Universidade Federal do Rio de Janeiro

Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Instituto de Matemática

POR UMA CONSTRUÇÃO HEURÍSTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Carlos Henrique Marques de Oliveira Peixoto

Monografia de conclusão de curso

Rio de Janeiro

2020

CARLOS HENRIQUE MARQUES DE OLIVEIRA PEIXOTO

POR UMA CONSTRUÇÃO HEURÍSTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Monografia de final do curso apresentada no Curso de Licenciatura em Matemática da UFRJ como requisito para obtenção do grau de LICENCIADO em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha

Rio de Janeiro, 2020

CIP - Catalogação na Publicação

P379u

Peixoto, Carlos Henrique Marques de Oliveira
Por uma construção heurística para o ensino de análise combinatória / Carlos Henrique Marques de Oliveira Peixoto. -- Rio de Janeiro, 2020.
90 f.

Orientador: Nei Carlos dos Santos Rocha.
Trabalho de conclusão de curso (graduação) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Licenciado em Matemática, 2020.

1. Análise combinatória. 2. Ensino de combinatória. 3. Análise de livros didáticos. 4. Ensino de matemática. 5. Educação matemática.. I. Rocha, Nei Carlos dos Santos , orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

CARLOS HENRIQUE MARQUES DE OLIVEIRA PEIXOTO

POR UMA CONSTRUÇÃO HEURÍSTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Monografia de final do curso apresentada no Curso de Licenciatura em Matemática da UFRJ como requisito para obtenção do grau de LICENCIADO em Matemática.

Aprovada em 26 de outubro de 2020

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha

(Orientador)

Instituto de Matemática – UFRJ

____

Profa. Dra. Márcia Maria Fusaro Pinto

Instituto de Matemática – UFRJ

____

Profa. Dra. Ana Teresa de Carvalho Correa de Oliveira

Faculdade de Educação – UFRJ

Rio de Janeiro, 2020

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Rita, pelo esforço feito para me dar a melhor educação que fosse possível dentro daquilo que compunha a nossa realidade.

À minha companheira, Maíra, por todo o apoio, incentivo e parceria. Teria sido muito mais difícil superar todos os obstáculos e concluir mais essa etapa sem você ao meu lado.

Ao meu orientador, Nei, por toda a paciência, pela imensa contribuição e suporte ao longo deste trabalho.

Por fim, mas não menos importante, a todos os amigos e colegas de magistério que me apoiaram ao longo do caminho.

RESUMO

A Matemática é uma disciplina que gera um misto de sentimentos entre os alunos. Em sua maioria, costumam ser sentimentos negativos devido às dificuldades que permeiam suas experiências para com ela. Em especial, a Análise Combinatória é um tópico que gera dificuldades não só para os alunos, mas também para os professores. Frequentemente a mesma é indicada por professores de Matemática do Ensino Médio como uma das matérias mais difíceis de ser ensinada. Atualmente, após a homologação da Base Nacional Comum Curricular, esse tema passou a figurar também nos anos finais do Ensino Fundamental, mais especificamente no 8° ano. Muitos desses docentes, tem no seu dia a dia a presença do Livro Didático que é utilizado ora como mera referência, ora como soberano no planejamento das aulas, principalmente por professores menos experientes e em temas de pouco domínio. Com isso, além dos tradicionais problemas do ensino de Matemática, que afetam o ensino de Combinatória, temos a forte presença do discurso presente nesses livros, o que pode atenuar ou reforçar tais problemas, além de criar outros. A fim de observar em detalhes a maneira que essas obras conduzem o ensino de Combinatória, apresentamos neste trabalho uma análise de todo o seu conteúdo voltado para esse tópico, que é mostrado logo após uma sugestão de abordagem para o ensino do mesmo.

Palavras-chave: análise combinatória, ensino de combinatória, análise de livros didáticos, ensino de matemática, educação matemática.

ABSTRACT

Mathematics is a discipline that generates a mixture of feelings among students. Most of them are usually negative due to the difficulties that permeate their experiences with it. In particular, Combinatorics is a topic that creates difficulties not only for students, but also for teachers. It is often indicated by high school math teachers as one of the most difficult subjects to teach. Currently, after the approval of the National Common Curriculum Base, this theme began to appear also in the final years of elementary school, more specifically in the 8th year. Many of these teachers, have in their daily lives the presence of the textbook that is sometimes used as a mere reference, sometimes as sovereign in the planning of classes, mainly by less experienced teachers and in topics of little mastery. Thus, in addition to the traditional problems of mathematics teaching, which affect the teaching of Combinatorics, we have the strong presence of the discourse present in these books, which can mitigate or reinforce such problems, besides creating others. In order to observe in detail the way these works conduct combinatorics teaching, we present in this work an analysis of all its content focused on this topic, which is shown shortly after a suggestion of approach to the teaching of the same.

Keywords: combinatorial analysis, combinatorial teaching, textbook analysis, mathematics teaching, mathematics education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

E.F. - Ensino Fundamental

E.M. - Ensino Médio

L.D. - Livro Didático

P.A. - Princípio Aditivo

P.M. - Princípio Multiplicativo

P.F.C. - Princípio Fundamental da Contagem

PNLD - Plano Nacional do Livro Didático

Sumário

1. Introdução

Atualmente, me vejo como um admirador cada vez maior da Análise Combinatória. Ao mesmo tempo, não posso deixar de notar que os alunos da Educação Básica com os quais tive contato não costumam compartilhar desse meu sentimento. Esse contraste, que também se faz presente quando se trata da Matemática como um todo, sempre me chamou a atenção já que essa mesma disciplina, que é fundamental para que se desenvolva o raciocínio lógico e probabilístico, assim como para a formação do cidadão, contribuindo para uma compreensão e ação mais significativas no mundo, parece não ter utilidade significativa aos olhos desses mesmos alunos.

De acordo com Brasil (2017), na Base Nacional Comum Curricular, é dito que "o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais". Tais afirmações apenas reforçam a essencialidade do conhecimento matemático e o quão necessário é conseguirmos mudar o paradigma que nossos alunos possuem da "rainha das ciências".

Sabemos que muitos problemas permeiam o ensino de Matemática e impedem que sua aprendizagem genuína seja realmente atingida. Sabemos também que muito desse desgosto para com a Matemática se dá em consequência das dificuldades que os alunos possuem ao lidar com ela. Na prática, temos um modelo de ensino que foca na memorização de fórmulas e algoritmos que podem ser aplicados de maneira mecânica, sem que haja uma construção de consciência sobre o que de fato está ocorrendo. É notável que a educação matemática nas escolas se volta para a resolução de questões que, em sua maioria, não possuem significado para o alunado, o que impede um real aprendizado. Tal modelo de ensino não faz jus a tudo que essa disciplina pode oferecer.

Sobre a riqueza inerente ao estudo dessa ciência, vejamos o que nos diz Brasil (2017):

> *A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos - contagem, medição de objetos, grandezas - e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos* (BRASIL, 2017, p.265).

Dentre os tópicos afetados por esses “maus hábitos” no contexto de ensino-aprendizagem, temos a Análise Combinatória, foco deste trabalho. Acredito fortemente que a mesma forneça diversas oportunidades para o desenvolvimento do raciocínio matemático dedutivo pleno, permitindo também o trabalho com diversas habilidades necessárias à resolução de problemas. Também vale mencionar as diversas implicações em outras áreas da matemática como, por exemplo, a Probabilidade, que deve ser uma das relações mais mencionadas na Educação Básica. Segundo Piaget e Inhelder (1951), ao aprendermos a lidar com as operações combinatórias, melhoramos nossa capacidade de lidar com as ideias de acaso e de probabilidade. Tal noção é essencial para que possamos compreender melhor o mundo em que estamos, visto que vivemos rodeados de fenômenos aleatórios.

Desde 2016, atuo como professor de Ensino Fundamental (Anos Finais) e Ensino Médio, e desde 2014 atuo como monitor também nesses mesmos segmentos. A partir dessa experiência, pude perceber grandes dificuldades que os alunos apresentam para compreender e se apropriar das técnicas de contagem que lhes eram apresentadas. Uma surpresa foi notar que não era raro haver professores que também demonstravam dificuldades com esse conteúdo e quando precisavam lecioná-los o faziam apenas de modo procedimental, por não dominar plenamente o necessário para aquela etapa escolar.

Ao pesar as reflexões sobre as dificuldades dos alunos para um lado mais técnico, percebemos que aspectos como o Princípio da Invariância - usualmente chamado de “independência entre as escolhas” - que baseia o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.), assim como a distinguibilidade intrínseca (relativa a propriedades dos objetos em si) e/ou extrínseca (relativa às condicionantes impostas pelo contexto) entre objetos, muito bem retratada pela clássica “A ordem importa ou não importa?”, e a diferença de aplicação entre os Princípios Aditivo e Multiplicativo, que dá origem a outra pergunta frequente, a “É pra somar ou multiplicar?” - sendo esse “ou” geralmente exclusivo - compõem obstáculos fundamentais que atrapalham todo o desenvolvimento das demais técnicas combinatórias.

Neste texto, buscamos incentivar uma abordagem heurística no ensino da análise combinatória, o que significa nada além de obter soluções através da experimentação, levando o aluno a descobrir aquilo que desejamos que ele aprenda, guiando-o através dos questionamentos e reflexões convenientes com a finalidade de encontrar explicações lógicas sobre os fenômenos estudados.

O presente trabalho se estrutura da seguinte forma:

No capítulo 1, abordamos o que consideramos como os dois princípios fundamentais da contagem, o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo. Nele, destrinchamos de forma quase que taxonômica as variadas formas de aplicação dessas técnicas, com um foco maior no Princípio Multiplicativo e na resolução de problemas. Em cada caso apresentado, partimos de um problema e esmiuçamos a sua resolução, o que, por sua vez, é guiada por meio de questionamentos cujo objetivo é gerar reflexões a respeito das condições do problema apresentado e da coerência do caminho de solução tomado de modo a valorizar todo o processo de resolução. Além disso, aproveito para compartilhar algumas lições que tirei das experiências que já obtive ao ensinar Análise Combinatória, e aproveito para dar algumas humildes sugestões sobre o que considero válido de se ter em mente ao lecionar esse tema buscando, sempre que possível, me colocar na posição do discente. Outro ponto que deve ser ressaltado é que o modo como a escrita das resoluções foi realizada busca retratar como acreditamos que seja uma boa forma de conduzir as resoluções dos problemas de contagem, incentivando sempre a reflexão, a investigação e uma postura ativa, tanto por parte do aluno quanto por parte do professor.

No capítulo 2, analisamos como os tópicos de Contagem são abordados em seis livros didáticos, sendo três voltados para 8° ano do Ensino Fundamental e três voltados para o 2° ano do Ensino Médio. O primeiro segmento escolhido, se justifica devido à menção explícita que há na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) relativa ao ensino do Princípio Multiplicativo, enquanto o segundo segmento escolhido se deu devido a ser o momento do Ensino Médio em que, tradicionalmente, a Análise Combinatória é apresentada com maior profundidade. Através de uma leitura crítica, foram tecidas algumas reflexões e colocações a respeito da forma de introdução do conteúdo, da apresentação dos conceitos, assim como o perfil geral dos exercícios propostos para os alunos. Esses comentários são acompanhados de reproduções condizentes das obras buscando ilustrá-los.

Por fim, encerramos este trabalho com considerações gerais sobre o ensino de Combinatória e da Matemática como um todo, além de algumas reflexões alcançadas durante o desenvolvimento do mesmo que deixam margem para possíveis desdobramentos futuros.

2. Princípios Fundamentais da Contagem

Problemas de contagem em Combinatória fazem, quase sempre, uso ou o diálogo de vários objetos matemáticos a fim de "contar sem contar" as configurações estabelecidas nos problemas. Ou seja, a fim de contabilizar o total de possibilidades que atende à determinada situação, sem, necessariamente, contá-las uma a uma. Na maioria das vezes, esses objetos (princípios aditivo e multiplicativo, arranjo, permutação, combinação, permutação circular, etc.) são tratados de modo a isolar uns dos outros, sem que se estabeleça o vínculo formador entre eles e suas condicionantes. Nesse capítulo, nossa intenção é discutir uma forma de podermos construir esses objetos em sala de aula, de modo a entender como eles surgem, para que possamos utilizá-los na resolução de problemas cientes do porquê estão subjacentes às estruturas do problema posto.

O objetivo aqui é apresentar as definições de dois Princípios Fundamentais da Contagem, cujas aplicações são motivadas por exemplos, além de analisar as variadas aplicações que essas ferramentas possuem na resolução dos problemas de contagem, articulando-os conforme a situação exigir.

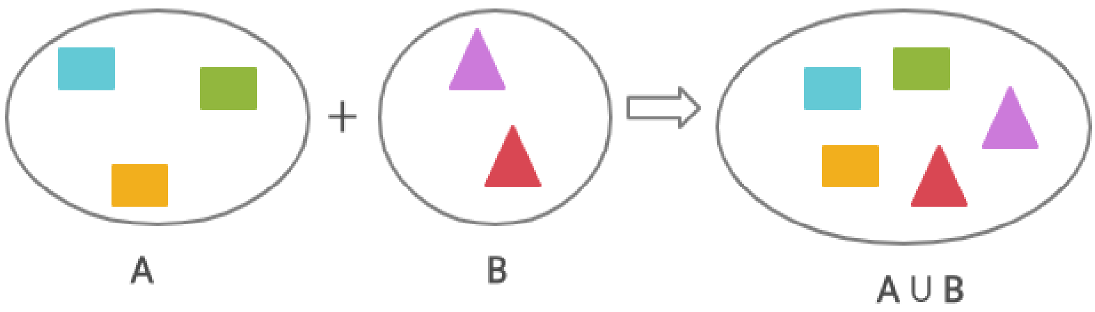
Os princípios elementares mostram seu real valor como recursos que otimizam o processo de contagem quando a listagem completa dos resultados é, no mínimo, desgastante. "*Estes princípios são a base da combinatória enumerativa, e são aplicáveis em uma enorme variedade de problemas*" (BOSE; MANVEL, 1984, p. 2, apud GONÇALVES, 2014, p.19, tradução da autora).

Além disso, são explorados conceitos e definições básicas da Análise Combinatória que surgem a partir da aplicação do Princípio multiplicativo em classes particulares de problemas, como Permutação, Arranjo e Combinação.

2.1 Princípio Aditivo (PA)

As quatro operações aritméticas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) se fazem presentes ao longo de qualquer situação de contagem. Segundo Morgado et al. (2006) existe uma vinculação direta entre a história da matemática e busca por técnicas de contagem, sendo "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto com o objetivo de determinar o total desses, a primeira técnica matemática aprendida por uma criança. Os problemas de contagem motivam a aplicação das operações aritméticas. Ao introduzir a operação da adição, por exemplo, utilizam-se problemas de contagem análogos ao que é ilustrado a seguir:

Figura 1 - Esquema representativo do Princípio Aditivo



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 1 ilustra um dos princípios fundamentais da contagem, que podemos nomear de Princípio Aditivo. Ainda segundo Morgado et al. (2016), podemos defini-lo da seguinte maneira:

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos $(A \cap B = \emptyset)$, com p e q elementos, respectivamente, então $C = A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Com base na minha experiência de sala de aula, notei que apresentar essa definição aos alunos não tornava clara sua aplicação nas situações de contagem, por mais óbvia que possa parecer para quem já detém alguma familiaridade com o assunto como se espera de quem o está ensinando. Inclusive, acredito que esse olhar que assume certas conclusões como óbvias, comum por parte de quem já tem um certo domínio no assunto, impede de perceber certas nuances que podem sustentar as dificuldades dos alunos e atrapalham seu desenvolvimento. Vejo a obviedade como um fator que existe apenas àqueles que possuem familiaridade com o assunto abordado, e sabemos que na realidade do ensino de matemática atual, os alunos, no geral, não possuem o domínio necessário para perceber essas “obviedades”. O “óbvio”, muitas vezes, acaba residindo na informação que não é explicitada. Aliás, acredito que, quanto mais estudamos um determinado assunto, quanto mais nos apropriamos do mesmo, mais difícil fica se colocar no lugar de quem não possui o mesmo domínio e entender suas dificuldades genuinamente. Nesse caso, a experiência com o ensino, de troca com o alunado, se torna essencial para que essa compreensão, essa empatia, seja possível. Algo que se mostrou válido foi uma breve retomada dos conceitos de união e interseção entre dois conjuntos, que normalmente são trabalhados na Educação Básica numa série diferente daquela em que se ensina Análise Combinatória. Usualmente a Teoria de Conjuntos é trabalhada no 1° ano do Ensino Médio, enquanto a Contagem é trabalhada no 2° ano do Ensino Médio. Na intenção de explicitar melhor as informações necessárias, o princípio que enunciamos acima pode ser definido de uma outra maneira utilizando termos que façam uma referência mais clara às situações de contagem presentes no contexto do Ensino Médio, e que são mais próximos dos termos comumente utilizados pelos professores nas aulas de contagem assim como pelos problemas abordados.

Suponha que uma situação A possa ocorrer de p maneiras diferentes e uma situação distinta B possa ocorrer de q maneiras diferentes, e, além disso, que não seja possível que ambas as situações ocorram juntas. Então a situação C, dada por A ou B, que ocorre quando apenas uma das duas situações anteriores acontece, pode ocorrer de p+q maneiras diferentes.

Para apresentar a aplicação dessa primeira técnica, temos o exemplo a seguir:

Exemplo 01: *No estojo de Carlos há 3 lápis de cores diferentes e 4 canetas de cores diferentes, todos em perfeito estado de utilização. De quantas formas diferentes ele pode escolher um desses objetos para anotar seu dever de casa?*

Para responder esse problema, precisamos nos questionar o que pode acontecer. Aqui, há apenas dois casos distintos:

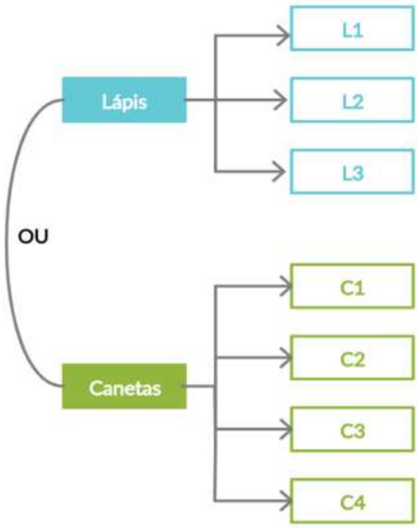
A: Escolher um elemento do conjunto dos lápis, que possui 3 elementos;

B: Escolher um elemento do conjunto das canetas, que possui 4 elementos.

Há alguma hipótese na qual esses dois casos ocorrem juntos? Não. Trata-se, então, de situações mutuamente exclusivas, ou seja, situações cuja interseção é vazia, que não há a possibilidade de ocorrerem simultaneamente. Nesse caso, significa que ou ocorre a situação A (escolher um lápis de uma determinada cor) ou ocorre a situação B (escolher uma caneta de determinada cor). Como a primeira possui três formas distintas de ser selecionada já que há 3 lápis disponíveis, e a segunda possui quatro formas distintas de ser selecionada já que há 4 canetas disponíveis, então, pelo princípio aditivo, a situação “ou A ou B” (escolher um lápis ou escolher uma caneta) pode ocorrer de $3 + 4 = 7$ maneiras distintas. Portanto, Carlos possui 7 formas diferentes de anotar o seu dever de casa.

A figura abaixo representa uma possibilidade de diagrama que pode ser feito para enumerar todos os possíveis resultados para esse problema.

Figura 2 - Árvore de possibilidades referente ao Exemplo 01



Fonte: Elaboração do autor.

Esse mesmo método de contagem pode ser generalizado para uma quantidade qualquer de conjuntos disjuntos dois a dois de maneira análoga ao enunciado que apresentamos acima.

Sobre o problema apresentado vemos que, nessa situação, temos um evento que ocorre numa etapa única, que é a de escolha do objeto para realizar a escrita. O número de etapas que estruturam uma determinada situação serve como indicativo para a escolha do método de contagem mais adequado. No exemplo anterior cabe explicitar que a escolha do objeto a ser utilizado só pode ocorrer atendendo a somente um dentre os dois casos possíveis, já que eles não possuem resultados em comum. O desmembramento de uma situação em casos disjuntos, ou seja, sem possibilidades em comum, é uma habilidade estrategicamente importante que precisa ser desenvolvida para que, em seguida, possam ser trabalhadas situações de contagem mais complexas. Haverá problemas nos quais o princípio aditivo precisará ser utilizado em conjunção com o princípio multiplicativo e/ou outras fórmulas de contagem que derivam desse último. Além disso, a listagem dos resultados, ainda que parcial, deve ser feita sempre que possível, principalmente nos problemas iniciais, para que o aluno crie o hábito de identificá-los, mesmo que mentalmente, observando características comuns. Exemplos com uma quantidade pequena de possibilidades constituem oportunidades proveitosas de trabalhar com o diagrama de árvore para a realização da listagem, visto que tratará de situações que não demandarão uma análise extensa e, portanto, não representarão momentos que exigirão muitos recursos para serem esmiuçadas. A listagem, apesar de ser um recurso simples, constitui uma das formas mais naturais de contagem e, portanto, não deve ser desmerecida, sendo retomada sempre que for julgado como necessário. Esse recurso ajudará a responder os questionamentos sobre características gerais dos resultados que realmente atendam às condições impostas pelos problemas, questionamentos esses que nos guiam ao longo do próprio processo de resolução. Mesmo ao lidar com situações cuja listagem completa dos resultados seja um tanto penosa, ainda assim uma listagem parcial visando a ressaltar as características comuns a alguns resultados particulares, permitirá um raciocínio indutivo, uma conjectura que levará à conclusão da estrutura geral dos resultados desejados.

Sabemos que é natural surgirem questionamentos quando estudamos algo novo. Haverá momentos em que não saberemos responder de imediato a tudo que os alunos nos indagam e não há nada de errado quanto a isso. A experiência profissional acaba nos moldando bastante nesse aspecto, ajudando a perceber questionamentos frequentes sobre determinado assunto. Uma indagação comum a respeito do princípio aditivo é algo na linha de "*E se os conjuntos possuírem elementos em comum?*". Nesse caso, referindo-se a como obter o total de elementos que pertencem à união de conjuntos não necessariamente disjuntos. Um caso particular abordado com frequência na educação básica dentro do estudo de combinatória trabalha com dois conjuntos não disjuntos.

Para responder a esse questionamento, tomemos como exemplo o seguinte problema:

Exemplo 02: *Quantos números inteiros de 1 até 100 são divisíveis por 4 ou por 5?*

Primeiro, quais os conjuntos possuem os elementos que desejamos incluir na nossa contagem?

A: Conjunto dos inteiros de 1 até 100 que são divisíveis por 4.

B: Conjunto dos inteiros de 1 até 100 que são divisíveis por 5.

Agora, como podemos obter o número de elementos de cada conjunto?

Podemos pensar em mais de um caminho que pode ser percorrido. Uma escolha comum por parte dos alunos seria listar os múltiplos de 4 e contá-los. Depois, o mesmo procedimento com os múltiplos de 5.

Uma segunda opção, mais prática, para obter $n(A)$ (número de elementos do conjunto A) basta calcular $\frac{100}{4} = 25$. Para obter $n(B)$ (número de elementos do conjunto B) calculamos $\frac{100}{5} = 20$. Assim, no intervalo considerado, encontramos a quantidade de múltiplos de 4 e 5 respectivamente. Sabemos que essas quantidades são equivalentes a encontrar a quantidade de números divisíveis por cada um deles, respectivamente. Ou seja, há 25 múltiplos de 4 e há 20 múltiplos de 5 considerando os inteiros de 1 até 100.

Logo, bastaria fazer $25 + 20 = 45$ números divisíveis por 4 ou 5, certo? Sabemos que não.

Não podemos esquecer que dentre esses 45 múltiplos, há alguns valores contados mais de uma vez, já que 4 e 5 possuem múltiplos comuns no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ como, por exemplo, o 20. Assim, constatamos que $A \cap B \neq \emptyset$ e, portanto, não podemos aplicar diretamente o princípio aditivo. Partindo da listagem dos elementos de cada conjunto, é visualmente perceptível quais são os valores que se repetem. No entanto, se seguirmos pelo segundo caminho sugerido, já que a listagem não é um método ótimo para contagem, como encontrar o total de elementos comuns? Nesse caso, o ponto de partida ideal é o menor dos múltiplos comuns a 4 e 5, o famigerado m.m.c. que, nesse caso, é igual a 20. Partindo desse valor, cada múltiplo dele será um múltiplo comum a 4 e 5. Para encontrar a quantidade de valores em comum, tomemos a quantidade de múltiplos de 20 nesse intervalo, obtida com $\frac{100}{20} = 5$. Logo, há 5 múltiplos comuns (ou seja, $n(A \cap B) = 5$) que foram considerados duas vezes cada dentre os 45 acima e, portanto, devem ser descontados desse valor. Concluímos que o total de possibilidades correto é dado por

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 25 + 20 - 5 = 40$$

É interessante dar alguns minutos para os alunos resolverem um exercício desse tipo e observar como eles chegam a algum resultado. Alguns erros comuns são:

Alunos que resolverão o problema como se os conjuntos fossem disjuntos concluindo que $n(A) + n(B) = 20 + 25 = 45$, ou seja, que há 45 valores divisíveis por 4 ou 5, não se questionando sobre a possibilidade de valores que foram considerados repetidamente.

Alunos que percorrerão o mesmo caminho acima, sabendo que há valores repetidos, porém sem saber como obter o seu total por um método que não seja a listagem.

Alunos que irão listar todos os elementos do conjunto A, os elementos do conjunto B e contar um por um, desconsiderando as repetições, chegando ao total de 40. Alguns contam as repetições.

Após verificar a situação geral da turma, podem ser feitos alguns direcionamentos, ou até mesmo colocá-los para trabalhar em grupos possibilitando uma maior discussão sobre o problema, e até socializar as resoluções para que ajudem uns aos outros.

Nesse problema, recorremos ao formato mais simples de uma técnica de contagem chamada Princípio da Inclusão - Exclusão. Se houvesse três conjuntos distintos considerados, a relação que forneceria o número de elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos seria:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Ao generalizar essa técnica acerca da união de n conjuntos, podemos entendê-la da seguinte forma:

> *Em suma, o número de elementos da união é obtido somando os números de elementos de cada conjunto, subtraindo os números de elementos das interseções dois a dois, somando os das interseções três a três, subtraindo os das interseções quatro a quatro etc.* (Morgado et al.,2006, p.64).

