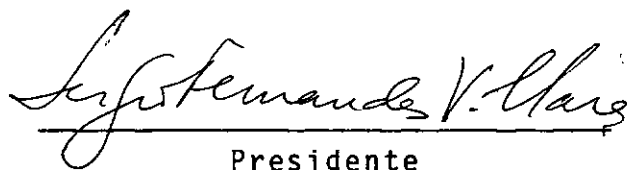


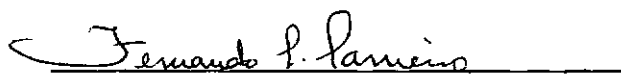
ESTUDO COMPARATIVO DE ANÁLISE NUMÉRICA
APLICADA A PLACAS ESCONSAS

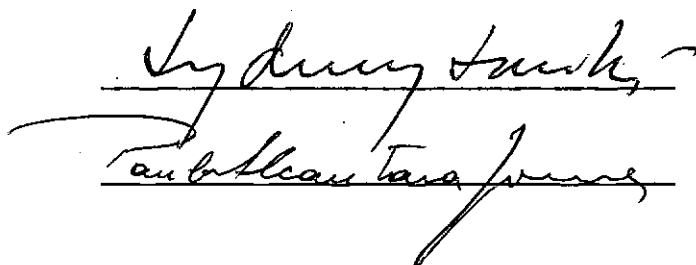
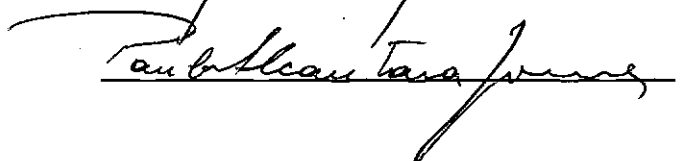
FRANCISCO SERAPHICO FERRAZ DA NÓBREGA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA-
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:


Presidente



RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
SETEMBRO DE 1972

ã memõria de meu pai, a
minha mãe e meus irmãos

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. SERGIO FERNANDES VILLAÇA, pela orientação dada a este trabalho.

Ao prof. FERNANDO LUIZ LOBO B.CARNEIRO pelo estímulo e atenção dispensadas.

Ao Corpo Docente da COPPE, na pessoa de seu Diretor, professor ALBERTO LUIZ COIMBRA, pelo apoio e incentivo aos Cursos de Pós-Graduação.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

Aos componentes do Núcleo de Computação Eletrônica pela sua colaboração.

A todos os colegas e funcionários da COPPE que, direta ou indiretamente, contribuíram para o êxito deste trabalho .

A Helena Santos de Oliveira pelos seus trabalhos datilográficos.

SINOPSE

O presente trabalho tem como objetivo o estudo comparativo dos métodos numéricos das diferenças finitas e dos elementos finitos aplicados ao cálculo de placas esconsas simplesmente apoiadas.

Pesquisam-se a convergência para a solução analítica para vários ângulos de esconsidade e o progressivo aumento do tempo de execução com o refinamento da malha.

Foi elaborado um programa automático de diferenças finitas para malhas oblíquas e utilizados dois programas de elementos finitos implantados na COPPE. O primeiro foi o da tese de doutoramento na COPPE em 1970 do professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO. O outro, o ICES STRUDL II desenvolvido no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (versão 1969).

Foram usados elementos finitos triangulares não conformes, com três pontos nodais e nove deslocamentos nodais.

O método das diferenças finitas apresentou resultados mais exatos e a convergência de ambos os métodos verificou-se mais lentamente à medida que aumenta a esconsidade da placa.

ABSTRACT

The purpose of this work is the development of study of two numerical methods, the finite difference and the finite element method, as applied to the calculation of simply supported skew plates.

Convergence towards the analytic solution has been examined for different skew angles, and computed the increase of time of calculation due to the mesh refinement.

An automatic program of finite difference for oblique mesh has been written and two automatic programs available have been employed. One developed by Prof. ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO in his Ph.D. thesis at COPPE in 1970, and ICES STRUDL II version 1969 developed at Massachusetts Institute of Technology.

There have been used non conforming triangular elements, with three nodal points and nine nodal displacements.

The method of finite differences has showed better results and in both methods the convergence decreases along with the increase of the skew angle.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - TENSÕES NO SISTEMA DE COORDENADAS RETANGULARES..	5
1.1. Considerações gerais	5
1.2. Deslocamentos. Deformações. Deformação numa direção qual quer	5
1.3. Tensões. Convenção adotada e notações	7
1.4. Tensões num plano inclinado	9
1.5. Lei de Hooke	11
CAPÍTULO II - TENSÕES NO SISTEMA DE COORDENADAS OBLÍQUAS	13
2.1. Considerações gerais	13
2.2. Notações	13
2.3. Relações geométricas	13
2.4. Deslocamentos. Deformações	15
2.5. Fôrças. Tensões	19
2.6. Lei de Hooke	22
CAPÍTULO III - FLEXÃO DE PLACAS EM COORDENADAS OBLÍQUAS	23
3.1. Considerações gerais.....	23
3.2. Definição. Hipóteses	23
3.3. Declividade	24
3.4. Declividade numa direção qualquer	25
3.5. Curvatura	26
3.6. Curvatura numa direção qualquer	27
3.7. Curvatura numa direção perpendicular a uma outra já defi nida	28

3.8. Relação entre deflexões e deformações	28
3.9. Equações dos momentos	29
3.10. Equação diferencial das placas	32
3.11. Relação entre os momentos nos sistemas oblíquos e re- tangular. Momentos fletores e torsor verdadeiros no sistema oblíquo	34
3.12. Condições de contorno para um bordo simplesmente apoi- ado	36
3.13. Processo de Marcus	36
CAPÍTULO IV - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	39
4.1. Considerações gerais	39
4.2. Conceituação. Diferenças finitas ordinárias	39
4.3. Diferenças finitas parciais	42
4.4. Operadores dispostos em moléculas	43
CAPÍTULO V - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	49
5.1. Considerações Gerais	49
5.2. Conceituação. Elementos utilizados. Hipótese?	49
5.3. Critérios de convergência	51
CAPÍTULO VI - PROGRAMAÇÃO AUTOMÁTICA	55
6.1. Considerações gerais	55
6.2. Estruturação da programação	55
6.3. Geração automática para o ICES STRUDL II	59
6.4. Finalidade e convenções do diagrama de blocos	60
6.5. Diagrama de blocos simplificado do programa principal	63
6.6. Explicações referentes ao diagrama de blocos	70

CAPÍTULO VII - APLICAÇÕES	73
7.1. Considerações gerais	73
7.2. Placas analisadas	73
7.3. Tempo de execução	80
7.4. Gráficos	82
CAPÍTULO VIII - ANÁLISE DOS RESULTADOS	95
8.1. Considerações gerais	95
8.2. Placa I	95
8.3. Placa II	96
8.4. Placa III	98
8.5. Conclusões	99
8.6. Importância do fator tempo	100
8.7. Aplicabilidade do método das diferenças finitas	101
8.8. Observações dos programas ICES STRUDL II e do profes sor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO	103
8.9. Continuidade da pesquisa	104
APÊNDICE	105
a - Notações utilizadas no desenvolvimento teórico	105
b - Listagem da programação	109
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123

I - INTRODUÇÃO

Com o advento da era eletrônica a ciência teve um notável progresso em todos os seus ramos.

Em particular, a teoria das estruturas sofreu profundas modificações, fornecendo ao engenheiro calculista ferramentas necessárias para resolver os inúmeros problemas idealizados pela grande criatividade da arquitetura moderna.

O estudo das estruturas reticuladas foi reformulado e passou a ser desenvolvido em termos matriciais, tornando adequado o emprego dos métodos dos esforços e dos deslocamentos. Assim, a análise dos diferentes tipos de estruturas reticuladas, como vigas, pórticos, grelhas, por qualquer um dos métodos, mantém os seus procedimentos básicos.

Os métodos numéricos encontravam-se outrora limitados. Além de serem trabalhosos, principalmente no que se refere à resolução de grandes sistemas de equações, era necessária a introdução de hipóteses simplificadoras no cálculo, ocorrendo incerteza na precisão de resultados. Estes renasceram e ampliaram-se e hoje representam a mola mestra do cálculo estrutural.

O método numérico que inicialmente foi aplicado com grandes sucessos, em problemas estruturais de uso corrente em engenharia foi o das diferenças finitas. Embora adequado para os problemas relativamente específicos, falhava para os mais complexos, o que deixava uma grande lacuna a ser preenchida.

Os pesquisadores procuraram desenvolver um outro , de cunho mais geral, sob todos os aspectos. Surgiu assim o método dos elementos finitos que constitui o processo de discretização mais poderoso da teoria das estruturas. Este, cada vez mais vai se firmando à medida que é utilizado pela apresentação de excelentes resultados quando comparado com outros já conhecidos. Sendo um método relativamente novo, é natural que se ressinta da falta de dados quantitativos, no que se refere a sua aplicação a diferentes tipos de problemas reais. Torna-se portanto relevante qualquer comparação deste, com outros de reconhecida precisão.

Baseado nisto, foi sugerido pelo professor FERNANDO LOBO CARNEIRO, Coordenador do Programa de Engenharia Civil da COPPE, o estudo comparativo dos métodos numéricos das diferenças finitas e dos elementos finitos, aplicados ao problema particular de placas esconsas simplesmente apoiadas.

Analizamos placas com diferentes ângulos de esconsidade, verificando para ambos os métodos a convergência para solução analítica, o efeito da esconsidade na convergência e o progressivo aumento do tempo de execução com refinamento da malha.

Para diferenças finitas elaboramos um programa automático utilizando malhas oblíquas, ou seja paralelogramo. Aproveitamos na programação a disposição em banda da matriz dos coeficientes das incógnitas. Substituímos a equação diferencial das placas de 4ª ordem por duas de 2ª ordem, de acordo com o processo de MARCUS, dadas as vantagens no tempo de execução e economia de

memória.

Para elementos finitos utilizamos dois programas implantados na COPPE, à disposição dos usuários. O primeiro foi o da tese de doutoramento na COPPE em 1970, do professor ALCEBIADDES VASCONCELLOS FILHO⁽⁷⁾, adaptado ao computador IBM/360⁽¹⁶⁾ com 256k bytes de memória interna. O outro o ICES-STRU DL II⁽⁸⁾, recentemente implantado no /360 já especificado, desenvolvido no Instituto de Tecnologia de Massachusetts em 1969 pelos professores ROBERT D. LOGCHER, JEROME J. CONNOR, Jr. e AUGUSTIN J. FERRANTE.

Utilizamos elementos triangulares, não conformes, com três pontos nodais e nove deslocamentos nodais, para análise das placas pelos programas de elementos finitos.

O fato de terem sido utilizados esses dois programas de elementos finitos é que seria de maior utilidade prática e significativa a apresentação de dados relativos às suas convergências e tempo de execução, no cálculo das placas esconsas. Salienta-se que houve uma certa aproximação (Capítulo V) para o emprego do programa do professor ALCEBIADDES VASCONCELLOS FILHO para o cálculo das placas esconsas.

O desenvolvimento teórico pode-se resumir da seguinte maneira:

- a) Estudos de tensões em eixos retangulares e oblíquos para apresentação da flexão das placas em coordenadas oblíquas.
- b) Fundamentos teóricos dos métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos, necessários à elaboração do programa automa-

tico e de uma melhor utilização dos programas ICES STRUDL II e do professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO.

c) Considerações gerais da técnica utilizada na programação automática e diagramas de blocos.

d) Apresentação dos resultados com gráficos e conclusões.

Consideramos que apresentamos na programação automática e nas comparações de resultados, contribuições pessoais com significado prático e objetivo. O tempo de computação teve uma notável importância nesta comparação.

I - TENSÕES NO SISTEMA DE COORDENADAS RETANGULARES

1 - Considerações Gerais

O objetivo dēste capítulo, é relembrar alguns conhecimentos básicos de tensões, referidos principalmente ao estado plano, em coordenadas retangulares. Serā exposto o necessário ā boa compreensão do estudo das mesmas em eixos oblíquos, que serā apresentado no capítulo II.

2 - Deslocamentos. Deformações. Deformação numa direção qualquer

No estudo da deformação de um corpo elástico, supõe-se que existem vínculos suficientes, que impedem o movimento como corpo rígido. Portanto não é possível haver deslocamentos das partículas do mesmo, sem deformação.

Seja o deslocamento de um ponto genérico P dado pelas componentes u e v paralelas aos eixos coordenados x e y respectivamente (Fig. 1.1). Admitimos o ponto P' infinitamente próximo de P . Os co-senos diretores da direção PP' serão representados por l e m onde:

$$l = \frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad m = \frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (1.1)$$

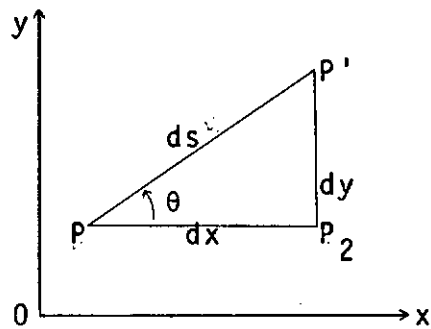


Fig. 1.1

Considerando que o corpo sofra uma pequena deforma
ção, o ponto P' desloca-se de:

$$\text{na direção } x: u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (1.2)$$

$$\text{na direção } y: v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Chamando ϵ o alongamento unitário na direção PP',
então:

$$\overline{PP'} = (1 + \epsilon) ds$$

$$\overline{PP_2} = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (1.3)$$

$$\overline{P_2P'} = dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Podemos escrever que: $\overline{PP'}^2 = \overline{PP_2}^2 + \overline{P_2P'}^2$, logo

$$\left[(1+\epsilon)ds\right]^2 = \left[dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right]^2 + \left[dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right]^2$$

$$(1+\epsilon)^2 = \left[l\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + m \frac{\partial u}{\partial y}\right]^2 + \left[m\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + l \frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 \quad (1.4)$$

Desenvolvendo a equação (1.4) e desprezando os quadrados e produtos dos pequenos deslocamentos, vem a expressão que define a deformação numa direção qualquer:

$$\epsilon = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \gamma_{xy} l m \quad (1.5)$$

onde:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.6)$$

As grandezas representadas na equação (1.6) são chamadas de componentes da deformação. Elas estão relacionadas pela equação abaixo, conhecida como equação de compatibilidade de deformações:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.7)$$

3 - Tensões. Convenção Adotada e Notações

Seja um elemento infinitesimal de área dA , submetido a um sistema de forças de resultante dP (Figura 1.2).

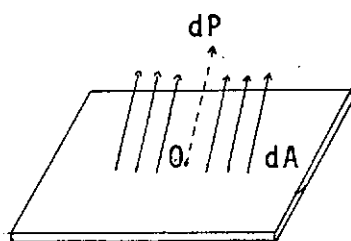


Fig. 1.2

Se a área diminui continuamente, o valor limite do quociente $\frac{dP}{dA}$ representa a tensão que atua no ponto 0. Pode-se decompôr esta tensão em uma componente normal à superfície e outra tangencial.

Imaginemos um paralelepípedo elementar referido ao sistema de eixos x, y, z em torno de um ponto genérico 0 (Fig. 1.2) com suas arestas paralelas aos eixos coordenados. Para cada um dos planos xy, xz e yz teremos uma tensão normal ao plano e duas componentes da tensão tangencial paralelas aos eixos que definem o plano. Assim são nove as componentes da tensão para o ponto. Considerando que o somatório dos momentos em relação aos eixos deve ser nulo, chega-se a:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \tau_{xz} = \tau_{zx} , \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

permanecendo somente 6 componentes independentes. Estas componentes são

$$\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z , \tau_{xy} , \tau_{yz} , \tau_{xz}$$

e definem completamente o estado de tensão no ponto.

Para as tensões normais, o sub-índice indica que a tensão atua num plano normal ao eixo do referido sub-índice.

Para as tensões cisalhantes, o primeiro sub-índice indica a direção normal ao plano em questão e o segundo a direção da componente da tensão sobre o mesmo.

Considera-se positiva a tensão normal quando se trata de tração e negativa quando de compressão. As componentes da tensão tangencial que atuam sobre uma face tomam o sentido positivo dos eixos coordenados se uma tração aplicada sobre a mesma face atua no sentido positivo do eixo; se a tração atua no sentido contrário ao eixo correspondente, o sentido positivo da tensão tangencial é oposto ao dos eixos coordenados.

4 - Tensões num Plano Inclinado

Quando as componentes da tensão são completamente definidas, podemos obter as tensões que atuam em qualquer plano inclinado pelas simples equações da estática. Seja o plano AB inclinado em relação aos eixos e $l = \cos \gamma$ e $m = \sin \gamma$ os co-senos diretores da direção normal a AB (Fig. 1.3).

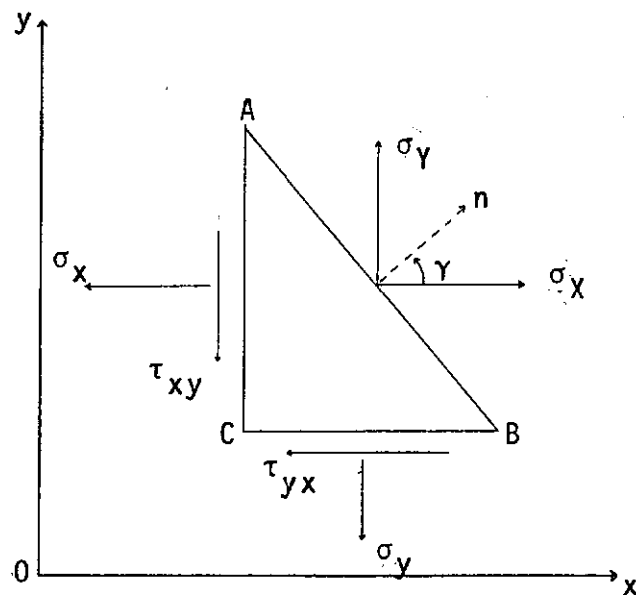


Fig. 1.3

σ_x e σ_y são as componentes de tensão paralelas aos eixos coordenados no lado AB.

Então:

$$\sigma_n = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m \quad (1.8)$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} \ell + \sigma_y m$$

As tensões normal σ_n e tangencial τ_n atuando no lado AB são respectivamente:

$$\sigma_n = \sigma_x \ell + \sigma_y m = \sigma_x \ell^2 + \sigma_y m^2 + 2 \tau_{xy} \ell m \quad (1.9)$$

$$\tau_n = \sigma_y \ell - \sigma_x m = -(\sigma_x - \sigma_y) \ell m + \tau_{xy} (\ell^2 - m^2)$$

5 - Lei de Hooke

A lei de Hooke foi estabelecida experimentalmente e relaciona as tensões com as deformações. Desde que as cargas aplicadas a um corpo sólido não ultrapassem um certo valor conhecido como limite de elasticidade, as tensões são proporcionais às deformações. Para corpos isótropos bi-dimensionais ela é expressa pelas equações:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) & \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) & \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (1.10) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}\end{aligned}$$

Onde E é o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson.

Sistema de coordenadas oblíquas: tensões,
flexão das placas, diferenças finitas.
Elementos finitos.

II - TENSÕES NO SISTEMA DE COORDENADAS OBLÍQUAS

1 - Considerações Gerais

Para o estudo de estruturas nas quais o contorno apresenta forma de paralelogramo, é conveniente o conhecimento das tensões e deformações no sistema de coordenadas oblíquas.

O capítulo tem esse objetivo, como também relacionar as referidas grandezas nos sistemas oblíquo e retangular.

2 - Notações

Para toda grandeza definida no sistema retangular, normalmente existe a correspondente no oblíquo. Como utilizamos ambos simultaneamente, convenciou-se neste trabalho acrescentar o índice "1" (unidade) quando nos referirmos ao oblíquo. Portanto x_1 e y_1 são as coordenadas, assim como σ_{x_1} , $\tau_{x_1 y_1}$, etc. são componentes de tensão no sistema oblíquo.

3 - Relações Geométricas

Seja um ponto P definido pelos dois sistemas de coordenadas (Fig. 2.1):

$$P(x, y) \quad \text{e} \quad P(x_1, y_1)$$

Elas estão relacionadas pelas equações:

$$x = x_1 + y_1 \cos \alpha \quad x_1 = x - y \cot \alpha \quad (2.1)$$

$$y = y_1 \sin \alpha \quad y_1 = y \operatorname{cosec} \alpha$$

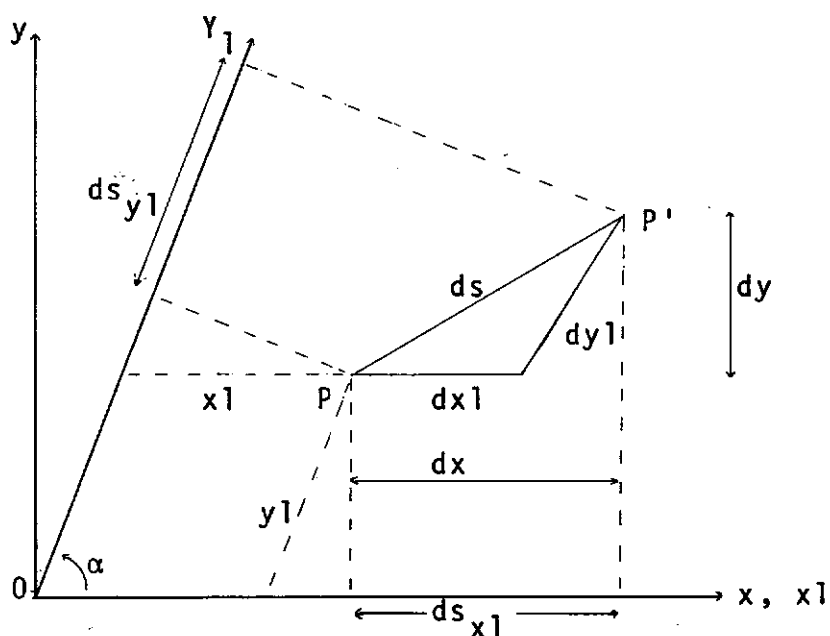


Fig. 2.1

onde α é o ângulo do eixo x_1 com y_1 .

Derivando as expressões (2.1) e tendo em vista as equações (1.1):

$$\ell = \ell_1 + m_1 \cos \alpha \quad \ell_1 = \ell - m \cot \alpha \quad (2.2)$$

$$m = m_1 \sin \alpha \quad m_1 = m \operatorname{cosec} \alpha$$

onde

$$\ell_1 = \frac{dx_1}{ds} \quad e \quad m_1 = \frac{dy_1}{ds} \quad (2.3)$$

As equações (2.3) define também a direção $\overline{PP'}$.

Da relação:

$$dx^2 + dy^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + 2 dx_1 dy_1 \cos \alpha = ds^2$$

temos que:

$$l^2 + m^2 = l_1^2 + 2 l_1 m_1 \cos \alpha + m_1^2 = 1 \quad (2.4)$$

As projeções de ds sobre os eixos x_1 e y_1 são definidas por (Fig. 2.1):

$$ds_{x_1} = dx_1 + dy_1 \cos \alpha \quad (2.5)$$

$$ds_{y_1} = dy_1 + dx_1 \cos \alpha$$

respectivamente.

4 - Deslocamentos. Deformações

As relações entre os deslocamentos são idênticas às equações (2.1):

$$u = u_1 + v_1 \cos \alpha \quad u_1 = u - v \cot \alpha \quad (2.6)$$

$$v = v_1 \sin \alpha \quad v_1 = v \operatorname{cosec} \alpha$$

De maneira análoga as equações (2.5), temos que as projeções do deslocamento em relação aos eixos $0x_1$ e $0y_1$ são respectivamente:

$$u_{1x_1} = u_1 + v_1 \cos \alpha$$

(2.7)

$$v_{1y_1} = u_1 \cos \alpha + v_1$$

Seja o ponto P da Fig. (2.2).

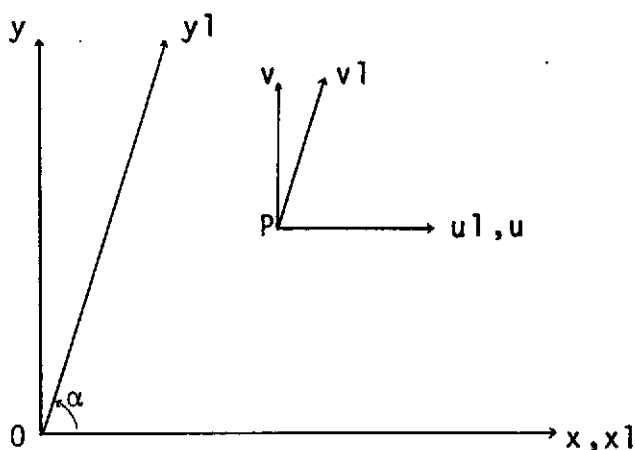


Fig. 2.2

Consideremos que o mesmo sofre deslocamentos u_1 e v_1 , funções de x_1 e y_1 . Então P' , infinitamente próximo de P , move-se passando a ocupar a posição: $P' (x_1 + dx_1 + u_1 + du_1, y_1 + dy_1 + v_1 + dv_1)$.

A distância entre os dois pontos será:

$$(1 + \epsilon)^2 ds^2 = (dx_1 + du_1)^2 + (dy_1 + dv_1)^2 + 2(dx_1 + du_1)(dy_1 + dv_1) \cos \alpha \quad (2.8)$$

Desenvolvendo a equação (2.8) e desprezando os termos de ordem superior vem:

$$(1 + \epsilon)^2 ds^2 = ds^2 + 2 dx_1 du_1 + 2 dy_1 dv_1 + 2(dx_1 dv_1 + du_1 dy_1) \cos \alpha$$

$$(1 + \epsilon)^2 ds^2 = ds^2 + 2 dx_1 (du_1 + dv_1 \cos \alpha) + 2 dy_1 (dv_1 + du_1 \cos \alpha) \quad (2.9)$$

Com a diferencial das equações (2.7) na equação (2.9) temos:

$$(1 + \epsilon)^2 ds^2 = ds^2 + 2 dx_1 du_{1x_1} + 2 dy_1 dv_{1y_1}$$

$$(1 + \epsilon)^2 ds^2 = ds^2 + 2 \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} dy_1 \right] dx_1 + 2 \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} dy_1 \right] dy_1 \quad (2.10)$$

então:

$$\epsilon = \epsilon_{x_1} \ell_1^2 + \epsilon_{y_1} m_1^2 + \gamma_{x_1 y_1} \ell_1 m_1 \quad (2.11)$$

onde:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \epsilon_{y_1} = \frac{\partial v_1}{\partial y_1}$$

$$\gamma_{x_1 y_1} = \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \quad (2.12)$$

As expressões (2.12) são chamadas componentes da deformação no sistema oblíquo. Embora sejam similares as equações (1.6), salienta-se que u_1 e v_1 não são as componentes verdadeiras mas as projeções sobre os eixos oblíquos.

