



MODELAGEM NUMÉRICA DE PROBLEMAS ELASTOPLÁSTICOS E  
VISCOPLÁSTICOS ATRAVÉS DE MÉTODOS SEM MALHA

Carlos Gouveia Riobom Neto

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: José Antonio Fontes Santiago  
José Claudio de Faria Telles

Rio de Janeiro  
Junho de 2020

MODELAGEM NUMÉRICA DE PROBLEMAS ELASTOPLÁSTICOS E  
VISCOPLÁSTICOS ATRAVÉS DE MÉTODOS SEM MALHA

Carlos Gouveia Riobom Neto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Orientadores: José Antonio Fontes Santiago  
José Claudio de Faria Telles

Aprovada por: Prof. Webe João Mansur  
Dr. Edmundo Guimarães de Araújo Costa  
Prof. Flavio Cezario  
Prof. José Antonio Marques Carrer  
Prof. Daniel Alves Castello

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
JUNHO DE 2020

Riobom Neto, Carlos Gouveia

Modelagem Numérica de Problemas Elastoplásticos e Viscopoplásticos através de Métodos Sem Malha / Carlos Gouveia Riobom Neto. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2020.

XV, 240 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: José Antonio Fontes Santiago

José Claudio de Faria Telles

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 206-217.

1. Plasticidade. 2. Viscoplasticidade. 3. Métodos Locais de Petrov-Galerkin. I. Santiago, José Antonio Fontes *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

# Agradecimentos

Aos meus pais, Riobom e Ciça, à minha irmã Mariana e a toda a minha família pelo constante apoio psicológico e incentivo ao longo desta jornada.

Aos professores Santiago e Telles pela orientação e contribuição definitiva para a minha formação acadêmica.

Aos professores Otto Rotunno e Webe Mansur pela minha iniciação na vida acadêmica.

Aos companheiros da Eletronuclear que permitiram e encorajaram a concretização deste sonho romântico de desenvolver uma pesquisa científica em um país como o Brasil.

A todos os meus amigos que me apoiaram nestes tempos difíceis.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## MODELAGEM NUMÉRICA DE PROBLEMAS ELASTOPLÁSTICOS E VISCOPLÁSTICOS ATRAVÉS DE MÉTODOS SEM MALHA

Carlos Gouveia Riobom Neto

Abril/2020

Orientadores: José Antonio Fontes Santiago  
José Claudio de Faria Telles

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho estuda a solução numérica de problemas elastoplásticos e viscoplásticos bidimensionais através da formulação fraca para métodos sem malha locais.

Para a formulação do fenômeno da plasticidade, foram adotados modelos de endurecimento isotrópico e cinemático e regras de fluxo associativas. Para a modelagem de problemas viscoplásticos, foram adotados os modelos de fluência de Perzyna e de Bailey-Norton. A correção plástica é realizada através dos Algoritmos do Plano Secante e da Projeção do Ponto Mais Próximo.

Para as formulações de Métodos Sem Malha, uma análise comparativa de duas variantes da família de Métodos de Petrov-Galerkin é apresentada, com a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados Móveis Estabilizado, derivadas difusas e diferentes técnicas de integração numérica.

Devido à ausência de soluções analíticas para a maioria dos problemas estudados, as soluções numéricas obtidas são comparadas com os resultados via métodos numéricos clássicos para atestar seu desempenho e estabilidade.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

NUMERICAL MODELLING OF ELASTOPLASTIC AND VISCOPLASTIC  
PROBLEMS BY MEANS OF MESHLESS METHODS

Carlos Gouveia Riobom Neto

April/2020

Advisors: José Antonio Fontes Santiago  
José Claudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

This work deals with the numerical solution of two-dimensional elastoplastic and viscoplastic problems by means of the weak formulation for local meshless methods.

The Plasticity phenomenon is formulated by associative flow laws with isotropic and kinematic hardening whereas viscoplastic materials are modelled by the Perzyna and Bailey-Norton creep laws. The plastic correction is performed by means of the Cutting Plane and Closest Point Projection Algorithms.

For the study of meshless methods, a comparative analysis of two variants of the Petrov-Galerkin Method is presented with the application of the Stabilized Moving Least Squares, diffuse derivatives and different numerical integration techniques.

The most of studied problems is compared with classical numerical methods, due to absence of the analytical solutions, in order to assess the performance and stability.

# Sumário

<b>Capítulo 1 - Introdução.....</b>	<b>1</b>
1.1 - Observações Gerais.....	5
1.2 - Revisão Bibliográfica.....	8
<b>Capítulo 2 - Conceitos Básicos da Teoria da Elasticidade.....</b>	<b>22</b>
2.1 - Equações de Equilíbrio e Geométricas.....	22
2.2 - Equações Constitutivas Elásticas.....	24
2.3 - Tensões Principais e Invariantes do Tensor de Tensões.....	28
2.4 - Energia de Deformação Elástica.....	31
2.5 - Tensão Octaédrica.....	32
2.6 - Espaço de Haigh-Westergaard.....	33
2.7 - Termodinâmica dos Materiais Elásticos.....	35
<b>Capítulo 3 - Teoria da Plasticidade.....</b>	<b>42</b>
3.1 - Modelos Elastoplásticos e Viscoplasticos Unidimensionais.....	42
3.1.1 – Modelo Elástico Perfeitamente Plástico.....	45
3.1.2 – Modelo Elastoplástico Bilinear.....	46
3.1.3 – Modelo Elástico Viscoplastico.....	50
3.2 - Critérios de Escoamento.....	54
3.2.1 – Critério de Tresca.....	57
3.2.2 – Critério de Von Mises.....	59
3.2.3 – Critério de Mohr-Coulomb.....	62
3.2.4 – Critério de Drucker-Prager.....	66
3.3 - Variáveis Internas dos Materiais Plásticos e Viscoplasticos.....	69
3.4 - Regras de Fluxo.....	73
3.4.1 – Materiais com Endurecimento – Postulado de Drucker e Regras de Fluxo Associativas.....	77
3.5 - Regras de Endurecimento.....	84
3.5.1 – Endurecimento Isotrópico.....	94
3.5.2 – Endurecimento Cinemático.....	98
3.5.3 – Endurecimento Combinado.....	102

3.6	- Equações Viscoplasticas.....	104
3.6.1	- Fluência.....	112
<b>Capítulo 4</b>	<b>- Métodos Sem Malha Aplicados a Problemas Elastoplásticos e Viscoplasticos.....</b>	<b>119</b>
4.1	- Métodos de Interpolação Sem Malha.....	120
4.1.1	- Método dos Mínimos Quadrados Móveis.....	120
4.1.1.1	- Método dos Mínimos Quadrados Móveis Estabilizado..	127
4.1.1.2	- Derivadas Difusas.....	128
4.1.1.3	- Método dos Mínimos Quadrados Móveis Ortogonais....	129
4.2	- Formulações Integrais Globais e Locais.....	131
4.3	- Formulação do MLPG-1 para Problemas Elastoplásticos.....	139
4.3.1	- Integração Numérica do MLPG-1.....	145
4.4	- Algoritmos de Retorno Mapeado.....	147
4.4.1	- Considerações sobre os Algoritmos de Incrementos de Carga.....	155
4.5	- Algoritmos para Problemas Viscoplasticos.....	158
4.6	- Formulação da Variante MLPG-5.....	160
4.7	- Adaptações para Problemas Planos.....	161
4.8	- Carregamento de Temperatura.....	164
4.9	- Discussões sobre os Parâmetros do MLPG.....	164
<b>Capítulo 5</b>	<b>- Exemplos Numéricos.....</b>	<b>167</b>
5.1	- Tubo Submetido à Pressão Interna.....	169
5.2	- Chapa Tracionada com Furo Circular.....	175
5.3	- Chapa Tracionada com Ranhura.....	180
5.4	- Solo Submetido a uma Carga Distribuída.....	184
5.5	- Viga Biapoiada com Carga Uniformemente Distribuída.....	190
5.6	- Disco com Núcleo Rígido Submetido à Tração.....	194
5.7	- Chapa Submetida à Retração.....	196
<b>Capítulo 6</b>	<b>- Conclusões.....</b>	<b>201</b>
	<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>206</b>
<b>Apêndice A</b>	<b>- Derivadas das Funções de Escoamento.....</b>	<b>218</b>
<b>Apêndice B</b>	<b>- Suavização de Funções de Escoamento Multissuperfície.....</b>	<b>221</b>
<b>Apêndice C</b>	<b>- Soluções Analíticas para Alguns Problemas Elastoplásticos...</b>	<b>225</b>



C.1 - Tubo Submetido à Pressão Interna.....	225
C.1.1 – Efeito do Endurecimento.....	230
C.2 - Viga Biapoiada com Carga Uniformemente Distribuída.....	231
<b>Apêndice D - Termoelastoplasticidade e Termoviscoplasticidade.....</b>	<b>236</b>

# Lista de Símbolos

## Capítulo 1

$\delta_{ij}$  – Delta de Kronecker;

$\zeta_{ijk}$  – Tensor de permutação de Levi-Civita;

$h(t)$  – Função de Heaviside (ou degrau);

$\Delta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  – Função Delta de Dirac com fonte no ponto  $\boldsymbol{\xi}$ ;

$\langle x \rangle$  – Parênteses angulares de Macaulay ( $= xh(x)$ );

$\cdot, \times, \otimes$  – Produtos escalar, vetorial e tensorial.