No decorrer do estudo da Combinatória, pode-se perceber que ocorrem muitas multiplicações nas resoluções do problema, em especial, produtos do tipo $n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots 2.1$. Logo, é natural para a escrita matemática que seja criada uma notação de modo a otimizar a representação de expressões desse tipo. Daí surge a motivação para o conceito de Fatorial. Assim, antes de conhecermos outro princípio fundamental de contagem, iremos definir esse conceito que eventualmente nos será útil.

Definição*: Seja* n *um número natural tal que* $n \geq 1$*, definimos o fatorial de* n*, cuja notação é* $n!$*, como o produto de todos os números naturais de* 1 *até* n*. Ou* seja*,*

$$n! = n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots 2.1$$

Cabe lembrar que, por convenção, $0! = 1$ (embora possamos justificar essa convenção por meio da equivalência empírica da permutação como um caso particular do arranjo, como veremos mais tarde), e que $n! = n(n-1)!$ para $n \geq 1$

Segundo Trettel (2010) a notação atual utilizada para representar o fatorial fazendo uso do sinal de exclamação (!) foi introduzida pelo matemático francês Christian Kramp, em 1808, com o intuito de facilitar a impressão. Antes dessa notação, era utilizada $\underline{|n}$.

Apesar de ir além do escopo do currículo da Educação Básica, é importante saber que a ideia de fatorial pode ser estendida para os números reais não negativos através da função Gama, introduzida por Euler em 1730 oriunda da pesquisa sobre a extensão do fatorial de um número, que se tornou uma função que possui diversas aplicações matemáticas. Sua expressão é

$$\Gamma(x) \;=\; \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Quando x é um número natural n temos $\Gamma(n) \;=\; (n-1)!$ Ainda que no decorrer da Educação Básica esse tema costume ser ensinado de modo procedimental, é válido que o professor saiba esse tipo de informação já que não é incomum dos alunos, nesse ponto da matéria, perguntarem sobre o fatorial de um número que não seja necessariamente um natural.

2.2 Princípio Multiplicativo (MP) ou Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Aqui abordaremos o método de contagem que fundamenta todas as fórmulas desenvolvidas para resolução de problemas de contagem pertencentes a determinadas classes. De acordo com Gonçalves (2014) esse Princípio constitui um dos métodos mais eficientes de resolução de problemas de Combinatória.

Definição: *Se uma decisão D_1 puder ser tomada de x maneiras e, uma vez tomada a decisão D_1, para cada possibilidade de ocorrência existente para D_1, uma decisão D_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras distintas de se tomarem as decisões D_1 e D_2 é dado por $x.y$*

Analogamente, esse conceito pode ser generalizado para uma quantidade qualquer de decisões sucessivas. Cabe ressaltar que deve ser dada pelo professor a devida atenção ao princípio de invariância das escolhas da fase seguinte independentemente das escolhas feitas até a fase atual. O uso dessa técnica de contagem atende a uma gama de problemas, porém nem sempre com a mesma eficácia. Cada tipo de situação exige uma articulação diferente desse princípio para que se possa chegar à quantidade correta de possibilidades existentes ao problema estudado.

No quinto volume, dedicado a Análise Combinatória e Probabilidade, da Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, é dito:

> *O Princípio Fundamental da Contagem fornece-nos o instrumento básico para a Análise Combinatória, entretanto, sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes tornar-se trabalhosa* (HAZZAN, 1977, p.12-E).

Portanto, ainda que um recurso fundamental, sua aplicação direta pode ser ineficaz. De modo a contornar isso, iremos analisar os diversos modos de utilizá-lo, buscando também por fórmulas que sejam aplicáveis aos casos particulares da contagem que são abordados na Educação Básica. O objetivo é otimizar o processo de contagem sempre que possível. Abaixo, enumeram-se os distintos casos de aplicação desse princípio básico, ora sozinho, ora em conjunção ao Princípio Aditivo, e seus possíveis desdobramentos a partir de exemplos.

Caso 1: O conjunto sobre o qual é tomada D_1 difere do conjunto sobre o qual é tomada D_2.

Exemplo 03: *Ao montar as embalagens do brinde que irá distribuir em sua festa, Maíra sempre utiliza um papel para o embrulho e um laço para enfeitar. Se ela comprou os papéis e os laços nas cores azul, verde e vermelho, de quantas formas diferentes ela pode realizar um embrulho?*

Em primeiro lugar, quantas e quais são as decisões que compõem a situação proposta? Como Maíra precisa escolher a cor do papel de embrulho e a cor do laço, percebemos que há duas decisões que precisam ser tomadas, e, portanto, duas fases experimentais. Essas duas decisões ocorrem sobre um mesmo conjunto? Não, pois cada decisão considera um conjunto diferente da outra visto que as duas partes do embrulho são completamente distintas.

D_1: Decisão sobre a cor do papel de embrulho;

D_2: Decisão sobre a cor do laço;

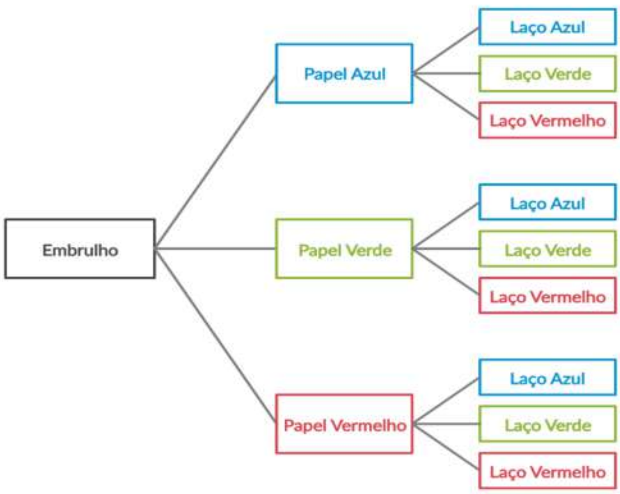
P: Conjunto das cores dos papéis de embrulho;

L: Conjuntos das cores dos laços.

A primeira decisão é tomada sobre o conjunto P e pode ocorrer de três formas distintas, considerando que há três cores de papel de embrulho disponíveis. Já a segunda decisão é tomada sobre o conjunto L e pode ocorrer de três formas distintas, considerando que há três cores de laço, independentemente da escolha tomada do conjunto P. Há alguma condição imposta pelo problema a respeito da combinação papel-laço? Não; pela situação descrita, não há restrição a nenhuma das combinações possíveis. Logo, independentemente da cor do papel escolhida, sempre haverá três possibilidades de laço para finalizar o embrulho. Dessa forma, pelo Princípio Multiplicativo, podemos concluir que o número de maneiras de realizar as duas decisões em sequência, é dado por $3.3 = 9$ possibilidades.

O diagrama a seguir poderia ser construído para retratar a situação acima:

Figura 3 - Árvore de possibilidades referente ao Exemplo 03



Fonte: Elaboração do autor

Uma pergunta que pode surgir é: *E se a primeira decisão fosse sobre o laço?* Faria diferença? Não. A escolha de qual decisão será tomada primeiro é arbitrária. O que ocorre é a necessidade de haver uma primeira decisão que, após ser tomada, servirá como referência para que possamos analisar a decisão seguinte, mediante as possibilidades da anterior. Diferente do exemplo referente ao Princípio Aditivo, nesse caso o evento se desenrola em duas etapas, duas fases. O processo de decisão de como realizar o embrulho, possui um primeiro momento voltado à escolha do papel de embrulho enquanto o seguinte se volta para a escolha do laço utilizado. Situações que se desenrolam em mais de uma etapa demandam o uso do Princípio

Multiplicativo, se a invariância das escolhas é sustentada, já que apenas o Princípio Aditivo não seria suficiente para quantificá-la corretamente. Caso tentássemos utilizá-lo, o questionamento que o nortearia seria algo na linha de "*De quantas formas eu posso escolher o laço* ***ou*** *o papel de embrulho?*". Ou seja, uma única decisão ocorreria. O que não faz sentido no contexto proposto, já que, apesar de estarmos trabalhando com dois conjuntos disjuntos, não estamos buscando a união, no sentido matemático, deles e sim o produto cartesiano entre eles. Sem mencionar que não é possível realizar o embrulho só com o laço, por exemplo. Nesse raciocínio, chegaríamos à $3 + 3 = 6$, o que não é a quantidade real de possibilidades. Ao listá-las fica evidente que há uma incoerência entre o valor encontrado usando o Princípio Aditivo e o real número de possibilidades. Isso evidencia que o Princípio Aditivo apenas, não é recurso suficiente para atingir o objetivo, já que ele, quando usado sozinho, trata de eventos definidos para uma única etapa. Nesse início da combinatória *"Preciso somar ou multiplicar?"* é mais um questionamento dos que se repetem com frequência enquanto a distinção de uso entre o Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo não fica clara. Além disso, deixam de considerar a possibilidade de ambos serem usados num mesmo problema, em momentos diferentes, numa estratégia comumente utilizada em problemas mais elaborados que precisam ser divididos em casos distintos. A conhecida estratégia de "dividir para conquistar".

Aproveitando, dividir em casos é diferente de dividir em etapas? Sim, não se deve confundir a divisão de uma situação em casos, com sua divisão em etapas. Ao dividir em casos, nada impede que cada caso seja esmiuçado em etapas para que possa ser contado corretamente. Além disso, ao dividirmos em casos, a intenção é de subdividirmos a situação-problema de modo que dois casos distintos não possam ocorrer simultaneamente. Analisando as etapas de um caso de cada vez, usamos o Princípio Multiplicativo para contá-lo, e usamos em seguida o Princípio Aditivo para somar os resultados de cada caso e obter o total de possibilidades.

Caso 2: As decisões D_1 e D_2 são tomadas sobre um mesmo conjunto.

Exemplo 04: *Devido a um erro de programação, uma máquina de senhas só emite senhas que não contém o algarismo* 0 *e que não possuem algarismos repetidos. Sabendo que cada senha é composta de dois algarismos, qual o total de senhas que podem ser emitidas?*

Primeiro, quantas e quais as decisões a serem tomadas? Aqui, há duas decisões. Uma para o algarismo das dezenas, e outra para o algarismo das unidades. Cada decisão corresponde a uma etapa da construção dos possíveis números. As duas ocorrem sobre o mesmo conjunto de algarismos.

D_1: Escolha do algarismo das dezenas;

D_2: Escolha do algarismo das unidades;

A: Conjunto dos algarismos diferentes de zero.

Ambas as decisões são tomadas sobre o mesmo conjunto, o conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Começando pelo algarismo das dezenas, temos que a primeira decisão pode ocorrer de quantas maneiras distintas? Bom, como há 9 dígitos disponíveis, há 9 maneiras. A partir disso, uma vez ocupada a casa das dezenas, a próxima decisão trata do algarismo das unidades. De quantas formas podemos preencher essa casa, considerando as possibilidades da decisão anterior? Se, da esquerda para a direita, o primeiro dígito for 1, então há 8 possibilidades para o segundo dígito que são $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, visto que os algarismos utilizados devem ser distintos entre si. Fazendo a mesma análise para as outras formas de iniciar o número, chegamos a mesma conclusão? Sim, concluímos que, para qualquer uma das nove maneiras de preencher a dezena do número que estamos construindo, a segunda decisão sempre poderá ocorrer de oito maneiras distintas, pois há uma condição imposta pelo problema quanto à repetição dos algarismos, e que deve ser atendida. Sendo assim, o total de maneiras distintas de construir essas senhas é dado por $9.8 = 72$ possibilidades.

Uma vez que a resposta foi obtida, cabe refletir: *Essa é a única forma de abordar esse problema?* Nos problemas que trabalhamos até aqui, utilizamos o raciocínio direto, que também pode ser chamado de “método construtivo”, pois seguimos diretamente as orientações do problema para contar o que nos interessava. Uma outra abordagem possível seria através de um raciocínio indireto, também conhecido como “método destrutivo”. Nesse caso, o que muda? Primeiro, contamos sem considerar a restrição imposta, o que torna o processo mais simples. De quantas formas a primeira decisão pode ocorrer? Nove. Para cada uma dessas nove maneiras, de quantas formas pode ocorrer a segunda decisão? Nove, também. Logo, as duas decisões em sequência podem ocorrer de $9.9 = 81$ maneiras. Como não consideramos a restrição nessa primeira parte do processo, podemos supor que há números que não devem estar de acordo com o contexto dentre esses 81, certo? Certo. Quais são eles? Analisando um caso particular, podemos fixar o primeiro algarismo como 1. Daí, segue que o segundo algarismo pode ser qualquer um do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ou seja, estamos considerando o conjunto $\{11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$ como parte da solução. Porém, como não pode haver números com os algarismos repetidos, precisamos desconsiderar um elemento desse conjunto, o número 11. Fixando o 2, o 3 e assim por diante, e analisando os números formados, percebemos que devemos desconsiderar os números 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 e 99, que representam 9 das 81 possibilidades encontradas ao desprezarmos a condição que havia sido apresentada. Logo, 81 - 9 = 72 possibilidades.

Devido ao número relativamente grande de possibilidades, nessa situação o uso do diagrama de árvore para listagem de todos os resultados poderia ser um pouco mais demorado de fazer, tanto para o professor quanto para o aluno. Vimos que a listagem parcial dos resultados, fixando um algarismo nas dezenas, por exemplo, ilustra como a observação de um caso particular permite generalizar a ideia. Em exemplos que trabalham com algarismos deve-se enfatizar a diferença entre o número de possibilidades referente a alguma decisão, e alguma possibilidade em si para aquela decisão. Por exemplo, deixar claro que o "9" para a primeira decisão se refere à quantidade de elementos do conjunto considerado e não a um de seus elementos que é o algarismo 9. Isso também vale para o "8" referente ao número de possibilidades atribuído à segunda decisão, na abordagem direta. Em sala de aula, o uso de cores na escrita da resolução pode ser de grande auxílio para representar essa distinção visualmente, pois pode ser feito algum tipo de acordo com os alunos sobre a cor que será utilizada para escrever o número de possibilidades e a cor que será utilizada para listá-las, por exemplo. Padronizar essas cores ajuda o aluno a não se confundir durante a resolução do problema feita pelo professor. Nesse exemplo, há uma diferenciação intrínseca devido a não repetição de objetos e uma diferenciação extrínseca que ocorre devido ao sistema de numeração posicional que utilizamos. Sabemos que com o subconjunto $\{1,2\}$ podemos construir os números 12 e 21, e que essas são possibilidades distintas já que o algarismo 1 no número 12 possui um valor relativo diferente do algarismo 1 no número 21, uma vez que ocupam casas diferentes. O mesmo pode ser dito sobre o algarismo 2. Por outro lado, se, ao invés de construir números, o problema tratasse da construção dos subconjuntos possíveis com dois dos nove elementos disponíveis, consideraríamos apenas a diferenciação intrínseca aos objetos, devido a sua natureza, e não haveria nada extrínseco, como uma ordenação, a ser considerado já que os subconjuntos $\{1,2\}$ e $\{2,1\}$ representariam o mesmo subconjunto. Nesse último caso, o princípio multiplicativo geraria uma contagem com excesso de possibilidades e demandaria de uma outra articulação no desenvolvimento do raciocínio para que não houvesse resultados contados repetidamente.

Essa diferenciação intrínseca (propriedades do próprio objeto, como cores, identidades distintas, etc) e/ou extrínseca (propriedades externas aos objetos como ordem, forma de extração, colocações, etc) entre os objetos disponíveis e utilizados, é o que vai dar base para definições posteriores dos conceitos de Permutação, Arranjo e Combinação, que surgem ao analisarmos casos particulares das situações de contagem. Vejamos um caso simples, pouco discutido em sala de aula, mas que faz diferença na contagem.

Exemplo 05: *Suponha o lançamento de dois dados. De quantas maneiras podem ser os resultados das faces nas seguintes situações:*

Os dois dados são idênticos e são jogados simultaneamente sobre uma mesa.

Os dois dados são idênticos e são jogados sucessivamente sobre uma mesa, controlando-se a ordem.

Os dois dados têm cores diferentes (sendo um branco e um vermelho) e são jogados simultaneamente sobre uma mesa.

Os dois dados têm cores diferentes (sendo um branco e um vermelho) e são jogados sucessivamente sobre uma mesa, controlando-se a ordem.

No caso (1) não há distinguibilidade intrínseca (os dados são iguais) e nem extrínseca (o lançamento simultâneo não controla a ordem). Assim, há apenas 21 resultados possíveis: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6).

No caso (2) não há distinguibilidade intrínseca (os dados são iguais), mas há distinguibilidade extrínseca (o lançamento é sucessivo e controla a ordem). Assim, há apenas 36 resultados possíveis: (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (1,5), (5,1) (1,6), (6,1), (2,2), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (2,5), (5,2), (2,6), (6,2), (3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3), (3,6), (6,3), (4,4), (4,5), (5,4), (4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6). Observe que aqui a distinguibilidade, por exemplo, de (3,5) e (5,3) não vem do dado (pois são idênticos) mas sim da ordem com que os números saem no jogo.

No caso (3) há distinguibilidade intrínseca (os dados têm cores diferentes), mas não há distinguibilidade extrínseca (o lançamento simultâneo não controla a ordem). Assim, há também 36 resultados possíveis, a saber, (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (1,5), (5,1) (1,6), (6,1), (2,2), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (2,5), (5,2), (2,6), (6,2), (3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3), (3,6), (6,3), (4,4), (4,5), (5,4), (4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6). Observe que, agora, a distinguibilidade, por exemplo, de (3,5) e (5,3) vem da cor do dado, pois eles são diferentes, onde (3,5) representa que o dado branco deu 3 e o vermelho deu 5, e (5,3) representa que o dado branco deu 5 e o vermelho deu 3), e não da ordem com que os números saem no jogo, pois são jogados simultaneamente.

Finalmente, no caso (4) há distinguibilidade intrínseca (os dados têm cores diferentes), e há distinguibilidade extrínseca (o lançamento é sucessivo e controla a ordem). Assim, há agora 72 resultados possíveis, o dobro do caso (3) pois para cada um dos 36 resultados temos um outro devido à troca da cor. Por exemplo, o par (3,5) do caso (3) torna-se os pares (3B,5V) e (3V,5B), e o par (5,3) do caso (3) torna-se os pares (5B,3V) e (5V,3B), pois agora temos distinguibilidade tanto intrínseca (devido a cores diferentes) quanto extrínseca (devido a ordem de saída diferentes).

Exemplos como esse anterior são pouco discutidos em livros didáticos e, consequentemente, em sala de aula e dão como resposta sempre 36 nos livros didáticos, sem haver negociação sobre como o experimento é realizado. Isso se dá por conta do uso da Combinatória nas Probabilidades, já que em Probabilidade, quer os objetos sejam ou não distinguíveis, devemos sempre tomá-los como distinguíveis (intrinsecamente), sob pena de calcularmos incorretamente a probabilidade de eventos. Para a Análise Combinatória é preciso avaliar o contexto em que o experimento é realizado visto que, com o olhar enviesado pela abordagem necessária em Probabilidade, podemos calcular erroneamente o número de possibilidades, supondo que há uma distinguibilidade que não cabe, necessariamente.

Em outras palavras, a depender da estrutura experimental, para a Combinatória há quatro resultados possíveis (o caso 2 e o caso 3 do exemplo anterior tiveram o mesmo número de possibilidades apenas por uma coincidência), enquanto para a Probabilidade somente os casos de distinguibilidade intrínseca são potenciais ao cálculo. Se tomarmos como exemplo o evento E = “A soma dos valores das faces dos dados é igual a 3”, obtemos que

$$P(E) = \frac{2}{36} (apenas\ a\ distinguibilidade\ intrínseca\ )$$

$$P(E) = \frac{4}{72} (distinguibilidade\ intrínseca\ e\ extrínseca)$$

A partir do exemplo acima, evidenciamos mais uma vez o fato de que há uma soldadura equivocada entre o ensino de Combinatória e o de Probabilidade, tema esse que, apesar de não compor o escopo deste trabalho, afeta diretamente o ensino de Combinatória e por isso precisa ser mencionado. Tal engessamento leva ao ensino de combinatória um viés no tratamento da contagem de possibilidades, partindo de um ponto de vista que apenas é necessário no tratamento da Probabilidade.

Para tratar dessa diferenciação, não é necessário levar para a sala de aula os termos “distinguibilidade intrínseca” e “distinguibilidade extrínseca”. Reconheço que essa é uma linguagem que cabe mais a uma troca entre pares. No caso, é completamente satisfatório partir de problemas como esse do dado, ou até outros com uma menor quantidade de possibilidades, para que se possa evidenciar para o aluno as diferenças entre trabalhar com objetos idênticos, objetos distinguíveis (cores diferentes, por exemplo), lançamento/retirada simultâneo ou ordenado, para que o mesmo crie a consciência da relevância dessas características nos experimentos analisados ainda que sem usar os devidos termos para referir-se a elas.

Vejamos agora outro exemplo:

Exemplo 06: *De quantas formas um pódio com os três primeiros colocados numa competição pode ser formado, considerando que há seis atletas competindo?*

Primeiro, quantas decisões precisam ser tomadas? Tendo uma decisão para cada colocação, podemos afirmar que são três decisões a serem tomadas, sendo elas:

D_1: Escolher o 1° colocado.

D_2: Escolher o 2° colocado.

D_3: Escolher o 3° colocado.

De quantas formas cada decisão pode ocorrer? Já que há 6 atletas, a primeira decisão pode ocorrer de 6 modos. Uma vez ocupado o 1° lugar, com um atleta “A”, a segunda decisão pode ocorrer de 5 modos diferentes pois qualquer um dos outros cinco atletas podem ocupar a segunda posição. O mesmo ocorre para qualquer outra possibilidade que seja fixada no primeiro lugar. E, após as duas primeiras decisões, o 3° colocado pode ser escolhido de 4 modos distintos, independente de quem estiver nas duas posições ocupadas primeiro. Logo, o total de possibilidades para esse pódio é $6.5.4 = 120$.

Dentre o total de possibilidades, podemos notar que o pódio (A, B, C) é diferente do pódio (B, C, D), que também é diferente do pódio (C, D, B), certo? Significa que não é apenas o fato de mudar pelo menos um dos atletas no pódio que o altera, como também, as possíveis ordenações formadas por três determinados atletas que compõem um pódio em particular. Seguindo esse raciocínio poderíamos pensar que aquilo que estamos contando representa o número de maneiras de escolhermos triplas ordenadas dentre seis elementos disponíveis. Ou seja, além dos ternos possíveis, estamos considerando a ordem que esses elementos são escolhidos para compor o trio. Por exemplo, se tomarmos o terno $\{a, b, c\}$, quantas ordenações diferentes são possíveis com esses elementos? Ao todo, há seis ordenações possíveis entre eles que são representadas pelas sequências (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Com essa abordagem nos deparamos com o que definiremos mais a frente como Arranjo Simples, nesse exemplo, de 6 elementos, tomados 3 a 3, cujo total é dado exatamente pelo cálculo resolvido acima: $6.5.4 = 120$.

Explorando um pouco mais o contexto anterior, o que obtemos ao listar todos as ordenações possíveis resultados considerando os seis atletas em seis colocações? Quantas decisões seriam tomadas? Como são seis colocações que precisam ser ocupadas, vemos que são seis decisões. De quantas formas a primeira pode ocorrer? De 6 modos. E a segunda? Fixando um atleta em primeiro lugar, a segunda decisão pode ocorrer de 5 modos. Isso vale para qualquer atleta que ocupe a primeira colocação. Analogamente, a terceira pode ocorrer de 4 modos. E a quarta? De 3 modos. A quinta? De 2 modos. E a sexta? Apenas 1 modo. Segue que o total de resultados é $6.5.4.3.2.1 = 720$. Aqui, o conjunto utilizado para ocupar o pódio sempre foi {a, b, c, d, e, f}, porém o que precisamos contar representa o total de sequências de seis elementos que podemos construir com esses seis disponíveis. Quando trabalhamos com todos os elementos de um conjunto no qual todos os elementos são distintos entre si, nos preocupando apenas com o total de ordenações possíveis que podem ser construídas com esses mesmos objetos, estamos realizando o que definiremos como a *Permutação Simples*, nesse caso, de 6 elementos. Observando a equação obtida por último, vemos algo familiar. O quê? Vemos justamente o que definimos como o fatorial de 6, ou seja, 6! cujo resultado é 720.

Agora, se a pergunta anterior fosse sobre o número de ordenações possíveis, entre os 5 porta-retratos distintos que estão sobre uma mesa, posicionados lado a lado, qual seria o resultado? Veríamos que a primeira decisão pode ocorrer de quantas formas? De 5 formas. A segunda? De 4 formas. A terceira? De 3 formas. E assim por diante. Devido a isso, o total de formas de organizar esses objetos é dado por $5.4.3.2.1 = 120$. Mais uma vez surge algo familiar. Agora podemos observar o fatorial de 5, ou seja, 5! cujo resultado é 120. Vale ressaltar também que, mais uma vez, estamos trabalhando com todos os elementos (distintos entre si) em cada arrumação considerada e o que muda de uma possibilidade para a outra é justamente a posição desses objetos. Novamente, temos um caso do que definiremos como Permutação Simples, nesse caso, de 5 objetos.

Tem-se uma maneira de chegar à fórmula da permutação simples de n objetos como é enunciado por Gonçalvez (2014):

> *Dessa maneira temos que, se temos à nossa disposição n objetos para organizar em n casas, vemos que para ocupar a primeira posição temos n opções de escolha, para ocupar a segunda posição temos (n – 1) opções, na terceira casa (n – 2) opções, e assim até chegarmos a n-ésima casa, quando teremos apenas uma opção* (GONÇALVEZ, 2014, p.22).

Aplicando o princípio multiplicativo no raciocínio descrito acima, ficamos com o desenvolvimento $P_n = n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots 2.1 = n!$, que representa o total de permutações envolvendo n objetos distintos, ou seja, o total de Permutações Simples desses objetos.

As permutações figuram em situações nas quais utilizamos todos os objetos disponíveis ao mesmo tempo. Um contexto frequentemente usado para abordar a ideia de permutação trata da construção de anagramas. Definiremos Anagrama como todas as possíveis ordenações das letras de uma palavra. Repare que tal definição não deixa dúvidas sobre uma palavra ser vista como um dos possíveis anagramas de si. Vejamos um exemplo envolvendo anagramas.

