (1)	Meses (2)	Sinistros Reportados (3)	CDF (4)	CL: Sinistros Projetados (5)
1996	180	90.916	1,00	90.916
1997	168	105.798	1,00	105.798
1998	156	127.512	1,02	130.062
1999	144	176.290	1,05	185.105
2000	132	143.220	1,07	153.245
2001	120	193.936	1,09	211.390
2002	108	181.260	1,11	201.199
2003	96	153.426	1,15	176.440
2004	84	90.156	1,18	106.384
2005	72	61.200	1,18	72.216
2006	60	86.768	1,22	105.857
2007	48	81.874	1,35	110.530
2008	36	89.760	1,53	137.333
2009	24	55.074	1,93	106.293
2010	12	14.279	5,14	73.394

Total 1.651.469 1.966.162

- (2) Diferença entre o Ano de Ocorrência e a Data de Avaliação em 31.12.2010;
 (3) Última diagonal do Triângulo de *Runoff* presente no Apêndice A;
 (4) Informação extraída da Tabela 9;
 (5) = (3) × (4).

Fonte: Autoria própria.

Ao obter a Tabela 10, conseguimos fazer a comparação entre os sinistros reportados e os sinistros projetados, e assim temos o valor do IBNR estimado por essa metodologia ao fazer a subtração entre os totais. Nesse caso, teríamos a reserva do IBNR estimada em $1.966.162 - 1.651.469 = 314.693$ euros.

2.2.2 Bornhuetter-Ferguson

Inicialmente, antes de abordarmos as metodologias desta seção e da próxima, será abordado o método da Sinistralidade Esperada, em que a estimativa de sinistros não reportados corresponde à diferença entre uma estimativa pré-determinada dos sinistros projetados e os sinistros reportados. Para obtermos essa estimativa pré-determinada temos que utilizar o prêmio emitido total, a sinistralidade total para cada ano de ocorrência e uma sinistralidade selecionada. Essa última é escolhida de maneira arbitrária, em que separa os anos de ocorrências em grupos visando uma melhor representação das projeções de sinistros esperados para cada ano. Normalmente se divide em 2 grupos com os anos mais antigos e os mais recentes do período de análise. Contudo como nossa base tem 15 anos de ocorrência, iremos separá-la em três grupos (1996 a 2000, 2001 a 2005 e 2006 a 2010) de valores selecionados no nosso conjunto de dados fazendo a média de 5 anos de ocorrência da sinistralidade total. Dessa maneira, temos um grupo de índices de sinistralidades mais desenvolvidos, um intermediário e um menos desenvolvido, aumentando o escopo de análise do desenvolvimento de sinistros. Assim, temos os sinistros projetados a partir do produto do prêmio total com a sinistralidade selecionada, conforme descrito na Tabela 11.

Tabela 11 – Projeção dos Sinistros Finais - Sinistralidade Esperada.

Ano de Ocorrência (1)	Prêmio Total (2)	Sinistros Reportados (3)	Sinistralidade Total (4)	Sinistralidade Selecionada (5)	Sinistros Projetados (6)
1996	68.000	90.916	141,20%	177,22%	120.510
1997	66.000	105.798	170,20%	177,22%	116.965
1998	69.000	127.512	195,40%	177,22%	122.282
1999	85.000	176.290	222,90%	177,22%	150.637
2000	105.000	143.220	156,40%	177,22%	186.081
2001	136.000	193.936	165,30%	127,04%	172.774
2002	180.000	181.260	121,60%	127,04%	228.672
2003	182.000	153.426	120,50%	127,04%	231.213
2004	132.000	90.156	115,50%	127,04%	167.693
2005	85.000	61.200	112,30%	127,04%	107.984
2006	116.000	86.768	116,40%	109,86%	127.438
2007	134.000	81.874	109,40%	109,86%	147.212
2008	136.000	89.760	112,50%	109,86%	149.410
2009	134.000	55.074	107,70%	109,86%	147.212
2010	131.000	14.279	103,30%	109,86%	143.917
Total		1.651.469			2.319.999

(2) Informação extraída da base de dados [SCOR 2010];

(3) Última diagonal do Triângulo de Runoff presente no Apêndice A;

(4) Informação extraída da base de dados [SCOR 2010];

(5) Média Aritmética de (4) para cada grupo de 5 anos de ocorrência;

(6) = (2) × (5).

Fonte: Autoria própria.

Não será abordado a fundo a Sinistralidade Esperada, pois é preciso apenas entender seu conceito e os sinistros projetados do seu método para fundamentar o BF e CC. Contudo, se subtrairmos o total dos sinistros projetados da Tabela 11 com o total de sinistros reportados da Tabela 10, temos a reserva de IBNR de $2.319.999 - 1.651.469 = 668.530$ euros. Sua limitação é que essa metodologia proporciona estabilidade, mas negligencia completamente os resultados reais conforme são reportados.

Em contrapartida, a abordagem do Desenvolvimento de Sinistros Pagos (*Chain Ladder*), conforme demonstrado na Seção 2.2.1, tem o seu ponto forte para anos de ocorrência que já tiveram muitas experiências acumuladas contudo pode resultar em projeções instáveis e pouco confiáveis, especialmente quando o fator de desenvolvimento cumulativo é elevado. Isso ocorre porque uma oscilação relativamente pequena nos sinistros reportados ou a notificação de um sinistro excepcionalmente grande pode desencadear uma variação significativa nas projeções finais de sinistros.

Dessa maneira, a técnica BF, em referências aos seus autores [Bornhuetter e Ferguson 1972], é fundamentalmente a combinação desses outros dois métodos e tem o intuito de otimizar os pontos fortes de cada método através dessa combinação e dividindo os sinistros finais em duas componentes: sinistros efetivamente reportados (ou pagos) e sinistros esperados não reportados (ou não pagos). À medida que a experiência amadurece, ou seja, mais informações são adicionadas, é dado mais peso aos sinistros reportados e os sinistros esperados tornam-se gradualmente menos importantes.

É possível estipular duas fórmulas para representar o método BF a partir de sinistros reportados e de sinistros pagos, respectivamente:

$$\begin{aligned}\text{Sinistros Totais} &= \text{Sinistros reportados} + \text{Sinistros projetados não reportados} \\ &= \text{Sinistros reportados} + \text{Sinistros projetados} \times \text{Porcentagem não reportada;} \\ \text{Sinistros Totais} &= \text{Sinistros pagos} + \text{Sinistros projetados não pagos} \\ &= \text{Sinistros pagos} + \text{Sinistros projetados} \times \text{Porcentagem não paga.}\end{aligned}$$

Uma vez que os sinistros reportados e pagos são quantidades conhecidas, o desafio do método Bornhuetter-Ferguson é calcular os sinistros esperados não reportados e não pagos. Para completar o método Bornhuetter-Ferguson, o atuário deve selecionar padrões de desenvolvimento de sinistros e desenvolver uma estimativa dos sinistros projetados.

Tabela 12 – Porcentagens de Sinistros Reportados e Não Reportados.

Meses (1)	CDF (2)	Porcentagem Reportada (3)	Porcentagem Não Reportada (4)
180	1,00	100%	0%
168	1,00	100%	0%
156	1,02	98%	2%
144	1,05	95%	5%
132	1,07	93%	7%
120	1,09	92%	8%
108	1,11	90%	10%
96	1,15	87%	13%
84	1,18	85%	15%
72	1,18	85%	15%
60	1,22	82%	18%
48	1,35	74%	26%
36	1,53	65%	35%
24	1,93	52%	48%
12	5,14	19%	81%

(1) Diferença entre o Ano de Ocorrência e a Data de Avaliação em 31.12.2010;

(2) Informação extraída da Tabela 9;

(3) = $\frac{1}{(2)} \times 100$;

(4) = $(1 - \frac{1}{(2)}) \times 100$.

Fonte: Autoria própria.

Com o intuito de demonstrar um exemplo detalhado do método BF, empregamos os padrões de desenvolvimento de sinistros cumulativos (CDF), conforme abordados na Seção 2.2.1, juntamente com os sinistros projetados descritas na Tabela 11 através do método da Sinistralidade Esperada. Inicialmente, calculamos a porcentagem reportada que é pelo inverso do CDF observado, por exemplo, a porcentagem reportada de 12 meses é igual a $\frac{1}{5,14} = 19\%$ e para calcularmos a reportagem não reportada fazemos o complementar, seguindo o exemplo, sendo igual a $100\% - 19\% = 81\%$ para o período de 12 meses. Dessa maneira, repetimos esse cálculo para todos os anos gerando a Tabela 12.

Voltando à nossa fórmula original para o método BF, temos os sinistros totais dados por: Sinistros reportados + Sinistros projetados da Sinistralidade Esperada \times Porcentagem não reportada. Utilizando isso para todos os anos de ocorrência, temos a Tabela 13 com os sinistros projetados para o método BF.

Assim, verificando o valor de reserva de IBNR através do método BF fazendo a subtração entre o sinistros projetados do BF e os sinistros reportados, temos um valor de $2.082.108 - 1.651.469 = 430.639$ euros.

Tabela 13 – Projeção dos Sinistros Finais - BF.

Ano de Ocorrência (1)	Sinistros Reportados (2)	Porcentagem Não Reportada (3)	Sinistralidade Esperada: Sinistros Projetados (4)	BF: Sinistros Projetados (5)
1996	90.916	0%	120.510	90.916
1997	105.798	0%	116.965	105.798
1998	127.512	2%	122.282	129.910
1999	176.290	5%	150.637	183.463
2000	143.220	7%	186.081	155.394
2001	193.936	8%	172.774	208.202
2002	181.260	10%	228.672	203.921
2003	153.426	13%	231.213	183.584
2004	90.156	15%	167.693	115.736
2005	61.200	15%	107.984	77.672
2006	86.768	18%	127.438	109.749
2007	81.874	26%	147.212	120.040
2008	89.760	35%	149.410	141.516
2009	55.074	48%	147.212	126.011
2010	14.279	81%	143.917	130.196
Total	1.651.469			2.082.108

- (2) Última diagonal do Triângulo de *Runoff* presente no Apêndice A;
(3) Informação extraída da Coluna (4) da Tabela 12;
(4) Informação extraída da Coluna (5) da Tabela 11;
(5) = (2) + (3) × (4).

Fonte: Autoria própria.

2.2.3 *Cape Cod* e *Cape Cod* Generalizado

O método *Cape Cod* (CC), desenvolvido por [Bühlmann e Straub 1983], trata-se de uma técnica que guarda semelhanças com a abordagem BF. Ele também segmenta os sinistros finais em duas componentes: os efetivamente reportados (ou pagos) e os projetados não reportados (ou não pagos). Conforme um ano de acidente amadurece, ou seja, são incrementados novos anos de observação, e assim tendo mais informações dos sinistros ocorridos, eles substituem os sinistros esperados não comunicados, e a premissa inicial de sinistros esperados gradualmente perde importância. Posteriormente, o método foi ampliado por [Gluck 1997], desenvolvendo o *Cape Cod* Generalizado (GCC).

De acordo com [Patrick 2001], a principal inovação do método CC reside no fato de que o índice de perdas esperadas para todos os anos combinados é estimado a partir da experiência global de sinistros reportados, em vez de ser escolhido de forma arbitrária, como ocorre no método BF. No entanto, um desafio associado ao método CC é a alta dependência do IBNR por ano em relação ao prêmio ajustado, também chamado de "prêmio de esgotamento". Esse prêmio serve para a determinação do índice de sinistralidade esperada (em inglês, *Expected Loss Ratio*), denotado por $E(LR)$, a ser usado pelo método.

Dessa forma, para calcular o "prêmio de esgotamento", deve-se fazer o produto da porcentagem reportada, que se encontra na Coluna (3) da Tabela 13, com o prêmio total, que se encontra na Coluna (2) da Tabela 11. Posteriormente, deve-se calcular a sinistralidade com esse novo prêmio, gerando a Tabela 14.

Tabela 14 – Prêmio de Esgotamento e Sinistralidade Projetada.

