

Método Montello de teste de aderência de tábuas de mortalidade: Aplicação para massas populacionais do Nordeste e Sul/Sudeste do Brasil

por

Giuliano Viera Montello

Victor D'Angelo Colacino



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Estatísticos

2017

i

Método Montello de teste de aderência de tábuas de mortalidade: Aplicação para massas populacionais do Nordeste e Sul/Sudeste do Brasil

Giuliano Viera Montello e Victor D'Angelo Colacino

Projeto final submetido ao Corpo Docente do Instituto de Matemática – Departamento de Métodos Estatísticos da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Bacharel em Ciências Atuariais.

Aprovada por:

Prof. José Roberto Santos Montello
Graduado – UFRJ - Orientador

Prof. Nei Carlos dos Santos Rocha
Doutor – UFRJ

Prof. Flávia Ferreira Landim
Doutora – UFRJ

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

2017

Agradecimentos

Giuliano Montello

Agradeço, primeiramente, à minha família. Em especial ao meu pai, Roberto Montello, que tive a sorte de ter como professor e, também, como orientador deste projeto e a minha mãe, Monica Viera, que sempre me apoiou ao longo dos anos do curso.

Agradeço ao Victor Colacino, minha dupla neste projeto e amigo do curso de ciências atuariais que foi fundamental para a composição dele.

Agradeço a todos os professores pelos ensinamentos que recebi na graduação do curso de ciências atuarias.

Agradeço, também, aos amigos que estiveram comigo durante este período de minha vida e que me deram apoio.

Victor Colacino

Gostaria de agradecer primeiramente à minha família, minha mãe Fabíola D'Angelo, meu pai Vicente Colacino e meu irmão Lucas Colacino, que sempre me deram apoio para seguir o curso de Ciências Atuariais.

Ao Prof. José Roberto Santos Montello, pelas orientações e referências. Agradeço pela colaboração e presteza em todos os sentidos.

Aos amigos atuários, que conheci no meio da jornada deste curso, e me guiaram ao longo do processo.

Aos amigos não atuários também, por contribuírem, cada um de sua maneira, tanto para minha formação profissional quanto com a minha formação pessoal.

Ao Giuliano Montello, por estar presente desde o meu primeiro período, até o final deste trabalho de conclusão de curso.

Finalmente, gostaria de agradecer a todos que fizeram parte da minha vida ao longo destes anos de curso, e que foram de extrema importância para a finalização dessa etapa.

Resumo

Este trabalho baseia-se na aplicação do Método Montello, teste atuarial de aderência a tábuas de mortalidade, em uma base real de dados provenientes de empresas do setor energético das regiões do Nordeste e do Sul/Sudeste do Brasil. Estudaremos separadamente cada região e compararemos o resultado individual por região com o resultado global. Os testes serão feitos usando o Microsoft Excel e analisaremos os resultados para determinar as tábuas que melhor se adequam ao comportamento da população estudada conforme estabelece a legislação de Previdência Complementar vigente e a boa técnica atuarial.

Palavras-chave: Método Montello; Tábuas de Mortalidade; Teste de aderência.

Sumário

1	Introdução.....	2
2	Aderência das Hipóteses Demográficas no Plano de Benefício Definido.....	4
2.1	Planos de Benefício Definido.....	4
2.2	As Premissas Atuariais.....	5
2.3	Tábua de Mortalidade Geral.....	6
3	Aspectos Fundamentais da Teoria Demográfica aplicável às diversas Populações de Fundos de Pensão.....	9
3.1	Análise Técnica sobre Mortalidade de Ativos	9
3.2	Análise Técnica sobre Mortalidade de Assistidos Aposentados por Invalidez.....	12
4	Testes de Aderência para Tábuas de Mortalidade através do Método Montello.....	15
4.1	O Método Montello.....	15
4.2	Considerações sobre o Método Montello.....	19
5	Aplicação do Método Montello.....	21
5.1	Introdução	21
5.2	Empresas do Nordeste.....	23
5.3	Empresas do Sul/Sudeste	29
5.4	Resultado Global	36
6	Conclusão	43
	Bibliografia	45
	APÊNDICE	46
	ANEXO.....	76
	GLOSSÁRIO.....	81

Capítulo 1

Introdução

Um dos maiores desafios enfrentados por companhias seguradoras e de previdência fechada é a definição da tábua de mortalidade que será utilizada na cobertura de sobrevivência de seus planos. Na constituição da reserva matemática dos benefícios programados de aposentadoria de planos de benefício definido, existem riscos demográficos e atuariais envolvidos que devem ser avaliados pelo atuário.

Do ponto de vista populacional, os ganhos de longevidade dos participantes e assistidos refletidos nas tábuas biométricas utilizadas pelos fundos de pensão, como por exemplo as tábuas AT-83 e AT-2000, têm efeitos financeiros significativos, a médio e longo prazo, sobre as reservas matemáticas acumuladas para pagamento de aposentadorias e pensões vitalícias, e portanto, a mitigação desse risco deve ser realizada com a atualização constante da hipótese demográfica da mortalidade e com as projeções dinâmicas do fluxo financeiro de pagamentos e recebimentos, e da estrutura etária e de rendimentos dos participantes dos planos de benefícios.

O problema da escolha da tábua de mortalidade a ser utilizada no cálculo de contribuições, assim como de renda e provisões, aumenta com a redução gradual da mortalidade da população e a utilização de tábuas que são baseadas na experiência de outros países.

Nosso objetivo neste trabalho é utilizar o denominado Método Montello para realizar um teste de aderência de hipótese de Mortalidade sobre uma base de dados real, onde foram selecionados aposentados não inválidos de um Plano de Benefício Definido e os respectivos pensionistas vitalícios, oriundos de empresas do setor energético do Sul/Sudeste e Nordeste do Brasil. Testamos o método aqui referido utilizando os benefícios reais dos participantes, assim

como o benefício Unitário, de forma a avaliar o impacto da ponderação dos valores de benefícios na escolha da Tábua de Mortalidade.

Para a realização deste trabalho, utilizamos como principais referências Pinheiro (2007), e as apostilas do curso de demografia do professor José Roberto Montello, que explicitam o método Montello, assim como abordam os aspectos gerais das Entidades de Previdência Complementar.

O trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2 abordamos alguns aspectos globais referentes a Planos de Benefício Definido de Entidades Fechadas de Previdência Complementar e seus testes de aderência de premissas atuariais; no capítulo 3, iniciamos o debate sobre os aspectos fundamentais da Teoria demográfica, e o porquê de aplicarmos teste de Mortalidade de aposentados sem ser por invalidez separado dos testes de ativos e inválidos dos Planos; o capítulo 4 apresenta o Método Montello e suas validações; e, por fim, o capítulo 5 foca nos resultados obtidos através desse método na subpopulação de empresas de energia do Nordeste e Sul/Sudeste do Brasil.

Capítulo 2

Aderência das Hipóteses Demográficas no Plano de Benefício Definido

2.1 Planos de Benefício Definido

Tradicionalmente, os planos de benefício definido são planos que proporcionam um benefício de aposentadoria a partir de uma determinada idade, expresso como uma renda vitalícia. O benefício do empregado vinculado ao plano é definido, geralmente, em função do tempo de serviço ou do salário médio no final de carreira.

Num plano de benefício definido, as contribuições são feitas geralmente por empregados e empregadores, e o patrimônio acumulado não é alocado em contas individuais, mas compõe um plano mutualista em que a contribuição é uma variável dependente e o benefício uma variável independente. As contribuições, portanto, são determinadas pelo plano de custeio, que visa atender o financiamento dos benefícios futuros de forma solvente.

Dessa forma, os planos de benefício definido introduzem um grau de complexidade na estruturação dos mesmos, na medida em que assegura um valor final de benefício independente das oscilações nas hipóteses demográficas e econômicas escolhidas, e incidentes sobre o regime de capitalização.

Por isso, os planos de benefício definido são mais complexos e diversificados, uma vez que é prometido ao participante do fundo de pensão um benefício, sem considerar o volume de

dinheiro que o fundo possui, correndo o empregador o risco de ter de participar da cobertura das insuficiências atuariais.

2.2 As Premissas Atuariais

Por se tratar de contratos de longo prazo, os planos de benefício definido das entidades de previdência complementar estão expostos a vários riscos, incluindo os riscos atuariais. Machado, Lima e Lima (2006, p.1) define o risco atuarial como aquele decorrente da “adoção de premissas atuariais que não se confirmem, ou que se revelem agressivas e pouco aderentes à massa de participantes ou do uso de metodologias que se mostrem inadequadas”. Isto indica que, se as premissas não se confirmarem, o custo planejado do plano pode não ser suficiente para honrar os compromissos assumidos, resultando-se no risco de insolvência econômica.

Estas premissas são definidas e utilizadas no desenvolvimento da avaliação atuarial do plano de benefícios feita pelo menos uma vez por ano pelo atuário. Os parâmetros atuariais podem ser divididos em biométricos e financeiros, como tábuas de mortalidade e taxa de juros, respectivamente. A utilização desses parâmetros é indispensável no processo de avaliação atuarial de entidades previdenciárias, isso porque são eles que fornecem as ferramentas probabilísticas básicas necessárias para a geração do processo avaliativo. Ainda, a escolha de parâmetros atuariais adequados é de fundamental importância, tendo em vista que, em regimes capitalizados, os resultados observados pelas avaliações atuariais expressam a situação da entidade e são norteadores de medidas corretivas, em caso de constatação de insuficiências financeiras futuras.

Conforme estabelecido na Resolução MPS/CGPC Nº 18, de 28 de março de 2006 (D.O.U. 05/04/2006) as hipóteses biométricas, demográficas, e financeiras devem ser condizentes às características do grupo de participantes, assistidos e ao regulamento do plano de benefícios. Ou seja, as Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC) devem procurar adotar premissas adequadas à realidade na qual estão inseridas.

Tendo em vista o exposto, a escolha de hipóteses demográficas e econômicas condizentes com a realidade dos planos de benefício definido é de extrema importância, uma vez que é um dos fatores essenciais para assegurar a solvência dos mesmos. De modo geral, o objetivo dessa monografia é focar na aderência da premissa atuarial mais adequada referente à Mortalidade Geral dos que estejam na fase de recebimento de benefícios por sobrevivência.

2.3 Tábua de Mortalidade Geral

A mortalidade geral diz respeito às ocorrências observadas em uma população, sendo as pessoas desse grupo aptas ou não a trabalhar. Normalmente, ela é utilizada para aferir a mortalidade de grupo de aposentados, cuja causa do recebimento do benefício não seja consequente de invalidez e de pensionistas vitalícios dos quais não se sabe se são inválidos ou não.

Sendo assim, esta premissa retrata a influência da mortalidade dos assistidos (aposentados e pensionistas vitalícios) do grupo segurado na elaboração dos custos nos seguros sociais ou privados. Um recurso efetivo para medir esses custos é a tábua de mortalidade (ou tabela de mortalidade).

Por intermédio da tábua, a premissa de mortalidade geral é capaz de estimar a sobrevivência de assistidos sem ser por invalidez e dos beneficiários vitalícios e calcular o valor atual das despesas com o pagamento de aposentadorias não decorrentes de invalidez e de pensões por morte. A tábua de Mortalidade Geral também é utilizada como parâmetro para a conversão de saldos de conta de participante em renda de aposentadoria ou de pensão por morte em planos, que após a concessão do benefício, se convertem de plano de contribuição definida em planos de benefício definido, os quais são denominados de planos de contribuição variável pela legislação vigente.

Historicamente, o segmento de previdência complementar fechado no Brasil vem utilizando tábuas estrangeiras de mortalidade, tais como CSO/Commissioners Standard Ordinary Insurance, AT/Annuity Table18, GAM/Group Annuity Mortality e UP/Unisex Uninsured Pension, construídas a partir de observações dos contratos de seguros de vida e anuidades da população segurada das companhias de seguro e previdência sediadas nos Estados Unidos e mais recentemente passou a adotar tábuas elaboradas no Brasil conforme destacaremos mais adiante. Os fundos de pensão lançam mão dessas tábuas em decorrência da necessidade de estimar o comportamento da mortalidade de suas populações, especialmente de aposentados e pensionistas vitalícios.

Em função de dados escassos ou nem sempre fidedignos dos registros populacionais, as entidades fechadas de previdência complementar tomam emprestadas essas tábuas americanas para estimação da probabilidade de sobrevivência, por conta, principalmente, da inexistência de tábuas de mortalidade aplicável ao mercado de previdência privada no Brasil.

Apenas mais recentemente a SUSEP reconheceu tabuas de mortalidade elaboradas com experiência brasileira do mercado de seguros e previdência aberta envolvendo produtos de sobrevivência tais como, SUSEP-EMSsb-v 2010, SUSEP-EMSsb-v 2015 e etc. Pela legislação brasileira em vigor, desde março de 2006, a tábua de sobrevivência mínima permitida para projeção de longevidade do assistido nos planos de previdência complementar fechada é a tábua AT-83.

Neste âmbito, é interessante ressaltar que o Brasil tem presenciado uma expressiva mudança demográfica. Segundo a publicação *Mudança Demográfica no Brasil no Início do Século XXI: Subsídios para as projeções da população do Brasil e das Unidades da Federação*, houve uma redução drástica de nascimentos nas últimas décadas, fenômeno observado em todo o mundo. A população jovem, de 15 a 29 anos, apresenta diminuição contínua de sua participação, enquanto a população de idosos será o segmento que mais crescerá no Brasil.

Sendo assim, é fundamental que as tábuas de mortalidade representem a real mortalidade à qual o grupo segurador está exposto. A utilização de tábuas de mortalidade incompatíveis com

os riscos que tentam expressar pode minorar ou majorar reservas matemáticas e custos de planos de benefícios, gerando, portanto, desequilíbrios estruturais que, por sua vez, dificultam a cobertura dos compromissos ao longo dos anos futuros.

Portanto, tendo em vista as mudanças recentes e contínuas na dinâmica da demografia brasileira, assim como a importância da adequação de uma tábua de mortalidade condizente com a população de um plano de previdência, de modo que as reservas matemáticas sejam corretamente mensuradas, é necessário um estudo de aderência de tábuas biométricas. Uma maneira de realizar um estudo de aderência da hipótese de mortalidade é através do método Montello, que será apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 3

Aspectos Fundamentais da Teoria Demográfica aplicável às diversas Populações de Fundos de Pensão

3.1 Análise Técnica sobre Mortalidade de Ativos

Uma pessoa que se torna Participante, com x anos de idade de um Plano de Benefício Definido de um Fundo de Pensão, cuja idade prevista para sua aposentadoria normal é de $r > x$ anos, está sujeita a percorrer um dos seguintes caminhos alternativos a seguir apresentados:

Caminho 1: Morrer em Atividade entre as idades de x e r anos; ou

Caminho 2: Entrar em Invalidez entre as idades de x e r anos; ou

Caminho 3: Optar por se desligar do Plano entre as idades de x e r anos em decorrência de ter sido exonerado da empresa patrocinadora; ou

Caminho 4: Se aposentar normalmente por alcançar a idade de r anos exigida para entrar em gozo de aposentadoria normal.

Isto significa que entre as idades de x e r anos, ele está sujeito a múltiplos decrementos (que correspondem às alternativas de saída dessa população de Participantes), ou seja:

Decremento 1: Morte em Atividade;

Decremento 2: Entrada em Invalidez;

Decremento 3: Exoneração;

Decremento 4: Entrada em Aposentadoria Normal, que corresponde ao Decremento Final, ou seja, se entre as idades de x e r anos não “Morrer em Atividade”, não “Entrar em Invalidez” ou sair do Plano em consequência de ser “Exonerado” da empresa Patrocinadora, ele deixará a condição de Participante Ativo por entrar em gozo de aposentadoria normal.

Assim, as seguintes situações se apresentam para o Participante Ativo:

- i. Deixar a atividade por entrar em invalidez, passando à condição de aposentado por invalidez e, a partir de então, o único decremento aplicável passa a ser a morte como inválido;
- ii. Deixar a atividade por entrar em gozo de aposentadoria normal por alcançar, na condição de Participante Ativo, à idade normal de aposentadoria de r anos e, a partir de então, o único decremento aplicável passa a ser a morte como aposentado normal¹ ;
- iii. Deixar a atividade em razão de sua exoneração da empresa patrocinadora, se desligando do Plano e, neste contexto, morrer ou se invalidar antes de alcançar a idade normal de aposentadoria de r anos, ou sobreviver à idade de r anos, são situações que não serão detectadas pelo Plano, já que ele perdeu, com a exoneração, a condição de Participante do Plano;
- iv. Deixar a atividade por morrer na condição de Participante Ativo, sendo que tal Mortalidade de Ativos sofre influência dos demais decrementos, já que, aqueles que se invalidam ou são exonerados ou se aposentam normalmente, caso faleçam após a ocorrência desses eventos, não são registrados como Morte de Ativos.

¹ 1: Após entrar em gozo de aposentadoria normal, o Participante Aposentado pode vir a se tornar inválido e, tal fato, em geral, não tem como ser detectado pelo Fundo de Pensão. Portanto, na População de Aposentados Normais existirão Participantes que não estão na condição de inválidos, mas também existirão alguns Participantes que se tornaram inválidos após terem se aposentado normalmente. Neste contexto, é aplicável a Mortalidade Geral (que inclui a Mortalidade de Aposentados Normais, inclusive daqueles que, após aposentados, se invalidaram).

Fica bem claro que a População de Aposentados Normais, constituída a partir de Participantes Ativos, que alcançam a idade de r anos, com o passar do tempo, tem parte dos seus integrantes alcançados pela invalidez, deve ser aplicada uma Tábua de Mortalidade Geral (População Geral é aquela constituída por pessoas não inválidas e inválidas).

Fica bem claro, também, que para a População de Aposentados por Invalidez, constituída tão somente por Participantes que deixaram a Atividade em decorrência de entrada em invalidez, deve ser aplicada uma Tábua de Mortalidade de Inválidos.

Finalmente, fica bem claro, para a População de Ativos, por ser constituída tão somente por pessoas capazes de exercer atividade laborativa (portanto, não incluindo qualquer pessoa que esteja inválida), não há como se aplicar a mesma Tábua de Mortalidade aplicável à População Geral, mas sim uma Tábua específica para essa População Ativa. Consequentemente, utilizar a experiência de Mortalidade de Ativos no processo de seleção da Tábua de Mortalidade Geral, a ser aplicada aos Participantes Aposentados Normais (Aposentados sem ser por invalidez), não corresponde a um adequado procedimento técnico, já que subestima o nível da Mortalidade a que estão sujeitos esses Aposentados Normais, visto que, conforme já foi dito, coexistem pessoas válidas com pessoas que, após entrarem em gozo de Aposentadoria Normal, se tornaram inválidas.

Assim, considerar a população de ativos para selecionar a Mortalidade aplicável à fase da vida em que ocorre o gozo de Aposentadoria Normal é um equívoco equivalente ao de se considerar a Mortalidade no primeiro ano de vida para selecionar a Mortalidade que ocorrerá, na infância, após o primeiro ano de vida.

Por outro lado, considerando a existência de Participantes Ativos que, ao longo de cada ano, deixam a atividade pelos motivos supracitados e que, caso faleçam até o final do mesmo ano, não são registrados como casos de Mortalidade de Ativos, a literatura atuarial desenvolveu para essa situação o Método de Hamza (vide ANEXO I), como uma forma alternativa para se projetar a Mortalidade de Ativos, a partir das Tábuas utilizadas de Mortalidade Geral, de Mortalidade de Inválidos e de Entrada em Invalidez, que sejam compatíveis entre si.