Exemplo 07: *Qual o total de anagramas que podem ser formados com as letras F, I, N, A e L?*

O que precisamos saber para responder à pergunta? Bom, basta saber o total de sequências de tamanho 5 (com 5 elementos) que podem ser formadas com as letras dadas. Todos os elementos disponíveis são distintos? Sim. Então, nesse caso, estamos lidando com permutações simples, cujo total é dado por $P_n = n!$. Segue que

$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$ anagramas.

Outro olhar que podemos ter sobre esse problema é que há a tomada de 5 decisões. A primeira trata da letra com a qual se iniciará o anagrama, a seguinte trata da próxima letra, e assim sucessivamente, até a quinta decisão que trata da última letra na construção do anagrama. Logo, podemos usar apenas o princípio multiplicativo e como há 5 modos de tomar a primeira decisão, 4 modos de tomar a segunda decisão, 3 para a terceira, 2 para a quarta e 1 para a quinta e última decisão, segue que há um total de $5.4.3.2.1 = 120$ anagramas possíveis.

Sobre o fatorial, será que é possível explicitar algum fatorial no desenvolvimento feito para obter os resultados encontrados nos outros dois problemas anteriores às situações de permutação?

No Exemplo 04, chegamos ao cálculo $9.8 = 72$. O primeiro membro dessa equação possui dois dos fatores do "começo" do fatorial de 9. O que precisa ser feito para obter o fatorial de 9? Nesse caso, o produto já existente deve ser multiplicado por 7.6.5.4.3.2.1, que é o fatorial de 7. Como se trata de uma equação, podemos multiplicar ambos os lados por esses fatores sem alterar a equação. Segue que

$$9.8 = 72$$

$$9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 72\,.7.6.5.4.3.2.1$$

$$9! = 72.\,7!$$

$$\frac{9!}{7!} = 72$$

$$\frac{9!}{(9-2)!} = 72$$

O que seria equivalente a multiplicar e dividir o lado direito da equação por 7.6.5.4.3.2.1 já que seria o mesmo que multiplicar por 1, o que não altera o número por se tratar do elemento neutro da multiplicação.

No Exemplo 05, chegamos à equação $6.5.4 = 120$. O primeiro membro da equação nos remete ao fatorial de 6. Para que 6! apareça na equação, podemos multiplicar do lado esquerdo por 3.2.1, e, para preservar a equação, temos que fazer o mesmo do lado direito. Desenvolvendo, obtemos

$$6.5.4 = 120$$

$$6.5.4.3.2.1 = 120.3.2.1.$$

$$6! = 120.3!$$

$$\frac{6!}{3!} = 120$$

$$\frac{6!}{(6-3)!} = 120$$

Como comentado anteriormente, na primeira situação há 9 objetos distintos disponíveis, dos quais 2 são escolhidos por vez, considerando a ordem de escolha como um fator relevante para a distinguir uma possibilidade de outra. Na segunda situação, há 6 objetos distintos disponíveis, dos quais 3 são escolhidos de cada vez. Agrupamentos formados a partir de objetos distintos, nos quais a ordem de escolha dos objetos gera resultados diferentes, além da própria composição do agrupamento em si, caracterizam aquilo que definimos como Arranjo Simples. Denotando como n o total de objetos distintos disponíveis, e p como o número de escolhas a serem feitas - o que é equivalente ao tamanho do grupo a ser formado - podemos calcular o total de arranjos simples de n objetos, tomados de p em p objetos por vez, tal que $n \geq p$, da seguinte maneira: A primeira escolha pode se dar de n maneiras, a segunda escolha pode ocorrer de $(n-1)$ maneiras, a terceira de $(n-2)$ maneiras, a quarta escolha de $(n-3)$ maneiras, até a $p-ésima$ escolha que pode ocorrer de $(n-p+1)$ maneiras. A quantidade de formas que a $p-ésima$ pode ocorrer nem sempre é percebida de imediato, o que pode ser esclarecido ao relacionar o ordinal da decisão que está sendo tomada com a quantidade de maneiras que aquela decisão pode ocorrer, como na tabela que se segue:

Tabela 1 - Relação: Decisão x Total de formas de decidir

Decisão (D)	Total de formas da decisão ser tomada(T)	D+T
1	n	$n+1$
2	$n-1$	$2+(n-1) = n+1$
3	$n-2$	$3+(n-2) = n+1$
4	$n-3$	$4+(n-3) = n+1$
…	…	…
p	k	$p+k = n+1$

Fonte: Elaboração do autor.

Observando que a soma dos dois primeiros valores em cada linha resulta sempre em $(n+1)$, na última linha da tabela, supondo que a $p-ésima$ decisão pode ser tomada de k maneiras, podemos concluir que $p+k = n+1$. Resolvendo essa equação, segue que

$$p+k = n+1$$

$$k = n-p+1 = n-(p-1)$$

nos permitindo concluir que tal decisão pode ocorrer de $(n-p+1)$ maneiras.

Outra forma de visualizar os elementos da tabela acima é mostrado abaixo:

Tabela 2 - Relação: Decisão x Total de formas de decidir (2)

Decisão	Total de formas de decidir
1	$n - (1-1)$
2	$n - (2-1)$
3	$n - (3-1)$
4	$n - (4-1)$
...	...
p	$n - (p-1)$

Fonte: Elaboração do autor.

De acordo com a Tabela 2, chegamos à mesma conclusão sobre a $p - ésima$ decisão, a respeito do número de maneiras que ela pode ocorrer. Além disso, trabalhando em cima da expressão $n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-(p-1))$, segue que

$$n.(n-1).(n-2).(n-3).\big(n-(p-1)\big) = n.(n-1).(n-2).(n-3).\big(n-(p-1)\big).1$$

$$n.(n-1).(n-2).(n-3).\big(n-(p-1)\big)$$
$$= n.(n-1).(n-2).(n-3).\big(n-(p-1)\big).\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

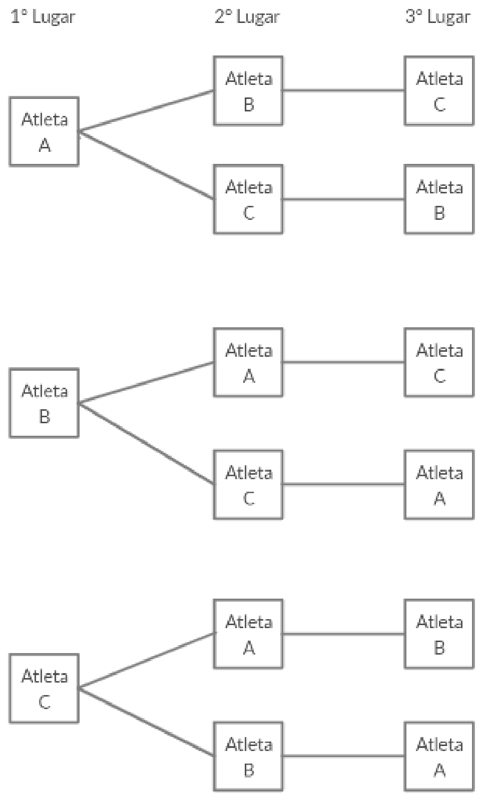
Logo, temos que o total de Arranjos Simples de n elementos distintos, tomados de p em p, tal que $n \geq p$, pode ser dado por

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

O que aconteceria num contexto em que o tamanho do agrupamento formado fosse igual ao número de objetos distintos disponíveis, ou seja, num caso particular no qual $n = p$? Por exemplo, se quiséssemos contabilizar o total de resultados possíveis numa competição com apenas três atletas participantes?

Bom, para resolver esse problema, bastaria analisar o total de agrupamentos ordenados de três objetos que poderiam ser formados com esses atletas, ou seja, como todos os atletas sempre estarão incluídos nos agrupamentos, a distinção se dará pela ordem de inclusão dos atletas nos agrupamentos. No caso, isso equivale a contabilizar o total de permutações simples desses três objetos. Antes de recorrermos a alguma das fórmulas já vistas, por meio da listagem usando a árvore de possibilidades obtemos o total de 6 resultados, conforme o diagrama abaixo:

Figura 4 - Listagem dos agrupamentos ordenados com os três atletas



Fonte: Elaboração do autor

Agora, pela interpretação já colocada, podemos afirmar que se trata de uma situação na qual está sendo contado o total de arranjos simples de 3 elementos, tomados 3 a 3. Logo, usando a relação obtida, segue que

$$A_{3,3} = \frac{3!}{(3-3)!}$$

$$A_{3,3} = \frac{3!}{0!}$$

Sabemos que esse resultado deve ser equivalente à permutação simples de três elementos, ou seja, $P_3 = 3!$. Assim

$$A_{3,3} = \frac{3!}{0!} = 3! = P_3$$

O que nos leva a estabelecer

$$\frac{3!}{0!} = 3!$$

ou seja, o porquê da convenção $0! = 1$, dado que $A_{n,n} = P_n$.

Assim, motivado por uma equivalência experimental do arranjo de n objetos distintos tomados n a n com a permutação de n objetos distintos, chega-se à origem da convenção de $0! = 1$. Do contrário, a relação obtida para o cálculo de arranjos simples não funcionaria para o caso $n = p$. Além disso, justamente nesse caso, o que difere de um resultado para outro é apenas a ordem de seus elementos. E vimos que, ao nos preocuparmos apenas com a ordem dos objetos arrumados, estamos realizando suas permutações. Assim, podemos olhar para a permutação simples de n objetos como um caso particular do arranjo simples justamente com $n = p$, enquanto, no arranjo, a permutação fica generalizada porque se desprende da necessidade de envolver todos os elementos disponíveis na arrumação.

Por exemplo, no último problema trabalhado, com os três atletas, a construção de agrupamentos de 3 elementos tomados 3 a 3, poderia ser pensada apenas como a construção de sequências de tamanho 3 que podem ser formadas com 3 objetos. Quando falamos em sequência, por definição, temos que a ordenação dos elementos que a compõem é relevante. Do arranjo com $n = p$, temos que

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!}$$

$$A_{n,n} = \frac{n!}{0!}$$

tomando $0! = 1$, segue que

$$A_{n,n} = n!$$

o que recai no que definimos como o número de permutações de n objetos distintos, também chamado de Permutação Simples, dado por $P_n = n!$.

Agora, como faríamos arranjos com objetos não necessariamente distintos, como no exemplo abaixo?

Exemplo 08: Qual o total de números de dois algarismos que podem ser construídos com os algarismos $4, 5$ e 6?

Aqui, devem ser tomadas duas decisões, cada uma com 3 possibilidades distintas. Logo, pelo P.F.C., temos: $3.3 = 3^2 = 9$ possibilidades. Considerando que a ordem de escolha entre os elementos distintos é um fator relevante para gerar resultados diferentes, poderíamos calcular o número de arranjos simples de três elementos, tomados 2 a 2, que é dado por $A_{3,2} = 6$ e representa o número de possibilidades sem algarismos repetidos, e acrescentar as possibilidades com algarismos repetidos que são os números $44, 55$ e 66, totalizando $6 + 3 = 9$ possibilidades como havíamos encontrado. Os números com dois algarismos repetidos podem ser obtidos tanto por listagem quanto pelo uso do P.F.C., colocando como primeira decisão a escolha do primeiro algarismo, que possui 3 modos de ocorrer, e a segunda decisão como escolher o algarismo igual àquele escolhido na decisão anterior, que possui apenas um modo de acontecer, gerando a seguinte expressão: $3.1 = 3$. Se fossemos gerar números de, por exemplo, 5 dígitos usando esses 3 algarismos, obteríamos, com o PFC: $3.3.3.3.3 = 3^5 = 243$ possibilidades. Nessa situação já seria mais complexo de contar separadamente os casos em que houvesse pelo menos dois algarismos repetidos mostrando que esse desmembramento da situação não é muito eficaz considerando números com mais de dois algarismos. Devemos observar que continuamos numa situação que caracteriza a construção de Arranjos, porém com a possibilidade de algarismos repetidos, o que foge do escopo do Arranjo Simples, visto anteriormente. Aqui, temos aquilo que definiremos como Arranjo com Repetição de n elementos disponíveis e p escolhas que precisam ser feitas. Partindo dos exemplos anteriores, podemos conjecturar que

$$AR_{n,p} = n.n.n.n.n.\ldots.n = n^p$$

que é a fórmula já conhecida para contagem das possibilidades nesse tipo de situação.

Até agora, o Princípio Multiplicativo foi a ferramenta base para resolver os problemas abordados. No Exemplo 08, usamos um caminho alternativo que tratou de separar as possibilidades em dois conjuntos disjuntos. O primeiro continha somente os elementos com os dois algarismos distintos entre si, e o segundo continha somente os elementos com os dois algarismos iguais entre si. Calculamos a cardinalidade de cada conjunto e, no fim, as somamos para obter o total de possibilidades. Ao aplicarmos o arranjo simples, utilizamos o princípio multiplicativo, e ao somar as cardinalidades, utilizamos o princípio aditivo. O uso desses princípios em conjunção é uma estratégia frequentemente utilizada na resolução de problemas de contagem, e muito eficaz, por sinal.

2. 3 Princípio Aditivo em Conjunção com o Princípio Multiplicativo

Além de situações mais simples nas quais ocorre o uso de um, e apenas um, dentre os dois princípios básicos de contagem, como ocorreu em diversas das situações anteriormente abordadas, também vimos que existem situações mais elaboradas em que precisamos fazer uso dos dois princípios para que possamos contá-la corretamente. É desse tipo de situação que trata o exemplo abaixo.

Exemplo 09: *Dois irmãos gêmeos, João e Marcos, resolveram criar um código próprio para que pudessem trocar bilhetes entre si sem que outras pessoas pudessem entender suas mensagens. Nesse código, as "palavras" tem de duas a quatro letras e eles utilizavam apenas as letras a e b para escrevê-las. Nessas condições, quantas palavras distintas podem ser criadas pelos irmãos?*

Em primeiro lugar, cabe perceber que a construção das palavras ocorre segundo um dos seguintes casos:

Caso 1 (Conjunto D): A palavra possui 2 letras;

Caso 2 (Conjunto T): A palavra possui 3 letras;

Caso 3 (Conjunto Q): A palavra possui 4 letras.

Cada um dos casos origina um conjunto cujos elementos pertencem somente àquele caso. Ou seja, os três conjuntos gerados são disjuntos dois a dois. O total de palavras é dado pelo total de elementos dos três conjuntos, que equivale a soma das quantidades de palavras que atendem a cada um dos três casos, ou seja, equivale à cardinalidade da união dos conjuntos criados. A cardinalidade da união resulta, nesse caso, da soma das cardinalidades dos conjuntos, ou seja $n(D \cup T \cup Q) = n(D) + n(T) + n(Q)$. Seja D o conjunto de palavras com 2 letras cada. Para construir uma palavra que pertença a esse conjunto são necessárias duas decisões que tratam da escolha da primeira e, depois, da segunda letra, respectivamente. Tanto a primeira quanto a segunda escolha pode ser feita de duas formas distintas, já que há apenas duas letras disponíveis. Então, pelo Princípio Multiplicativo, esse conjunto possui $2.2 = 4$ elementos. Seja T o conjunto de palavras com 3 letras cada. Para construir as palavras pertencentes a esse conjunto devem ser tomadas três decisões, sobre a primeira, a segunda e a terceira letra, respectivamente. Como cada decisão pode ser tomada de duas formas distintas, pelo Princípio Multiplicativo, esse conjunto possui $2.2.2 = 8$ elementos. Por fim, seja Q o conjunto de palavras com 4 letras cada. Então, num raciocínio análogo aos anteriores, podemos afirmar que ele possui $2.2.2.2 = 16$ elementos. Ao construir uma palavra, ela pertence a um, e apenas um, dos conjuntos supracitados. Logo, pelo Princípio Aditivo, segue que o total de palavras que podem ser construídas é $4 + 8 + 16 = 28$ palavras.

Esse problema exemplifica uma situação que pode gerar confusão entre os alunos. Aqui, não é raro que ocorra um questionamento por parte deles sobre qual dos princípios devem ser utilizados, o Aditivo ou o Multiplicativo - como se o uso do primeiro impedisse o uso do segundo - faltando cogitar a possibilidade do uso de ambos, cada qual em seu devido momento da resolução. Em vista disso, se faz necessário ressaltar que uma ferramenta não exclui a outra, como a própria resolução desse problema mostra.

2.4 Princípio Multiplicativo Gerando Contagens Repetidas

O Princípio Multiplicativo, desde a sua definição, considera uma ordenação das decisões. Precisa existir uma primeira decisão, para depois ser tomada uma segunda decisão e assim por diante. Se não houver um ponto de partida, uma sequência bem definida, além de fugir da própria definição, cria-se toda uma confusão a respeito do seu uso. Justamente por considerar uma ordenação, a aplicação direta do princípio multiplicativo pode, eventualmente, contar um número de resultados repetidamente, além daquilo que é realmente válido. Mais especificamente, como há uma ordem intrínseca à sua aplicação, o que ocorre é a contagem de um resultado particular acompanhado da contagem das possíveis permutações que envolvem os componentes daquele resultado. Assim, para que seja possível continuar fazendo uso dessa ferramenta, precisamos reestruturar o raciocínio de modo que consigamos corrigir essa contagem repetida. Permutações com elementos não necessariamente distintos, em organização “circular” (ou no entorno duma poligonal fechada) e a construção de combinações simples, que tratam de agrupamentos não ordenados, ou seja, desconsiderando a ordem de escolha dos elementos, são casos particulares nos quais obtemos contagens repetidas com o uso direto do

P.F.C. Vejamos como proceder ao nos depararmos com situações análogas às mencionadas, resolvendo os problemas abaixo.

Exemplo 10: *Rita resolveu abrir seu próprio negócio na pequena cidade em que mora. Como é um local em que faz muito calor, resolveu investir suas economias numa loja de açaí. Lá, além de comprar o açaí, o cliente deve escolher dois ingredientes distintos dentre cinco opções (morango, banana, mel, leite condensado e leite em pó) disponíveis, para serem batidos com o açaí. De quantas formas distintas um cliente pode fazer a escolha desses ingredientes?*

Ao considerar a decisão sobre o primeiro ingrediente, vemos que há quantas maneiras de escolhê-lo? Cinco. Seguindo, a decisão sobre o segundo ingrediente sempre possui quantas maneiras de ocorrer? Quatro, visto que os ingredientes devem ser distintos. Logo, aplicando o Princípio Multiplicativo obtemos que as duas decisões podem ser tomadas de $5.4 = 20$ maneiras distintas. Vamos olhar alguns desses resultados. Um deles é o par ordenado (morango, banana). Escolher morango primeiro, e banana em segundo. Outro desses resultados é o par ordenado (banana, morango). Escolher banana primeiro, e morango em segundo. Lembra que o P.F.C. considera uma ordem? Então, devido a isso os dois pares citados foram contados como resultados distintos apesar de representarem, na prática, a mesma coisa. Inspecionando outros resultados e seus "simétricos", notamos que cada possibilidade foi contada em dobro. Na prática, eles representam a mesma escolha de ingredientes que será misturado ao açaí, visto que a ordem que você adiciona os ingredientes no preparo não muda a mistura obtida no final. Investigando um pouco mais, podemos concluir que dentre os 20 resultados obtidos, ao desconsiderarmos a ordem, existem apenas 10 pares distintos de ingredientes. Como a contagem repetida ocorre para cada par de objetos, que é contado duas vezes, precisamos considerar apenas um a cada dois resultados, ou seja, somente metade da quantidade obtida é relevante. Como a quantidade aparente de possibilidades é igual a 20, significa que temos $20:2 = 10$ pares possíveis de ingredientes distintos.

A percepção de que a única diferença entre cada par possível se dá de forma intrínseca - pelos ingredientes que o compõem - é essencial para concluir que a ordem de escolha dos ingredientes não é relevante, ou seja, não é gerado um resultado, uma mistura diferente, ao inverter a ordem dos elementos escolhidos para serem adicionados no preparo do açaí. Essa habilidade de percepção deve ser aprimorada para que o aluno consiga discernir se o Princípio Multiplicativo na sua forma natural é suficiente e conta corretamente todos as possibilidades, ou se há a necessidade de adaptação do raciocínio, como foi o caso.

Nesse problema abordado, o objetivo principal tratou de construir agrupamentos nos quais a ordem de escolha de seus integrantes é irrelevante para o grupo montado, ou seja, o único fator que distingue um grupo de outro é sua composição, os seus integrantes. Quando isso ocorre, temos o conceito matemático conhecido como Combinação. Como essa Combinação não possui elementos repetidos, trata-se de uma Combinação Simples.

Segundo LIMA et al. (2016),

> *Para resolver o problema das combinações simples basta notar que selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são os selecionados, e um grupo de n – p objetos, que são os não selecionados* (LIMA et al. 2016, p. 87).

Tal característica relativa à ordenação, expressa uma clara diferença quanto a outro tipo de agrupamento que vimos, o Arranjo Simples. Ainda assim, uma dificuldade significativa que os alunos possuem é justamente relacionada a distinguir esses dois tipos de agrupamentos e interpretar em que situação cada um se faz presente. “É Arranjo ou Combinação?" é outro dos questionamentos que surgem nas aulas de Combinatória. O que calculamos aqui representa o número de combinações simples de 5 elementos, tomados 2 a 2. Aplicando a fórmula de Arranjo Simples, obtemos um resultado equivalente ao obtido com o Princípio Multiplicativo, que é

$$A_{5,2} = \frac{5!}{3!} = 20$$

segue que

$$C_{5,2} = \frac{A_{5,2}}{2} = \frac{5!}{2.3!} = 10.$$

Ainda tomando o Exemplo 10 como referência, ao refletir sobre a necessidade de dividir a quantidade de arranjos por 2 para obter a quantidade equivalente a construir subconjuntos com dois elementos, o aluno poderia pensar que bastaria dividir por 3 ao construir subconjuntos de tamanho três. Esse é um raciocínio comum entre eles num primeiro momento, que cai por terra ao investigar o caso em que, por exemplo, dados 5 objetos distintos, queremos construir as combinações simples destes, tomados 3 a 3. Como $A_{5,3} = 60$, teríamos uma quantidade aparente de 60 possibilidades. Porém, ao analisar um terno possível como $\{a, b, c\}$, com o uso do arranjo estamos contando todas as permutações possíveis desses 3 elementos, cujo valor é $P_3 = 3! = 6$. Ou seja, cada resultado válido está sendo contado 6 vezes.

Daí,

$$C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{6} = \frac{5!}{2!.6} = \frac{5!}{2!.3!} = 10.$$

Por isso, é necessário fazer um exemplo como esse último, que é contraintuitivo, para garantir que o aluno não entenda errado aonde queremos chegar.

De uma forma sintética, podemos chegar a uma fórmula para o cálculo das combinações simples, partindo das fórmulas conhecidas para arranjo simples e permutação simples. Suponhamos uma quantidade *n* de elementos distintos, que devem ser combinados *p* a *p*. Sabemos que cada subconjunto de tamanho *p*, é contado *p!* vezes ao utilizar a fórmula de arranjo. Segue que

$$C_{n,p}.p! = A_{n,p}$$

$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$

Logo, o número de combinações simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, é

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!}.\frac{1}{p!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!} = \binom{n}{p}, 0 \leq p \leq n.$$

O conceito de Combinação Simples pode ser estendido para qualquer real *x* tomado *p* a *p* na forma

$$C_{x,p} = \frac{x(x-1)(x-1)\ldots(x-p+1)}{p!}$$

Assim, o que acontece com o desenvolvimento de $C_{n,p}$ se $p > n$? Tomemos como exemplo $\binom{3}{4}$. Desenvolvendo, obtemos

$$\binom{3}{4} = \frac{3.2.1.0}{4!} = \frac{0}{24} = 0$$

Os valores de $C_{n,p} = \binom{n}{p}$, chamados de Números Binomiais, organizados num formato triangular, com n representando o número da linha e p representando o número da coluna, ambos partindo de 0 e crescendo uma unidade por vez, compõem o que denominamos Triângulo de Pascal. Tal objeto matemático apresenta os coeficientes presentes no desenvolvimento de $(x+a)^n$, onde n é um inteiro não negativo, cuja generalização se desdobra na fórmula do conhecido Binômio de Newton. Essa relação diz que se x e a são números reais e n um inteiro não negativo, então

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} a^k x^{n-k}$$

A prova enunciada por Morgado (2006) diz que

> *Temos*
>
> $$(x+a)^n = (x+a)(x+a)\ldots(x+a).$$
>
> *Cada termo do produto é obtido escolhendo-se em cada parêntese um* x *ou um a e multiplicando-se os escolhidos. Para cada valor de k,* $0 \leq k \leq n$, *se escolhermos a em k dos parênteses, x será escolhido em n - k dos parênteses e o produto será igual a* $a^k x^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$. *Isso pode ser feito de* $\binom{n}{k}$ *modos. Então* $(x+a)^n$ *é uma soma onde há para cada* $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\binom{n}{k}$ *parcelas iguais a* $a^k x^{n-k}$ *isto é* $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k\, x^{n-k}$ (Morgado et al, 2006, p.112).

Outro ponto interessante sobre Números Binomiais é que se tomarmos como referência a expressão

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}$$

ela pode continuar fazendo sentido ainda que n não seja um inteiro não negativo. Na verdade, essa expressão faz sentido para qualquer n real, desde que p seja um inteiro não negativo. Nesse caso, $C_{n,p}$ como número de subconjuntos com *p* elementos formados a partir de um conjunto com *n* elementos perde o seu sentido para qualquer *n* que não seja um inteiro não negativo, mas a expressão acima continua sendo válida. Por exemplo, $\binom{-1}{4}$ gera o seguinte

$$\binom{-1}{4} = \frac{(-1).(-2).(-3).(-4)}{4!} = \frac{24}{24} = 1.$$

De acordo com Conrado e Silva (2014), o teorema que é atribuído a Newton não foi uma descoberta dele. Porém, ele foi responsável por sua generalização para valores de *n* fracionários e não negativos, o que conduziu ao estudo das Séries Infinitas, e se mostrou um caso particular das Séries de Taylor.