Igualando as expressões (1.5) e (2.11), vem:

$$\epsilon = \epsilon_{x_1} \ell^2 + \epsilon_{y_1} m^2 + \gamma_{x_1 y_1} \ell m = \epsilon_x \ell^2 + \epsilon_y m^2 + \gamma_{xy} \ell m \quad (2.13)$$

Substituindo as equações (2.2) na equação (2.13), chega-se à relação entre as deformações nos dois sistemas de eixos:

$$\epsilon_{x_1} = \epsilon_x$$

$$\epsilon_{y_1} = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\gamma_{x_1 y_1} = 2 \epsilon_x \cos \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \quad (2.14)$$

ou

$$\epsilon_x = \epsilon_{x_1}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_{x_1} \cot^2 \alpha + \epsilon_{y_1} \operatorname{cosec}^2 \alpha - \gamma_{x_1 y_1} \cot \alpha \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\gamma_{xy} = -2 \epsilon_{x1} \cot \alpha + \gamma_{x1y1} \operatorname{cosec} \alpha$$

De maneira análoga a equação (1.7) temos a equação de compatibilidade de deformações, referida aos eixos oblíquos:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{x1}}{\partial y1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{y1}}{\partial x1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{x1y1}}{\partial x1 \partial y1} \quad (2.15)$$

5 - Fôrças. Tensões

Seja o ponto P submetido a fôrça de componentes X, Y e X1, Y1 em relação a ambos os eixos coordenados, como mostra a Fig. (2.3).

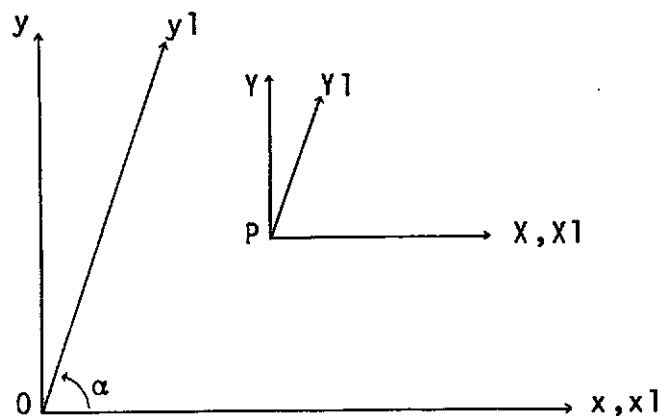


Fig. 2.3

Analogamente às equações (2.1):

$$X = X1 + Y1 \cos \alpha \quad X1 = X - Y \cot \alpha \quad (2.16)$$

$$Y = Y1 \sin \alpha \quad Y1 = Y \operatorname{cosec} \alpha$$

As Fig. 2.4a e 2.4b representam um mesmo elemento triangular PAB submetido a tensões, nos sistemas retangular e oblíquo respectivamente.

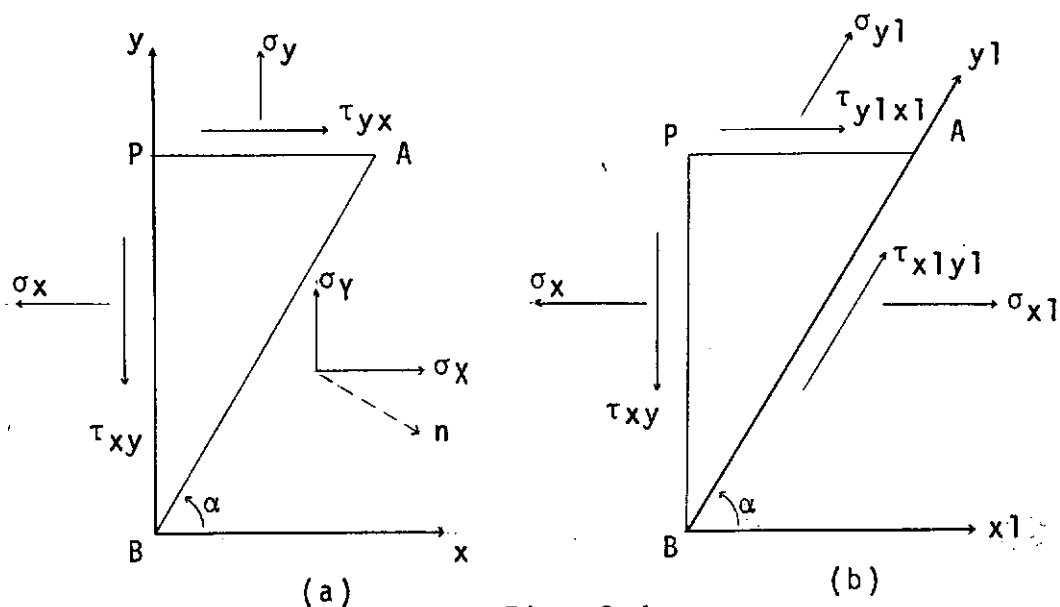


Fig. 2.4

As equações (2.16) para o lado PA são:

$$\tau_{yx} = \tau_{y1x1} + \sigma_{y1} \cos \alpha \quad \tau_{y1x1} = \tau_{yx} - \sigma_y \cot \alpha \quad (2.17)$$

$$\sigma_y = \sigma_{y1} \sin \alpha \quad \sigma_{y1} = \sigma_y \operatorname{cosec} \alpha$$

Para o lado AB os co-senos diretores são $l = \sin \alpha$ e $m = -\cos \alpha$. Em analogia às equações (1.8) teremos:

$$\sigma_x = \sigma_x \sin \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha \quad (2.18)$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} \sin \alpha - \sigma_y \cos \alpha$$

As equações (2.16) para o lado AB fornecem:

$$\sigma_{x1} = \sigma_x - \sigma_y \cot \alpha \quad (2.19)$$

$$\tau_{x1y1} = \sigma_y \operatorname{cosec} \alpha$$

Substituindo as equações (2.18) nas equações (2.19):

$$\sigma_{x1} = \sigma_x \sin \alpha + \sigma_y \cos \alpha \cot \alpha - 2 \tau_{xy} \cos \alpha \quad (2.20)$$

$$\sigma_{x1y1} = \tau_{xy} - \sigma_y \cot \alpha$$

Analisando as equações (2.17) e (2.20), conclui-se que:

$$\tau_{x1y1} = \tau_{y1x1} \quad (2.21)$$

Portanto são as seguintes as relações entre tensões nos dois sistemas de coordenadas:

$$\sigma_x = \sigma_{x1} \operatorname{cosec} \alpha + \sigma_{y1} \cos \alpha \cot \alpha + 2 \tau_{x1y1} \cot \alpha$$

$$\sigma_y = \sigma_{y1} \sin \alpha$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{x1y1} + \sigma_{y1} \cos \alpha$$

ou:

$$\sigma_{x1} = \sigma_x \sin \alpha + \sigma_y \cos \alpha \cot \alpha - 2 \tau_{xy} \cos \alpha$$

$$\sigma_{y1} = \sigma_y \operatorname{cosec} \alpha \quad (2.22)$$

$$\tau_{x1y1} = \tau_{y1x1} = \tau_{xy} - \sigma_y \cot \alpha$$

6 - Lei de Hooke

Apresentação da Lei de Hooke em coordenadas oblíquas. Substituindo as equações (2.14) nas equações (1.10), vem:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\epsilon_{x1} + \nu (\epsilon_{x1} \cot^2 \alpha + \epsilon_{y1} \operatorname{cosec}^2 \alpha - \gamma_{x1y1} \cot \alpha \operatorname{cosec} \alpha) \right] \quad (2.23)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\epsilon_{x1} \cot^2 \alpha + \epsilon_{y1} \operatorname{cosec}^2 \alpha - \gamma_{x1y1} \cot \alpha \operatorname{cosec} \alpha + \nu \epsilon_{x1} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[-2 \epsilon_{x1} \cot \alpha + \gamma_{x1y1} \operatorname{cosec} \alpha \right]$$

Da mesma forma, por substituição das equações (2.22) nas equações (2.23) teremos:

$$\sigma_{x1} = \frac{E \operatorname{cosec}^3 \alpha}{1-\nu^2} \left[\epsilon_{x1} + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \epsilon_{y1} - \cos \alpha \gamma_{x1y1} \right]$$

$$\sigma_{y1} = \frac{E \operatorname{cosec}^3 \alpha}{1-\nu^2} \left[\epsilon_{y1} + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \epsilon_{x1} - \cos \alpha \gamma_{x1y1} \right] \quad (2.24)$$

$$\tau_{x1y1} = \frac{E \operatorname{cosec}^3 \alpha}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) \gamma_{x1y1} - \cos \alpha (\epsilon_{x1} + \epsilon_{y1}) \right]$$

III - FLEXÃO (DE) PLACAS EM COORDENADAS OBLÍQUAS

1 - Considerações Gerais

Serão apresentados estudos relativos a declividade, curvatura, momentos fletores e torsor, equação diferencial das placas e o processo de Marcus.

2 - Definição. Hipóteses

Considera-se de um modo geral como placa um elemento estrutural bi-dimensional de superfície média plana (plano médio) com solicitações predominantes normais à superfície.

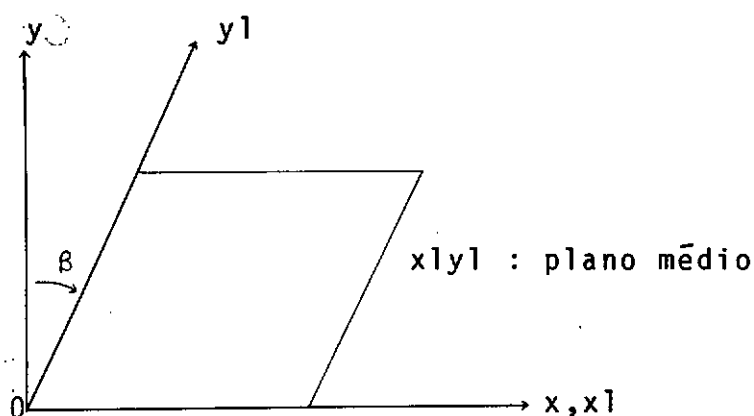


Fig. 3.1

Diz-se que uma placa é esconsa quando β , denominado ângulo de esconsidade é diferente de zero ou seja, o contorno é um paralelogramo. No estudo que segue admite-se que as mesmas sejam delgadas, isotrópicas, com carregamentos normais à superfície média e sofram pequenas deflexões. Podemos então considerar válidas as seguintes hipóteses:

- a) Não há tração ou compressão na superfície média (superfície neutra). Desprezam-se as deformações no plano médio da placa.
- b) Pontos situados numa normal ao plano médio permanecem numa normal à superfície média após a flexão. Equivale a serem desprezadas as deformações devidas ao esforço cortante.
- c) Desprezam-se as tensões na direção normal à placa.

3 - Declividade

O plano médio da placa antes de ocorrer a flexão é o plano $xlyl$ (Fig.3.1). Após fletida a placa, os pontos do plano médio sofrem deslocamentos w normais ao plano $xlyl$, formando o que chamamos de superfície média da placa.

Sejam i_x e i_y as declividades da superfície média nas direções x e y respectivamente:

$$i_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x l} = i_{xl} \quad (3.1)$$

$$i_y = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y l} \frac{\partial y l}{\partial y} \quad (3.2)$$

Derivando a equação (2.1) obtemos:

$$\frac{\partial y l}{\partial y} = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (3.3)$$

e portanto:

$$i_y = \frac{\partial \omega}{\partial y_l} \frac{1}{\sin \alpha} \quad (3.4)$$

$$i_y = i_{y_l} \frac{1}{\sin \alpha} \quad (3.5)$$

onde i_{y_l} é a declividade da superfície média na direção y_l . Das equações (3.1) e (3.5), conclui-se que nos cantos da placa a declividade é nula nas direções x e y .

4 - Declividade numa Direção Qualquer

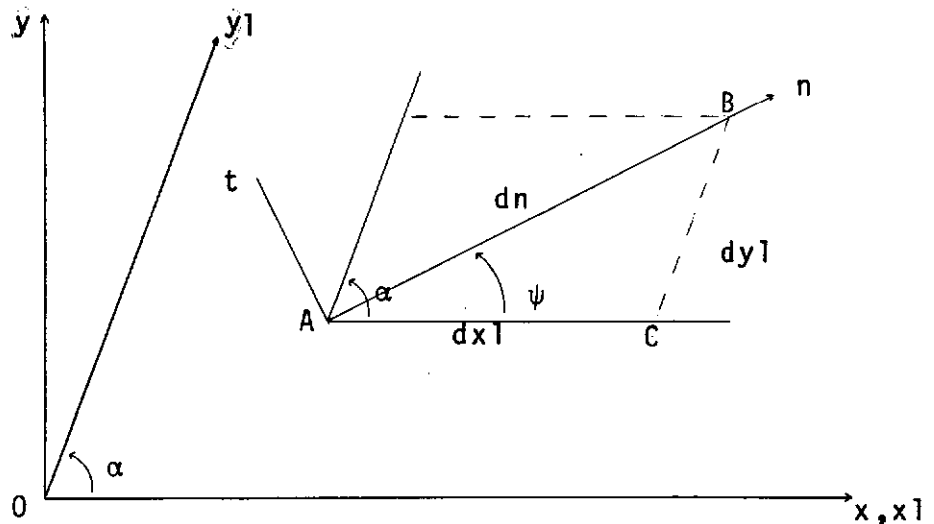


Fig. 3.2

Seja ψ o ângulo da direção An com o eixo x_l . A diferença entre as flechas nos pontos A e B (Fig. 3.2) infinitamente próximos é:

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x_I} dx_I + \frac{\partial \omega}{\partial y_I} dy_I \quad (3.6)$$

A declividade na direção n é dada então por:

$$\frac{d\omega}{dn} = \frac{\partial \omega}{\partial x_I} \frac{dx_I}{dn} + \frac{\partial \omega}{\partial y_I} \frac{dy_I}{dn} \quad (3.7)$$

Pela relação dos senos no triângulo ABC (Fig.3.2):

$$\frac{dy_I}{\text{sen } \psi} = \frac{dn}{\text{sen } \alpha} = \frac{dx_I}{\text{sen}(\alpha - \psi)} \quad (3.8)$$

Substituindo a equação (3.8) na equação (3.7):

$$\frac{d\omega}{dn} = \frac{\partial \omega}{\partial x_I} \frac{\text{sen}(\alpha - \psi)}{\text{sen } \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial y_I} \frac{\text{sen } \psi}{\text{sen } \alpha} \quad (3.9)$$

$$\frac{d\omega}{dn} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\text{sen}(\alpha - \psi)}{\text{sen } \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \text{sen } \psi \quad (3.10)$$

Da equação (3.10) concluímos que a declividade nos cantos da placa em qualquer direção é nula.

5 - Curvatura

Como estamos tratando de pequenas deflexões, teremos as seguintes expressões para a curvatura da superfície neutra em planos paralelos a $x_I z$ e $y_I z$, respectivamente:

$$\frac{1}{r_{x1}} = - \frac{\partial}{\partial x1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x1} \right) = - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{r_{y1}} = - \frac{\partial}{\partial y1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y1} \right) = - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2}$$

Considera-se a curvatura positiva se a convexidade está voltada para o sentido positivo do eixo z. O sinal negativo das expressões (3.11) decorre do fato da derivada segunda da deflexão ser negativa.

6 - Curvatura numa Direção Qualquer

Seja esta direção An (Fig. 3.2), logo:

$$\frac{1}{r_n} = - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right) \quad (3.12)$$

Por substituição da equação (3.9) na (3.12) temos:

$$\frac{1}{r_n} = \frac{\sin^2(\alpha - \psi)}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{r_{x1}} - \frac{1}{r_{x1}y1} \frac{2 \sin \psi \sin(\alpha - \psi)}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{r_{y1}} \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \alpha} \quad (3.13)$$

onde

$$\frac{1}{r_{x1}y1} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1 \partial y1}$$

e representa a distorção da superfície neutra no ponto considera-

do, em relação aos eixos x_1 e y_1 .

7 - Curvatura numa Direção Perpendicular a uma Outra já Definida

Substituindo na equação (3.13) ψ por $\psi + \pi/2$ (Fig. 3.2), chegamos a expressão:

$$\frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_{x1}} \frac{\cos^2(\alpha - \psi)}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{r_{x1y1}} \cos \psi \frac{\cos(\alpha - \psi)}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{r_{y1}} \frac{\cos^2 \psi}{\sin^2 \alpha} \quad (3.14)$$

Somando a equação (3.13) e a equação (3.14):

$$\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_t} = \operatorname{cosec}^2 \alpha \left[\frac{1}{r_{x1}} + \frac{1}{r_{y1}} + \frac{2}{r_{x1y1}} \right] \cos \alpha \quad (3.15)$$

Verifica-se então que a soma das curvaturas em duas direções perpendiculares é uma constante no ponto.

8 - Relação entre Deflexões e Deformações

As hipóteses já vistas anteriormente (item 3.2) em que supomos desprezível o efeito da força cortante nas deflexões e o da tensão de compressão produzida pela carga aplicada q , ocasionam erro desprezível nos deslocamentos transversais, desde que a espessura da placa seja pequena em comparação com as outras dimensões. Neste caso chega-se através de considerações geométricas às seguintes relações:

$$u|_{x1} = -z \frac{\partial \omega}{\partial x1} \quad v|_{y1} = -z \frac{\partial \omega}{\partial y1} \quad (3.16)$$

Substituindo as equações (3.16) nas equações (2.12)

teremos:

$$\epsilon_{x1} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} \quad \epsilon_{y1} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2}$$

$$\gamma_{x1y1} = -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1 \partial y1} \quad (3.17)$$

9 - Equações dos Momentos

Seja na Fig. 3.3 um elemento de placa cortado por dois pares de planos paralelos aos planos $x1z$ e $y1z$, onde as direções positivas dos momentos M_{x1} , M_{y1} , M_{x1y1} e os esforços cortantes Q_{x1} e Q_{y1} estão relacionadas com o estudo das tensões feito nos capítulos I e II.

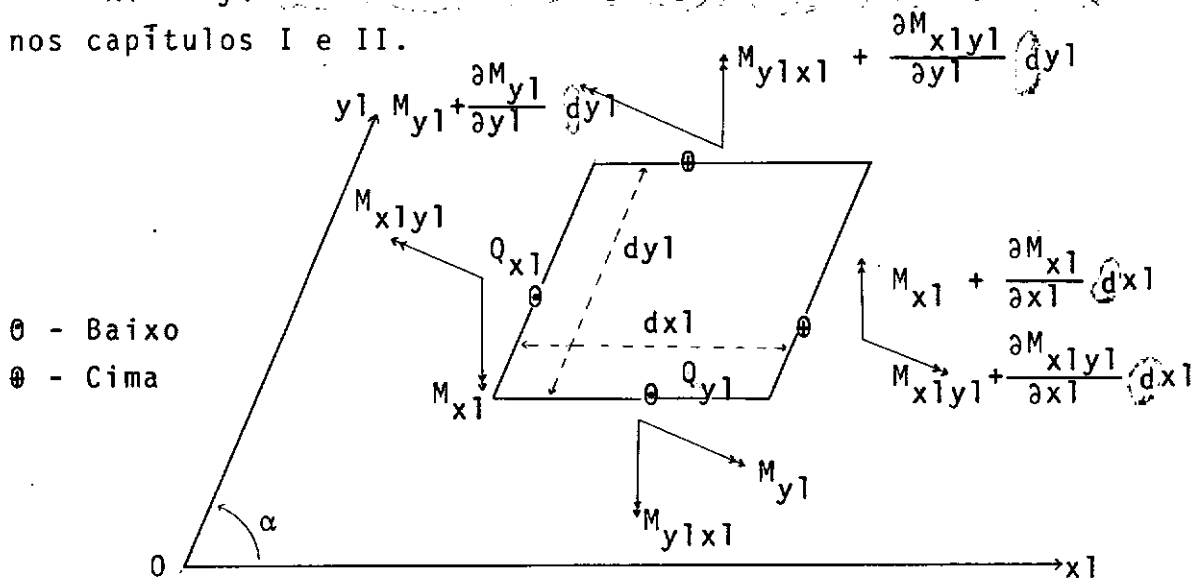


Fig. 3.3

Estes momentos são produzidos pelas tensões indicadas nas equações (2.24) e são determinados pelas expressões:

$$M_{x1} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{x1} dz \quad M_{y1} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{y1} dz \quad (3.18)$$

$$M_{x1y1} = - \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{x1y1} dz \quad M_{y1x1} = - \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{y1x1} dz$$

onde h é a espessura da placa.

Por substituição das equações (3.17) nas equações (2.24) chega-se a:

$$\sigma_{x1} = -z \frac{E \operatorname{cosec}^2 \alpha}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1 \partial y1} \right] \quad (3.19)$$

$$\sigma_{y1} = -z \frac{E \operatorname{cosec}^2 \alpha}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2} + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1 \partial y1} \right]$$

$$\tau_{x1y1} = -z \frac{E \operatorname{cosec}^2 \alpha}{1-\nu^2} \left[(1 + \cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1 \partial y1} - \cos \alpha \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2} \right) \right] \quad (3.19)$$

Sabe-se que o operador ∇^2 em coordenadas oblíquas é representado por:

$$\nabla_1^2 = \operatorname{cosec}^2 \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x1^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial x1 \partial y1} + \frac{\partial^2}{\partial y1^2} \right) \quad (3.20)$$

A equação (3.20) nas equações (3.19) nos dá as tensões escritas de uma maneira mais simples:

$$\begin{aligned}\sigma_{x1} &= -z \frac{E \operatorname{cosec} \alpha}{1-\nu^2} \left[\nabla_1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_1^2} \right] \\ \sigma_{y1} &= -z \frac{E \operatorname{cosec} \alpha}{1-\nu^2} \left[\nabla_1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right] \quad (3.21)\end{aligned}$$

$$\tau_{x1y1} = -z \frac{E \operatorname{cosec} \alpha}{1-\nu^2} \left[\cos \alpha \nabla_1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial y_1} \right]$$

Substituindo as equações (3.21) em (3.18) temos:

$$\begin{aligned}M_{x1} &= -D \operatorname{cosec} \alpha \left[\nabla_1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_1^2} \right] \\ M_{y1} &= -D \operatorname{cosec} \alpha \left[\nabla_1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right] \quad (3.22) \\ M_{x1y1} &= -M_{y1x1} = -D \operatorname{cosec} \alpha \left[\cos \alpha \nabla_1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial y_1} \right]\end{aligned}$$

onde

$$D = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)}$$

representa a rigidez a flexão da placa.

10 - Equação Diferencial das Placas

Na dedução da equação diferencial admite-se que os contornos são livres de moverem-se no plano da placa ou seja, as forças reativas nos bordos são normais à placa. Na Fig. 3.4 os eixos coordenados x_1 e y_1 estão no plano médio e o eixo z perpendicular ao referido plano.

A Fig. 3.4 mostra de uma melhor maneira os esforços cortantes:

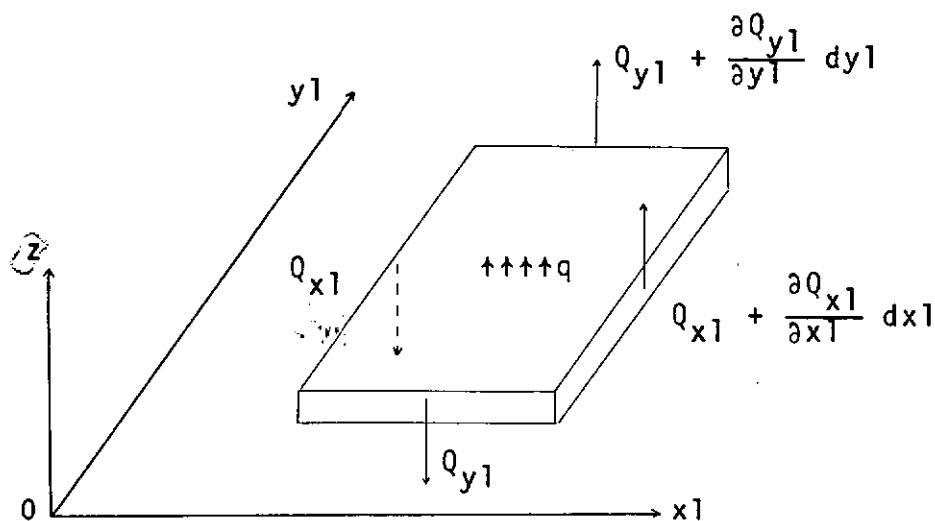


Fig. 3.4

q - carga distribuída por unidade de área aplicada normalmente à superfície

Por aplicação das equações da estática (ver Figs. 3.3 e 3.4) será estabelecido o equilíbrio do elemento, desprezando nas equações os infinitesimos de ordem superior a 2ª.

a) equilíbrio das forças na direção z :

$$\frac{\partial Q_{y1}}{\partial y1} dy1 dx1 + \frac{\partial Q_{x1}}{\partial x1} dx1 dy1 + q \sin \alpha dx1 dy1 = 0$$

$$\frac{\partial Q_{y1}}{\partial y1} + \frac{\partial Q_{x1}}{\partial x1} + q \sin \alpha = 0 \quad (3.23)$$

b) equilíbrio dos momentos na direção normal a y1:

$$\frac{\partial M_{x1y1}}{\partial x1} dx1 dy1 - \frac{\partial M_{y1}}{\partial y1} dy1 dx1 + Q_{y1} dy1 dx1 = 0$$

$$\frac{\partial M_{x1y1}}{\partial x1} - \frac{\partial M_{y1}}{\partial y1} + Q_{y1} = 0 \quad (3.24)$$

c) equilíbrio dos momentos na direção normal a x1:

$$\frac{\partial M_{y1x1}}{\partial y1} dy1 dx1 + \frac{\partial M_{x1}}{\partial x1} dx1 dy1 - Q_{x1} dx1 dy1 = 0$$

$$\frac{\partial M_{y1x1}}{\partial y1} + \frac{\partial M_{x1}}{\partial x1} - Q_{x1} = 0 \quad (3.25)$$

Da equação (3.18) verifica-se que $M_{x1y1} = -M_{y1x1}$.
 Explicitando os esforços cortantes nas equações (3.24) e (3.25) e derivando convenientemente, obtemos mediante substituição na equação (3.23) a seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 M_{x1}}{\partial x1^2} + \frac{\partial^2 M_{y1}}{\partial y1^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{x1y1}}{\partial x1 \partial y1} + q \sin \alpha = 0 \quad (3.26)$$

Utilizando as expressões dos momentos (3.22) vem:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} - 4 \cos \alpha \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^3 \partial y} + 2(1 + 2 \cos^2 \alpha) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} - 4 \cos \alpha \frac{\partial^4 \omega}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q \sin^4 \alpha}{D} \quad (3.27)$$

A equação (3.27) representa a equação diferencial das placas, expressa em coordenadas oblíquas.