Em realidade, a Mortalidade de Ativos, diferente da Mortalidade dos Aposentados Normais e de Aposentados por Invalidez não tem como foco de risco a longevidade (sobrevivência até as idades mais avançadas de vida humana). Isto se dá já que a ocorrência de morte ao longo da fase ativa, em Planos de Benefícios com cobertura de Pensão de Morte (que é o caso geral dos Planos de Benefício Definido das Entidades Fechadas de Previdência Complementar), da mesma forma que a entrada em invalidez, representa uma concessão antecipada de benefício, cujo impacto, muitas vezes, representa agravamento no custo desses Planos.

Deve-se destacar, inclusive, que nas Demonstrações Atuariais (DA), no campo das Hipóteses Biométricas, não existe a abertura para a indicação da Tábua de Mortalidade de Ativos, bem como, conforme já destacado, a Mortalidade Geral só deve ser aplicada a Populações constituídas tanto de pessoas inválidas quanto válidas, ou seja, a Mortalidade Geral não é aplicável à População de Ativos e, nesse contexto, a adoção do Método de Hamza, aqui referido, é uma forma, indicada pela Teoria Demográfica, para se chegar à Mortalidade de Ativos.

3.2 Análise Técnica sobre Mortalidade de Assistidos Aposentados por Invalidez

A obtenção de experiência estatística em grande número em Planos de Benefícios Definidos de Entidades Fechadas de Previdência Complementar para se analisar o nível de mortalidade de Participantes Assistidos Aposentados por Invalidez é ainda mais difícil que a obtenção de experiência estatística em grande número para se analisar o nível de mortalidade de Participantes Assistidos sem ser por Invalidez e de Pensionistas Vitalícios Assistidos. Isto, por si só, representa, em geral, um complicador projetar o nível de mortalidade futura dessa população de Assistidos Aposentados por Invalidez em função da experiência dos anos recentes (últimos 5 a 10 anos).

À questão relevante apresentada anteriormente, se soma a questão que decorre do fato de que, na População Inválida, a teoria populacional, dentro da lógica associada à Entrada em Invalidez, indica que a Mortalidade de Inválidos é significativamente superior nos primeiros momentos imediatamente subsequentes à ocorrência do acidente ou da doença que causou a Entrada em Invalidez. Porém, passados esses primeiros momentos, a Mortalidade de Inválidos tende a se aproximar à Mortalidade Geral (ou seja, à Mortalidade relacionada a grupo constituído por pessoas tanto não inválidas, quanto por pessoas inválidas), podendo inclusive, caso decorram muitos anos contados do momento da Entrada em Invalidez, a Mortalidade de Inválidos passar a ser inferior à Mortalidade Geral.

A razão da questão, aqui apresentada, é que, a partir do momento da Entrada em Invalidez, a pessoa que se invalida, em geral, passa a ter uma vida bem mais regrada, menos exposta a riscos e com cuidados médicos continuados e próximos, o que pode levar a que uma pessoa, de mesma idade, aposentada normalmente, venha a viver menos que uma pessoa aposentada por invalidez.

Também se deve ter em conta que, no grupo de pessoas aposentadas sem ser por invalidez, existem pessoas que, após terem entrado em gozo da aposentadoria, vieram a se tornar inválidas e, dessa forma, no grupo de Participantes Assistidos sem ser por Invalidez, existem pessoas tanto não inválidas, quanto inválidas, bem como, no grupo de Pensionistas Vitalícios Assistidos, é bem comum não se saber se seus componentes estão inválidos.

Neste contexto, à luz da Teoria Demográfica, a experiência acumulada na análise das Mortalidades associadas aos Participantes de Planos Fechados de Previdência Complementar, em seus diversos status, leva a que, na seleção de Tábua de Mortalidade de Inválidos mais adequada, considerando a reduzida experiência estatística existente, se guarde, por prudência atuarial, certa vinculação com o nível de Mortalidade Geral adotado. Neste sentido, em geral, se indica uma tábua da mesma família da Mortalidade Geral, só que com um nível de Mortalidade mais elevado. Por exemplo, considerando-se que a Tábua de Mortalidade Geral de um Plano de Benefícios Definido é a AT-2000 desagradada em 10%, à luz da Teoria Demográfica, a Tábua de

Mortalidade de Inválidos seria a AT-83 desagravada em 10% pode ser perfeitamente indicada como sendo adequada para representar a longevidade dos aposentados por invalidez.

Capítulo 4

Testes de Aderência para Tábuas de Mortalidade através do Método Montello

4.1 O Método Montello

Para a subpopulação de participantes aposentados sem ser por invalidez dos planos previdenciários, assim como para a subpopulação de beneficiários vitalícios destes planos, podemos medir a aderência de uma dada tábua de mortalidade através da comparação entre a reserva matemática esperada e efetiva num momento $t > 0$, conforme descrito abaixo:

i. Definições:

x é a idade de cada assistido sem ser por invalidez pelo Plano no momento $t = 0$ (momento base).

$(13 \cdot B_x)$ é o total anualizado do benefício de renda vitalícia de cada assistido sem ser por invalidez pelo Plano no momento no futuro $t > 0$ (momento base).

t é o ano decorrido desde o momento inicial $t = 0$ (desde o momento base).

$$a_y^{(12)} = \frac{N_y}{D_y} - \frac{13}{24}; N_y = \sum_{t=0}^{w-y-1} D_{y+t} \quad e D_{y+t} = v^{y+t} \cdot \ell_{y+t}, \text{ sendo: } v^y = (1+i)^{-y}$$

Onde $a_y^{(12)}$ é uma renda vitalícia postecipada fracionada mensalmente. (Vide glossário)

ii. Fórmula de cálculo das Reservas Efetivas:

$RE_t = (13 \cdot B_x) \cdot a_{x+t}^{(12)}$, para cada assistido sem ser por invalidez pelo Plano que tenha sobrevivido a idade $x + t$:

$\sum RE_t$ é, portanto, o total da Reserva Matemática Efetiva do Plano no momento $t > 0$.

iii. Fórmula de cálculo das Reservas Esperadas:

$\hat{RE}_t = (13 \cdot B_x) \cdot \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \cdot a_{x+t}^{(12)}$, para cada assistido sem ser por invalidez pelo Plano que estava vivo no momento $t = 0$ (momento base).

Onde $\frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$ é a probabilidade de a pessoa em idade x chegar com vida à idade $x+t$.

(Vide glossário).

$\sum \hat{RE}_t$ é, portanto o total da Reserva Matemática Esperada do Plano no momento $t > 0$.

OBSERVAÇÃO:

No caso de se adotar o mesmo Benefício Unitário para todos os Assistidos incluídos no Teste de Aderência, não é necessário utilizar $(13 \cdot B_x)$ no cálculo da Reserva Efetiva e da Reserva Esperada dos incisos **ii.** e **iii.** deste subitem 4.1.

iv. **Aderência da Tábua de Sobrevivência:**

Seja \mathbf{Ad}_t o índice de aderência da Tábua de Sobrevivência adotada à sobrevivência ocorrida entre o momento inicial 0 (zero) e o momento $t > 0$, então teremos que:

a) Se $\mathbf{Ad}_t = \frac{\sum \hat{RE}_t}{\sum RE_t} \geq 1$, a Tábua de Sobrevivência dá cobertura à sobrevivência ocorrida

entre o momento 0 (zero) e o momento $t > 0$; e

b) Se $\mathbf{Ad}_t = \frac{\sum \hat{RE}_t}{\sum RE_t} < 1$, a Tábua de Sobrevivência não dá cobertura à sobrevivência

ocorrida entre o momento 0 (zero) e o momento $t > 0$.

NOTA:

Apresentamos a seguir o Demonstrativo de que se adotando a Taxa Real de Juros de 0% (zero por cento) ao ano no cálculo da anuidade “ $a_y^{(12)}$ ”, seu valor é praticamente igual ao valor da Vida Média completa “ e_x^0 ” (também conhecida como “Expectativa de Vida”):

Considerando a taxa de juros 0%, temos:

$$a_y^{(12)} = \frac{N_y}{D_y} - \frac{13}{24}$$

onde

$$N_y = \sum_{t=0}^{w-y-1} D_{y+t}$$

sendo

$$D_{y+t} = v^{y+t} \times l_{y+t}$$

$$v = (1 + i)^{-1}, \text{ se } i = 0\%, \text{ então } v = 1$$

$$N_{y;0\%} = \sum_{t=0}^{w-y-1} D_{y+t;0\%} = \sum_{t=0}^{w-y-1} v^{y+t} l_{y+t} = \sum_{t=0}^{w-y-1} l_{y+t} \quad , e \quad D_{y;0\%} = v^y \times l_y = l_y$$

Logo,

$$\frac{N_y}{D_y} = \frac{\sum_{t=0}^{w-y-1} l_{y+t}}{l_y}$$

Desenvolvendo as fórmulas da Vida Média Completa, temos:

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}, \quad \text{onde} \quad T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \dots + L_{w-1}, \quad e L_y \cong \frac{1}{2} \times (l_y + l_{y+1})$$

$$T_x = \frac{1}{2} \times (l_x + l_{x+1}) + \frac{1}{2} \times (l_{x+1} + l_{x+2}) + \dots + \frac{1}{2} \times (l_{w-1} + l_w)$$

$$T_x = \frac{1}{2} \times l_x + [l_{x+1} + l_{x+2} + \dots + l_{w-1}]$$

$$e_x^0 = \frac{\frac{1}{2} \times l_x + \sum_{t=1}^{w-x-1} l_{x+t}}{l_x} = \frac{\sum_{t=1}^{w-x-1} l_{x+t}}{l_x} + \frac{1}{2} = e_x + \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$a_{x;0\%}^{(12)} = \frac{\sum_{t=0}^{w-x-1} l_{x+t}}{l_x} - \frac{13}{24} = \frac{l_x + \sum_{t=1}^{w-x-1} l_{x+t}}{l_x} - \frac{13}{24}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{w-x-1} l_{x+t}}{l_x} + \frac{24}{24} - \frac{13}{24} = \frac{\sum_{t=1}^{w-x-1} l_{x+t}}{l_x} + \frac{11}{24} = e_x + \frac{11}{24} \cong e_x^0$$

Já que, como vimos,

$$e_x^0 = e_x + \frac{1}{2} = e_x^0 + \frac{12}{24}$$

E, assim,

$$e_x^0 - a_{x;0\%}^{(12)} = \frac{1}{24} \cong 0,04167 \text{ anos (15 dias)}$$

Portanto, utilizando a Taxa Real de Juros de 0% (zero por cento) no ano, o Método Montello usa como peso as Expectativas de Vida.

NOTA: As fórmulas estão definidas no glossário na página 81.

4.2 Considerações Relevantes sobre o Método Montello

O denominado Método Montello, que está publicado nas págs. 122 a 123 e 140 a 141 do livro “A demografia dos Fundos de Pensão” de autoria de Ricardo Pena Pinheiro (que exerceu cargos importantes na SPC do MPS e na própria PREVIC), bem como integra a Tese de Doutorado desse mesmo autor, destinado a selecionar Tábua de Mortalidade, que tem o título de Riscos Demográficos e Atuariais nos Planos de Benefício Definido e de Contribuição Definida num Fundo de Pensão, tem merecido crescente aceitação, tanto do ponto de vista prático, quanto do ponto de vista acadêmico, por ter como foco a seleção de uma Tábua de Mortalidade que esteja adequada à cobertura da evolução das Provisões Matemáticas associadas com a sobrevivência.

A Provisão Matemática relativa a uma Renda Vitalícia corresponde ao Valor Atual de um compromisso associado à sobrevivência futura de um Assistido. Portanto, permite ponderar os riscos de sobrevivência com o Capital de risco representado por esse Valor Atual e, conseqüentemente, dá uma maior consistência qualitativa à seleção da tábua de mortalidade mais adequada para dar cobertura ao risco atuarial da sobrevivência.

Quanto à questão de que a influência da taxa real de juros/descontos adotada (diferente de 0%) poder ser um fator de distorção inerente ao denominado Método Montello, em realidade, como o Capital em Risco é função da referida taxa real, traz a vantagem de levar em consideração as efetivas variações dos valores dos riscos de sobrevivência associados às diferentes idades. Utilizando taxa real de juros/desconto de 5% ao ano (situação mais geral) e de 0% ao ano (situação extrema), a diferença de resultados é quase nenhuma.

A grande vantagem do Método Montello é a de levar em consideração o Capital de Risco, ou seja, a Reserva Matemática associada à longevidade durante a fase de recebimento de benefício de prestação continuada, que é a fase em que realmente tem sentido a questão da longevidade. Deve-se destacar que, quando se utiliza, na aplicação do Método Montello, a Taxa real de juros/descontos de 0% ao ano para avaliar a Reserva Matemática, se está utilizando o peso

das respectivas expectativas de vida no processo de seleção da Tábua de Mortalidade adequada à longevidade da população de assistidos considerados, o que é o maior diferencial desse Método em relação aos demais métodos utilizados nesse processo de seleção.

Conforme já destacamos anteriormente, a Teoria Demográfica, ao tratar da diferença entre Mortalidade Geral, Mortalidade de Inválidos e Mortalidade de Ativos e as restrições ao uso da experiência de mortes em atividade na seleção de Tábua de Mortalidade Geral a ser aplicada exclusivamente aos Participantes Assistidos (exclusive os aposentados por Invalidez), dá sustentação à validade dos procedimentos apresentados nessa monografia. De fato, a Teoria Demográfica, indica que a experiência da morte/sobrevivência de pessoas em atividade, num modelo multidecremental, abrangendo faixas etárias inferiores à faixa etária dos aposentados sem ser por invalidez, não deve ser usada na seleção da mortalidade geral aplicável à população desses assistidos, inclusive porque, ao longo de grande parte das idades de atividade, a causa relevante das mortes deriva de causas acidentais, enquanto que, ao longo da fase de gozo de Aposentadoria não decorrente de Invalidez, a causa mais relevante das mortes deriva de causas naturais. Portanto, a conclusão de testes que utilizam a massa de participantes ativos, junto com a massa dos assistidos sem ser por invalidez, para a seleção da Tábua de Mortalidade adequada para representar a mortalidade desses assistidos é seguramente inadequada.

Capítulo 5

Aplicação do Método Montello

5.1 Introdução

Neste capítulo vamos mostrar os resultados da aplicação do método Montello em uma base de dados reais e avaliar resultado do teste de aderência entre os anos de 2011 a 2015. Foram selecionados os aposentados não inválidos do plano BD (Benefício Definido) e os pensionistas vitalícios provenientes de empresas do setor de energia do Nordeste e Sul/Sudeste do Brasil.

Primeiramente, analisaremos as duas massas separadamente e logo em conjunto, para comparar resultados locais com o global.

Temos cinco massas fechadas para cada região:

- i. Primeira fechada em 31/12/2005 com evolução até 31/12/2010
- ii. Segunda fechada em 31/12/2006 com evolução até 31/12/2011
- iii. Terceira fechada em 31/12/2007 com evolução até 31/12/2012
- iv. Quarta fechada em 31/12/2008 com evolução até 31/12/2013
- v. Quinta fechada em 31/12/2009 com evolução até 31/12/2014

O estudo avalia a evolução de cada massa fechada ao longo de cinco anos, de forma que haja um tempo significativo de exposição dos assistidos ao risco de morte. No final comparamos o resultado da reserva esperada e a reserva efetiva para verificar a aderência de cada tábua de mortalidade. Neste teste foram utilizadas as seguintes tábuas de mortalidade:

- i. AT-83 (masculina)
- ii. AT-2000 (masculina)
- iii. AT-2000 (masculina) desagravada em 10%
- iv. SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)
- v. SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)
- vi. SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%
- vii. SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%

Os estudos serão feitos de duas formas, uma será aplicando um Benefício Unitário (de R\$ 1,00) para cada participante e a outra usando o Benefício Efetivo de cada participante, sendo que, em todos os casos, se estará adotando a Taxa Real de Juros de 0% (zero por cento) ao ano nos cálculos dos “ $a_y^{(12)}$ ”. Dessa forma, teremos resultados que nos mostrarão a tábua mais adequada para cada população tomando os benefícios como pesos associados ao peso da expectativa de vida de cada participante/pensionista vitalício assistido e a outra estará medindo a mortalidade geral da massa considerada em relação à tábua considerada tomando tão somente o peso da expectativa de vida de cada participante/pensionista vitalício assistido.

5.2 Empresas do Nordeste

5.2.1 Benefício Unitário

Comparando-se a Soma das Expectativas de Vida projetadas para o final do período de 5 anos dos Participantes assistidos sem ser por Invalidez e dos Pensionistas Vitalícios Assistidos existentes em cada uma das massas fechadas de dados provenientes de empresas do Nordeste e a Soma das Expectativas de Vida relativa a essas mesmas pessoas ao final do período de 5 anos de exposição ao risco de morte, isto é, considerando aquelas pessoas que continuavam, ao final dos respectivos quinquênios, vivas, obtém-se os seguintes resultados:

GRÁFICO 5.1: Tabela de Resultados da Mortalidade Geral das empresas do Nordeste usando o Benefício Unitário

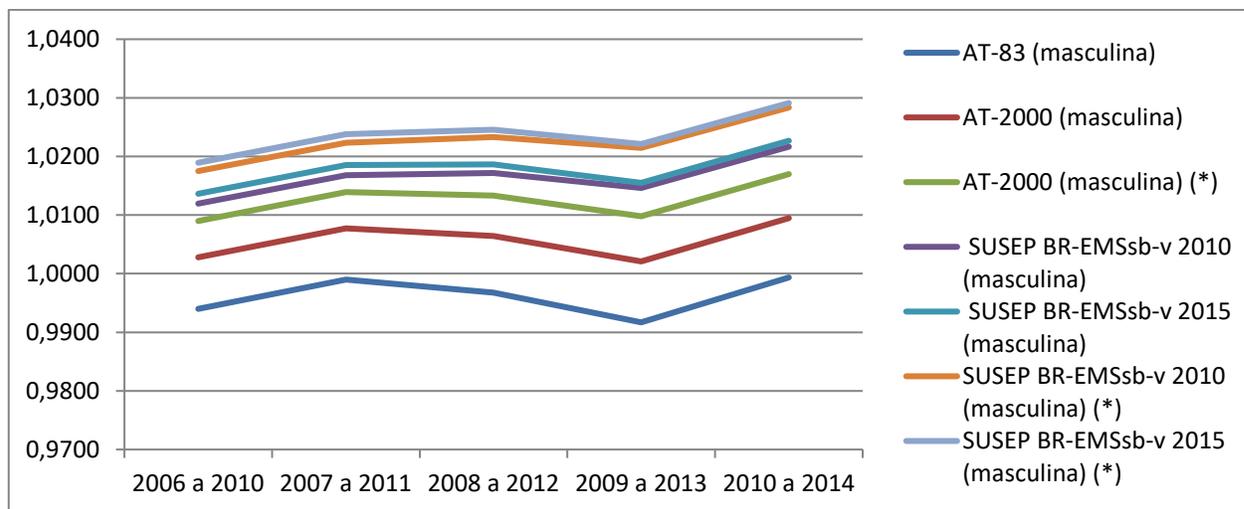
Tábua	AT-83 (masculina)	AT-2000 (masculina)	AT-2000 (masculina) (*)	SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) (*)	SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) (*)
2006 a 2010	0,9940	1,0028	1,0090	1,0120	1,0136	1,0175	1,0189
2007 a 2011	0,9990	1,0078	1,0139	1,0168	1,0185	1,0223	1,0238
2008 a 2012	0,9967	1,0064	1,0133	1,0172	1,0187	1,0233	1,0246
2009 a 2013	0,9917	1,0021	1,0098	1,0146	1,0155	1,0215	1,0221
2010 a 2014	0,9994	1,0095	1,0170	1,0217	1,0227	1,0284	1,0291
μ (**)	0,9962	1,0057	1,0126	1,0164	1,0178	1,0226	1,0237

(*) desgravada em 10%.