Ano de Ocorrência (1)	Prêmio Total (2)	Porcentagem Reportada (3)	Prêmio de Esgotamento (4)	Sinistros Reportados (5)	Sinistralidade Projetada (6)
1996	68.000	100%	68.000	90.916	134%
1997	66.000	100%	66.000	105.798	160%
1998	69.000	98%	67.647	127.512	188%
1999	85.000	95%	80.952	176.290	218%
2000	105.000	93%	98.131	143.220	146%
2001	136.000	92%	124.771	193.936	155%
2002	180.000	90%	162.162	181.260	112%
2003	182.000	87%	158.261	153.426	97%
2004	132.000	85%	111.864	90.156	81%
2005	85.000	85%	72.034	61.200	85%
2006	116.000	82%	95.082	86.768	91%
2007	134.000	74%	99.259	81.874	82%
2008	136.000	65%	88.889	89.760	101%
2009	134.000	52%	69.430	55.074	79%
2010	131.000	19%	25.486	14.279	56%
Total			1.387.969	1.651.469	

(2) Informação extraída da base de dados [SCOR 2010];

(3) Informação extraída da Coluna (3) da Tabela 11;

(4) = (2) × (3);

(5) Última diagonal do Triângulo de *Runoff* presente no Apêndice A;

(6) = $\frac{(5)}{(4)}$.

Fonte: Autoria própria.

Notamos que a média do índice de sinistralidade estimado para os anos de ocorrência mais maduros compreendidos entre 1996 e 2000 é de 169%. Comparando essa situação com a experiência mais recente, a média desse índice é de 82% para os anos de 2006 a 2010. Nas técnicas de Sinistralidade Esperada e BF, empregamos diferentes índices de sinistralidade para os anos mais antigos e mais recentes do período de análise, a fim de melhor refletir nossas expectativas de sinistros esperados para cada ano. Por outro lado, o método CC requer a utilização de um índice de sinistralidade esperada único para todos os anos em análise. Isso permite distinguir a abordagem mecânica de desenvolvimento dos sinistros esperados no método CC da abordagem do método BF, onde o julgamento atuarial desempenha um papel significativo na formulação da estimativa antecipada dos sinistros esperados.

Esse índice é calculado como a média dos índices de sinistralidade projetada de todos os anos, ponderada pelo prêmio de esgotamento calculado, resultando no índice de 119%. Alternativamente, a sinistralidade esperada para o método CC pode ser calculada pela equação (2.1).

$$E(LR) = \frac{\sum_{k=k_0}^K \text{Sinistros Reportados}_k}{\sum_{k=k_0}^K \text{Prêmio de Esgotamento}_k} = \frac{\sum_{k=k_0}^K C_{k,K-k}}{\sum_{k=k_0}^K \frac{\text{Prêmio Total}_k}{CDF_k}}. \quad (2.1)$$

A maneira de cálculo dos sinistros projetados pelo CC é semelhante ao método BF, os quais são dados por: Sinistros reportados + Sinistros projetados utilizando a Sinistralidade Esperada da equação (2.1) × Porcentagem não reportada. Após realizar esse cálculo para todos os anos de ocorrência, obtemos a Tabela 15 contendo os sinistros projetados para o método CC.

Tabela 15 – Projeção dos Sinistros Finais - CC.

Ano	Prêmio Total	Sinistros Reportados	Sinistralidade Esperada	Sinistros Projetados	Porc. Não Report.	CC: Sinistros Projetados
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1996	68.000	90.916	119%	80.920	0%	90.916
1997	66.000	105.798	119%	78.540	0%	105.798
1998	69.000	127.512	119%	82.110	2%	129.122
1999	85.000	176.290	119%	101.150	5%	181.107
2000	105.000	143.220	119%	124.950	7%	151.394
2001	136.000	193.936	119%	161.840	8%	207.299
2002	180.000	181.260	119%	214.200	10%	202.487
2003	182.000	153.426	119%	216.580	13%	181.676
2004	132.000	90.156	119%	157.080	15%	114.117
2005	85.000	61.200	119%	101.150	15%	76.630
2006	116.000	86.768	119%	138.040	18%	111.660
2007	134.000	81.874	119%	159.460	26%	123.215
2008	136.000	89.760	119%	161.840	35%	145.822
2009	134.000	55.074	119%	159.460	48%	131.912
2010	131.000	14.279	119%	155.890	81%	139.840
Total		1.651.469		2.093.210		2.092.996

- (3) Última diagonal do Triângulo de *Runoff* presente no Apêndice A;
- (4) $E(LR)$, que pode ser calculada através da equação (2.1);
- (5) = (2) × (4);
- (6) Informação extraída da Coluna (4) da Tabela 12;
- (7) = (3) + (5) × (6).

Fonte: Autoria própria.

Dessa forma, ao verificar o valor das reservas de IBNR usando o método CC através da diferença entre os sinistros projetados pelo CC e os sinistros reportados, obtivemos um valor de $2.092.996 - 1.651.469 = 441.527$ euros.

Como apresentado, o cálculo do CC para os sinistros projetados utiliza um índice de sinistralidade esperada constante para todos os anos de ocorrência. Contudo, essa condição foi flexibilizada por [Gluck 1997], desenvolvendo o método *Cape Cod* Generalizado (em inglês, *Generalized Cape Cod*, GCC), como uma forma alternativa de calcular a sinistralidade esperada. Assim, o método atribui maior credibilidade à experiência de perdas em anos que estão próximos uns dos outros usando uma média exponencialmente ponderada, em que o fator de decaimento D pondera a experiência de sinistros observada pelo tempo.

Dessa forma, o índice de sinistralidade esperada utilizado para cada ano de ocorrência i é dado por:

$$E(LR)_i = \frac{\sum_{k=k_0}^K [C_{k,K-k} \times D^{|i-k|}]}{\sum_{k=k_0}^K \left[\frac{\text{Prêmio Total}_k}{CDF_k} \times D^{|i-k|} \right]}. \quad (2.2)$$

O fator de decaimento exponencial é escolhido de maneira arbitrária pelo atuário, em que $0 \leq D \leq 1$, de modo que quanto maior for o valor usado, maior será o peso dada às informações dos outros anos para o cálculo da sinistralidade esperada de um determinado ano. Portanto, o método CC é um caso específico do GCC, ao utilizar $D = 1$, dando o mesmo peso para as informações de todos os anos e obtendo um valor único para todo o período de análise.

De forma análoga, o método CL é um caso específico do método GCC, quando $D = 0$. Neste caso, é utilizada a aproximação pelo limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^0 = 1$, de modo que a componente $D^{|i-k|}$ se torna uma função indicadora de $k = i$. Assim, $E(LR)_i = \frac{\text{Sinistros Reportados}_i}{\text{Prêmio de Esgotamento}_i}$, conforme a Coluna (6) da Tabela 14. Com isso, utilizando essa sinistralidade esperada, o método GCC retorna uma projeção de sinistros igual à do método CL, apresentado na Coluna (5) da Tabela 10, a menos de aproximações numéricas.

No exemplo de projeção de sinistros finais usando o método GCC, vamos empregar um fator de decaimento exponencial de 0,75, resultando na criação Tabela 16.

Dessa maneira, ao verificar o valor das reservas de IBNR usando o método GCC considerando um fator de decaimento exponencial de 0,75, através da diferença entre os sinistros projetados pelo GCC e os sinistros reportados, obtivemos um valor de $2.025.247 - 1.651.469 = 373.778$ euros.

Tabela 16 – Projeção dos Sinistros Finais - GCC ($D = 0,75$).

Ano (1)	Prêmio Total (2)	Sinistros Reportados (3)	CDF (4)	Sinistr. Esperada (5)	Sinistros Projetados (6)	Porc. Não Report. (7)	GCC: Sin. Projetados (8)
1996	68.000	90.916	1,00	146,89%	99.882	0%	90.916
1997	66.000	105.798	1,00	148,19%	97.803	0%	105.798
1998	69.000	127.512	1,02	148,11%	102.196	2%	129.516
1999	85.000	176.290	1,05	145,07%	123.306	5%	182.162
2000	105.000	143.220	1,07	136,91%	143.761	7%	152.625
2001	136.000	193.936	1,09	129,44%	176.041	8%	208.472
2002	180.000	181.260	1,11	120,21%	216.383	10%	202.703
2003	182.000	153.426	1,15	112,63%	204.978	13%	180.162
2004	132.000	90.156	1,18	106,83%	141.020	15%	111.668
2005	85.000	61.200	1,18	103,08%	87.621	15%	74.566
2006	116.000	86.768	1,22	100,11%	116.131	18%	107.710
2007	134.000	81.874	1,35	97,60%	130.783	26%	115.781
2008	136.000	89.760	1,53	96,40%	131.111	35%	135.177
2009	134.000	55.074	1,93	94,16%	126.172	48%	115.872
2010	131.000	14.279	5,14	92,73%	121.473	81%	112.119
Total		1.651.469			2.018.662		2.025.247

(3) Última diagonal do Triângulo de *Runoff* presente no Apêndice A;

(4) Informação extraída da Tabela 9;

(5) $E(LR)_i$, calculada através da equação (2.2);

(6) = (2) \times (5);

(7) Informação extraída da Coluna (4) da Tabela 12;

(8) = (3) + (6) \times (7).

Fonte: Autoria própria.

Uma vantagem dos métodos BF e CC, tanto o tradicional quanto o generalizado, é que as flutuações aleatórias no início de um ano de acidente não distorcem significativamente as projeções. Por exemplo, se forem comunicados vários sinistros grandes e inesperados para um ano de acidente, então a técnica de desenvolvimento de sinistros comunicados pode produzir estimativas de sinistros finais excessivamente conservadoras. Esta situação, no entanto, não distorce seriamente as estimativas obtidas pelas técnicas BF e CC.

Todavia, tanto no método BF quanto no método CC, têm-se um fator crítico que influencia essas flutuações, que é a intensidade com que os sinistros reportados em um determinado ano afetam a estimativa dos sinistros ainda não reportados para esse mesmo ano ou para os anos anteriores. Isso ocorre porque os sinistros projetados dependem dos sinistros reportados até o ano de análise k , exigindo um volume suficiente grande de sinistros comunicados para obter uma estimativa confiável dos sinistros projetados.

A principal utilização do método BF e CC por parte dos atuários são para os ramos de seguros de cauda longa, particularmente para os anos mais imaturos, devido à natureza altamente alavancada dos fatores de desenvolvimento de sinistros para esses ramos.

3 Algoritmo para Seleção do Método

Há diversas metodologias que podem ser usadas para o cálculo de reservas de IBNR, como as apresentadas na Seção 2.2. Além disso, muitas dessas metodologias incluem adaptações e ajustes menores, gerando inúmeras novas técnicas de estimação de reserva. No entanto, não existe uma única metodologia que será adequada para todas as situações. Assim, cabe ao atuário decidir qual técnica gera a melhor estimação possível para a situação de interesse em particular. Essa escolha é normalmente feita a partir da experiência do atuário e da empresa, juntamente com uma heurística bem fundamentada.

Adicionalmente, elementos de *Machine Learning* podem ser usados para selecionar a metodologia para o cálculo das reservas e para fazer as escolhas apropriadas em relação aos ajustes menores desses modelos.