11 - Relação entre os Momentos nos Sistemas Oblíquo e Retangular. Momentos, Fletores e Torsões Verdadeiros no Sistema Oblíquo.

De uma maneira análoga às equações (3.18) pode-se escrever:

$$M_{\tilde{x}} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz \quad M_{\tilde{y}} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz \quad (3.20)$$

$$M_{\tilde{xy}} = - \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz \quad M_{\tilde{yx}} = - \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{yx} dz$$

Substituindo as equações (2.22) nas (3.28) e tendo em vista as equações (3.18) teremos:

$$M_x = M_{x1} \operatorname{cosec} \alpha + M_{y1} \cos \alpha \cot \alpha - 2 M_{x1y1} \cot \alpha$$

$$M_y = M_{y1} \sin \alpha$$

$$M_{xy} = - M_{yx} = M_{x1y1} - M_{y1} \cos \alpha$$

ou

(3.29)

$$M_{x1} = M_x \sin \alpha + M_y \cos \alpha \cot \alpha + 2 M_{xy} \cos \alpha$$

$$M_{y1} = M_y \operatorname{cosec} \alpha$$

$$M_{x1y1} = - M_{y1x1} = M_{xy} + M_y \cot \alpha$$

As equações (3.29) representam as relações entre os momentos nos sistemas de coordenadas utilizados (retangular e oblíquo).

Os momentos fletores e torsores verdadeiros que atuam em qualquer bordo paralelo aos eixos oblíquos serão obtidos facilmente da Fig. 3.3. Por exemplo: sejam M_{xT} e M_{yT} os momentos fletores verdadeiros atuando nos bordos paralelos aos eixos $Oy1$ e $Ox1$ respectivamente, portanto:

$$M_{xT} = M_{x1} \sin \alpha$$

(3.30)

$$M_{yT} = M_{y1} \sin \alpha$$

12 - Condições de Contorno para um Bordo Simplesmente Apoiado

Seja $x_1 = a$ o bordo da placa simplesmente apoiada. A deflexão ao longo do bordo $x_1 = a$ é nula, como também o momento fletor verdadeiro dado pela equação (3.30), porque o bordo pode girar livremente em torno do eixo $x_1 = a$, logo:

$$\left[\nabla_1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_1^2} \right]_{x_1=a} = 0$$

Como o bordo permanece retilíneo ao longo de $x_1=a$, então:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_1^2} = 0$$

As expressões analíticas das condições de contorno serão portanto:

$$(\omega)_{x_1=a} = 0$$

$$(\nabla_1^2 \omega)_{x_1=a} = 0$$

13 - Processo de Marcus

Este processo foi utilizado na programação e consiste em substituir a equação diferencial de quarta ordem por um sistema de duas equações diferenciais de segunda ordem. A equação (3.27) pode ser escrita na forma abaixo:

$$\operatorname{cosec}^4 \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial y_1} + \right.$$

$$+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{q}{D} \quad (3.31)$$

Somando M_{x1} e M_{y1} da equação (3.30) temos:

$$- D \nabla_1^2 \omega = \frac{M_{x1} + M_{y1}}{2} - \frac{D(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right] \quad (3.32)$$

Introduzindo uma nova grandeza M de valor igual ao lado direito da equação (3.32), vem:

$$M = - D \nabla_1^2 \omega, \quad \nabla_1^2 \omega = - \frac{M}{D} \quad (3.33)$$

Levando a equação (3.33) na equação (3.31):

$$\nabla_1^2 M = - q \quad (3.34)$$

A resolução do sistema de equações diferenciais (3.33) e (3.34) fica particularmente útil para análise de placas simplesmente apoiadas de forma poligonal, pois neste caso M anula-se no contorno, conforme demonstraremos.

Seja t a direção do contorno e n uma direção normal a t , então:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0, \text{ pois } \omega = 0 \text{ na direção } t.$$

$\frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} = 0$, pois o momento fletor M_n na direção normal a n é nulo.

Da equação (3.15) teremos:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = -\operatorname{cosec}^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_1^2} \right) = -\frac{M}{D} = 0$$

Logo, para placas simplesmente apoiadas resolve-se a equação $\nabla_1^2 M = -q$ com a condição $M = 0$ no contorno. Depois, substituindo os valores encontrados de M na equação $\nabla_1^2 \omega = -\frac{M}{D}$ e integrando, teremos os valores das deflexões.

IV - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

1 - Considerações Gerais

Serão apresentados os conceitos básicos do método das diferenças finitas e a disposição em forma de molécula de todos os operadores utilizados na programação.

2 - Conceituação. Diferenças Finitas Ordinárias.

O método consiste em explicitar as derivadas de uma função $y = f(x)$ (Fig. 4.1) em termos do valor da mesma, em determinados pontos. Substituímos

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^ny}{dx^n}$$

por operadores

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}, \text{ onde } \Delta^n y$$

representa a diferença de ordem n de y.

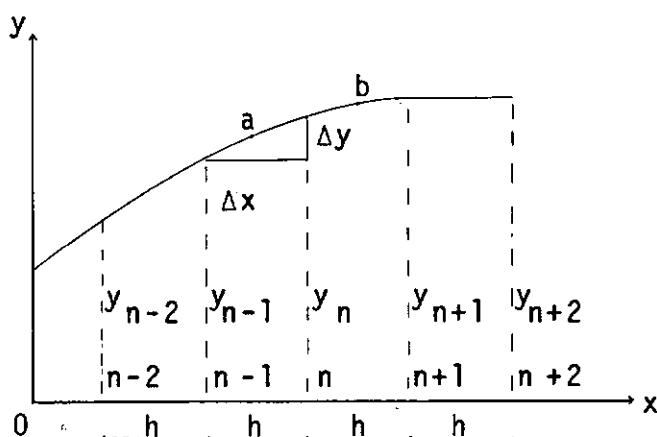


Fig. 4.1

As expressões para as diferenças de 1^a ordem no ponto n (Fig. 4.1), tomando-se intervalos iguais h no eixo x , podem ser expressas de três maneiras:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} \quad (4.3)$$

Equação (4.1) é denominada diferença em avanço, equação (4.2) diferença em atraso e equação (4.3) diferença central. Observa-se que na diferença em avanço usam-se sempre termos a direita de n , em atraso à esquerda e central em torno de n . Pode-se

empregar mais de uma forma para um mesmo problema. O estudo foi feito para diferenças finitas centrais dada a sua precisão na obtenção dos resultados em relação às diferenças com avanço e atraso.

Para diferenças finitas centrais de segunda ordem, teremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n &= \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n+1} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n-1}}{2h} \\ \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n &= \frac{\frac{y_{n+2} - y_n}{2h} - \frac{y_n - y_{n-2}}{2h}}{2h} \\ \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n &= \frac{y_{n+2} - 2y_n + y_{n-2}}{4h^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Verifica-se que a equação (4.4) é função de ordenadas de pontos $n+2$ e $n-2$ com grande distância do ponto central n , o que ocasiona logicamente, maior possibilidade de erro.

Para obtermos um valor para $\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n$ em termos de pontos mais próximos de n , imaginamos dois pontos auxiliares a e b (Fig. 4.1), de ordenadas y_a e y_b respectivamente:

$$\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n = \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_b - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_a}{h} = \frac{\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h}}{h}$$

$$\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n = \frac{1}{h^2} (y_{n+1} - 2 y_n + y_{n-1}) \quad (4.5)$$

Equação (4.3) e equação (4.5) representam as aproximações em diferenças finitas centrais para as derivadas de 1ª e 2ª ordem respectivamente. De maneira análoga, calculam-se em diferenças finitas as derivadas de maior ordem.

3 - Diferenças Finitas Parciais

No cálculo das diferenças finitas parciais de uma função $z = f(x,y)$, em relação a qualquer das variáveis x e y , são válidas as expressões vistas no item 4.2 referentes às diferenças finitas ordinárias.

Seja a malha da Fig. 4.2, com espaçamentos iguais de h na direção x e de k na direção y .

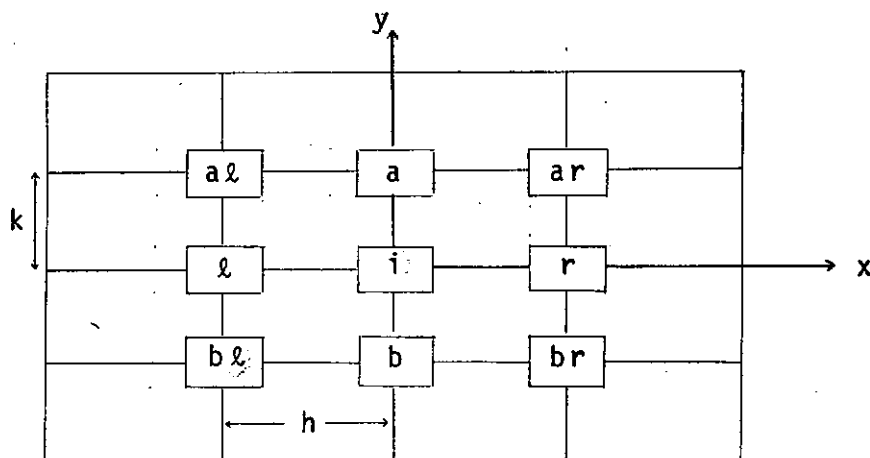


Fig. 4.2

Da equação (4.3) e equação (4.5) vem:

$$\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)_i = \frac{z_r - z_\ell}{2h} \quad \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)_i = \frac{z_a - z_b}{2k} \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}\right)_i = \frac{z_r - 2z_i + z_\ell}{h^2} \quad \left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}\right)_i = \frac{z_a - 2z_i + z_b}{k^2}$$

Para obter-se a diferença finita mista, em relação a x e y, calcula-se inicialmente a diferença em uma direção e depois a diferença da primeira diferença, na outra direção:

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}\right)_i = \frac{\Delta}{\Delta y} \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) = \frac{\Delta}{\Delta y} \left(\frac{z_r - z_\ell}{2h}\right) \quad (4.7)$$

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}\right)_i = \frac{1}{4hk} \left[z_{ar} - z_{br} - z_{a\ell} + z_{b\ell} \right]$$

É idêntico o procedimento para malha em forma de paralelogramo.

4 - Operadores Dispostos em Moléculas

a) $\nabla_1^2 z$

$$\nabla_1^2 z = \operatorname{cosec}^2 \alpha \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] \quad (4.8)$$

A Fig. 4.3 representa os pontos nodais.

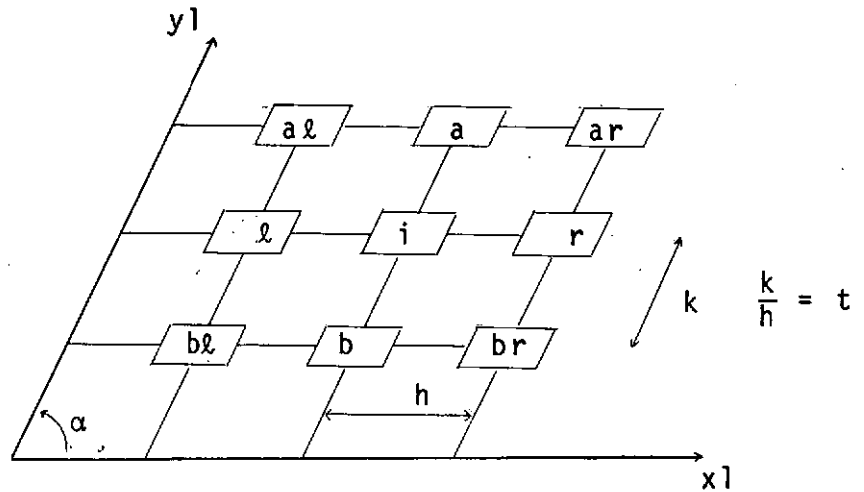


Fig. 4.3

Das equações (4.6) e (4.7), vem:

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x_1^2} = \frac{z_r - 2z_i + z_l}{h^2} \quad \frac{\Delta^2 z}{\Delta y_1^2} = \frac{z_a - 2z_i + z_b}{k^2} \quad (4.9)$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x_1 \Delta y_1} = \frac{1}{4kh} (z_{ar} - z_{br} - z_{al} + z_{bl}) \quad (4.10)$$

Por substituição das equações (4.9) e (4.10) na equação (4.8) teremos o operador $\nabla_1^2 z$ em diferenças finitas:

$$\nabla_1^2 z = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[\frac{z_l - 2z_i + z_r}{h^2} - \frac{2}{4hk} (z_{ar} - z_{br} - z_{al}) \cos \alpha + \frac{z_a - 2z_i + z_b}{k^2} \right] \quad (4.11)$$

Fazendo $\frac{k}{h} = t$ e colocando em forma de molécula a equação (4.11), teremos:

$$\nabla_{1z}^2 = \frac{1}{2t^2 h^2 \sin^2 \alpha}$$

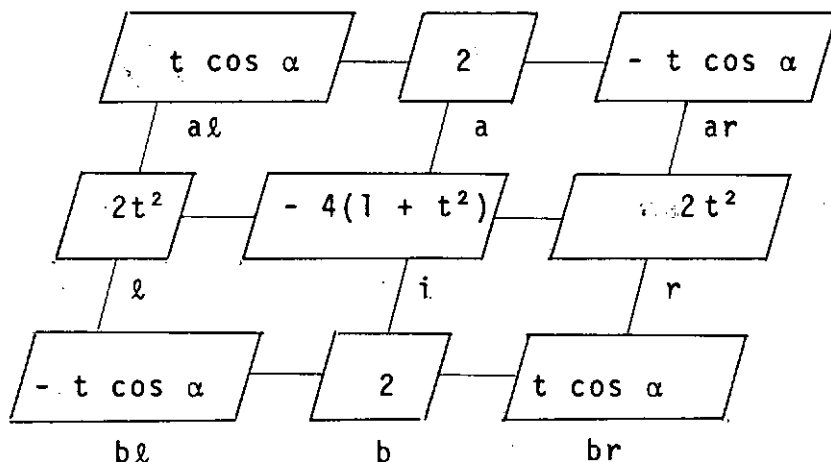


Fig. 4.4

b) M_{x1}

$$M_{x1} = -D \operatorname{cosec} \alpha \left[\nabla_{1z}^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_1^2} \right] \quad (4.12)$$

Da equação (4.9) vem:

$$\frac{\Delta^2 \omega}{\Delta y_1^2} = \frac{\omega_a - 2\omega_i + \omega_b}{k^2}$$

Substituindo a equação acima na equação (4.12) teremos

$$M_{x1} = -D \operatorname{cosec} \alpha \left[\nabla_1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\omega_a - 2\omega_i + \omega_b}{k^2} \right] \quad (4.13)$$

Dispondo a equação (4.13) em forma de molécula:

$$M_{x1} = \frac{-D}{\operatorname{sen}^3 \alpha} \frac{1}{2} \frac{t^2 h^2}{t^2 h^2}$$

Fig. 4.5

c) M_{y1}

$$M_{y1} = -D \operatorname{cosec} \alpha \left[\nabla_1 \omega^2 - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right] \quad (4.14)$$

Da equação (4.9) vem:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} = \frac{\omega_l - 2\omega_i + \omega_r}{h^2} \quad (4.15)$$

Substituindo a equação (4.15) na equação (4.14):

$$M_{y1} = -D \operatorname{cosec} \alpha \left[\nabla_1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\omega_l - 2\omega_i + \omega_r}{h^2} \right] \quad (4.16)$$

Equação (4.16) em forma de molécula:

$$M_{y1} = \frac{-D}{2 \operatorname{sen}^3 \alpha t^2 h^2} \odot$$

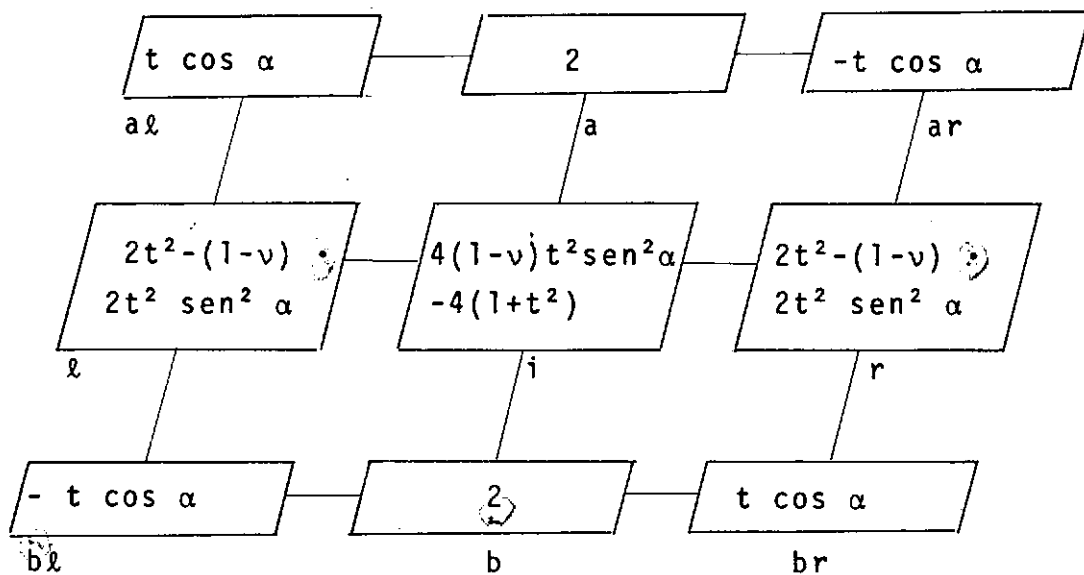


Fig. 4.6

d) M_{x1y1}

$$M_{x1y1} = -D \operatorname{cosec} \left[\cos \alpha \nabla_1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial y_1} \right] \quad (4.17)$$

Da equação (4.10) vem:

$$\frac{\Delta^2 \omega}{\Delta x_1 \Delta y_1} = \frac{1}{4h^2 t} \left[\omega_{ar} - \omega_{br} - \omega_{al} + \omega_{bl} \right] \quad (4.18)$$

Substituindo a equação (4.18) na equação (4.17) temos:

$$M_{xlyl} = -D \operatorname{cosec} \alpha \left[\cos \alpha \nabla_l^2 \omega - (1-\nu) \frac{1}{4h^2 t} (\omega_{ar} - \omega_{br} - \omega_{al} - \omega_{bl}) \right] \quad (4.19)$$

Equação (4.19) em forma de molécula:

$$M_{xlyl} = \frac{-D}{4 \operatorname{sen}^3 \alpha h^2 t^2} \cdot$$

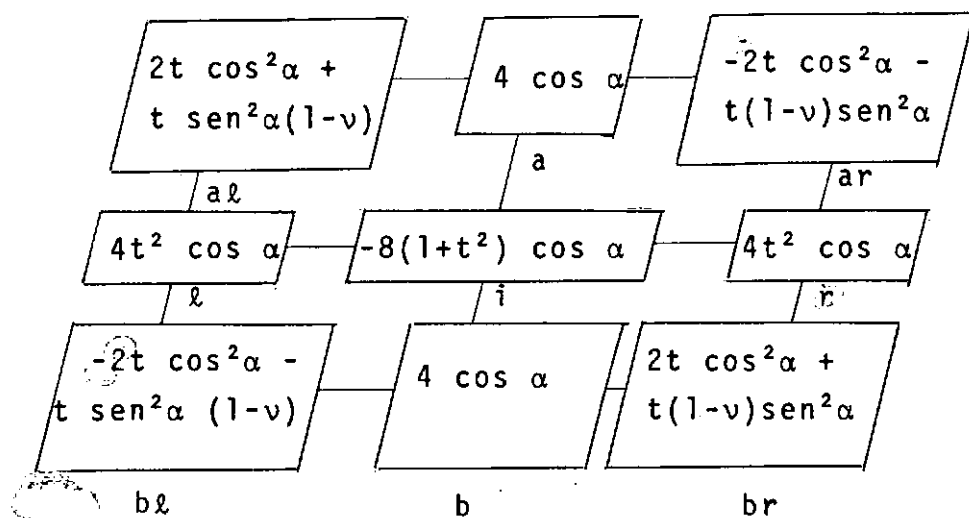


Fig. 4.7

A principal razão de se disporem todas as equações (expressões de deflexões e momentos) calculadas por diferença finita em forma de moléculas foi baseada no fato de que embora fossem distintas, elas apresentavam uma característica que era comum a todas. Para qualquer uma das Figs. 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7, de posse dos valores das moléculas nos pontos i, a, l, al , é possível defini-la totalmente com uma mesma lei de formação. Isto facilitou demais a automatização, reduzindo consideravelmente a programação.

V - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

1 - Considerações Gerais

São apresentadas considerações relativas aos elementos empregados na análise das placas pelos programas ICES STRUDL II e o do Prof. ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO.

2 - Conceituação. Elementos Utilizados e Hipótese

A essência fundamental do método consiste em substituir uma estrutura contínua por um modelo formado de elementos estruturais, unidos entre si através de um número finito de pontos. Estes são os pontos nodais. Para o elemento estrutural admite-se ser possível conhecer o seu comportamento a partir dos deslocamentos ou forças nodais. Entende-se por deslocamentos nodais os deslocamentos dos nós e por forças nodais, as forças que atuam nos nós do elemento estrutural. Este, dependendo do tipo de problema, pode ser de uma, duas ou três dimensões, com formas geométricas variadas. O que caracteriza um elemento é sua forma geométrica, o número e tipo dos deslocamentos nodais, grau da expressão polinomial que representa a lei de variação do campo dos deslocamentos e a técnica utilizada na obtenção da matriz de rigidez dos elementos (uma matriz pode ser formada por matrizes de sub-elementos).

A escolha da lei de variação do campo dos deslocamentos é a parte mais delicada e importante do método. Na flexão

das placas o campo dos deslocamentos refere-se ao deslocamento transversal w e os demais são obtidos por derivação de w .

Os elementos que utilizamos para análise das placas pelos programas ICES STRUDL II e o do Prof. ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO foram ambos triangulares com três pontos nodais nos vértices, nove deslocamentos nodais e campo dos deslocamentos baseado numa expansão cúbica, mas com diferentes técnicas para obtenção da matriz de rigidez dos elementos. Para cada ponto nodal teremos um deslocamento linear transversal w e dois angulares que são obtidos por derivada 1ª de w .

Os programas calculam as solicitações nos nós para cada elemento. A solicitação em um ponto nodal será a média das solicitações dos nós dos elementos que nele concorrem. O programa do PROF. ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO calcula internamente esta média o que não acontece com o ICES STRUDL II.

A primeira vista, o programa do Prof. ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO não se adaptaria ao cálculo das placas escon-sas. Isto porque no trato das condições de contorno, são dadas as ligações (livre e impedida) em relação ao sistema de coordenadas global, conforme explicaremos.

Seja a placa abaixo simplesmente apoiada.

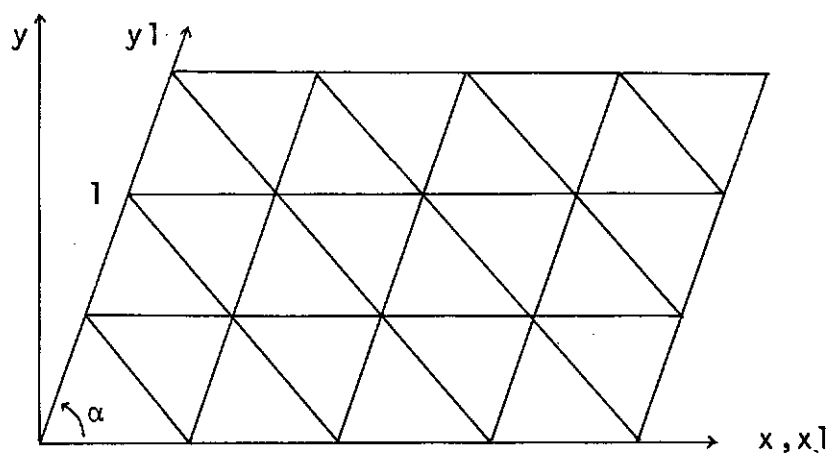


Fig. 5.1

Para o ponto 1 (Fig. 5.1) foram admitidas como condições de contorno que o ponto é impedido de se deslocar na vertical e pode girar em torno dos eixos x e y . O fato do ponto poder girar em torno do eixo x é uma aproximação, visto que o bordo é inclinado em relação ao sistema de eixos global x e y . Esta hipótese foi baseada na própria técnica de elementos finitos que consiste na discretização dos elementos.