(**) média dos testes de aderência dos cinco quinquênios.

Vide APÊNDICE I dos resultados do Nordeste detalhados dos quinquênios estudados

GRÁFICO 5.2: Análise dos Resultados da Mortalidade Geral das empresas do Nordeste usando o Benefício Unitário



(*) desagravada em 10%.

Baseando-se nas médias dos testes de aderência feitos em cada massa de dados das empresas do Nordeste verifica-se que a Tábua de Mortalidade AT-2000 (masculina) é a que apresenta em média uma Soma das Expectativas de Vida Esperadas (*) projetadas para o final do quinto ano de teste superior e mais próxima da Soma das Expectativas de Vida (*) da massa remanescente no último ano de evolução, correspondendo ao Índice de Aderência superior e mais próximo de 1,0000 (no caso 1,0057). Isso indica que esta tábua é a mais adequada para avaliar o comportamento da Mortalidade Geral relativa a massa proveniente das empresas do Nordeste.

(*) No caso de Benefício Unitário, como se está adotando a Taxa Real de Juros de 0% (zero por cento) ao ano, comparar a Soma das Expectativas de Vida Esperadas com a Soma das Expectativas de Vida da massa remanescente no último ano da evolução apresenta um mesmo resultado que comparar a Reserva Esperada ($\sum \hat{RE}_t$) com a Reserva Efetiva ($\sum RE_t$), já que, “ $a_{y;0\%}^{(12)}$ ” é praticamente igual à “ e_x^0 ” (sendo “ e_x^0 ” a Expectativa de Vida de uma pessoa de idade y).

5.2.2 Benefício Efetivo

Comparando-se a Reserva Esperada (\hat{RE}_t) de Benefícios Concedidos dos Participantes Assistidos sem ser por Invalidez e dos Pensionistas Vitalícios Assistidos existentes em cada uma das massas fechadas de dados provenientes de empresas do Nordeste ao final do quinto ano de teste e a Reserva Efetiva (RE_t) de Benefícios Concedidos relativa a essas mesmas pessoas ao final do período de cinco anos de exposição ao risco de morte, isto é, considerando àquelas pessoas que continuavam, ao final dos respectivos quinquênios, vivas, obtém-se os seguintes resultados:

GRÁFICO 5.3: Tabela de Resultados da Mortalidade Geral das empresas do Nordeste usando o Benefício Efetivo

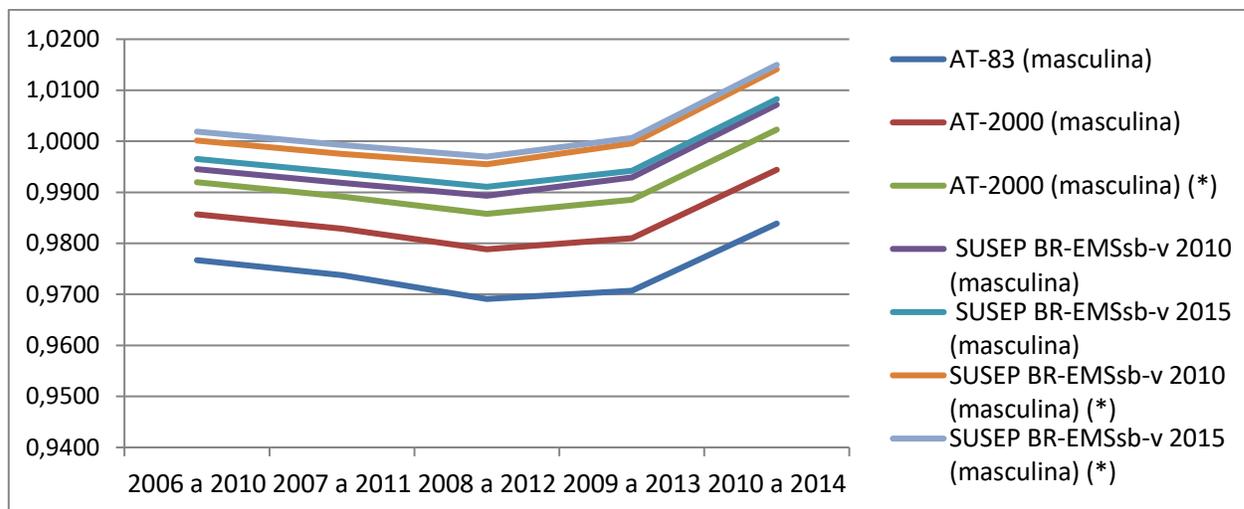
Tábua	AT-83 (masculina)	AT-2000 (masculina)	AT-2000 (masculina) (*)	SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) (*)	SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) (*)
2006 a 2010	0,9767	0,9857	0,9920	0,9946	0,9965	1,0002	1,0019
2007 a 2011	0,9738	0,9829	0,9892	0,9919	0,9939	0,9975	0,9993
2008 a 2012	0,9691	0,9788	0,9858	0,9893	0,9911	0,9955	0,9970
2009 a 2013	0,9707	0,9810	0,9885	0,9929	0,9942	0,9996	1,0006
2010 a 2014	0,9839	0,9944	1,0023	1,0072	1,0083	1,0141	1,0150
μ (**)	0,9748	0,9846	0,9916	0,9952	0,9968	1,0014	1,0028

(*) desagravada em 10%.

(**) média dos testes de aderência dos cinco quinquênios.

Vide APÊNDICE II dos resultados do Nordeste detalhados dos quinquênios estudados

GRÁFICO 5.4: Análise dos Resultados da Mortalidade Geral das empresas do Nordeste usando o Benefício Efetivo



(*) desagradada em 10%.

Baseando-se nas médias dos testes de aderência feitos em cada massa de dados das empresas do Nordeste verifica-se que a Tábua de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagradada em 10% é a que apresenta em média uma Reserva Esperada superior e mais próxima da Reserva Efetiva. Isso indica que esta tábua é a mais adequada para ser adotada na Avaliação Atuarial do Valor Atual dos Compromissos Futuros desses Planos de Benefícios Definidos ao longo da fase de duração dos correspondentes Benefícios de Aposentadoria Não Decorrente de Invalidez e de Pensão Vitalícia.

5.2.3 Interpretação dos Resultados

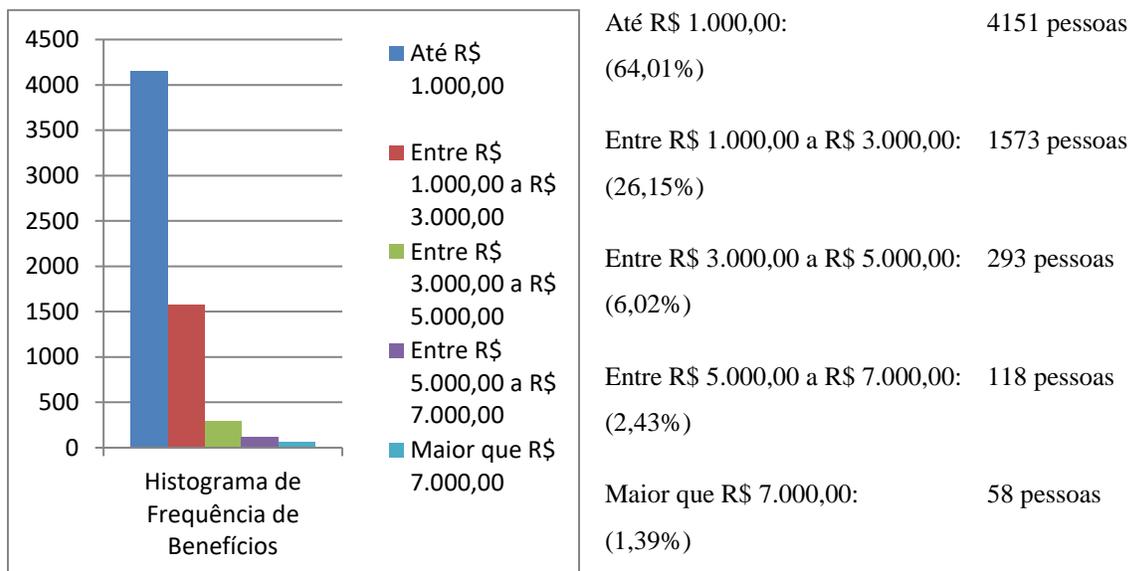
Pela análise puramente quantitativa dos resultados obtidos pelo teste de aderência pelo método Montello, a tábua mais adequada considerando o Benefício Unitário, conforme dissemos, é a Tábua de Mortalidade AT-2000 (masculina). Porém, considerando o Benefício Efetivo, a

tábua mais adequada é a Tábua de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%.

Um ponto a considerar, numa análise qualitativa (usando o Benefício Efetivo), é que nos últimos dois quinquênios (2009 a 2013 e 2010 a 2014) houve um aumento razoável no nível de aderência apurado, sendo que no quinquênio 2010 a 2014 várias outras tábuas, com menor nível de sobrevivência que a Tábua de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%, apresentaram com o Benefício Efetivo um índice de aderência superior a 1,0000 (um) e, dessa forma, considerando que, tomando por base o Benefício Unitário, todas as tábuas de mortalidade consideradas, exceto a Tábua de Mortalidade AT-83 (masculina), apresentaram, em média, um índice de aderência superior a 1,000, há indicativos para aceitar também as Tábuas de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) e SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) como adequadas para representar o nível de sobrevivência da população aqui considerada, de empresas do Nordeste do Brasil para fins de avaliação atuarial do Valor Atual dos Compromissos Futuros dos Benefícios pagos por sobrevivência.

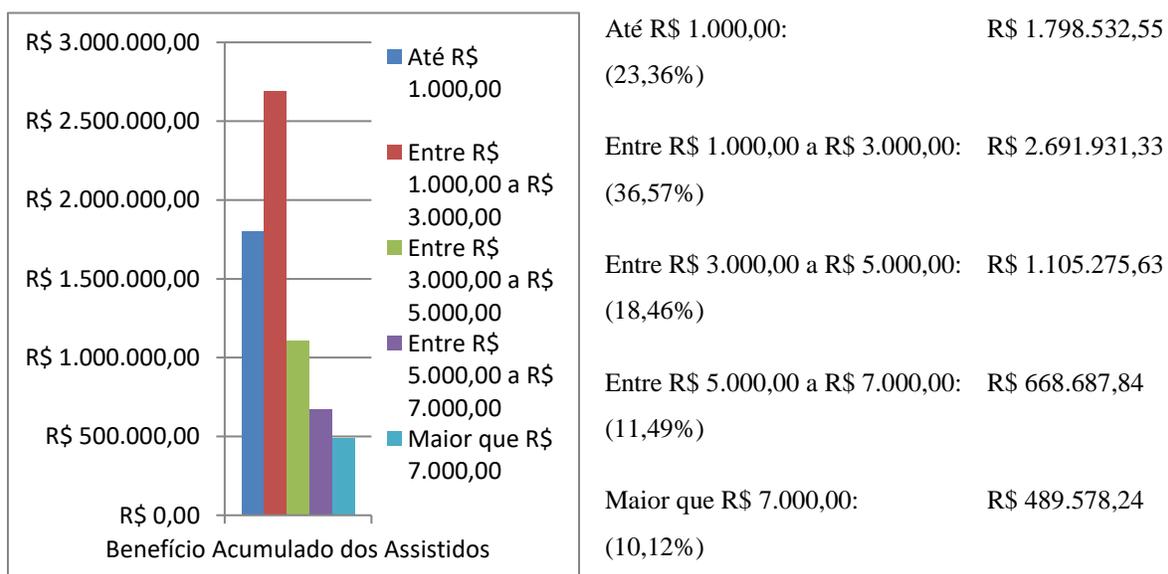
É importante destacar o fato de que a ponderação, com base no Benefício Efetivo, no processo de seleção da Tábua de Mortalidade (Sobrevivência) para se avaliar atuarialmente o Valor Atual dos Compromissos Futuros desses Planos de Benefícios Definidos ao longo da fase de duração dos correspondentes Benefícios de Aposentadoria Não Decorrente de Invalidez e de Pensão Vitalícia, exige uma massa de dados bem maior que a necessária quando se utiliza o Benefício Unitário (Benefício igual para todos), já que uma morte ou uma “não morte” de uma pessoa com elevado benefício tem o mesmo peso da morte ou da “não morte” de diversas pessoas de benefícios reduzidos, e neste contexto, em que o quantitativo de dados não é o ideal, os resultados obtidos utilizando-se o Benefício Unitário podem perfeitamente ser utilizados para a seleção da Tábua de Mortalidade (Sobrevivência) a ser adotada.

GRÁFICO 5.5: Histograma de Frequência de Benefícios dos Assistidos do Nordeste



O Gráfico 5.5 mostra a média da frequência de Assistidos em cada categoria de Benefício Efetivo nas massas iniciais de cada quinquênio. Podemos ver que a grande maioria tem um benefício menor que R\$ 3.000,00.

GRÁFICO 5.6: Benefício Acumulado por Categoria dos Assistidos do Nordeste



O Gráfico 5.6 mostra a média do Benefício Acumulado por categoria de Benefício Efetivo dos Assistidos nas massas iniciais de cada quinquênio. Nota-se que a influência daqueles que possuem um benefício mais elevado no total dos benefícios é muito maior em relação à frequência média de pessoas nessa categoria. Se compararmos a categoria “Maior que R\$ 7.000,00”, temos que 1,39% dos Assistidos representam 10,12% do Benefício Médio Acumulado, enquanto aqueles da categoria “Até R\$ 1.000,00” representam 64,01% do total em média dos Assistidos e apenas 23,36% no Benefício Médio Acumulado. Assim, fica claro que o impacto na Reserva, quando ocorre a morte ou “não morte” desses assistidos de maior Benefício Efetivo, é muito maior quando comparado com outro com benefício menor. Para contornar este problema, seria necessária uma massa de dados maior nas categorias de pessoas com benefício mais elevado, de forma que a Reserva Efetiva não seja tão influenciada pela morte ou “não morte” de um reduzido grupo de assistidos (Aposentados sem ser por Invalidez e Pensionistas Vitalícios).

5.3 Empresas do Sul/Sudeste

5.3.1 Benefício Unitário

Comparando-se a Soma das Expectativas de Vida projetadas para o final do período de 5 anos dos Participantes assistidos sem ser por Invalidez e dos Pensionistas Vitalícios Assistidos existentes em cada uma das massas fechadas de dados provenientes de empresas do Sul/Sudeste e a Soma das Expectativas de Vida relativa a essas mesmas pessoas ao final do período de cinco anos de exposição ao risco de morte, isto é, considerando aquelas pessoas que continuavam, ao final dos respectivos quinquênios, vivas, obtém-se os seguintes resultados:

GRÁFICO 5.7: Tabela de Resultados da Mortalidade Geral das empresas do Sul/Sudeste usando o Benefício Unitário

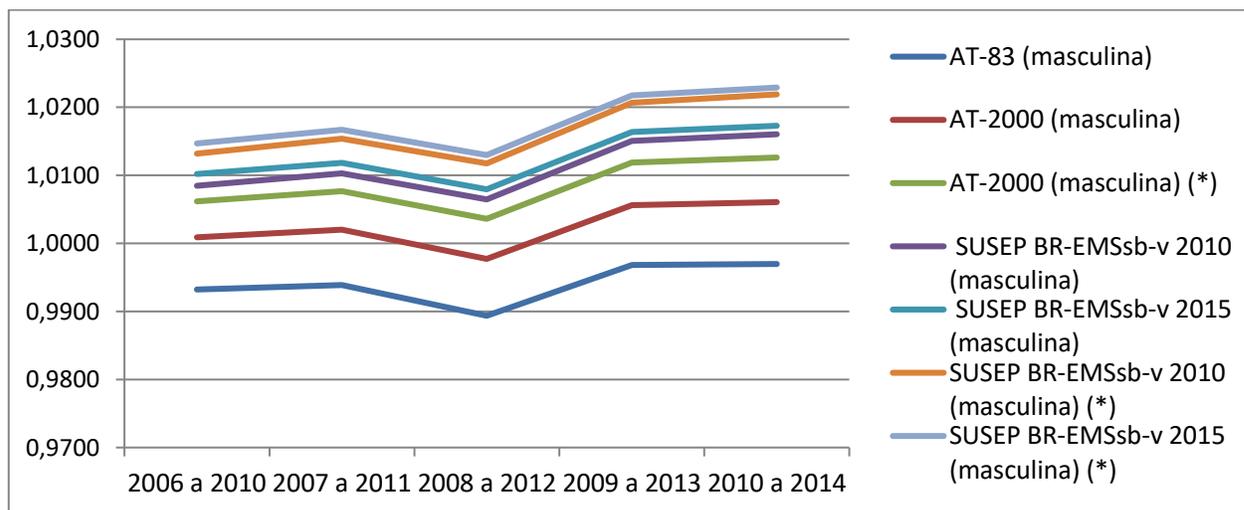
Tábua	AT-83 (masculina)	AT-2000 (masculina)	AT-2000 (masculina) (*)	SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) (*)	SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) (*)
2006 a 2010	0,9932	1,0009	1,0062	1,0085	1,0102	1,0132	1,0147
2007 a 2011	0,9939	1,0020	1,0077	1,0103	1,0118	1,0154	1,0167
2008 a 2012	0,9894	0,9977	1,0036	1,0065	1,0080	1,0118	1,0130
2009 a 2013	0,9968	1,0056	1,0119	1,0151	1,0164	1,0207	1,0218
2010 a 2014	0,9970	1,0061	1,0126	1,0160	1,0173	1,0219	1,0229
μ (**)	0,9941	1,0025	1,0084	1,0113	1,0127	1,0166	1,0178

(*) desgravada em 10%.

(**) média dos testes de aderência dos cinco quinquênios.

Vide APÊNDICE III dos resultados do Sul/Sudeste detalhados dos quinquênios estudados

GRÁFICO 5.8: Análise dos Resultados da Mortalidade Geral das empresas do Sul/Sudeste usando o Benefício Unitário



(*) desgravada em 10%.

Baseando-se nas médias dos testes de aderência feitos em cada massa de dados das empresas do Nordeste verifica-se que a Tábua de Mortalidade AT-2000 (masculina) é a que apresenta em média uma Soma das Expectativas de Vida Esperadas (*) projetadas para o final do quinto ano de teste superior e mais próxima da Soma das Expectativas de Vida (*) da massa remanescente no último ano de evolução, correspondendo ao Índice de Aderência superior e mais próximo de 1,0000 (no caso 1,0057). Isso indica que esta tábua é a mais adequada para avaliar o comportamento da Mortalidade Geral relativa a massa proveniente das empresas do Sul/Sudeste.

(*) No caso de Benefício Unitário, como se está adotando a Taxa Real de Juros de 0% (zero por cento) ao ano, comparar a Soma das Expectativas de Vida Esperadas com a Soma das Expectativas de Vida da massa remanescente no último ano da evolução apresenta um mesmo resultado que comparar a Reserva Esperada ($\sum \hat{RE}_t$) com a Reserva Efetiva ($\sum RE_t$), já que, “ $a_{y;0\%}^{(12)}$ ” é praticamente igual à “ e_x^0 ” (sendo “ e_x^0 ” a Expectativa de Vida de uma pessoa de idade y).