## Capítulo 2

EPT – Estado Plano de Tensões;

EPD – Estado Plano de Deformações;

$\sigma_{ij}$  – Tensor de tensões de Cauchy;

$b_i$  – Forças de massa;

$\rho$  – Massa específica;

$u_i$  – Campo de deslocamentos;

$\varepsilon_{ij}$  – Tensor de deformações específicas de Green-Lagrange;

$p_i$  – Vetor de forças de superfície;

$n_i$  – Vetor unitário normal;

$\Omega$  – Domínio global;

$\Gamma$  – Contorno global;

$\Gamma_1$  – Trecho de  $\Gamma$  com condições de contorno essenciais;

$\bar{u}_i$  – Deslocamentos prescritos em  $\Gamma_1$ ;

$\Gamma_2$  – Trecho de  $\Gamma$  com condições de contorno naturais;

$\bar{p}_i$  – Forças de superfície prescritas em  $\Gamma_2$ ;

$C_{ijkl}$  – Tensor elástico;

$\lambda_e, G$  – Constantes de Lamé ( $G$  também é chamado de Módulo de Elasticidade Transversal);

$E$  – Módulo de Elasticidade Longitudinal;

$\nu$  – Coeficiente de Poisson;  
 $\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\epsilon}_{ij}$  – Tensores de tensões e deformações esféricas;  
 $S_{ij}, e_{ij}$  – Tensores de tensões e deformações desviadoras;  
 $K$  – Módulo de dilatação volumétrica;  
 $\bar{K}, \bar{\nu}$  – Módulo de dilatação volumétrica e Coeficiente de Poisson para o EPT;  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – Tensões principais do tensor de tensões;  
 $\hat{\mathbf{n}}_i$  – Vetores unitários normais às facetas das tensões principais;  
 $I_1, I_2, I_3$  – Invariantes do tensor de tensões;  
 $S_1, S_2, S_3$  – Tensões principais do tensor de tensões desviadoras;  
 $J_2, J_3$  – Invariantes do tensor de tensões desviadoras;  
 $\alpha_s$  – ângulo de desvio polar, invariante do tensor de tensões desviadoras;  
 $U$  – Energia de deformação elástica;  
 $\mathbf{p}^{\text{oct}}$  – Vetor de tensão octaédrico;  
 $\mathbf{n}^{\text{oct}}$  – Vetor unitário que define o eixo octaédrico;  
 $\mathbf{v}^{\text{oct}}$  – Vetor unitário perpendicular ao vetor octaédrico;  
 $\mathbf{p}_\sigma$  – Vetor que representa o estado de tensões no espaço de Haigh-Westergaard;  
 $\mathbf{p}_{\sigma\mathbf{N}}, \mathbf{p}_{\sigma\mathbf{T}}$  – Componentes normal e cisalhante de  $\mathbf{p}_\sigma$  em relação ao plano octaédrico;  
 $v_i$  – Campo de velocidades;  
 $U_K$  – Energia cinética;  
 $P_{ext}$  – Potência externa;  
 $P_d$  – potência de deformação;  
 $r$  - Taxa de calor proveniente de fontes internas: função escalar por unidade de volume;  
 $\mathbf{q}$  – Vetor fluxo de calor, orientado para fora do corpo;  
 $P_Q$  – Taxa de calor interno;  
 $u_I$  – Densidade de energia interna;  
 $s$  – Densidade de entropia total interna ao corpo;  
 $\eta$  – Densidade de entropia produzida pelo corpo;  
 $T$  – Temperatura absoluta;  
 $\varphi$  – Gradiente de temperatura;  
 $h$  – Energia livre de Helmholtz;  
 $\Delta T$  – variação de temperatura com relação a uma referencial  $T_0$ ;  
 $\alpha_{ij}^{\Delta T}$  – Tensor de dilatação térmica.

### Capítulo 3

$\gamma$  – Módulo de viscosidade;

$\varepsilon^e, \varepsilon^p$  – Deformações elástica e plástica;

$\sigma_{Y0}$  – Tensão de escoamento;

$H'$  – Módulo de endurecimento plástico;

$E_T$  – Módulo elastoplástico tangente;

$F$  – Função de escoamento;

$f$  – Parcela da função de escoamento dependente dos invariantes do tensor de tensões (função homogênea de grau 1);

$\Phi$  – Função que caracteriza a variação da deformação plástica em função da função de escoamento  $F$  para problemas viscoplásticos;

$Y$  – Parâmetro que define o limite de escoamento do material para a função de escoamento  $F$ ;

$\mu$  – Parâmetro de influência das tensões esféricas no critério de Drucker-Prager;

$\phi$  – Ângulo de atrito interno – critério de Mohr-Coulomb;

$C$  – Intercepto de coesão do material – critério de Mohr-Coulomb;

$\xi_\alpha$  – variáveis internas genéricas;

$g_\alpha$  – funções de evolução associadas a cada variável interna  $\xi_\alpha$ ;

$h^e, h^p$  – parcelas elástica e plástica da energia livre de Helmholtz;

$\varepsilon_{ij}^p$  – Tensor de deformações plásticas;

$W^p$  – Trabalho plástico total;

$D^p$  – Dissipação plástica;

$\bar{\lambda}$  – Parâmetro de proporcionalidade – Regra de fluxo de Prandtl-Reuss;

$\bar{\sigma}$  – Tensão equivalente;

$\bar{\varepsilon}^p$  – Deformação plástica equivalente;

$Q$  – Função de potencial de fluxo ou potencial plástico;

$g_{ij}$  – Tensor gradiente da função de potencial plástico  $Q$ , para a regra de fluxo geral;

$\hat{g}_{ij}$  – Tensor gradiente da função de escoamento  $F$ , para a regra de fluxo associativa;

$\lambda$  – Parâmetro de consistência;

$k^I$  – Variável interna do endurecimento isotrópico (escalar);

$k_{ij}^C$  – Variável interna do endurecimento cinemático (tensor de segunda ordem);

$D^I$  – Parâmetro constitutivo do endurecimento isotrópico;

$C_{ijkl}^p$  – Tensor elastoplástico tangente (ou contínuo);  
 $H^I$  – Parâmetro constitutivo do endurecimento isotrópico;  
 $a^F$  – Constante de proporcionalidade associada à função de escoamento  $F$ ;  
 $D_{ijkl}^C$  – Tensor constitutivo do endurecimento cinemático;  
 $H^C$  – Parâmetro constitutivo do endurecimento cinemático;  
 $\beta$  – Coeficiente de endurecimento;  
 $\hat{g}^I$  – Função que compõe a equação de evolução da variável interna do endurecimento isotrópico  $k^I$ ;  
 $\hat{g}_{ij}^C$  – Função que compõe a equação de evolução da variável interna do endurecimento cinemático  $k_{ij}^C$ ;  
 $I_2^{\varepsilon^p}$  – Segundo invariante da variação das deformações plásticas;  
 $\varepsilon^c$  – Deformação de fluência;  
 $K_c, m, n$  – Parâmetros da Lei de Bailey-Norton;  
 $Q^c$  – potencial de fluência.

## Capítulo 4

MEF – Método dos Elementos Finitos;  
 MEC – Método dos Elementos de Contorno;  
 MLPG – Métodos Locais de Petrov-Galerkin;  
 MQM – Método dos Mínimos Quadrados Móveis;  
 MQMO – Método dos Mínimos Quadrados Móveis Ortogonal;  
 APS – Algoritmo do Plano Secante;  
 APPMP – Algoritmo da Projeção do Ponto Mais Próximo;  
 $nmp$  – Número de monômios da base polinomial do MQM/MQMO;  
 $ngp$  – Número do grau máximo dos monômios da base polinomial;  
 $\Omega_x$  – Domínio local de suporte do ajuste do MQM/MQMO centrado no ponto base  $\mathbf{x}$ ;  
 $R_x$  – Raio do suporte circular  $\Omega_x$  centrado no ponto base  $\mathbf{x}$ ;  
 $n_x$  – Número total de pontos da nuvem contida no domínio local  $\Omega_x$ ;  
 $\bar{\mathbf{x}}_i$  – Pontos da nuvem contida no domínio local  $\Omega_x$ ;  
 $r$  – Distância entre o ponto base  $\mathbf{x}$  e um ponto qualquer em  $\Omega_x$ ;  
 $w$  – Função peso do MQM/MQMO;  
 $\mathbf{p}_a^T$  – Base polinomial do MQM;  
 $\mathbf{a}$  – Coeficientes de combinação linear da base polinomial do MQM/MQMO;