Para o ICES STRUDL II, este fato não existe. Inicialmente todo o contorno é considerado impedido e depois são dadas as devidas liberações de acordo com o apoio real, mas referidos a um sistema de eixos local.

3 - Critérios de Convergência

Para que a solução obtida com o método dos elementos finitos convirja para solução exata com o refinamento da ma-

lha, o campo de deslocamento assumido deve satisfazer às seguintes condições denominadas de critérios de convergência.

- a) o campo dos deslocamentos escolhido deve ser tal que não haja deformação do elemento quando os deslocamentos nodais são deslocamentos de corpo rígido.
- b) o campo dos deslocamentos deve ser tal que se os deslocamentos nodais são compatíveis com uma condição de deformação unitária constante, esta deformação unitária seja obtida a partir do campo dos deslocamentos.

Para que os critérios sejam satisfeitos, o campo de deslocamentos assumido deve ser no mínimo um polinômio completo de grau igual à ordem de derivação para o cálculo das deformações. No caso de placas, considera-se como deformações unitárias as curvaturas que são expressas como derivadas segunda de w . Assim o campo do deslocamento assumido deve ser no mínimo um polinômio do 2º grau. É bom salientar que a obediência desses dois critérios não garante a convergência para a solução exata com o refinamento da malha, isto é, os critérios são condições de necessidade mas não são de suficiência.

A convergência para solução exata é garantida desde que além de serem satisfeitos os critérios de convergência, sejam também os de conformidade. As condições de conformidade referem-se a compatibilidade completa de deslocamentos ao longo de um lado comum a dois elementos adjacentes. No caso de flexão de placas, a compatibilidade refere-se não só aos deslocamentos transversais w , mas também as inclinações ao longo de um lado comum a dois elementos.

Elementos não conformes podem convergir para a solução exata desde que as derivadas terceiras permaneçam contínuas e limitadas à medida que o tamanho da malha diminua. Esta condição que substitui a de não conformidade foi demonstrada teoricamente pelo Prof. ARANTES e OLIVEIRA.⁽¹⁷⁾

Foram utilizados na comparação elementos triangulares não conformes.

Programação Automática. Aplicações.

1. Introdução

VI - PROGRAMAÇÃO AUTOMÁTICA

1 - Considerações Gerais

Será exposta a técnica adotada na programação automática bem como observações sobre a geração automática para o ICES STRUDL-II.

Apresentamos também diagrama de blocos do programa principal, com necessárias explicações.

2 - Estruturação da Programação

Para a resolução da equação diferencial das placas utilizou-se o processo de MARCUS descrito no item 3.13, onde a equação (3.27) foi substituída por duas equações diferenciais de segunda ordem ou seja:

$$\nabla_1^2 M = -q$$

$$\nabla_1^2 \omega = -\frac{M}{D}$$

em lugar da equação abaixo:

$$\nabla_1^4 \omega = \frac{q}{D}$$

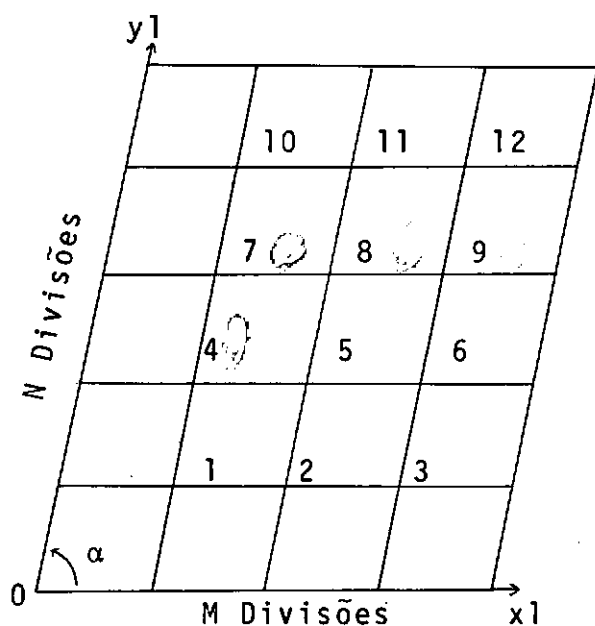
Esta técnica aparentemente não mostra ser um bom

meio para resolver o problema por diferenças finitas, porque acarreta na resolução de dois sistemas de ordem igual ao único que obteríamos se utilizássemos o operador de 4ª ordem. Entretanto com os operadores de diferenças finitas de 2ª ordem, a largura de banda dos coeficientes das incógnitas do sistema de equações formado é menor e conseqüentemente o número de termos a serem armazenados. Equivale à resolução de dois sistemas de equações de menor ordem. Dessa forma teremos mais vantagens quanto ao tempo de computação e economia de memória.

Para placas simplesmente apoiadas não necessitamos de pontos fora do contorno quando da aplicação destes operadores, facilitando o sistema de numeração a ser utilizado. Tal sistema foi estabelecido tendo-se em vista os seguintes aspectos:

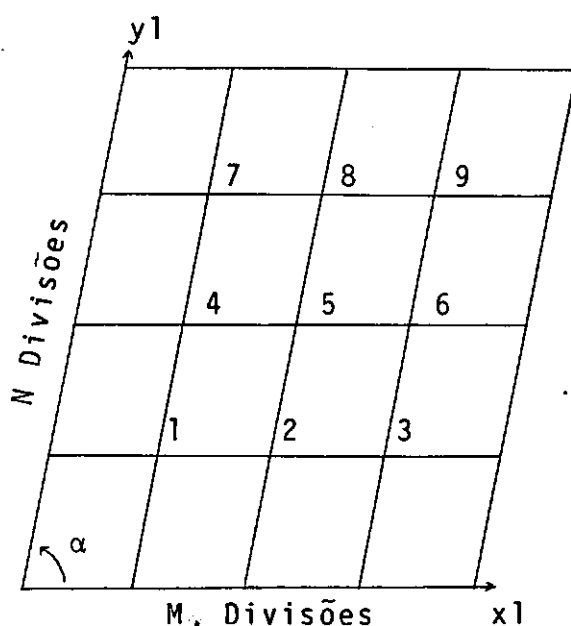
- a) Sequência a ser seguida na montagem automática da aplicação dos operadores.
- b) Identificação dos pontos da placa para caracterização das ordenadas das cargas e interpretação dos resultados.
- c) Menor largura em banda dos coeficientes das incógnitas.

A numeração é feita segundo a direção positiva do eixo x_1 , isto é, da esquerda para direita e de baixo para cima conforme mostram as Figs. 6.1 e 6.2.



$$M < N$$

Fig. 6.1



$$M = N$$

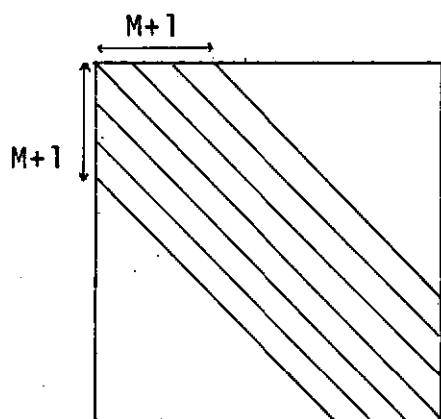
Fig. 6.2

M : número de divisões na direção x_1 .

N : número de divisões na direção y_1 .

α : ângulo do eixo x_1 com y_1

Pela técnica adotada na programação, devemos ter sempre $M \leq N$. Neste caso, a matriz dos coeficientes das incógnitas é a que apresenta menor largura de banda. Verificou-se que para o sistema de numeração exposto, a matriz banda apresentava as características conforme mostra a Fig. 6.3. É bom ressaltar que a matriz é não simétrica.



Lb: Largura de banda

Fig. 6.3

$$Lb = M+1 \quad \text{se } M > 2$$

$$Lb = M \quad \text{se } M = 2$$

O programa monta as linhas da matriz dispondo-as em vetor coluna. Isto porque foi utilizada a subrotina GELB da IBM, que resolve sistemas lineares de equações com os coeficientes dispostos em banda, recebendo-os em vetor coluna.

O programa foi desenvolvido em computador IBM-1130 com 32k de memória interna e depois adaptado ao IBM/360 com 256k bytes de memória interna. Consiste no programa principal e em cinco subrotinas que executam tarefas específicas ou operações que podem se repetir durante a análise.

Calcula placas esconsas simplesmente apoiadas com malhas em paralelogramo, permitindo até 280 pontos nodais para o IBM-1130 e 625 para o /360, não havendo limite para o número de placas a serem analisadas.

A placa deve ter espessura constante e podendo

ser considerado qualquer caso de carregamento, sendo fornecidas as ordenadas de cargas nos pontos nodais.

As subrotinas foram programadas de maneira a se aproveitar o máximo da memória interna do computador.

Seguem as subrotinas com suas respectivas finalidades:

- XM1 : define o operador para o cálculo do momento M_{x1} .
- XM2 : define o operador para o cálculo do momento M_{y1} .
- XM12: define o operador para o cálculo do momento M_{x1y1} .
- SM : calcula o momento M_{x1} ou M_{y1} ou M_{x1y1} .
- SP : calcula os momentos fletores M_x e M_y , momento torsor M_{xy} e os momentos principais referidos ao sistema global x e y .

Vemos que as subrotinas XM1, XM2, XM12, executam tarefas específicas e SM e SP, operações que se repetem durante a análise.

3 - Geração Automática para o ICES STRUDL-II

Como no programa ICES STRUDL-II não existe geração automática das coordenadas e incidências, foi elaborado um para o tipo de malha indicado na Fig. 6.4 e para qualquer placa esconsa.

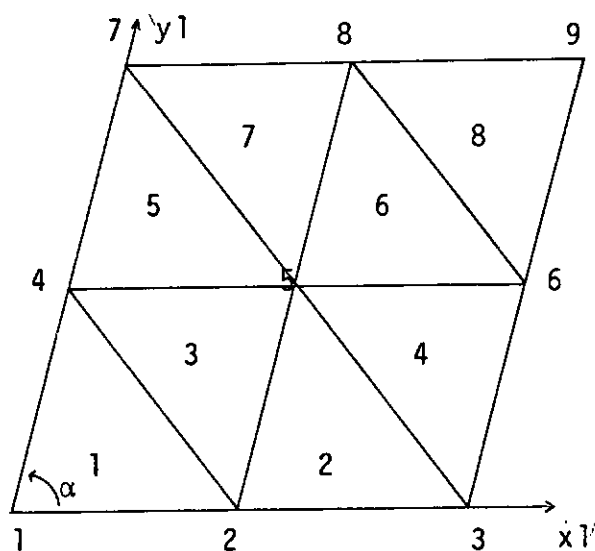


Fig. 6.4

O sistema de numeração para as coordenadas e elementos deve ser sempre da esquerda para direita e de baixo para cima conforme mostra a Fig. 6.4. As incidências de cada elemento são geradas no sentido anti-horário. Para os pontos nodais que estão no contorno, o programa gera também a letra S (supports) depois da coordenada y .

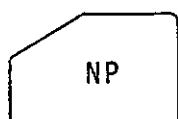
4 - Finalidade e Convenções do Diagrama de Blocos

O diagrama de blocos representa a visualização de uma maneira concisa do método programado para resolução de um determinado problema. Isto facilita o emprêgo por outras pessoas da técnica utilizada, como também permite possíveis alterações, principalmente de caráter ampliativo. Serão apresentados diagramas de blocos ou fluxogramas simplificados do programa principal.

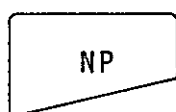
Não havendo uma certa uniformidade nos símbolos usados para o traçado dos diagramas, adotaram-se certas conven-

ções normalmente as sugeridas pela IBM.

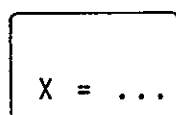
Seguem os símbolos, com o seu significado à direita.



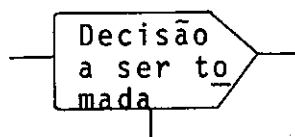
Entrada de dados por meio de cartões



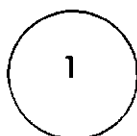
Impressão dos títulos, dados ou resultados do processamento.



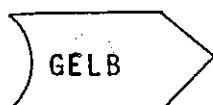
Sequência de operações necessárias a alcançar um certo objetivo.



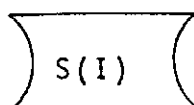
A operação efetuada no interior, define o curso do fluxograma



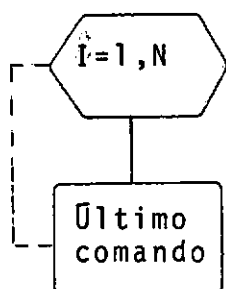
Conexão entre dois pontos do diagrama, que não podem ser ligados por uma linha



Utilização de uma subrotina.



Armazenamento ou leitura no disco magnético.



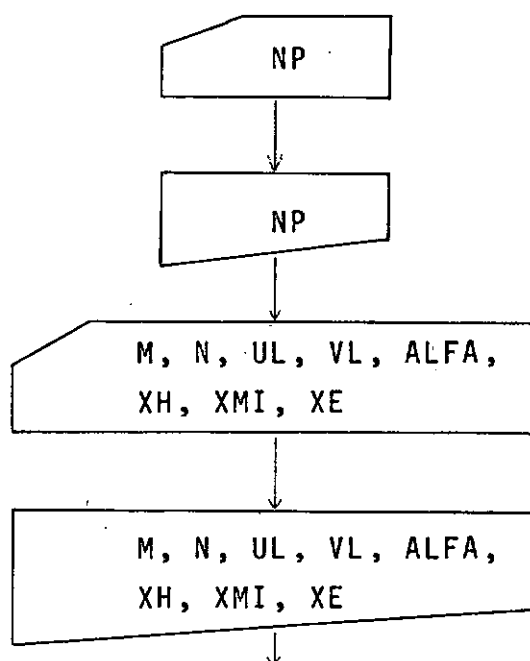
Execução de um controle iterativo. Percorre de uma forma cíclica toda uma secção do fluxograma um número de v^{ez}es igual ao valor da variável situada a direita do sinal da igualdade.



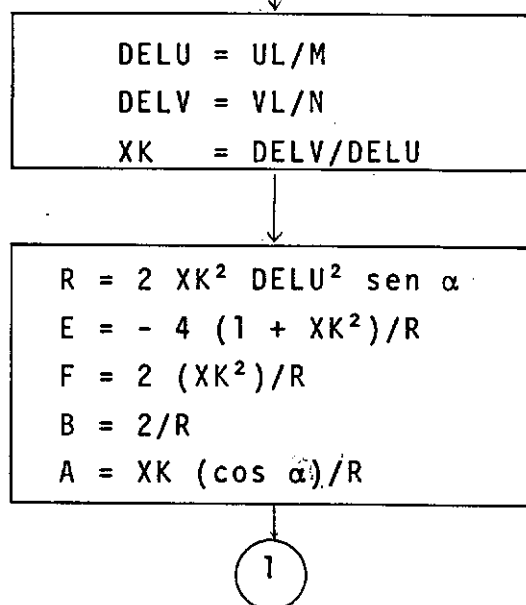
Término ou início do programa.

5 - Diagrama de Bloco Simplificado do Programa Principal

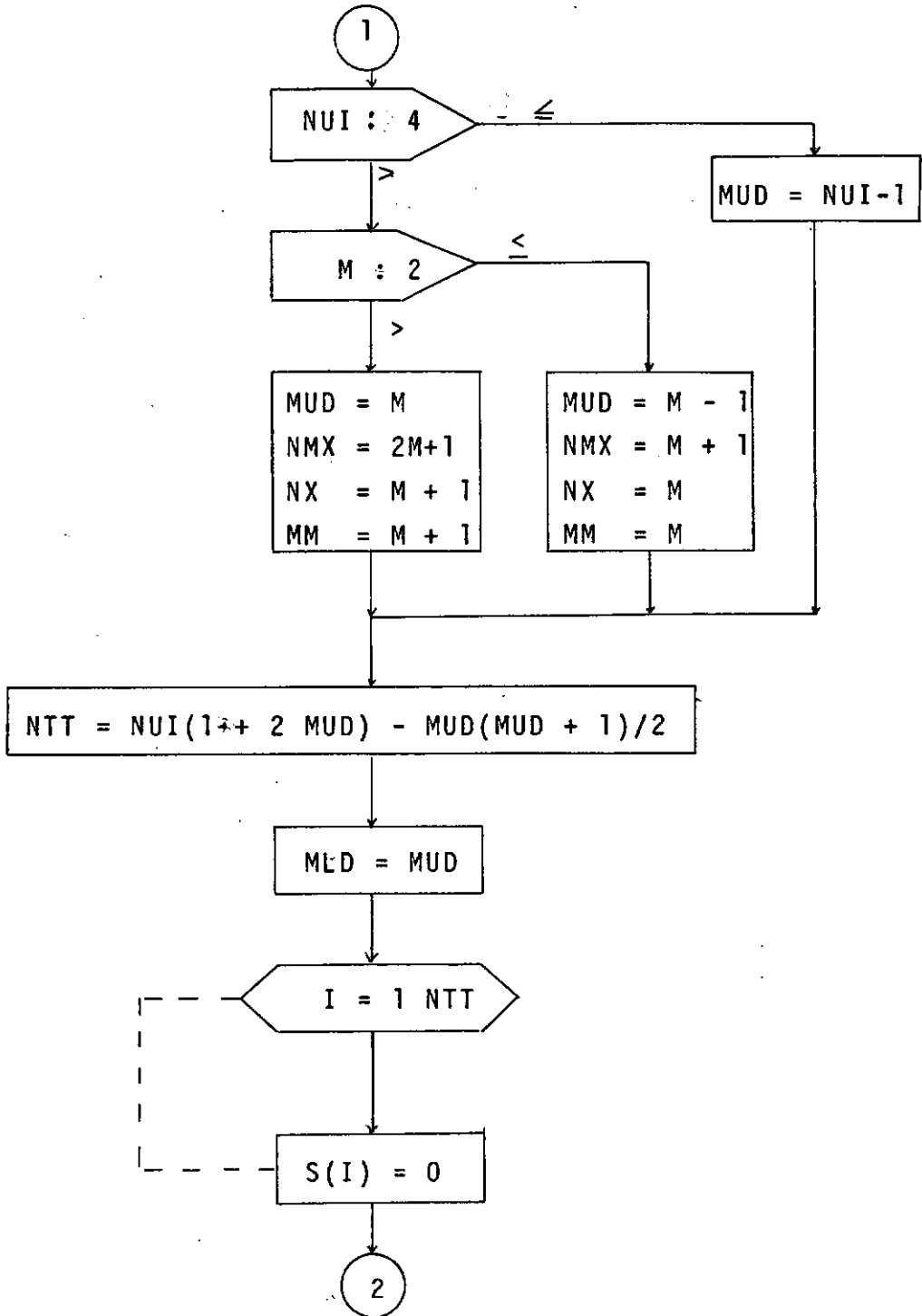
a)



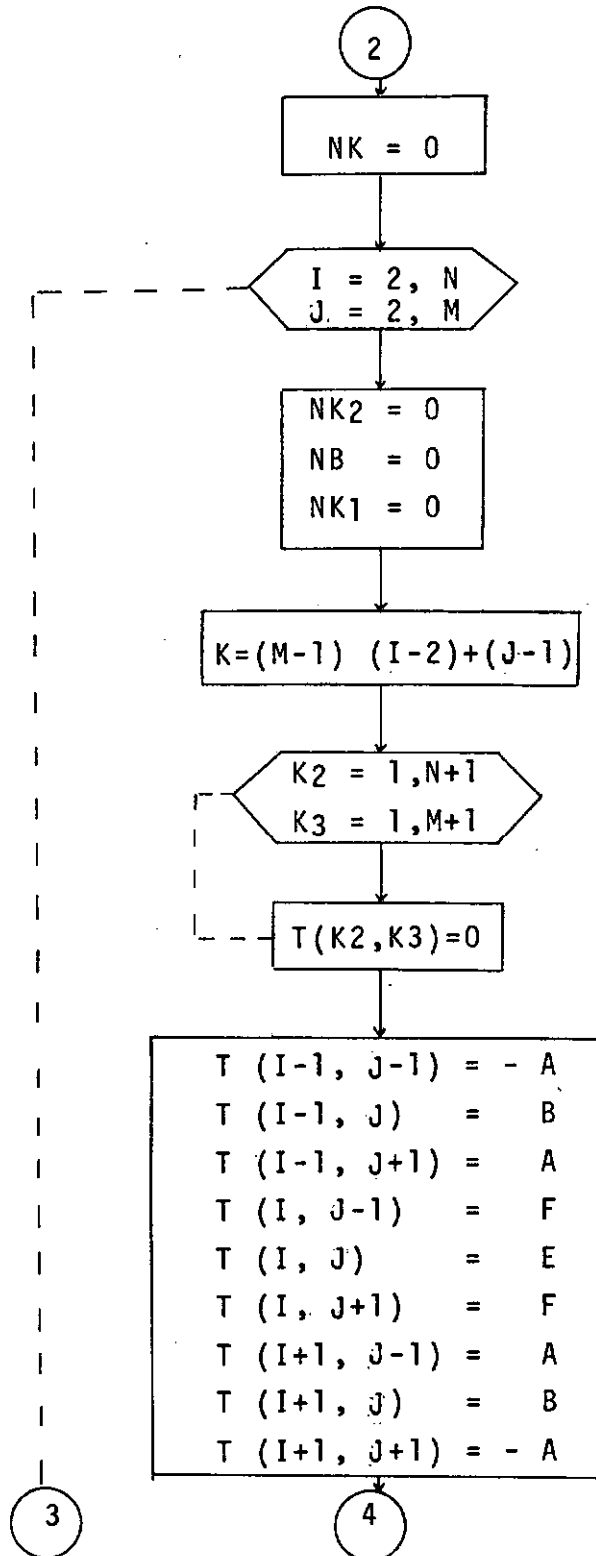
b)

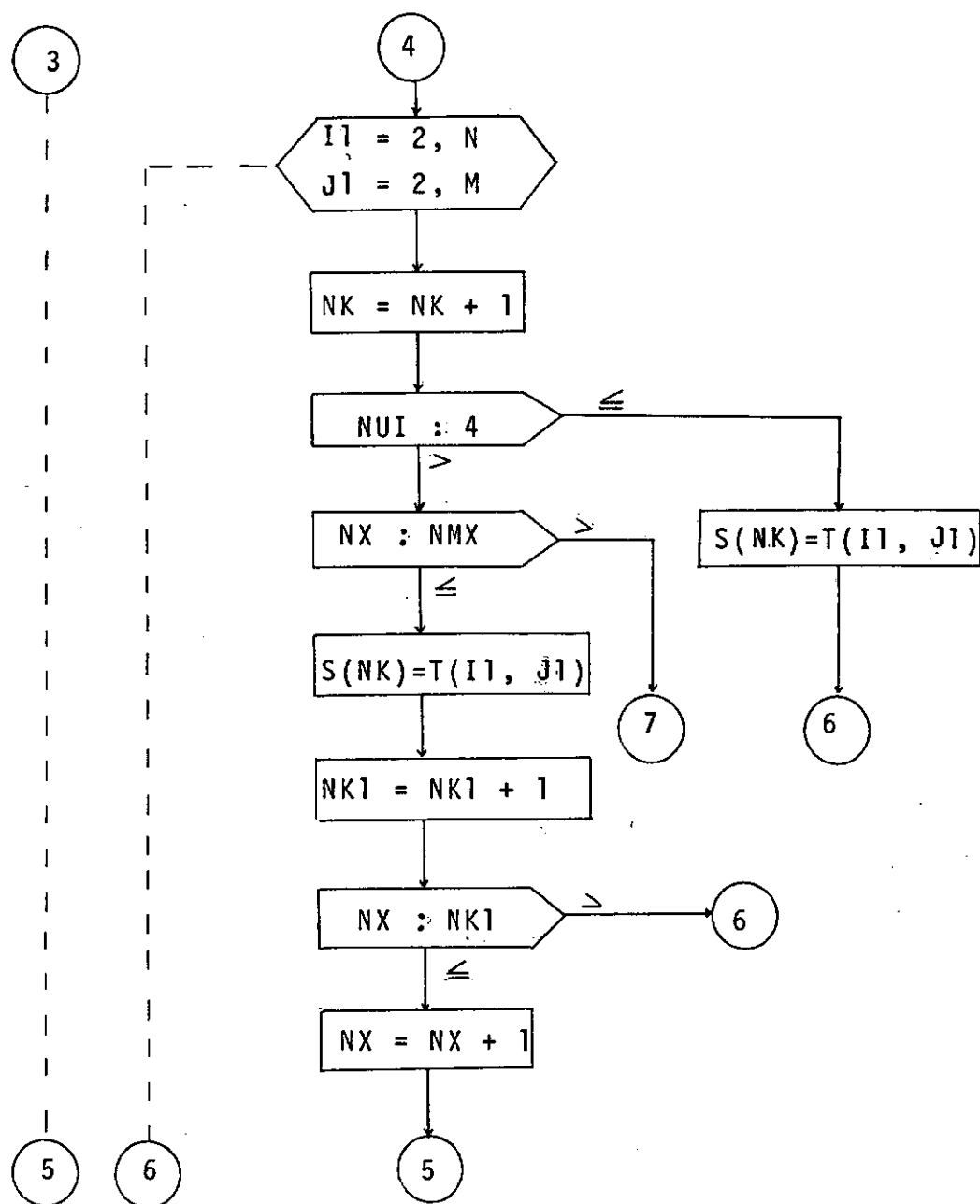


c)