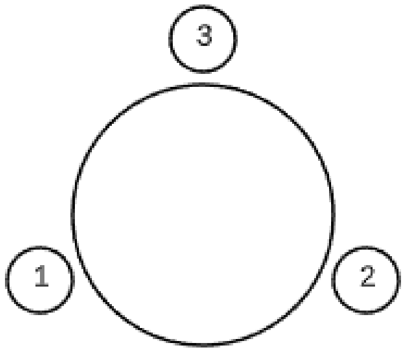
Uma vez concluída a ideia de Combinação Simples, trabalhemos num outro caso particular no qual o P.F.C. gera contagens repetidas como já visto anteriormente, o caso de

Permutações Circulares. Aqui, o que muda é que, diferentemente do que estávamos fazendo, passamos a organizar os nossos objetos em posições equiespaçadas em torno de um círculo (podendo também imaginá-los nos vértices de um polígono convexo qualquer, se $n \geq 3$), considerando como equivalente as disposições que possam coincidir por rotação. Antes, estávamos organizando os objetos numa arrumação linear. Desenvolveremos esse tópico a partir do próximo exemplo.

Exemplo 11: *De quantas formas podemos organizar três pessoas A, B e C em torno de uma mesa de três lugares?*

Sabemos que se esses objetos fossem organizados numa fila, a resposta seria dada por $P_3 = 3! = 6$. Isso é o que ocorre? Não, pois os objetos não estão sendo organizados de modo linear, como uma fila. Com isso, podemos perceber que esse não é o modo correto de resolver tal problema. Então, como fazê-lo? Vamos analisar a situação. Existem três lugares para ocupar. O primeiro desses três lugares, seja qual for, pode ser preenchido por qualquer uma das três pessoas disponíveis. O segundo lugar pode ser ocupado por qualquer uma das duas pessoas restantes. E o terceiro possui apenas uma forma de ser preenchido, pela pessoa que não ocupou nenhum dos dois lugares anteriores. Esse raciocínio é ilustrado pelo esquema abaixo.

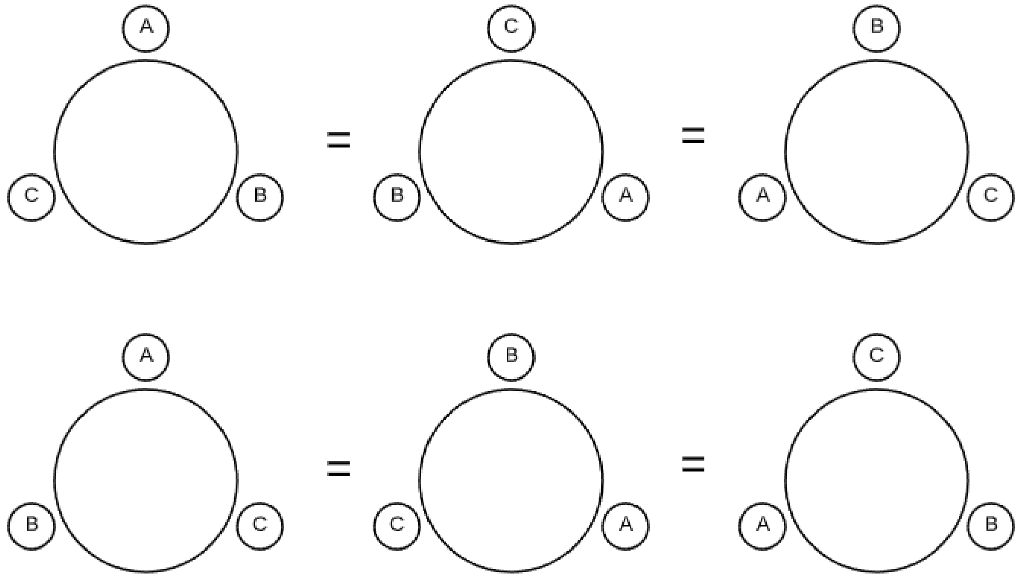
Figura 5 - Uso do P.F.C. na permutação circular



Fonte: Elaboração do autor

Nesse desenvolvimento, o que adotamos como primeiro, segundo e terceiro lugar é arbitrário. O terceiro lugar só possuirá uma forma de ocorrer, a partir do momento em que os dois anteriores sejam definidos. Devido à pequena quantidade de objetos envolvidos, podemos facilmente esboçar todas as possibilidades como é apresentado a seguir:

Figura 6 - Equivalência de arrumações na permutação circular



Fonte: Elaboração do autor

Como estamos considerando equivalentes as disposições que coincidam por rotação, temos que as três permutações na primeira linha do esquema acima são todas idênticas, assim como as três arrumações na segunda linha também são. Ou seja, a cada três arrumações, queremos apenas uma delas, pois as outras duas são repetições da primeira. Isso nos permite concluir que há, nessas condições, apenas duas permutações circulares distintas. Vamos denotar a permutação circular de *n* objetos por $(PC)_n$. Logo, estamos analisando $(PC)_3$, e concluímos que só há duas formas disso ocorrer, ou seja, $(PC)_3 = 2$.

Considerando a mesa fixa, e mudando os lugares dos três objetos no sentido horário ou anti-horário, os lugares ocupados por cada um mudam? Sim, mudam. Porém, diferente da permutação simples, o que importa aqui é a posição *relativa* dos objetos entre si. Em outras palavras, estamos nos voltando às posições dos objetos "vizinhos" a cada um. Nas três primeiras figuras, ao percorrê-las num mesmo sentido, digamos o sentido horário, sempre ocorre do A preceder o B, B preceder o C e C preceder o A. Portanto, a posição *relativa* dos objetos é a mesma. Ao proceder da mesma forma em algum dos círculos da segunda linha da Figura 06, vemos que A precede C, C precede B e B precede A. Uma sequência diferente do que ocorre na primeira linha da mesma figura, logo, uma arrumação cujas posições relativas dos elementos mudaram. Percebemos que cada permutação circular desses três elementos é representada por três disposições diferentes, porém, equivalentes. Assim, também podemos escrever que

$$PC_3 = \frac{3!}{3} = 2! = 2$$

Ao destrinchar exemplos parecidos, alterando apenas a quantidade de elementos distintos envolvidos, observamos que

com 4 elementos, para cada arrumação teremos três rotações equivalentes à primeira. Logo, nos interessaremos por apenas uma a cada quatro arrumações e encontramos $PC_4 = \frac{4!}{4} = 3! = 6$;

com 5 elementos, para cada arrumação teremos quatro rotações equivalentes à primeira. Logo, nos interessaremos por apenas uma a cada cinco arrumações e encontramos $PC_5 = \frac{5!}{5} = 4! = 24$;

e assim por diante, nos permitindo concluir que, com n elementos, teremos, para cada arrumação, $n-1$ rotações equivalentes à primeira. Logo, nos interessaremos por uma a cada *n* arrumações e encontramos

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Um outro modo de verificar isso é exposto por Morgado (2006)

> *Como o que importa é a posição relativa dos objetos, há 1 modo de colocar o 1° objeto no círculo (onde quer que o coloquemos, ele será o único objeto no círculo); há 1 modo de colocar o 2° objeto (ele será o objeto imediatamente após o primeiro); há 2 modos de colocar o 3° objeto (imediatamente após o 1° ou imediatamente após o 2°); há 3 modos de colocar o 4° objeto (imediatamente após o 1° ou imediatamente após o 2° ou imediatamente após o 3°)...; há n-1 modos de colocar o n-ésimo e último objeto. Logo,*
>
> $$(PC)_n = 1.1.2.3\ldots(n-1) = (n-1)!$$
>
> (Morgado et al, 2006, p.46).

Uma vez que lidamos com os casos em que todos os objetos são distintos entre si, vamos abordar tópicos de Contagem em que isso não necessariamente acontece, como é o caso da *Permutação com Repetição*, que, como o próprio nome já diz, significa que pode haver a repetição de objetos. Esse conceito, inclusive, será útil para abordarmos problemas de

Combinações com Repetição, também conhecida como *Combinação Completa*. Além disso, o conceito de Combinação Simples, anteriormente abordado, poderá ser utilizado para resolver problemas acerca do primeiro tópico citado.

Assim como ocorre em diversos materiais didáticos, iremos desenvolver o próximo tópico trabalhando com anagramas. Tomemos o seguinte exemplo como motivação.

Exemplo 12: *Qual o total de anagramas que podem ser formados com as letras C, A, S, A?*

Já que há quatro letras então poderíamos inadvertidamente responder isso com $P_4 = 4! = 24$.

Mas, na verdade, isto não estaria correto pois a aplicação feita é adequada apenas a situações em que trabalhamos com permutações simples, ou seja, requer que todos os elementos permutados sejam distintos entre si. Mesmo que isso não nos dê uma forma de resolver o problema, obtemos um exemplo de caminho incorreto que, eventualmente, pode ser utilizado pelo estudante mais desatento. Cabe ressaltar que destacar um caminho que não deve ser seguido também tem sua importância, já que pode evitar que sejam gastos recursos ao insistir na resolução por meio de um método ineficaz. Para encontrar a solução correta, devemos nos atentar à presença de elementos repetidos, diferentemente do que vínhamos trabalhando até então. Em vista disso, vamos recorrer à forma mais básica de contagem, a listagem, para podermos analisar as características de alguns dos possíveis anagramas existentes, que segue abaixo:

$$1)\ CA_1SA_2\ ;\ 2)\ CA_2SA_1\ ;3)\ CSA_1A_2\ ;\ 4)\ CSA_2A_1\ ;\ 5)\ CA_1A_2S\ ;6)\ CA_2A_1S.$$

Apesar de terem sido construídos, aparentemente, seis anagramas, observamos apenas três "palavras" de fato distintas, CASA, CSAA e CAAS. Observando os anagramas em pares (1 e 2; 3 e 4; 5 e 6), percebe-se que a única mudança que ocorre é a troca de A_1 e A_2, ou seja, trocamos uma letra A por outra letra A, o que não provoca nenhuma alteração na "palavra" em si. Agora, vamos tomar o primeiro anagrama construído na listagem acima e compará-lo com o terceiro anagrama, dessa vez gerado pela troca entre outras letras como segue

$$1)\ CA_1SA_2\ ;\ 3)\ CSA_1A_2$$

Dessa vez, ocorreu a troca entre S e A, dois elementos distintos, o que foi suficiente para gerar um novo anagrama. O mesmo aconteceria se trocássemos a letra C com a letra S ou com alguma das letras A. O ponto em que devemos chegar é que a permutação entre objetos repetidos não gera novos resultados para a contagem. Supondo A_1 e A_2 como elementos distintos, concluiríamos que há 24 anagramas possíveis, porém, através da listagem notamos que a cada dois anagramas gerados pela troca entre as letras A, apenas um nos interessa. Logo, se a cada dois queremos um, então nos interessamos por $\frac{1}{2}$ desses 24, o que nos leva a conclusão de que há um total de

$$P_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = \frac{24}{2} = 12\ anagramas.$$

A notação utilizada indica de modo subscrito o número total de letras, e de modo sobrescrito, o número de repetições de todos os elementos.

Frequentemente, um ponto de dificuldade para os alunos é associar esse denominador como representante das permutações de elementos repetidos. Ao invés disso, é comum que o aluno o intérprete como sendo apenas devido à quantidade de elementos que se repetem. Por isso, é fundamental reforçar a ideia correta utilizando outros exemplos, de preferência exemplos que possuam outros casos de repetição, ou seja, mais de uma letra se repetindo ou uma mesma letra que se repete um maior número de vezes. Por exemplo, trabalhar com as letras da palavra MARAVILHA.

Mais uma vez, vamos analisar alguns anagramas através da listagem.

$$1)MA_1RA_2VILHA_3\ ;2)MA_1RA_3VILHA_2\ ;\ 3)MA_2RA_1VILHA_3\ ;\ 4)\ MA_2RA_3VILHA_1;$$

$$5)MA_3RA_1VILHA_2\ ;\ 6)\ MA_3RA_2VILHA_1;\ 7)VA_1RA_2MILHA_3$$

Observando a lista acima notamos que a trocas realizadas entre as três letras A geram seis vezes $(3! = 6)$ o mesmo anagrama, MARAVILHA. Porém, basta trocar duas letras distintas entre si para gerarmos um objeto novo, o anagrama VARAMILHA. Essa mesma palavra também aparecerá seis vezes na nossa listagem, se realizarmos todas as permutações das três letras A disponíveis. Se supuséssemos que todas as letras dessa palavra são distintas entre si, diríamos que o total de permutações entre suas letras seria igual a

$$P_9 = 9!\ =\ 362880\ anagramas$$

porém, como há três letras que se repetem, e, em consequência disso, geram seis vezes cada anagrama, podemos perceber que nos interessa apenas um a cada seis, ou seja, $\frac{1}{6}$ de 362.880, o que nos dá um total de

$$P_9^{3,1,1,1,1,1,1} = \frac{9!}{3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = \frac{362880}{6} = 60480\ anagramas$$

Agora, o que faríamos se houvesse mais de um elemento se repetindo? Por exemplo, como calculamos o total de anagramas da palavra ARARA? Aqui, além da letra A aparecendo três vezes, temos um segundo elemento se repetindo, a letra R, que aparece duas vezes. Tomando como base o que fizemos nos outros dois exemplos, fica mais simples desenvolver esse raciocínio. Supondo as cinco letras distintas, teríamos $5! = 120$ anagramas, porém devido às duas letras R, cada anagrama está sendo contado 2! vezes, logo, queremos apenas um a cada dois deles nos levando a $\frac{5!}{2!} = 60\ anagramas.$ Cada um desses ainda está se repetindo 3! vezes devido as três letras A permutando entre si, fazendo com que nos interesse apenas um a cada seis desses. Logo, para obtermos o resultado final, corrigindo todas as contagens repetidas, ficamos com

$$P_5^{2,3} = \frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{5!}{2!}.\frac{1}{3!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{120}{12} = 10\ anagramas$$

Além dessa abordagem mais tradicional, conforme dito acima, também podemos recorrer ao conceito de Combinação Simples para resolver essa classe de problemas. Isso fica bem exemplificado por Morgado (2006) ao trabalhar com a palavra “TÁRTARA” no que diz

> *Para formar um anagrama de “TÁRTARA” temos que arrumar 3A, 2R e 2T em 7 lugares, _ _ _ _ _ _ _. O número de modos de escolher os lugares onde serão colocados os A é C_7^3. Depois disso, temos C_4^2 modos de escolher os lugares para colocar os R e, finalmente, um único modo de escolher os lugares para os T.*
>
> *Logo,*
>
> $$P_7^{3,2,2} = C_7^3.C_4^2.1 = 35\,x\,6\,x\,1 = 210.$$
>
> (Morgado et al, 2006, p.49-50).

A expressão final mostrada na citação acima, poderia ser expandida como

$$P_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!\,4!}.\frac{4!}{2!\,2!}.1 = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$$

o que pode ser comparado com o que obtivemos no exemplo da palavra ARARA, que foi

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

e nos permite conjecturar que no caso geral em que há n letras, das quais há α repetições de uma, β repetições de outra,..., e δ repetições da última, onde $\alpha+\beta+...+\delta = n$, chegaremos à

$$P_n^{\alpha,\beta,\cdots,\delta} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\delta!}$$

resultado esse que também pode ser obtido através do raciocínio baseado no método da combinação.

Na sequência de métodos envolvendo repetições, abordaremos o último dos tópicos de contagem mais comuns na educação básica, a Combinação com Repetição, também chamada de Combinação Completa. Seguimos motivados pelo exemplo abaixo.

Exemplo 13: *De quantos modos é possível comprar 3 sanduíches em uma lanchonete que oferece 3 opções?*

De imediato, os alunos costumam pensar em $C_{3,3} = 1$ opção, pois lhes vêm à cabeça que trata de escolher 3 opções distintas dentre os 3 oferecidos. Porém, não foi dito que a compra será, necessariamente, de 3 sanduíches distintos, foi? Sabemos que não. Ou seja, as possibilidades de compra incluem a repetição de sanduíches. Nesse caso, sabemos que o método da Combinação Simples não considera todas as possibilidades para esse problema, já que podemos escolher um mesmo objeto mais de uma vez de maneira válida enquanto essa técnica supõe que são escolhidos apenas elementos distintos. Aqui, representaremos o número de modos de escolhermos p objetos distintos ou não dentre n objetos distintos disponíveis por $(CR)_{n,p}$.

Assim, precisamos decidir quantas unidades serão compradas de cada um dos três sabores de sanduíche, de modo que, ao final da compra, tenhamos obtido três unidades. Isso é o mesmo que atribuir valores para as variáveis $x_1,\ x_2,\ x_3$, onde x_1 é a quantidade de sanduíches do primeiro sabor, e assim por diante. Cabe ressaltar que os valores que podem ser atribuídos devem ser inteiros não negativos. Desse modo, nosso problema pode ser representado pela equação $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, onde cada elemento do conjunto solução corresponde a uma forma diferente de realizar a compra. Com esse novo olhar sobre o problema, podemos interpretar $(CR)_{n,p}$ como o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$ no conjunto dos inteiros não negativos.

Analisando a nossa equação, podemos listar todas as suas possibilidades vide tabela abaixo.

Tabela 3 - Listagem de soluções de $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

x_1	x_2	x_3
0	0	3
0	3	0
3	0	0
1	2	0
1	0	2
2	1	0
2	0	1
0	1	2
0	2	1
1	1	1

Fonte: Elaboração do autor

Com isso, vemos que há 10 formas de realizar a compra, resultado muito diferente do que foi obtido com $C_{3,3}$. Cada solução acima, pode ser representada graficamente com o esquema "bola-traço", comumente utilizado em problemas desse tipo para representar soluções. Nesse esquema, cada "bola" representa uma unidade atribuída à variável, e cada "traço" separa duas variáveis. As soluções obtidas na tabela anterior seguem abaixo respectivamente representadas nesse novo esquema

Tabela 4 - Representação geométrica das soluções de $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

x_1		x_2		x_3		(x_1, x_2, x_3)
	|		|	ooo	→	(0,0,3)
	|	ooo	|		→	(0,3,0)
ooo	|		|		→	(3,0,0)
o	|	oo	|		→	(1,2,0)
o	|		|	oo	→	(1,0,2)
oo	|	o	|		→	(2,1,0)
oo	|		|	o	→	(2,0,1)
	|	o	|	oo	→	(0,1,2)
	|	oo	|	o	→	(0,2,1)
o	|	o	|	o	→	(1,1,1,)

Fonte: Elaboração do autor

Feito esse esquema, o que podemos observar? É notável que cada linha representa uma "fila" de 5 objetos, sendo 3 "bolas" que representam o total de unidades obtido ao somar os valores das variáveis, e 2 "traços" que separam as três incógnitas. Em outras palavras, estamos enfileirando 5 objetos, dentre os quais há 3 repetições de um deles e duas repetições do outro. De onde isso nos é familiar? É equivalente a um exemplo dos anagramas com que trabalhamos no tópico de *Permutação com Repetição*. Graças a essa associação, podemos afirmar que o total de soluções dessa equação pode ser dado por

$$P_{3+2}^{3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10 = C_{5,3}$$

Com isso,

$$(CR)_{3,3} = C_{5,3} = 10.$$

No caso geral de $(CR)_{n,p}$, trabalhamos com p "bolas" e $(n-1)$ "traços", o que nos dá

$$CR_{n,p} = P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!} = C_{n+p-1,p}.$$

Mais uma vez, é importante ressaltar que os exemplos iniciais devem ser viáveis de serem resolvidos por listagem para que o aluno possa explorar e atestar por ele mesmo o total de possibilidades daquela situação ocorrer, o que contribui para a validação da técnica empregada na resolução.

Por fim, para encerrarmos esse capítulo, vejamos uma situação que foge de todos os casos abordados até aqui devido ao rompimento com a *independência das escolhas*, o que pode ser chamado de Princípio da Invariância, e foi o que nos permitiu desenvolver tudo o que foi feito até aqui.

2.5 Princípio Multiplicativo – Rompimento com o Princípio da Invariância (Rompimento com a Independência das Escolhas)

Aqui, abordaremos um exemplo em que não há total independência entre as escolhas, o que significa que aquilo que é considerado como possibilidade numa determinada decisão depende diretamente do que ocorre numa decisão anterior. Em casos desse tipo, há dois desdobramentos possíveis. *Ou será necessário desmembrar a situação em casos, a estratégia de "dividir para conquistar", ou será necessário fazer uso do Princípio da Inclusão e Exclusão*.

Os exemplos abaixo ilustram a aplicação das duas estratégias mencionadas acima, respectivamente.

Exemplo 14: *Considere um baralho usual do qual serão retiradas três cartas. De quantas formas diferentes podemos obter, nesse trio, uma carta do naipe de ouros, uma dama e um rei?*

Antes de desenvolvermos propriamente o caminho de resolução, cabe esclarecer o que se quer dizer com "baralho usual", inclusive em sala de aula, pois nem todos os alunos sabem a estrutura de um baralho comum. Aqui estamos nos referindo a um baralho de 52 cartas, subdivididas em quatro conjuntos de treze cartas, cada um referente a um naipe. Os naipes são *Ouros, Copas, Espadas e Paus*. Os valores das cartas são: A (Ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J(Valete), Q(Dama) e K(Rei). Ao todo existem quatro cópias de cada, uma para cada naipe. Uma vez que isso está esclarecido, partiremos para a resolução do problema.

Vamos colocar que nossa primeira retirada seja uma carta de *Ouros*, a segunda seja de uma *Dama* e a terceira seja o *Rei*. Essa sequência pode ser estabelecida de seis formas diferentes (devido as suas permutações), e, ainda assim, geram o mesmo número de possibilidades cada. De qualquer forma, precisamos adotar uma ordem para que usemos o Princípio Multiplicativo.

Sobre a primeira decisão, notamos que há 13 resultados possíveis. Agora, sobre a segunda decisão, devemos nos perguntar: Para qualquer carta que seja retirada na decisão anterior, quantas são as possibilidades válidas para a minha segunda retirada? Quatro? Não. Basta pensar que se uma *Dama de Ouros* for retirada de primeira, a segunda decisão só será válida mediante a retirada de uma das outras três Damas que restariam no baralho. Aproveitando a linha de pensamento, existe algum resultado da primeira decisão que afeta a terceira retirada? Sim. Se o *Rei de Ouros* for retirado no primeiro saque, a segunda decisão não será afetada, porém a terceira decisão será. Nesse momento, nos deparamos com pontos de quebra do nosso Princípio da Invariância, pois, o número de possibilidades para decisões posteriores varia de acordo com o ocorrido em alguma decisão anterior. Como lidar com isso de modo que consigamos contabilizar nossos resultados corretamente? Iremos dividir a nossa situação em três casos, tomando como norte aquilo que ocorre no primeiro saque do baralho. Tal abordagem fica ilustrada pela tabela abaixo:

Tabela 5 - Número de possibilidades para as três retiradas

1ª Retirada - Ouros	2ª Retirada - Dama	3ª Retirada - Rei	Total
A, 2,..., 10, J	Q(O), Q(P), Q(E), Q(C)	K(O), K(P), K(E), K(C)	11.4.4=176
Q(O)	Q(P), Q(E), Q(C)	K(O), K(P), K(E), K(C)	1.3.4 = 12
K(O)	Q(O), Q(P), Q(E), Q(C)	K(P), K(E), K(C)	1.4.3 = 12

Fonte: Elaboração do autor

Ao abrir o problema em casos, garantimos a validade do Princípio Multiplicativo, pois contornamos a quebra da invariância. Por fim, utilizando o Princípio Aditivo, chegamos à resposta final do problema que é $176 + 12 + 12 = 200$ possibilidades.

Repare que, se tal divisão não tivesse sido feita, e tivéssemos prosseguido como se o Princípio da Invariância não fosse descumprido em nenhum momento, chegaríamos ao valor de $13.4.4 = 208$, que contabilizaria indevidamente sequências do tipo (Q(O), Q(O), K(P)), assim como (K(O), Q(E), K(O)), trios impossíveis de serem formados visto que há apenas uma carta de cada no baralho.

O exemplo que ilustra um outro caso de rompimento com o Princípio em questão é abordado abaixo.

Exemplo 15: *Qual o total de anagramas com as letras A, M, O, R de modo que nenhuma letra esteja em seu lugar original?*

Nesse caso, sabemos que a resposta não é $4! = 24$, visto que esse valor representa todos os anagramas possíveis, e alguns deles possuem uma ou mais letras em suas posições originais como, por exemplo, *AMRO*, que possui A e M em suas posições originais e até mesmo *AMOR* que possui todas as letras em suas posições originais.

Para resolver esse problema, iremos determinar alguns conjuntos, sendo cinco deles

$$\Omega = Conjunto\ com\ todos\ os\ anagramas\ possíveis\ com\ as\ letras\ A, M, O\ e\ R.$$

$$A_1 = Conjunto\ de\ anagramas\ com\ A\ na\ sua\ posição\ original$$

$$A_2 = Conjunto\ de\ anagramas\ com\ M\ na\ sua\ posição\ original$$

$$A_3 = \text{ } Conjunto\ de\ anagramas\ com\ O\ na\ sua\ posição\ original$$

$$A_4 = \text{ } Conjunto\ de\ anagramas\ com\ R\ na\ sua\ posição\ original$$

A partir desses conjuntos, precisamos observar que há elementos em comum entre eles, como *AMRO* que pertence tanto ao primeiro quanto ao segundo conjunto construído, visto que possui tanto a letra A quanto a letra M em suas respectivas posições originais. Além disso, conforme o que foi definido, concluímos que o conjunto cuja cardinalidade responde ao nosso problema é a interseção entre os complementares dos conjuntos criados, já que cada um deles conterá apenas elementos nos quais sua respectiva letra não está na posição original. Definiremos mais quatro conjuntos abaixo, sendo eles

$$A_1^C = \text{ } Conjunto\ de\ anagramas\ com\ A\ fora\ da\ sua\ posição\ original$$

$$A_2^C = \text{ } Conjunto\ de\ anagramas\ com\ M\ fora\ da\ sua\ posição\ original$$

$$A_3^C = \text{ } Conjunto\ de\ anagramas\ com\ O\ fora\ da\ sua\ posição\ original$$

$$A_4^C = \text{ } Conjunto\ de\ anagramas\ com\ R\ fora\ da\ sua\ posição\ original.$$

Com isso, buscamos encontrar a cardinalidade de $A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C$, que representaremos por $n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C)$ e poderá ser obtida através de

$$n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C) = n(\Omega) - n\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right)$$

Visto isso, precisamos recorrer ao Princípio da Inclusão e Exclusão para obter o número de elementos de $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$, o que nos conduz a

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) \\ &- n(A_1 \cap A_4) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_4) - n(A_3 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &+ n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ &+ n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4). \end{aligned}$$

Sabemos que $n(A_1)$ remete ao número de anagramas nos quais a letra A ocupa a primeira posição. Para calcularmos isso, basta realizarmos a permutação simples das três letras restantes, o que nos leva a $n(A_1) = 3! = 6$. Analogamente, obtemos que $n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = 6$. Para obter $n(A_1 \cap A_2)$, fixamos as letras A e M nas duas primeiras posições, respectivamente, e permutamos as demais letras. Isso nos leva a $n(A_1 \cap A_2) = 2! = 2$. De modo análogo, segue que

$$n(A_1 \cap A_3) = n(A_1 \cap A_4) = n(A_2 \cap A_3) = n(A_2 \cap A_4) = n(A_3 \cap A_4) = 2! = 2.$$

Na sequência, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ é obtido ao fixarmos as letras A, M e O nas três primeiras posições. Porém, ao fazer isso, a letra R também acaba fixada na quarta posição, no dando que $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1$. O mesmo ocorre ao contar o número de elementos das demais interseções três a três, permitindo concluir que

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 1$$

De modo parecido, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 1$, pois se trata das quatro letras formando a palavra original “AMOR”.