$\hat{u}$  – Função aproximada do MQM/MQMO;  
 $\bar{U}_i$  – Valor da função a ser aproximada via MQM/MQMO no ponto  $\bar{\mathbf{x}}_i$ ;  
 $\varphi_i$  – Funções de aproximação (ou de forma) do MQM no ponto  $\bar{\mathbf{x}}_i$ ;  
 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{W}, \mathbf{P}$  – Matrizes da formulação do MQM, sendo  $\mathbf{A}$  a matriz momento,  $\mathbf{W}$  a matriz diagonal das funções peso e  $\mathbf{P}$  é a matriz da base polinomial aplicada a cada ponto  $\bar{\mathbf{x}}_i$ ;  
 $h$  – Espaçamento nodal;  
 $\mathbf{q}_a^T$  – Base polinomial do MQMO;  
 $\mathbf{Q}$  – Matriz transformação da base polinomial do MQM para o MQMO;  
 $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$  – Matrizes da formulação do MQMO;  
 $\boldsymbol{\varphi}_0$  – Funções de aproximação (ou de forma) do MQMO no ponto  $\bar{\mathbf{x}}_i$ ;  
 $v_i$  – Funções peso do Método dos Resíduos Ponderados;  
 $\alpha$  – Parâmetro de penalidade;  
 $\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*$  – Soluções fundamentais da formulação em integrais no contorno;  
 $\Omega_\xi$  – Domínio local de integração do MLPG centrado no ponto  $\boldsymbol{\xi}$ ;  
 $R_\xi$  – Raio do domínio local circular  $\Omega_\xi$  centrado em  $\boldsymbol{\xi}$ ;  
 $\partial\Omega_\xi$  – Contorno de domínio local  $\Omega_\xi$ ;  
 $\Gamma_\xi$  – Interseção entre  $\partial\Omega_\xi$  e  $\Gamma$ ;  
 $\Gamma_{\xi 1}$  – Interseção entre  $\partial\Omega_\xi$  e  $\Gamma_1$ ;  
 $\Gamma_{\xi 2}$  – Interseção entre  $\partial\Omega_\xi$  e  $\Gamma_2$ ;  
 $L_\xi$  – Trecho de  $\partial\Omega_\xi$  no interior do domínio global  $\Omega$ ;  
 $\mathbf{N}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}_u$  – Matrizes da formulação do MLPG, sendo  $\mathbf{N}$  a matriz dos vetores normais,  $\mathbf{D}$  a matriz constitutiva,  $\mathbf{B}$  a matriz das derivadas espaciais das funções de forma,  $\mathbf{V}$  a matriz das funções peso do MLPG e  $\boldsymbol{\delta}_u$  a matriz das condições de contorno essenciais;  
 $\mathbf{K}$  – Matriz global elástica do MLPG;  
 $\mathbf{D}^p$  – Matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  no regime plástico;  
 $\mathbf{K}_t$  – Matriz global tangente do MLPG;  
 $\mathbf{F}_E, \mathbf{F}_I$  – Forças externas e internas da formulação do MLPG;  
 $\Delta\mathbf{F}_R$  – Forças residuais das iterações plásticas do MLPG;  
 $\xi_i^g, \omega_i^g$  – Pontos e pesos de Gauss;  
 $np_g$  – Número de pontos de Gauss para cada variável de integração numérica;  
 $C_{ijkl}^{p(alg)}$  – Tensor elastoplástico algorítmico;  
 $\Delta t$  – Passo no tempo;

$\mathbf{K}^{vp}, \mathbf{G}^{vp}$  – Matrizes globais viscoplásticas;

$C_{ijkl}^{vp}$  – Tensor viscoplástico contínuo;

$d_1$  – Distância entre o centro  $\xi$  do subdomínio de integração do MLPG e o ponto mais próximo contido na nuvem de pontos em  $\Omega$ ;

$d_{nmp}$  – Distância entre o ponto base  $\mathbf{x}$  do suporte do ajuste do MQM/MQMO e o  $nmp$ -ésimo ponto mais próximo contido na nuvem de pontos em  $\Omega$ ;

$\lambda_\xi$  – Fator de escala para definição de  $R_\xi$ ;

$\lambda_{xnmp}, \lambda_{xh}$  – Fatores de escala para definição de  $R_x$ .

## Capítulo 5

NN – Número de pontos da nuvem distribuídos no domínio e contorno globais;

NX – Número de pontos adotados na formação do suporte do MQM/MQMO (internos a  $\Omega_x$ );

$p_0$  – Carga do limite de escoamento;

$p_U$  – Carga última, responsável pelo colapso estrutural;

NP – Número de incrementos de carga ao longo do carregamento partindo da carga nula até a carga final  $p$ , que não será atingida se  $p > p_U$ ;

IP – Índice do incremento de carga;

NT – Número de passos no tempo das iterações viscoplásticas;

NG – Número de pontos de Gauss para cada integração numérica;

$k_F$  – Coeficiente que indica o nível de plastificação, para o mapeamento e plotagem das zonas plásticas.

# Capítulo 1 – Introdução

O estudo da reologia dos materiais deformáveis vem se mostrando crucial para a análise de estruturas de edifícios e de componentes mecânicos. Quando submetidos a condições específicas, tais como tensões e temperaturas excessivas, diversos materiais comumente utilizados na indústria, com destaque para metais, polímeros e compósitos cimentícios, apresentam relação tensão-deformação dependente do tempo e do histórico de carregamentos aplicados a estes materiais.

A Teoria da Elasticidade Linear, extensivamente utilizada em problemas de análise estrutural, preconiza que o processo de deformação é reversível, ou seja, o corpo retorna a sua configuração indeformada quando cessada a aplicação do carregamento responsável pela deformação. Em outras palavras, o processo de deformação elástica é conservativo, ou seja, a configuração deformada final do material independe do histórico de carregamentos aplicado, o que caracteriza cada estado elástico como independente.

Este trabalho toma como ponto de partida a pesquisa desenvolvida por RIOBOM NETO [1] no âmbito da modelagem numérica de problemas viscoelásticos. As estruturas de concreto, por exemplo, apresentam propriedades viscoelásticas que, uma vez negligenciadas no projeto estrutural, podem acarretar problemas de segurança e adequação ao uso, tais como deformações excessivas.

Os materiais viscoelásticos apresentam relações constitutivas transientes que dependem do histórico de carregamentos, resultando em uma deformação que evolui ao longo do tempo, mesmo quando o material é submetido a uma tensão constante, o que caracteriza o fenômeno de deformação lenta ou *creep*. Do mesmo modo, com a imposição de uma deformação constante, o material apresenta uma redução de tensão ao longo do tempo devido ao fenômeno de relaxação. A curva 1 da figura 1.1 apresenta um exemplo da evolução da deformação lenta  $\varepsilon^c$  de materiais viscoelásticos, sendo um



comportamento esperado para certos materiais quando submetidos a tensões e temperaturas normais de utilização.

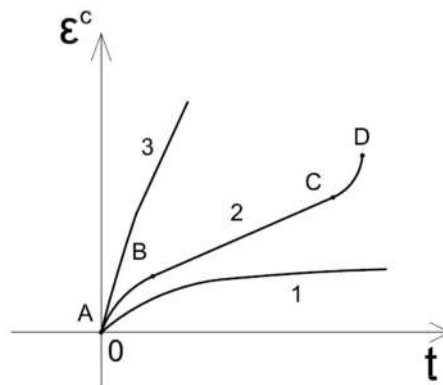


Figura 1.1 – Curvas típicas da evolução da deformação lenta em relação ao tempo para materiais viscoplásticos

Quando determinados materiais atingem um estado de tensões e deformações limite, chamado de limite de escoamento, pode-se observar o fenômeno de plastificação, onde ocorrem deformações que se revelam permanentes, mesmo quando o carregamento é removido. Este fenômeno de plastificação pode ser descrito fisicamente como a quebra de ligações químicas e formação de novas ligações ou como o movimento relativo entre partículas do solo, conferindo um caráter irreversível e, portanto, dissipativo ao processo, diferentemente do que ocorre para materiais elásticos.

Quando se inicia a aplicação do carregamento, o material elastoplástico clássico desenvolve deformações elásticas. Uma vez no regime plástico, este material pode desenvolver deformações plásticas permanentes sem permitir o aumento de tensão, o que caracteriza o material elástico perfeitamente plástico. É possível ainda que, no regime plástico, este material sofra aumento de tensão, o que caracteriza o fenômeno de endurecimento e gera como consequência o desenvolvimento de deformações elásticas reversíveis excedentes em conjunto com as deformações plásticas irreversíveis. Um caso menos comum e não explorado neste trabalho é o fenômeno de amolecimento, onde o material sofre redução de tensão à medida que a deformação plástica se desenvolve. Estes casos são ilustrados na figura 1.2 para um modelo elastoplástico unidimensional, com limite de escoamento  $\sigma_{y0}$  e com a curva 1 representando um endurecimento linear, a

curva 2 representando o material perfeitamente plástico e a curva 3 representando um amolecimento linear.

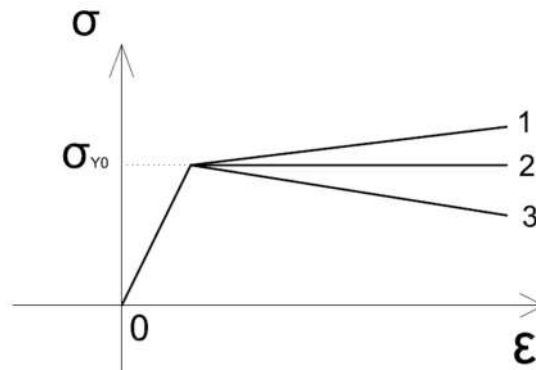


Figura 1.2 – Curvas típicas de materiais elastoplásticos

O que difere a Teoria da Plasticidade Clássica da Teoria da Viscoplasticidade é o caráter transiente da segunda. Após a passagem pelo regime elástico e pelo limite de escoamento, o material desenvolve uma deformação viscoplástica variável com o tempo mesmo com um estado de tensões inalterado. A curva 2 da figura 1.1 ilustra o comportamento típico do fenômeno de fluência viscoplástica, que pode ser dividido na etapa primária (semelhante à fluência viscoelástica – trecho AB), secundária (com taxa de deformação constante – trecho BC) e terciária (precedendo a ruptura – trecho CD).