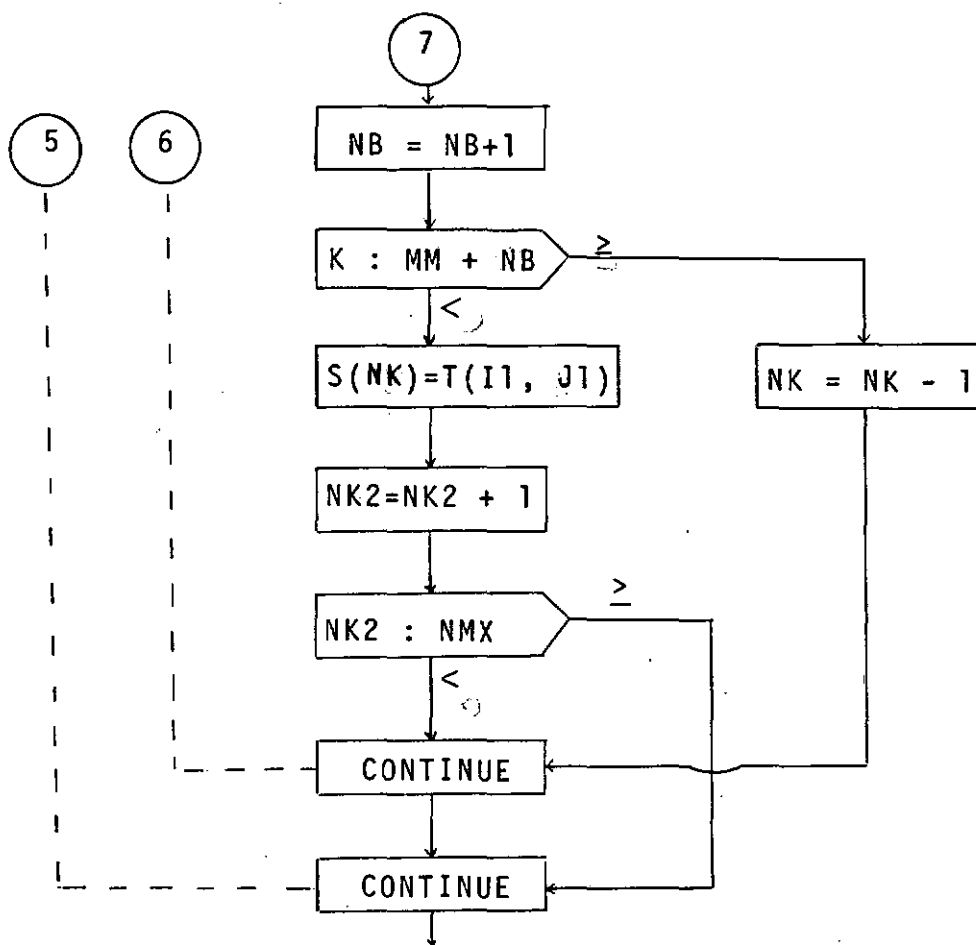


d)

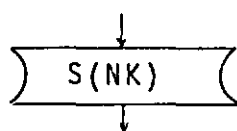




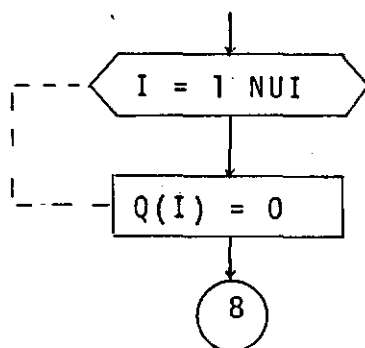
f)

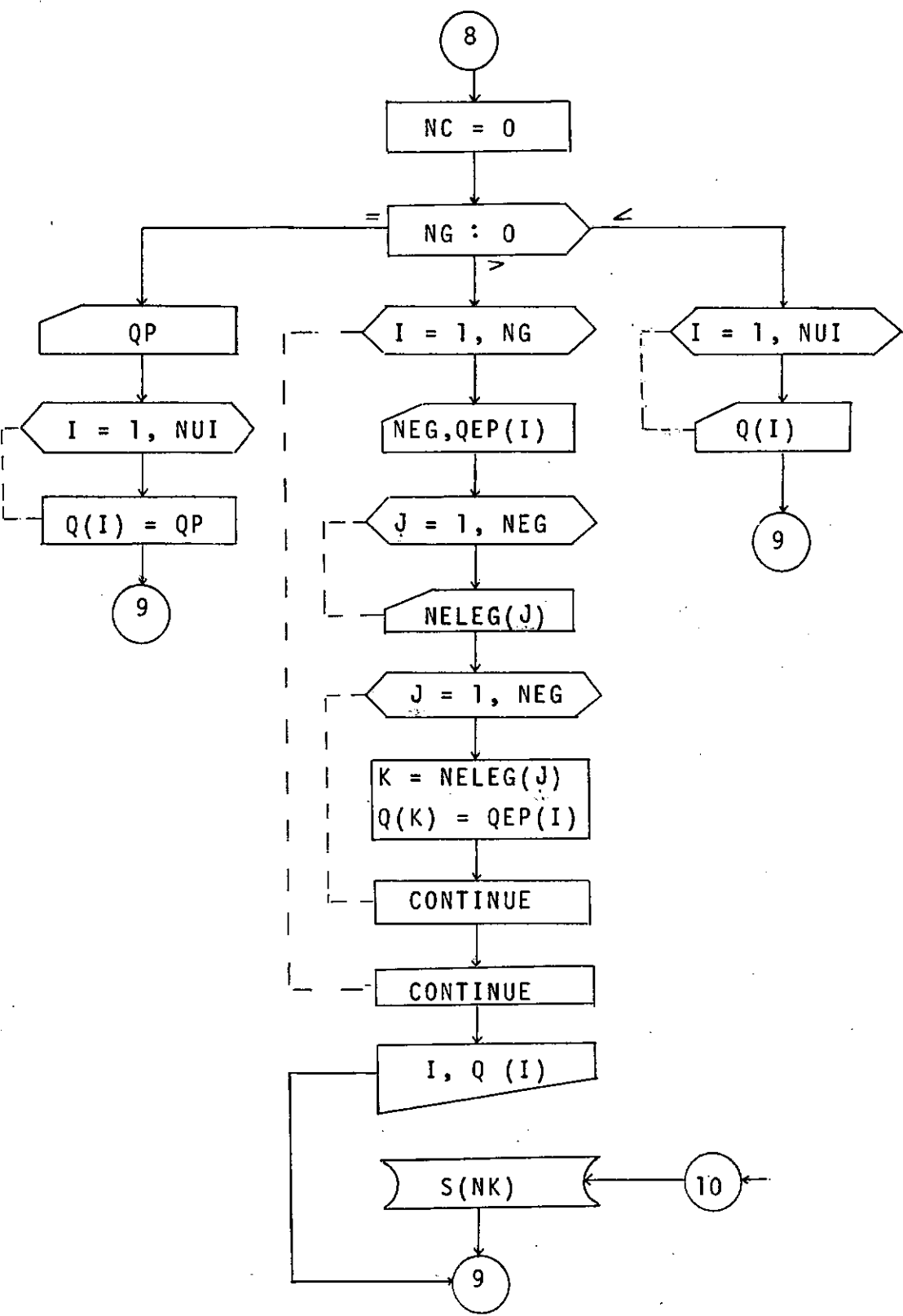


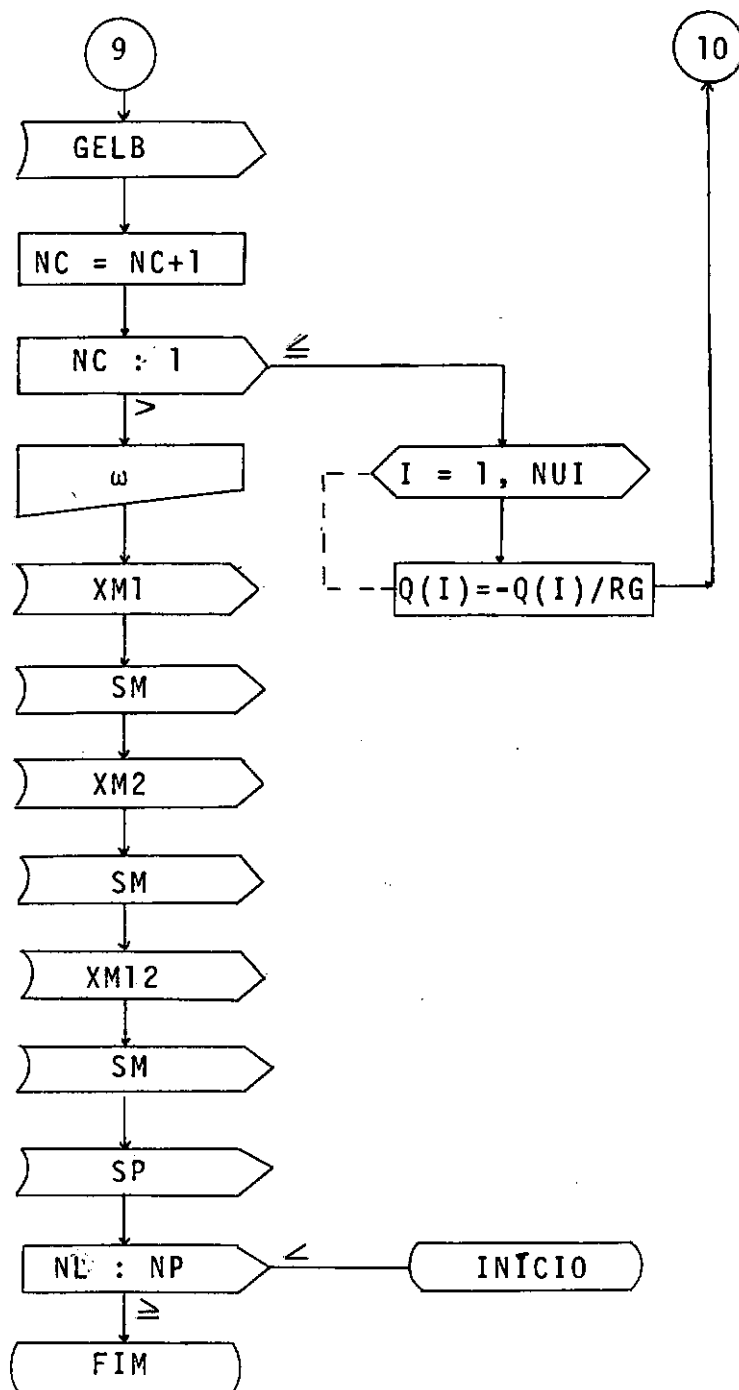
g)



h)







6 - Explicações Referentes ao Diagrama de Blocos

a) Leitura e impressão de dados

NP : número de placas a serem analisadas

M, N : número de divisões da placa nas direções x_1 e y_1 respectivamente, onde x_1 coincide com o lado da placa de menor número de divisão.

UL, VL : comprimento da placa nas direções x_1 e y_1 respectivamente

$ALFA$: ângulo de x_1 com y_1

XH : espessura da placa

XMI : coeficiente de Poisson

XE : módulo de elasticidade longitudinal

b) Caracterização do operador ∇_i^2

E, F, B, A caracterizam o operador ∇_i^2 , pois, os demais valores da molécula são definidos a partir deles.

c) Caracterização da matriz dos coeficientes e zeramento da mesma

NUI : número de equações, isto é, número de pontos nodais.

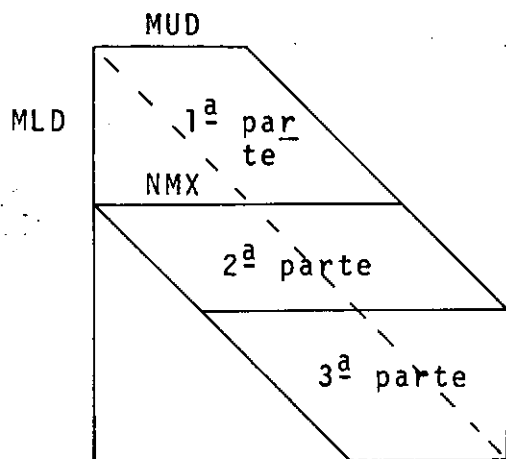


Fig. 6.5

- MUD : número de codiagonais superiores (significa número de diagonais acima da principal) Fig. 6.5.
- MLD : número de codiagonais inferiores (significa número de diagonais abaixo da principal) Fig. 6.5.
- NMX : parâmetro auxiliar na programação, que define a linha máxima da parte da matriz, com a qual trabalhamos. Limita a técnica da montagem da 1ª parte da matriz.
- NX,MM : Índices contadores auxiliares
- NTT : número total de termos a serem armazenados

Para o caso em estudo MUD = MLD e corresponde a

Lb-1.1

d) Aplicação do operador aos pontos da placa

Nesta fase o programa define o valor dos coeficientes da equação quando o operador é aplicado a um determinado ponto. A sequência da montagem é a definida pela numeração do item 6.1.

e,f) Dispõe em vetor coluna os coeficientes definidos no item d.

g) Armazenamento dos coeficientes do sistema de equações

Armazena o vetor dos coeficientes no disco magnético, porque ele vai ser utilizado duas vezes na resolução do problema. A subrotina GELB destrói a matriz utilizada.

h) Ordenada das cargas nos pontos nodais

As ordenadas das cargas devem ser dadas com o sinal negativo (ver equação 3.34).

NG = 0 : todos os pontos da placa possuem a mesma ordenada de carga

QP : valor de ordenada de carga

NG < 0 : todos os pontos possuem ordenadas de cargas diferentes

Q(I) : valor de ordenada de carga

NG > 0 : o valor indica o número de grupos de pontos com mesma ordenada de carga

NEG : o número dos pontos do grupo

QEP : valor da carga de cada grupo

NELEG : identifica os NEG em relação ao sistema de numeração já especificado.

i) Cálculo das deflexões e momentos

Calcula as deflexões w e passa à utilização das sub-rotinas que calculam os momentos fletores e torsores.

VII - APLICAÇÕES

1 - Considerações Gerais

Apresentamos neste capítulo as características das placas analisadas, os resultados obtidos e os respectivos tempos de execução.

Ilustramos com gráficos, para uma melhor interpretação da convergência dos métodos e análise do tempo de execução.

2 - Placas Analisadas

Foram analisadas três placas esconsas simplesmente apoiadas com as mesmas características, variando apenas o ângulo α (Fig. 7.1) que assumiu os seguintes valores:

Placa I $\alpha = 90^0$

Placa II $\alpha = 60^0$

Placa III $\alpha = 30^0$

CARACTERÍSTICAS

Carregamento uniformemente distribuído: $3t/m^2$

Módulo de elasticidade longitudinal : $2,1 \times 10^6 t/m^2$

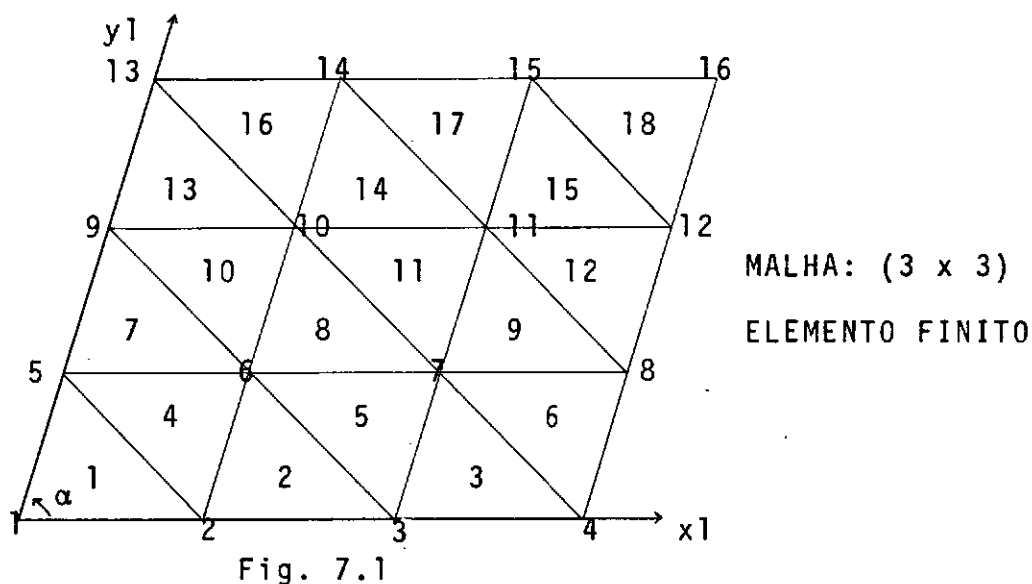
Coefficiente de Poisson : 0,30

Espessura : 0,10 m

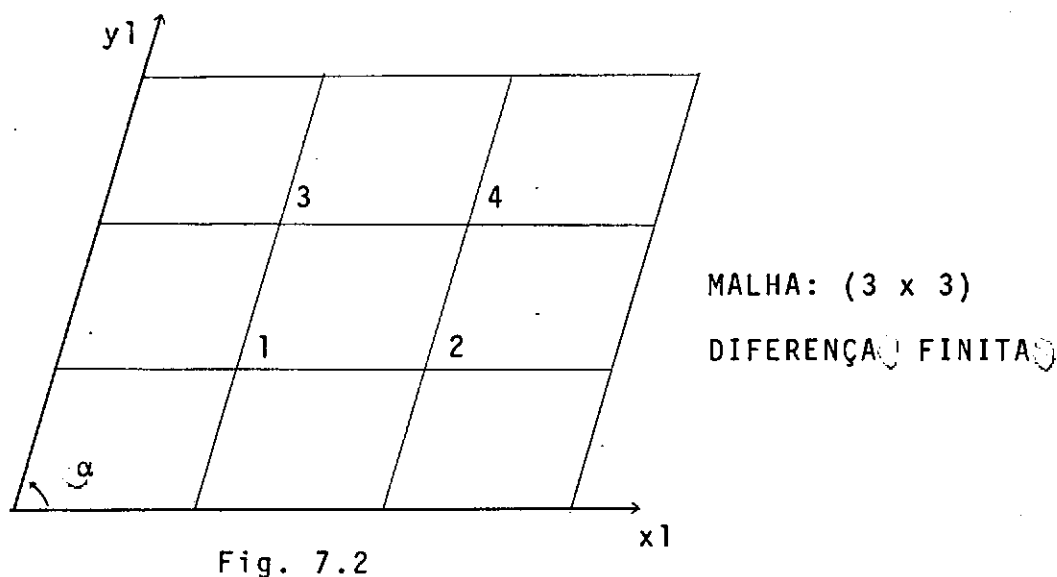
Dimensões : 12 m x 12 m

VERIFICAÇÃO DA CONVERGÊNCIA: São verificadas as flechas e os momentos fletores e torsões no centro das placas.

Na análise por elementos finitos adotou-se malha do tipo da Fig. 7.1 que no caso representa a 3×3 .



A correspondente malha para diferenças finitas é a da Fig. 7.2.



a) PLACA I:

D E F L E X Δ_0 .w				
$\alpha = 90^\circ$		CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA		
MALHA	NÓS	PROF.ALCEBIADES	STRU DL	DIF.FINITA
2x2	9	0,11247	0,12452	0,12636
4x4	25	0,12907	0,12998	0,13030
6x6	49	0,13050	0,13094	0,13095
8x8	81	0,13092	0,13119	0,13116
10x10	121	0,13010	0,13137	0,13125
12x12	169	0,13119	0,13147	0,13129
SOLUÇÃO ANALÍTICA: (*) 0,13130				

Quadro 7.1

MOMENTO FLETOR M_x				
$\alpha = 90^\circ$		CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA		
MALHA	NÓS	PROF.ALCEBIADES	STRU DL	DIF.FINITA
2x2	9	0,67003	2,44173	1,75500
4x4	25	1,70075	2,10544	1,97435
6x6	49	1,90402	2,08471	2,02494
8x8	81	1,97579	2,07753	2,04375
10x10	121	2,00885	2,07609	2,05264
12x12	169	2,02728	2,07609	2,05717
SOLUÇÃO ANALÍTICA: (*) 2,06928				

Quadro 7.2

MOMENTO TORSOR M_{xy}				
$\alpha = 90^0$		CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA		
MALHA	NÓS	PROF. ALCEBIADES	STRU DL	DIF. FINITA
2x2	9	- 0,18037	0,00000	0,00000
4x4	25	- 0,07083	0,03851	0,00000
6x6	49	- 0,03106	0,01524	0,00000
8x8	81	- 0,01721	0,00918	0,00000
10x10	121	- 0,01095	0,00604	0,00001
12x12	169	- 0,00757	0,00425	0,00000
SOLUÇÃO ANALÍTICA: ⁽⁴⁾ 0,00000				

Quadro 7.3

PLACA II:

D E F L E X Ã O w				
$\alpha = 60^0$		CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA		
MALHA	NÓS	PROF. ALCEBIADES	STRU DL	DIF. FINITA
2x2	9	0,06878	0,05967	0,07107
4x4	25	0,07424	0,07377	0,07669
6x6	49	0,07743	0,07721	0,07935
8x8	81	0,07897	0,07884	0,08064
10x10	121	0,07985	0,07967	0,08132
12x12	169	0,08037	0,08025	0,08173
SOLUÇÃO ANALÍTICA: ⁽⁵⁾ 0,08281				

Quadro 7.4

MOMENTO FLETOR M_x				
$\alpha = 60^\circ$		CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA		
MALHA	NÓS	PROF. ALCEBIADES	STRUDL	DEF. FINITA
2x2	9	0,31060	1,41961	1,13906
4x4	25	1,12560	1,46384	1,35760
6x6	49	1,32672	1,46799	1,43919
8x8	81	1,40346	1,48208	1,47646
10x10	121	1,48298	1,48298	1,49607
12x12	169	1,46479	1,49641	1,50763
SOLUÇÃO ANALÍTICA: ⁽⁵⁾ 1,52820				

Quadro 7.5

MOMENTO FLETOR M_y				
$\alpha = 60^\circ$		CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA		
MALHA	NÓS	PROF. ALCEBIADES	STRUDL	DEF. FINITA
2x2	9	0,28468	1,78611	1,49343
4x4	25	1,29535	1,68519	1,67500
6x6	49	1,52508	1,69286	1,71204
8x8	81	1,60700	1,70158	1,72422
10x10	121	1,64701	1,70081	1,72937
12x12	169	1,66985	1,71014	1,73191
SOLUÇÃO ANALÍTICA: ⁽⁵⁾ 1,73340				

Quadro 7.6

MOMENTO TORSOR M_{xy}				
$\alpha = 60^\circ$		CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA		
MALHA	NÓS	PROF. ALCEBIADES	STRU DL	DIF. FINITA
2x2	9	- 0,01664	0,31964	0,30690
4x4	25	0,14485	0,21956	0,27488
6x6	49	0,16945	0,20817	0,23629
8x8	81	0,17427	0,19677	0,21456
10x10	121	0,17606	0,19027	0,20202
12x12	169	0,17637	0,18650	0,19425
SOLUÇÃO ANALÍTICA: ⁽⁵⁾ 0,17703				

Quadro 7.7

PLACA III

D E F L E X Ã O w				
$\alpha = 30^\circ$		CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA		
MALHA	NÓS	PROF. ALCEBIADES	STRU DL	DIF. FINITA
2x2	9	0,00837	0,00700	0,00789
4x4	25	0,00841	0,00794	0,00936
6x6	49	0,00943	0,00900	0,01049
8x8	81	0,00997	0,00960	0,01121
10x10	121	0,01030	0,00998	0,01168
12x12	169	0,01052	0,01024	0,01201
SOLUÇÃO ANALÍTICA: ⁽⁵⁾ 0,01319				

Quadro 7.8

MOMENTO FLETOR M_x				
$\alpha = 30^\circ$		CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA		
MALHA	NÓS	PROF. ALCEBIADES	STRU DL	DIF. FINITA
2x2	9	0,03001	0,32712	0,26156
4x4	25	0,24451	0,31770	0,33299
6x6	49	0,30270	0,27741	0,37482
8x8	81	0,33074	0,32523	0,40167
10x10	121	0,34774	0,34334	0,42007
12x12	169	0,35976	0,35688	0,43346
SOLUÇÃO ANALÍTICA: ⁽⁵⁾ 0,49075				

Quadro 7.9

MOMENTO FLETOR M_y				
$\alpha = 30^\circ$		CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA		
MALHA	NÓS	PROF. ALCEBIADES	STRU DL	DIF. FINITA
2x2	9	0,02502	0,70379	0,61594
4x4	25	0,49506	0,62782	0,72886
6x6	49	0,60656	0,62773	0,76921
8x8	81	0,64441	0,66122	0,78659
10x10	121	0,66639	0,67727	0,79493
12x12	169	0,68216	0,68823	0,79919
SOLUÇÃO ANALÍTICA: ⁽⁵⁾ 0,80092				

Quadro 7.10

MOMENTO TORSOR M_{xy}				
$\alpha = 30^\circ$		CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA		
MALHA	NÓS	PROF:ALCEBIADES	STRUDL	DIF.FINITA
2x2	9	0,00480	0,10855	0,10230
4x4	25	0,06976	0,10032	0,11428
6x6	49	0,08811	0,10179	0,11385
8x8	81	0,09112	0,09693	0,11112
10x10	121	0,09270	0,09636	0,10821
12x12	169	0,09341	0,09537	0,10557
SOLUÇÃO ANALÍTICA: ⁽⁵⁾ 0,08964				

Quadro 7.11

3 - Tempo de Execução

Na análise do tempo de execução verificou-se que para uma mesma malha, existia uma pequena diferença dependendo do ângulo α . É natural pois, embora o número de equações seja o mesmo, o sistema é diferente.

Na tabela abaixo computou-se o tempo máximo para as placas analisadas, com pequenos arredondamentos.

Ressalta-se que na utilização do programa ICES STRUDL II, a área dinâmica foi de 50 k. Mesmo com uma maior área dinâmica, 90 k por exemplo, a redução no tempo de execução é relativamente pequena, pois, para uma malha 12x12 tal redução foi de aproximadamente 4 minutos.