5.3.2 Benefício Efetivo

Comparando-se a Reserva Esperada (\hat{RE}_t) de Benefícios Concedidos dos Participantes Assistidos sem ser por Invalidez e dos Pensionistas Vitalícios Assistidos existentes em cada uma das massas fechadas de dados provenientes de empresas do Sul/Sudeste ao final do quinto ano de teste e a Reserva Efetiva (RE_t) de Benefícios Concedidos relativa a essas mesmas pessoas ao final do período de 5 anos de exposição ao risco de morte, isto é, considerando àquelas pessoas que continuavam, ao final dos respectivos quinquênios, vivas, obtém-se os seguintes resultados:

GRÁFICO 5.9: Tabela de Resultados da Mortalidade Geral das empresas do Sul/Sudeste usando o Benefício Efetivo

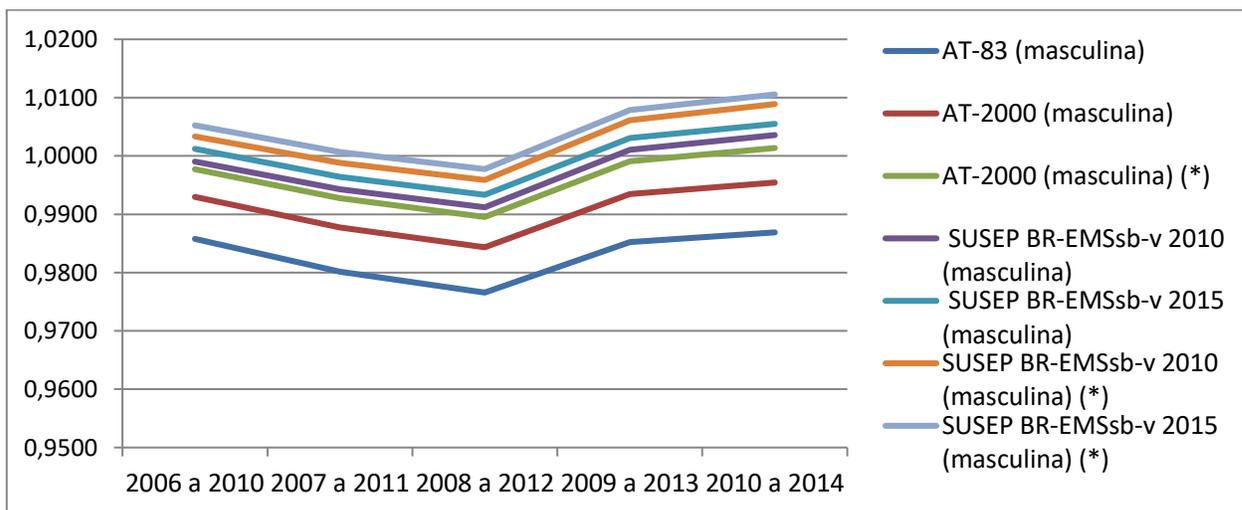
Tábua	AT-83 (masculina)	AT-2000 (masculina)	AT-2000 (masculina) (*)	SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) (*)	SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) (*)
2006 a 2010	0,9858	0,9930	0,9977	0,9990	1,0012	1,0033	1,0052
2007 a 2011	0,9802	0,9877	0,9928	0,9943	0,9964	0,9988	1,0007
2008 a 2012	0,9766	0,9843	0,9895	0,9912	0,9933	0,9959	0,9977
2009 a 2013	0,9852	0,9935	0,9991	1,0011	1,0031	1,0061	1,0079
2010 a 2014	0,9869	0,9954	1,0014	1,0036	1,0055	1,0089	1,0105
μ (**)	0,9829	0,9908	0,9961	0,9978	0,9999	1,0026	1,0044

(*) desgravada em 10%.

(**) média dos testes de aderência dos cinco quinquênios.

Vide APÊNDICE IV dos resultados do Sul/Sudeste detalhados dos quinquênios estudados

GRÁFICO 5.10: Análise dos Resultados da Mortalidade Geral das empresas do Sul/Sudeste usando o Benefício Efetivo



(*) desgravada em 10%.

Baseando-se nas médias dos testes de aderência feitos em cada massa de dados das empresas do Sul/Sudeste verifica-se que a Tábua de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10% é a que apresenta em média uma Reserva Esperada superior e mais próxima da Reserva Efetiva. Isso indica que esta tábua é a mais adequada para ser adotada na Avaliação Atuarial do Valor Atual dos Compromissos Futuros desses Planos de Benefícios Definidos ao longo da fase de duração dos correspondentes Benefícios de Aposentadoria Não Decorrente de Invalidez e de Pensão Vitalícia.

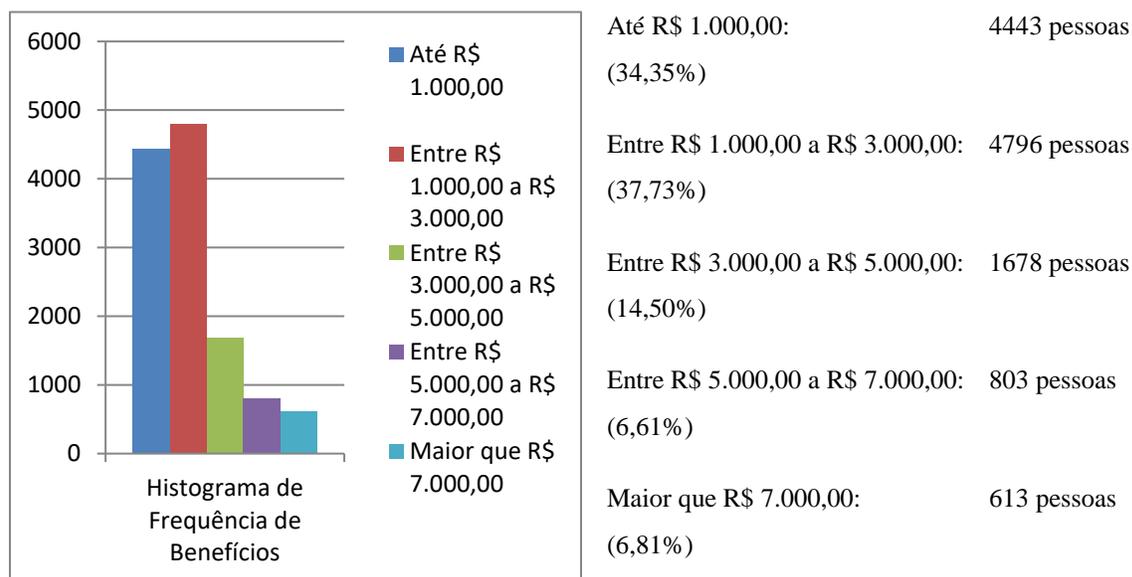
5.3.3 Interpretação dos Resultados

Pela análise puramente quantitativa dos resultados obtidos pelo teste de aderência pelo método Montello, a tábua mais adequada considerando o Benefício Unitário, conforme dissemos, é a Tábua de Mortalidade AT-2000 (masculina). Porém, considerando o Benefício Efetivo, a tábua mais adequada é a Tábua de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%.

Um ponto a considerar, numa análise qualitativa (usando o Benefício Efetivo), é que nos últimos dois quinquênios (2009 a 2013 e 2010 a 2014) houve um aumento razoável no nível de aderência apurado e várias outras tábuas, com menor nível de sobrevivência que a Tábua de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%, apresentaram com o Benefício Efetivo um índice de aderência superior a 1,0000 (um) e, dessa forma, considerando que, tomando por base o Benefício Unitário, todas as tábuas de mortalidade consideradas, exceto a Tábua de Mortalidade AT-83 (masculina), apresentaram, em média, um índice superior a 1,000, há indicativos para aceitar também as Tábuas de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) e SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) como adequadas para representar o nível de sobrevivência da população aqui considerada de empresas do Sul/Sudeste do Brasil para fins de avaliação atuarial do Valor Atual dos Compromissos Futuros dos Benefícios pagos por sobrevivência.

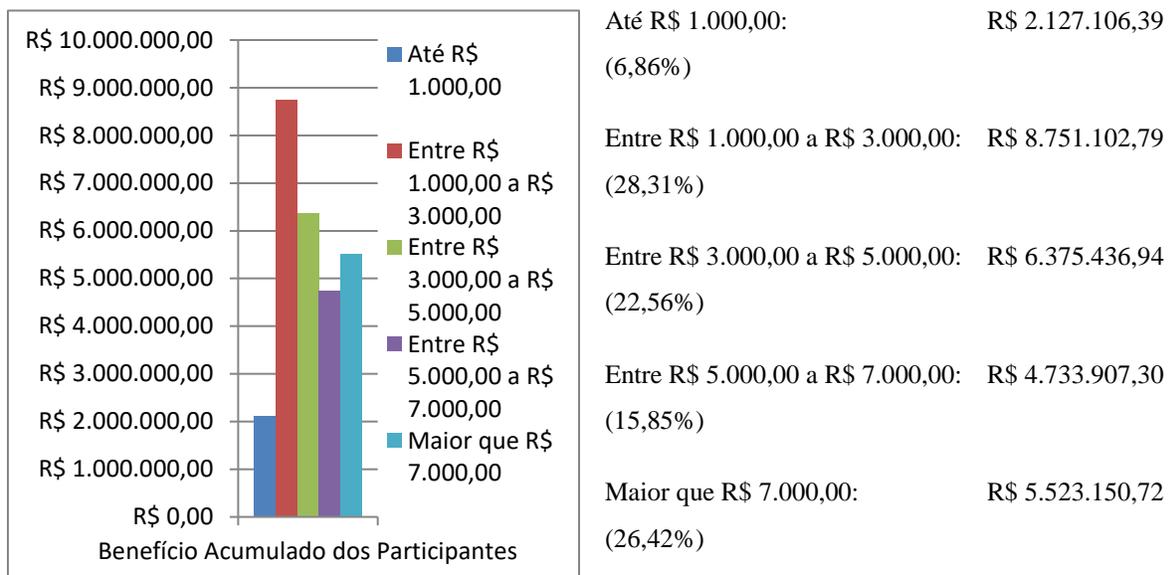
É importante destacar o fato de que a ponderação, com base no Benefício Efetivo, no processo de seleção da Tábua de Mortalidade (Sobrevivência) para se avaliar atuarialmente o Valor Atual dos Compromissos Futuros desses Planos de Benefícios Definidos ao longo da fase de duração dos correspondentes Benefícios de Aposentadoria Não Decorrente de Invalidez e de Pensão Vitalícia, exige uma massa de dados bem maior que a necessária quando se utiliza o Benefício Unitário (Benefício igual para todos), já que uma morte ou uma “não morte” de uma pessoa com elevado benefício tem o mesmo peso da morte ou da “não morte” de diversas pessoas de benefícios reduzidos, e neste contexto, em que o quantitativo de dados não é o ideal, os resultados obtidos utilizando-se o Benefício Unitário podem perfeitamente ser utilizados para a seleção da Tábua de Mortalidade (sobrevivência) a ser adotada.

GRÁFICO 5.11: Histograma de Frequência de Benefícios dos Assistidos do Sul/Sudeste



O Gráfico 5.11 mostra a média da frequência de Assistidos em cada categoria de Benefício Efetivo nas massas iniciais de cada quinquênio. Podemos ver que a grande maioria tem um benefício menor que R\$ 3.000,00.

GRÁFICO 5.12: Benefício Acumulado por Categoria dos Assistidos do Sul/Sudeste



O Gráfico 5.12 mostra a média do Benefício Acumulado por categoria de Benefício Efetivo dos Assistidos nas massas iniciais de cada quinquênio. Nota-se que a influência daqueles que possuem um benefício mais elevado no total dos benefícios é muito maior em relação à frequência média de pessoas nessa categoria. Se compararmos a categoria “Maior que R\$ 7.000,00”, temos que 6,81% dos Assistidos representam 26,42% do Benefício Médio Acumulado, enquanto aqueles da categoria “Até R\$ 1.000,00” representam 34,35% do total em média dos Assistidos e apenas 6,86% no Benefício Médio Acumulado. Assim, fica claro que o impacto na Reserva, quando ocorre a morte ou “não morte” desses assistidos de maior Benefício Efetivo, é muito maior quando comparado com outro com benefício menor. Para contornar este problema, seria necessária uma massa de dados maior nas categorias de pessoas com benefício mais elevado, de forma que a Reserva Efetiva não seja tão influenciada pela morte ou “não morte” de um reduzido grupo de assistidos (Aposentados sem ser por Invalidez e Pensionistas Vitalícios).

5.4 Resultado Global

5.4.1 Benefício Unitário

Comparando-se a Soma das Expectativas de Vida projetadas para o final do período de 5 anos dos Participantes assistidos sem ser por Invalidez e dos Pensionistas Vitalícios Assistidos existentes em cada uma das massas fechadas de dados provenientes de empresas do Nordeste e do Sul/Sudeste e a Soma das Expectativas de Vida relativa a essas mesmas pessoas ao final do período de cinco anos de exposição ao risco de morte, isto é, considerando aquelas pessoas que continuavam, ao final dos respectivos quinquênios, vivas, obtém-se os seguintes resultados:

GRÁFICO 5.13: Tabela de Resultados da Mortalidade Geral das empresas do Nordeste e do Sul/Sudeste usando o Benefício Unitário

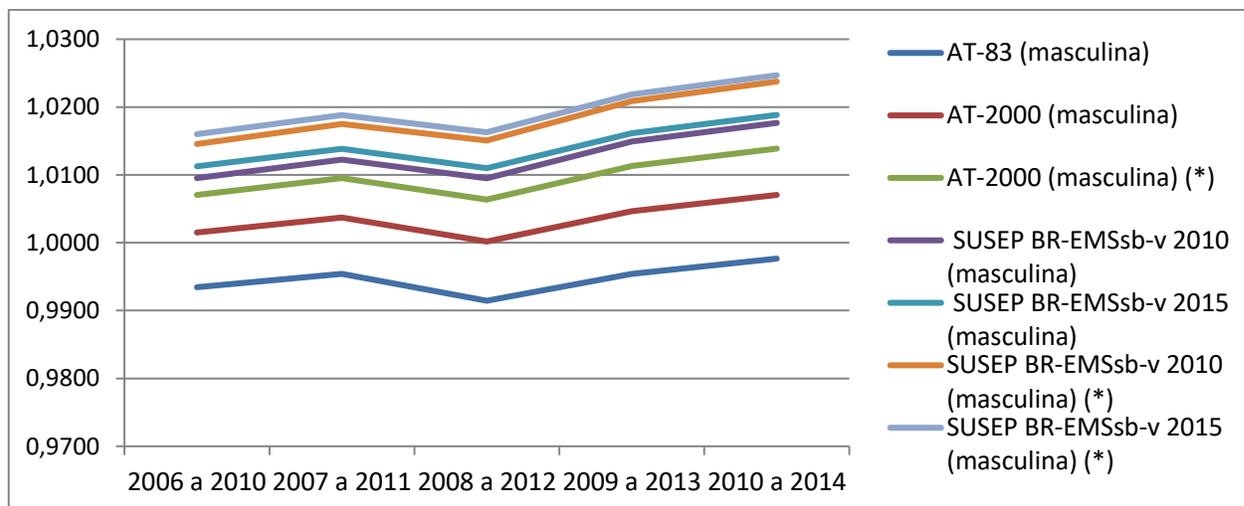
Tábua	AT-83 (masculina)	AT-2000 (masculina)	AT-2000 (masculina) (*)	SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) (*)	SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) (*)
2006 a 2010	0,9935	1,0015	1,0071	1,0096	1,0113	1,0146	1,0160
2007 a 2011	0,9954	1,0037	1,0095	1,0123	1,0139	1,0175	1,0188
2008 a 2012	0,9914	1,0002	1,0064	1,0095	1,0110	1,0150	1,0163
2009 a 2013	0,9954	1,0047	1,0113	1,0149	1,0162	1,0209	1,0219
2010 a 2014	0,9977	1,0070	1,0139	1,0177	1,0188	1,0238	1,0247
μ (**)	0,9947	1,0034	1,0096	1,0128	1,0142	1,0183	1,0195

(*) desagradada em 10%.

(**) média dos testes de aderência dos cinco quinquênios.

Vide APÊNDICE V dos resultados Globais detalhados dos quinquênios estudados

GRÁFICO 5.14: Análise dos Resultados da Mortalidade Geral das empresas do Nordeste e do Sul/Sudeste usando o Benefício Unitário



(*) desagradada em 10%.

Baseando-se nas médias dos testes de aderência feitos em cada massa de dados das empresas do Nordeste e Sul verifica-se que a Tábua de AT-2000 (masculina) é a que apresenta em média uma Soma das Expectativas de Vida Esperadas (*) projetadas para o final do quinto ano de teste superior e mais próxima da Soma das Expectativas de Vida (*) da massa remanescente no último ano de evolução, correspondendo ao Índice de Aderência superior a 1,0000 e mais próximo de 1,0000 (no caso 1,0034). Isso indica que esta tábua é a mais adequada para avaliar o comportamento da Mortalidade Geral relativa a massa proveniente das empresas do Nordeste e Sul/Sudeste.

(*) No caso de Benefício Unitário, como se está adotando a Taxa Real de Juros de 0% (zero por cento) ao ano, comparar a Soma das Expectativas de Vida Esperadas com a Soma das Expectativas de Vida da massa remanescente no último ano da evolução apresenta um mesmo resultado que comparar a Reserva Esperada ($\sum \hat{RE}_t$) com a Reserva Efetiva ($\sum RE_t$), já que, " $a_{y;0\%}^{(12)}$ " é praticamente igual à " e_x^0 " (sendo " e_x^0 " a Expectativa de Vida de uma pessoa de idade y).