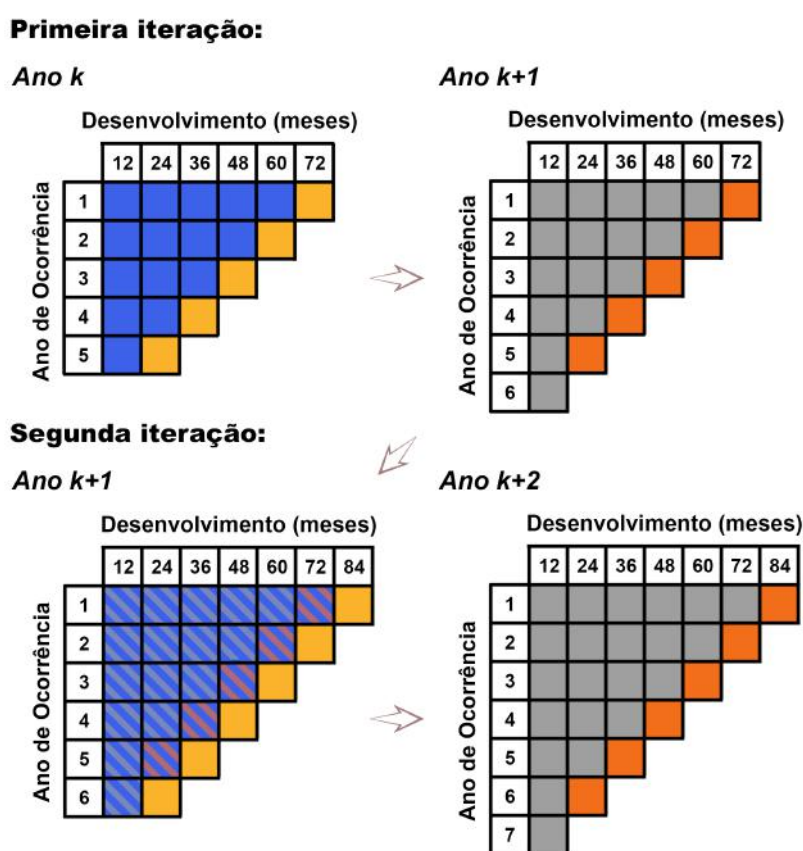
Como apresentado por [Izbicki e Santos 2020], para utilização das técnicas de *Machine Learning* será necessária a introdução de hiperparâmetros, que são características do modelo cujo valor não pode ser estimado a partir dos dados e não possuem valores ideais claros. *Grid search* ou “busca em grade” é uma das principais técnicas de otimização de hiperparâmetros e que consiste em realizar uma busca exaustiva - ou seja, testando todas as combinações possíveis - em um conjunto de valores para os hiperparâmetros (grade), a fim de determinar qual a combinação de valores que gera o melhor modelo, segundo alguma métrica (*scoring*). A técnica funciona muito bem, mas pode ser computacionalmente custosa quando se tem um número muito grande de hiperparâmetros ou uma grade com muitos valores.

Normalmente o *grid search* é acompanhado por validação cruzada (*k-fold cross validation*), na qual são feitas diversas divisões do conjunto de dados em treinamento e teste, de modo que o modelo é treinado em cada divisão, a fim de evitar sobreajuste e atingir uma maior precisão. Esse fenômeno ocorre quando um modelo estatístico se ajusta muito bem ao conjunto de dados anteriormente observado, mas se mostra ineficaz para prever novos resultados. No entanto, pela natureza do problema, o conjunto de treinamento será composto pelos dados do triângulo nos primeiros anos e o conjunto de teste serão os novos dados dos anos mais recentes. Além disso, para este caso, o sobreajuste não é um problema uma vez que os dados que serão usados para estimar as reservas em um ano novo incluem os dados usados nas estimações em anos anteriores.

3.1 Construção do Algoritmo

A partir de um triângulo inicial de tamanho razoável (o estudo de caso, apresentado no Capítulo 4, é inicializado com um triângulo com 5 anos), estima-se a diagonal seguinte do triângulo pelas diversas metodologias e suas variações, de forma iterativa a cada ano k , comparando em seguida com a informação verdadeira obtida no ano $k + 1$. Isto é, calcula-se $(\hat{C}_{i,j^*}^k)_i^M$, com $j^* = k - i + 1$, para cada metodologia ou variação M , resultando em um vetor de tamanho k , e compara-se com $(C_{i,j^*}^{k+1})_i$. A Figura 1 ilustra as primeiras iterações.

Figura 1 – Primeiras Iterações do Algoritmo



A partir das informações do triângulo (azul) em um ano k , tenta-se prever a próxima diagonal do triângulo (amarelo). No ano $k+1$, compara-se esta estimativa feita com os valores realizados (laranja). O processo se repete, estimando a próxima diagonal do triângulo no ano $k+1$ e comparando com o realizado no ano $k+2$. Note que os dados usados para validar uma iteração são incluídos na estimativa feita na iteração seguinte.

Fonte: Autoria própria.

Pensando no campo de estudos de regressão - como o *Machine Learning* - pode-se visualizar os dados do triângulo que serão usados para fazer as estimativas (que aparecem em azul na Figura 1) como as variáveis explicativas e as informações consolidadas no ano seguinte para validar as estimativas feitas (que aparecem em laranja na Figura 1) como as variáveis resposta.

A ideia do algoritmo é fazer um treinamento manual a partir dos dados dos primeiros anos, observando a média da métrica escolhida a fim de definir qual método que melhor se ajusta aos dados. Também é importante verificar o comportamento da métrica ao longo dos anos a fim de garantir a consistência do método. A partir do método selecionado, é feita a verificação de que há um bom ajuste nos anos recentes. Perceba que a cada ano para o qual a reserva é estimada, a informação pode ser incluída na avaliação de qual método melhor se ajusta. Do mesmo jeito, informações mais antigas podem ser desconsideradas, para ignorar informações obsoletas uma vez que o comportamento do desenvolvimento de avisos pode mudar ao decorrer do tempo.

Assim, será escolhida a melhor combinação de hiperparâmetros para cada metodologia; e então será escolhida a melhor metodologia. O algoritmo foi feito em *python* com auxílio da biblioteca *chainladder*, e é apresentado no Apêndice B, bem como a base de dados está presente no Apêndice C, a qual tem o nome de Tabela de Valores, pois assim foi nomeado o arquivo .csv utilizado no código em *python*. Detalhes sobre essa biblioteca podem ser encontrados em [Bogaardt, Hsu e et. al. 2023].

3.2 Hiperparâmetros

O pacote *chainladder* foi elaborado para suprir necessidades atuariais no contexto de reservas sem a necessidade de softwares caros ou complicados, com sintaxe semelhante a de pacotes populares de *python*. O pacote inclui diversos métodos para cálculo de reservas, dentre os quais CL, BF e GCC, bem como a seleção de parâmetros para os ajustes menores desses métodos.

O método CL é definido pela classe `Chainladder()`, e não possui nenhum hiperparâmetro, sendo usado apenas o modelo CL básico.

Para os métodos BF e GCC, serão usados três hiperparâmetros, segundo a Tabela 17 e a Tabela 18 respectivamente.

Tabela 17 – Hiperparâmetros do Método BF.

Hiperparâmetro		valor <i>default</i>	grade
<code>apriori</code>	argumento de <code>BornhuetterFerguson()</code>	1	{0,40; 0,43; ...; 0,67; 0,70; 1,00}
<code>apriori_sigma</code>	argumento de <code>BornhuetterFerguson()</code>	0	{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,03}
<code>sample_weight</code>	argumento de <code>BornhuetterFerguson().fit()</code>	-	{"Premio"; "Exposto"}

Fonte: Autoria própria.

apriori: Sinistralidade a priori da carteira. Assumindo que a sinistralidade comumente

fica entre 40% e 70%, a grade de busca será composta por esse intervalo, com espaçamento de 3%, de modo a manter a grade relativamente pequena. Se o parâmetro `sample_weight` incorporar uma mensuração a priori, o valor default de 1 pode ser suficiente. Assim a grade será {0,40; 0,43; 0,46; 0,49; 0,52; 0,55; 0,58; 0,61; 0,64; 0,67; 0,70; 1,0}, resultando numa grade de tamanho 12.

apriori_sigma: Desvio padrão para a sinistralidade a priori. O parâmetro permite certa flexibilidade ao ajuste do modelo. Assim a grade será {0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,03}, com tamanho 5. Perceba que este parâmetro incorpora aleatoriedade ao método, assim, ao utilizar valores diferentes de 0, execuções diferentes podem gerar resultados levemente diferentes.

sample_weight: Uma medida de proporcionalidade entre os anos. Em geral, isso é dado pelo prêmio ou pelos expostos. Estes valores devem estar inclusos na base de dados, assim como os valores do triângulo, e serão chamados pelo nome que recebem na base de dados (uma *string*). Assim a grade será {"Premio", "Exposto"}, com tamanho 2.

Tabela 18 – Hiperparâmetros do Método GCC.

Hiperparâmetro		valor <i>default</i>	grade
trend	argumento de CapeCod()	0	{0; 0,002; 0,005; 0,01; 0,05}
decay	argumento de CapeCod()	1	{0,1; 0,2; 0,3; ...; 0,9; 1,0}
sample_weight	argumento de CapeCod().fit()	-	{"Premio"; "Exposto"}

Fonte: Autoria própria.

trend: Tendência assumida pelo eixo do ano de ocorrência, para refletir impactos inflacionários na priori. Os valores para este parâmetro são usualmente relativamente pequenos. Assim, a grade será {0; 0,002; 0,005; 0,01; 0,05}, com tamanho 5.

decay: Fator de decaimento exponencial do método GCC. Conforme este parâmetro se aproxima do valor *default* 1, o resultado se aproxima do CC tradicional, e conforme se aproxima de 0, o resultado se aproxima do CL. Com este parâmetro igual a 0, o método gera a mesma estimativa que o CL, independente dos demais parâmetros, e com isso esse valor não será incluído na grade. Utilizaremos incrementos de 10%, mantendo a grade relativamente pequena. Assim a grade será {0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0}, com tamanho 10.

sample_weight: Possui mesma interpretação e mesma grade que no BF.

3.3 Métricas (*scoring*)

Na avaliação das reservas, é essencial comparar os resultados obtidos com as estimativas feitas previamente. Sendo assim, a utilização de métricas para a avaliação de tal comparação é crucial para a compreensão das reservas pela entidade de seguros, pois oferece uma perspectiva crítica da eficácia das estimativas iniciais. Essa análise auxilia na gestão de riscos e influencia nas decisões estratégicas.

Portanto, durante o estudo de caso, serão usados algumas métricas com o intuito de avaliar o melhor método para obter estimativas de IBNR.

3.3.1 Acontecido versus Esperado

O termo Acontecido versus Esperado (em inglês, *Actual vs Expected*), AvE , calcula a diferença entre a experiência real dos sinistros e o resultado esperado conforme estimado anteriormente, com base nas suposições do exercício de reserva mais recente. Isto é, seja $\hat{C}_{i,j}$ o valor estimado para ocorrência do ano i e desenvolvimento no ano j e $C_{i,j}$ o valor realizado para este termo, temos que o resultado $AvE_{i,j}$ é:

$$AvE_{i,j} = C_{i,j} - \hat{C}_{i,j}.$$

Em seu artigo, [Diffey et al. 2022] exemplificam de maneira ampla os usos do AvE como, por exemplo, servindo de análise se as premissas de reserva adotadas devem ser contestadas quando a experiência real for abaixo do esperado, ou se as mudanças nas premissas de reserva reduziram excessivamente o valor estimado, ou não conseguiram aumentar o valor estimado de acordo com a experiência prévia. Assim, o AvE indica se houve uma super ou uma subestimação - a depender do sinal -, sendo um mensurador de eficácia do método de constituição das reservas do IBNR, de modo que quanto mais próxima de zero for essa medida, mais precisa será a estimativa. Este processo é uma análise antecipada frequentemente empregada pelos atuários como diagnóstico para ajustar as reservas de IBNR para o próximo ano civil.

3.3.2 Raiz do Erro Quadrático Médio

Conforme apresentado por [Filho 2023], a Raiz do Erro Quadrático Médio (em inglês, *Root Mean Squared Error*), $RMSE$ é uma métrica amplamente reconhecida para avaliar a precisão de modelos de previsão. No contexto deste trabalho, o $RMSE$ desempenha um papel crucial na avaliação do desempenho dos modelos de previsão utilizados para estimar o IBNR dado que representa o desvio médio que as provisões têm em relação aos valores que foram observados. O $RMSE$ é usualmente calculado pela seguinte fórmula:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2},$$

em que y_i representa os valores observados - neste caso dado por C_{i,j^*} , com $j^* = k - i + 1$ -, \hat{y}_i são os valores previstos pelo modelo - neste caso dado por \hat{C}_{i,j^*} - e n é o número total de observações. Assim, para esta aplicação, podemos escrever:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=k_0}^k AvE_{i,j^*}^2}.$$

Este cálculo fornece uma medida da dispersão dos erros de previsão e, consequentemente, da precisão geral do modelo em relação aos dados observados; e portanto, o objetivo é minimizar este valor. Além disso, por ser ponderado pelo número de observações - no caso, o tamanho da diagonal, sendo $n = k - k_0 + 1$ -, o $RMSE$ possibilita comparação entre grupos de tamanhos diferentes.