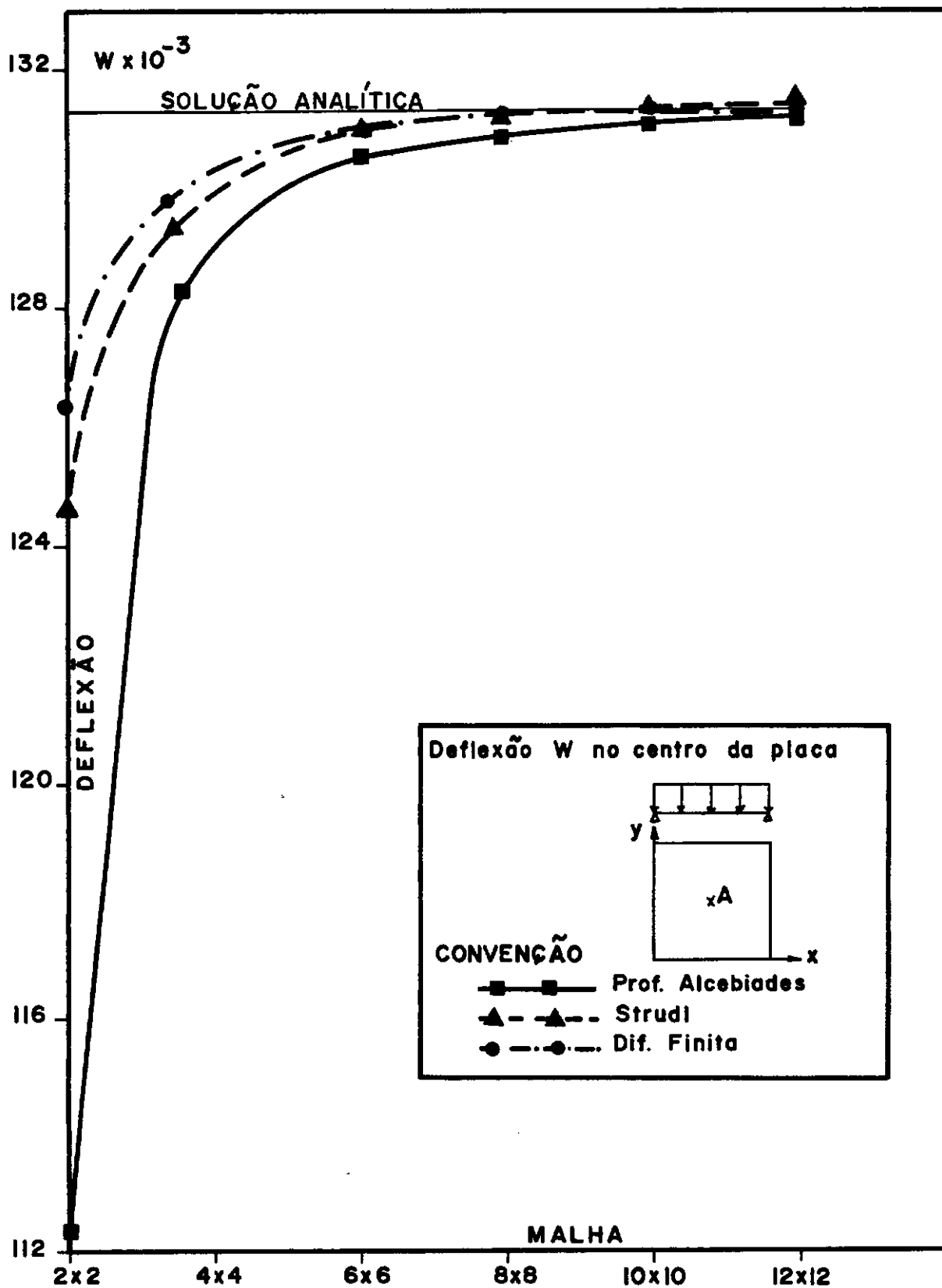
TEMPO DE EXECUÇÃO EM MINUTOS

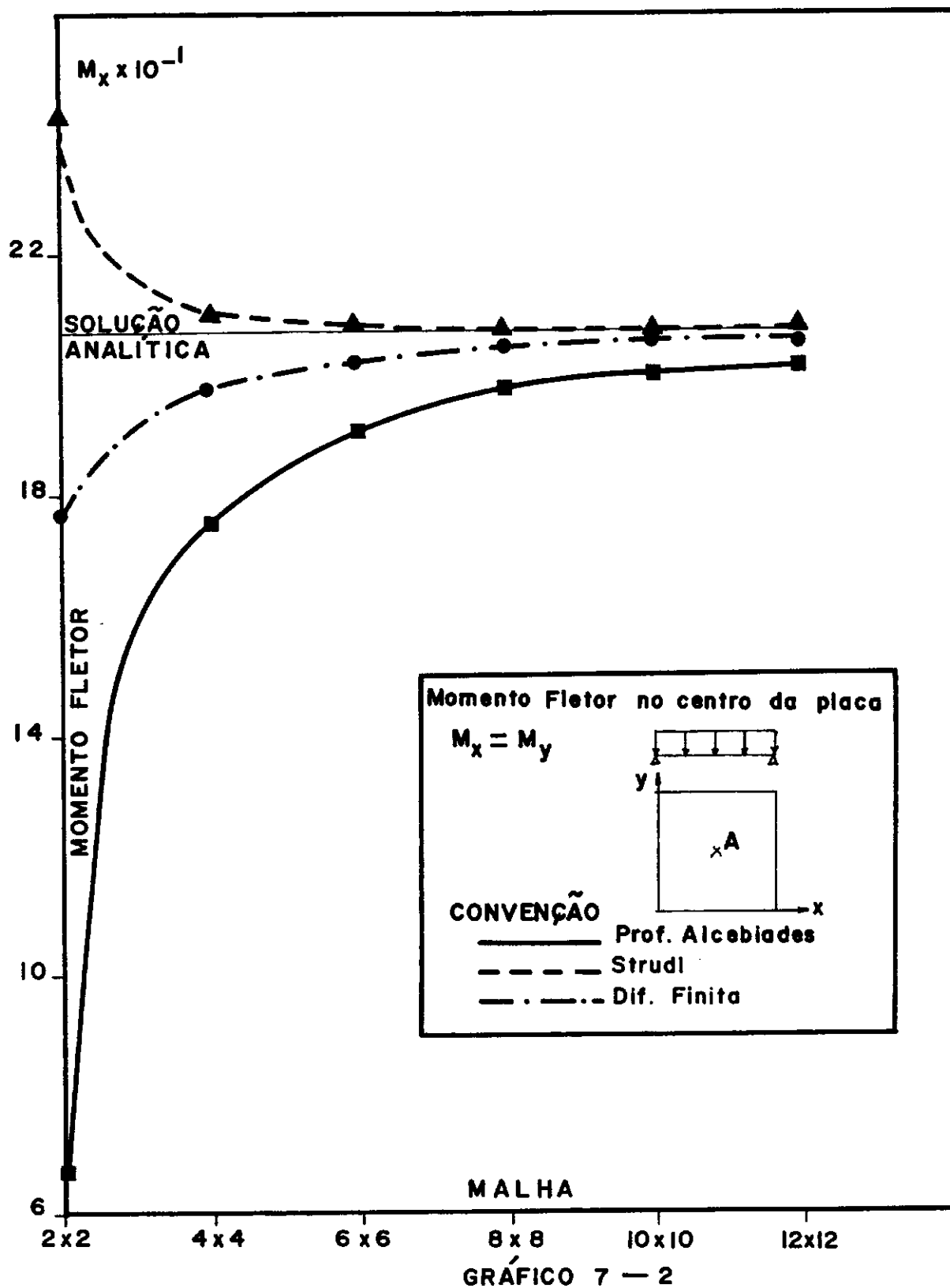
MALHA	NÓS	PROF.ALCEBIADES	STRU DL	DIF.FINITA
2x2	9	0,30	2,00	0,15
4x4	25	1,00	4,30	0,17
6x6	49	2,80	11,50	0,25
8x8	81	4,80	21,00	0,50
10x10	121	9,00	37,00	0,83
12x12	169	14,30	61,50	1,50
COMPUTADOR IBM /360 COM 256k BYTES DE MEMÓRIA INTERNA				

Quadro 7.12

Nos quadros e gráficos, as deflexões são dadas em centímetro e os momentos em $t^* \text{ m/m}$.

4 - GRÁFICOS





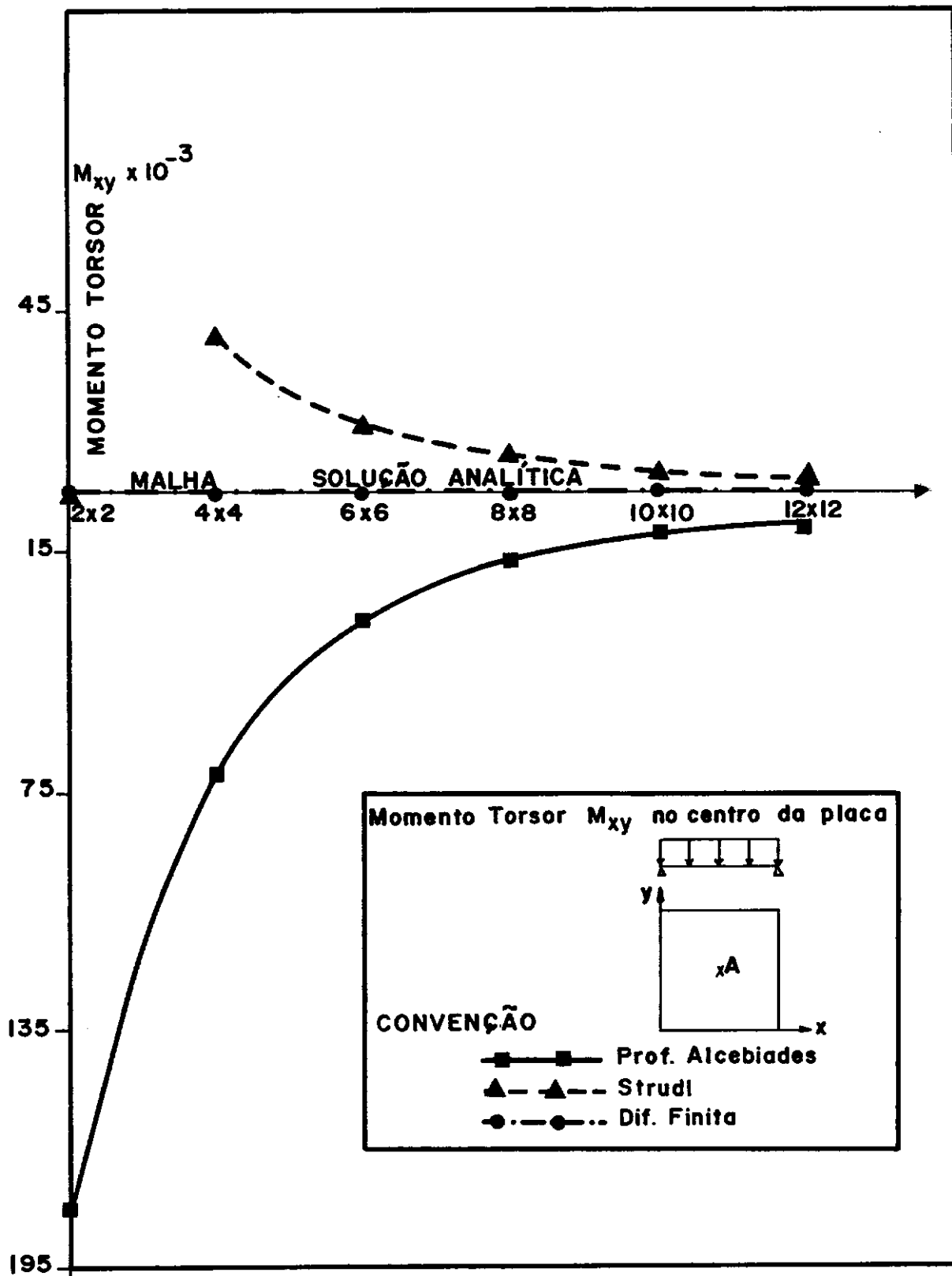
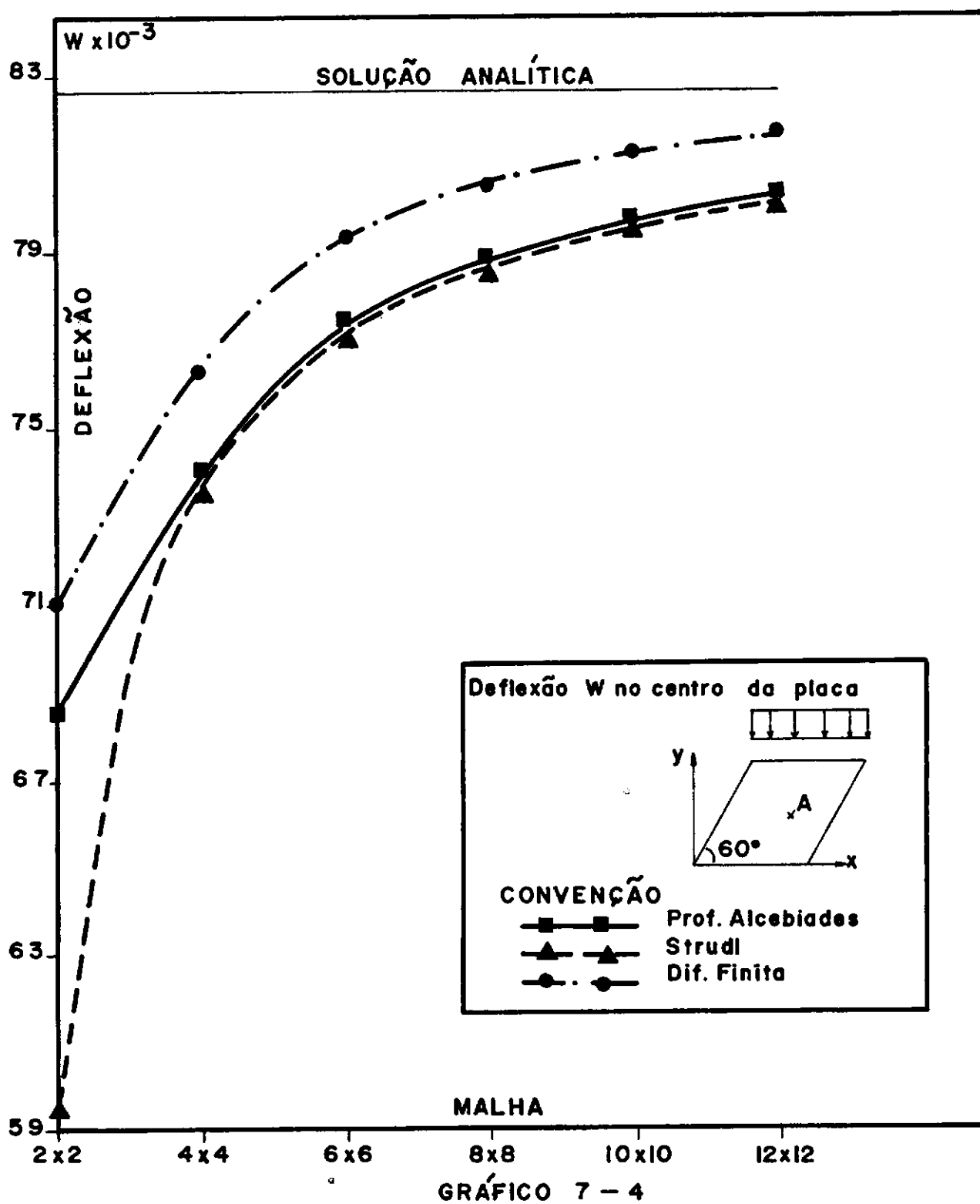
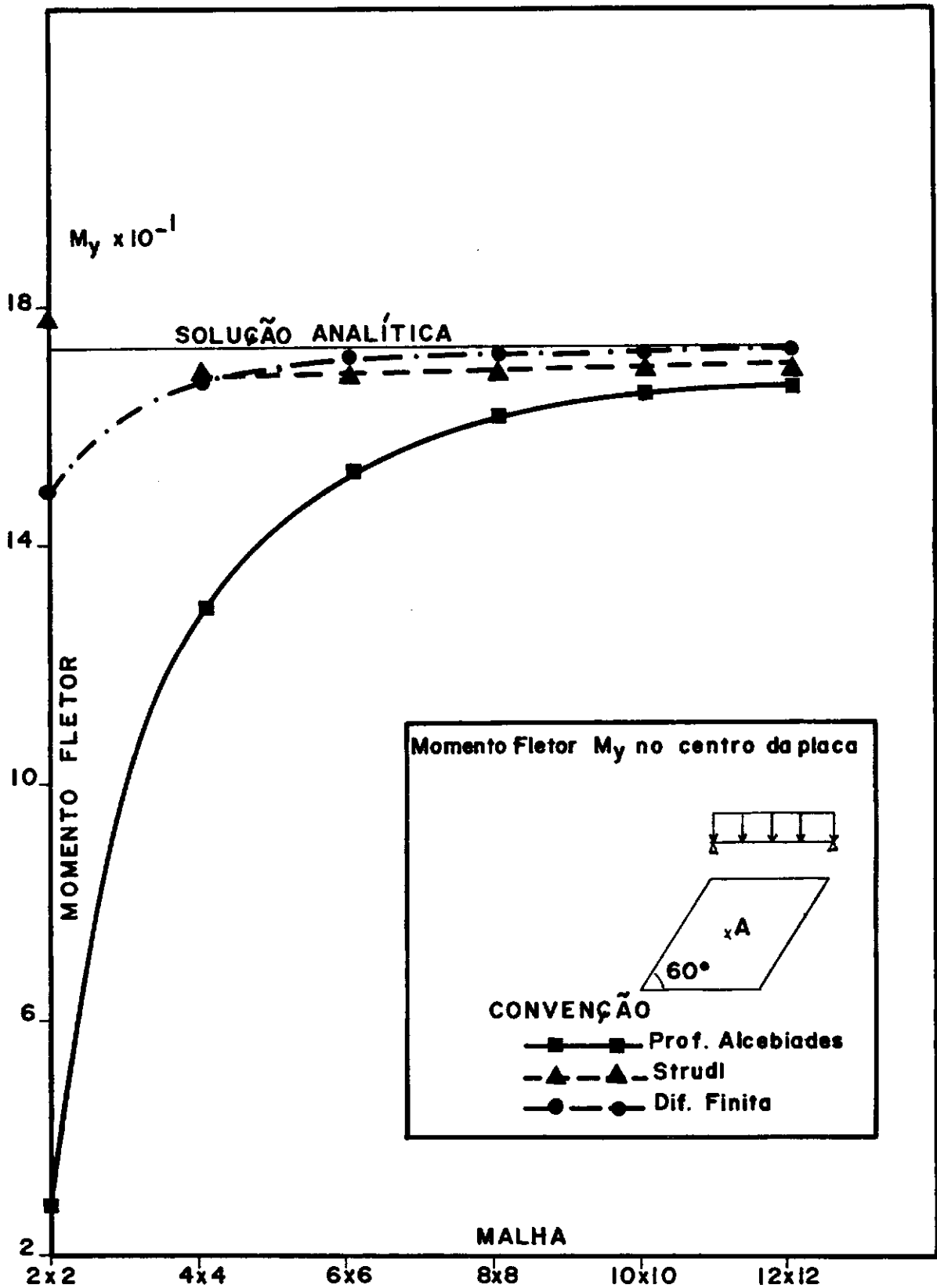
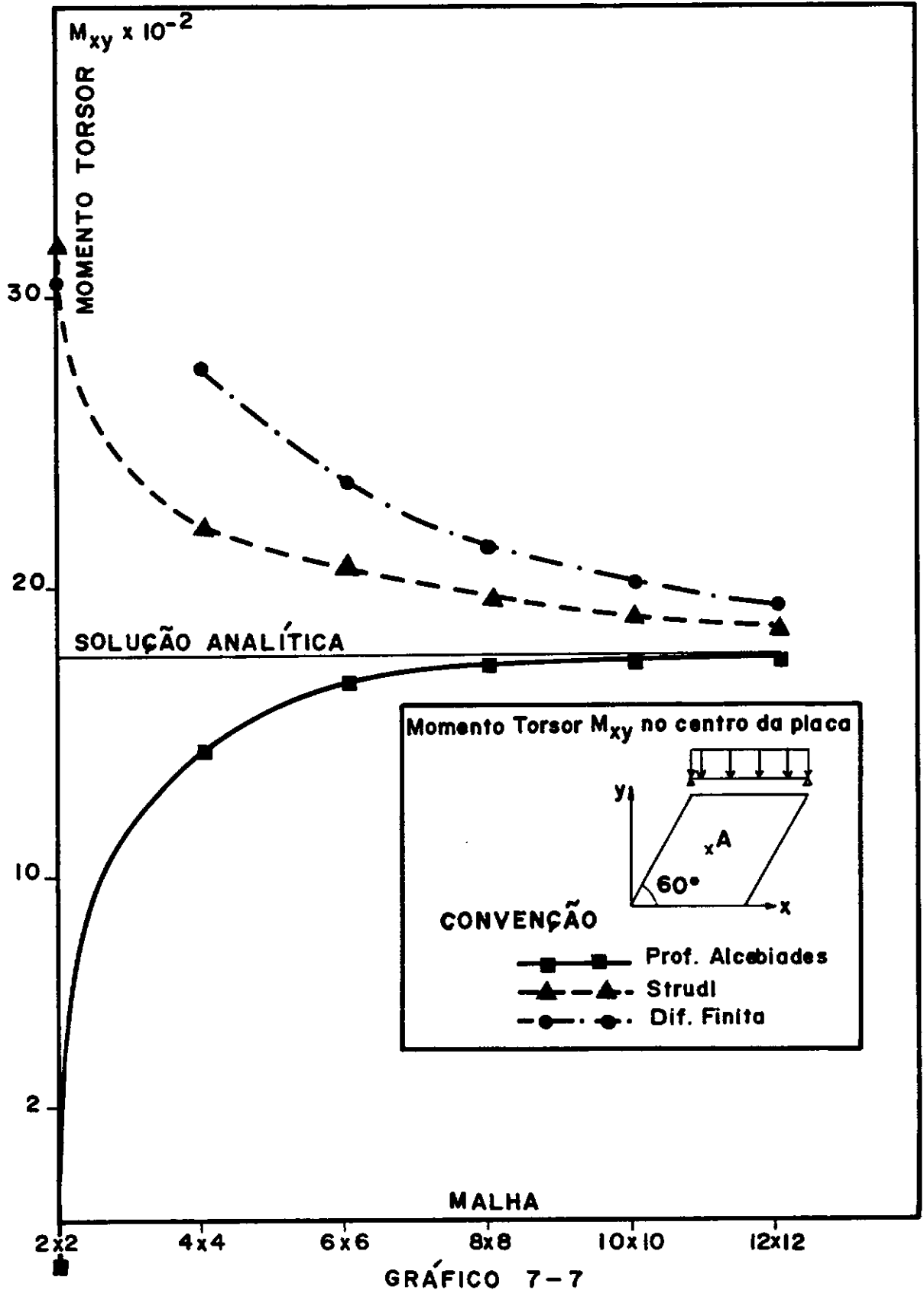