5.4.2 Benefício Efetivo

Comparando-se a Reserva Esperada (\hat{RE}_t) de Benefícios Concedidos dos Participantes Assistidos sem ser por Invalidez e dos Pensionistas Vitalícios Assistidos existentes em cada uma das massas fechadas de dados provenientes de empresas do Nordeste e do Sul/Sudeste ao final do quinto ano de teste e a Reserva Efetiva (RE_t) de Benefícios Concedidos relativa a essas mesmas pessoas ao final do período de cinco anos de exposição ao risco de morte, isto é, considerando àquelas pessoas que continuavam, ao final dos respectivos quinquênios, vivas, obtém-se os seguintes resultados:

GRÁFICO 5.15: Tabela de Resultados da Mortalidade Geral das empresas do Nordeste e do Sul/Sudeste usando o Benefício Efetivo

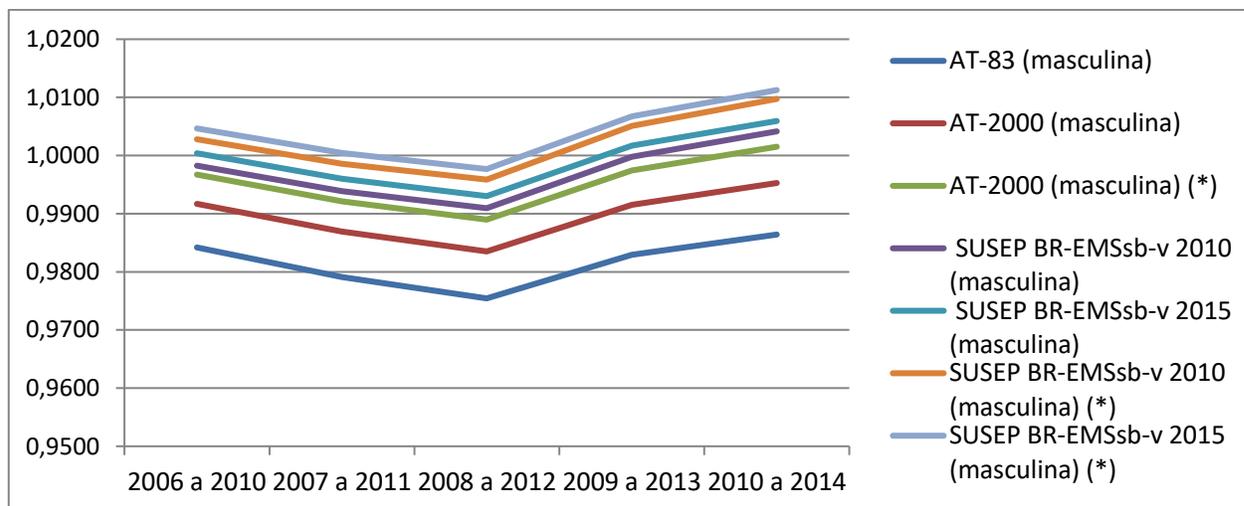
Tábua	AT-83 (masculina)	AT-2000 (masculina)	AT-2000 (masculina) (*)	SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) (*)	SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) (*)
2006 a 2010	0,9842	0,9917	0,9967	0,9983	1,0004	1,0028	1,0047
2007 a 2011	0,9791	0,9869	0,9922	0,9939	0,9960	0,9986	1,0004
2008 a 2012	0,9754	0,9835	0,9890	0,9909	0,9930	0,9959	0,9977
2009 a 2013	0,9830	0,9915	0,9974	0,9998	1,0017	1,0051	1,0067
2010 a 2014	0,9864	0,9953	1,0015	1,0042	1,0059	1,0097	1,0113
μ (**)	0,9816	0,9898	0,9954	0,9974	0,9994	1,0024	1,0041

(*) desagravada em 10%.

(**) média dos testes de aderência dos cinco quinquênios.

Vide APÊNDICE VI dos resultados Globais detalhados dos quinquênios estudados

GRÁFICO 5.16: Análise dos Resultados da Mortalidade Geral das empresas do Nordeste e do Sul/Sudeste usando o Benefício Efetivo



(*) desagradada em 10%.

Baseando-se nas médias dos testes de aderência feitos em cada massa de dados das empresas do Nordeste e do Sul/Sudeste verifica-se que a Tábua de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagradada em 10% é a que apresenta em média uma Reserva Esperada superior e mais próxima da Reserva Efetiva. Isso indica que esta tábua é a mais adequada para ser adotada na Avaliação Atuarial do Valor Atual dos Compromissos Futuros desses Planos de Benefícios Definidos ao longo da fase de duração dos correspondentes Benefícios de Aposentadoria Não Decorrente de Invalidez e de Pensão Vitalícia.

5.4.3 Interpretação dos Resultados

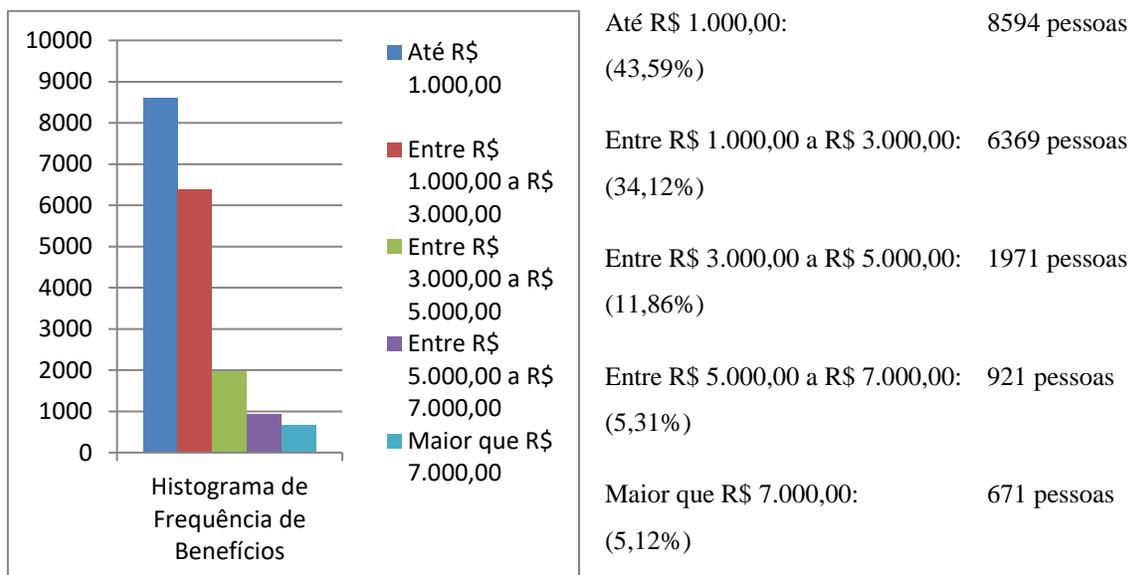
Pela análise puramente quantitativa dos resultados obtidos pelo teste de aderência pelo método Montello, a tábua mais adequada considerando o Benefício Unitário, conforme dissemos, é a Tábua de Mortalidade AT-2000 (masculina). Porém, considerando o Benefício Efetivo, a

tábua mais adequada é a Tábua de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%.

Um ponto a considerar, numa análise qualitativa (usando o Benefício Efetivo), é que nos últimos dois quinquênios (2009 a 2013 e 2010 a 2014) houve um aumento razoável no nível de aderência apurado, sendo que no quinquênio 2010 a 2014 várias outras tábuas, com menor nível de sobrevivência que a Tábua de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%, apresentaram com o Benefício Efetivo um índice de aderência superior a 1,0000 (um) e, dessa forma, considerando que, tomando por base o Benefício Unitário, todas as tábuas de mortalidade consideradas, exceto a Tábua de Mortalidade AT-83 (masculina), apresentaram, em média, índice de aderência superior a 1,000, há indicativos para aceitar também as Tábuas de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) e SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) como adequadas para representar o nível de sobrevivência da população aqui considerada de empresas do Nordeste e do Sul/Sudeste do Brasil para fins de avaliação atuarial do Valor Atual dos Compromissos Futuros dos Benefícios pagos por sobrevivência.

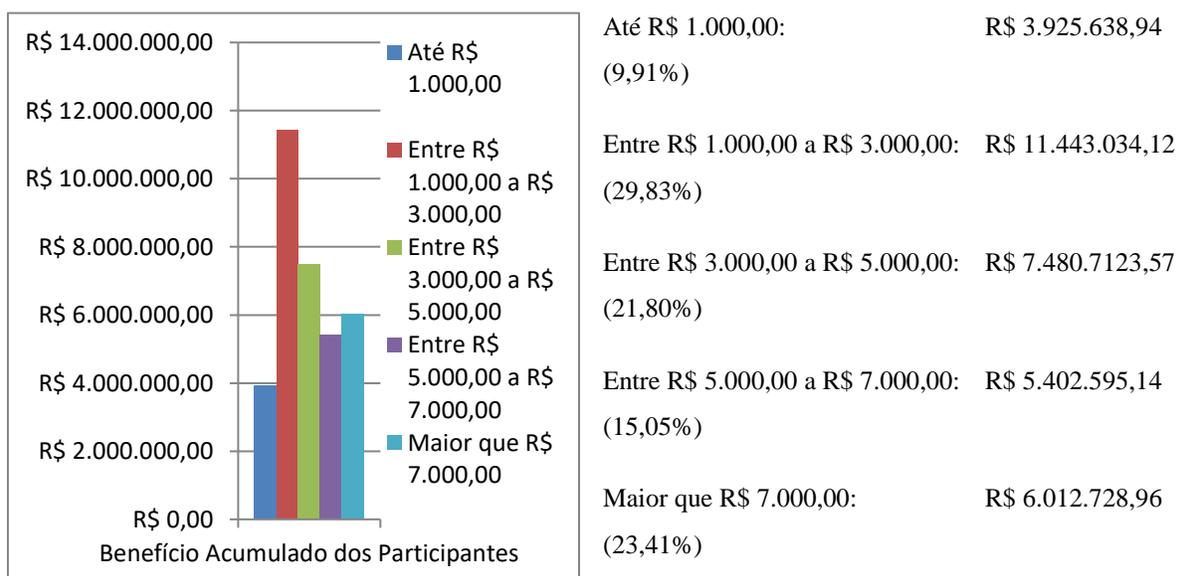
É importante destacar o fato de que a ponderação, com base no Benefício Efetivo, no processo de seleção da Tábua de Mortalidade (Sobrevivência) para se avaliar atuarialmente o Valor Atual dos Compromissos Futuros desses Planos de Benefícios Definidos ao longo da fase de duração dos correspondentes Benefícios de Aposentadoria Não Decorrente de Invalidez e de Pensão Vitalícia, exige uma massa de dados bem maior que a necessária quando se utiliza o Benefício Unitário (Benefício igual para todos), já que uma morte ou uma “não morte” de uma pessoa com elevado benefício tem o mesmo peso da morte ou da “não morte” de diversas pessoas de benefícios reduzidos, e neste contexto, em que o quantitativo de dados não é o ideal, os resultados obtidos utilizando-se o Benefício Unitário podem perfeitamente ser utilizados para a seleção de Tábua de Mortalidade (Sobrevivência) a ser adotada.

GRÁFICO 5.17: Histograma Global de Frequência de Benefícios dos Assistidos



O Gráfico 5.17 mostra a média da frequência de Assistidos em cada categoria de Benefício Efetivo nas massas iniciais de cada quinquênio. Podemos ver que a grande maioria tem um benefício menor que R\$ 3.000,00.

GRÁFICO 5.18: Benefício Global Acumulado por Categoria dos Assistidos



O Gráfico 5.18 mostra a média do Benefício Acumulado por categoria de Benefício Efetivo dos Assistidos nas massas iniciais de cada quinquênio. Nota-se que a influência daqueles que possuem um benefício mais elevado no total dos benefícios é muito maior em relação à frequência média de pessoas nessa categoria. Se compararmos a categoria “Maior que R\$ 7.000,00”, temos que 5,12% dos Assistidos representam 23,41% do Benefício Médio Acumulado, enquanto aqueles da categoria “Até R\$ 1.000,00” representam 43,59% do total em média dos Assistidos e apenas 9,91% no Benefício Médio Acumulado. Assim, fica claro que o impacto na Reserva, quando ocorre a morte ou “não morte” desses assistidos de maior Benefício Efetivo, é muito maior quando comparado com outro com benefício menor. Para contornar este problema, seria necessária uma massa de dados maior nas categorias de pessoas com benefício mais elevado, de forma que a Reserva Efetiva não seja tão influenciada pela morte ou “não morte” de um reduzido grupo de assistidos (Aposentados sem ser por Invalidez e Pensionistas Vitalícios).

Capítulo 6

Conclusão

Nesta aplicação do método Montello foram encontrados resultados similares para as bases de dados utilizadas (Empresas do Setor Energético do Nordeste e do Sul/Sudeste do Brasil). Para o teste de aderência utilizando o Benefício Unitário, obteve-se numa análise puramente quantitativa que a Tábua de Mortalidade AT-2000 (masculina) é a mais adequada em média, enquanto para o teste com o Benefício Efetivo, a Mortalidade Geral das massas seguia em média um comportamento mais similar a Tábua de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%.

É importante frisar que o teste, quando usado com o benefício real, estipula um peso relacionado ao valor do benefício, dessa forma a aderência do resultado está sujeito a uma oscilação maior do que os resultados usando o benefício unitário. Isso ocorre, pois quando um dos assistidos da massa de benefício alto “falece” ou “não falece” até o final do período considerado de exposição ao risco de morte o peso de sua Reserva (em particular) é maior em relação a Reserva Geral quando comparada à Reserva (em particular) de outro membro do grupo com um benefício menor.

A escolha de uma Tábua de Mortalidade para ser adotada na Avaliação Atuarial deve, sempre que possível, tomar em conta os dois testes, já que o Benefício Unitário permite uma análise mais quantitativa que é complementada por uma análise mais qualitativa derivada da utilização do Benefício Efetivo. Além disso, a experiência e o acompanhamento do atuário sobre

a evolução do nível de sobrevivência da massa estudada são fundamentais para avaliar a longevidade da massa ao longo dos anos.

Neste contexto, a prudência atuarial nos levou a concluir ser também adequado, considerando que, nos últimos dois quinquênios (2009 a 2013 e 2010 a 2014), os resultados do teste de aderência pelo método Montello, utilizando o Benefício Efetivo, apresentou um aumento no nível de aderência para todas as Tábuas de Mortalidade, sendo que, no quinquênio 2010 a 2014, tal nível ficou superior a 1,0000 para todas as Tábuas, exceto AT-83 (masculina) e AT-2000 (masculina), a adoção das Tábuas de Mortalidade SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) e SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina), seja para as empresas do setor energético do Nordeste, seja para as empresas do setor energético do Sul/Sudeste, ou seja, para o conjunto das empresas do setor energético do Nordeste e do Sul/Sudeste, aqui consideradas.

Bibliografia

BENELLI, Paloma M.; SIVIERO, Pamila C. L.; COSTA, Leonardo Henrique. Estudo Sobre as Premissas Atuariais no Âmbito dos Fundos de Pensão. R. Bras. Risco e Seg.. Rio de Janeiro, v.11, n.20, p.189-224, Out.2015.

BRASIL. Resolução MPS/CNPC Nº 18, de 28 de março de 2006 – DOU de 05/04/2006. Disponível em: <<http://sislex.previdencia.gov.br/paginas/72/MPS-CGPC/2006/18.htm>> . Acesso em: 05 dez. 2016.

ERVATTI, Leila R.; BORGES, Gabriel M.; JARDIM, Antonio P. *Mudança Demográfica no Brasil no Início do Século XXI*: Subsídios para as projeções da população. Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão. IBGE, 2015, 156 p.

MACHADO, Marcia R.; LIMA, Gerlando A. S. de; LIMA, Iran S. Evidenciação dos riscos atuariais nas demonstrações financeiras das seguradoras que operam previdência complementar aberta. In: 6º Congresso USP, São Paulo, 2006. Disponível em < <http://www.congressosp.fipecafi.org/web/>>: . Acesso em: 09/06/2016.

MONTELLO, J. Notas técnicas atuariais de benefícios programados e de risco. Rio de Janeiro, 2002.

_____. Aspectos Fundamentais da Teoria Demográfica Aplicável às Diversas Populações de Fundos de Pensão. Rio de Janeiro, 2013

PINHEIRO, Ricardo Pena. *A Demografia dos Fundos de Pensão*. Brasília: Ministério da Previdência Social. Secretaria de Políticas de Previdência Social, 2007. 292 p. – (Coleção Previdência Social. Série estudos; v. 24).

_____. *Riscos demográficos e atuariais nos planos de benefício definido e de contribuição definida num fundo de pensão*. Tese (Doutorado em Demografia) – Faculdade de Ciências Econômicas, Minas Gerais, 2005.

RODRIGUES, José Ângelo. *Gestão de risco atuarial*. São Paulo: Saraiva, 2008.

VILANOVA, W. *Matemática atuarial*. São Paulo: Pioneira; USP, 1969. 231p.

APÊNDICE

I. Resultados das Expectativas de Vida ao longo dos anos do teste utilizando o método Montello com benefício unitário das empresas do Nordeste

Resultados do teste para o ano de 2011

Massa fechada em 31/12/2005 de 6193 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2010 de 5686 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2011 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2005 para 2011 (**) $\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	94751,5	94182,2	0,99399
AT-2000 (masculina)	99490,2	99769,0	1,00280
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	104297,3	105234,7	1,00899
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	109431,8	110739,9	1,01195
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	106701,1	108156,1	1,01364
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	114335,8	116337,5	1,01751
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	111443,6	113553,0	1,01893

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2010 em 2011.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2005 para o ano de 2011.

Resultados do teste para o ano de 2012

Massa fechada em 31/12/2006 de 6227 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2011 de 5695 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2012 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2006 para 2012 (**) $\sum a_{x+5} * {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} * {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	95534,9	95437,1	0,99898
AT-2000 (masculina)	100297,2	101074,9	1,00775
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	105122,4	106585,6	1,01392
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	110291,4	112143,8	1,01680
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	107553,5	109546,4	1,01853
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	115213,6	117787,0	1,02234
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	112313,2	114987,1	1,02381

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2011 em 2012.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2006 para o ano de 2012.

Resultados do teste para o ano de 2013

Massa fechada em 31/12/2007 de 6325 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2012 de 5747 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2013 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2007 para 2013 (**) $\sum a_{x+5} * {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} * {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	90192,7	89899,3	0,99675
AT-2000 (masculina)	94804,3	95411,9	1,00641
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	99548,5	100875,2	1,01333
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	104700,1	106496,8	1,01716
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	101837,6	103738,7	1,01867
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	109539,4	112095,5	1,02334
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	106521,2	109139,6	1,02458

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2012 em 2013.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2007 para o ano de 2013.

Resultados do teste para o ano de 2014

Massa fechada em 31/12/2008 de 6272 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2013 de 5627 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2014 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2008 para 2014 (**) $\sum a_{x+5} * {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} * {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	85243,8	84536,1	0,99170
AT-2000 (masculina)	89656,9	89844,5	1,00209
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	94233,8	95157,2	1,00980
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	99237,0	100686,9	1,01461
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	96385,9	97882,0	1,01552
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	103905,5	106134,6	1,02145
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	100906,3	103138,9	1,02213

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2013 em 2014.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2008 para o ano de 2014.

Resultados do teste para o ano de 2015

Massa fechada em 31/12/2008 de 6614 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2013 de 5912 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2015 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2009 para 2015 (**) $\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	91127,4	91068,8	0,99936
AT-2000 (masculina)	95794,4	96702,4	1,00948
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	100619,5	102328,9	1,01699
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	105890,9	108185,1	1,02167
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	102903,5	105236,7	1,02267
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	110812,6	113954,4	1,02835
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	107667,7	110802,8	1,02912

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2014 em 2015.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2009 para o ano de 2015.