A temperatura absoluta desempenha um importante papel no equacionamento das relações constitutivas plásticas e viscoplásticas, sendo geralmente observado um aumento do caráter plástico com o aumento de temperatura, como pode ser visto na curva 3 da figura 1.1, típica de materiais sujeitos à altas temperaturas. Esta pesquisa apresentará uma formulação termoelastoplástica e termoviscoplástica baseada na Teoria da Termodinâmica, o que evidentemente inclui o histórico de variação de temperatura como variável necessária para definir a configuração deformada final do corpo estudado.

Os Métodos sem malha representam uma alternativa promissora para a solução de Problemas de Valor de Contorno em substituição a abordagens tradicionais como o Método dos Elementos Finitos. Os métodos numéricos que dispensam a divisão do domínio em elementos apresentam maior flexibilidade para adaptações de malha em

problemas de modelagem de propagação de trincas além do custo computacional consideravelmente menor para a geração da malha.

O estudo dos Métodos Sem Malha é também motivado pela literatura consideravelmente menos extensa em comparação aos métodos numéricos tradicionais, o que garante um vasto campo de pesquisa a ser explorado. Muitos autores apostam no potencial destas metodologias para atingir popularidade semelhante ao Método dos Elementos Finitos, conforme será visto a seguir. Para que este desafiador objetivo seja atingido, é necessário difundir esta classe de métodos numéricos na cultura acadêmica, permitindo assim a detecção de vantagens que comprovem seu potencial. Parte integrante da pesquisa científica é a simples experimentação de soluções alternativas que, teoricamente, podem se tornar ferramentas poderosas.

Os próximos itens deste capítulo introdutório apresentam a notação e os conceitos matemáticos principais que serão utilizados neste trabalho além da revisão bibliográfica que contém um histórico geral do desenvolvimento da Teoria da Plasticidade e Viscoplasticidade e dos diversos Métodos Sem Malha.

No capítulo 2 deste trabalho, serão apresentados alguns conceitos fundamentais relacionados à Teoria da Elasticidade Linear, tais como as equações constitutivas elásticas, as relações associadas às tensões principais e aos invariantes de tensão, muito úteis em formulações de critérios de escoamento, e as equações geométricas e de equilíbrio lineares, que também serão adotadas para os problemas plásticos e viscoplásticos. Adicionalmente, será realizada uma breve discussão sobre os aspectos termodinâmicos dos materiais elásticos, constituindo um ponto de partida para o estudo da influência da temperatura em problemas plásticos e viscoplásticos.

No capítulo 3, serão descritos os modelos elastoplásticos e viscoplásticos básicos e os demais conceitos e formulações necessários para as soluções de problemas desta natureza, incluindo a apresentação dos critérios de escoamento tradicionais, das regras de fluxo e das formulações de endurecimento. A discussão no âmbito da Termodinâmica é estendida aos materiais plásticos e viscoplásticos para propiciar a inserção dos efeitos térmicos.

O capítulo 4 discorrerá brevemente sobre as características básicas da família de Métodos Locais de Petrov-Galerkin (MLPG), com ênfase na formulação da variante MLPG-1, que será adotada neste trabalho. Adicionalmente, serão apresentados os diversos processos numéricos iterativos para a modelagem da evolução da plastificação.

No capítulo 5, serão expostos os principais problemas estudados, com suas respectivas soluções analíticas e numéricas e as comparações entre elas para teste da metodologia discutida na pesquisa.

O capítulo 6 dissertará sobre as conclusões do trabalho e apresentará sugestões de pesquisas futuras.

## 1.1– Observações Gerais

Ao longo do texto deste trabalho, serão utilizadas as notações tensorial e indicial, cada qual onde for mais conveniente. Na notação tensorial, os tensores serão representados em negrito.

Na notação indicial, os tensores serão representados sem o negrito com índice subscrito indicando a componente. A derivada espacial de uma função  $f_i$  será escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = f_{i,j} \quad (1.1)$$

A derivada com relação ao tempo de uma função  $f_i$  será mencionada no texto com a simbologia a seguir:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \dot{f}_i \quad (1.2)$$

O delta de Kronecker  $\delta_{ij}$  representa a transformação identidade, sendo definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ,se\ i = j \\ 0 & ,se\ i \neq j \end{cases} \quad (1.3)$$

O tensor (ou simplesmente símbolo) de permutação de Levi-Civita de terceira ordem  $\zeta_{ijk}$  pode ser definido da seguinte forma:

$$\zeta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2) \\ -1, & \text{se } (i, j, k) = (1, 3, 2), (2, 1, 3) \text{ ou } (3, 2, 1) \\ 0, & \text{para os demais casos } (i = j, j = k \text{ ou } i = k) \end{cases} \quad (1.4)$$

A função de Heaviside (ou degrau)  $h(t)$  com descontinuidade localizada no ponto  $t = 0$  é definida como:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0) \\ 1, & t \in [0, +\infty) \end{cases} \quad (1.5)$$

Uma função  $f$ , definida no intervalo  $(-\infty, +\infty)$ , é de Classe Heaviside  $H^N$  quando

$$\begin{cases} f = 0, & \text{em } (-\infty, 0) \\ f \in C^N, & \text{em } [0, +\infty) \end{cases} \quad (1.6)$$

A função Delta de Dirac  $\Delta(\xi, \mathbf{x})$ , que pode ser interpretada fisicamente como uma carga concentrada aplicada em um ponto  $\mathbf{x} = \xi$  localizado em um domínio  $\Omega$ , possui as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \Delta(\xi, \mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \neq \xi \\ \int_{\Omega} \Delta(\xi, \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) &= 1 \\ \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \Delta(\xi, \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) &= f(\xi) \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde  $\mathbf{x}$  e  $\xi$  são posições de pontos do domínio  $\Omega$  e  $f$  é uma função contínua definida em  $\Omega$ .

Considerando a notação observada no estudo de fenômenos Viscoplasticos, as funções de Heaviside (ou degrau) podem ser escritas através dos parênteses angulares de Macaulay  $\langle \cdot \rangle$ , tal que

$$\langle x \rangle = xh(x) = \frac{x + |x|}{2} \quad (1.8)$$

ou ainda,

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Torna-se pertinente a definição da função sinal  $\text{sgn}(x)$  para indicar a derivação da função modular:

$$\text{sgn}(x) = \frac{d}{dx}|x| = 2H(x) - 1 = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

O valor de  $\text{sgn}(0)$  será mantido indeterminado, sendo um valor entre -1 e 1.

Dados vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , o produto tensorial  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  pode ser definido da seguinte forma:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j \quad (1.11)$$

Para dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , sempre que a notação vetorial for oportuna, os produtos escalar e vetorial entre os vetores serão representados respectivamente por  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  e  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , conforme definições a seguir:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a_i b_i \quad (1.12a)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \zeta_{ijk} a_j b_k \quad (1.12b)$$

Uma função  $f(\mathbf{x})$ , sendo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  o vetor das variáveis independentes, é dita homogênea de grau  $k$  sempre que

$$f(a\mathbf{x}) = a^k f(\mathbf{x}) \quad (1.13)$$

sendo  $a$  um escalar. O Teorema de Euler para funções homogêneas, conhecido também como Identidade de Euler, determina que, para a função  $f$  definida acima, tem-se

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = k f(\mathbf{x}) \quad (1.14)$$

## 1.2 – Revisão Bibliográfica

De acordo com OSAKADA [2], o estudo do comportamento elastoplástico de materiais tem sua origem nos experimentos realizados por Leonardo da Vinci para testar a resistência de materiais quando submetidos a esforços. Um mecanismo engenhoso proposto pelo inventor consistiu no preenchimento gradativo com areia de uma cesta suspensa por fios de ferro, onde o peso total de areia depositada na cesta definia a resistência do fio quando o mesmo rompia. Os diversos trabalhos de Leonardo da Vinci, desenvolvidos nos séculos XV e XVI, causaram pouca repercussão na comunidade científica e na Engenharia da época, sendo que muitos trabalhos sequer foram publicados.

Segundo LITTLE et al. [3], o primeiro trabalho científico que faz referência ao comportamento elastoplástico de materiais foi publicado apenas em 1699 por Guillaume Amontons. Além de propor uma modelagem para o fenômeno de fricção, este trabalho apresentou alguns registros dos experimentos de Leonardo da Vinci até então não publicados. Em seu estudo sobre ruptura de solos e resistência de muros de arrimo, COULOMB [4] publicou em 1776 um artigo relevante para a evolução da formulação teórica da Plasticidade, onde as leis de fricção apresentadas por Guillaume Amontons foram expandidas e enunciadas como a Lei de Fricção de Coulomb.

Segundo HORSTEMEYER e BAMMANN [5], a Plasticidade surgiu como ciência a partir do trabalho de TRESCA [6] de 1864, onde foram publicados resultados de experimentos de puncionamento e extrusão acompanhados da formulação do critério de escoamento que provavelmente é o mais antigo já registrado, sendo baseado na limitação da tensão cisalhante máxima atuante no material.