GRÁFICO 7-3







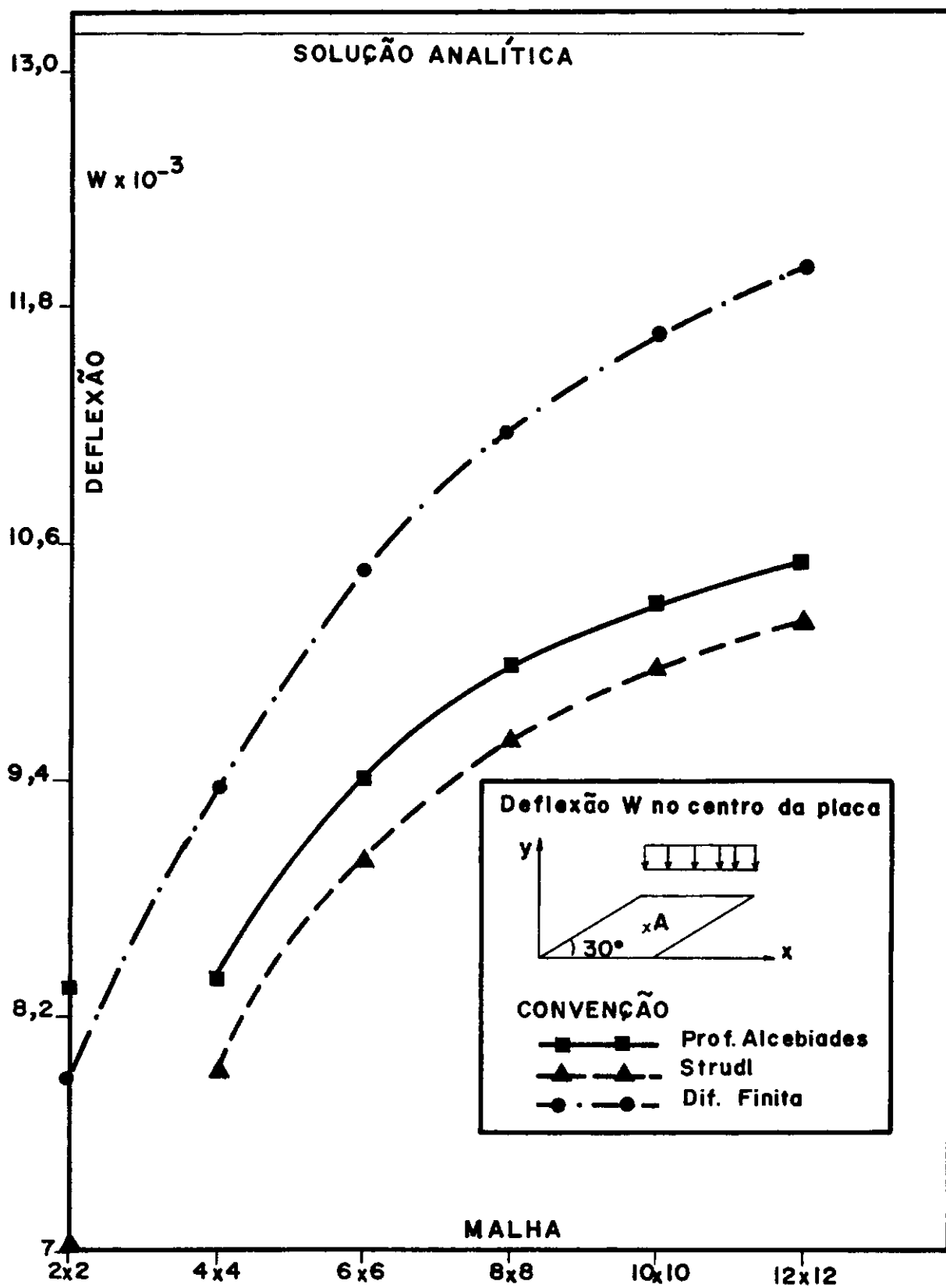


GRÁFICO 7 - 8

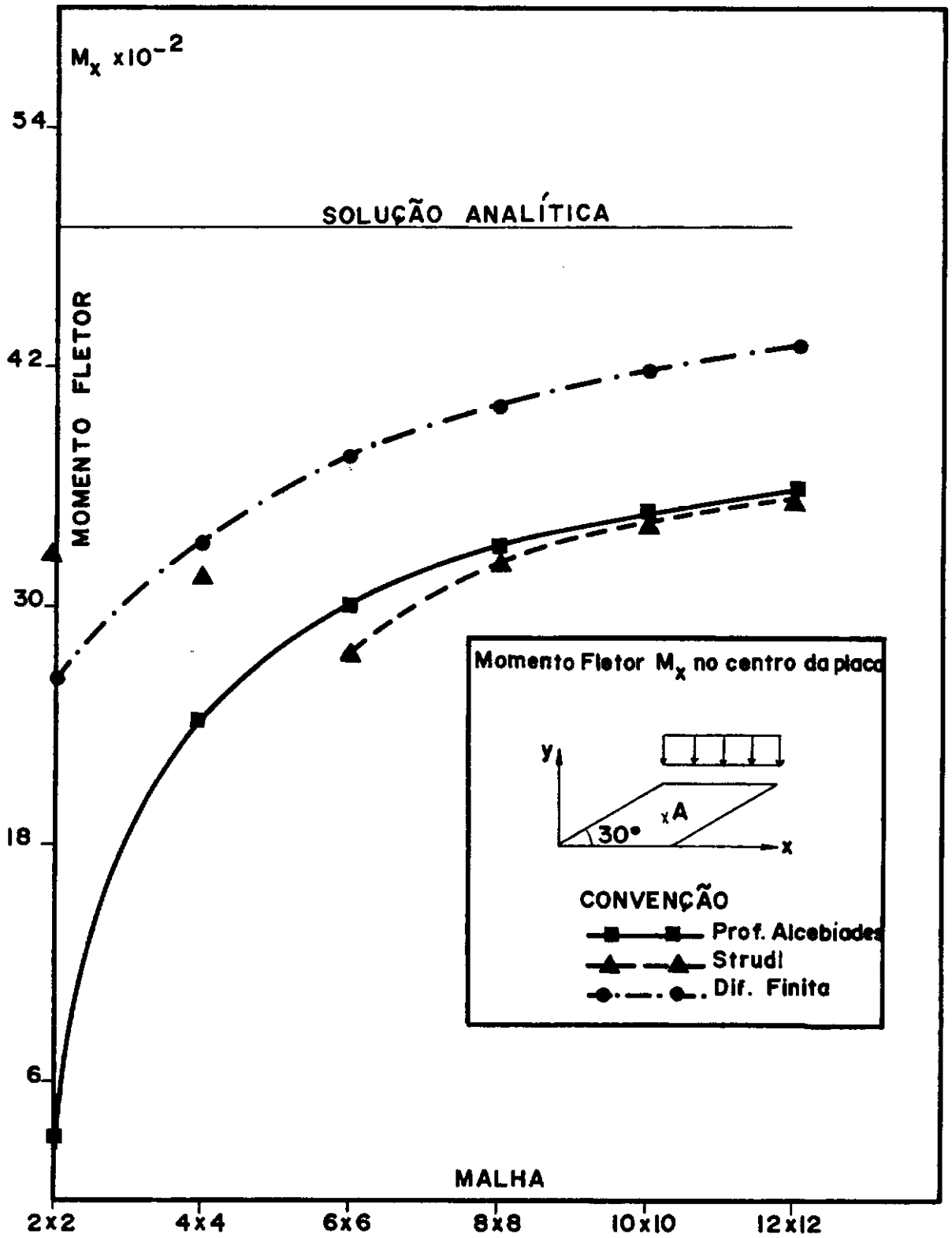
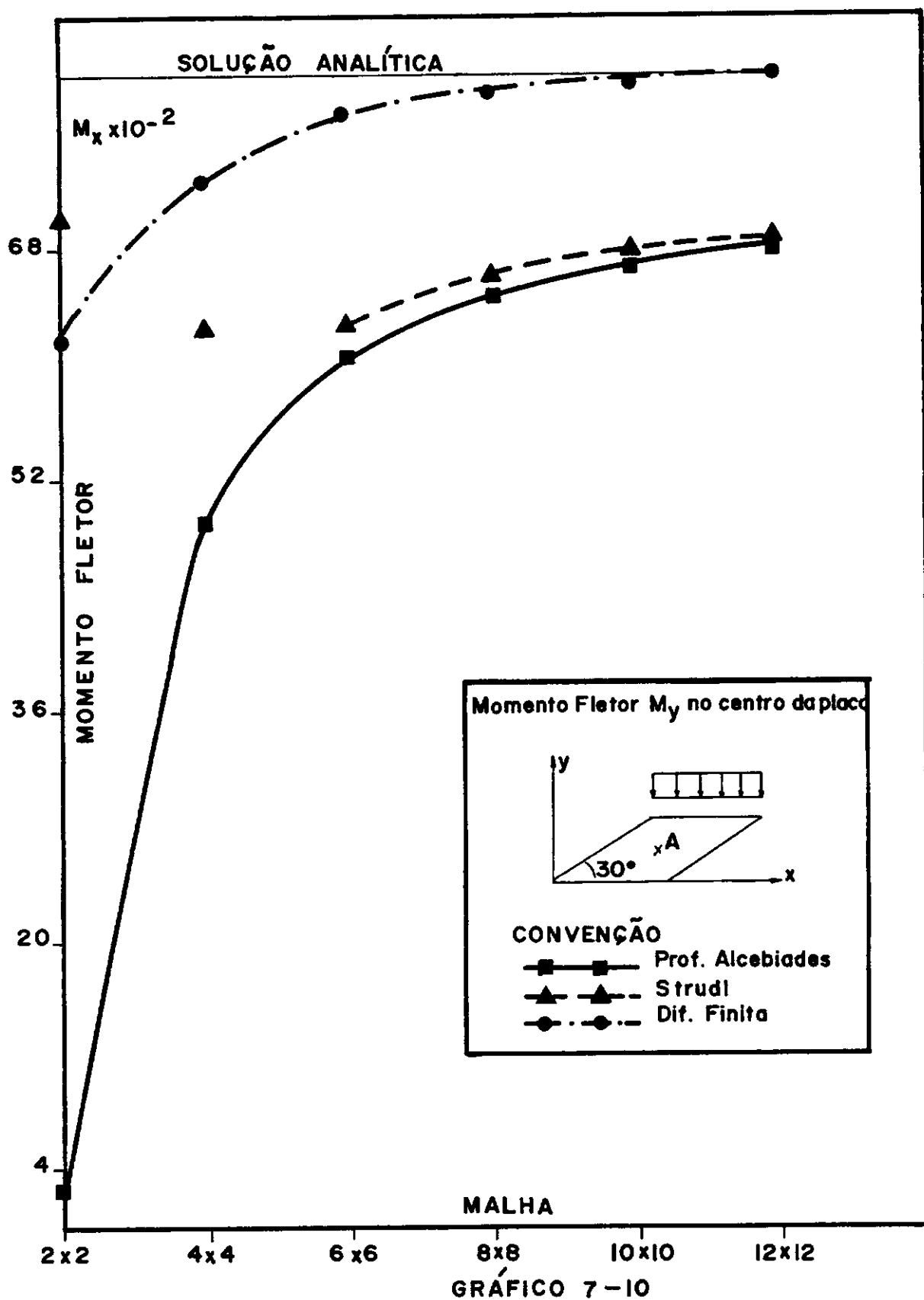
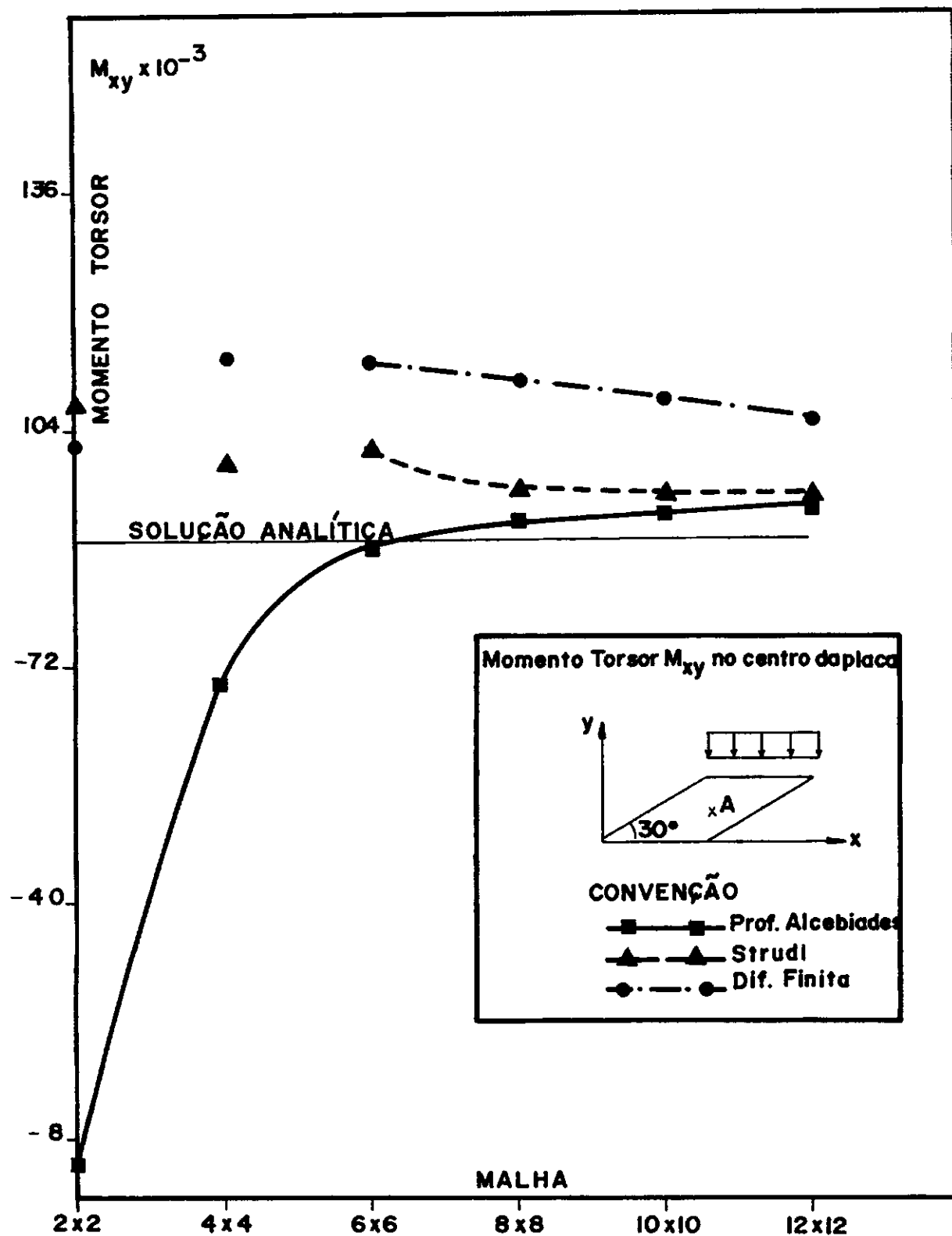


GRÁFICO 7-9





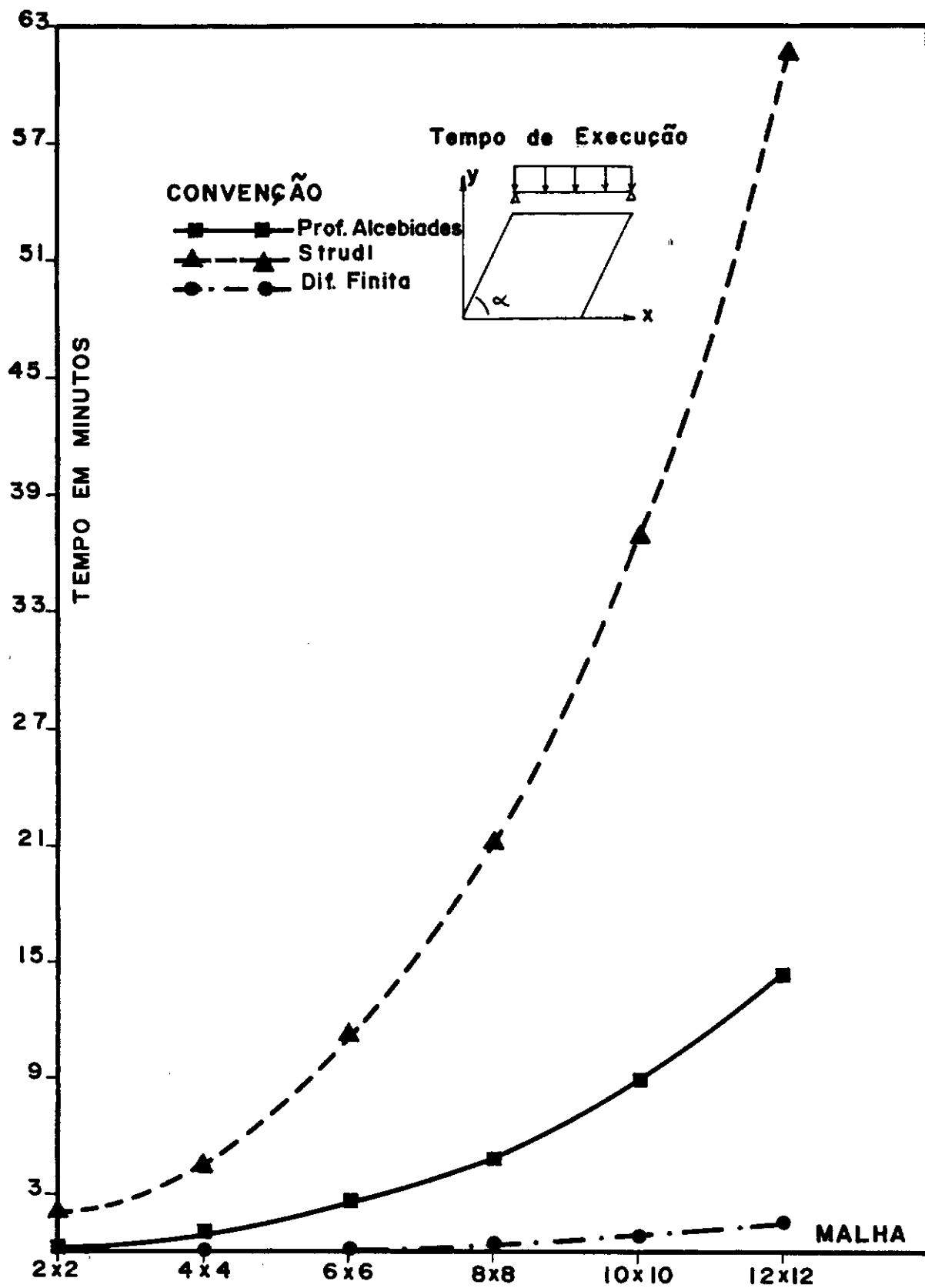


GRÁFICO 7 - 12

Análise dos resultados. Notações
utilizadas no desenvolvimento teórico

VIII - ANÁLISE DOS RESULTADOS

1 - Considerações Gerais

Serão apresentadas observações e conclusões sobre as placas analisadas, comentários referentes aos métodos, programas utilizados, fator tempo e continuidade da pesquisa.

2 - Placa I

a) ω

O exame do gráfico 7.1 revela uma boa convergência a partir de uma malha de (8 x 8) para os resultados apresentados pelos três programas em estudo.

É interessante notar que para uma malha de (10x10) o ICES STRUDL-II já ultrapassa a solução analítica⁽⁴⁾. Revela então uma característica do elemento não conforme, pois os valores podem oscilar em torno da solução exata.

b) $M_x = M_y$

O gráfico 7.2 permite constatar uma rápida convergência para os resultados apresentados pelos programas ICES STRUDL-II e de diferenças finitas. Verifica-se que a partir de uma malha (6 x 6) o gráfico do ICES STRUDL-II permanece quase horizontal. É um fato que deve ser salientado, porque no método dos elementos finitos os erros são maiores para as tensões generalizadas do que para os deslocamentos. Isto deve-se a que as tensões são

expressas em termos de derivadas dos deslocamentos e estes por sua vez são aproximados.

Os resultados do programa do professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO demonstram uma convergência lenta, e a partir de uma malha de (10×10) é que ela fica bem definida.

c) M_{xy}

Neste caso particular (gráfico 7.3) em que o momento torsor é nulo no centro da placa, os valores do programa de diferenças finitas permaneceram sempre nulos para qualquer malha. O ICES STRUDL-II apresenta também melhores resultados que os do professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO.

d) Sentido da Convergência

Pelos gráficos 7.1, 7.2 e 7.3 constata-se que para elementos não conformes o sentido de convergência para momentos fletores e torsões pode ser diferente do apresentado pelas deflexões.

3 - Placa II

a) ω

No gráfico 7.4 nota-se claramente uma ligeira superioridade nos valores apresentados pelo programa de diferenças finitas. Os resultados apresentados por uma malha de (8×8) de diferenças finitas são equivalentes a uma de (12×12) dos programas de elementos finitos.

Verifica-se que a partir de uma malha de (4×4) os dois programas já referidos de elementos finitos apresentam gráficos como se obedecessem a uma mesma lei, diferenciados entre si de uma constante.

b) M_x, M_y

Os gráficos 7.5 e 7.6 indicam melhores resultados para diferenças finitas. Nota-se uma melhor convergência do ICES STRUDL-II em relação ao do Professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO. É interessante salientar que o gráfico 7.6 para o ICES-STRUDL II a partir da malha (4×4) é praticamente horizontal.

c) M_{xy}

O gráfico 7.7 mostra que os resultados de diferenças finitas para M_{xy} são bem menos precisos do que para momentos fletores e deflexões. Os programas de elementos finitos apresentam uma boa convergência. Os melhores resultados foram do Professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO.

d) Sentido da Convergência

Convém observar que para uma simples mudança do ângulo α houve uma alteração no sentido da convergência dos momentos fletores para o ICES STRUDL-II.

O sentido da convergência dos momentos torsores para diferenças finitas foi por valores superiores sendo diferente do apresentado pelas deflexões.

4 - Placa IIIa) ω , M_x M_y

Os gráficos 7.8, 7.9 e 7.10 tornam a revelar uma grande superioridade dos resultados de diferenças finitas em relação a ambos os programas de elementos finitos, sendo da ordem de até 20% essa diferença. Em relação a solução analítica⁽⁵⁾ os resultados de diferenças finitas chegam a apresentar erro de até 13%.

É interessante notar que houve uma certa equivalência dos resultados de ambos os programas de elementos finitos e que a partir da malha (6 x 6) parecem obedecer a uma mesma lei com diferença de apenas uma constante.

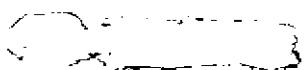
b) M_{xy}

Os resultados dos três programas ilustrados no gráfico 7.11 aparecem convergir para valores diferentes da solução analítica⁽⁵⁾. Os resultados de diferenças finitas para momentos torsores são inferiores aos de elemento finito.

Os resultados do programa do professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO ultrapassaram a solução analítica⁽⁵⁾.

c) Sentido da Convergência

O sentido de convergência para a placa III é o mesmo que o da placa II.



5 - Conclusões

Examinando o conteúdo das observações sobre os gráficos, podemos estabelecer certos conceitos, que por terem generalidades podem apresentar o caráter de conclusões, para flexão de placas esconsas:

- a) a medida que o ângulo α diminui (na ordem de 30°), elementos não conformes apresentam resultados bastante distanciados dos reais. Eles parecem não convergir para a solução analítica. Merece um estudo detalhado a convergência para ângulos em torno de 30° .
- b) coordenadas oblíquas para diferenças finitas têm sua precisão diminuída no tratamento das placas esconsas para ângulo α pequenos ($\approx 30^\circ$).
- c) coordenadas oblíquas para diferenças finitas apresentam uma melhor convergência para momentos fletores e deflexões que o método dos elementos finitos com a utilização de elementos não conformes. Para momentos torsores a melhor convergência é para o método dos elementos finitos ou seja o método das diferenças finitas não apresenta bons resultados para os momentos torsores.
- d) Os resultados de uma malha (8 x 8) para placas esconsas com o programa ICES STRUDL II podem ser considerados equivalentes a uma malha (12 x 12) com o programa do Professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO para momentos fletores e deflexões. Salienta-se que a hipótese vista no item 5.2 referente à utilização do

programa do Professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO deve afetar a precisão dos resultados. (para α não muito pequeno, > 30)

e) para elementos não conformes o sentido de convergência para os momentos fletores das placas esconsas pode ser diferente do apresentado pelas retangulares, ou seja, a forma geométrica do corpo a ser analisado pode afetar o sentido da convergência.

6 - Importância do Fator Tempo

Como o fator tempo é algo preponderante em qualquer ramo da atividade humana, toda comparação, seja de métodos distintos ou de programas de um mesmo método, o tempo deve estar sempre presente para que a comparação torne-se completa.

A eficiência de um programa está diretamente ligada ao tempo de execução. O programa de diferenças finitas foi desenvolvido com a preocupação de minimizar o fator tempo.

Foram surpreendentes os resultados quantitativos de fatos conhecidos qualitativamente, conforme mostra o quadro 7.12 (gráfico 7.12): à medida que refinamos a malha o tempo de execução do programa de diferenças finitas tende a tornar-se 40 vezes menor que o do programa ICES STRUDL II e 10 vezes menor que o do Professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO.

Embora esta comparação seja de caráter particular porque jamais será possível encontrar uma relação geral do fator tempo entre os dois métodos, dada a multi-aplicabilidade de ambos, ela serve para realçar a importância deste fator, mostrando como

o método das diferenças finitas pode ser programado para problemas particulares com considerável economia de tempo.

7 - Aplicabilidade do Método das Diferenças Finitas

Torna-se praticamente impossível com os conceitos atualmente existentes, a elaboração de um programa automático para aplicação do método das diferenças finitas que seja geral, isto é, no caso em pauta, um programa automático, que calcule placas para os mais variados contornos, orifícios e condições de apoio. Entretanto para o estudo de um problema específico definido, podemos empregar o método das diferenças finitas tornando a resolução relativamente simples. O programa apresentado neste trabalho para o cálculo de placas esconsas simplesmente apoiadas, nos dá uma idéia do valor do método. Aliás, sempre que um novo método de cálculo se encontra em fase de afirmação pelos resultados apresentados, há sempre uma tendência na comparação destes resultados com os apresentados pelo método das diferenças finitas que parece ser uma espécie de referência.

É um fato inegável que este processo numérico, tem tido a sua importância diminuída com a expansão do mais novo e poderoso instrumento de cálculo que é o método dos elementos finitos. Salienta-se que na época em que o método das diferenças finitas encontrava-se em fase de desenvolvimento, os pesquisadores ainda não possuíam a facilidade de utilização de computadores, como atualmente, para o estudo de qualquer outro método. É natural portanto que não se conheçam programas específicos publicados pa-

ra utilização do método das diferenças finitas.

Desde que exista um estudo dirigido no sentido de automatizá-lo, podem-se com ele obter eficientes programas. A principal dificuldade no que se refere à automatização, é a existência de pontos fictícios externos ao contorno. Seria também válida uma pesquisa no sentido de se evitar a existência de pontos fora do contorno com a introdução de novos conceitos, isto é, uma melhor maneira no tratamento das condições de contorno.

Podemos citar os seguintes fatos para caracterizar a aplicabilidade do método das diferenças finitas, mas que jamais podem ser considerados como vantagens em relação ao método dos elementos finitos, dada a generalidade deste, principalmente no trato das condições de contorno e disposição das malhas:

- a) menor ordem do sistema de equações para um mesmo número de pontos nodais que o método dos elementos finitos. Para o caso em estudo teremos uma equação por ponto nodal para diferenças finitas e três para elementos finitos. No caso de elementos mais refinados que os utilizados pelos dois programas de elementos finitos já referidos, teremos mais equações por ponto nodal.
- b) as fases da análise do problema, ao contrário do método dos elementos finitos, não são laboriosas principalmente se conhecermos as equações diferenciais que regem o corpo em estudo.
- e) pode-se aplicar o método mesmo que não se disponha de um programa inteiramente automático. Monta-se facilmente o sistema

de equações, fazendo apenas sua resolução no computador. Para o método dos elementos finitos é impraticável a sua utilização sem um programa completo, mesmo para os elementos menos refinados.

- d) como a automatização é normalmente específica, existe facilidade de entrada de dados em um programa de diferenças finitas. Para elementos finitos torna-se trabalhosa, principalmente quando utilizamos elementos mais refinados.

8 - Observações dos Programas ICES STRUDL-II e do Professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO

O Programa ICES STRUDL II apresenta uma grande vantagem na entrada de dados, devido ao formato livre e as várias opções para exprimir um determinado fato, embora não apresente geração automática de coordenadas e incidências. É um programa geral de boa convergência, em que sua principal desvantagem reside no elevado tempo de execução.

Levamos a crer que do ponto de vista prático não há muito sentido o cálculo de estruturas de uso corrente com programas de grande campo de ação, dado o elevado tempo de execução. Entretanto um programa de generalidade como o ICES STRUDL II é válido como fonte de pesquisa e indicado para problemas de natureza relativamente complexa.

O programa do Professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO é também de fácil utilização, tornando-se um pouco trabalhosa

a entrada de dados, quando somos obrigados a utilizar a divisão em várias subestruturas. Embora sua convergência, mesmo para o caso de $\alpha = 90^\circ$ tenha sido um pouco mais lenta do que o ICES STRUDL II, do ponto de vista prático podemos considerá-lo como excelente no que se refere a resultados e principalmente no tempo de execução. Leva a vantagem de ter sua generalidade sob o ponto de vista prático.