II. Resultados das Reservas Efetiva e Esperada do teste de aderência usando o método Montello com o benefício efetivo ao longo dos anos das empresas do Nordeste

Resultados do teste para o ano de 2011

Massa fechada em 31/12/2005 de 6193 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2010 de 5686 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Esperada (RÊt) (em R\$)	Reserva Efetiva (REt) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 1.299.513.024,42	R\$ 1.330.552.218,23	0,97667
AT-2000 (masculina)	R\$ 1.378.429.446,10	R\$ 1.398.443.914,28	0,98569
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.456.039.581,84	R\$ 1.467.825.637,96	0,99197
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 1.535.287.150,31	R\$ 1.543.697.762,44	0,99455
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 1.497.769.516,36	R\$ 1.502.967.403,19	0,99654
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.614.754.421,10	R\$ 1.614.473.681,48	1,00017
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.574.440.680,94	R\$ 1.571.461.046,19	1,00190

Resultados do teste para o ano de 2012

Massa fechada em 31/12/2006 de 6227 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2011 de 5695 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Esperada (RÊt) (em R\$)	Reserva Efetiva (REt) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 1.354.142.741,77	R\$ 1.390.586.314,89	0,97379
AT-2000 (masculina)	R\$ 1.436.559.586,03	R\$ 1.461.610.875,49	0,98286
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.517.721.331,72	R\$ 1.534.297.918,69	0,98920
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 1.601.015.427,83	R\$ 1.614.135.688,33	0,99187
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 1.561.455.673,14	R\$ 1.571.096.471,84	0,99386
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.684.120.590,59	R\$ 1.688.280.399,03	0,99754
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.641.642.385,90	R\$ 1.642.853.990,71	0,99926

Resultados do teste para o ano de 2013

Massa fechada em 31/12/2007 de 6325 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2012 de 5747 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Esperada (RÊt) (em R\$)	Reserva Efetiva (REt) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 1.370.685.012,25	R\$ 1.414.392.398,69	0,96910
AT-2000 (masculina)	R\$ 1.456.515.705,31	R\$ 1.488.010.244,97	0,97883
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.541.953.420,84	R\$ 1.564.187.781,48	0,98579
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 1.631.133.175,25	R\$ 1.648.727.256,96	0,98933
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 1.587.200.242,21	R\$ 1.601.484.951,95	0,99108
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.718.663.285,43	R\$ 1.726.429.825,56	0,99550
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.671.696.167,38	R\$ 1.676.733.620,13	0,99700

Resultados do teste para o ano de 2014

Massa fechada em 31/12/2008 de 6272 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2013 de 5627 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Esperada (RÊt) (em R\$)	Reserva Efetiva (REt) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 1.458.357.292,49	R\$ 1.502.361.711,22	0,97071
AT-2000 (masculina)	R\$ 1.551.079.394,84	R\$ 1.581.136.422,80	0,98099
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.644.015.831,25	R\$ 1.663.083.751,58	0,98853
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 1.741.900.845,24	R\$ 1.754.334.514,46	0,99291
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 1.692.555.726,69	R\$ 1.702.421.347,52	0,99420
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.837.155.457,93	R\$ 1.837.918.341,30	0,99958
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.784.525.725,82	R\$ 1.783.387.994,86	1,00064

Resultados do teste para o ano de 2015

Massa fechada em 31/12/2008 de 6614 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2013 de 5912 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Esperada (RÊt) (em R\$)	Reserva Efetiva (REt) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 1.601.174.892,99	R\$ 1.627.410.933,36	0,98388
AT-2000 (masculina)	R\$ 1.703.069.940,89	R\$ 1.712.627.094,99	0,99442
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.805.522.827,90	R\$ 1.801.394.780,40	1,00229
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 1.913.986.064,34	R\$ 1.900.361.255,23	1,00717
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 1.858.673.728,52	R\$ 1.843.456.363,51	1,00825
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 2.019.027.949,93	R\$ 1.990.913.819,56	1,01412
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 1.960.092.647,01	R\$ 1.931.170.357,06	1,01498

III. Resultados das Expectativas de Vida ao longo dos anos do teste utilizando o método Montello com benefício unitário das empresas do Sul/Sudeste

Resultados do teste para o ano de 2011

Massa fechada em 31/12/2005 de 12333 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2010 de 11429 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2011 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2005 para 2011 (**) $\sum a_{x+5} * 5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} * 5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	208982,2	207563,6	0,99321
AT-2000 (masculina)	219082,3	219281,0	1,00091
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	229104,1	230521,3	1,00619
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	239474,6	241498,6	1,00845
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	234333,4	236719,5	1,01018
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	249699,9	252995,7	1,01320
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	244210,2	247794,3	1,01468

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2010 em 2011.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2005 para o ano de 2011.

Resultados do teste para o ano de 2012

Massa fechada em 31/12/2006 de 13660 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2011 de 12542 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2012 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2006 para 2012 (**) $\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	222374,0	221017,2	0,99390
AT-2000 (masculina)	233234,5	233700,3	1,00200
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	244088,2	245958,0	1,00766
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	255380,5	258010,8	1,01030
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	249635,5	252592,2	1,01184
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	266454,2	270555,4	1,01539
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	260336,0	264678,8	1,01668

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2011 em 2012.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2006 para o ano de 2012.

Resultados do teste para o ano de 2013

Massa fechada em 31/12/2007 de 14146 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2012 de 13018 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2013 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2007 para 2013 (**) $\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	225874,2	223471,9	0,98936
AT-2000 (masculina)	237008,2	236468,9	0,99772
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	248190,8	249087,7	1,00361
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	259914,2	261595,8	1,00647
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	253856,6	255875,6	1,00795
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	271323,6	274513,0	1,01176
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	264884,9	268324,8	1,01299

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2012 em 2013.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2007 para o ano de 2013.

Resultados do teste para o ano de 2014

Massa fechada em 31/12/2008 de 14583 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2013 de 13238 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2014 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2008 para 2014 (**) $\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	225255,3	224545,4	0,99685
AT-2000 (masculina)	236447,5	237776,3	1,00562
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	247741,0	250685,2	1,01188
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	259668,8	263578,8	1,01506
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	253420,1	257573,5	1,01639
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	271191,3	276796,9	1,02067
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	264560,6	270315,7	1,02175

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2013 em 2014.

(**) Soma da esperança da expectativa dos assistidos de vida da massa fechada em 31/12/2008 para o ano de 2014.

Resultados do teste para o ano de 2015

Massa fechada em 31/12/2008 de 15059 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2013 de 13610 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2015 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2009 para 2015 (**) $\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	226337,9	225653,5	0,99698
AT-2000 (masculina)	237690,8	239133,1	1,00607
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	249205,9	252351,4	1,01262
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	261460,1	265654,6	1,01604
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	254935,1	259343,4	1,01729
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	273208,7	279193,6	1,02191
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	266297,8	272398,2	1,02291

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2014 em 2015.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2009 para o ano de 2015.

IV. Resultados das Reservas Efetiva e Esperada do teste de aderência usando o método Montello com o benefício efetivo ao longo dos anos das empresas do Sul/Sudeste

Resultados do teste para o ano de 2011

Massa fechada em 31/12/2005 de 12333 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2010 de 11429 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Efetiva (RE _t) (em R\$)	Reserva Esperada (RÊ _t) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 6.321.868.526,52	R\$ 6.231.785.097,98	0,98575
AT-2000 (masculina)	R\$ 6.626.680.647,02	R\$ 6.580.199.198,08	0,99299
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 6.927.768.209,01	R\$ 6.912.090.361,08	0,99774
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 7.238.412.593,63	R\$ 7.231.462.033,44	0,99904
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 7.088.708.896,38	R\$ 7.097.319.030,63	1,00121
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 7.545.625.354,85	R\$ 7.570.752.870,40	1,00333
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 7.385.428.508,90	R\$ 7.424.117.936,39	1,00524

Resultados do teste para o ano de 2012

Massa fechada em 31/12/2006 de 13660 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2011 de 12542 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Efetiva (RE _t) (em R\$)	Reserva Esperada (RÊ _t) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 6.861.777.239,99	R\$ 6.725.739.154,58	0,98017
AT-2000 (masculina)	R\$ 7.196.807.507,91	R\$ 7.108.543.700,71	0,98774
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 7.530.453.931,34	R\$ 7.475.886.778,81	0,99275
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 7.878.110.902,93	R\$ 7.833.045.965,87	0,99428
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 7.705.782.080,67	R\$ 7.678.269.976,50	0,99643
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 8.218.530.726,76	R\$ 8.208.744.188,55	0,99881
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 8.034.731.578,80	R\$ 8.040.263.248,80	1,00069

Resultados do teste para o ano de 2013

Massa fechada em 31/12/2007 de 14146 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2012 de 13018 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Efetiva (RE _t) (em R\$)	Reserva Esperada (RÊ _t) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 7.434.547.713,35	R\$ 7.260.373.668,93	0,97657
AT-2000 (masculina)	R\$ 7.800.433.511,91	R\$ 7.678.264.755,75	0,98434
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 8.166.409.743,45	R\$ 8.080.923.213,37	0,98953
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 8.550.898.375,94	R\$ 8.475.581.499,27	0,99119
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 8.357.670.808,14	R\$ 8.301.913.730,10	0,99333
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 8.924.304.991,95	R\$ 8.887.469.098,85	0,99587
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 8.718.592.303,23	R\$ 8.698.882.532,44	0,99774

Resultados do teste para o ano de 2014

Massa fechada em 31/12/2008 de 14583 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2013 de 13238 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Efetiva (RE _t) (em R\$)	Reserva Esperada (RÊ _t) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 8.041.527.903,62	R\$ 7.922.868.016,66	0,98524
AT-2000 (masculina)	R\$ 8.441.180.288,27	R\$ 8.386.102.236,82	0,99348
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 8.843.175.826,15	R\$ 8.835.122.469,57	0,99909
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 9.269.952.197,86	R\$ 9.279.930.161,96	1,00108
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 9.051.907.785,50	R\$ 9.079.778.047,89	1,00308
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 9.680.095.437,99	R\$ 9.739.380.390,79	1,00612
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 9.448.473.819,44	R\$ 9.522.730.837,20	1,00786

Resultados do teste para o ano de 2015

Massa fechada em 31/12/2008 de 15059 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2013 de 13610 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Efetiva (REt) (em R\$)	Reserva Esperada (RÊt) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 8.556.073.394,36	R\$ 8.443.910.740,33	0,98689
AT-2000 (masculina)	R\$ 8.985.166.127,21	R\$ 8.944.168.146,83	0,99544
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 9.418.821.153,29	R\$ 9.431.613.777,82	1,00136
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 9.883.548.352,75	R\$ 9.918.886.947,19	1,00358
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 9.642.477.944,89	R\$ 9.695.458.124,13	1,00549
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 10.325.990.609,92	R\$ 10.417.780.738,85	1,00889
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 10.070.403.366,73	R\$ 10.176.565.126,13	1,01054

V. Resultados das Expectativas de Vida ao longo dos anos do teste utilizando o método Montello com benefício unitário das empresas do Nordeste e do Sul/Sudeste

Resultados do teste para o ano de 2011

Massa fechada em 31/12/2005 de 18526 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2010 de 17115 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2011 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2005 para 2011 (**) $\sum a_{x+5} * 5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} * 5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	303733,7	301745,7	0,99345
AT-2000 (masculina)	318572,6	319050,0	1,00150
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	333401,5	335756,0	1,00706
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	348906,5	352238,6	1,00955
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	364035,7	369333,2	1,01455
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	341034,5	344875,6	1,01126
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	355653,9	361347,3	1,01601

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2010 em 2011.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2005 para o ano de 2011.

Resultados do teste para o ano de 2012

Massa fechada em 31/12/2006 de 19887 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2011 de 18237 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2012 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2006 para 2012 (**) $\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	317908,9	316454,3	0,99542
AT-2000 (masculina)	333531,7	334775,2	1,00373
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	349210,6	352543,5	1,00954
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	365671,9	370154,6	1,01226
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	381667,8	388342,4	1,01749
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	357188,9	362138,6	1,01386
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	372649,2	379665,9	1,01883

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2011 em 2012.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2006 para o ano de 2012.

Resultados do teste para o ano de 2013

Massa fechada em 31/12/2007 de 20473 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2012 de 18765 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2013 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2007 para 2013 (**) $\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	316066,8	313364,0	0,99145
AT-2000 (masculina)	331812,5	331871,3	1,00018
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	347739,3	349951,5	1,00636
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	364614,3	368078,5	1,00950
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	380862,9	386592,5	1,01504
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	355694,2	359601,1	1,01098
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	371406,2	377449,5	1,01627

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2012 em 2013.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2007 para o ano de 2013.

Resultados do teste para o ano de 2014

Massa fechada em 31/12/2008 de 20855 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2013 de 18865 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2014 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2008 para 2014 (**) $\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	310499,1	309081,5	0,99543
AT-2000 (masculina)	326104,4	327620,8	1,00465
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	341974,9	345842,4	1,01131
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	358905,8	364265,7	1,01493
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	375096,8	382931,4	1,02089
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	349805,9	355455,4	1,01615
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	365466,9	373454,7	1,02186

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2013 em 2014.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2008 para o ano de 2014.

Resultados do teste para o ano de 2015

Massa fechada em 31/12/2008 de 21673 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2013 de 19522 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Expectativa de Vida Agregada em 2015 (*) $\sum a_{x+5}$	Expectativa de Vida Agregada em 2009 para 2015 (**) $\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x$	$\frac{\sum a_{x+5} \cdot {}_5p_x}{\sum a_{x+5}}$
AT-83 (masculina)	317465,2	316722,3	0,99766
AT-2000 (masculina)	333485,2	335835,4	1,00705
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	349825,4	354680,4	1,01388
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	367350,9	373839,7	1,01766
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	384021,3	393148,0	1,02377
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	357838,6	364580,1	1,01884
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	373965,4	383200,9	1,02470

(*) Soma da expectativa de vida dos assistidos da massa efetiva em 31/12/2014 em 2015.

(**) Soma da esperança da expectativa de vida dos assistidos da massa fechada em 31/12/2009 para o ano de 2015.

VI. Resultados das Reservas Efetiva e Esperada do teste de aderência usando o método Montello com o benefício efetivo ao longo dos anos das empresas do Nordeste e do Sul/Sudeste

Resultados do teste para o ano de 2011

Massa fechada em 31/12/2005 de 18526 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2010 de 17115 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Efetiva (REt) (em R\$)	Reserva Esperada (RÊt) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 7.652.420.744,75	R\$ 7.531.298.122,40	0,98417
AT-2000 (masculina)	R\$ 8.025.124.561,30	R\$ 7.958.628.644,17	0,99171
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 8.395.593.846,97	R\$ 8.368.129.942,92	0,99673
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 8.782.110.356,07	R\$ 8.766.749.183,76	0,99825
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 8.591.676.299,57	R\$ 8.595.088.546,99	1,00040
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 9.160.099.036,33	R\$ 9.185.507.291,50	1,00277
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 8.956.889.555,09	R\$ 8.998.558.617,33	1,00465

Resultados do teste para o ano de 2012

Massa fechada em 31/12/2006 de 19887 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2011 de 18237 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Efetiva (RE _t) (em R\$)	Reserva Esperada (RÊ _t) (em R\$)	$\frac{RÊ_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 8.252.363.554,88	R\$ 8.079.881.896,35	0,97910
AT-2000 (masculina)	R\$ 8.658.418.383,40	R\$ 8.545.103.286,74	0,98691
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 9.064.751.850,03	R\$ 8.993.608.110,53	0,99215
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 9.492.246.591,26	R\$ 9.434.061.393,70	0,99387
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 9.276.878.552,51	R\$ 9.239.725.649,63	0,99600
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 9.906.811.125,79	R\$ 9.892.864.779,14	0,99859
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 9.677.585.569,51	R\$ 9.681.905.634,71	1,00045

Resultados do teste para o ano de 2013

Massa fechada em 31/12/2007 de 20473 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2012 de 18765 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Efetiva (REt) (em R\$)	Reserva Esperada (RÊt) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 8.848.940.112,04	R\$ 8.631.531.176,46	0,97543
AT-2000 (masculina)	R\$ 9.288.443.756,88	R\$ 9.135.264.826,52	0,98351
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 9.730.597.524,93	R\$ 9.623.371.231,63	0,98898
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 10.199.625.632,90	R\$ 10.107.213.258,77	0,99094
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 9.959.155.760,09	R\$ 9.889.613.840,58	0,99302
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 10.650.734.817,51	R\$ 10.606.641.587,06	0,99586
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 10.395.325.923,36	R\$ 10.371.088.555,72	0,99767

Resultados do teste para o ano de 2014

Massa fechada em 31/12/2008 de 20855 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2013 de 18865 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Efetiva (REt) (em R\$)	Reserva Esperada (RÊt) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 9.543.889.614,84	R\$ 9.381.225.309,14	0,98296
AT-2000 (masculina)	R\$ 10.022.316.711,07	R\$ 9.937.181.631,66	0,99151
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 10.506.259.577,73	R\$ 10.479.138.300,82	0,99742
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 11.024.286.712,32	R\$ 11.021.831.007,19	0,99978
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 10.754.329.133,02	R\$ 10.772.333.774,57	1,00167
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 11.518.013.779,29	R\$ 11.576.535.848,71	1,00508
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 11.231.861.814,30	R\$ 11.307.256.563,02	1,00671

Resultados do teste para o ano de 2015

Massa fechada em 31/12/2009 de 21673 assistidos (aposentados não inválidos e pensionistas vitalícios).

Massa efetiva em 31/12/2014 de 19522 assistidos.

Tábua de Mortalidade Geral	Reserva Efetiva (REt) (em R\$)	Reserva Esperada (RÊt) (em R\$)	$\frac{R\hat{E}_t}{RE_t}$
AT-83 (masculina)	R\$ 10.183.484.327,72	R\$ 10.045.085.633,33	0,98641
AT-2000 (masculina)	R\$ 10.697.793.222,20	R\$ 10.647.238.087,71	0,99527
AT-2000 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 11.220.215.933,69	R\$ 11.237.136.605,72	1,00151
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina)	R\$ 11.783.909.607,98	R\$ 11.832.873.011,53	1,00416
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina)	R\$ 11.485.934.308,40	R\$ 11.554.131.852,65	1,00594
SUSEP BR-EMSsb-v 2010 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 12.316.904.429,48	R\$ 12.436.808.688,77	1,00973
SUSEP BR-EMSsb-v 2015 (masculina) desagravada em 10%	R\$ 12.001.573.723,79	R\$ 12.136.657.773,13	1,01126

ANEXO

I. Método de Hamza (Apostila do curso de Matemática Atuarial II do Professor José Roberto Santos Montello, UFRJ)

1. Método de Hamza – obtenção de q_x^{aa} (Mortalidade de Ativos) a partir de q_x (Mortalidade Geral), i_x (Entrada em Invalidez) e q_x^i (Mortalidade de Inválidos)

A prática nos mostra que obter os valores de \hat{d}_x^{aa} (ver item 4) com precisão não é muito fácil, visto que, além das observações serem raras em várias idades, muitas pessoas que aparentemente falecem em atividade, na verdade, já estavam inválidas ao morrer. Para resolver este problema, o matemático Hamza desenvolveu um método bastante simples. Na exposição a seguir, seguindo o próprio raciocínio de Hamza, vamos considerar como inexistentes os casos de exoneração ($w_x = 0$), o que simplifica bastante o desenvolvimento do raciocínio:

$$\text{Em qualquer idade: } \ell_x = \ell_x^{aa} + \ell_x^{ii} \quad \therefore \ell_x^{aa} = \ell_x - \ell_x^{ii},$$

sendo: ℓ_x o nº de pessoas de uma população geral vivas com exatamente idade x ;

ℓ_x^{aa} o nº de pessoas vivas de uma população de ativos com exatamente idade x ; e

ℓ_x^{ii} o nº de pessoas que a partir da idade inicial de atividade (designada por a) se invalidaram, sobreviveram e alcançaram exatamente a idade de x anos.

Na idade inicial de atividade (por exemplo: a = 16 anos) não há inválidos, ou seja, temos que:

$$\ell_a^{ii} = \ell_{16}^{ii} = 0.$$

As leis de evoluções dos ℓ_x e dos ℓ_x^{ii} e, conseqüentemente, dos ℓ_x^{aa} são as seguintes:

i) $\ell_{x+1} = \ell_x \cdot p_x$;

ii) $\ell_{x+1}^{ii} = \ell_x^{aa} \cdot p_x^{ai} + \ell_x^{ii} \cdot p_x^i$; e

iii) $\ell_x^{aa} = \ell_x - \ell_x^{ii}$.

onde: p_x^{ai} é a probabilidade Secundária decorrente da decomposição de i_x .