Logo,

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = 4.6 - 6.2 + 4.1 - 1 = 15$$

E, por fim, podemos concluir que

$$n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C) = n(\Omega) - n\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right)$$

$$n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C) = 24 - 15 = 9$$

Nesse Exemplo 15, temos a representação de um problema clássico trabalhado na Análise Combinatória, referente a conhecida *Permutação Caótica* ou *Desarranjo de n elementos distintos* (D_n). Tais situações são resolvidas fazendo uso do Princípio da Inclusão e Exclusão que, sendo generalizado para uma situação com *n* elementos, nos dá a seguinte relação sobre o número de Desarranjos possíveis

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Uma consequência dessa relação é obtida ao notar que o *Número de Euler e*, pode ser obtido através de

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

e que

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$$

nos permitindo concluir que

$$D_n \cong \frac{n!}{e}$$

De modo mais preciso, D_n é dado pelo inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$.

Com isso, encerramos aqui os Tópicos de Contagem mais comuns do Ensino Básico - além de um ou outro não tão comum como, por exemplo, Permutação Caótica - e seguimos para o próximo capítulo no qual faremos algumas reflexões sobre a versão do professor dos livros didáticos aprovados no PNLD 2020, buscando analisar seu conteúdo assim como as orientações presentes nos mesmos sobre a abordagem dos conteúdos de Combinatória.

3. Análise da Versão do Professor dos Livros Didáticos

Uma vez que finalizamos os tópicos cobrados para o ensino de Combinatória no contexto da Educação Básica, iremos lançar um olhar sobre o discurso presente nos livros didáticos que chegam às mãos dos professores atuantes nesse segmento para tentar antever como os autores dos livros conduzem didaticamente as heurísticas para soluções de combinatória.

Nesses livros, serão analisados também a abordagem proposta da Combinatória, assim como as orientações da versão do professor sobre o ensino da mesma para avaliar a consonância daquilo que é proposto com o que este trabalho defende e com o que orienta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). No que tange os anos finais do Ensino Fundamental, iremos analisar o Manual do Professor referente ao segmento do 8° ano pois é nesse momento que deve ser abordado explicitamente o Princípio Fundamental da Contagem, segundo recomenda a BNCC.

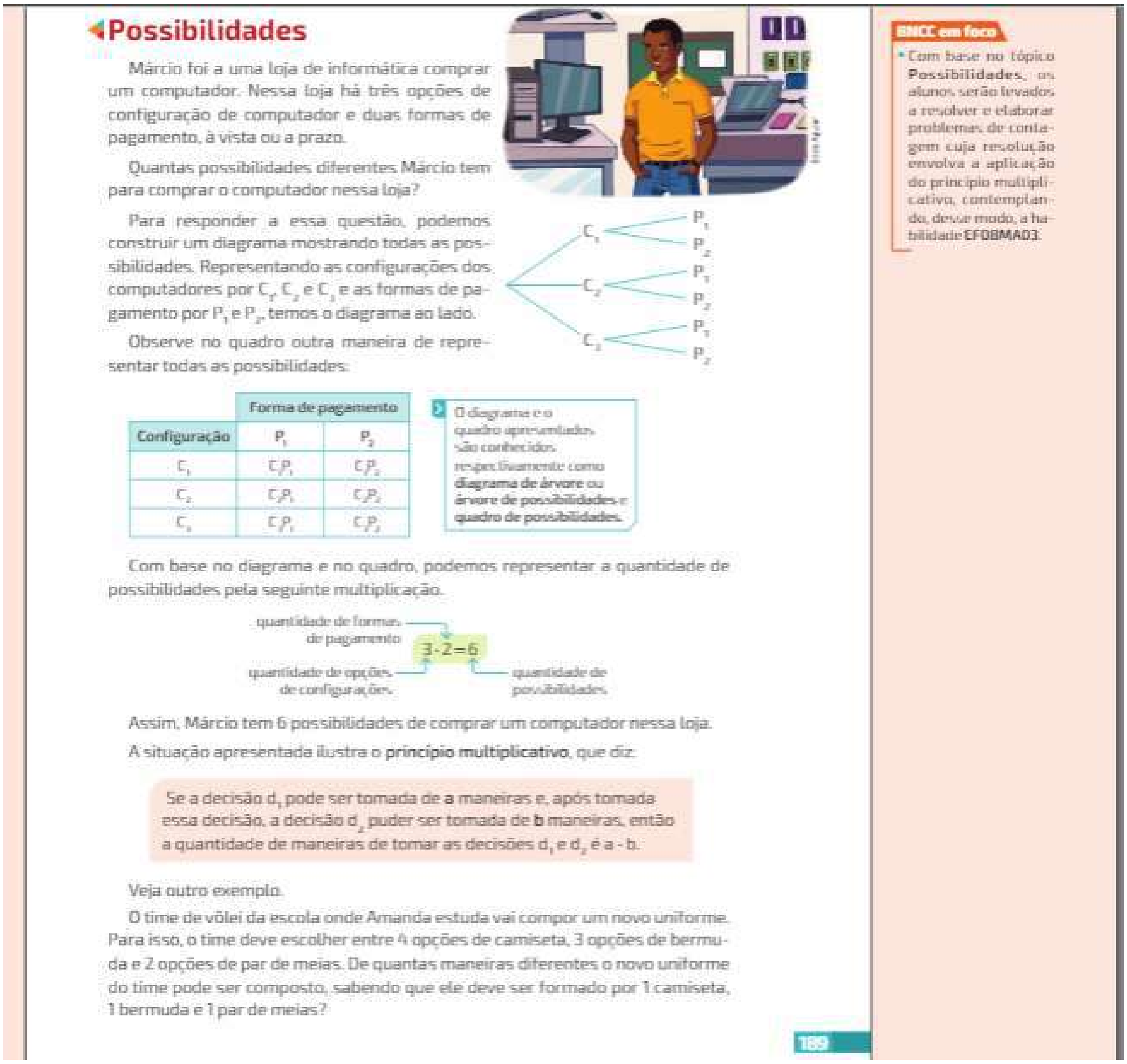
Sobre a escolha dos títulos em si, o motivo que nos levou a analisar especificamente as obras dessas editoras se deve a Santos e Silva (2019) que, ao discutir as relações de poder que permeiam a elaboração dos livros didáticos de matemática, trazem a representatividade dos grupos editoriais no que diz respeito às vendas ao MEC no período de 2005-2017. As três editoras elencadas aqui pertencem ao mesmo grupo editorial, que nesse mesmo período, junto das outras duas editoras pertencentes ao mesmo grupo, detiveram 40% das vendas de livros didáticos ao MEC, sendo esse o maior percentual de vendas obtido por um único grupo em tal período e o dobro do segundo maior percentual de vendas.

3.1 Ensino Fundamental – Anos Finais (8º ano)

a) Coleção Matemática Essencial – Editora Scipione (8º ano)

A autoria dessa coleção é de Patrícia Rosana Moreno Pataro, Especialista em Estatística pela UEL-PR (Universidade Estadual de Londrina - Paraná), e Rodrigo Dias Balestri, Mestre em Ensino de Ciência e Educação Matemática pela UEL-PR. O Princípio Multiplicativo é abordado no Capítulo 8 da obra, intitulado "Estatística e Probabilidade", no tópico "Possibilidades", que é trabalhado ao longo de quatro páginas, a maior parte do conteúdo sendo exercícios para o aluno resolver. Acredito que esse título seja para facilitar o encadeamento de ideias com o tópico seguinte, que trata do cálculo de probabilidades. O assunto é iniciado partindo de um exemplo resolvido cuja solução é apresentada de três modos diferentes: árvore de possibilidades, quadro de possibilidades e através de uma multiplicação, vide a figura abaixo.

Figura 7 - Reprodução da pág. 189 do vol. 8 da coleção Matemática Essencial



Possibilidades

Márcio foi a uma loja de informática comprar um computador. Nessa loja há três opções de configuração de computador e duas formas de pagamento, à vista ou a prazo.

Quantas possibilidades diferentes Márcio tem para comprar o computador nessa loja?

Para responder a essa questão, podemos construir um diagrama mostrando todas as possibilidades. Representando as configurações dos computadores por C_1, C_2 e C_3 e as formas de pagamento por P_1 e P_2, temos o diagrama ao lado.

Observe no quadro outra maneira de representar todas as possibilidades.

	Forma de pagamento	
Configuração	P_1	P_2
C_1	C_1P_1	C_1P_2
C_2	C_2P_1	C_2P_2
C_3	C_3P_1	C_3P_2

O diagrama e o quadro apresentados são conhecidos, respectivamente como **diagrama de árvore** ou **árvore de possibilidades** e **quadro de possibilidades**.

Com base no diagrama e no quadro, podemos representar a quantidade de possibilidades pela seguinte multiplicação.

$$\underbrace{3}_{\text{quantidade de opções de configurações}} \cdot \overbrace{2}^{\text{quantidade de formas de pagamento}} = \underbrace{6}_{\text{quantidade de possibilidades}}$$

Assim, Márcio tem 6 possibilidades de comprar um computador nessa loja.

A situação apresentada ilustra o **princípio multiplicativo**, que diz:

Se a decisão d_1 pode ser tomada de **a** maneiras e, após tomada essa decisão, a decisão d_2 puder ser tomada de **b** maneiras, então a quantidade de maneiras de tomar as decisões d_1 e d_2 é a · b.

Veja outro exemplo.

O time de vôlei da escola onde Amanda estuda vai compor um novo uniforme. Para isso, o time deve escolher entre 4 opções de camiseta, 3 opções de bermuda e 2 opções de par de meias. De quantas maneiras diferentes o novo uniforme do time pode ser composto, sabendo que ele deve ser formado por 1 camiseta, 1 bermuda e 1 par de meias?

BNCC em foco

- Com base no tópico **Possibilidades**, os alunos serão levados a resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo, contemplando, desse modo, a habilidade **EF08MA03**.

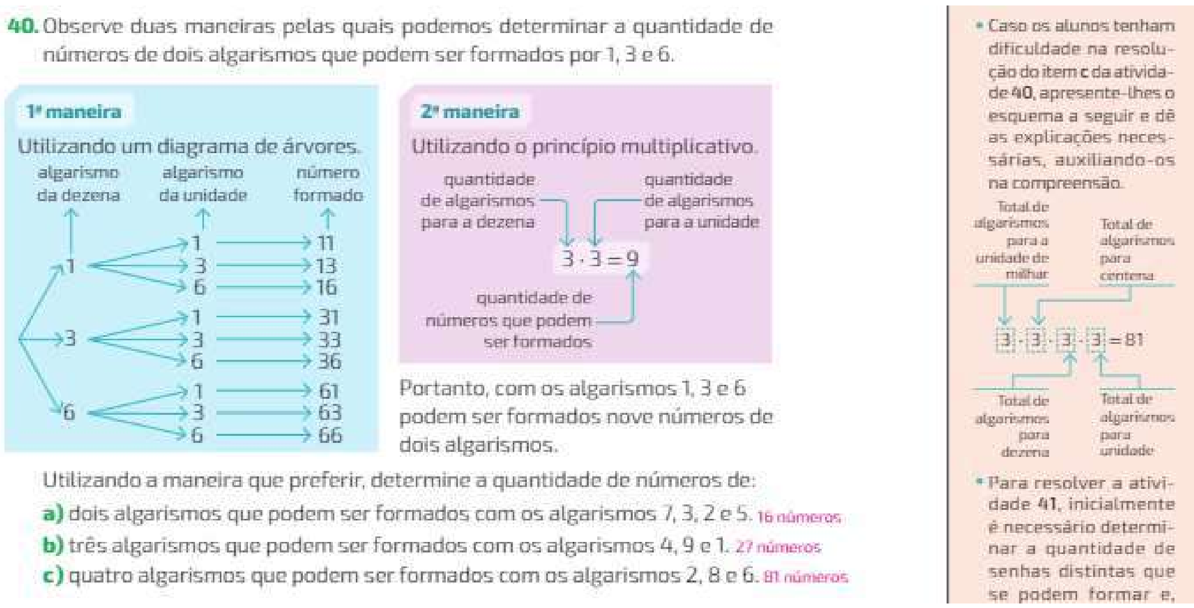
189

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2596074 (Acesso em: 10 de fev. 2020)

Ela representa um caso tradicional do uso do P.M., tratando de duas decisões, cada uma sobre um conjunto diferente. Uma relacionada às modalidades de pagamento (à vista ou a prazo), outra relacionada às configurações de computador que podem ser compradas (havendo três opções). A meu ver, a variedade de soluções apresentadas enriquece o exemplo, pois mostra diferentes caminhos pelos quais o aluno consegue obter a resposta desejada apesar das diferenças procedimentais existentes. Cabe ressaltar que o número pequeno de resultados facilita a construção do diagrama de árvores, um ponto relevante a ser considerado. A impressão que tive é que o texto da resolução ficaria melhor se fosse permeado de mais questionamentos levando o aluno a refletir mais sobre o que foi adotado como estratégia de resolução. A definição do Princípio é clara, porém, não é explicitado em nenhum momento que é possível aplicá-lo a mais de duas decisões. Apesar disso, em seguida o mesmo é utilizado para resolver uma situação envolvendo três decisões, cada uma ocorrendo sobre um conjunto diferente das demais. A generalização do procedimento não é imediata e deveria ser evidenciada. Além disso, poderia haver mais exemplos resolvidos, tanto antes da formalização do conceito para que o aluno tivesse a chance de realizar a própria conjectura, quanto depois para reforçar a validade da definição apresentada.

Ao todo são 14 exercícios (incluindo subitens) que seguem o mesmo o modelo padrão dos problemas iniciais de contagem, havendo poucos exercícios nos quais os alunos precisam recorrer a uma alternativa ao P.M. para resolvê-los. Na maioria, as decisões se dão sobre conjuntos distintos ou sobre um mesmo conjunto porém num contexto de construção de números a partir de um conjunto de algarismos dado, o que naturalmente não gera repetição na contagem feita com o Princípio Multiplicativo graças a diferenciação extrínseca entre os objetos escolhidos, gerada pelas casas decimais em que se encontram.

Figura 8 - Reprodução (parcial) da pág. 191 do vol. 8 da Coleção Matemática Essencial


40. Observe duas maneiras pelas quais podemos determinar a quantidade de números de dois algarismos que podem ser formados por 1, 3 e 6.

1ª maneira

Utilizando um diagrama de árvores.

2ª maneira

Utilizando o princípio multiplicativo.

Portanto, com os algarismos 1, 3 e 6 podem ser formados nove números de dois algarismos.

Utilizando a maneira que preferir, determine a quantidade de números de:

a) dois algarismos que podem ser formados com os algarismos 7, 3, 2 e 5. 16 números

b) três algarismos que podem ser formados com os algarismos 4, 9 e 1. 27 números

c) quatro algarismos que podem ser formados com os algarismos 2, 8 e 6. 81 números

• Caso os alunos tenham dificuldade na resolução do item **c** da atividade **40**, apresente-lhes o esquema a seguir e dê as explicações necessárias, auxiliando-os na compreensão.

• Para resolver a atividade **41**, inicialmente é necessário determinar a quantidade de senhas distintas que se podem formar e,

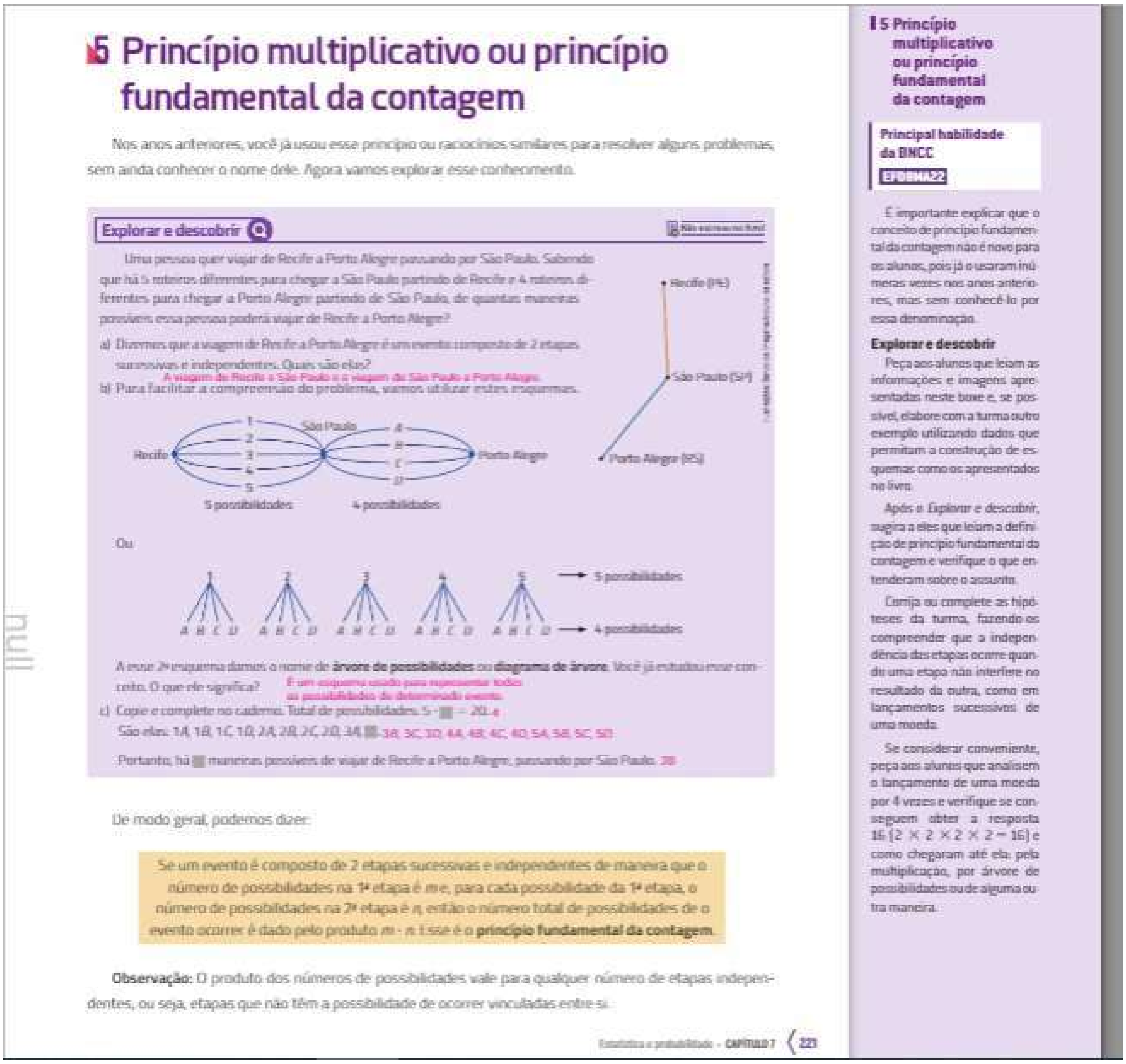
Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2596074 (Acesso em: 10 de fev. 2020)

Nesse exercício em particular (Figura 08 acima), é fornecido um exemplo resolvido como referência para os demais itens do mesmo problema. No exemplo, o algarismo 3 é uma das possibilidades, e coincide com a quantidade de algarismos disponíveis que também é 3. Nos itens a serem resolvidos, os algarismos fornecidos não coincidem com a quantidade que os representa. Aqui, poderia ser acrescentado um item no qual isso ocorresse para que houvesse a oportunidade de reflexão com os alunos, considerando que se trata de um erro comum por parte deles confundir uma das possibilidades com o número de possibilidades. Um ponto positivo é a presença de exercícios nos quais os alunos devem criar problemas que sejam resolvidos pela aplicação da técnica de contagem abordada, o que leva os alunos a refletirem sobre o conteúdo. Também deve ser considerada a variedade de contextualizações presentes na elaboração dos problemas. Observa-se que fica a cargo do professor complementar os problemas com alguns mais desafiadores e/ou mais variados.

b) Coleção Teláris Matemática – Editoria Ática (8º ano)

A autoria desta coleção é de Luiz Roberto Dante, Doutor em Psicologia da Educação: Ensino de Matemática, pela Pontifícia Universidade de São Paulo (PUC-SP). No decorrer da análise da obra observamos que os problemas de contagem aparecem em dois capítulos diferentes, “Números” (capítulo 1), e “Estatística e Probabilidade” (capítulo 7). No primeiro, os problemas de contagem são usados para ilustrar um possível uso dos números naturais, justamente se referindo à contagem de possibilidades. Considerando os subitens dos exercícios, há um total de 6 problemas a serem resolvidos. Já no segundo, a Análise Combinatória é devidamente abordada a partir de um exemplo motivador que é resolvido tanto com a árvore de possibilidades quanto com o uso da multiplicação.

Figura 9 - Reprodução da pág. 221 do vol. 8 da Coleção Teláris Matemática



5 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem

Nos anos anteriores, você já usou esse princípio ou raciocínios similares para resolver alguns problemas, sem ainda conhecer o nome dele. Agora vamos explorar esse conhecimento.

Explorar e descobrir

Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

a) Dizemos que a viagem de Recife a Porto Alegre é um evento composto de 2 etapas sucessivas e independentes. Quais são elas? A viagem de Recife a São Paulo e a viagem de São Paulo a Porto Alegre.

b) Para facilitar a compreensão do problema, vamos utilizar estes esquemas.

Ou

A esse 2º esquema damos o nome de **árvore de possibilidades** ou **diagrama de árvore**. Você já estudou esse conceito. O que ele significa? É um esquema usado para representar todas as possibilidades de determinado evento.

c) Copie e complete no caderno. Total de possibilidades: 5 · ▒ = 20; 4

São elas: 1A, 1B, 1C, 1D, 2A, 2B, 2C, 2D, 3A, ▒. 3B, 3C, 3D, 4A, 4B, 4C, 4D, 5A, 5B, 5C, 5D

Portanto, há ▒ maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre, passando por São Paulo. 20

De modo geral, podemos dizer:

Se um evento é composto de 2 etapas sucessivas e independentes de maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e, para cada possibilidade da 1ª etapa, o número de possibilidades na 2ª etapa é n, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$. Esse é o **princípio fundamental da contagem**.

Observação: O produto dos números de possibilidades vale para qualquer número de etapas independentes, ou seja, etapas que não têm a possibilidade de ocorrer vinculadas entre si.

Estatística e probabilidade · CAPÍTULO 7 221

5 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem

Principal habilidade da BNCC
EF08MA22

É importante explicar que o conceito de princípio fundamental da contagem não é novo para os alunos, pois já o usaram inúmeras vezes nos anos anteriores, mas sem conhecê-lo por essa denominação.

Explorar e descobrir

Peça aos alunos que leiam as informações e imagens apresentadas neste boxe e, se possível, elabore com a turma outro exemplo utilizando dados que permitam a construção de esquemas como os apresentados no livro.

Após o *Explorar e descobrir*, sugira a eles que leiam a definição de princípio fundamental da contagem e verifique o que entenderam sobre o assunto.

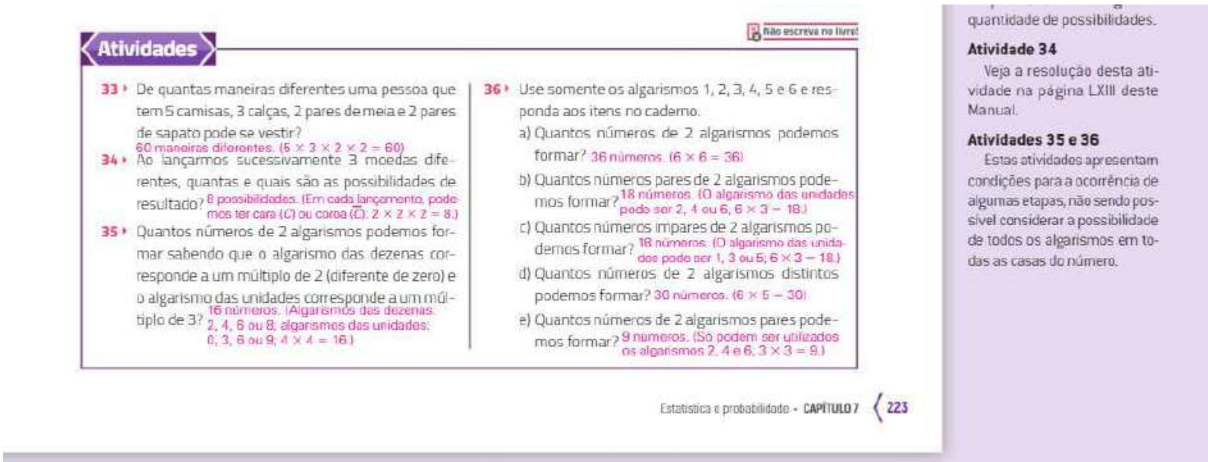
Corrija ou complete as hipóteses da turma, fazendo-os compreender que a independência das etapas ocorre quando uma etapa não interfere no resultado da outra, como em lançamentos sucessivos de uma moeda.

Se considerar conveniente, peça aos alunos que analisem o lançamento de uma moeda por 4 vezes e verifique se conseguem obter a resposta 16 ($2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$) e como chegaram até ela: pela multiplicação, por árvore de possibilidades ou de alguma outra maneira.