Ainda de acordo com OSAKADA [2], diversas observações relevantes foram registradas durante o século XIX. Em 1885, Johann Bauschinger realizou diversos experimentos para a determinação da tensão de escoamento em casos de ciclos de carregamentos envolvendo tração e compressão, sendo observadas assimetrias entre tensões de escoamento de tração e compressão, fenômeno conhecido atualmente como Efeito Bauschinger. Otto Mohr apresentou em 1882 uma representação gráfica do estado de tensões em um ponto material através de círculos definidos em um sistema de coordenadas planas cujos eixos são as tensões normais e cisalhantes em cada faceta do ponto material. Esta abordagem foi aplicada por Mohr para a definição de critérios para

caracterizar o limite de resistência de certos materiais, tais como o ferro fundido, através de resultados de ensaios de tração, compressão e torção.

Em relevante trabalho publicado em 1900, GUEST apud OSAKADA [2] foi o primeiro cientista a diferenciar o escoamento de metais dúcteis da ruptura de materiais frágeis. Seus experimentos levaram às mesmas conclusões obtidas por Tresca no que diz respeito à associação entre o limite de escoamento e a tensão cisalhante máxima atuante.

Importantes contribuições foram introduzidas pelo trabalho de Von Mises (MISES [7]) em 1913, tais como um dos critérios de escoamento mais simples para caracterizar materiais cuja plastificação independe da parcela esférica do estado de tensões. Este mesmo trabalho introduz uma proposta para relacionar deformações e tensões em materiais, similar à publicação anterior de LEVY [8] em 1871, que posteriormente seria aperfeiçoada para constituir a primeira proposta de formulação que relaciona a evolução das deformações plásticas ao estado de tensões no regime plástico, chamada pela literatura vigente de regra de fluxo. Em 1928, Von Mises (MISES [9]) apresentou uma primeira versão do Postulado da Dissipação Plástica Máxima, que é fundamental para diversas conclusões acerca da formulação constitutiva de materiais no regime plástico.

Em 1924, PRANDTL [10] foi responsável por aperfeiçoar a relação entre tensões e deformações no regime plástico proposta por Lévy e Von Mises ao introduzir a parcela de deformação elástica à formulação para o estado plano de deformações. Em 1930, REUSS [11] generalizou a formulação para problemas tridimensionais, dando origem à regra de fluxo de Prandtl-Reuss, que é considerada uma das primeiras tentativas de modelagem tridimensional do comportamento elastoplástico de sólidos.

Para a teoria moderna da Plasticidade, é possível associar o Efeito Bauschinger ao fenômeno de endurecimento. Entretanto, ODQVIST [12] propôs em 1933 uma forma simplificada de endurecimento que considera a simetria das tensões de escoamento de tração e compressão em ciclos de carregamentos, o que impede a formulação de reproduzir as observações de Bauschinger. No entanto, este tipo de endurecimento, chamado isotrópico, é utilizado com resultados satisfatórios em casos específicos, principalmente quando não ocorrem ciclos de carregamento envolvendo tensão e compressão, conforme será visto ao longo desta pesquisa.



As diversas propostas de modelos de Plasticidade apresentadas até o início do século XX eram associadas a materiais e áreas do conhecimento específicas. Buscando a unificação e generalização das teorias até então desenvolvidas, William Prager publicou importantes trabalhos ao longo das décadas de 40 e 50, dentre os quais esta pesquisa destaca PRAGER [13] [14], culminando com o lançamento do seu livro em 1959 (PRAGER [15]). Prager [16] também introduziu uma regra de endurecimento alternativo ao isotrópico, conhecida como endurecimento cinemático, que permite uma modelagem mais satisfatória do Efeito Bauschinger. Algumas modificações do modelo de endurecimento cinemático de Prager foram propostas, com destaque para o trabalho de ZEIGLER [17] em 1959.

No início dos anos 50, DRUCKER [18] estabeleceu um relevante modelo para a caracterização do fenômeno de endurecimento em materiais plásticos, enunciando o que hoje a literatura reconhece como Postulados de Drucker. Em 1952, DRUCKER e PRAGER [19] propuseram um critério de escoamento que consiste na inclusão da influência da tensão hidrostática à formulação de Von Mises [7], adequando a mesma à Mecânica dos Solos. Durante o mesmo período, HILL [20] (1948) e [21] (1950) também deixou suas contribuições para a unificação e solidificação dos fundamentos da Teoria da Plasticidade. NAGHDI [22] apresentou em 1960 uma interpretação para os postulados de Drucker, estabelecendo assim um conjunto de equações constitutivas compatíveis com materiais plásticos com endurecimento.

Segundo HORSTEMEYER e BAMMANN [5], a reologia dos materiais pode ser modelada através de duas diferentes abordagens. Na primeira, as relações constitutivas são baseadas em integrais hereditárias, onde o estado atual do material é determinado através das variáveis atuais juntamente com o histórico de evolução das variáveis em tempos anteriores. Esta abordagem é utilizada para a modelagem de materiais viscoelásticos, conforme apresentado em FLÜGGE [23], CHRISTENSEN [24], GURTIN e STERNBERG [25] e no trabalho que antecedeu esta pesquisa (RIOBOM NETO [1]).

A segunda abordagem considera que o estado atual de um material pode ser definido pelas variáveis de estado atuais juntamente com um conjunto de variáveis internas que seriam capazes de caracterizar o histórico de evolução das propriedades

mecânicas destes materiais. Estas variáveis internas não estariam associadas diretamente aos mecanismos microscópicos que regem o fenômeno de plastificação, estando as mesmas relacionadas a observações físicas macroscópicas que indiretamente modelam o comportamento do material no estado plástico. Para as duas abordagens, as relações constitutivas são pautadas por observações experimentais e pelas restrições impostas pela Termodinâmica.

O amadurecimento da modelagem de fenômenos plásticos está intimamente relacionado ao desenvolvimento da teoria das variáveis internas, conforme formalização pioneira de COLEMAN e GURTIN [26] em 1967. Este desenvolvimento ocorreu apoiado pelas evoluções das relações entre a Termodinâmica e a Mecânica do Contínuo, sobretudo pelas possibilidades trazidas pela “Termodinâmica Racional” pregada por Clifford Truesdell em 1968 (TRUESDELL [27]) e 1984 (TRUESDELL [28]), com fundamentos introduzidos por COLEMAN [29] em 1964.

Notáveis contribuições à associação da teoria das variáveis internas ao universo da plasticidade e viscoplasticidade foram apresentadas subsequentemente, tais como os trabalhos de KESTIN e RICE [30] e KRATOCHVIL e DILLON [31] em 1970, além das pesquisas de RICE [32] e MANDEL apud HORSTEMEYER e BAMMANN [5] em 1971. Em HALPHEN e NGUYEN [33] (1975), uma formulação para problemas plásticos com variáveis internas foi desenvolvida baseada na definição de um potencial de energia livre e um potencial de dissipação.

Anteriormente a este período, GREEN e NAGHDI [34] (1965) propuseram uma formulação para a Teoria da Plasticidade Clássica através da conciliação entre a Mecânica do Contínuo e a Termodinâmica, aplicando a Segunda Lei da Termodinâmica para impor restrições às equações constitutivas e assumindo que a deformação total poderia ser decomposta nas parcelas elástica e plástica. Esta abordagem permitiu a extensão da teoria para a aplicação em problemas de grandes deformações.

De acordo com HORSTEMEYER e BAMMANN [5], antes mesmo da formalização introduzida por Coleman e Gurtin em 1967, os trabalhos de Kröner do início da década de 60 (KRÖNER [35] [36], respectivamente em 1960 e 1963) foram os primeiros a aplicar o conceito de variáveis internas como forma de representar indiretamente os efeitos oriundos da plastificação de materiais, salientando inclusive o

fato de não ser necessária a associação direta destas variáveis aos fenômenos microscópicos responsáveis pela plastificação.

A abordagem da Termodinâmica Racional foi severamente criticada por aparentemente carecer de fundamentação teórica, assumindo arbitrariamente alguns axiomas sem a apresentação de argumentação satisfatória baseada em aspectos teóricos e experimentais. Dentre os textos mais questionadores, destaca-se o trabalho WOODS [37], que encara os axiomas da Termodinâmica Racional simplesmente como falsos. Este tema está em constante desenvolvimento e existem muitas questões a serem respondidas, conforme apresentado no livro de LEBON et al. [38]. Independentemente destes conflitos, apesar de a referida teoria aparentemente não apresentar consistência para uma formulação mais generalizada, sua compatibilidade com problemas específicos é explorada nas formulações plásticas e viscoplásticas.

Discorrendo especificamente sobre a Viscoplasticidade, que compartilha parte significativa das teorias associadas à plasticidade clássica, destaca-se a origem dos estudos dos fenômenos de fluência primária com a introdução da Lei de Andrade (LEMAITRE e CHABOCHE [39]) em 1910. Através do estudo de escoamento de soluções coloidais em tubos cilíndricos, BINGHAM [40] introduziu em 1922 uma relação constitutiva para fluidos em que o comportamento previsto para fluidos newtonianos seria registrado apenas para tensões cisalhantes que excedessem um determinado limite. Em 1929, NORTON [41] desenvolveu um modelo viscoplástico unidimensional, generalizado para o caso tridimensional por ODQVIST [42] em 1934, que associa a taxa de deformação por fluência secundária à tensão aplicada.