2. Probabilidades Secundárias (Decomposição de i_x):

$$i_x = p_x^{ai} + q_x^{ai} \quad \text{considerando-se a invalidez sempre sendo total e permanente,}$$

onde: p_x^{ai} é a prob. (x) ativa se invalidar ao longo do ano e sobreviver inválida à idade x+1; e

q_x^{ai} é a prob. (x) ativa se invalidar ao longo do ano e falecer inválida antes de atingir a idade $x+1$.

Considerando que os casos de invalidez e de mortalidade de inválidos ocorram ao longo do ano de forma uniforme, tem-se que:

$q_x^{ai} \cong i_x \cdot 1/2 q_x^i$, sendo q_x^i a probabilidade de (x) inválida falecer inválida antes de atingir a idade $x+1$, que deriva da tábua uni-decremental de mortalidade de inválidos.

e

$$p_x^{ai} = i_x - q_x^{ai} \cong i_x - i_x \cdot 1/2 q_x^i \therefore p_x^{ai} \cong i_x \left(1 - 1/2 q_x^i\right).$$

Assim, obtidos todos os ℓ_x^{aa} se obtém facilmente os p_x^{aa} e os q_x^{aa} , visto que:

$$p_x^{aa} = \frac{\ell_{x+1}^{aa}}{\ell_x^{aa}} \quad \text{e} \quad q_x^{aa} = 1 - \left(p_x^{aa} + i_x\right).$$

IMPORTANTE: No cálculo de q_x^{aa} pelo método de Hamza é preciso verificar a compatibilidade entre as tábuas biométricas utilizadas (q_x , q_x^i e i_x). Sem esse cuidado é possível que a aplicação desse método conduza a resultados negativos de q_x^{aa} , o que é um absurdo.

II. Qx das Tábuas de Mortalidade utilizadas na aplicação do método Montello

x	AT-83 (masculina)	AT-2000 (masculina)	AT-2000 (masculina) (*)	SUSEP BR- EMSsb-v 2010 (masculina)	SUSEP BR- EMSsb-v 2015 (masculina)	SUSEP BR- EMSsb-v 2010 (masculina) (*)	SUSEP BR- EMSsb-v 2015 (masculina) (*)
21	0,000525	0,000573	0,0005157	0,00085	0,0007069	0,000765	0,00063621
22	0,000546	0,000599	0,0005391	0,00089	0,0007623	0,000801	0,00068607
23	0,00057	0,000627	0,0005643	0,00092	0,0007817	0,000828	0,00070353
24	0,000596	0,000657	0,0005913	0,00093	0,0007731	0,000837	0,00069579
25	0,000622	0,000686	0,0006174	0,00093	0,0007544	0,000837	0,00067896
26	0,00065	0,000714	0,0006426	0,00093	0,0007373	0,000837	0,00066357
27	0,000677	0,000736	0,0006624	0,00092	0,0007298	0,000828	0,00065682
28	0,000704	0,000758	0,0006822	0,00092	0,0007258	0,000828	0,00065322
29	0,000731	0,000774	0,0006966	0,00091	0,0007177	0,000819	0,00064593
30	0,000759	0,000784	0,0007056	0,00092	0,0007211	0,000828	0,00064899
31	0,000786	0,000789	0,0007101	0,00093	0,0007342	0,000837	0,00066078
32	0,000814	0,000789	0,0007101	0,00094	0,0007579	0,000846	0,00068211
33	0,000843	0,00079	0,000711	0,00099	0,0007941	0,000891	0,00071469
34	0,000876	0,000791	0,0007119	0,00103	0,0008395	0,000927	0,00075555
35	0,000917	0,000792	0,0007128	0,00109	0,0008802	0,000981	0,00079218
36	0,000968	0,000794	0,0007146	0,00115	0,0009202	0,001035	0,00082818
37	0,001032	0,000823	0,0007407	0,00121	0,0009512	0,001089	0,00085608
38	0,001114	0,000872	0,0007848	0,00128	0,0009876	0,001152	0,00088884
39	0,001216	0,000945	0,0008505	0,00136	0,0010291	0,001224	0,00092619
40	0,001341	0,001043	0,0009387	0,00144	0,0010883	0,001296	0,00097947
41	0,001492	0,001168	0,0010512	0,00153	0,0011563	0,001377	0,00104067
42	0,001673	0,001322	0,0011898	0,00164	0,0012443	0,001476	0,00111987
43	0,001886	0,001505	0,0013545	0,00175	0,0013505	0,001575	0,00121545
44	0,002129	0,001715	0,0015435	0,00187	0,0014798	0,001683	0,00133182
45	0,002399	0,001948	0,0017532	0,002	0,0016034	0,0018	0,00144306
46	0,002693	0,002198	0,0019782	0,00215	0,0017246	0,001935	0,00155214
47	0,003009	0,002463	0,0022167	0,00231	0,0018463	0,002079	0,00166167
48	0,003343	0,002748	0,0024732	0,00249	0,0020009	0,002241	0,00180081
49	0,003694	0,003028	0,0027252	0,00268	0,0021789	0,002412	0,00196101
50	0,004057	0,00333	0,002997	0,0029	0,0023873	0,00261	0,00214857
51	0,004431	0,003647	0,0032823	0,00313	0,0026229	0,002817	0,00236061
52	0,004812	0,00398	0,003582	0,00339	0,0029034	0,003051	0,00261306
53	0,005198	0,004331	0,0038979	0,00367	0,0032172	0,003303	0,00289548
54	0,005591	0,004698	0,0042282	0,00398	0,0035536	0,003582	0,00319824
55	0,005994	0,005077	0,0045693	0,00431	0,003907	0,003879	0,0035163
56	0,006409	0,005465	0,0049185	0,00468	0,0042981	0,004212	0,00386829
57	0,006839	0,005861	0,0052749	0,00509	0,0047163	0,004581	0,00424467
58	0,00729	0,006265	0,0056385	0,00554	0,0051323	0,004986	0,00461907
59	0,007782	0,006694	0,0060246	0,00603	0,0055507	0,005427	0,00499563
60	0,008338	0,00717	0,006453	0,00656	0,0060008	0,005904	0,00540072
61	0,008983	0,007714	0,0069426	0,00715	0,0065038	0,006435	0,00585342
62	0,00974	0,008346	0,0075114	0,0078	0,0070974	0,00702	0,00638766
63	0,01063	0,009091	0,0081819	0,00851	0,0078021	0,007659	0,00702189
64	0,011664	0,00996	0,008964	0,00929	0,0086713	0,008361	0,00780417
65	0,012851	0,010993	0,0098937	0,01014	0,0095833	0,009126	0,00862497

x	AT-83 (masculina)	AT-2000 (masculina)	AT-2000 (masculina) (*)	SUSEP BR- EMSsb-v 2010 (masculina)	SUSEP BR- EMSsb-v 2015 (masculina)	SUSEP BR- EMSsb-v 2010 (masculina) (*)	SUSEP BR- EMSsb-v 2015 (masculina) (*)
66	0,014199	0,012188	0,0109692	0,01107	0,0105349	0,009963	0,00948141
67	0,015717	0,013572	0,0122148	0,0121	0,0114564	0,01089	0,01031076
68	0,017414	0,01516	0,013644	0,01323	0,0124987	0,011907	0,01124883
69	0,019296	0,016946	0,0152514	0,01446	0,0135974	0,013014	0,01223766
70	0,021371	0,01892	0,017028	0,01581	0,0150356	0,014229	0,01353204
71	0,023647	0,021071	0,0189639	0,0173	0,0166761	0,01557	0,01500849
72	0,026131	0,023388	0,0210492	0,01893	0,0187002	0,017037	0,01683018
73	0,028835	0,025871	0,0232839	0,02072	0,0208752	0,018648	0,01878768
74	0,031794	0,028552	0,0256968	0,02268	0,0232898	0,020412	0,02096082
75	0,035046	0,031477	0,0283293	0,02483	0,0257844	0,022347	0,02320596
76	0,038631	0,034686	0,0312174	0,02719	0,0286674	0,024471	0,02580066
77	0,042587	0,038225	0,0344025	0,02977	0,0317212	0,026793	0,02854908
78	0,046951	0,042132	0,0379188	0,03261	0,0348424	0,029349	0,03135816
79	0,051755	0,046427	0,0417843	0,03573	0,0382344	0,032157	0,03441096
80	0,057026	0,051113	0,0460017	0,03914	0,0417852	0,035226	0,03760668
81	0,062791	0,05625	0,050625	0,04289	0,0457989	0,038601	0,04121901
82	0,069081	0,061809	0,0556281	0,047	0,049948	0,0423	0,0449532
83	0,075908	0,067826	0,0610434	0,0515	0,0544018	0,04635	0,04896162
84	0,08323	0,074322	0,0668898	0,05645	0,0597001	0,050805	0,05373009
85	0,090987	0,081326	0,0731934	0,06187	0,066509	0,055683	0,0598581
86	0,099122	0,088863	0,0799767	0,06782	0,0744187	0,061038	0,06697683
87	0,107577	0,096958	0,0872622	0,07434	0,0839599	0,066906	0,07556391
88	0,116316	0,105631	0,0950679	0,0815	0,093439	0,07335	0,0840951
89	0,125394	0,114855	0,1033695	0,08935	0,10497	0,080415	0,094473
90	0,134887	0,124612	0,1121508	0,09796	0,1143591	0,088164	0,10292319
91	0,144873	0,134861	0,1213749	0,10741	0,1247292	0,096669	0,11225628
92	0,155429	0,145575	0,1310175	0,11777	0,1325577	0,105993	0,11930193
93	0,166629	0,156727	0,1410543	0,12913	0,1466181	0,116217	0,13195629
94	0,178537	0,16829	0,151461	0,1416	0,158572	0,12744	0,1427148
95	0,191214	0,180245	0,1622205	0,15527	0,1737468	0,139743	0,15637212
96	0,204721	0,192565	0,1733085	0,17027	0,1895589	0,153243	0,17060301
97	0,21912	0,206229	0,1856061	0,18672	0,205371	0,168048	0,1848339
98	0,234735	0,218683	0,1968147	0,20477	0,2220684	0,184293	0,19986156
99	0,251889	0,233371	0,2100339	0,22457	0,2401233	0,202113	0,21611097
100	0,270906	0,249741	0,2247669	0,24628	0,2596462	0,221652	0,23368158
101	0,292111	0,268333	0,2414997	0,2701	0,2807563	0,24309	0,25268067
102	0,315826	0,289306	0,2603754	0,29622	0,3035828	0,266598	0,27322452
103	0,342377	0,313391	0,2820519	0,32488	0,3282651	0,292392	0,29543859
104	0,372086	0,34094	0,306846	0,35632	0,3549543	0,320688	0,31945887
105	0,405278	0,3723398	0,33510582	0,3908	0,3838133	0,35172	0,34543197
106	0,442277	0,40921	0,368289	0,42862	0,4150187	0,385758	0,37351683
107	0,483406	0,448823	0,4039407	0,47011	0,4487611	0,423099	0,40388499
108	0,528989	0,494661	0,4451949	0,51562	0,485247	0,464058	0,4367223
109	0,579351	0,546231	0,4916079	0,56553	0,5246993	0,508977	0,47222937
110	0,634814	0,603923	0,5435307	0,62029	0,5673592	0,558261	0,51062328
111	0,695704	0,668186	0,6013674	0,68035	0,6134875	0,612315	0,55213875
112	0,762343	0,739483	0,6655347	0,74623	0,6633662	0,671607	0,59702958
113	0,835056	0,818264	0,7364376	0,81849	0,7173002	0,736641	0,64557018
114	0,914167	0,904945	0,8144505	0,89776	0,7756192	0,807984	0,69805728
115	1	1	0,9	0,98471	0,8386798	0,886239	0,75481182
116	-	-	1	1	0,9068674	0,9	0,81618066
117	-	-	-	-	0,9805989	1	0,88253901
118	-	-	-	-	1	-	0,9
119	-	-	-	-	-	-	1

GLOSSÁRIO

1) As Quantidades e as Probabilidades constantes das Tábuas de Sobrevivência:

O modelo da Tábua de Sobrevivência mostra o padrão de sobrevivência de um hipotético grupo de vidas recém-nascidas. O tamanho desse grupo é denotado por l_0 e é chamado de raiz da tábua.

A seguir apresentaremos uma Tábua de Sobrevivência, truncada na idade de 35 anos, usando, como exemplo, as probabilidades da Tábua AT-83:

Tábua 1.1:

Idade x (1)	l_x (2)	d_x (3)	p_x (4)	q_x (5)	L_x (6)	T_x (7)	e_x^0 (8)
0	10000000	26900	0,99731	0,00269	9986550	786921470,8	78,69215
1	9973100	10501,67	0,998947	0,001053	9967849	776934920,8	77,90305
2	9962598	5887,896	0,999409	0,000591	9959654	766967071,6	76,98464
3	9956710	4739,394	0,999524	0,000476	9954341	757007417,2	76,02987
4	9951971	4149,972	0,999583	0,000417	9949896	747053076,5	75,06584
5	9947821	3750,329	0,999623	0,000377	9945946	737103180,4	74,09695
6	9944071	3480,425	0,99965	0,00035	9942331	727157234,5	73,1247
7	9940590	3310,217	0,999667	0,000333	9938935	717214904	72,15013
8	9937280	3497,923	0,999648	0,000352	9935531	707275968,8	71,174
9	9933782	3655,632	0,999632	0,000368	9931954	697340437,7	70,19889
10	9930127	3793,308	0,999618	0,000382	9928230	687408483,3	69,22454
11	9926333	3910,975	0,999606	0,000394	9924378	677480253,4	68,25081
12	9922422	4018,581	0,999595	0,000405	9920413	667555875,7	67,27751
13	9918404	4116,138	0,999585	0,000415	9916346	657635462,7	66,30457
14	9914288	4213,572	0,999575	0,000425	9912181	647719117,1	65,33189
15	9910074	4310,882	0,999565	0,000435	9907919	637806936,4	64,35945
16	9905763	4417,97	0,999554	0,000446	9903554	627899017,8	63,38724
17	9901345	4534,816	0,999542	0,000458	9899078	617995463,7	62,4153
18	9896810	4671,294	0,999528	0,000472	9894475	608096386	61,44367
19	9892139	4827,364	0,999512	0,000488	9889725	598201911,4	60,47245
20	9887312	4993,092	0,999495	0,000505	9884815	588312186,1	59,50173
21	9882319	5188,217	0,999475	0,000525	9879724	578427371	58,53154
22	9877130	5392,913	0,999454	0,000546	9874434	568547646,5	57,56203
23	9871737	5626,89	0,99943	0,00057	9868924	558673212,7	56,5932
24	9866111	5880,202	0,999404	0,000596	9863170	548804288,7	55,62519
25	9860230	6133,063	0,999378	0,000622	9857164	538941118,3	54,65807
26	9854097	6405,163	0,99935	0,00065	9850895	529083954,5	53,69177
27	9847692	6666,888	0,999323	0,000677	9844359	519233059,8	52,72637
28	9841025	6928,082	0,999296	0,000704	9837561	509388701,2	51,76175
29	9834097	7188,725	0,999269	0,000731	9830503	499551140	50,79787
30	9826908	7458,623	0,999241	0,000759	9823179	489720637,2	49,83466
31	9819450	7718,088	0,999214	0,000786	9815591	479897458,1	48,87213
32	9811732	7986,75	0,999186	0,000814	9807738	470081867,4	47,91018
33	9803745	8264,557	0,999157	0,000843	9799613	460274129,1	46,94881
34	9795480	8580,841	0,999124	0,000876	9791190	450474516,4	45,988
35	9786900	8974,587	0,999083	0,000917	9782412	440683326,4	45,02788

A coluna (2) da Tábua 1.1. mostra o nº de sobreviventes para cada idade sucessiva proveniente do grupo de nascidos considerados l_0 . Portanto, a função l_x representa o nº de pessoas com exatamente idade x de acordo com o modelo aqui considerado. Assim, podemos dizer que a sequência dos valores de l_x mostra o padrão de sobrevivência desse grupo hipotético de pessoas.

A coluna (3) mostra o nº de mortes a cada idade (no intervalo entre x e x+1), que é a multiplicação de l_x pela probabilidade da pessoa falecer na idade x antes de alcançar a idade x+1 denotada por q_x , na coluna (5), ou seja:

$$d_x = l_x * q_x$$

A probabilidade de sobrevivência entre a idade x e a idade x+1 é denotada por p_x e é dada por:

$$p_x = 1 - q_x.$$

Valores de p_x estão mostrados na coluna (4).

A função L_x apresentada na coluna (6) da Tábua 1.1, representa um novo conceito a ser aprendido.

L_x representa o total de anos vividos pelas l_x pessoas entre as idades x e x+1. É uma medida do tempo que as l_x pessoas ficam expostas ao risco de morte ao longo do ano e é chamada de medida de “exposição ao risco”. Teoricamente, L_x tem relação com a função l_x , o que pode ser visto claramente se tivermos em conta que, em realidade, l_x é uma função contínua.

Vamos considerar, aqui, uma definição de L_x adotando uma relação aproximada com o valor l_x , conforme apresentado a seguir.

Para l_x indivíduos que atingiram a idade x, determinar o total aproximado de anos que eles viverão antes de completar a idade x+1:

Obviamente todos os l_{x+1} indivíduos que sobreviverão à idade x+1 contribuirão com 1 ano inteiro para o referido total. Já as d_x pessoas que falecerão entre as idades x e x+1, contribuirão para esse total com as mais diversas frações de 1 ano, cujo valor médio denotaremos por $a(x) < 1$. Vamos considerar que a

quantidade de mortes d_x apresenta uma ocorrência uniforme entre as idades x e $x+1$ e, portanto, que $a(x) = \frac{1}{2}$. Então, o nº total de anos de vida vividos pelas ℓ_x pessoas entre as idades x e $x+1$, é aproximadamente igual a:

$$1 \cdot \ell_{x+1} + \frac{1}{2} \cdot d_x = \ell_{x+1} + \frac{1}{2}(\ell_x - \ell_{x+1}) = \frac{1}{2}(\ell_x + \ell_{x+1}).$$

Portanto, temos a seguinte relação entre L e ℓ :

$$L_x \cong \frac{1}{2}(\ell_x + \ell_{x+1}) = \frac{1}{2}(\ell_x + \ell_x - d_x) = \ell_x - \frac{1}{2}d_x,$$

assumindo que as d_x mortes ocorrerão de uma forma uniforme no intervalo entre as idades x e $x+1$.

Estamos agora a um pequeno passo de vislumbrar que o total dos anos futuros a serem vividos pelas ℓ_x pessoas até os respectivos falecimentos é dado por:

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \dots,$$

onde T_x representa o total de anos remanescentes de vida do grupo de pessoas ℓ_x .

Valores de T_x estão apresentados na coluna (7) da Tábua 1.1. Esses valores podem ser calculados da seguinte maneira:

$T_x = T_{x+1} + L_x$, partindo-se da idade w situada no final da Tábua (w é a primeira idade em que não há mais pessoas vivas) e retornando de forma recursiva em direção à idade x .

Segue-se que o tempo médio de vida futura (denominada expectativa de vida completa) para as pessoas da idade x , é dado por: $e_x^0 = \frac{T_x}{\ell_x}$. Os valores de e_x^0 estão apresentados na coluna (8) da Tábua 1.1.

2) Quantidades e Probabilidades Fundamentais integrantes das Tábuas de Sobrevivência:

Raiz da Tábua: ℓ_0 (nº arbitrado como grupo de vidas recém-nascidas, em geral uma potência de 10 não inferior a 10^5 , neste caso 10^7).