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2597795 (Acesso em: 13 de fev. 2020)

No que segue, há a definição do Princípio Fundamental da Contagem para o caso particular de duas decisões. Além disso, há o incremento da definição com uma observação, na qual é explicitada a possibilidade de generalização da técnica para uma quantidade qualquer de decisões independentes. Na sequência, são abordados mais três exemplos que requerem, cada um, uma articulação diferente dos demais, o que valoriza a exemplificação não se prendendo a repetições de uma mesma forma de abordagem. Além da resolução apresentada, também é sugerido que as respectivas árvores de possibilidades sejam construídas em conjunto com os alunos e que seja pedido a eles para fazerem a verificação da solução fazendo uso do Princípio Multiplicativo, valorizando ambos os métodos. Em seguida, há um total de 8 exercícios (incluindo os subitens), que vão desde casos diretos até casos nos quais há condições impostas pelo enunciado, o que exige uma maior habilidade na solução do problema quando comparada à aplicação direta. Dois pontos que poderiam ser melhorados são a quantidade e a variedade de contextualizações ofertadas ao estudante.

Figura 10 - Reprodução parcial da pág. 223 do vol. 8 da Coleção Teláris Matemática



Atividades

Não escreva no livro!

33 De quantas maneiras diferentes uma pessoa que tem 5 camisas, 3 calças, 2 pares de meia e 2 pares de sapato pode se vestir? 60 maneiras diferentes. ($5 \times 3 \times 2 \times 2 = 60$)

34 Ao lançarmos sucessivamente 3 moedas diferentes, quantas e quais são as possibilidades de resultado? 8 possibilidades. (Em cada lançamento, podemos ter cara (C) ou coroa ($\overline{C}$): $2 \times 2 \times 2 = 8$.)

35 Quantos números de 2 algarismos podemos formar sabendo que o algarismo das dezenas corresponde a um múltiplo de 2 (diferente de zero) e o algarismo das unidades corresponde a um múltiplo de 3? 16 números. (Algarismos das dezenas: 2, 4, 6 ou 8; algarismos das unidades: 0, 3, 6 ou 9; $4 \times 4 = 16$.)

36 Use somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e responda aos itens no caderno.

a) Quantos números de 2 algarismos podemos formar? 36 números. ($6 \times 6 = 36$)

b) Quantos números pares de 2 algarismos podemos formar? 18 números. (O algarismo das unidades pode ser 2, 4 ou 6; $6 \times 3 = 18$.)

c) Quantos números ímpares de 2 algarismos podemos formar? 18 números. (O algarismo das unidades pode ser 1, 3 ou 5; $6 \times 3 = 18$.)

d) Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar? 30 números. ($6 \times 5 = 30$)

e) Quantos números de 2 algarismos pares podemos formar? 9 números. (Só podem ser utilizados os algarismos 2, 4 e 6; $3 \times 3 = 9$.)

Estatística e probabilidade • CAPÍTULO 7 223

quantidade de possibilidades.

Atividade 34

Veja a resolução desta atividade na página LXIII deste Manual.

Atividades 35 e 36

Estas atividades apresentam condições para a ocorrência de algumas etapas, não sendo possível considerar a possibilidade de todos os algarismos em todas as casas do número.

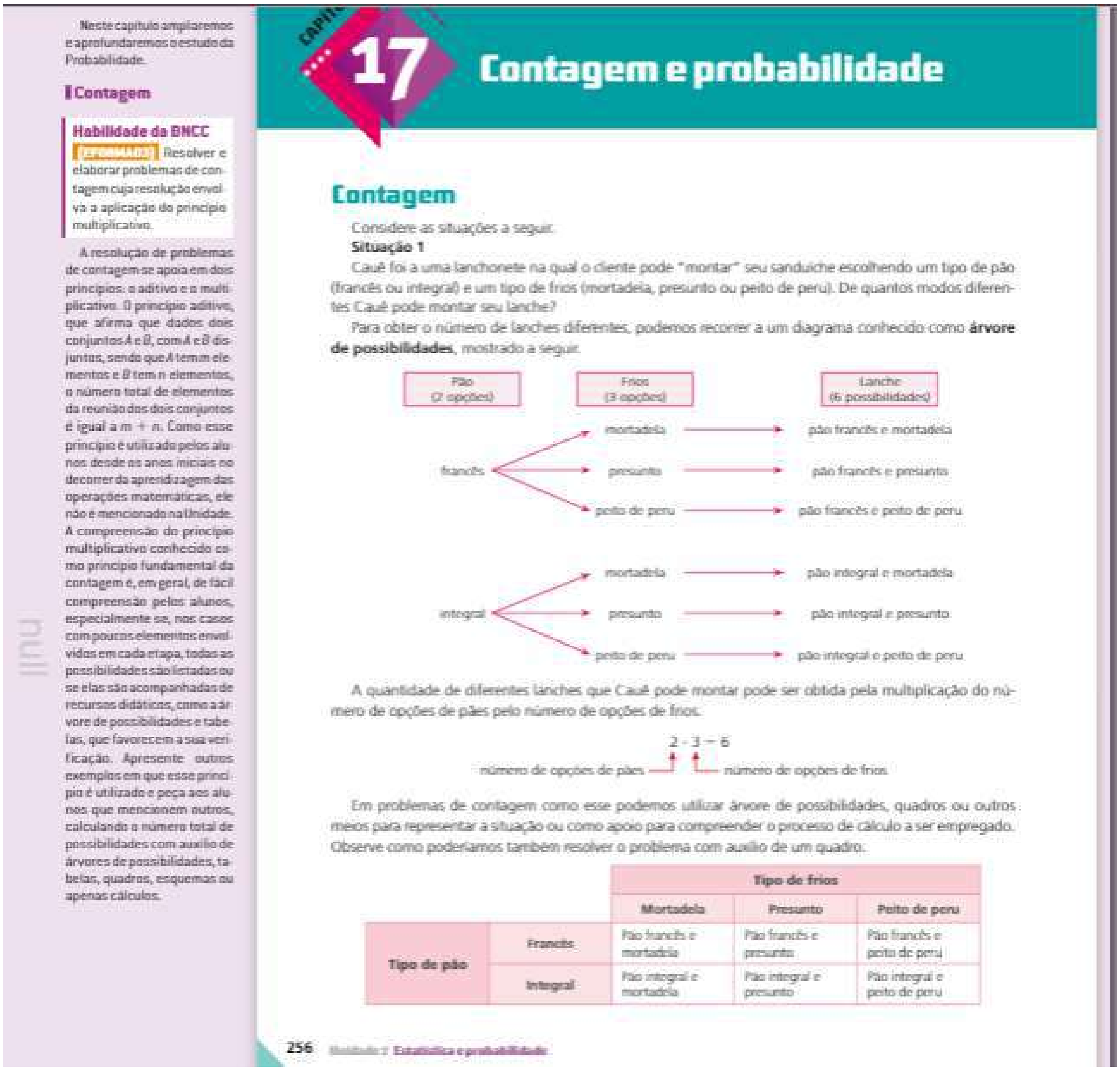
Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2597795 (Acesso em: 13 de fev. 2020)

Para finalizar a análise dessa obra, precisamos mencionar em especial o exercício de número 34, presente na imagem acima. O enunciado diz “Ao lançarmos sucessivamente 3 moedas diferentes, quantas e quais são as possibilidades de resultado?”. Visto o que discutimos anteriormente, como são três objetos diferentes e para cada um há duas possibilidades distintas (cara e coroa), e considerando o lançamento sucessivo, ou seja, há um controle quanto a ordem, o total de resultados seria igual a $2.2.2.6 = 48$, visto que há de se considerar tanto uma distinguibilidade intrínseca quanto uma distinguibilidade extrínseca. Porém, ao analisarmos a resolução do autor, que diz “8 possibilidades. (Em cada lançamento podemos ter cara (C) ou coroa (C’): 2.2.2 = 8)”, vemos que o mesmo não considerou os objetos como diferentes. Nesse caso, o problema do enunciado ocorre pois o autor usa a palavra “diferente” como sinônimo de “distinto”. Tal uso, apesar de comum na língua portuguesa, não cabe nesse contexto. Considerando que são três moedas distintas e idênticas, lançadas ordenadamente, obtemos $2.2.2 = 8$. Se, ao construir o problema, o autor realmente quis dizer que se trata de três moedas diferentes, então o mesmo deveria haver explicitado que há uma ordem fixa de lançamento, e que a mesma não pode ser mudada. Por exemplo, moedas azul, verde e vermelha, sendo que o lançamento sucessivo ocorre de uma única maneira, em uma única ordem. Dessa maneira, também faria sentido o resultado 2.2.2 = 8. Como o problema não é claro quanto a sua estrutura experimental, o mesmo se mostra inadequado e deveria ser reescrito ou removido do texto.

c) Coleção Trilhas da Matemática – Editora Saraiva (8º ano)

Esta obra é de autoria de Fausto Arnaud Sampaio, Especialista em Educação Matemática pela Unicamp - SP (Universidade Estadual de Campinas - São Paulo). A Contagem é abordada no Capítulo 17, intitulado “Contagem e Probabilidade”. Nas orientações ao professor presentes na primeira página, é citado que o Princípio Aditivo e o Multiplicativo são os dois princípios que baseiam a resolução dos problemas de contagem. Aproveita-se para enunciar o Aditivo, e sinalizar que o mesmo é considerado como conhecimento prévio do aluno, visto que é utilizado desde os anos iniciais do ensino fundamental na resolução de problemas matemáticos. Acrescenta também que há, no geral, uma facilidade para compreensão do P.F.C., em especial, se é feita a listagem de todas as possibilidades existentes nos casos com poucos elementos envolvidos em cada etapa, ou se há um uso de outros recursos didáticos como a árvore de possibilidades e tabelas que permitam a verificação. Incentiva o professor a apresentar exemplos em que ocorre o uso do Princípio Multiplicativo e que sejam colhidas sugestões dos alunos sobre outros exemplos em que o mesmo pode ser usado, realizando as respectivas contagens de diferentes maneiras.

Figura 11 - Pág. 256 do vol. 8 da coleção Trilhas da Matemática



Neste capítulo ampliaremos e aprofundaremos o estudo da Probabilidade.

Contagem

Habilidade da BNCC

Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

A resolução de problemas de contagem se apoia em dois princípios: o aditivo e o multiplicativo. O princípio aditivo, que afirma que dados dois conjuntos A e B, com A e B disjuntos, sendo que A tem m elementos e B tem n elementos, o número total de elementos da reunião dos dois conjuntos é igual a $m + n$. Como esse princípio é utilizado pelos alunos desde os anos iniciais no decorrer da aprendizagem das operações matemáticas, ele não é mencionado na Unidade. A compreensão do princípio multiplicativo conhecido como princípio fundamental da contagem é, em geral, de fácil compreensão pelos alunos, especialmente se, nos casos com poucos elementos envolvidos em cada etapa, todas as possibilidades são listadas ou se elas são acompanhadas de recursos didáticos, como a árvore de possibilidades e tabelas, que favorecem a sua verificação. Apresente outros exemplos em que esse princípio é utilizado e peça aos alunos que mencionem outros, calculando o número total de possibilidades com auxílio de árvores de possibilidades, tabelas, quadros, esquemas ou apenas cálculos.

17 Contagem e probabilidade

Contagem

Considere as situações a seguir.

Situação 1

Cauê foi a uma lanchonete na qual o cliente pode "montar" seu sanduíche escolhendo um tipo de pão (francês ou integral) e um tipo de frios (mortadela, presunto ou peito de peru). De quantos modos diferentes Cauê pode montar seu lanche?

Para obter o número de lanches diferentes, podemos recorrer a um diagrama conhecido como **árvore de possibilidades**, mostrado a seguir.

A quantidade de diferentes lanches que Cauê pode montar pode ser obtida pela multiplicação do número de opções de pães pelo número de opções de frios.

$$2 \cdot 3 = 6$$

número de opções de pães — número de opções de frios

Em problemas de contagem como esse podemos utilizar árvore de possibilidades, quadros ou outros meios para representar a situação ou como apoio para compreender o processo de cálculo a ser empregado. Observe como poderíamos também resolver o problema com auxílio de um quadro.

		Tipo de frios		
		Mortadela	Presunto	Peito de peru
Tipo de pão	Francês	Pão francês e mortadela	Pão francês e presunto	Pão francês e peito de peru
	Integral	Pão integral e mortadela	Pão integral e presunto	Pão integral e peito de peru

256 Estatística e probabilidade

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2595969 (Acesso em: 25 de fev. 2020)

Ao todo, são apresentadas cinco situações-problema para ilustrar o assunto. Todas possuem sua resolução elaborada através de mais de um método.

Os dois primeiros abordam situações que possuem duas decisões a serem tomadas, servindo de gancho para apresentar a definição do Princípio Multiplicativo. Aqui é explicitado que essa técnica também se encaixa em situações com mais de duas decisões, e mostra isso com outros exemplos.

Vale destacar que o quinto exemplo trata de uma situação na qual não há a independência entre as escolhas (rompimento do Princípio da Invariância) na qual a aplicação imediata da técnica apresentada gera uma contagem incorreta, valorizando a interpretação do problema e reflexão sobre o mesmo, o que serve de alerta ao aluno para evitar o automatismo que muitas vezes ocorre pela falta de compreensão do que o conceito do P.M. realmente trata. A alternativa acaba sendo recorrer à árvore de possibilidades, mostrando que a listagem pura e simples pode se fazer necessária e continua sendo útil apesar do contato com o que podemos dizer que se trata de uma técnica mais sofisticada. Tudo isso é seguido por uma contextualização sobre o jogo Xadrez, que eu não julguei interessante, pois os questionamentos associados são respondidos através da contagem uma a uma das possibilidades.

Figura 12 - Reprodução parcial da pág. 259 do vol. 8 da Coleção Trilhas da Matemática

null

Saiba mais

Não escreva no livro!

Movimentos do cavalo

Há pelo menos 1 500 anos o *chaturanga* é praticado na Índia. O jogo, disputado entre 4 pessoas, possui 5 tipos de peça que representam parte do exército indiano: 1 ministro (corresponde à rainha no xadrez), 1 elefante (corresponde ao bispo), 1 navio (corresponde à torre), 4 soldados (peões) e 1 cavalo.

O *chaturanga* foi o antecessor do xadrez. Talvez, você conheça a lenda difundida pelo professor Júlio César de Mello e Souza (Malba Tahan), que narra a invenção do xadrez.

No jogo de xadrez, o cavalo pode, por exemplo, movimentar-se da seguinte forma: a partir de sua posição, avança uma casa em linha reta (para a frente, para trás, para a direita ou para a esquerda) e, em seguida, gira 90° e avança mais duas casas.

Na Idade Média e durante o Renascimento, o xadrez era usado para ensinar estratégia de guerra e ficou conhecido como "jogo do rei". O selo ao lado, impresso em 1984, no Laos, em comemoração ao 60º aniversário de fundação da Federação Mundial de Xadrez, mostra jogadores de xadrez da Idade Média.

Fonte de pesquisa: GIUSTI, Paulo. *História ilustrada do xadrez*. São Paulo: Annablume, 2002.

Para explorar

- Se o cavalo ocupar a posição indicada no tabuleiro anterior, quantas casas distintas ele poderá ocupar após realizar 1 movimento? E após 2 movimentos? 8 casas. 23 casas.

sar sobre o jogo de xadrez. Se houver algum estudante que conheça o jogo e as regras, pode ser realizado um trabalho em conjunto para ensinar os colegas que tenham interesse em aprender o jogo.

Capítulo 11 Contagem e probabilidade 259

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2595969 (Acesso em: 25 de fev. 2020)

A contextualização é acompanhada de sugestões para o professor incentivar os alunos a pesquisarem sobre o jogo em si. Achei a intenção válida, mas não considerei uma grande contribuição pensando na Combinatória. Me pareceu um tanto desconexa. Acredito que uma contextualização ligada, por exemplo, ao sistema de emplacamento de veículos, ou ao número de dígitos das linhas telefônicas teria mais significado para os alunos e agregaria mais para construção de significado e relevância prática do assunto abordado. Na sequência há 11 exercícios (incluindo subitens) que não demandam muito além da aplicação direta do P.M., vez ou outra tendo que atender a algumas condições. Em especial, cabe destacar o exercício 4, no qual são citadas tanto a solução destrutiva quanto a construtiva nas orientações ao professor, que é incentivado a mostrar ambas, e o exercício 8 no qual o aluno precisa corrigir uma solução errada que é apresentada como parte do enunciado, algo que demanda uma maior reflexão e compreensão mais aprofundada do aluno a respeito do assunto. Pareceu uma boa forma de “medir” o grau de compreensão do assunto. Por fim, são apresentadas duas questões da OBMEP, a primeira resolvida seguindo a estratégia de resolução de problemas sugerida por George Polya, e a segunda questão fica para o aluno como um desafio.

Finda a análise dos livros do Fundamental, passemos agora ao outro segmento da Educação Básica no qual o assunto de Combinatória é abordado de modo mais aprofundado, o Ensino Médio. Já no que diz respeito a esse segmento, serão analisados os volumes referentes ao 2° ano já que, tradicionalmente, é nesse momento que ocorre o ensino dos tópicos de Contagem.

3.2 Ensino Médio

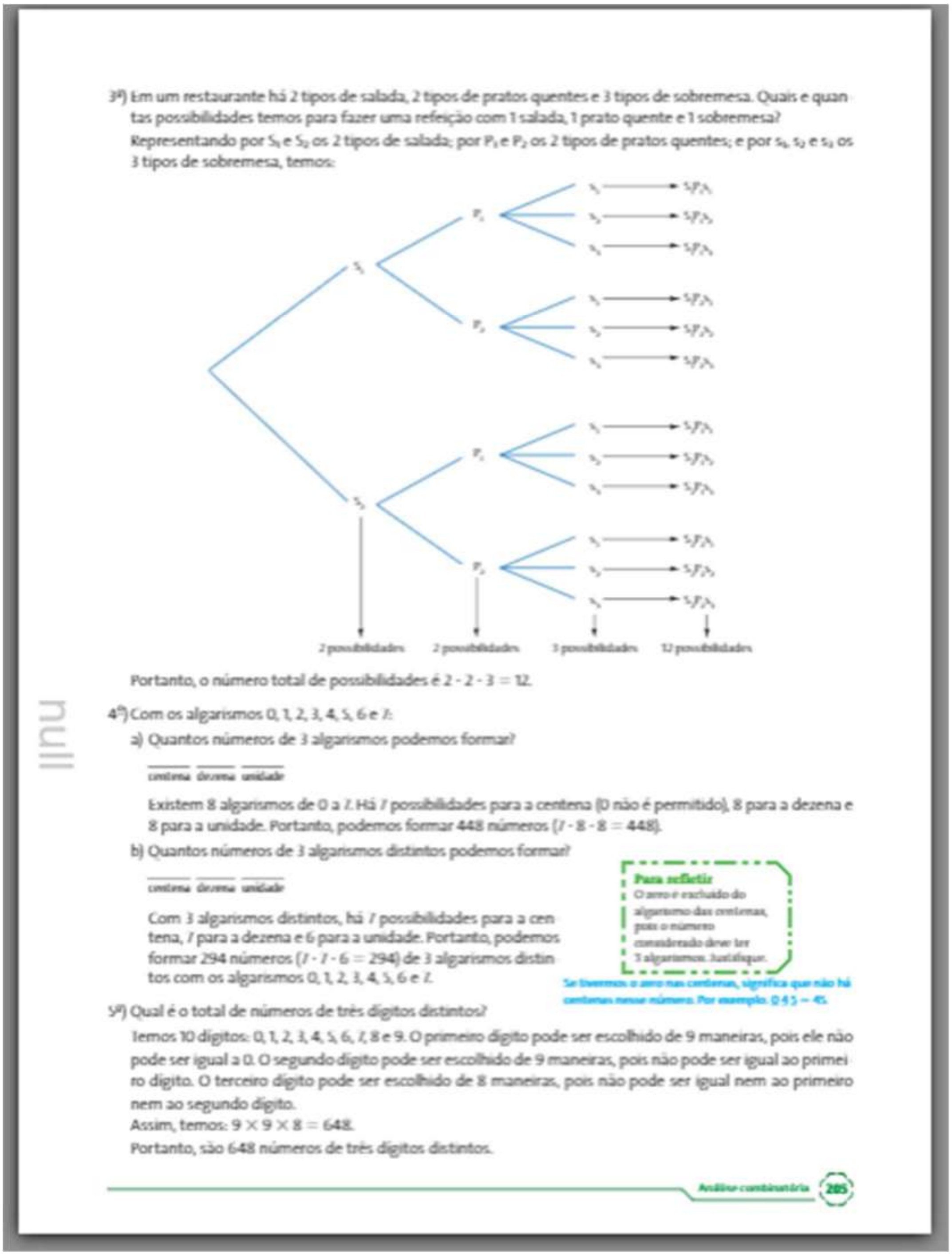
a) Coleção Matemática Contextos e Aplicações – Editora Ática (2º ano)

Nesse volume da coleção de autoria de Luiz Roberto Dante, Doutor em Psicologia da Educação: Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade de São Paulo (PUC-SP), a Combinatória é abordada no nono capítulo do livro. A primeira página traz um cadeado e um breve comentário a respeito do que trata a Análise Combinatória, relacionando-a com o número de possibilidades de senhas do cadeado exibido. Achei uma contextualização interessante, já que usa algo cotidiano, e, no meu ver, pode ser usado como ponto de partida para outras contextualizações similares pensando na combinação de caracteres.

Os tópicos usualmente abordados sobre esse tema seguem a ordem tradicional, começando pelo P.F.C., motivado por dois problemas, um sobre trajeto de viagem e outro sobre resultados do lançamento simultâneo de um dado e uma moeda. Em ambos, há a utilização do diagrama de árvores, seguido da determinação do número de possibilidade através da multiplicação. Há um box “Para refletir”, referente ao primeiro problema, que menciona que o procedimento é composto de etapas sucessivas e independentes. Acredito que explicar o que tal independência significa seria um bom acréscimo ao box.

Após as resoluções dos problemas, é definido o Princípio Fundamental da Contagem, para duas decisões, seguido da generalização que é mencionada por uma observação logo após a definição. O princípio então é aplicado na resolução de mais três exemplos, vide Figura 13.

Figura 13 - Reprodução da pág. 205 da Coleção Matemática Contextos e Aplicações



3ª) Em um restaurante há 2 tipos de salada, 2 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quais e quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

Representando por S_1 e S_2 os 2 tipos de salada; por P_1 e P_2 os 2 tipos de pratos quentes; e por s_1, s_2 e s_3 os 3 tipos de sobremesa, temos:

Portanto, o número total de possibilidades é $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

4ª) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

a) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?

centena dezena unidade

Existem 8 algarismos de 0 a 7. Há 7 possibilidades para a centena (0 não é permitido), 8 para a dezena e 8 para a unidade. Portanto, podemos formar 448 números ($7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$).

b) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

centena dezena unidade

Com 3 algarismos distintos, há 7 possibilidades para a centena, 7 para a dezena e 6 para a unidade. Portanto, podemos formar 294 números ($7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$) de 3 algarismos distintos com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Para refletir
O zero é excluído do algarismo das centenas, pois o número considerado deve ter 3 algarismos. Justifique.

Se tivermos o zero nas centenas, significa que não há centenas nesse número. Por exemplo: 045 = 45.

5ª) Qual é o total de números de três dígitos distintos?

Temos 10 dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 maneiras, pois ele não pode ser igual a 0. O segundo dígito pode ser escolhido de 9 maneiras, pois não pode ser igual ao primeiro dígito. O terceiro dígito pode ser escolhido de 8 maneiras, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo dígito.

Assim, temos: $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Portanto, são 648 números de três dígitos distintos.

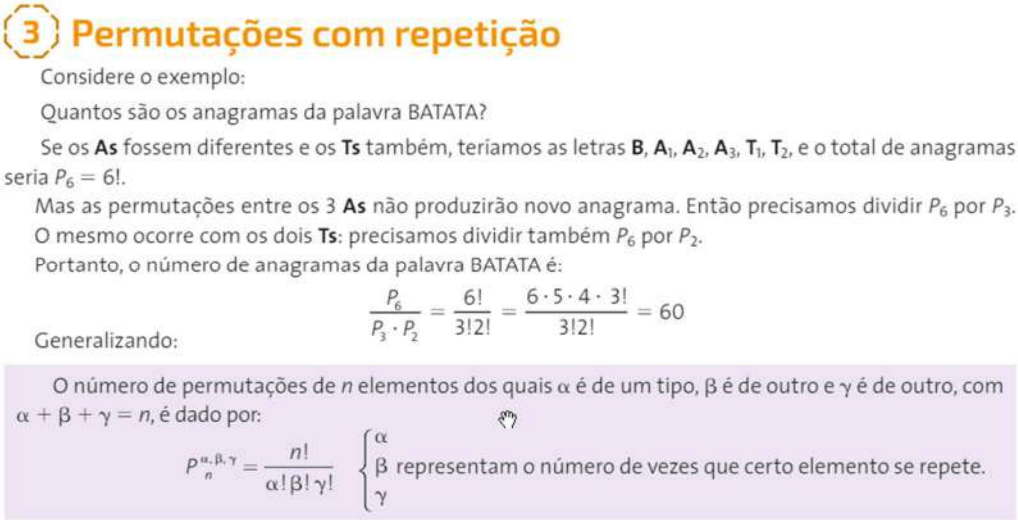
Análise combinatória 205

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2597273 (Acesso em: 02 de mar. 2020)

Na sequência, temos o tópico "Permutações simples e fatorial de um número", que inicia com o significado da palavra "permutar" e qual associação deve ser feita com os problemas de contagem. No caso, a associação sugerida é com *"a noção de embaralhar, isto é, trocar objetos de posição"*. Logo depois, o texto fala sobre a formação de "*agrupamentos com n elementos*" nos quais todos serão utilizados em cada agrupamento. Faltou sinalizar que os *n* elementos são distintos entre si, já que é o que ocorre nos dois exemplos resolvidos que são mostrados no texto. Um pouco depois, tal detalhe é mencionado ao definir como deve ser calculado o número de filas que podem ser formadas com n objetos distintos. A explicação conduz a conclusão de que a permutação simples desses n objetos distintos é dada por $P_n = n.(n-1).(n-2).\ \dots\ .3.2.1$, que é utilizada como gancho para definir como o fatorial de *n*, com $n \geq 1$. Aqui, 0! = 1 é apresentado como convenção. Em seguida, mais alguns exercícios resolvidos, focados em problemas com anagramas, que é definido no texto como "diferentes disposições das letras de uma palavra". Logo depois, uma bateria de exercícios propostos ao aluno. Dentre esses exercícios cabe destacar o número 3, que possui o mesmo enunciado do exercício 34 presente no livro voltado para o 8°ano escrito pelo mesmo autor que diz "Ao lançarmos sucessivamente 3 moedas diferentes, quantas e quais são as possibilidades de resultado?", sobre o qual se aplicam os mesmos apontamentos feitos anteriormente.