Em 1932, HOHENEMSER e PRAGER [43] propuseram um modelo viscoplástico tridimensional que relaciona a parcela desviadora do tensor de tensões à taxa de deformação de um sólido de Bingham incompressível. O modelo introduzido por Piotr Perzyna em 1963 e 1966 (PERZYNA [44] [45]) representou um marco para a formulação teórica dos fenômenos viscoplásticos, servindo como base para os demais desenvolvimentos que seriam apresentados posteriormente. Outros avanços foram registrados nos anos subsequentes, sendo convenientemente referenciados ao longo deste texto. Para um histórico mais detalhado sobre o desenvolvimento da Teoria da

Plasticidade e Viscoplasticidade, este texto recomenda a leitura dos artigos de OSAKADA [2] e HORSTEMEYER e BAMMANN [5].

Conforme será detalhado ao longo deste trabalho, a Teoria da Viscoplasticidade pode ser entendida como a eliminação de algumas restrições intrínsecas à plasticidade clássica. Alternativamente, alguns autores consideram que a plasticidade clássica é um acaso particular da formulação viscoplástica, justamente devido à introdução de restrições adicionais. Consequentemente, grande parte dos avanços registrados para a Teoria da Plasticidade são aplicáveis também para as formulações viscoplásticas.

Como pode ser constatado nesta exposição, a Teoria da Plasticidade vem sendo desenvolvida através de contribuições oriundas de diversos ramos da ciência, tais como a Matemática, Física, Metalurgia, Mecânica e Engenharia, cada qual com suas próprias culturas, modelos, definições e notações. Felizmente, existem hoje na literatura diversos trabalhos que visam apresentar estas teorias de maneira unificada e organizada, permitindo assim um entendimento mais geral sobre as diversas linhas de pesquisa associadas ao tema.

Dentre estes trabalhos, é possível destacar a obra de LUBLINER [46], que apresenta a Plasticidade do ponto de vista físico, sobretudo da Termodinâmica, e servirá como base para o desenvolvimento teórico desta pesquisa. O texto de SIMO e HUGHES [47] destaca os aspectos matemáticos dos modelos plásticos e viscoplásticos. Outros livros se destacam na literatura, tais como CHAKRABARTY [48], MENDELSON [49], NADAI [50] e NEGAHBAN [51]. O livro de LITTLE et al. [3] apresenta a teoria do ponto de vista do estudo de pavimentos. Os livros de BATHE [52], ZIENKIEWICZ e TAYLOR [53], OWEN e HINTON [54] e CRISFIELD [55] enumeram os diversos esquemas de modelagem computacional de materiais elastoplásticos, tendo como enfoque o Método dos Elementos Finitos (MEF). Já os livros de TELLES [56] e BREBBIA et al. [57] apresentam uma adaptação destas formulações para o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

No âmbito da modelagem de problemas plásticos e viscoplásticos através de métodos numéricos, toma-se como ponto de partida a literatura associada ao MEF, visto que a popularidade deste método garante o acesso a uma vasta bibliografia. A adaptação

das formulações numéricas de problemas plásticos via MEF para o universo dos métodos sem malha é parte integrante dos objetivos desta pesquisa.

Os procedimentos numéricos para a modelagem de problemas plásticos e viscoplásticos mais utilizados estão associados a formulações incrementais que envolvem esquemas de predição-correção, dentre os quais destacam-se o Algoritmo de Retorno Radial (*Radial-Return Algorithm*) e sua generalização conhecida como Algoritmo de Retorno Mapeado (*Return-Mapping Algorithm*), introduzido por MAENCHEN e SACKS [58] e WILKINS [59] em 1964, e o Algoritmo da Tensão Inicial (*Initial-Stress Algorithm*), apresentado por ZIENKIEWICZ et al. [60] em 1969.

ZIENKIEWICZ e CORMEAU [61] [62] (1972 e 1974, respectivamente) apresentaram relevante formulação para a solução de problemas viscoplásticos via MEF. Em 1985, SIMO e TAYLOR [63] apresentam o conceito de tensor tangente consistente aplicado a problemas de plasticidade com o uso de Algoritmos de Retorno Mapeado. Maiores detalhes acerca destes algoritmos podem ser encontrados nos trabalhos de SIMO e HUGHES [47], SIMO e TAYLOR [64], LUBLINER [46], HUANG e GRIFFITHS [65] e BATHE [52].

Os métodos numéricos tradicionais baseados na discretização do domínio ou contorno em elementos, tais como o MEF e o MEC, tomam como ponto de partida as formulações globais fracas do Problema de Valor de Contorno (PVC) em estudo. À cada elemento é associada uma função de interpolação que permite determinar as grandezas de estudo ao longo do elemento através dos nós que o constitui, propiciando ainda a integração do domínio ou contorno global através da integração de cada elemento.

Apesar de consagrados e amplamente difundidos, os métodos com malha podem apresentar diversas limitações, especialmente quando utilizados para o estudo de problemas de propagação de falhas, onde são necessárias sucessivas adaptações nas malhas para a introdução de descontinuidades à medida que as trincas se desenvolvem. O próprio pré-processamento do MEF pode representar parte significativa do custo computacional total, dada a complexidade dos processos de geração de malha, especialmente em regiões de concentrações de tensões como bordos de aberturas e trincas.

Os Métodos sem Malha, por sua vez, não exigem a discretização do domínio em elementos, sendo especificamente dedicados à interpolação de pontos dispostos aleatoriamente. Adicionalmente, a adoção de formulações fracas locais permite a dispensa da criação de células acessórias para a integração espacial intrínseca aos métodos numéricos baseados em formulações fracas.

O desenvolvimento dos Métodos sem Malha (ou *Meshless*) é consideravelmente mais recente do que os métodos numéricos tradicionais com malha. Em 1964, KUPRADZE e ALEKSIDZE [66] apresentaram uma abordagem para a solução de PVCs que consistia na criação de fontes pontuais virtuais de intensidades desconhecidas formando um contorno fictício exterior ao domínio real. A ideia seria obter valores para as intensidades das fontes capazes de gerar as condições de contorno através da superposição das soluções fundamentais associadas a cada fonte, o que geraria um sistema linear de equações. Uma vez obtidas as intensidades das fontes fictícias, a solução aproximada em qualquer ponto do domínio poderia então ser calculada através da superposição dos efeitos das fontes. Este expediente é conhecido como Método das Soluções Fundamentais (MSF) e vem se desenvolvendo para os diversos problemas cuja solução fundamental é conhecida ou pode ser obtida numericamente, como no caso de problemas de Mecânica da Fratura (TELLES et al. [67]).

Em 1977, é registrado no ramo da astrofísica um importante começo para a disseminação do estudo de Métodos sem Malha com a introdução do Método de Hidrodinâmica das Partículas Suavizadas ou *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) por LUCY [68] e GINGOLD e MONAGHAN [69].

Segundo BELYTSCHKO et al. [70], poucos esforços foram direcionados para o desenvolvimento de abordagens desta natureza até os anos 1990, quando NAYROLES et al. [71] (1992) apresenta um método numérico que toma como ponto de partida a formulação fraca do MEF e adota um esquema de interpolação através de pontos aleatórios em substituição aos elementos finitos, sendo batizado de Método dos Elementos Difusos (MED) ou *Diffuse Element Method* (DEM). O esquema de interpolação do referido trabalho, introduzido por LANCASTER e SALKAUSKAS [72] em 1981, é conhecido como Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM) ou *Moving Least Squares* (MLS), que a rigor se caracteriza por um ajuste de curva e não por uma

interpolação propriamente dita. Por enquanto, este texto manterá o MQM como uma técnica de “interpolação” para facilitar a compreensão do papel desta metodologia na formulação numérica e assim possibilitar uma comparação mais direta com outros métodos numéricos. O entendimento do MQM como um ajuste de curva ficará mais claro no capítulo 4.

O MED é então aperfeiçoado por BELYTSCHKO et al. [73] (1994) com a apresentação do Método de Galerkin Livre de Malha (MGLM) ou *Element-free Galerkin* (EFG), onde o MQM é aplicado à formulação do MEF via Galerkin. Apesar de eliminar a interpolação via elementos finitos, esta técnica não evita a necessidade da criação de células auxiliares para realizar a integração do domínio exigida pela formulação fraca global, razão pela qual alguns autores (ATLURI e SHEN [74]) salientam que esta metodologia não pode ser classificada como um Método Verdadeiramente Sem Malha. Apesar do maior custo computacional em relação ao SPH, o MGLM vem apresentando satisfatória consistência e estabilidade segundo registros da literatura (BELYTSCHKO et al. [70]).

Ainda em 1994, o artigo de LU et al. [75] apresenta algumas abordagens alternativas para o MGLM, dentre as quais podem ser destacadas o uso do Método dos Mínimos Quadrados Móveis Ortogonais (MQMO) ou *Orthogonal Moving Least Squares* (OMLS), que elimina o esforço computacional de inversão matricial intrínseco ao MQM tradicional, e o uso de um princípio variacional alternativo objetivando substituir a formulação via Multiplicadores de Lagrange tradicional para propiciar a imposição direta das condições de contorno essenciais.

As Funções de Base Radial (FBR) ou *Radial Base Functions* (RBF), propostas para suportes compactos por WENDLAND [76] e WU [77] em 1995, constituem uma forma alternativa ao MQM/MQMO para a interpolação de uma nuvem aleatória de pontos em Métodos Sem Malha (ATLURI e SHEN [74]). Anteriormente a 1995, técnicas numéricas envolvendo funções de base radial foram propostas, por exemplo, para o Método dos Elementos de Contorno de Reciprocidade Dual (MECRD) ou *Dual Reciprocity Boundary Element Method* (DRBEM), que foi proposto inicialmente em 1983 por BREBBIA e NARDINI [78] para problemas elastodinâmicos.