Deixamos como sugestão, dada a sua reconhecida utilidade, que seja elaborado um programa automático que gere os dados para o do Professor ALCEBIADES VASCONCELLOS FILHO, quando empregamos a divisão em várias sub-estruturas.

9 - Continuidade da Pesquisa

O presente trabalho pode ser continuado tornando o estudo comparativo mais amplo, utilizando para as placas analisadas:

- a) coordenadas triangulares para diferenças finitas
- b) elementos conformes para o método dos elementos finitos.
- c) um novo processo de cálculo que no caso seria o método das equivalências.

A continuidade pode também ser estendida com a análise de placas esconsas com outras condições de apoio (bordos livres, engastes).

-APÊNDICE-

a) NOTAÇÕES UTILIZADAS NO DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

l, m	co-senos diretores
x, y, z	coordenadas retangulares
u, v	componentes do deslocamento paralelas aos eixos x e y respectivamente
ϵ	alongamento unitário
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	componentes de tensão tangencial em coordenadas retangulares.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	componentes de tensão normal paralelas aos eixos coordenados x, y e z respectivamente.
θ, ψ	ângulos que definem uma determinada direção.
β	ângulo de esconsidade da placa
α	ângulo do eixo x_1 com o eixo y_1
E	módulo de elasticidade longitudinal
ν	coeficiente de Poisson
ϵ_x, ϵ_y	projeções do alongamento unitário sôbre os eixos x e y respectivamente.
γ_{xy}	componente da deformação tangencial no sistema retangular.
X, Y	componente de força no sistema retangular
σ_n, τ_n	tensão normal e tangencial atuando numa face perpendicular a uma direção n .
x_1, y_1	coordenadas oblíquas
l_1, m_1	coeficientes que definem uma determinada direção em relação ao sistema oblíquo.
u_1, v_1	componentes do deslocamento paralelas aos eixos x_1 e y_1 respectivamente

u_{x1}, v_{y1}	projeções do deslocamento em relação aos eixos Ox_1 e Oy_1 respectivamente
$\epsilon_{x1}, \epsilon_{y1}$	projeção do alongamento unitário sobre os eixos x_1 e y_1
γ_{x1y1}	componente da deformação tangencial no sistema oblíquo
X_1, Y_1	componentes da força no sistema oblíquo
τ_{x1y1} τ_{y1x1}	componentes da tensão tangencial em coordenadas oblíquas
σ_{x1}, σ_{y1}	componentes da tensão normal paralelas aos eixos coordenados x_1 e y_1 respectivamente
i_x, i_y	declividade da superfície média da placa nas direções x e y respectivamente.
i_{x1}, i_{y1}	declividade da superfície média da placa nas direções x_1 e y_1 respectivamente
r_{x1}, r_{y1}	raio de curvatura da superfície média da placa em planos paralelos a x_1z e y_1z respectivamente
r_n	raio de curvatura numa direção n
r_t	raio de curvatura numa direção normal a n
M_x, M_y	momento fletor por unidade de comprimento de uma seção da placa perpendicular aos eixos x e y respectivamente.
M_{xy}	momento torsor por unidade de comprimento de uma seção da placa perpendicular ao eixo x
M_{x1}, M_{y1}	momento por unidade de comprimento de uma seção da placa perpendicular aos eixos x_1 e y_1 respectivamente.
M_{x1y1}	momento por unidade de comprimento de uma seção da placa perpendicular ao eixo x_1 .
Q_{x1}, Q_{y1}	esforço cortante paralelo ao eixo z por unidade de comprimento de uma seção da placa perpendicular aos eixos x_1 e y_1 respectivamente.

∇^2	laplaciano
∇_1^2	laplaciano em coordenadas oblíquas
D	rigidez a flexão da placa
q	carga uniformemente distribuída
M_{xT}, M_{yT}	momento fletor verdadeiro atuando no bordo paralelo aos eixos Ox_1 e Oy_1 respectivamente
M	grandeza auxiliar utilizada no processo do Marcus
$(\Delta_y^n)_i$	diferença central de ordem n para um determinado ponto i
y_n	coordenada de um determinado ponto n
k	espaçamento da malha na direção x_1 ou x
h	espaçamento da malha na direção y_1 ou y, espessura da placa
t	define uma direção normal a n, relação entre os espaçamentos das malhas nas direções x_1 e y_1

Listagem da programação. Referências

Bibliográficas

```
      SUBROUTINE XM1(PI,ALFA,XK,DELU,XMI,RG,R,A,B,D,E)
C
C  ESTA SUBROTINA DEFINE O OPERADOR PARA O CALCULO
C  DO MOMENTO MX1
C
      R=-(RG)/(((SIN(PI*ALFA/180.))**3)*2.*(XK**2)*(DELU**2))
      A=XK*(COS(PI*ALFA/180.))*R
      B=(2.-(1.-XMI)*2.*(SIN(PI*ALFA/180.))**2))*R
      D=2.*(XK**2)*R
      E=4.*((1.-XMI)*(SIN(PI*ALFA/180.))**2)-(1.+XK**2))*R
C
      RETURN
      END
```

SUBROUTINE XM2(PI,ALFA,XK,DELU,XMI,RG,R,A,B,D,E)

ESTA SUBROTINA DEFINE O OPERADOR PARA O CALCULO
DO MOMENTO MY1

$R = -(RG) / ((\sin(\pi * ALFA / 180.) ** 3) * 2. * (XK ** 2) * (DELU ** 2))$

$A = XK * (\cos(\pi * ALFA / 180.)) * R$

$B = 2. * R$

$D = 2. * (XK ** 2) * (1. - (1. - XMI) * (\sin(\pi * ALFA / 180.) ** 2)) * R$

$E = 4. * ((XK ** 2) * (1. - XMI) * (\sin(\pi * ALFA / 180.) ** 2) - (1. + XK ** 2)) * R$

RETURN

END

SUBROUTINE XM12(PI,ALFA,XK,DELU,XMI,RG,R,A,B,D,E)

ESTA SUBROTINA DEFINE O OPERADOR PARA O CALCULO
DO MOMENTO MX1Y1

$R = -(RG) / ((\sin(\pi \cdot ALFA / 180))^3) * 4 * (XK^2) * (DELU^2)$
 $A = XK * (2 * (\cos(\pi \cdot ALFA / 180))^2)$
 $+ (\sin(\pi \cdot ALFA / 180))^2 * (1 - XMI) * R$
 $B = 4 * (\cos(\pi \cdot ALFA / 180)) * R$
 $C = 4 * (XK^2) * (\cos(\pi \cdot ALFA / 180)) * R$
 $E = -8 * (1 + (XK^2)) * (\cos(\pi \cdot ALFA / 180)) * R$

RETURN

END

```
SUBROUTINE SM(M,N,NI,MI,NUI,R,A,B,D,E,W,XMU)
DIMENSION W(280),XMU(280),T(18,18)
```

```
ESTA SUBROTINA CALCULA O MOMENTO MX1 OU O
MOMENTO MY1 OU O MOMENTO MX1Y1
```

```
DO 62 I=2,N
DO 62 J=2,M
L=(M-1)*(I-2)+(J-1)
DO 63 K2=1,NI
DO 63 K3=1,MI
63 T(K2,K3)=0.
T(I-1,J-1)=-A
T(I-1,J)=B
T(I-1,J+1)=A
T(I,J-1)=D
T(I,J)=E
T(I,J+1)=D
T(I+1,J-1)=A
T(I+1,J)=B
T(I+1,J+1)=-A
XMU(L)=C.
DO 64 I1=2,N
DO 64 J1=2,M
K1=(M-1)*(I1-2)+(J1-1)
64 XMU(L)=XMU(L)+T(I1,J1)*(W(K1))
62 CONTINUE
RETURN
END
```



```
SUBROUTINE SP(M,N,ALFA,PI,XMU,XMV,XMUV)
DIMENSION XMU(280),XMV(280),XMUV(280)
```

```
ESTA SUBROTINA CALCULA OS MOMENTOS FLETORES MX E MY,
MOMENTO TORSOR MXY E OS MOMENTOS PRINCIPAIS M1 E M2
```

```
WRITE(5,5)
```

```
FORMAT(///,20X,'MOMENTOS FLETORES E DE TORCAO.
*MOMENTOS PRINCIPAIS.',//,16X,'MX',13X,
*'MY',14X,'MXY',13X,'M1',13X,'M2',14X,'ANG',/)
```

```
DO 61 I=2,N
```

```
DO 61 J=2,M
```

```
L=(M-1)*(I-2)+(J-1)
```

```
XX=XMU(L)/(SIN(PI*ALFA/180.))+
```

```
*XMV(L)*(COS(PI*ALFA/180.))**2)/(SIN(PI*ALFA/180.))
```

```
*-2.*XMUV(L)*(COS(PI*ALFA/180.))/(SIN(PI*ALFA/180.))
```

```
XY=XMV(L)*(SIN(PI*ALFA/180.))
```

```
XXY=XMUV(L)-XMV(L)*(COS(PI*ALFA/180.))
```

```
XM1=(XX+XY)/2.+
```

```
*(SQRT((XX-XY)**2+4.*XXY**2))/2.
```

```
XM2=(XX+XY)/2.-
```

```
*(SQRT((XX-XY)**2+4.*XXY**2))/2.
```

```
P1=ABS(XX)+ABS(XY)
```

```
P3=0.0001*P1
```

```
P=ABS((XY)-(XX))
```

```
IF(P3-P)1,1,2
```

```
IF(P3-ABS(XY))3,3,4
```

```
WRITE(5,7)L,XX,XY,XXY,XM1,XM2
```

```
FORMAT(I8,5F15.5,11X,'----',)
```

```
GO TO 61
```

```
ANG=0.785391
```

```
GO TO 20
```

```
ANG=ATAN((2.*XXY/(XY-XX)))/2.
```

```
ANG=ANG*180./3.14159
```

```
WRITE(5,9)L,XX,XY,XXY,XM1,XM2,ANG
```

```
FORMAT(I8,5F15.5,F15.2)
```

```
CONTINUE
```

```
RETURN
```

```
END
```

```

    DIMENSION S(9500),Q(280),T(18,18),QEP(30),
*NELEG(280),XMU(280),XMV(280),XMUV(280)
    DEFINE FILE 1(430,300,U,IK)

```

```

C
C FRANCISCO SERAPHICO FERRAZ DA NOBREGA
C

```

```

C TESE MESTRADO
C

```

```

C ESTE PROGRAMA CALCULA PLACAS ESCONSAS
C SIMPLEMENTE APOIADA PELO METODO DAS
C DIFERENCAS FINITAS
C

```

```

C LEITURA DO NUMERO DE PLACAS A SEREM ANALISADAS
C

```

```

    READ(8,111)NP

```

```

111  FORMAT(I5)

```

```

    WRITE(5,19)NP

```

```

19  FORMAT(//,20X,'NUMERO DE PROBLEMAS=',I5)

```

```

    NL=0

```

```

2000 NL=NL+1

```

```

    WRITE(5,29)NL

```

```

29  FORMAT(//,20X,'PROBLEMA NUMERO=',I9)
C

```

```

C LEITURA DAS CARACTERISTICAS DAS PLACAS
C

```

```

    READ(8,10)M,N,UL,VL,ALFA,XH,XMI,XE

```

```

10  FORMAT(2I4,5F8.2,F12.2)

```

```

    WRITE(5,1)M,N

```

```

1  FORMAT(///,20X,'CARACTERISTICA DA MALHA',//,15X,'M=',
*I4,24X,'N=',I4)

```

```

    WRITE(5,2)UL,VL,ALFA,XH

```

```

2  FORMAT(///,20X,'CARACTERISTICA DA PLACA',//,15X,
*'UL=',F10.2,17X,'VL=',F10.2,/,15X,'ALFA=',F8.2
*,17X,'XM=',F10.2)

```

```

    WRITE(5,3)XMI,XE

```

```

3  FORMAT(///,20X,'CONSTANTES',//,15X,'XMI=',F8.2,
*18X,'XE=',E15.7)
C

```

```

C CARACTERIZACAO DO OPERADOR A SER APLICADO
C

```

```

    DELV=VL/N

```

```

    DELU=UL/M

```

```

    XK=DELV/DELU

```

```

IK=1
PI=3.14159
RG=(XE*(XH**3))/(12.*(1.-XMI**2))
R=2.*(XK**2)*(DELU**2)*(SIN(PI*ALFA/180.))**2)
E=-4.*(1.+XK**2)/R
F=2.*(XK**2)/R
B=2./R
A=XK*COS(PI*ALFA/180.)/R
ESP=0.000001
MI=M+1
NI=N+1
MMI=M-1
NNI=N-1
NUI=MMI*NNI
C
C  CARACTERIZACAO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES E
C  ZERAMENTO DA MESMA
C
      IF(NUI-4)31,31,32
31  MUD=NUI-1
      GO TO 59
32  IF(M-2)33,33,34
33  NMX=M+1
      MM=M
      NX=M
      MUD=M-1
      GO TO 59
34  NMX=2*M+1
      NX=M+1
      MUD=M
      MM=M+1
59  NTT=NUI*(1+2*MUD)-(MUD*(MUD+1))/2
      MLC=MUD
      DO 53 I=1,NTT
      S(I)=0.
53  CONTINUE
      NK=0
C
C  APLICACAO DO OPERADOR AGS PONTOS DA PLACA
C
      DO 62 I=2,N
      DO 62 J=2,M
      NK2=0
      NB=0
      NK1=0

```

```

      K=(M-1)*(I-2)+(J-1)
      DO 63 K2=1,NI
      DO 63 K3=1,MI
63    T(K2,K3)=0.
      T(I-1,J-1)=-A
      T(I-1,J)=B
      T(I-1,J+1)=A
      T(I,J-1)=F
      T(I,J)=E
      T(I,J+1)=F
      T(I+1,J-1)=A
      T(I+1,J)=B
      T(I+1,J+1)=-A

C
C  DISPOSICAO DA PRIMEIRA PARTE DA MATRIZ EM
C  VETOR COLUNA
C
      DO 64 I1=2,N
      DO 64 J1=2,M
      NK=NK+1
      IF(NUI-4)35,35,36
36    IF(NX-NMX)37,37,38
37    S(NK)=T(I1,J1)
      NK1=NK1+1
      IF(NX-NK1)41,41,39
39    GO TO 64
41    NX=NK+1
      GO TO 62

C
C  DISPOSICAO DA SEGUNDA E TERCEIRA PARTE DA
C  MATRIZ EM VETOR COLUNA
C
38    NB=NB+1
      IF(K-MM-NB)42,43,43
43    NK=NK-1
      GO TO 64
42    S(NK)=T(I1,J1)
      NK2=NK2+1
      IF(NK2-NMX)45,46,46
45    GO TO 64
46    GO TO 62
35    S(NK)=T(I1,J1)
64    CONTINUE
62    CONTINUE
C

```

```

C
C   ARMAZENAMENTO DA MATRIZ BANDA DISPOSTA EM
C   VETOR COLUNA NO DISCO MAGNETICO
C
C   WRITE(1'IK)(S(I),I=1,NTT)
C
C   LEITURA DAS ORDENADAS DE CARGA NOS PONTOS NODAIS
C
C   DO 17 I=1,NUI
C   Q(I)=0.
17  CONTINUE
C   NC=0
C   READ(8,130)NG
130  FORMAT(I5)
C   IF(NG)137,138,139
137  READ(8,80)(Q(I),I=1,NUI)
80   FORMAT(8F10.4)
C   GO TO 100
138  READ(8,90)QP
90   FORMAT(F10.4)
C   DO 67 I=1,NUI
C   Q(I)=QP
67  CONTINUE
C   GO TO 100
139  DO 68 I=1,NG
C   READ(8,110)NEG,QEP(I)
110  FORMAT(I5,F10.4)
C   READ(8,120)(NELEG(J),J=1,NEG)
120  FORMAT(4I4)
C   DO 69 J=1,NEG
C   K=NELEG(J)
C   Q(K)=QEP(I)
69  CONTINUE
68  CONTINUE
C   WRITE(5,83)(I,Q(I),I=1,NUI)
83  FORMAT(///,20X,'ORDENADA DAS CARGAS NOS PONTOS NODAIS',//
*4(I8,F15.5))
C   GO TO 100
101  IK=1
C   READ(1'IK)(S(I),I=1,NTT)
C
C   CALCULO DAS DEFLEXOES E MOMENTOS
C
100  CALL GELB(Q,S,NUI,1,MUD,MLD,ESP,IER)
C   NC=NC+1

```

118.

```
IF(NC-1)48,48,49
48 DO 77 I=1,NUI
   Q(I)=-Q(I)/RG
77 CONTINUE
   GO TO 101
49 WRITE(5,6)(I,Q(I),I=1,NUI)
6   FORMAT(///,20X,'DEFLEXOES',//4(I8,F15.5))
C   CALCULO DOS MOMENTOS FLETORES E TORSOR
   CALL XM1(PI,ALFA,XK,DELU,XMI,RG,R,A,B,D,E)
   CALL SM(M,N,NI,MI,NUI,R,A,B,D,E,Q,XMU)
   CALL XM2(PI,ALFA,XK,DELU,XMI,RG,R,A,B,D,E)
   CALL SM(M,N,NI,MI,NUI,R,A,B,D,E,Q,XMV)
   CALL XM12(PI,ALFA,XK,DELU,XMI,RG,R,A,B,D,E)
   CALL SM(M,N,NI,MI,NUI,R,A,B,D,E,Q,XMUV)
   CALL SP(M,N,ALFA,PI,XMU,XMV,XMUV)
   IF(NL-NP)2000,200,200
200 CALL EXIT
   END
```

```

      DIMENSION X(500),Y(500),IX(500,3),IR(30,30),IN(500)
      *,XN1(500),XN2(500),JN(500),JN1(500),JN2(500),JN3(500)

```

```

      FRANCISCO SERAPHICO FERRAZ DA NOBREGA

```

```

      TESE MESTRADO

```

```

      ESTE PROGRAMA GERA AS COORDENADAS E INCIDENCIAS
      PARA PLACAS ESCONSAS PARA O ICES STRUDL-II

```

```

      NP- NUMERO DE CASOS A SEREM GERADOS

```

```

      READ(8,111)NP

```

```

111  FORMAT(I5)

```

```

      WRITE(5,19)NP

```

```

19  FORMAT(//,' NUMERO DE PROBLEMAS=',I5)

```

```

      ML=0

```

```

2000 ML=ML+1

```

```

      WRITE(5,29)ML

```

```

29  FORMAT(//,' PROBLEMA NUMERO=',I5)

```

```

      XL,YL- DIMENSOES DA PLACA NAS DIRECOES X1 OU
      X E Y1 OU Y RESPECTIVAMENTE

```

```

      ALFA- ANGULO DO EIXO X1 COM O EIXO Y1

```

```

      M,N- NUMERO DE DIVISOES NAS DIRECOES X1 E Y1
      RESPECTIVAMENTE

```

```

      A NUMERACAO DOS NOS E ELEMENTOS E DA ESQUERDA
      PARA A DIREITA E DE BAIXO PARA CIMA

```

```

      AS INCIDENCIAS SAO GERADAS NO SENTIDO
      ANTI-HORARIO

```

```

      READ(8,1)XL,YL,ALFA,M,N

```

```

1  FORMAT(3F8.3,2I4)

```

```

      WRITE(5,17)XL,YL,ALFA,M,N

```

```

17  FORMAT(///,' CARACTERISTICAS DA PLACA',///,1X,

```

```

      *'XL=      ',F8.2,/,1X,'YL      =',F8.2,/,1X,

```

```

      *'ALFA    =',F8.2,/,1X,'M      =',I8,/,1X

```

```

      *'N      =',I8, )

```

```

      GERACAO DAS COORDENADAS

```

```

WRITE(5,105)
105  FORMAT(///,1X,'COORDENADAS',)
      PI=3.14159
      MI=M+1
      NI=N+1
      CX=XL/M
      CY=YL/N
      NUMNG=MI*NI
      NUMEL=2*M*N
      DO 320 I=1,NI
      DO 320 J=1,MI
      IR(I,J)=MI*(I-1)+J
320  CONTINUE
      K=0
      DO 20 I=1,NI
      K=K+1
      IN(K)=IR(I,1)
      XN1(K)=(I-1)*DY*(COS(PI*ALFA/180.))
      XN2(K)=(I-1)*DY*(SIN(PI*ALFA/180.))
      K=K+1
      IN(K)=IR(I,MI)
      XN1(K)=XN1(K-1)+M*DX
      XN2(K)=XN2(K-1)
20   CONTINUE
      IK=0
      L=0
10   IK=IK+1
      NG=IN(IK)
      X(NG)=XN1(IK)
      Y(NG)=XN2(IK)
      ZX=NG-L
      IF(L)22,5,22
22   CX=(X(NG)-X(L))/ZX
      DY=(Y(NG)-Y(L))/ZX
5    L=L+1
      IF(NG-L)7,9,11
11   X(L)=X(L-1)+DX
      Y(L)=Y(L-1)+DY
      GO TO 5
9    IF(NUMNG-NG)7,13,10
7    WRITE(5,16)NG
16   FORMAT(10X,'PONTO NOCAL ERRADO',I10)
      GO TO 200
13   CONTINUE
      DO 41 I=1,MI

```



```

      L=IR(1,I)
      WRITE(5,26)L,X(L),Y(L)
41    CONTINUE
      DO 91 I=2,N
      DO 91 J=1,MI
      L=IR(I,J)
      L1=IR(I,1)
      IF(L-L1)55,57,56
56    L3=IR(I,MI)
      IF(L3-L)55,57,58
55    WRITE(5,32)
32    FORMAT(//,' ERREI',)
      GO TO 200
58    WRITE(5,25)L,X(L),Y(L)
25    FORMAT(4X,I4,3X,F10.3,3X,F10.3)
      GO TO 91
57    WRITE(5,26)L,X(L),Y(L)
26    FORMAT(4X,I4,3X,F10.3,3X,F10.3,3X,'S',)
91    CONTINUE
      DO 50 I=1,MI
      L=IR(MI,I)
      WRITE(5,26)L,X(L),Y(L)
50    CONTINUE
C
C    GERACAO DAS INCIDENCIAS
C
      WRITE(5,106)
106   FORMAT(///,1X,'INCIDENCIAS',)
      K=0
      N1=N
      DO 330 I=1,N1
      K=K+1
      JN(K)=1+2*(I-1)*M
      JN1(K)=IR(I,2)
      JN2(K)=IR(I+1,1)
      JN3(K)=IR(I,1)
      K=K+1
      JN(K)=MI+2*(I-1)*M
      JN1(K)=IR(I,2)
      JN2(K)=IR(I+1,2)
      JN3(K)=IR(I+1,1)
      K=K+1
      JN(K)=(2*M)+2*(I-1)*M
      JN1(K)=IR(I,MI)
      JN2(K)=IR(I+1,MI)

```

122.

```
JN3(K)=IR(I+1,MI-1)
330  CONTINUE
      N=0
      L=0
33    L=L+1
      MEL=JN(L)
      IX(MEL,1)=JN1(L)
      IX(MEL,2)=JN2(L)
      IX(MEL,3)=JN3(L)
40    N=N+1
      IF(MEL-N)30,30,35
35    IX(N,1)=IX(N-1,1)+1
      IX(N,2)=IX(N-1,2)+1
      IX(N,3)=IX(N-1,3)+1
30    WRITE(5,6)N,(IX(N,I),I=1,3)
6     FORMAT(4X,4I8)
      IF(MEL-N)80,80,40
80    IF(NUMEL-N)90,90,33
90    CONTINUE
      IF(ML-NP)2000,200,200
200   CALL EXIT
      END
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 . Wang, P.C., - "Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics", John Wiley & Sons, Inc., U.S.A., 1966.
- 2 . Salvadori, M.G. and Baron, M.L. - "Numerical Methods in Engineering", 2nd ed., Printice-Hall. 1966.
- 3 . Timoshenko, S. y J.N. Goodier - "Teoria de la Elasticidad", Ediciones Urno. Bilbao. 1968.
- 4 . Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger - "Theory of Plates and Shells", Mc Graw-Hill, 2nd ed. 1959.
- 5 . Morley, L.S.D. - "Skew Plates and Structures", The MacMillan Co., New York, 1963
- 6 . Zienkiewicz, O.C. - "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", Mc Graw-Hill Publishing Company Limited, Berkshire, England, 1967.
- 7 . Vasconcellos, A.F. - "O Método dos Elementos Finitos. Fundamentos Teóricos. Automatização. Aplicações a Problemas de Placas e de Elasticidade Plana". COPPE - Maio - 1970.
- 8 . Strudl II, Iceš - "The Structural Design Language Enegineering User's Manual" - vol. 2 First Edition, June, Co. by Massachusetts Institute of Technology 1969.
- 9 . Pacitti, Tércio - "Fortran-Monitor, Princípios". Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1968.
10. Arantes e Oliveira, E.R. - "Tendências Atuais do Cálculo Estático de Estruturas". 2^{as} Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, 1967.
11. Santos, Sydney M.G. - "Curso Seriado sobre Teoria das Placas". Publicado na Revista Estrutura-Volumes Diversos.

12. Aggarwala, B.D. - "Bending of Parallelogram Plates" Quarterly of Journal of the Engineering Mechanics Division, August, ASCE, 1967.
13. Kennedy, J.B. - "Series Solution of Skewed Stiffened Plates" Quarterly of Journal of the Engineering Mechanics Division, February, ASCE, 1964.
14. Herrman L.R. - "Finite Element Bending Analysis for Plates" Quarterly of Journal the Engineering Mechanics Division, October, ASCE, 1967.
15. Shieh W.Y.J. - "Analysis of Plate Bending by Triangular Elements". Quarterly of Journal of the Engineering Mechanics Division , October, ASCE, 1967.
16. Dantas, José Inácio - "Método dos Elementos Finitos Aplicados a problemas Axissimétricos", Tese de Mestrado, COPPE, 1971
17. Arantes e Oliveira, E.R., "Completeness and Convergence in the Finite Element Method", Proceedings of the 2nd Conference on Matrix Methods in Structural Analysis, Dayton, Ohio, 1968