O tópico seguinte é "Permutações com repetição", iniciado por um exemplo no qual deve-se calcular o número de anagramas da palavra "*BATATA*". Abordar o assunto a partir de um problema é, no geral, um bom método, porém achei a resolução pouco reflexiva. Os passos da resolução que são contraintuitivos, e que deveriam ser conduzidos com mais cautela, são apenas apresentados no texto simplesmente afirmando o que deve ser feito. Além disso, a "generalização" apresentada me pareceu confusa pois a fórmula apresentada considera apenas três repetições distintas como mostra a Figura 14 abaixo. Se o aluno fosse trabalhar com os anagramas de *"PARALELEPÍPEDO"*, por exemplo, acredito que ele imaginaria a necessidade de alguma outra fórmula já que há quatro letras diferentes que se repetem.

Figura 14 - Reprodução parcial da pág. 209 do vol. 2 da Coleção Matemática Contextos e Aplicações



3 Permutações com repetição

Considere o exemplo:

Quantos são os anagramas da palavra BATATA?

Se os **As** fossem diferentes e os **Ts** também, teríamos as letras **B**, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$, e o total de anagramas seria $P_6 = 6!$.

Mas as permutações entre os 3 **As** não produzirão novo anagrama. Então precisamos dividir P_6 por P_3.

O mesmo ocorre com os dois **Ts**: precisamos dividir também P_6 por P_2.

Portanto, o número de anagramas da palavra BATATA é:

$$\frac{P_6}{P_3 \cdot P_2} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = 60$$

Generalizando:

O número de permutações de n elementos dos quais α é de um tipo, β é de outro e γ é de outro, com $\alpha + \beta + \gamma = n$, é dado por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} \quad \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases} \text{representam o número de vezes que certo elemento se repete.}$$

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2597273 (Acesso em: 02 de mar. 2020)

Seguindo, mais exercícios resolvidos e um bloco de exercícios propostos, contendo um box “Fique atento!” comentando sobre desconsiderar a acentuação das palavras ao produzir anagramas, apesar de alguns exercícios anteriores usarem palavras como “*perdão*” e “*ângulo*” sem que isso fosse mencionado.

Em seguida, temos o estudo dos Arranjos Simples. É feita uma associação com a Permutação Simples, que trata do *“agrupamento ordenado de n elementos*”, para sinalizar que nesse tópico serão estudados agrupamentos ordenados de p elementos, tal que $p \leq n$. Há dois exercícios resolvidos. Usa-se listagem das possibilidades, diagrama de árvores e o P.F.C. para resolvê-los. Depois, ocorre a mostra da fórmula de Arranjos Simples usando fatoriais, além da indicação sobre como usar o princípio multiplicativo para resolver problemas dessa classe. Aproveita-se para reforçar a validade da convenção $0! = 1$, assim como a equivalência entre $A_{n,n}$ e P_n. Passado isso, temos um bloco de exercícios resolvidos, seguido de exercícios propostos. Vale mencionar que os exercícios resolvidos recebem duas resoluções, cada. Uma, sem a fórmula, e a outra, com a fórmula.

O tópico seguinte trata do estudo das Combinações Simples. É dito que *“o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos”.* Temos dois exemplos resolvidos, fazendo uso da listagem das possibilidades, culminando na associação entre os conceitos de Arranjo Simples, Permutação e Combinação Simples. A partir dessa ideia, obtém-se a fórmula das Combinações Simples de n elementos tomados p a p, para $p \leq n$. O box “Fique atento!”, na Figura 15 abaixo, me pareceu que poderia tanto se referir a Combinações Simples quanto a Arranjos Simples.

Figura 15 - Reprodução parcial da pág. 215 do vol. 2 da Coleção Matemática - Contextos e Aplicações

Fórmula do número total de combinações simples

A cada combinação de n elementos tomados p a p correspondem $p!$ arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação, ou seja:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \text{ ou } C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Fique atento!
Calcular o número total de combinações simples de n objetos tomados p a p é o mesmo que perguntar de quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados.

Combinações simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados.

Indica-se por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$ o número total de combinações de n elementos tomados p a p e calcula-se por $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ou $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$.

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2597273 (Acesso em: 02 de mar. 2020)

O texto também menciona que há como abordar problemas de Combinação através do cálculo do Arranjo do objetos, dividindo pela Permutação dos mesmos, válida para que os alunos não fiquem presos a fórmula e sua aplicação mecânica, e também se atentem ao que difere um subconjunto do outro, a natureza dos seus elementos. Essa última advertência poderia ter sido feita logo no início da abordagem, aproveitando a associação com a ideia de construir subconjuntos.

Figura 16 - Reprodução parcial da pág. 215 do vol. 2 da Coleção Matemática - Contextos e Aplicações

Fique atento!
Como são subconjuntos de um conjunto, **a ordem dos elementos não importa**. Só consideramos subconjuntos distintos os subconjuntos que diferem pela natureza dos seus elementos.

Como foi observado acima, do mesmo modo que se obtém a fórmula da combinação por meio da divisão de um arranjo pela permutação, **podemos obter a combinação sem usar a fórmula**, calculando o arranjo sem a fórmula e dividindo o resultado pela permutação dos elementos escolhidos. Isso será feito nos exercícios resolvidos nas próximas páginas.

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2597273 (Acesso em: 02 de mar. 2020)

Mais uma vez, a abordagem teórica é seguida por exercícios resolvidos que, por sua vez, antecedem um bloco de exercícios propostos.

Há um tópico separado para trabalhar com *"Problemas que envolvem diferentes tipos de agrupamentos"*. Ao final desses exercícios, há uma leitura proposta sobre "*Alguns problemas de contagem*" conhecidos como, por exemplo, o das "*7 pontes de Konigsberg*". O capítulo encerra após os temas "*Números binomiais", "Triângulo de Pascal ou triângulo aritmético" e "Binômio de Newton",* com o mesma metodologia usada até então: teoria, exercícios resolvidos e exercícios propostos, fechando com mais uma leitura proposta intitulada *"O triângulo aritmético*", e, em seguida, um problema histórico ligado a permutação circular, "O problema de Lucas". Essa é a única menção a esse tópico no capítulo. Nota-se que a obra também não trata devidamente de Permutação Circular, Arranjo com Repetição e nem de Combinação Completa.

b) Coleção Matemática Ciência e Aplicações – Editora Saraiva (2º ano)

A autoria dessa coleção é de Gelson Iezzi, Licenciado em Matemática pela USP, Osvaldo Dolce, Engenheiro Civil pela USP, David Degenszajn, também Licenciado em Matemática pela USP, assim como Roberto Périgo que, além de licenciado, também é bacharel pela USP, e Nilze de Almeida, Mestra em Ensino de Matemática pela PUC-SP. Nessa obra, a Análise Combinatória é abordada no capítulo 10, que começa apresentando quatro problemas, para então identificá-los como problemas de contagem. Em seguida, comenta que a Análise Combinatória é a área da matemática que desenvolve técnicas e métodos para resolver essa classe de problemas.

O primeiro tópico é o "*Princípio Fundamental da Contagem*", que introduz o assunto com quatro exemplos contextualizados e, em seguida, apresenta suas resoluções usando diagrama de árvores, listagem e multiplicação. Ao formalizar o conceito, já o faz para um número de *k* elementos que compõem uma sequência, vide a imagem abaixo.

Figura 17 - Reprodução parcial das págs. 228 e 229 do vol. 2 da Coleção Matemática Ciência e Aplicações

O diagrama acima representado, ainda que parcial, permite visualizar a "estrutura" da multiplicação: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ (número máximo de tentativas).

Suponha que uma sequência seja formada por **k** elementos $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$, em que:

- $\mathbf{a_1}$ pode ser escolhido de $\mathbf{n_1}$ maneiras distintas;
- $\mathbf{a_2}$ pode ser escolhido de $\mathbf{n_2}$ formas diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;
- $\mathbf{a_3}$ pode ser escolhido de $\mathbf{n_3}$ modos diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;

  ⋮

- $\mathbf{a_k}$ pode ser escolhido de $\mathbf{n_k}$ maneiras distintas, a partir das escolhas anteriores.

Análise Combinatória 229

Então, o número de possibilidades para construir a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ é:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Esse resultado é conhecido como **princípio fundamental da contagem** (PFC) ou **princípio multiplicativo** e serve de base para a resolução de muitos problemas de contagem.

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2414501 (Acesso em: 24 de mar. 2020)

Na sequência, há alguns exercícios resolvidos acompanhados de boxes "Pense nisto" com alguns questionamentos interessantes ligados aos problemas, incentivando uma maior reflexão sobre os mesmos. Depois, um bloco de quase trinta exercícios propostos, alguns com subitens, variados. Acredito que tal quantidade seja para que o aluno possa treinar diversas formas de articular a técnica aprendida visando ao seu domínio.

O segundo tópico abordado é o "Fatorial de um número natural". Partindo de algumas multiplicações que envolvem números em sequência, e servem para ilustrar uma classe de produtos comum na resolução de problemas de contagem, constrói-se a motivação ao uso de uma escrita mais resumida desses produtos, culminando com o Fatorial. Aproveita-se para citar que tal ferramenta será útil na contagem de agrupamentos. Os fatoriais de 0 e 1 são apenas apresentados como convenções e a generalização ocorre para $n \geq 2$. Há algumas simplificações com fatoriais e exemplos resolvidos e, então, exercícios propostos. A maioria é do tipo "efetue" ou "simplifique". Poucos fogem desse padrão, porém, os que o fazem, são interessantes, como um que propõe a análise da veracidade de algumas equações envolvendo fatoriais e outro que pede a resolução de equações envolvendo fatoriais.

O terceiro tópico é sinalizado como “Agrupamentos simples: Permutações, Arranjos e Combinações”. De início já é dito que será a partir do P.F.C. que serão desenvolvidas as técnicas de contagem específicas para cada tipo de agrupamento. Os agrupamentos simples são definidos como situações em que ocorre a escolha de k elementos distintos dentre n elementos disponíveis, para $n \geq k$. O primeiro objeto desse conjunto a ser apresentado é a Permutação. É introduzida com um exemplo que trata da suposta disputa entre quatro alunas que se sentam numa mesma fileira devido a ordem que ocuparão as cadeiras. Particularmente, gostei muito desse exemplo por tratar de uma situação totalmente plausível. Após sua resolução, que faz uso da listagem das possibilidades, o texto discorre sobre a interpretação necessária para aplicar o Princípio Multiplicativo e obter a expressão $4.3.2.1 = 4! = 24$. Na sequência, é definido o termo “permutação simples” (nada fora do usual) e, em seguida, é abordado “Como calcular o número de permutações” no qual define-se a notação e, aplicando o P.F.C., conclui-se a expressão geral para o cálculo desse tipo de agrupamento ordenado tal qual como a conhecemos. Seguindo, exercícios resolvidos, e, depois, exercícios propostos.

O segundo a ser apresentado, é o Arranjo Simples. Seguindo o padrão de abordagem da Permutação Simples, é introduzido um exemplo contextualizado que retrata uma situação de eleição que, primeiro, é resolvido fazendo uso do diagrama de árvore e, em seguida, com o uso do P.F.C. Depois, ocorre a definição do que é o arranjo de n elementos distintos, tomados k a k, para $n \geq k$. Após a definição temos “Contagem do número de arranjos”, onde é usado o P.M. para obter uma expressão geral para o cálculo dos arranjos simples nas condições já citadas e, depois, faz-se uso de manipulações algébricas para obter uma expressão equivalente fazendo uso dos fatoriais assim como fizemos no capítulo anterior deste trabalho. Com uma observação é dito que a permutação simples de n elementos é um caso particular dos Arranjos Simples de n elementos e que isso mostra a conveniência de definir $0! = 1$.

Figura 18- Reprodução parcial da pág. 240 do vol. 2 da Coleção Matemática Ciência e Aplicações

OBSERVAÇÃO

As permutações, estudadas a partir da página 235, podem ser consideradas arranjos.
Dados **n** elementos distintos, todo arranjo (agrupamento ordenado) formado exatamente por esses **n** elementos corresponde a uma permutação desses elementos.
Com efeito, fazendo $k = n$ na fórmula do arranjo, obtemos:

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!}, \text{ isto é, } P_n = \frac{n!}{0!} = n!$$

Nessa última expressão, note a "conveniência" de termos definido $0! = 1$.

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2414501 (Acesso em: 24 de mar. 2020)

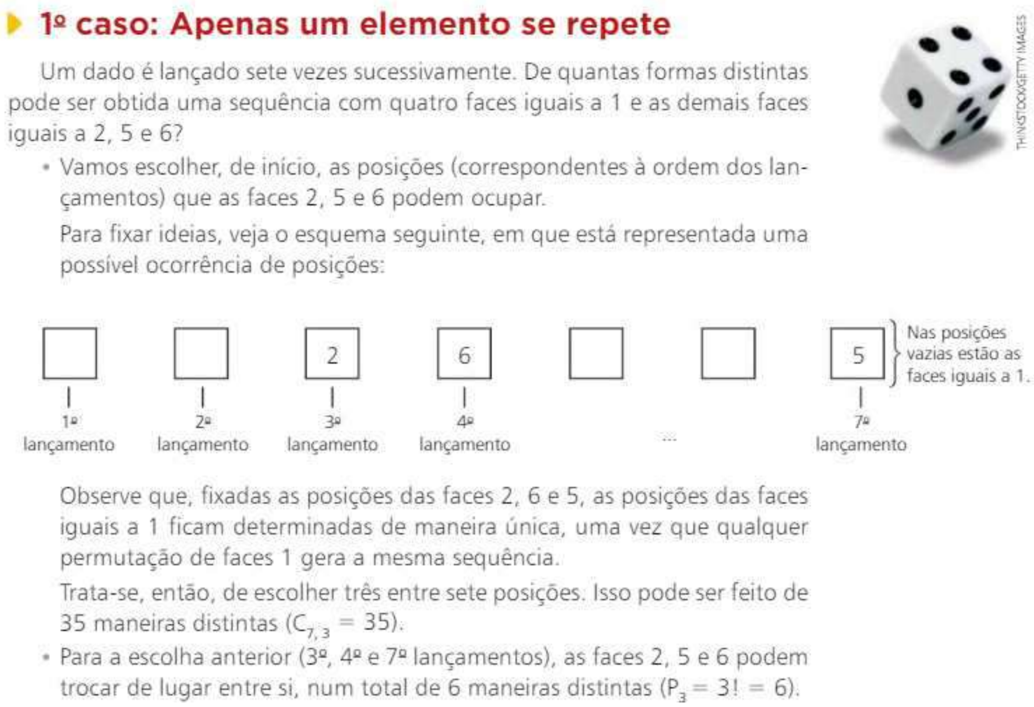
Esse tópico é finalizado com um bloco de exercícios resolvidos, seguido de um bloco de exercícios propostos.

O terceiro e último dos agrupamentos simples, Combinação Simples, é abordado. Temos um exemplo resolvido que retrata a situação do preparo de uma vitamina misturando duas frutas entre cinco disponíveis, onde é ressaltado que se trata de um agrupamento não ordenado. Isso é resolvido fazendo uso do P.F.C. e dividindo-se pela permutação (semelhante ao que foi feito no tópico 2.4 deste trabalho). Procede-se de forma análoga considerando a escolha de três frutas ao invés de duas, concluindo o raciocínio com a definição do que é uma Combinação Simples de n elementos distintos, tomados k a k, para $n \geq k$. Então, após essa definição, há o tópico "Contagem do número de combinações", que faz uso das fórmulas de Arranjo e de Permutação Simples para obter uma fórmula para o cálculo das Combinações Simples. Finalizando, há algumas observações sobre casos particulares no cálculo das combinações como o caso $n = k$, que reforça a "definição especial" de $0! = 1$ e o caso $k = 1$ que mostra a conveniência da obra definir $1! = 1$. Finalizando, há o bloco de exercícios resolvidos e o bloco de exercícios propostos.

Encerrado o estudo dos agrupamentos simples, é feito o estudo das Permutações com Elementos Repetidos. Desde o início já é sinalizado que isso se desenvolverá baseado nas estratégias utilizadas para contagem dos agrupamentos simples. Há a divisão em três casos, começando pelo caso em que um único elemento se repete, seguindo pelo caso em que dois elementos se repetem e fechando a ideia com o caso geral que trabalha com anagramas de "CACHORRO".

No primeiro caso, usa-se a combinação simples para posicionar os elementos que não se repetem, argumentando que as demais posições serão ocupadas de maneira única pelos elementos repetidos. Por fim, considera a permutação entre os elementos distintos, chegando a uma expressão com fatoriais, e aproveita para introduzir a notação usual. Uma abordagem bem inteligível, a meu ver.

Figura 19 - Reprodução parcial da pág. 249 do vol. 2 da Coleção Matemática Ciência e Aplicações



1º caso: Apenas um elemento se repete

Um dado é lançado sete vezes sucessivamente. De quantas formas distintas pode ser obtida uma sequência com quatro faces iguais a 1 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6?

- Vamos escolher, de início, as posições (correspondentes à ordem dos lançamentos) que as faces 2, 5 e 6 podem ocupar.

  Para fixar ideias, veja o esquema seguinte, em que está representada uma possível ocorrência de posições:

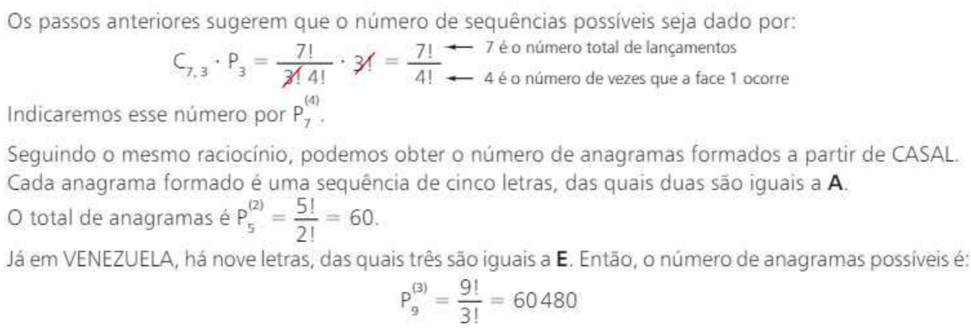
  Observe que, fixadas as posições das faces 2, 6 e 5, as posições das faces iguais a 1 ficam determinadas de maneira única, uma vez que qualquer permutação de faces 1 gera a mesma sequência.

  Trata-se, então, de escolher três entre sete posições. Isso pode ser feito de 35 maneiras distintas ($C_{7,3} = 35$).

- Para a escolha anterior (3º, 4º e 7º lançamentos), as faces 2, 5 e 6 podem trocar de lugar entre si, num total de 6 maneiras distintas ($P_3 = 3! = 6$).

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2414501 (Acesso em: 24 de mar. 2020)

Figura 20 - Reprodução parcial da pág. 250 do vol. 2 da Coleção Matemática Ciência e Aplicações



Os passos anteriores sugerem que o número de sequências possíveis seja dado por:

$$C_{7,3} \cdot P_3 = \frac{7!}{\cancel{3!}\,4!} \cdot \cancel{3!} = \frac{7!}{4!}$$

7 é o número total de lançamentos

4 é o número de vezes que a face 1 ocorre

Indicaremos esse número por $P_7^{(4)}$.

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos obter o número de anagramas formados a partir de CASAL. Cada anagrama formado é uma sequência de cinco letras, das quais duas são iguais a **A**.

O total de anagramas é $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$.

Já em VENEZUELA, há nove letras, das quais três são iguais a **E**. Então, o número de anagramas possíveis é:

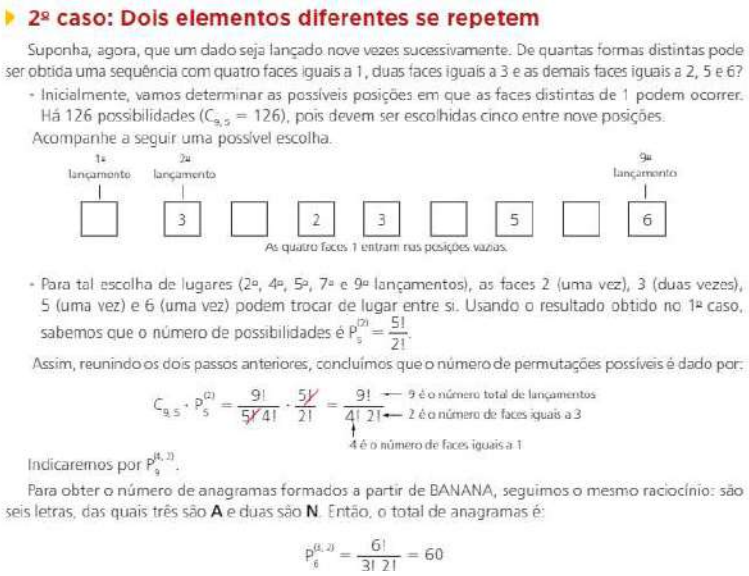
$$P_9^{(3)} = \frac{9!}{3!} = 60\,480$$

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2414501 (Acesso em: 24 de mar. 2020)

Na primeira expressão da página 250 (Figura 20), reproduzida acima, não achei intuitiva a associação do 4!, que permaneceu após a simplificação, com o número de vezes que a face 1 ocorre. A meu ver, o autor poderia ter utilizado tal abordagem, que usa combinação simples em conjunção com permutação simples, para analisar algumas das sequências possíveis nas condições colocadas e só então associar o denominador com o número de vezes que o elemento se repete. Seria uma oportunidade de mostrar ao aluno um padrão de comportamento como consequência empírica da resolução dessa classe de problemas.

Ao ler o raciocínio tomado no primeiro caso, me perguntei como ele faria no seguinte, se ele faria algo análogo ou usaria alguma outra abordagem. Gostei de como ele aproveitou nesse caso os ganhos do caso anterior.

Figura 21 – Pág. 250 (parcial) do vol. 2 da Coleção Matemática - Ciência e Aplicações



2º caso: Dois elementos diferentes se repetem

Suponha, agora, que um dado seja lançado nove vezes sucessivamente. De quantas formas distintas pode ser obtida uma sequência com quatro faces iguais a 1, duas faces iguais a 3 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6?

- Inicialmente, vamos determinar as possíveis posições em que as faces distintas de 1 podem ocorrer. Há 126 possibilidades ($C_{9,5} = 126$), pois devem ser escolhidas cinco entre nove posições.

Acompanhe a seguir uma possível escolha.

- Para tal escolha de lugares (2º, 4º, 5º, 7º e 9º lançamentos), as faces 2 (uma vez), 3 (duas vezes), 5 (uma vez) e 6 (uma vez) podem trocar de lugar entre si. Usando o resultado obtido no 1º caso, sabemos que o número de possibilidades é $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!}$.

Assim, reunindo os dois passos anteriores, concluímos que o número de permutações possíveis é dado por:

$$C_{9,5} \cdot P_5^{(2)} = \frac{9!}{\cancel{5!}\,4!} \cdot \frac{\cancel{5!}}{2!} = \frac{9!}{4!\,2!}$$

9 é o número total de lançamentos
2 é o número de faces iguais a 3
4 é o número de faces iguais a 1

Indicaremos por $P_9^{(4,2)}$.

Para obter o número de anagramas formados a partir de BANANA, seguimos o mesmo raciocínio: são seis letras, das quais três são **A** e duas são **N**. Então, o total de anagramas é:

$$P_6^{(3,2)} = \frac{6!}{3!\,2!} = 60$$

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2414501 (Acesso em: 24 de mar. 2020)

Aqui, o que eu deixaria de sugestão seria o uso de mais exemplos antes de corresponder cada fatorial, que permaneceu após a simplificação, com os elementos presentes no problema, assim como sugerido no caso anterior, e, além disso, poderia ter sido feita uma menção à possibilidade de tomar como referência as faces iguais a 3 ao invés das faces iguais a 1. Por fim, há a apresentação do caso geral tal qual conhecemos, acompanhada de dois exemplos resolvidos. Segue um bloco de exercícios propostos e a finalização do capítulo com um desafio proposto. Nota-se que a obra não aborda os tópicos de Arranjo com Repetição, Combinação Completa e Permutação Circular.

c) Coleção Matemática para Compreender o Mundo – Editora Saraiva (2º ano)

A autoria dessa coleção é de Kátia Stocco Smole, Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo, e Maria Ignez Diniz, Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo. No volume analisado, o assunto “Contagem” é abordado no quinto capítulo da obra, cuja capa possui alguns problemas relacionados a quantidade de linhas telefônicas possíveis, placas de automóveis e senhas bancárias podem existir sob determinadas condições. Tais problemas vêm acompanhados de um pequeno comentário sobre a relevância deles para a realidade como, no caso das senhas, determinar o nível de segurança das transações feitas por um banco. Na mesma página, um box “Situe-se” define a Análise Combinatória como a área da Matemática que trata da contagem organizada de um grande número de dados. Todas essas informações, são mostradas na Figura 22, abaixo.

Figura 22 - Reprodução parcial da pág. 96 do vol. 2 da Coleção Matemática para Compreender o Mundo

Pense sobre os problemas a seguir.

Quantos números de telefone podem ser feitos com oito algarismos?

Quantas placas de automóvel é possível ter usando-se três letras e quatro algarismos?

Quantas senhas bancárias podem ser criadas com seis caracteres, sendo pelo menos dois deles letras e pelo menos um deles algarismo?

Responder a essas questões permite estimar o tamanho de uma rede telefônica, da frota de automóveis ou ainda o potencial de clientes de um banco e da segurança nas transações que exigem senhas.

Situe-se

No capítulo anterior, vimos como a Estatística trata da coleta, da análise, da interpretação e da apresentação de dados. Agora, vamos continuar o estudo com outra área da Matemática que analisa dados e busca quantificá-los. A contagem organizada de grande número de dados é conhecida como Análise combinatória, e ela é o foco deste capítulo.