No trabalho de WROBEL e BREBBIA [79] (1987), a técnica da Reciprocidade Dual é utilizada para a solução numérica da equação da difusão não-linear via MEC, onde as integrais no domínio intrínsecas à formulação fraca do MEC<sup>1</sup> para problemas não-homogêneos é transformada em uma integral no contorno através da aproximação do termo difusivo pela soma dos produtos de funções temporais e espaciais, sendo estas últimas baseadas no conceito de funções de base radial. Uma descrição mais detalhada do MECRD pode ser encontrada no texto de PATRIDGE et al. [80] (1991). No trabalho de GOLDBERG [81] (1995), as FBR foram utilizadas na solução numérica particular da equação de Poisson, ficando a solução homogênea a cargo do MSF.

Diversas metodologias numéricas alternativas baseadas na disposição aleatória de pontos no domínio foram propostas, com destaque para o Método das Partículas Reprodutoras do Núcleo (MPRN) ou *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM) por LIU et al. [82] (1993), onde são impostas condições de consistência para garantir que as funções de forma da aproximação reproduzam de maneira exata uma determinada base de funções, e o Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade (MEFPU) ou *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM) por BABUSKA e MELENK [83] (1996). BELYTSCHKO et al. [70] destaca que os trabalhos [83] e DUARTE e ODEN [84] (1996) representam um grande avanço no estudo dos Métodos sem Malha, uma vez que é demonstrada a convergência da classe de métodos baseados no MQM e a inserção da mesma na família de Métodos de Partição da Unidade, como também pode ser visto em ATLURI e SHEN [74].

A concepção de técnicas para a interpolação de pontos dispostos aleatoriamente como MQM e FBR permite a aplicação direta destas aproximações na formulação forte do problema, o que caracteriza o Método de Colocação Pontual (MCP) ou *Point Collocation Method* (PCM), com destaque para os trabalhos de OÑATE et al. [85] de 1996, ALURU [86] de 2000 e ATLURI et al. [87] de 2006. Apesar de sua simples implementação, a formulação forte pode acarretar a aplicação de derivadas de ordem

---

<sup>1</sup> Partindo da aplicação do Método dos Resíduos Ponderados na formulação forte, muitos autores atribuem a expressão “Formulação Fraca” ao resultado da primeira integração por partes, em que se baseia o MEF. O resultado da segunda integração por partes, gerando as integrais no contorno que caracterizam o MEC, é chamada pelos mesmos autores como “Formulação Inversa”.



superior nas funções que compõem a solução aproximada, o que pode causar instabilidades numéricas (FONTES JR [88]).

Outros desenvolvimentos paralelos podem ser citados, como o Método das Diferenças Finitas Generalizado (MDFG) ou *Generalized Finite Difference Method* (GFDM), proposto inicialmente por PERRONE e KAO [89] em 1975 e aperfeiçoado por LISZKA e ORKISZ [90] em 1980, que possui a capacidade de lidar com disposições aleatórias de pontos.

Tendo como base a formulação fraca do MEC, foi desenvolvido o Método de Contorno Livre de Elementos (MCLE) ou *Boundary Element-free Method* (BEFM) através dos trabalhos de KITIPORNCHAI et al. [91] (2005) e LIEW et al. [92] (2006), adotando o MQMO como método de interpolação em substituição à interpolação ao longo dos elementos de contorno.

O Método Verdadeiramente Sem Malha que será extensivamente explorado neste trabalho em problemas viscoplásticos pertence à família de metodologias numéricas conhecidas na literatura como Métodos Locais de Petrov-Galerkin (MLPG), onde uma formulação fraca local é utilizada para eliminar a necessidade de criação de células para a integração do domínio oriunda de formulações fracas globais típicas do MEF e MGLM. São destacados os trabalhos pioneiros de ATLURI e ZHU [93] [94], ambos em 1998, onde a versão local da formulação fraca via MEF é aplicada a metodologias de interpolação sem malha. Ainda no mesmo ano, ZHU et al. [95] apresenta o Método da Equação de Contorno Local (MECL) ou *Local Boundary Integral Equation* (LBIE), onde é proposta uma metodologia numérica sem malha baseada na versão local da formulação fraca do MEC.

Desenvolvida na COPPE, a tese de MIERS [96] (2007) aplicou o MCLE e MECL para problemas de mecânica da fratura fazendo uso da Função de Green Numérica (FGN), sendo também aplicado o MCLE para problemas elastoplásticos. Já a tese de SILVA [97] (2010) elimina a necessidade da criação de células para a integração do domínio oriunda da formulação via MEC para problemas elastoplásticos dinâmicos através da aproximação das tensões plásticas e forças inerciais via MQMO.

O trabalho de ATLURI e SHEN [74] (2002) é uma das mais importantes referências deste trabalho, uma vez que apresenta um panorama geral das diversas metodologias numéricas desenvolvidas com o intuito de eliminar a interpolação e integração do domínio por elementos, listando os diversos mecanismos de interpolação (MQM, FBR, Partição da Unidade, etc.) e ilustrando o MLPG como uma família de métodos numéricos divididos em 6 categorias (de MLPG-1 a MLPG-6), conforme será apresentado com mais detalhes no capítulo 4 desta pesquisa. A título de ilustração, a variação MLPG-2 adota a função Delta de Dirac (equação (1.7)) como função de ponderação da versão local da formulação fraca do MEF, o que resulta na formulação forte do MCP. Já a variante MLPG-4 utiliza a versão local da formulação do MEC, o que resulta no MECL.

A presente pesquisa será baseada essencialmente na variante MLPG-1, que se caracteriza basicamente pela formulação fraca local do MEF adotando como função de ponderação (ou de teste) a função peso adotada para a interpolação via MQM ou FBR, conforme descrição em ATLURI e SHEN [74] para problemas de potencial. Dentre os trabalhos mais recentes sobre a referida variante, destaca-se o artigo de HAN e ATLURI [98] (2011), onde o MLPG-1 é aplicado em problemas elásticos com a aplicação das técnicas de interpolação para os deslocamentos e deformações, o que elimina completamente a execução de derivadas das funções do MQM na formulação fraca local. Adicionalmente, a abordagem considera que, apesar de serem de mesma natureza, as funções peso e de ponderação podem apresentar suportes de tamanhos diferentes e arbitrários, o que gera uma matriz global assimétrica.

A utilização de formulações fracas locais implica a integração numérica dos subdomínios formados pelos suportes das funções de ponderação, constituindo uma etapa determinante para a precisão e custo computacional global da metodologia numérica sem malha. Neste sentido, diversas pesquisas vêm sendo desenvolvidas com o objetivo de melhorar a eficiência e a confiabilidade das técnicas de integração numérica para os métodos sem malha. Dentre as formulações com aplicabilidade no universo desta pesquisa, podem ser citados os trabalhos de PEIRCE [99] (1957) MA et al. [100] (1996), DE e BATHE [101] (2001), PECHER [102] (2006), MAZZIA et al. [103] (2007), MAZZIA e PINI [104] (2010) e SARADA e NAGARAJA [105] (2011).

A tese de doutorado de FONTES JR [88] (2014), desenvolvida na COPPE, apresenta uma metodologia numérica verdadeiramente sem malha para problemas de mecânica da fratura com o uso da formulação do MLPG-1 para problemas elásticos. A formulação da mecânica da fratura é introduzida através da aplicação do MSF com Função de Green Numérica especificamente para as regiões do domínio com presença de trincas e o acoplamento com o MLPG-1, utilizado nas regiões sob o regime elástico sem trincas, é realizado através de processos iterativos. Adicionalmente, é feito um comparativo entre as diversas técnicas de integração dos subdomínios do MLPG-1 supracitadas.

Algumas contribuições recentes para a aperfeiçoamento do MQM, sobretudo visando sua aplicação no EFG e MLPG de forma mais eficiente e estável, precisam ser citadas. Os trabalhos de LI e LI [106] e LI e WANG [107] propõem uma simples solução para aprimorar a estabilidade do MQM, resultando no Método dos Mínimos Quadrados Estabilizado (MQME) ou *Stabilized Moving Least Squares* (SMLS). MIRZAEI et al. [108] apresenta o Método dos Mínimos Quadrados Generalizado (MQMG) ou *Generalized Moving Least Squares* (GMLS), onde são evitadas as derivadas das funções de aproximação do MQM nas integrações espaciais dos Métodos Sem Malha, introduzindo ainda o conceito de derivadas difusas, que pode contribuir para uma considerável redução do custo computacional do MQM devido à simplificação da execução das derivadas das funções de aproximação.

MEHRABI e VOOSOGHI [109] apresentam uma modalidade do MQM que permite a atualização recursiva das funções de aproximação com a ampliação do suporte (e, conseqüentemente, da nuvem de pontos), conhecida como Método dos Mínimos Quadrados Móveis Recursivo ou *Recursive Moving Least Squares* (RLS ou RMLS). Adicionalmente, WANG et al. [110] apresenta um processo de regularização do MQM para melhorias na estabilidade da aproximação, gerando o MQM regularizado ou *Regularized Moving Least Squares* (RMLS). Este trabalho ainda propõe uma versão do MQM que garante a propriedade do Delta de Kronecker para as funções de aproximação, chamada de MQM Regularizado Interpolante (MQMRI) ou *Regularized Improved Interpolating MLS* (IIMLS).