3.3.3 Scoring do AvE

O termo AvE_{score} , conforme proposto por [Balona e Richman 2020], será usado para representar uma variação do $RMSE$, na qual os erros quadráticos são ponderados de forma proporcional aos valores consolidados de sinistros avisados em cada parcela, enquanto no $RMSE$ clássico tal ponderação é dada de forma uniforme. Assim, a métrica é dada pela seguinte fórmula:

$$AvE_{score} = \sqrt{\frac{\sum_{i=k_0}^k C_{i,j^*} \times AvE_{i,j^*}^2}{\sum_{i=k_0}^k C_{i,j^*}}}$$

3.3.4 Erro Quadrático do Total (ponderado)

Caso o atuário esteja mais interessado na reserva total para o ano seguinte, isto é, $\sum_{i=k_0}^k C_{i,j^*}$, ao invés de cada valor da diagonal seguinte pontualmente, uma métrica possível é dada pela distância quadrática entre o previsto para esse total e o realizado, seguindo a lógica de penalizar grandes diferenças mais que pequenas diferenças, ou seja, $\left(\sum_{i=k_0}^k \hat{C}_{i,j^*}^k - \sum_{i=k_0}^k C_{i,j^*}^{k+1} \right)^2$.

No entanto, essa métrica não permite comparação entre diferentes anos uma vez que a cada ano a diagonal a ser prevista aumenta de tamanho e o erro da soma do total tende a aumentar. Como alternativa, podemos pensar no erro da média da diagonal, dando origem à métrica que será chamada de Erro Quadrático do Total (ponderado), cuja expressão é dada por:

$$EQ_t = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=k_0}^k \hat{C}_{i,j^*}^k - \sum_{i=k_0}^k C_{i,j^*}^{k+1} \right)^2,$$

em que $n = k - k_0 + 1$ é o tamanho da diagonal.

Ao utilizar o EQ_t , o atuário aceita que erros de superestimações e de subestimações para diferentes anos de ocorrência se cancelem. Ainda, se dois anos de avaliação tiverem em média o mesmo erro, o resultado do EQ_t será o mesmo.

3.4 Etapas do Algoritmo

Com isso, podemos estruturar o algoritmo desenvolvido neste capítulo através dos seguintes passos:

1. Definir as metodologias a serem estudadas. Neste trabalho são usadas CL, BF e GCC, apresentadas na Seção 2.2;
2. Identificar os hiperparâmetros das metodologias escolhidas e montar uma grade de valores razoáveis para cada um desses hiperparâmetros, como feito na Seção 3.2;
3. Selecionar uma métrica numérica para avaliar o desempenho dos ajustes. Observamos os resultados a partir de três métricas, $RMSE$, AvE_{score} e EQ_t , apresentadas na Seção 3.3;
4. Para cada ano considerado a partir de um triângulo inicial, observar o resultado da métrica de interesse para a previsão feita a partir de cada combinação de hiperparâmetros de cada metodologia estudada, conforme ilustrado na Figura 1;
5. Para cada metodologia, selecionar a combinação de hiperparâmetros que gera, na média dos anos considerados, o melhor resultado para a métrica de interesse; verificando a consistência da seleção, isto é, certificando de que não há nenhuma oscilação anormal no comportamento da métrica ao longo dos anos;
6. Comparar as metodologias utilizando a melhor combinação de hiperparâmetros para cada método, para definir a melhor metodologia geral de forma análoga ao feito no passo anterior: selecionar a metodologia que gera, em média, o melhor resultado para a métrica de interesse, verificando a consistência da seleção frente aos demais métodos.

4 Estudo de Caso

Neste capítulo, apresentamos um estudo de caso da aplicação do algoritmo desenvolvido no Capítulo 3 a um triângulo de reservas de grande porte, usando cada um dos métodos CL, BF e GCC. Para esse estudo, usamos o triângulo de sinistros de automóveis de contratos automáticos não proporcionais e facultativos da resseguradora SCOR presente no artigo [SCOR 2010]. Aqui foram considerados os mesmos ajustes nos dados que já foram explicados nas ilustrações dos métodos que foram apresentados na Seção 2.1.1. Sendo assim, temos os prêmios emitidos de acordo com a Tabela 19.

Tabela 19 – Prêmio Emitido - Carteira de Automóveis SCOR.

Ano de Subscrição	Prêmio Emitido
1996	68.000
1997	66.000
1998	69.000
1999	85.000
2000	105.000
2001	136.000
2002	180.000
2003	182.000
2004	132.000
2005	85.000
2006	116.000
2007	134.000
2008	136.000
2009	134.000
2010	131.000

Fonte: Autoria própria.

Conforme descrito na Seção 2.1.1, o triângulo contém a experiência de desenvolvimento do acumulado dos sinistros reportados para os anos de ocorrência de 1996 a 2010. Existem quinze diagonais no triângulo com datas de avaliação anual, de 31 de dezembro de 1996 a 31 de dezembro de 2010. A tabela é encontrada no Apêndice A.

Além dos dados sobre sinistros incorridos e prêmios, necessários para a aplicação do algoritmo desenvolvido no Capítulo 3, é preciso incluir a quantidade de riscos expostos por ano de ocorrência da carteira nos hiperparâmetros do BF e GCC. No entanto, a base de dados atual não dispõe dessa informação sobre os riscos expostos. Dessa forma, para o propósito deste trabalho, será realizada uma suposição para incorporar essa informação.

Essa suposição consiste em estabelecer inicialmente um prêmio médio para os riscos segurados, que é definido como $\frac{\text{Prêmio Total}}{\text{Exposto}}$. Assim, podemos reescrever em função do

número de expostos como $\text{Exposto} = \frac{\text{Prêmio Total}}{\text{Prêmio Médio}}$. Para isso, será assumido que os segurados arcaram em média com 120 euros para ter a cobertura do seguro no primeiro ano dos dados (1996) - Note que esse valor é arbitrário e não necessariamente precisa ser verossímil com a realidade, pois está sendo tratada apenas como uma medida de proporcionalidade -. Posteriormente, o prêmio médio será recalculado anualmente a partir da inflação do euro no ano anterior, extraída do [Trading Economics]. Por exemplo, para estimarmos o número de expostos para o ano de 2004, usaremos o prêmio médio do ano anterior, 2003, igual a 135,81 euros e a inflação do ano anterior, de 1,9%; e fazemos a multiplicação entre os termos, resultando em um prêmio médio de 138,40 para o referido ano. Depois, ao dividir pelo prêmio total de 2004, de 132 mil euros, obtemos o total de 954 riscos expostos em 2004. Esse cálculo é feito para todos os anos, gerando a Tabela 20.

Tabela 20 – Exposto Simulado - Carteira de Automóveis SCOR.

Ano	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Prêmio Total (Mil)	68	66	69	85	105	132	180	182
Inflação	1,9%	1,4%	0,8%	1,6%	2,5%	2,0%	2,3%	1,9%
Prêmio Médio	120,00	122,28	123,99	124,98	126,98	130,16	132,76	135,81
Exposto	567	540	556	680	827	1045	1356	1340
Ano	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	
Prêmio Total (Mil)	132	85	116	134	136	134	131	
Inflação	2,2%	2,3%	2,0%	3,1%	1,6%	0,9%	-	
Prêmio Médio	138,40	141,44	144,69	147,59	152,16	154,60	155,99	
Exposto	954	601	802	908	894	867	840	

Fonte: Autoria própria.

Ainda, será assumido por simplicidade, que não há reavaliação dos valores passados já incluídos no triângulo.

Para todos os métodos, a aplicação será inicializada a partir do triângulo com 5 anos de informação, conforme mencionado na Seção 3.1. Em seguida, os 8 anos posteriores, isto é, os triângulos de 2000 a 2007 (sendo validados pelas informações de 2001 a 2008), serão usados para o treino controlado do modelo a fim de definir a melhor combinação de hiperparâmetros para os métodos BF e GCC. Por fim, será definido o melhor ajuste entre o CL, o melhor BF e o melhor GCC. Essas escolhas serão feitas conforme descrito na Seção 3.4, com base na média de cada uma das métricas apresentadas na Seção 3.3 no decorrer desses 8 anos. Por fim, os 2 anos seguintes (2008 e 2009, validados pelas informações de 2009 e 2010 respectivamente) serão utilizados para verificar que as escolhas feitas previamente, tanto para a escolha da melhor versão de cada método quanto para o melhor método em geral, foram apropriadas - não necessariamente a melhor opção, mas uma dentre as melhores. A Figura 2 ilustra essa divisão dos dados.

Figura 2 – Divisão dos Dados da SCOR

	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
1996	4.556	29.580	48.212	58.140	65.484	67.660	70.516	76.568	79.424	84.582	89.692	88.468	88.672	90.984	90.916
1997	11.088	37.752	55.836	64.482	69.630	75.306	84.810	88.638	90.684	95.898	96.954	99.726	104.148	105.798	
1998	20.424	62.445	68.586	80.178	89.079	104.052	107.847	109.227	115.782	117.645	120.267	122.199	127.512		
1999	16.405	86.785	105.060	122.145	142.545	148.410	153.595	159.630	161.840	169.830	172.975	176.290			
2000	17.955	57.855	79.065	110.565	119.175	126.945	136.290	138.180	140.385	140.385	143.220				
2001	20.400	74.392	111.520	131.648	154.360	168.232	176.800	182.376	189.720	193.936					
2002	33.300	91.620	128.700	149.760	162.720	164.700	164.700	173.880	181.260						
2003	27.482	96.460	122.850	140.868	145.782	148.694	151.424	153.426							
2004	19.536	61.116	80.784	87.648	90.948	92.268	90.156								
2005	14.195	36.125	42.755	48.195	56.950	61.200									
2006	19.140	53.592	66.236	76.212	86.768										
2007	22.780	54.270	72.762	81.874											
2008	26.248	73.576	89.760												
2009	19.564	55.074													
2010	14.279														

A partir de um triângulo inicial (azul) a aplicação é inicializada. Os 8 anos (ou diagonais) seguintes (laranja) são usadas na execução do algoritmo para apontar a escolha do método. Os últimos 2 anos (vermelho) são reservados para demonstrar a qualidade preditiva do algoritmo. Os dados em laranja possuem a interpretação de conjunto de treino, e os dados em vermelho de conjunto de teste.

Fonte: Autoria própria.

4.1 Chain Ladder

Conforme explicado na Seção 3.2, o método CL no contexto desse estudo serve como referência de modelo base e não possui parâmetros para serem escolhidos, de modo a gerar uma estimativa única e, conseqüentemente, um único valor para cada métrica. Dessa forma, a Tabela 21 nos mostra os valores das métricas para tal metodologia.

Tabela 21 – Resultados do Método CL.

Modelo	Métrica	Resultado
CL	$RMSE$	7.640,74
CL	AvE_{score}	7.253,82
CL	EQ_t	14.866.550,65

Fonte: Autoria própria.

4.2 Bornhuetter-Ferguson

Conforme apresentado na Seção 3.2, o método BF usa 3 hiperparâmetros para obtermos as melhores estimativas para a reserva de IBNR segundo as nossas métricas de interesse: o parâmetro *apriori*, que representa uma sinistralidade a priori assumida para carteira, *apriori_sigma*, que caracteriza o desvio padrão para essa sinistralidade a priori, e

$sample_weight$, que caracteriza uma medida de proporcionalidade entre os anos. A Tabela 17 aponta as $12 \times 5 \times 2 = 120$ combinações de parâmetros que foram usadas.

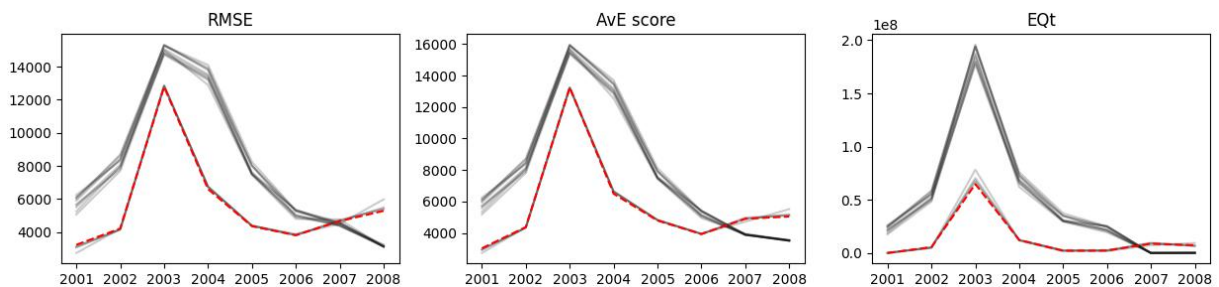
Tabela 22 – Melhores Hiperparâmetros Encontrados para o Método BF.