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/1638037 (Acesso em: 04 de abr. 2020)

O primeiro tópico é “Problemas de contagem” no qual são apresentados dois exemplos resolvidos, com a intenção de ilustrar modos de organizar o processo de contagem quando se trata de muitas possibilidades. O exemplo inicial é o clássico “De quantas maneiras uma pessoa pode vestir-se”. Acredito que esse é o primeiro ou um dos primeiros exemplos que os professores de matemática amplamente empregam numa primeira aula de combinatória no

Ensino Básico. Como ocorre com o exemplo do táxi numa aula de função do primeiro grau. Algo que chamou minha atenção é que esse mesmo exemplo é resolvido de seis maneiras diferentes. São elas: Listagem, Diagrama de Venn, Tabela, Árvore de Possibilidades, Desenho e Esquema. Ao final de cada método, tem-se a conclusão de total de formas de vestir-se naquelas condições, doze. O exemplo seguinte trata da construção de números com algarismos distintos. Esse, é resolvido de quatro formas distintas. Tais exemplos e resoluções, seguem ilustrados pelas Figuras 23 e 24, abaixo.

Figura 23 - Reprodução parcial da pág. 96 do vol. 2 da Coleção Matemática para Compreender o Mundo

1 Problemas de contagem

Aprender a organizar e a contar um grande número de possibilidades exige formas adequadas para ordenar informações. Vamos começar analisando essas formas em diferentes situações de contagem.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R1. Suponha que você tenha 4 camisas, uma branca (**B**), uma azul (**A**), uma preta (**P**) e uma vermelha (**V**), e 3 calças, uma preta (**P**), uma branca (**B**) e uma azul (**A**). De quantas maneiras diferentes você pode se vestir usando uma camisa e uma calça? Você pode escolher qualquer uma das 4 camisas e, para cada camisa escolhida, optar por qualquer uma das 3 calças.

Resolução

Podemos resolver esse problema de vários modos.

1º) Escrevendo os grupos possíveis de camisa e calça.

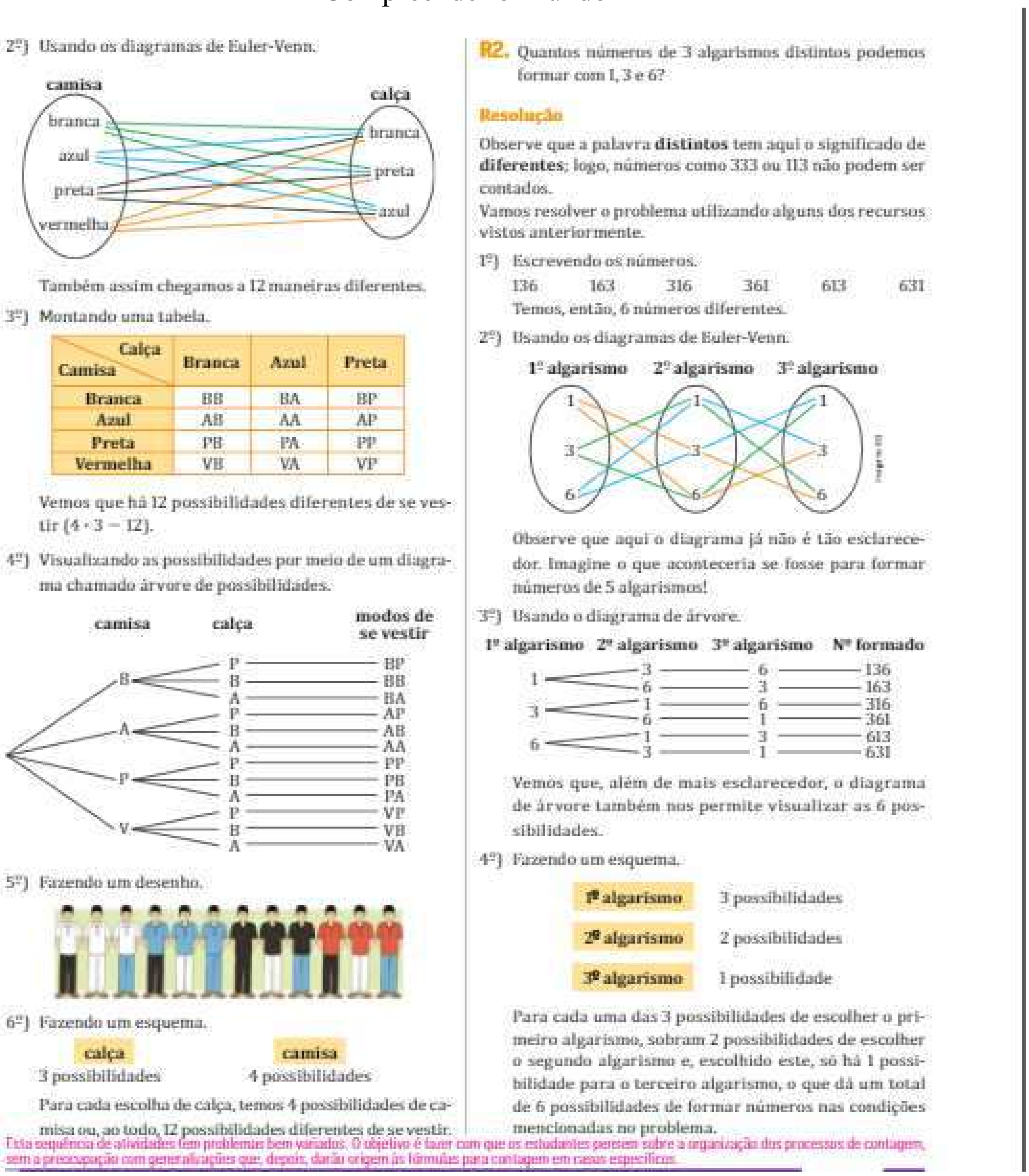
camisa **B**, calça **B**	camisa **A**, calça **B**	camisa **P**, calça **B**	camisa **V**, calça **B**
camisa **B**, calça **A**	camisa **A**, calça **A**	camisa **P**, calça **A**	camisa **V**, calça **A**
camisa **B**, calça **P**	camisa **A**, calça **P**	camisa **P**, calça **P**	camisa **V**, calça **P**

Vemos, então, que há 12 maneiras diferentes de se vestir.

96 **UNIDADE 2** ESTATÍSTICA, CONTAGEM E PROBABILIDADE

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/1638037 (Acesso em: 04 de abr. 2020)

Figura 24 - Reprodução parcial da pág. 97 do vol. 2 da Coleção Matemática para Compreender o Mundo



2º) Usando os diagramas de Euler-Venn.

Também assim chegamos a 12 maneiras diferentes.

3º) Montando uma tabela.

Camisa \ Calça	Branca	Azul	Preta
Branca	BB	BA	BP
Azul	AB	AA	AP
Preta	PB	PA	PP
Vermelha	VB	VA	VP

Vemos que há 12 possibilidades diferentes de se vestir ($4 \cdot 3 = 12$).

4º) Visualizando as possibilidades por meio de um diagrama chamado árvore de possibilidades.

5º) Fazendo um desenho.

6º) Fazendo um esquema.

calça
3 possibilidades

camisa
4 possibilidades

Para cada escolha de calça, temos 4 possibilidades de camisa ou, ao todo, 12 possibilidades diferentes de se vestir.

R2. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com 1, 3 e 6?

Resolução

Observe que a palavra **distintos** tem aqui o significado de **diferentes**; logo, números como 333 ou 113 não podem ser contados.

Vamos resolver o problema utilizando alguns dos recursos vistos anteriormente.

1º) Escrevendo os números.

136 163 316 361 613 631

Temos, então, 6 números diferentes.

2º) Usando os diagramas de Euler-Venn.

Observe que aqui o diagrama já não é tão esclarecedor. Imagine o que aconteceria se fosse para formar números de 5 algarismos!

3º) Usando o diagrama de árvore.

Vemos que, além de mais esclarecedor, o diagrama de árvore também nos permite visualizar as 6 possibilidades.

4º) Fazendo um esquema.

1º algarismo — 3 possibilidades

2º algarismo — 2 possibilidades

3º algarismo — 1 possibilidade

Para cada uma das 3 possibilidades de escolher o primeiro algarismo, sobram 2 possibilidades de escolher o segundo algarismo e, escolhido este, só há 1 possibilidade para o terceiro algarismo, o que dá um total de 6 possibilidades de formar números nas condições mencionadas no problema.

Esta sequência de atividades tem problemas bem variados. O objetivo é fazer com que os estudantes pensem sobre a organização dos processos de contagem, sem a preocupação com generalizações que, depois, darão origem às fórmulas para contagem em casos específicos.

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/1638037 (Acesso em: 04 de abr. 2020)

Seguindo, há a seção “Fazer e Aprender” com mais de dez problemas distintos, cujo objetivo, segundo as instruções do manual do professor, é fazer com que o aluno pense sobre a organização dos processos de contagem sem, num primeiro momento, preocupar-se com generalizações. Percebe-se uma proposta diferente dos demais livros analisados nos quais os exemplos resolvidos eram seguidos de definições gerais.

Dentre os exercícios apresentados, dois em especial, me chamaram a atenção. A reprodução dos enunciados segue abaixo:

"2. No lançamento simultâneo de 5 moedas, em que pode sair cara ou coroa em cada uma, quantos e quais são os resultados possíveis?"

"3. Em um jogo com 2 dados comuns, quais e quantas são as somas possíveis de todos os números que poderão sair na face superior quando os 2 dados forem lançados?"

No primeiro enunciado, não fica explícito se as moedas são idênticas ou diferentes. Como não havia o gabarito do mesmo no edição do livro que foi analisada, não há como saber se as autoras consideram como gabarito 6, que seria o número de soluções inteiras da equação $x + y = 5$ ($n°\ de\ caras + n°\ de\ coroas = 5$) supondo que são moedas idênticas, ou 32, supondo que são diferentes. Também não podemos descartar a possibilidade do gabarito ser 32, ainda que considerando as moedas como idênticas, devido ao equívoco do uso do tratamento probabilístico na contagem, que demanda a distinguibilidade intrínseca dos objetos ainda que ela não exista naquele contexto,. Quanto ao segundo enunciado, o mesmo é análogo ao exemplo que trabalhamos anteriormente sobre o lançamento de dois dados em uma mesa considerando as quatro situações de contagem possíveis, visto que o enunciado não explicita se trata de dados idênticos, dados diferentes, nem de lançamento simultâneo ou ordenado.

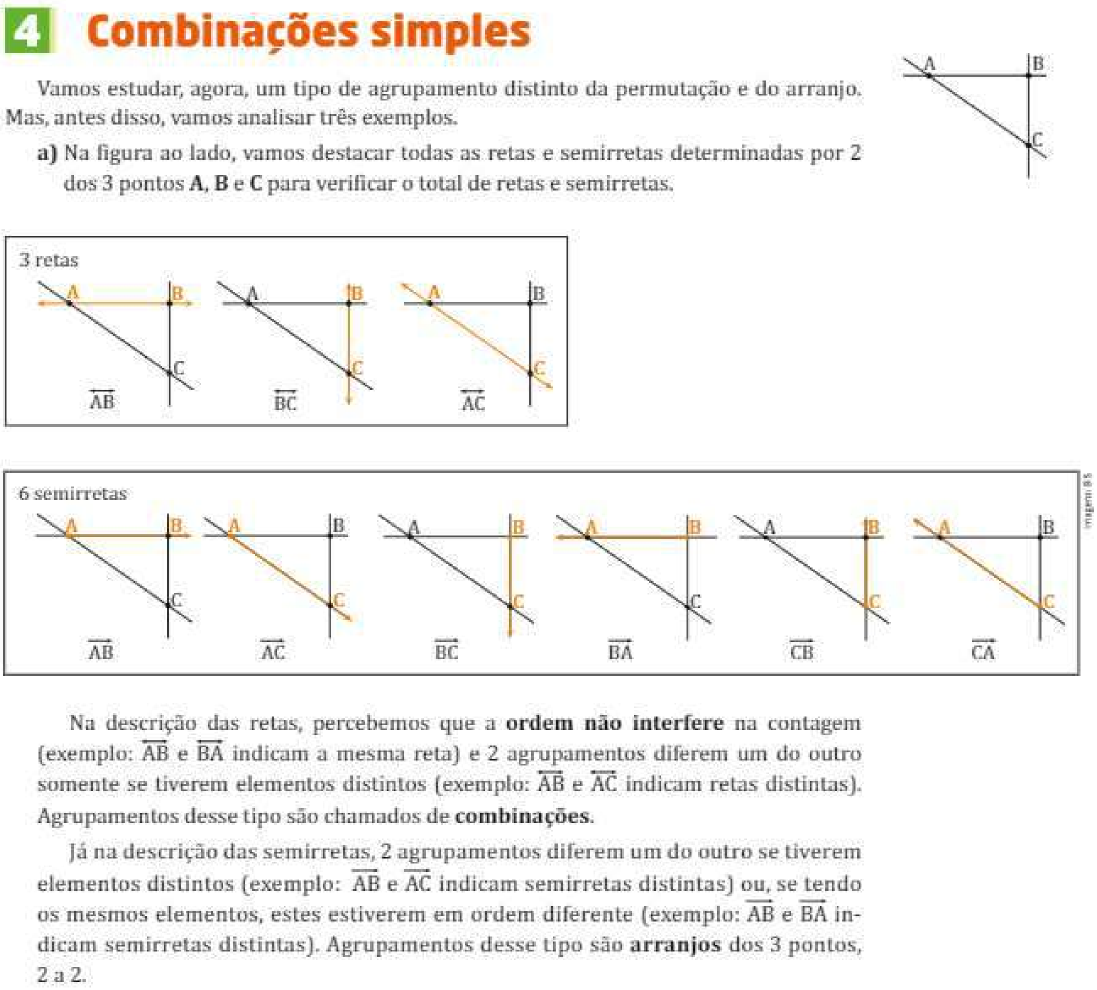
Então, há o Princípio Fundamental da Contagem. A definição não foge do usual, a não ser pelo uso de três "acontecimentos" como referência, ao invés de dois. É dito que o mesmo Princípio também vale para dois ou mais de três eventos. Na sequência, há um bloco de exercícios resolvidos e, depois, exercícios propostos.

Uma vez que o P.F.C foi apresentado, parte-se para as classes de problemas de contagem que conhecemos, as permutações, os arranjos e as combinações. A Permutação vem primeiro. A partir da referência ao exemplo de construção de números presente no início do capítulo, é definido o que se entende por Permutação Simples, ressaltando que "simples" remete a não repetição de elementos. Há dois exemplos e a aplicação do Princípio Multiplicativo para uma expressão geral, a saber $P_n = n.(n-1).(n-2).\ldots.1$.

Em seguida, temos os Arranjos. Há um exemplo sobre formulação de "palavras" com as letras a, b, c e d, cuja solução faz uso da árvore de possibilidades. Segue, então, a definição de Arranjo Simples. Por fim, o P.M. é aplicado para a obtenção de uma expressão geral para o cálculo do total de Arranjos Simples de n objetos distintos, tomados p a p. Há a menção da Permutação como um caso particular do Arranjo tal qual $n = p$. Após isso, vêm exemplos resolvidos e uma seção "Para Complementar" que aborda o Fatorial. Nessa seção, é sinalizado que produtos como 1.2.3.4 são frequentes em Análise Combinatória, o que é reforçado por um exemplo no qual isso acontece, o que achei uma boa escolha, pois as autoras dizem que isto acontece e mostram isso com um exemplo comum no contexto de Contagem. Todo o conjunto, a meu ver, funciona bem como uma justificativa para o uso do Fatorial. A definição ocorre como de costume, e toma $n \geq 1$ como condição de existência, o que poupa a necessidade de convencionar $1! = 1$, como feito em outras obras analisadas. É feita a convenção sobre $0! = 1$ e dito que os motivos serão apresentados mais adiante. Aparecem alguns exemplos e, só então, é usado o fatorial para reescrever as fórmulas de Permutação Simples e Arranjo Simples. Temos, então, problemas resolvidos e problemas propostos. Senti falta da definição do que é um anagrama apesar de haver problemas de contagem de anagramas abordados nos outros tópicos. Até então apenas havia sido dito que anagramas eram muito utilizados enquanto códigos, e havia sido mostrado um exemplo de anagrama no meio do enunciado de um problema. Apenas nesse bloco de exercícios resolvidos que é dito que “cada anagrama é uma permutação simples das letras da palavra” ao resolver o primeiro dos problemas. Ainda assim, isso não pode ser considerado totalmente correto, já que palavras com letras repetidas também possuem anagramas. Por fim, há uma leva de exercícios propostos e uma breve seção de “Cálculo Rápido” que propõe a prática de simplificações e cálculos de fatoriais. Há apenas dois exercícios, cada um com três subitens. Não me pareceu significativo.

Eis que chega a vez das Combinações Simples. O primeiro exemplo para apresentar esse tipo de agrupamento é um exemplo geométrico que se baseia em retas e semirretas para diferenciar *conjuntos ordenados* (Arranjos) de *conjuntos não ordenados* (Combinações).

Figura 25 - Reprodução parcial da pág. 106 do vol. 2 da Coleção Matemática para Compreender o Mundo - Ensino Médio



4 Combinações simples

Vamos estudar, agora, um tipo de agrupamento distinto da permutação e do arranjo. Mas, antes disso, vamos analisar três exemplos.

a) Na figura ao lado, vamos destacar todas as retas e semirretas determinadas por 2 dos 3 pontos **A**, **B** e **C** para verificar o total de retas e semirretas.

Na descrição das retas, percebemos que a **ordem não interfere** na contagem (exemplo: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BA}$ indicam a mesma reta) e 2 agrupamentos diferem um do outro somente se tiverem elementos distintos (exemplo: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ indicam retas distintas). Agrupamentos desse tipo são chamados de **combinações**.

Já na descrição das semirretas, 2 agrupamentos diferem um do outro se tiverem elementos distintos (exemplo: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ indicam semirretas distintas) ou, se tendo os mesmos elementos, estes estiverem em ordem diferente (exemplo: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ indicam semirretas distintas). Agrupamentos desse tipo são **arranjos** dos 3 pontos, 2 a 2.

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/1638037 (Acesso em: 04 de abr. 2020)

Um ponto negativo desse primeiro exemplo é sua contextualização, por me parecer muito técnico. Acredito que essa distinção deveria ser feita com um exemplo que a tornasse mais evidente, como é o caso do segundo exemplo que compara a formação de grupos de 3 pessoas dentre 4 disponíveis com filas com 3 pessoas escolhidas dentre as mesmas 4 disponíveis. Após um terceiro exemplo, é definido o que se entende como Combinação Simples e três possíveis notações. Em seguida, é apresentada a relação que pode ser obtida entre Permutação, Arranjo e Combinação Simples. No caso, o número de arranjos simples pode ser obtido pelo produto entre o número de permutações simples e o número de combinações simples de um mesmo conjunto de objetos, nas mesmas condições. Norteado por isso, é obtida a expressão do cálculo de combinações simples como já é conhecido. Temos, na sequência, exercícios resolvidos e os exercícios propostos. Ao final, há algumas atividades propostas envolvendo o uso de calculadoras, que é seguido da seção “Para Complementar”, na qual é discutido o motivo de $0! = 1$, além de abordar outros questionamentos que estão frequentemente presentes na cabeça dos alunos quando se trata de convenções matemáticas.

Figura 26 - Reprodução parcial da pág. 112 do vol. 2 da Coleção Matemática para Compreender o Mundo - Ensino Médio

PARA COMPLEMENTAR

Por que 0! = 1?

Por que $0! = 1$? E por que $2^0 = 1$? Essas são perguntas legítimas que têm respostas semelhantes.

Se relembrarmos, por um lado, a definição de $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ e de 2^n como o produto de **n** fatores iguais a 2, ou seja, $2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$, verificaremos que as duas definições, na forma em que estão, não fazem sentido para $n = 0$.

Por outro lado, se observarmos algumas propriedades e fórmulas verdadeiras para $n \geqslant 1$, como $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ e $\frac{2^n}{2^p} = 2^{n-p}$, perceberemos que, no caso de $n = p$, elas precisariam ser modificadas.

No entanto, sabemos que $\binom{n}{n} = 1$ e que $\frac{2^n}{2^n} = 1$. Então, para mantermos as propriedades válidas no caso de $n = p$, sem precisar fazer nenhuma ressalva, definimos $0! = 1$ e $2^0 = 1$. Isso na verdade é feito por convenção, para conveniência na escrita e descrição das regras e fórmulas, a fim de que as propriedades das operações continuem válidas.

Tal raciocínio, porém, poderia nos levar ao seguinte questionamento: Por que, então, $\frac{0}{0}$ não é igual a 1?

Nesse caso, a resposta é diferente. A operação de divisão entre números naturais não está definida quando o divisor é zero, não importa qual seja o valor do dividendo. Na verdade, não existem valores nem para $\frac{0}{0}$ nem para $\frac{a}{0}$, qualquer que seja o valor de **a**, porque o quociente de dois números **a** e **b** é definido como um número **q** que satisfaz a relação: $\frac{a}{b} = q \Leftrightarrow b \cdot q = a$.

No caso de $b = 0$ e $a \neq 0$, não existe **q** que torne verdadeira a igualdade $0 \cdot q = a$.

Já quando $a = b = 0$, todo valor de **q** seria aceitável, porque $0 \cdot q = 0$ vale para qualquer valor de **q**.

Fonte: https://api.plurall.net/media_viewer/documents/1638037 (Acesso em: 04 de abr. 2020)

A forma como o texto conduz toda as reflexões soou muito acessível ao aluno a qual se dirige e um ótimo adendo ao conteúdo. O capítulo é fechado com um texto voltado ao Sistema Braille, usado para a leitura e escrita por pessoas deficientes visuais, mencionando a matemática envolvida para o cálculo do total de caracteres possíveis de serem representados segundo esse sistema. Percebe-se que temas como Permutação com Repetição, Permutação Circular, Arranjo com Repetição e Combinação Completa não foram abordados nesta obra.

4. Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, tratamos de um assunto da Matemática que é visto como "difícil de ensinar" por uma considerável parcela dos professores, ao mesmo tempo que é visto como "difícil de aprender" por uma quantidade significativa de alunos. Sabemos que, muitas das vezes, tais dificuldades surgem e/ou são alimentadas pela estratégia adotada pelo professor no momento de ensino-aprendizagem. Normalmente, como sabemos, tal estratégia é composta de dois momentos: um, com as definições e fórmulas, e outro, com os exercícios de aplicação, usualmente enfadonhos, dos conceitos.

Diferente da difundida metodologia tradicional, procuramos abordar os tópicos da Análise Combinatória - no recorte condizente com o currículo da Educação Básica – de forma construtiva e condizente com um público que está buscando a devida apropriação daqueles objetos de ensino, e que visa a incentivar uma postura ativa e reflexiva, tanto por parte do aluno quanto por parte do professor, ao longo de todo o processo.

Acredito que seja razoável dizer que a combinação do domínio do conteúdo, tanto técnico quanto didático, e a preparação da aula, formam a base da segurança do professor e da qualidade do seu trabalho. É natural que, ao preparar a aula, o professor reflita sobre quais dificuldades já foram apresentadas a ele naquele conteúdo, pelos alunos, e de que formas ele pode auxiliá-los para que as superem.

O livro didático é um recurso fortemente presente na realidade da sala de aula e, portanto, deve ser considerado no planejamento de aula. Como pudemos perceber por meio das obras aqui analisadas, há livros que podem reforçar práticas mais tradicionais, ainda que em diferentes intensidades, assim como há livros que buscam propor alternativas didáticas. Além disso, notamos que nem todas as obras cobrem inteiramente os tópicos pertinentes ao currículo básico, o que me gera questionamentos como: "O que justifica essa prática dos autores?", "O quanto isso é comum entre eles?", "Em que momento isso passou a ocorrer?". Devido a tais fatores, percebemos o grau de importância que um olhar crítico do professor exerce na hora do planejamento didático da apresentação dos conceitos ao aluno, ao contrário da confiança ingenuamente plena que ocorre nas obras, principalmente em momentos que o professor se sente mais desamparado, agindo apenas como reprodutor do livro, sem a devida reflexão.

Desse modo, o que gostaria de deixar com este trabalho é, em particular, uma pequena contribuição para o ensino de Combinatória como um todo, tal como acredito que deva ser: problematizador, reflexivo e investigativo. Ademais, gostaria de deixar mais uma fonte de informações que auxilie meus colegas de magistério no preparo de suas aulas, e, com isso, desejo que os mesmos possam sentir-se mais confiantes em seu trabalho, ao mesmo tempo que auxiliam os seus alunos a construírem autoconfiança no que tange ao trato tanto com os tópicos de Contagem, quanto com a Matemática como um todo, contribuindo para uma formação plena do discente.

Referências Bibliográficas

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

CONRADO, L. O Binômio de Newton é de Newton? In: Semana de Iniciação Científica, 9., 2014, Guarapuava. **Anais da XIX Semana de Iniciação Científica** Disponível em: <https://anais.unicentro.br/proic/pdf/xixv2n1/80.pdf.> Acesso em: 7 jan.2020.

DANTE, L.R. **Teláris matemática, 8° ano**: ensino fundamental, anos finais. 3.ed.p.221-223. São Paulo: Ática, 2018.

GONÇALVES, R. R. S. **Uma Abordagem Alternativa para o Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar 5: Combinatória e Probabilidade**. 3.ed. São Paulo: Atual, 1977.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**: ensino médio, volume 2. 9.ed.p.226-251. São Paulo: Saraiva, 2016.

LAINETTI, T. S. F. **Explorando a Não-Equiprobabilidade de Eventos na Educação Básica**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio** - Volume 2. 7.ed. p.81-93. Rio de Janeiro: SBM, 2016

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. **Matemática essencial 8° ano:** ensino fundamental, anos finais. 1.ed.p.189-192. São Paulo: Scipione, 2018.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A Origem da Idéia do Acaso na Criança**. Rio de Janeiro: Record Cultural, 1951.

SAMPAIO, F. A. **Trilhas da matemática, 8° ano:** ensino fundamental, anos finais. 1.ed.p.256-261. São Paulo: Saraiva, 2018.

SANTOS, J. W.; SILVA, M. A. Realização de poder na idealização dos livros didáticos de Matemática. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 14, n. 1, p. 250-272, jan./abr. 2019 Disponível em: <http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa> Acesso em: 11.mar.2020.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo 2**. 1.ed.p.96-113. São Paulo: Saraiva, 2016.

TERRA, M. R. **O Desenvolvimento Humano na Teoria de Piaget**, 2002. Disponível em: < https://www.unicamp.br/iel/site/alunos/publicacoes/textos/d00005.htm#_ftn1 >. Acesso em 1 de set. 2019.

TRETTEL, Aline de Lima. **A origem dos símbolos matemáticos como forma de ensino**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (Gradação em Licenciatura em Matemática). Fundação Educacional do Município de Assis, Assis.