ℓ_x é o nº de pessoas com exatamente x anos de idade (constituído a partir da raiz da tábua “ ℓ_0 ”).

d_x é o nº de mortes ocorridas entre as idades de x e $x+1$ anos;

p_x é a prob. de uma pessoa de idade de x anos alcançar viva a idade de $x+1$ anos; e

q_x é a prob. de uma pessoa de idade de x anos falecer antes de alcançar a idade de $x+1$ anos.

3) Relações entre as Quantidades e Probabilidades Fundamentais:

$$3.1.) \ell_{x+1} = \ell_x \cdot p_x$$

$$3.2.) d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$$

$$3.3.) \ell_{x+1} = \ell_x - d_x$$

$$3.4.) q_x = \frac{d_x}{\ell_x}$$

$$3.5.) p_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$$

4) Probabilidades Secundárias:

4.1.) ${}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$; probabilidade de uma pessoa de idade x chegar com vida à idade $x+n$.

4.2.) ${}_n / q_x = \frac{d_{x+n}}{\ell_x} = \frac{\ell_{x+n} - \ell_{x+n+1}}{\ell_x}$; probabilidade de uma pessoa de idade x chegar com vida à idade $x+n$ e falecer antes de alcançar a idade $x+n+1$.

4.3.) $\left/ \right. {}_m q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+m}}{\ell_x}$; probabilidade de uma pessoa de idade x falecer antes de atingir a idade $x+m$.

4.4.) ${}_n / {}_m q_x = \frac{\ell_{x+n} - \ell_{x+n+m}}{\ell_x}$; probabilidade de uma pessoa de idade x chegar com vida à idade $x+n$ e falecer antes de alcançar a idade $x+n+m$.

5) Outras Definições:

$$5.1.) L_x = 1/2 \cdot (\ell_x + \ell_{x+1}) .$$

5.2.)

$$\begin{aligned} T_x &= \sum_{t=0}^{w-x-1} L_{x+t} = 1/2(\ell_x + \ell_{x+1}) + 1/2(\ell_{x+1} + \ell_{x+2}) + 1/2(\ell_{x+2} + \ell_{x+3}) + \dots + 1/2(\ell_{w-1} + \ell_w) = \\ &= 1/2 \cdot \ell_x + \ell_{x+1} + \ell_{x+2} + \ell_{x+3} + \dots + \ell_{w-1} = 1/2 \cdot \ell_x + \sum_{t=1}^{w-x-1} \ell_{x+t} \end{aligned}$$

$$5.3.) e_x^0 = \frac{T_x}{\ell_x} = \frac{\sum_{t=1}^{w-x-1} \ell_{x+t} + 1/2 \cdot \ell_x}{\ell_x} = e_x + 1/2, \text{ já que } e_x = e_x^0 - 1/2$$

NOTA: e_x^0 é a Vida Média Completa, em que se considera que, ao longo das diversas idades de x anos, as mortes ocorram de forma uniforme, ou seja, em média, no meio do ano; e

e_x é a Vida Média Abreviada, em que se considera que as mortes, nas diversas idades de x anos, ocorram todas no início do ano.

Portanto, considerando tais definições, fica claro que: $e_x^0 = e_x + 1/2$ ou $e_x = e_x^0 - 1/2$

6) Anuidades de Sobrevivência Constantes

6.1) Capital Diferido:

A mais simples operação de seguro de sobrevivência é a relativa a um Capital Diferido comprado através de Prêmio Único. Trata-se de verificar quanto vale hoje (que valor atual tem) um determinado capital pagável no prazo de n anos, desde que o segurado (x) (leia-se segurado de idade x) esteja então vivo. Denomina-se esse valor atual de Prêmio Único Puro dessa operação. O adjetivo Puro decorre de que esse Prêmio Único é calculado sem se levar em conta os gastos necessários a realização da operação e o adjetivo Único decorre de que esse Prêmio é pago de uma só vez na contratação da operação. É fácil ver que contribuem para o cálculo desse Prêmio 3 fatores: **a)** o capital segurado diferido, **b)** o fator de desconto financeiro que traz para o momento presente o referido capital, e **c)** a probabilidade de que dentro de n anos (x) ainda esteja vivo.

Denominaremos ${}_nE_x$ o valor atual, o Prêmio Único Puro, que corresponde a um capital diferido de 1 (uma) unidade monetária, sendo que “E” corresponde a inicial da palavra inglesa “Endowment” que significa “Dote”. Sendo v^n o valor atual financeiro

(fator de desconto financeiro) de 1 (uma) unidade monetária pagável dentro de n anos e sendo ${}_n P_x$ a probabilidade de que dentro de n anos (x) esteja vivo, temos evidentemente que:

$${}_n E_x = v^n \cdot {}_n P_x = \frac{v^n \cdot l_{x+n}}{l_x}, \text{ conhecido como valor atual atuarial ou fator de desconto atuarial.}$$

O inverso do fator de desconto financeiro, $1/v^n = (1+i)^n$, é conhecido como fator de capitalização financeira. Da mesma forma, teremos que:

$$\frac{1}{{}_n E_x} = \frac{1}{v^n \cdot {}_n P_x} = \frac{(1+i)^n \cdot l_x}{l_{x+n}}, \text{ corresponde ao valor futuro atuarial ou fator de capitalização atuarial.}$$

6.2) Introdução às Tábuas de Comutação:

Para facilitar os cálculos, e isso veremos de forma mais clara quando tratarmos das anuidades de sobrevivência, se imaginou a construção de tábuas auxiliares, chamadas de “tábuas de comutações” visto que comutam, transformam os cálculos.

$$\begin{aligned} \text{Temos: } {}_n E_x &= \frac{v^n \cdot l_{x+n}}{l_x} = \frac{v^x}{v^x} \cdot \frac{v^n \cdot l_{x+n}}{l_x} = \\ &= \frac{v^{x+n} \cdot l_{x+n}}{v^x \cdot l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

$$\text{onde: } D_x = v^x \cdot l_x \text{ e } D_{x+n} = v^{x+n} \cdot l_{x+n}, \text{ ou seja, } D_{x+t} = v^{x+t} \cdot l_{x+t}$$

A primeira coluna da Tábua de Comutação é formada por todos os produtos D_x desde $x = 0$ até $x = w$ (sendo w a primeira idade onde não há mais sobreviventes).

6.3) Anuidades de Sobrevivência com pagamentos anuais:

Uma anuidade de sobrevivência de 1 pagável anualmente a (x) numa série de pagamentos anuais de 1 começando no final do 1º ano se (x) estiver então vivo e continuando ao longo de duração de sua vida (vitaliciamente). O valor atual (atuarial) dessa série de pagamento, denotado por a_x , pode ser expresso como o somatório dos valores de uma série de Capitais Diferidos Puros:

$$a_x = 1E_x + 2E_x + 3E_x + \dots + w-x-1E_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} tE_x$$

Este somatório pode também ser escrito de outras formas:

$$a_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} v^t \cdot {}_tP_x = \sum_{t=1}^{w-x-1} \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

Definindo uma nova comutação:

$$N_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} D_{x+t}$$

a fórmula de a_x torna-se:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

A anuidade a_x é conhecida como “renda vitalícia unitária postecipada”.

Um outro tipo de anuidade de sobrevivência tem pagamento limitado num período máximo determinado. Esta é uma anuidade (renda unitária) de sobrevivência (postecipada) temporária por n anos, a qual provê pagamentos no final de cada ano, durante n anos, se (x) estiver vivo. O valor atual dessa série de pagamentos, denotado por $a_{x:n|}$, pode ser expresso como:

$$a_{x:n|} = \sum_{t=1}^n {}_tE_x = \sum_{t=1}^n \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

Visto que $\sum_{t=1}^n D_{x+t} = N_{x+1} - N_{x+n+1}$, temos que:

$$a_{x:n|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Um terceiro tipo de anuidade de sobrevivência é a anuidade vitalícia diferida por n anos. Essas anuidade provê a (x) pagamentos vitalícios a partir da idade $x+n+1$. O valor atual dessa série de pagamentos, denotado por ${}_n/a_x$, pode ser expresso como

$${}_n/a_x = \sum_{t=n+1}^{w-x-1} {}_tE_x = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{t=n+1}^{w-x-1} D_{x+t} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

ou

$$n/a_x = a_x - a_{x:n} = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

ou

$$n/a_x = {}_nE_x \cdot a_{x+n} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

Uma série de pagamentos anuais $a(x)$ a partir da idade $x+n+1$ e até a idade $x+n+m$ enquanto (x) sobreviver é chamada de anuidade de sobrevivência diferida por n anos e temporária por m anos ou de anuidade de sobrevivência interceptada. O valor atual dessa série de pagamentos, denotado por $n/m a_x$ ou $n/a_{x:m}$, pode ser expresso como:

$$n/m a_x = \sum_{t=n+1}^{n+m} v^t E_x = \frac{1}{D_x} \sum_{t=n+1}^{n+m} D_{x+t} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x}$$

ou

$$n/m a_x = n/a_x - n/m/a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+m+1}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x}$$

As anuidades de sobrevivência definidas até aqui consideram o primeiro pagamento no final do ano ou período. Qualquer anuidade deste tipo é denominada de “anuidade imediata”, ou conforme preferimos, de “anuidade postecipada”. Quando a série de pagamentos começa no início do ano ou período, a anuidade é chamada de “anuidade vencida” ou, conforme preferimos, de “anuidade antecipada” e, sua denotação difere da postecipada pela colocação de um trema sobre o a , por exemplo \ddot{a}_x .

Quando os pagamentos são feitos anualmente, o pagamento da anuidade antecipada começa um ano antes que a correspondente anuidade postecipada. As seguintes fórmulas são imediatamente verificadas:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x},$$

$$\ddot{a}_{x:n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

$$n/\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

$$n/m \ddot{a}_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}$$

As seguintes relações entre anuidades postecipadas e anuidades antecipadas são evidentes:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x,$$

$$\ddot{a}_{x:n} = 1 + a_{x:n-1},$$

$$n/\ddot{a}_x = n-1/a_x,$$

$$n/m \ddot{a}_x = n-1/m a_x$$

Eventualmente as anuidades de sobrevivência correspondem a pagamentos a serem feitos anualmente no final da fração 1/k do ano. Essas anuidades podem ser vistas como anuidades antecipadas diferidas por 1/k anos. O valor atual, $1/k \ddot{a}_x$, desse tipo de anuidade pode ser considerado aproximadamente igual ao valor obtido por interpolação linear entre \ddot{a}_x e a_x . Assim:

$$1/k \ddot{a}_x \cong \left(1 - \frac{1}{k}\right) \ddot{a}_x + \frac{1}{k} a_x,$$

ou desde que: $a_x = \ddot{a}_x - 1$, temos que:

$$1/k \ddot{a}_x \cong \ddot{a}_x - \frac{1}{k}$$

Às vezes é necessário saber não o valor atual de uma série de pagamentos, mas sim o valor futuro da série de pagamentos. Como o fator de capitalização atuarial é o inverso do fator de desconto atuarial é fácil obter o valor futuro. Para se obter, portanto, $s_{x:n}$, que representa o valor futuro, ao final de n anos, de uma série de pagamentos para o qual $a_{x:n}$ denota o valor atual podemos utilizar os seguintes caminhos:

$$s_{x:n} = \sum_{t=1}^n \frac{1}{n-t E_{x+t}} = \sum_{t=1}^n \frac{D_{x+t}}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}}$$

ou

$$s_{x:n} = a_{x:n} \cdot \frac{1}{n E_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \cdot \frac{D_x}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}}$$

O valor futuro de uma série de pagamentos, para o qual $\ddot{a}_{x:n}$ denota o valor atual, ao final de n anos, é dado analogamente por:

$$s_{x:n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}}$$

$$s_{\overline{x:n}|} = a_{\overline{x:n}|} \cdot \frac{D_x}{D_{x+n}} e,$$

$$\ddot{s}_{\overline{x:n}|} = \ddot{a}_{\overline{x:n}|} \cdot \frac{D_x}{D_{x+n}}$$

6.4) Anuidades pagáveis com frequência superior a 1 (uma) vez por ano:

Nosso objetivo é o de calcular uma anuidade igual a 1, paga fracionadamente a razão de 1/m no final de cada subperíodo 1/m do ano, de forma vitalícia.

Vamos partir das seguintes relações:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x ; e$$

$$1/\ddot{a}_x = a_x.$$

Consideraremos agora uma renda anual postecipada igual a unidade que venha a ser antecipada pela fração $\frac{m-1}{m}$ do ano, ou seja, uma renda antecipada anual igual a unidade que venha a ser diferida pelo prazo complementar $\frac{1}{m}$ do ano. Por interpolação linear podemos representar essas rendas da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/\ddot{a}_x = a_x + \frac{m-m}{m} = a_x \\ \frac{m-1}{m}/\ddot{a}_x = a_x + \frac{m-(m-1)}{m} = a_x + \frac{1}{m} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 2/m/\ddot{a}_x = a_x + \frac{m-2}{m} \\ 1/m/\ddot{a}_x = a_x + \frac{m-1}{m} \end{array} \right.$$

Efetuando a soma dessas parcelas, temos **m** rendas iguais a 1 pagas no final de cada subperíodo 1/m do ano. Representando por $a_x^{(m)}$ a renda total anual igual a 1 paga à razão de 1/m no final de cada período 1/m do ano, temos que as **m** rendas anteriores são equivalentes a **m** vezes a renda que consideramos. Portanto, podemos escrever que:

$$m a_x^{(m)} = a_x + \left(a_x + \frac{1}{m} \right) + \dots + \left(a_x + \frac{m-2}{m} \right) + \left(a_x + \frac{m-1}{m} \right) =$$

$$= m \cdot a_x + \frac{1+2+\dots+(m-2)+(m-1)}{m}$$

Aplicando a fórmula da soma de uma P.A., onde $a_1 = 1$, $a_n = m-1$ e $n = m - 1$, obtemos o seguinte somatório (s):

$$s = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{m-1}{2} (1+m-1) = \frac{(m-1) \cdot m}{2}$$

Dessa forma, obtemos:

$$m a_x^{(m)} = m \cdot a_x + \frac{(m-1) \cdot m}{2 \cdot m} \therefore a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m}; \text{ ou:}$$

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x - 1 + \frac{m-1}{2m} = \ddot{a}_x - \frac{2m-m+1}{2m} = \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m}$$

Se a anuidade fracionária fosse antecipada, teríamos por interpolação linear que:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= a_x^{(m)} + \frac{1}{m} = a_x + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{m} = a_x + \frac{m+1}{2m} = \\ &= \ddot{a}_x - 1 + \frac{m+1}{2m} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \end{aligned}$$

Se a renda unitária for diferida, teremos evidentemente que:

$$\begin{aligned} n/a_x^{(m)} &= n E_x \cdot a_{x+n}^{(m)} = n E_x \cdot \left(a_{x+n} + \frac{m-1}{2m} \right) \\ &= n E_x \cdot a_{x+n} + \frac{m-1}{2m} \cdot n E_x \therefore n/a_x^{(m)} = n/a_x + \frac{m-1}{2m} \cdot n E_x \quad (\text{Renda postecipada}). \end{aligned}$$

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} = n E_x \cdot \left(a_{x+n} + \frac{m+1}{2m} \right) \therefore n/\ddot{a}_x^{(m)} = n/a_x + \frac{m+1}{2m} \cdot n E_x \quad (\text{Renda antecipada}).$$

$$\text{Logo: } n/\ddot{a}_x^{(m)} - n/a_x^{(m)} = \left(\frac{m+1}{2m} - \frac{m-1}{2m} \right) \cdot n E_x = \frac{1}{m} \cdot n E_x$$

Se a renda unitária for temporária, obtemos imediatamente pela seguinte relação:

$$\begin{aligned} \text{Renda postecipada: } a_{x:n}^{(m)} &= a_x^{(m)} - n/a_x^{(m)} = \left(a_x + \frac{m-1}{2m} \right) - \left(n/a_x + \frac{m-1}{2m} \cdot n E_x \right) = \\ &= \left(a_x - n/a_x \right) + \frac{m-1}{2m} - \frac{m-1}{2m} \cdot n E_x \therefore \end{aligned}$$

$$\therefore a_{x:n}^{(m)} = a_{x:n} + \frac{m-1}{2m} (1 - n E_x)$$

Renda antecipada: $\ddot{a}_{x:n}^{(m)} = a_{x:n} + \frac{m+1}{2m} (1 - n E_x)$

Caso especial de anuidades de sobrevivência - anuidades contínuas:

Se reduzirmos cada vez mais a fração de tempo que separa 2 pagamentos consecutivos, os pagamentos vão ocorrendo cada vez com maior frequência, e menores, visto que o total pago no ano deve ser 1. Se o intervalo entre 2 pagamentos consecutivos tende a zero, temos uma anuidade que se chama contínua:

i) Vitalícia:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_x &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(a_x + \frac{m-1}{2m} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \right) = a_x + 1/2 & \text{ou seja: } \bar{a}_x &= \bar{\bar{a}}_x \\ \bar{\bar{a}}_x &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(a_x + \frac{m+1}{2m} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(a_x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2m} \right) = a_x + 1/2 & \text{ou seja: } \bar{\bar{a}}_x &= a_x + 1/2 \end{aligned} \right\}$$

ii) Diferida:

$$n/\bar{a}_x = n/\bar{\bar{a}}_x = n/a_x + \frac{1}{2} \cdot n E_x$$

iii) Temporária:

$$\bar{a}_{x:n} = \bar{\bar{a}}_{x:n} = a_{x:n} + \frac{1}{2} (1 - n E_x)$$

Em termos de comutações, as anuidades de sobrevivência fracionadas mais utilizadas têm as seguintes expressões:

Postecipadas:

$$a_x^{(m)} = \frac{N_{x+1} + \frac{m-1}{2m} \cdot D_x}{D_x}$$

$$n/a_x^{(m)} = \frac{N_{x+n+1} + \frac{m-1}{2m} \cdot D_{x+n}}{D_x}$$

$$a_{x:k}^{(m)} = \frac{N_{x+1} - N_{x+k+1} + \frac{m-1}{2m} (D_x - D_{x+k})}{D_x}$$

$$n/a_{x:k}^{(m)} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+k+1} + \frac{m-1}{2m} (D_{x+n} - D_{x+n+k})}{D_x}$$

Antecipadas:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x - \frac{m-1}{2m} \cdot D_x}{D_x}$$

$${}_n \overline{\ddot{a}}_x^{(m)} = \frac{N_{x+n} - \frac{m-1}{2m} \cdot D_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:k}^{(m)} = \frac{N_x - N_{x+k} - \frac{m-1}{2m} (D_x - D_{x+k})}{D_x}$$

$${}_n \overline{\ddot{a}}_{x:k}^{(m)} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+k} - \frac{m-1}{2m} (D_{x+n} - D_{x+n+k})}{D_x}$$

NOTA:

$a_x^{(m)}$ é um caso particular de ${}_n \overline{\ddot{a}}_x^{(m)}$
no qual $n = 0$

$a_{x:k}^{(m)}$ é um caso particular de ${}_n \overline{\ddot{a}}_{x:k}^{(m)}$
no qual $n = 0$

$\ddot{a}_x^{(m)}$ é um caso particular de ${}_n \overline{\ddot{a}}_x^{(m)}$
no qual $n = 0$

$\ddot{a}_{x:k}^{(m)}$ é um caso particular de ${}_n \overline{\ddot{a}}_{x:k}^{(m)}$
no qual $n = 0$