Parâmetro	Minimizar $RMSE$	Minimizar AvE_{score}	Minimizar EQ_t
apriori	1	1	1
apriori_sigma	0,02	0,02	0,01
sample_weight	"Premio"	"Premio"	"Premio"
Resultado	5.613,63	5.726,13	11.662.251,95

Fonte: Autoria própria.

A Tabela 22 apresenta a combinação de hiperparâmetros que minimizam cada uma das métricas apresentadas na Seção 3.3. Como mencionado na Seção 3.2, também é importante verificar o comportamento do método segundo o resultado das métricas a cada ano, a fim de garantir que o método seja consistente, o que pode ser feito de maneira gráfica. Analisando a Figura 3, averiguamos que de fato as combinações de hiperparâmetros escolhidas geram um método consistente, ou seja, que não oscila muito quando comparado com as demais combinações de hiperparâmetros capazes de gerar estimativas que levam a resultados pequenos para as métricas, indicando que no quesito consistência não há motivo para preferir outra opção.

Figura 3 – Comparações das Métricas para as Combinações do Método BF



Gráficos para comparação entre as 15 melhores combinações de parâmetros para o método BF segundo diferentes métricas. O resultado para a combinação escolhida é destacado pela linha tracejada em vermelho. O eixo horizontal indica o ano para o qual foram feitas as previsões e o eixo vertical representa o valor calculado da métrica para cada um desses anos. Note que o eixo vertical do gráfico para o EQ_t está na escala de 10^8 .

Fonte: Autoria própria.

É interessante observar na Figura 3 que, se nos pautarmos apenas nos dois últimos anos utilizados (as previsões para 2007 e 2008), outra combinação de hiperparâmetros seria apontada como a melhor. Contudo, analisando um horizonte de tempo maior, nota-se que a seleção feita pelo algoritmo é historicamente mais acertada. Isso ressalta a importância de analisar o histórico da carteira.

O objetivo da otimização na escolha das combinações, feita através do algoritmo desenvolvido no Capítulo 3, é tentar determinar bons métodos para a estimação de reservas futuras. Assim, foi utilizado o resultado desenvolvido pelo algoritmo, a partir das informações dos 8 anos que foram usados para determinar a melhor versão do método BF, para prever as reservas para os sinistros comunicados em 2009 e 2010. Conforme evidenciado na Tabela 23, usamos um método dentre os melhores possíveis - mensurando pela capacidade de minimizar a média das métricas nesses dois anos -. Perceba que, para todas as métricas, a combinação ideal é próxima da sugerida pelo algoritmo, diferindo apenas no parâmetro que, como mencionado na Seção 3.2, incorpora aleatoriedade ao método.

Tabela 23 – Ranking dos Melhores Parâmetros Encontrados para o Método BF, quando aplicados nos dados de teste.

Combinação	Métrica	Grade	Resultado	Ranking
Melhor Combinação Algoritmo	$RMSE$	("Premio"; 1; 0,02)	3.336,05	4 de 120
Melhor Combinação Real	$RMSE$	("Premio"; 1; 0,03)	3.255,93	1 de 120
Melhor Combinação Algoritmo	AvE_{score}	("Premio"; 1; 0,02)	3.232,48	4 de 120
Melhor Combinação Real	AvE_{score}	("Premio"; 1; 0,03)	3.184,14	1 de 120
Melhor Combinação Algoritmo	EQ_t	("Premio"; 1; 0,01)	543.727,44	5 de 120
Melhor Combinação Real	EQ_t	("Premio"; 1; 0,03)	329.954,12	1 de 120

Fonte: Autoria própria.

4.3 *Capex Cod* Generalizado

Conforme apresentado na Seção 3.2, o método GCC usa 3 hiperparâmetros para obtermos as melhores estimativas para as nossas métricas de interesse: o parâmetro *trend*, que representa uma tendência assumida para refletir impactos inflacionários na priori, *decay*, que corresponde à seleção de um fator de decaimento exponencial, e *sample_weight*, que caracteriza uma medida de proporcionalidade entre os anos. A Tabela 18 aponta as $5 \times 10 \times 2 = 100$ combinações de parâmetros foram usadas.

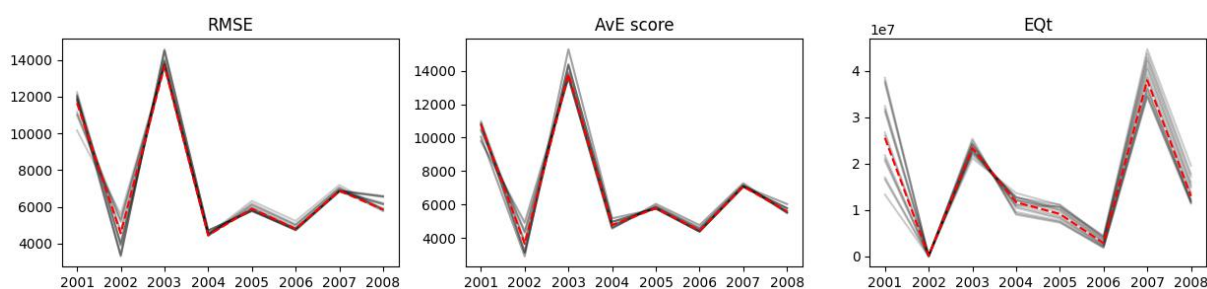
Tabela 24 – Melhores Hiperparâmetros Encontrados para o Método GCC.

Parâmetro	Minimizar $RMSE$	Minimizar AvE_{score}	Minimizar EQ_t
trend	0	0	0
decay	0,4	0,3	0,7
sample_weight	"Exposto"	"Exposto"	"Exposto"
Resultado	7.220,00	6.988,64	15.454.593,11

Fonte: Autoria própria.

A Tabela 24 apresenta a combinação de hiperparâmetros que minimizam cada uma das métricas que foram utilizadas. Analisando o comportamento das métricas para prever as reservas para sinistros comunicados nos 8 anos que foram usados para treinamento (Figura 4), vemos que as escolhas para parâmetros geram um método também bastante consistente.

Figura 4 – Comparações das Métricas para as Combinações do Método GCC



Gráficos para comparação entre as 15 melhores combinações de parâmetros para o método GCC segundo diferentes métricas. O resultado para a combinação escolhida é destacado pela linha tracejada em vermelho. O eixo horizontal indica o ano para o qual foram feitas as previsões e o eixo vertical representa o valor calculado da métrica para cada um desses anos. Note que o eixo vertical do gráfico para o EQ_t está na escala de 10^7 .

Fonte: Autoria própria.

Assim como feito no BF, podemos verificar a qualidade do modelo sugerido pelo algoritmo para prever o futuro. Mensurado pela média das métricas avaliadas considerando a estimativa das reservas para os sinistros comunicados em 2009 e 2010, conforme evidenciado na Tabela 25, de fato o algoritmo identifica um dos melhores métodos, capaz de gerar uma estimativa que leva a valores pequenos das métricas observadas. Inclusive, segundo o EQ_t , o algoritmo foi capaz de encontrar a melhor combinação para os dados futuros. Ainda, tanto para o $RMSE$ quanto para o AvE_{score} , a combinação ideal para esses dois anos difere da sugerida pelo algoritmo apenas um pouco em apenas um dos parâmetros.

Tabela 25 – Ranking dos Melhores Parâmetros Encontrados para o Método GCC, quando aplicados nos dados de teste.

Combinação	Métrica	Grade	Resultado	Ranking
Melhor Combinação Algoritmo	$RMSE$	(Exposto; 0; 0,4)	3.483,11	3 de 100
Melhor Combinação Real	$RMSE$	(Exposto; 0; 0,5)	3.478,60	1 de 100
Melhor Combinação Algoritmo	AvE_{score}	(Exposto; 0; 0,3)	3.312,22	7 de 100
Melhor Combinação Real	AvE_{score}	(Exposto; 0; 0,4)	3.297,36	1 de 100
Melhor Combinação Algoritmo	EQ_t	(Exposto; 0; 0,7)	3.312,22	1 de 100

Fonte: Autoria própria.

4.4 Metodologia Recomendada

Finalmente, tendo o CL como metodologia de base e após definir a melhor combinação de hiperparâmetros para o BF e para o GCC, devemos escolher qual destes três métodos será usado. Assim como nas buscas pela otimização da escolha das combinações de hiperparâmetros feitas anteriormente, para a escolha do melhor método nosso foco recai sobre os resultados mais baixos das métricas consideradas. Em outras palavras, o método que gera o menor resultado para as métricas é considerado o ideal. A Tabela 26 recupera o valor médio das métricas nos 8 anos considerados pelo algoritmo e a Figura 5 mostra o desenvolvimento das métricas no decorrer desses anos.

Tabela 26 – Comparação dos Modelos Utilizando Dados de Treino.

Modelo	Métrica	Resultado
CL	$RMSE$	7.640,74
Melhor BF	$RMSE$	5.624,16
Melhor GCC	$RMSE$	7.220,00
CL	AvE_{score}	7.253,82
Melhor BF	AvE_{score}	5.724,45
Melhor GCC	AvE_{score}	6.988,64
CL	EQ_t	14.866.550,65
Melhor BF	EQ_t	12.881.982,23
Melhor GCC	EQ_t	15.454.593,11

Fonte: Autoria própria.

Figura 5 – Comparação Entre os Melhores Modelos de Cada Metodologia

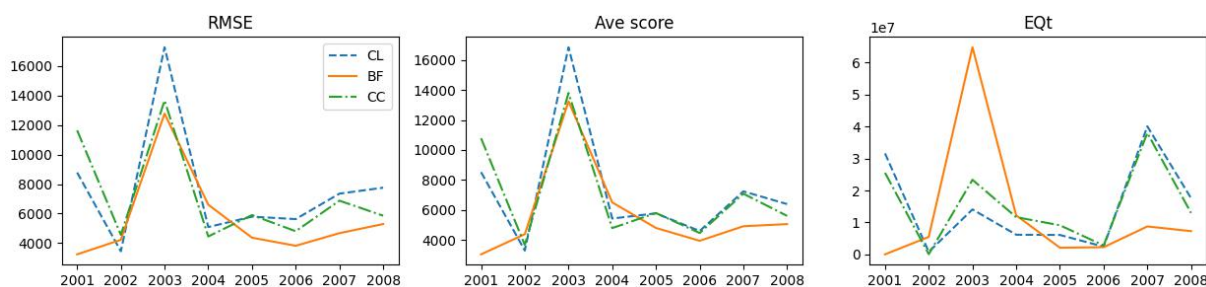


Gráfico para comparação do resultado das métricas de cada ano para os quais foram feitas previsões, entre o CL (azul), o BF escolhido (laranja) e o GCC escolhido (verde). Note que o eixo vertical do gráfico para o EQ_t está na escala de 10^7 .

Fonte: Autoria própria.

Como observado na Tabela 26, o método BF com a melhor combinação de escolhas para os hiperparâmetros obteve a menor pontuação em todas as três métricas nos dados de treino, tornando-se a escolha sugerida de metodologia a ser empregada nesta base de dados relacionada a seguros de automóveis. Ao examinar os gráficos da Figura 5, é fácil perceber

que a linha de cor laranja, representando o método BF, mantém-se, em média, abaixo das demais linhas nos gráficos do $RMSE$ e do AvE_{score} . No gráfico do EQ_t isso não é tão visualmente evidente devido ao pico no ano 2003. Ainda assim, a média da linha laranja permanece abaixo da média das linhas azul e verde, que representam respectivamente o CL e o GCC. (Note que as linhas azul e verde apresentam valores significativamente superiores à laranja em três momentos, nos anos 2001, 2007 e 2008).

Tabela 27 – Comparação dos Modelos Utilizando Dados de Teste.

Modelo	Métrica	Resultado
CL	$RMSE$	4.279,85
BF	RMSE	3.336,05
GCC	$RMSE$	3.483,11
CL	AvE_{score}	3.840,42
BF	AvE_{score}	3.232,48
GCC	AvE_{score}	3.312,22
CL	EQ_t	1.847.497,92
BF	EQ_t	543.727,44
GCC	EQ_t	947.202,67

Fonte: Autoria própria.

A Tabela 27 traz o valor médio das métricas nos 2 anos de teste (2009 e 2010), considerando os modelos que performaram melhor nos dados de treino. Pode-se notar que o método BF novamente apresenta menor pontuação nas três métricas, evidenciando a qualidade da escolha sugerida para a base de dados.

5 Conclusão

Este estudo teve como objetivo principal investigar o conceito de reservas técnicas de IBNR, a importância de estimá-las com precisão e robustez, bem como utilizar elementos de *Machine Learning* para guiar a seleção de um método eficiente para esta estimativa de maneira objetiva. Para isso, fizemos um estudo de três metodologias clássicas, *Chain Ladder*, *Bornhuetter-Ferguson* e *Cape Cod*, juntamente com uma variante deste último método conhecida como *Cape Cod* Generalizado; buscando compreender como esses métodos podem ser aplicados para melhorar a gestão de riscos. Assim, utilizamos dados reais da resseguradora SCOR para a evolução de sinistros acumulados para os seguros de automóveis de contratos automáticos não proporcionais e facultativos por ano de ocorrência, de 1996 a 2010, conforme demonstrado na Seção 2.1.1 e apresentado no Apêndice A.

Dessa maneira, elaboramos um algoritmo baseado em técnicas de *Machine Learning* para a seleção de modelos de reservas de IBNR, através da avaliação do desempenho desses modelos na previsão de desenvolvimento de sinistros. Conforme demonstrado no Capítulo 4, nossa proposta apresentou um desempenho bastante satisfatório ao compararmos o ranking dos modelos selecionados em cada metodologia pelo algoritmo com todas as combinações possíveis de hiperparâmetros para prever os dados futuros. Além disso, na Seção 4.4 entendemos que na comparação entre as metodologias, o método BF, com parâmetros segundo a Tabela 22, apresentou o melhor resultado no geral, conforme evidenciado nas Tabelas 26 e 27, sendo, portanto, o modelo definitivo selecionado para o nosso conjunto de dados.

Dessa forma, concluímos que a classificação dos modelos de reservas com base nos dados históricos de evolução dos sinistros, incorporando elementos de *Machine Learning*, é uma abordagem útil para determinar quais modelos são capazes de prever futuros sinistros com maior precisão. Além disso, nosso algoritmo oferece uma maneira de selecionar a metodologia de cálculo de reservas e os parâmetros desses métodos de forma objetiva, evidenciando que os métodos escolhidos resultam em uma melhor estimativa das reservas IBNR. Essa objetividade pode ser especialmente útil na definição da sinistralidade a priori de perdas para o método BF ou do parâmetro de decaimento para o método GCC, ambos normalmente escolhidos de maneira subjetiva na prática.

Portanto, esta pesquisa contribuiu para o campo atuarial ao fornecer uma análise abrangente dos métodos de cálculo de reserva do IBNR aliado ao *Machine Learning* e suas implicações para a gestão de riscos em entidades de seguros. Nossos resultados destacam a importância de uma abordagem criteriosa e contextualizada na seleção e aplicação desses métodos.

Uma limitação significativa do nosso estudo foi a falta de acesso a dados reais de entidades de seguros brasileiras ou informações de Triângulos de *Runoff* de anos de ocorrência mais recentes. Devido a dificuldade de se obter tais dados, fomos obrigados a basear nossas análises em dados mais antigos de uma resseguradora francesa. Além disso, nossas análises foram restritas a um conjunto específico de métodos de cálculo do IBNR, e outros métodos alternativos podem apresentar resultados diferentes. Desse modo, novos estudos podem se estender a novas metodologias determinísticas de estimação de reserva de IBNR, além do CL, BF e GCC, assim como metodologias estocásticas.

Nossos resultados têm implicações práticas importantes para os profissionais atuariais e gestores de seguros. Destacamos a necessidade de uma abordagem multifacetada e cuidadosa na gestão dos riscos associados ao IBNR, com a escolha e aplicação adequada dos métodos de cálculo sendo crucial para uma gestão eficaz dos recursos financeiros das entidades de seguros.

Referências

- BALONA, C.; RICHMAN, R. The Actuary and IBNR Techniques: A Machine Learning Approach. Joanesburgo, África do Sul, 2020. Disponível em: <https://www.actuaries.org.uk/system/files/field/document/2.%20Ronald%20Richman_Caesar%20Balona_The%20Actuary%20and%20IBNR%20Techniques%20A%20Machine%20Learning%20Approach.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 36.
- BÜHLMANN, H.; STRAUB, E. Estimation of IBNR reserves by the methods chain ladder, Cape Cod and complementary loss ratio. República Tcheca: Não publicado. 1983. Citado na página 26.
- BOGAARDT, J.; HSU, K.; et. al. *chainladder: Actuarial reserving in Python*. 2023. Versão 0.8.16. Disponível em: <<https://chainladder-python.readthedocs.io/en/latest/intro.html>>. Citado na página 33.
- BORNHUETTER, R.; FERGUSON, R. The Actuary and IBNR. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 24.
- CRAMER, H. Mathematical Methods Of Statistics. *Princeton Mathematical Series*, Princeton, Estados Unidos: Princeton University Press, 1922. Citado na página 16.
- DIFFEY, W. et al. *Your reserves may be best estimate, but are they valid?* Cambridge, Inglaterra: British Actuarial Journal, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S1357321721000179>>. Citado na página 35.
- FILHO, M. *RMSE (Raiz Do Erro Quadrático Médio) Em Machine Learning*. 2023. Acessado no dia 29.03.2024. Disponível em: <<https://mariofilho.com/rmse-raiz-do-erro-quadratico-medio-em-machine-learning/>>. Citado na página 35.
- FRIEDLAND, J. *Estimating Unpaid Claims Using Basic Techniques*. 3. ed. Arlington, Estados Unidos: Casualty Actuarial Society, 2010. 84–130 p. Disponível em: <https://www.casact.org/sites/default/files/database/studynotes_friedland_estimating.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 20.
- GLUCK, S. *Balancing Development and Trend in Loss Reserve Analysis*. Arlington, Estados Unidos: Casualty Actuarial Society, 1997. Disponível em: <<https://www.casact.org/abstract/balancing-development-and-trend-loss-reserve-analysis>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 29.
- IZBICKI, R.; SANTOS, T. M. dos. *Aprendizado de máquina: uma abordagem estatística*. 1. ed. São Paulo, Brasil: Câmara Brasileira do Livro, 2020. Disponível em: <<http://www.rizbicki.ufscar.br/ame/>>. Citado na página 31.
- MARTIN, P. *Loss Reserving Chain Ladder Methods Applied To A Small Midwestern Insurance Company*. Tese (Graduação) — North Dakota State University, 2015. Disponível em: <<https://library.ndsu.edu/ir/bitstream/handle/10365/27866/Loss%20Reserving%20Chain%20Ladder%20Methods%20Applied%20to%20a%20Small%20Midwestern%20Insurance%20Company.pdf?sequence=1>>. Citado na página 16.

MERZ M. E WÜTHRICH, M. Modelling the claims development result for solvency purposes. Arlington, Estados Unidos: Casualty Actuarial Society, 2008. Citado na página 10.

PATRICK, G. *Foundations of Casualty Actuarial Science*. 4. ed. One Penn Plaza, 250 West 34th Street, New York, NY 10119: Casualty Actuarial Society, 2001. Citado na página 26.

SCOR. Scor's loss development triangles and reserves as of december 2010. SCOR: Group Actuarial Department, 2010. Disponível em: <https://www.scor.com/sites/default/files/2011_trianglesdisclosure.pdf>. Citado 5 vezes nas páginas 11, 15, 23, 27 e 38.

SUSEP. Circular SUSEP n.º 648. Rio de Janeiro, Brasil, 2021. Disponível em: <<https://www2.susep.gov.br/safe/bnportal/internet/pt-BR/search/50474>>. Citado na página 10.

Trading Economics. Zona do Euro - Taxa de Inflação. Acessado no dia 02.03.2024. Disponível em: <<https://pt.tradingeconomics.com/euro-area/inflation-rate-mom>>. Citado na página 39.

APÊNDICE B – Algoritmo em Python

```

pip install chainladder # Pacote Chainladder

# Bibliotes Importadas
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

import chainladder as cl

from sklearn.metrics import mean_squared_error

print("pandas: " + pd.__version__)
print("numpy: " + np.__version__)
print("chainladder: " + cl.__version__)

```

pandas: 1.5.3

numpy: 1.25.2

chainladder: 0.8.18

```

# Funcoes auxiliares para obter as diagonais a serem comparadas
def diag_prev(triangulo_df:pd.DataFrame, mtd, sample_weight:str,
              iteracao:int):
    """Diagonal seguinte prevista de acordo com determinado metodo (
        olhando o futuro num ano x)"""
    triangulo = cl.Triangle(triangulo_df[triangulo_df['Desenvolvimento'
    ]<=(ano_0 + iteracao)],
        origin="Origem", development="Desenvolvimento", columns="Sinistros
        Incorridos", cumulative=True)
    weighted = cl.Triangle(triangulo_df[triangulo_df['Desenvolvimento']<=(
    ano_0 + iteracao)],
        origin="Origem", development="Desenvolvimento", columns=
        sample_weight, cumulative=True).latest_diagonal
    triangulo_completo = mtd.fit(triangulo, sample_weight=weighted).
        full_triangle.values[0][0]
    return triangulo_completo[:,1:-1][:,:-1].diagonal()

def diag_real(triangulo_df:pd.DataFrame, iteracao:int):
    """Observado sobre a diagonal prevista pela funcao 'diag_prev' (
        olhando o passado no ano x+1)"""
    triangulo = cl.Triangle(triangulo_df[triangulo_df['Desenvolvimento'
    ]<=(ano_0 + iteracao + 1)],

```

```

    origin="Origem", development="Desenvolvimento", columns="Sinistros
    Incorridos", cumulative=True)
return (triangulo.values[0][0])[:-1,:0:-1].diagonal()

# Lendo a Base de Dados
triangulo_df = pd.read_csv("Triangulo_Valores.csv")

# Transformando a Base de Dados em um Triangulo de desenvolvimento
triangulo = cl.Triangle(triangulo_df,
    origin="Origem",
    development="Desenvolvimento",
    columns="Sinistros Incorridos",
    cumulative=True)
triangulo

```

	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
1996	4,556	29,580	48,212	58,140	65,484	67,660	70,516	76,568	79,424	84,592	89,692	88,468	88,672	90,984	90,916
1997	11,088	37,752	55,836	64,482	69,630	75,306	84,810	88,638	90,684	95,898	96,954	99,726	104,148	105,798	
1998	20,424	62,445	68,586	80,178	89,079	104,052	107,847	109,227	115,782	117,645	120,267	122,199	127,512		
1999	16,405	86,785	105,060	122,145	142,545	148,410	153,595	159,630	161,840	169,830	172,975	176,290			
2000	17,955	57,855	79,065	110,565	119,175	126,945	136,290	138,180	140,385	140,385	143,220				
2001	20,400	74,392	111,520	131,648	154,360	168,232	176,800	182,376	189,720	193,936					
2002	33,300	91,620	128,700	149,760	162,720	164,700	164,700	173,880	181,260						
2003	27,482	96,460	122,850	140,868	145,782	148,694	151,424	153,426							
2004	19,536	61,116	80,784	87,648	90,948	92,268	90,156								
2005	14,195	36,125	42,755	48,195	56,950	61,200									
2006	19,140	53,592	66,236	76,212	86,768										
2007	22,780	54,270	72,762	81,874											
2008	26,248	73,576	89,760												
2009	19,564	55,074													
2010	14,279														

```

class CL_Metrics:
    """Aplicacao do algoritmo para o metodo Chain Ladder
    \nParametros\n\nntriangulo_df: pd.DataFrame\n\tTriangulo como dataframe
    , aplicavel a cl.Triangle.\nn_iter: int\n\tNumero de iteracoes,
    comecando em 'ano_0'.\nndigits: int\n\tPrecisao das metricas, em
    casas decimais.
    \nAtributos\n\nmtd: str\n\tNome do metodo (Chain Ladder)\nfull_rmse:
    np.ndarray\n\tRMSE de cada iteracao.\nrmse: float\n\tMedia do RMSE de
    todas iteracoes.\nfull_ave: np.ndarray\n\tAvE score de cada iteracao
    .\nave: float\n\tMedia do AvE score de todas iteracoes.\nfull_eqt: np
    .ndarray\n\tEQt de cada iteracao.\neqt: float\n\tMedia do EQt de
    todas iteracoes."""
    def __init__(self, triangulo_df:pd.DataFrame, n_iter:int=1, ndigits:
    int=3):
        self.mtd = "Chain Ladder"
        rmse,ave,eqt=[],[],[]
        for i in range(n_iter):

```

```

    dr = diag_real(triangulo_df,i); dp = diag_prev(triangulo_df,cl.
Chainladder(),triangulo_df.keys()[-1],i)
    x = mean_squared_error(dr,dp,squared=False); rmse.append(x) # RMSE
    y = mean_squared_error(dr,dp,sample_weight=dr,squared=False); ave.
append(y) # AvEscore
    z = (dr.sum()-dp.sum())**2/len(dr)**2; eqt.append(z) # EQT
    self.full_rmse = np.array(rmse); self.rmse = round(self.full_rmse.
mean(),ndigits)
    self.full_ave = np.array(ave); self.ave = round(self.full_ave.mean()
,ndigits)
    self.full_eqt = np.array(eqt); self.eqt = round(self.full_eqt.mean()
,ndigits)

```

```
class BF_Metrics:
```

```

    """Aplicacao do algoritmo para o metodo Bornhuetter-Ferguson
\nParametros\n\nntriangulo_df: pd.DataFrame\n\n\tTriangulo como dataframe
, aplicavel a cl.Triangle.\nnsample_weight_grid: list\n\n\tGrade para o
parametro sample_weigh de BornhuetterFerguson().fit().\
nBF_apriori_grid: list\n\n\tGrade para o parametro apriori de
BornhuetterFerguson().\nBF_apriori_sigma_grid: list\n\n\tGrade para o
parametro apriori_sigma de BornhuetterFerguson().\nn_iter: int\n\n
\tNumero de iteracoes, comecando em 'ano_0'.\nndigits: int\n\n\tPrecisao
das metricas, em casas decimais.
\nAtributos\n\nmtd: str\n\n\tNome do metodo (Bornhuetter-Ferguson)\ngrid
: tuple\n\n\tTodas combinacoes de hiperparametros consideradas.\
nfull_rmse: np.ndarray\n\n\tRMSE de cada iteracao, de cada combinacao
de hiperparametros.\nrmse: np.ndarray\n\n\tMedia do RMSE de todas
iteracoes, de cada combinacao de hiperparametros.\nfull_ave: np.
ndarray\n\n\tAvE score de cada iteracao, de cada combinacao de
hiperparametros.\nave: np.ndarray\n\n\tMedia do AvE score de todas
iteracoes, de cada combinacao de hiperparametros.\nfull_eqt: np.
ndarray\n\n\tEQt de cada iteracao, de cada combinacao de
hiperparametros.\neqt: np.ndarray\n\n\tMedia do EQt de todas iteracoes,
de cada combinacao de hiperparametros.\nbest_rmse_parameters: tuple\n
\n\tCombinacao de hiperparametros que minimiza o RMSE.\
nbest_rmse_grid_index: int\n\n\tIndice da combinacao de hiperparametros
que minimiza o RMSE.\nbest_ave_parameters: tuple\n\n\tCombinacao de
hiperparametros que minimiza o AvE score.\nbest_ave_grid_index: int\n\n
\tIndice da combinacao de hiperparametros que minimiza o AvE score.\
nbest_eqt_parameters: tuple\n\n\tCombinacao de hiperparametros que
minimiza o EQt.\nbest_eqt_grid_index: int\n\n\tIndice da combinacao de
hiperparametros que minimiza o EQt."""
    def __init__(self, triangulo_df:pd.DataFrame, sample_weight_grid:list,
BF_apriori_grid:list=[1.0], BF_apriori_sigma_grid:list=[0], n_iter:
int=1, ndigits:int=3):
        self.mtd = "Bornhuetter-Ferguson"

```

```

    rmse,ave,eqt=[],[],[]; rmse_score,ave_score,eqt_score=[],[],[];
    full_grid=[]
    for sw in sample_weight_grid:
        for ap in BF_apriori_grid:
            for aps in BF_apriori_sigma_grid:
                rmse_grid,ave_grid,eqt_grid=[],[],[]
                full_grid.append((sw,ap,aps))
                for i in range(n_iter):
                    dr = diag_real(triangulo_df,i); dp = diag_prev(triangulo_df,
                    cl.BornhuetterFerguson(apriori=ap,apriori_sigma=aps),sw,i)
                    x = mean_squared_error(dr,dp,squared=False); rmse_grid.
                    append(x) # RMSE
                    y = mean_squared_error(dr,dp,sample_weight=dr,squared=False)
                    ; ave_grid.append(y) # AvEscore
                    z = (dr.sum()-dp.sum())**2/len(dr)**2; eqt_grid.append(z) #
                    EQT
                    rmse.append(rmse_grid); rmse_score.append(round(np.array(
                    rmse_grid).mean(),ndigits))
                    ave.append(ave_grid); ave_score.append(round(np.array(ave_grid
                    ).mean(),ndigits))
                    eqt.append(eqt_grid); eqt_score.append(round(np.array(eqt_grid
                    ).mean(),ndigits))
                self.grid = tuple(full_grid)
                self.full_rmse = np.array(rmse); self.rmse = np.array(rmse_score)
                self.full_ave = np.array(ave); self.ave = np.array(ave_score)
                self.full_eqt = np.array(eqt); self.eqt = np.array(eqt_score)
                self.best_rmse_grid_index = self.rmse.argmin(); self.
                best_rmse_parameters = self.grid[self.best_rmse_grid_index]
                self.best_ave_grid_index = self.ave.argmin(); self.
                best_ave_parameters = self.grid[self.best_ave_grid_index]
                self.best_eqt_grid_index = self.eqt.argmin(); self.
                best_eqt_parameters = self.grid[self.best_eqt_grid_index]

def rank_position(self, grid_index:int, metric:str):
    """Posicao ranqueada de uma combinacao de hiperparametros segundo
    uma determinada metrica."""
    if metric=="rmse":
        rank = self.rmse.tolist(); rank.sort(); return rank.index(self.
        rmse[grid_index])+1
    if metric=="ave":
        rank = self.ave.tolist(); rank.sort(); return rank.index(self.ave[
        grid_index])+1
    if metric=="eqt":
        rank = self.eqt.tolist(); rank.sort(); return rank.index(self.eqt[
        grid_index])+1
    raise ValueError(f"metric must be 'rmse', 'ave' or 'eqt'. Recived '{
    metric}' instead")

```

```

def ranking(self, metric:str, size:int):
    """Ranking das melhores combinacoes de hiperparametros segundo uma
    determinada metrica."""
    if metric=="rmse": rank1,rank2 = self.rmse.tolist(),self.rmse.tolist
    ()
    elif metric=="ave": rank1,rank2 = self.ave.tolist(),self.ave.tolist
    ()
    elif metric=="eqt": rank1,rank2 = self.eqt.tolist(),self.eqt.tolist
    ()
    else: raise ValueError(f"metric must be 'rmse', 'ave' or 'eqt'.
    Received '{metric}' instead")
    rank1.sort(); ranking = []
    for i in range(size):
        ranking.append([self.grid[rank2.index(rank1[i])],rank1[i]])
    return tuple(ranking)

def plot_ranking(self, size:int, xaxis, metrics:list=["rmse","ave","
    eqt"], color_best:str="r", style_best="-", color_others:str="k",
    alpha_others:float=.2):
    """Grafico(s) das melhores combinacoes de hiperparametros ao longo
    das iteracoes, destacando o resultado da combinacao sugerida."""
    is_rmse = int("rmse" in metrics); is_ave = int("ave" in metrics);
    is_eqt = int("eqt" in metrics)
    plot_space = 100+10*is_rmse+10*is_ave+10*is_eqt; plt.figure(figsize
    =(5*(is_rmse+is_ave+is_eqt), 3))
    if is_rmse:
        ax = plt.subplot((plot_space+1)); y_values = self.ranking("rmse",
        size)
        for i in range(1,size):
            ax.plot(xaxis,self.full_rmse[self.grid.index(y_values[i][0])],
            color=color_others, alpha=alpha_others)
            ax.plot(xaxis,self.full_rmse[self.grid.index(y_values[0][0])],
            color=color_best, linestyle=style_best); ax.set_title("RMSE")
        if is_ave:
            ax = plt.subplot((plot_space+is_rmse+1)); y_values = self.ranking(
            "ave", size)
            for i in range(1,size):
                ax.plot(xaxis,self.full_ave[self.grid.index(y_values[i][0])],
                color=color_others, alpha=alpha_others)
                ax.plot(xaxis,self.full_ave[self.grid.index(y_values[0][0])],
                color=color_best, linestyle=style_best); ax.set_title("AvE score")
            if is_eqt:
                ax = plt.subplot((plot_space+is_rmse+is_ave+1)); y_values = self.
                ranking("eqt", size)
                for i in range(1,size):
                    ax.plot(xaxis,self.full_eqt[self.grid.index(y_values[i][0])],

```

```

color=color_others, alpha=alpha_others)
    ax.plot(xaxis,self.full_eqt[self.grid.index(y_values[0][0])],
color=color_best, linestyle=style_best); ax.set_title("EQt")

```

```

class CC_Metrics:
    """Aplicacao do algoritmo para o metodo Cape Cod (Generalizado)
    \nParametros\n\ntriangulo_df: pd.DataFrame\n\tTriangulo como dataframe
    , aplicavel a cl.Triangle.\nsample_weight_grid: list\n\tGrade para o
    parametro sample_weigh de CapeCod().fit().\nCC_trend_grid: list\n\t
    Grade para o parametro trend de CapeCod().\nCC_decay_grid: list\n\t
    Grade para o parametro decay de CapeCod().\nn_iter: int\n\tNumero de
    iteracoes, comecando em 'ano_0'.\nndigits: int\n\tPrecisao das
    metricas, em casas decimais.
    \nAtributos\n\nmtd: str\n\tNome do metodo (Generalized Cape Cod)\ngrid
    : tuple\n\tTodas combinacoes de hiperparametros consideradas.\n
    nfull_rmse: np.ndarray\n\tRMSE de cada iteracao, de cada combinacao
    de hiperparametros.\nrmse: np.ndarray\n\tMedia do RMSE de todas
    iteracoes, de cada combinacao de hiperparametros.\nfull_ave: np.
    ndarray\n\tAvE score de cada iteracao, de cada combinacao de
    hiperparametros.\nave: np.ndarray\n\tMedia do AvE score de todas
    iteracoes, de cada combinacao de hiperparametros.\nfull_eqt: np.
    ndarray\n\tEQt de cada iteracao, de cada combinacao de
    hiperparametros.\neqt: np.ndarray\n\tMedia do EQt de todas iteracoes,
    de cada combinacao de hiperparametros.\nbest_rmse_parameters: tuple\n
    \tCombinacao de hiperparametros que minimiza o RMSE.\n
    nbest_rmse_grid_index: int\n\tIndice da combinacao de hiperparametros
    que minimiza o RMSE.\nbest_ave_parameters: tuple\n\tCombinacao de
    hiperparametros que minimiza o AvE score.\nbest_ave_grid_index: int\n
    \tIndice da combinacao de hiperparametros que minimiza o AvE score.\n
    nbest_eqt_parameters: tuple\n\tCombinacao de hiperparametros que
    minimiza o EQt.\nbest_eqt_grid_index: int\n\tIndice da combinacao de
    hiperparametros que minimiza o EQt."""
    def __init__(self, triangulo_df:pd.DataFrame, sample_weight_grid:list,
        CC_trend_grid:list=[0.0], CC_decay_grid:list=[1.0], n_iter:int=1,
        ndigits:int=3):
        self.mtd = "Generalized Cape Cod"
        rmse,ave,eqt=[],[],[]; rmse_score,ave_score,eqt_score=[],[],[];
        full_grid=[]
        for sw in sample_weight_grid:
            for trnd in CC_trend_grid:
                for dcy in CC_decay_grid:
                    rmse_grid,ave_grid,eqt_grid=[],[],[]
                    full_grid.append((sw,trnd,dcy))
                    for i in range(n_iter):
                        dr = diag_real(triangulo_df,i); dp = diag_prev(triangulo_df,
                            cl.CapeCod(trend=trnd,decay=dcy),sw,i)

```



```

        x = mean_squared_error(dr,dp,squared=False); rmse_grid.
append(x) # RMSE
        y = mean_squared_error(dr,dp,sample_weight=dr,squared=False)
; ave_grid.append(y) # AvEscore
        z = (dr.sum()-dp.sum())**2/len(dr)**2; eqt_grid.append(z) #
EQT
        rmse.append(rmse_grid); rmse_score.append(round(np.array(
rmse_grid).mean(),ndigits))
        ave.append(ave_grid); ave_score.append(round(np.array(ave_grid
).mean(),ndigits))
        eqt.append(eqt_grid); eqt_score.append(round(np.array(eqt_grid
).mean(),ndigits))
self.grid = tuple(full_grid)
self.full_rmse = np.array(rmse); self.rmse = np.array(rmse_score)
self.full_ave = np.array(ave); self.ave = np.array(ave_score)
self.full_eqt = np.array(eqt); self.eqt = np.array(eqt_score)
self.best_rmse_grid_index = self.rmse.argmin(); self.
best_rmse_parameters = self.grid[self.best_rmse_grid_index]
self.best_ave_grid_index = self.ave.argmin(); self.
best_ave_parameters = self.grid[self.best_ave_grid_index]
self.best_eqt_grid_index = self.eqt.argmin(); self.
best_eqt_parameters = self.grid[self.best_eqt_grid_index]

def rank_position(self, grid_index:int, metric:str):
    """Posicao ranqueada de uma combinacao de hiperparametros segundo
uma determinada metrica."""
    if metric=="rmse":
        rank = self.rmse.tolist(); rank.sort(); return rank.index(self.
rmse[grid_index])+1
    if metric=="ave":
        rank = self.ave.tolist(); rank.sort(); return rank.index(self.ave[
grid_index])+1
    if metric=="eqt":
        rank = self.eqt.tolist(); rank.sort(); return rank.index(self.eqt[
grid_index])+1
    raise ValueError(f"metric must be 'rmse', 'ave' or 'eqt'. Recived '{
metric}' instead")

def ranking(self, metric:str, size:int):
    """Ranking das melhores combinacoes de hiperparametros segundo uma
determinada metrica."""
    if metric=="rmse": rank1,rank2 = self.rmse.tolist(),self.rmse.tolist
()
    elif metric=="ave": rank1,rank2 = self.ave.tolist(),self.ave.tolist
()
    elif metric=="eqt": rank1,rank2 = self.eqt.tolist(),self.eqt.tolist
()

```

```

else: raise ValueError(f"metric must be 'rmse', 'ave' or 'eqt'.
Received '{metric}' instead")
rank1.sort(); ranking = []
for i in range(size):
    ranking.append([self.grid[rank2.index(rank1[i])],rank1[i]])
return tuple(ranking)

def plot_ranking(self, size:int, xaxis, metrics:list=["rmse","ave","
eqt"], color_best:str="r", style_best="-", color_others:str="k",
alpha_others:float=.2):
    """Grafico(s) das melhores combinacoes de hiperparametros ao longo
das iteracoes, destacando o resultado da combinacao sugerida."""
    is_rmse = int("rmse" in metrics); is_ave = int("ave" in metrics);
is_eqt = int("eqt" in metrics)
    plot_space = 100+10*is_rmse+10*is_ave+10*is_eqt; plt.figure(figsize
=(5*(is_rmse+is_ave+is_eqt), 3))
    if is_rmse:
        ax = plt.subplot((plot_space+1)); y_values = self.ranking("rmse",
size)
        for i in range(1,size):
            ax.plot(xaxis,self.full_rmse[self.grid.index(y_values[i][0])],
color=color_others, alpha=alpha_others)
            ax.plot(xaxis,self.full_rmse[self.grid.index(y_values[0][0])],
color=color_best, linestyle=style_best); ax.set_title("RMSE")
        if is_ave:
            ax = plt.subplot((plot_space+is_rmse+1)); y_values = self.ranking(
"ave", size)
            for i in range(1,size):
                ax.plot(xaxis,self.full_ave[self.grid.index(y_values[i][0])],
color=color_others, alpha=alpha_others)
                ax.plot(xaxis,self.full_ave[self.grid.index(y_values[0][0])],
color=color_best, linestyle=style_best); ax.set_title("AvE score")
            if is_eqt:
                ax = plt.subplot((plot_space+is_rmse+is_ave+1)); y_values = self.
ranking("eqt", size)
                for i in range(1,size):
                    ax.plot(xaxis,self.full_eqt[self.grid.index(y_values[i][0])],
color=color_others, alpha=alpha_others)
                    ax.plot(xaxis,self.full_eqt[self.grid.index(y_values[0][0])],
color=color_best, linestyle=style_best); ax.set_title("EQt")

sw_grid = ["Premio","Exposto"]
apriori_grid = [0.40, 0.43, 0.46, 0.49, 0.52, 0.55, 0.58, 0.61, 0.64,
0.67, 0.70, 1.0]; apriori_sigma_grid = [0.0, 0.005, 0.01, 0.02, 0.03]
trend_grid = [0, 0.002, 0.005, 0.01, 0.05]; decay_grid = [0.0, 0.1, 0.2,
0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0]

ano_0 = 2000

```

```
CL_treino = CL_Metrics(triangulo_df,8)
BF_treino = BF_Metrics(triangulo_df,sw_grid,apriori_grid,
    apriori_sigma_grid,8)
CC_treino = CC_Metrics(triangulo_df,sw_grid,trend_grid,decay_grid,8)

ano_0 = 2008
CL_teste = CL_Metrics(triangulo_df,2)
BF_teste = BF_Metrics(triangulo_df,sw_grid,apriori_grid,
    apriori_sigma_grid,2)
CC_teste = CC_Metrics(triangulo_df,sw_grid,trend_grid,decay_grid,2)
```

```
x = range(2001,2009)
plt.figure(figsize=(15, 3))
ax = plt.subplot(131); ax.set_title("RMSE")
ax.plot(x,CL_treino.full_rmse,linestyle="--", label="CL")
ax.plot(x,BF_treino.full_rmse[BF_treino.best_rmse_grid_index],linestyle="-",
    label="BF")
ax.plot(x,CC_treino.full_rmse[CC_treino.best_rmse_grid_index],linestyle="-.",
    label="CC")
ax.legend()
ax = plt.subplot(132); ax.set_title("Ave score")
ax.plot(x,CL_treino.full_ave,linestyle="--")
ax.plot(x,BF_treino.full_ave[BF_treino.best_ave_grid_index],linestyle="-")
ax.plot(x,CC_treino.full_ave[CC_treino.best_ave_grid_index],linestyle="-.")
ax = plt.subplot(133); ax.set_title("EQt")
ax.plot(x,CL_treino.full_eqt,linestyle="--")
ax.plot(x,BF_treino.full_eqt[BF_treino.best_eqt_grid_index],linestyle="-")
ax.plot(x,CC_treino.full_eqt[CC_treino.best_eqt_grid_index],linestyle="-.")
```

APÊNDICE C – Tabela de Valores

Este apêndice compreende o triângulo de *Runoff* - apresentado no Apêndice A -, no formato utilizado no código em *python* - apresentado no Apêndice B -, e corresponde a um arquivo .csv nomeado “Tabela de Valores”.

Origem	Desenvolvimento	Sinistros Incorridos	Premio	Exposto
1996	1996	4556	68000	567
1996	1997	29580	68000	567
1996	1998	48212	68000	567
1996	1999	58140	68000	567
1996	2000	65484	68000	567
1996	2001	67660	68000	567
1996	2002	70516	68000	567
1996	2003	76568	68000	567
1996	2004	79424	68000	567
1996	2005	84592	68000	567
1996	2006	89692	68000	567
1996	2007	88468	68000	567
1996	2008	88672	68000	567
1996	2009	90984	68000	567
1996	2010	90916	68000	567
1997	1997	11088	66000	540
1997	1998	37752	66000	540
1997	1999	55836	66000	540
1997	2000	64482	66000	540
1997	2001	69630	66000	540
1997	2002	75306	66000	540
1997	2003	84810	66000	540
1997	2004	88638	66000	540
1997	2005	90684	66000	540
1997	2006	95898	66000	540
1997	2007	96954	66000	540
1997	2008	99726	66000	540
1997	2009	104148	66000	540
1997	2010	105798	66000	540
1998	1998	20424	69000	556
1998	1999	62445	69000	556
1998	2000	68586	69000	556
1998	2001	80178	69000	556
1998	2002	89079	69000	556
1998	2003	104052	69000	556
1998	2004	107847	69000	556
1998	2005	109227	69000	556
1998	2006	115782	69000	556

Origem	Desenvolvimento	Sinistros Incorridos	Premio	Exposto
1998	2007	117645	69000	556
1998	2008	120267	69000	556
1998	2009	122199	69000	556
1998	2010	127512	69000	556
1999	1999	16405	85000	680
1999	2000	86785	85000	680
1999	2001	105060	85000	680
1999	2002	122145	85000	680
1999	2003	142545	85000	680
1999	2004	148410	85000	680
1999	2005	153595	85000	680
1999	2006	159630	85000	680
1999	2007	161840	85000	680
1999	2008	169830	85000	680
1999	2009	172975	85000	680
1999	2010	176290	85000	680
2000	2000	17955	105000	827
2000	2001	57855	105000	827
2000	2002	79065	105000	827
2000	2003	110565	105000	827
2000	2004	119175	105000	827
2000	2005	126945	105000	827
2000	2006	136290	105000	827
2000	2007	138180	105000	827
2000	2008	140385	105000	827
2000	2009	140385	105000	827
2000	2010	143220	105000	827
2001	2001	20400	136000	1045
2001	2002	74392	136000	1045
2001	2003	111520	136000	1045
2001	2004	131648	136000	1045
2001	2005	154360	136000	1045
2001	2006	168232	136000	1045
2001	2007	176800	136000	1045
2001	2008	182376	136000	1045
2001	2009	189720	136000	1045
2001	2010	193936	136000	1045
2002	2002	33300	180000	1356
2002	2003	91620	180000	1356
2002	2004	128700	180000	1356
2002	2005	149760	180000	1356
2002	2006	162720	180000	1356

Origem	Desenvolvimento	Sinistros Incorridos	Premio	Exposto
2002	2007	164700	180000	1356
2002	2008	164700	180000	1356
2002	2009	173880	180000	1356
2002	2010	181260	180000	1356
2003	2003	27482	182000	1340
2003	2004	96460	182000	1340
2003	2005	122850	182000	1340
2003	2006	140868	182000	1340
2003	2007	145782	182000	1340
2003	2008	148694	182000	1340
2003	2009	151424	182000	1340
2003	2010	153426	182000	1340
2004	2004	19536	132000	954
2004	2005	61116	132000	954
2004	2006	80784	132000	954
2004	2007	87648	132000	954
2004	2008	90948	132000	954
2004	2009	92268	132000	954
2004	2010	90156	132000	954
2005	2005	14195	85000	601
2005	2006	36125	85000	601
2005	2007	42755	85000	601
2005	2008	48195	85000	601
2005	2009	56950	85000	601
2005	2010	61200	85000	601
2006	2006	19140	116000	802
2006	2007	53592	116000	802
2006	2008	66236	116000	802
2006	2009	76212	116000	802
2006	2010	86768	116000	802
2007	2007	22780	134000	908
2007	2008	54270	134000	908
2007	2009	72762	134000	908
2007	2010	81874	134000	908
2008	2008	26248	136000	894
2008	2009	73576	136000	894
2008	2010	89760	136000	894
2009	2009	19564	134000	867
2009	2010	55074	134000	867
2010	2010	14279	131000	840