Quanto ao uso de Métodos Sem Malha para problemas plásticos e viscoplásticos, merece menção o trabalho de CHEN et al. [111] de 2004, onde o MGLM via MQM é utilizado para a solução de problemas de Plasticidade Clássica  $J_2$  tridimensionais e planos com propagação de fissuras. O trabalho de PENG et al. [112] (2011) propõe uma formulação em números complexos do MGLM para problemas elastoplásticos com a adoção do Método dos Mínimos Quadrados com Variáveis Complexas (MQMVC) ou *Complex Variable Moving Least Squares* (CVMLS). Esta variante do MQM, proposta por CHENG e LI [113] e LIEW et al. [114] (2007), adota a representação em números complexos para as grandezas vetoriais bidimensionais aproximadas, sendo adotada em [112] sob a alegação de ganhos em precisão frente ao MGLM via MQM tradicional.

# Capítulo 2 – Conceitos Básicos da Teoria da Elasticidade

O estudo da Teoria da Plasticidade e Viscoplasticidade desenvolvido neste trabalho toma como ponto de partida a formulação da Teoria da Elasticidade Linear, conforme apresentada em TIMOSHENKO e GOODIER [115]. O objetivo principal deste capítulo é apresentar as equações de equilíbrio e geométricas que serão utilizadas juntamente com as equações constitutivas elastoplásticas e viscoplásticas, que serão estudadas no próximo capítulo. Adicionalmente, algumas observações acerca do estudo de tensões principais e invariantes do tensor de tensões serão ilustradas devido a sua utilidade para o desenvolvimento deste trabalho.

Além da não-linearidade física oriunda dos efeitos da plastificação do material, a formulação adotada nesta pesquisa será considerada geometricamente linear, sendo associada ao sistema de coordenadas Lagrangianas. Deste modo, as equações diferenciais de equilíbrio e geométricas serão consideradas lineares.

## 2.1 – Equações de Equilíbrio e Geométricas

O corpo deformável estudado está representado pelo domínio  $\Omega$  e a sua superfície externa pelo contorno  $\Gamma$ , conforme a figura 2.1. Todas as grandezas em estudo variam de acordo com o vetor posição  $\mathbf{x}$ , relativo ao sistema de coordenadas Lagrangianas, e o tempo  $t$ . O campo de deslocamentos é denotado por  $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ , não sendo admitidas descontinuidades ao longo do domínio  $\Omega$ .

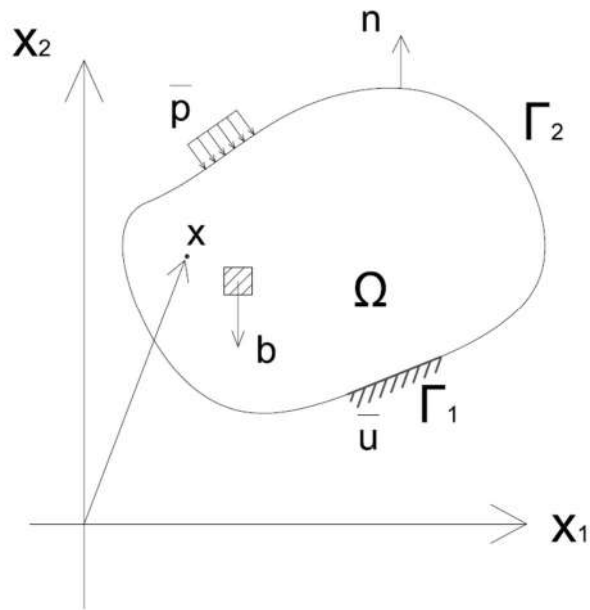


Figura 2.1 – Corpo deformável de estudo

Para o domínio  $\Omega$ , as equações de equilíbrio, que relacionam tensões e carregamentos, assumem a forma

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x},t) + b_i(\mathbf{x},t) = 0 \quad em \ \Omega \quad (2.1)$$

onde  $\sigma$  é o tensor de tensões de Cauchy e  $\mathbf{b}$  representa a força de massa ao longo do volume do corpo. A equação de equilíbrio sugere a ausência de forças resultantes no sistema além da inexistência de movimento de corpo rígido. Porém, em problemas viscoplásticos, as tensões e deformações são transientes, o que não caracteriza um sistema estático. No entanto, o comportamento desta variação temporal produz forças inerciais desprezíveis, justificando a adoção de equações de equilíbrio estáticas. Desta forma, a formulação de problemas viscoplásticos em equilíbrio estático recebe o nome de formulação quasi-estática. Para situações de movimento, as equações (2.1) recebem o acréscimo das forças de inércia, gerando a formulação dinâmica

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x},t) + b_i(\mathbf{x},t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x},t) \quad em \ \Omega \quad (2.2)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do corpo.

Para o contorno  $\Gamma$ , as equações de equilíbrio relacionam as forças  $\mathbf{p}$  aplicadas na superfície com o estado de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  de acordo com a equação de Cauchy

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)n_j(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Gamma \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à superfície  $\Gamma$ . A equação de Cauchy pode ser aplicada ainda em cada ponto  $\mathbf{x}$  interno ao domínio  $\Omega$  para o cálculo do vetor tensão  $\mathbf{p}$  em uma faceta cujo vetor normal é  $\mathbf{n}$ .

As equações geométricas, que associam deformações e deslocamentos, são apresentadas neste trabalho em sua forma linear

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t) \right) \quad (2.4)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor de deformações específicas de Green-Lagrange.

Para garantir a unicidade da solução do problema elastoplástico ou viscoplástico, é necessário definir condições de contorno e iniciais. As condições prescritas no contorno  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  podem ser escritas como:

- Essenciais (deslocamentos prescritos):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (2.5)$$

- Naturais (forças de superfície prescritas):

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (2.6)$$

## 2.2 – Equações Constitutivas Elásticas

As equações constitutivas relacionam as tensões e deformações, ou seja, caracterizam a resposta em deformações provocada por carregamentos aplicados no corpo deformável. Estas equações compõem o principal tema de estudo deste trabalho, uma vez que o comportamento elastoplástico e viscoplástico do material influencia justamente a formulação destas equações. De um modo geral, as relações constitutivas são definidas através de modelos cujos parâmetros são obtidos em ensaios de laboratório ou no campo.

Adotando a hipótese de material isotrópico e homogêneo, as equações constitutivas para materiais elásticos lineares são descritas pela Lei de Hooke Generalizada para problemas tridimensionais

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) \\ C_{ijkl} &= G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda^e \delta_{ij}\delta_{kl}\end{aligned}\quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{C}$  é o tensor isotrópico de quarta ordem para materiais elásticos lineares (com todas as simetrias associadas),  $\lambda^e$  e  $G$  são as constantes de Lamé e  $G$  é chamado ainda de módulo de elasticidade transversal (VILLAÇA e GARCIA [116]). A equação (2.7) pode ser escrita alternativamente como

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \lambda^e \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t) + 2G \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (2.8)$$

As constantes de Lamé se relacionam com o módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$  de acordo com as relações:

$$\lambda^e = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.9a)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.9b)$$

Para problemas isotrópicos, pode ser conveniente dividir os tensores de tensão e deformação nas parcelas esférica e desviadora. A parcela esférica do tensor de deformações é responsável pela variação de volume do corpo, sem distorções ou mudanças de forma. Esta variação de volume é provocada pela parcela esférica do tensor de tensões, também chamada de estado hidrostático de tensões. Já a parcela desviadora é responsável pela mudança de forma do corpo sem mudança de volume e é provocada pela parcela desviadora do tensor de tensões. Esta divisão se mostra pertinente para o estudo de materiais isotrópicos elásticos, viscoelásticos, elastoplásticos e viscoplásticos, tendo em vista que, para estes tipos de materiais, geralmente se observa comportamentos diferenciados nas equações constitutivas para cada parcela, conforme será visto no próximo capítulo deste texto.



Sendo  $\tilde{\sigma}$  o tensor de tensões esférico e  $S$  o desviador, estes se relacionam com o tensor de tensões  $\sigma$  da seguinte forma:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (2.10a)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (2.10b)$$

Sendo  $\tilde{\epsilon}$  o tensor de deformações esférico e  $e$  o desviador, estes se relacionam com o tensor de deformações  $E$  da seguinte forma:

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \quad (2.11a)$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \quad (2.11b)$$

Para materiais isotrópicos, as relações constitutivas elásticas lineares separadas para os efeitos esféricos e desviadores são escritas como

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, t) = 3K \tilde{\epsilon}_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (2.12a)$$

e

$$S_{ij}(\mathbf{x}, t) = 2G e_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (2.12b)$$

onde  $K$  é o módulo de dilatação volumétrica, que se relaciona com o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson de acordo com a relação

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.13)$$

Combinando as equações de equilíbrio (2.2), as equações geométricas (2.4) e as equações constitutivas (2.8), obtém-se uma equação de governo que relaciona o campo de deslocamentos diretamente com as forças de massa, tendo como parâmetros as constantes que definem as propriedades elásticas do corpo em estudo. O resultado das operações é conhecido como a equação de Navier, expressa a seguir:

$$Gu_{i,jj}(\mathbf{x},t) + (\lambda^e + G)u_{j,ji}(\mathbf{x},t) + b_i(\mathbf{x},t) = 0 \quad (2.14)$$

A equação constitutiva elástica (2.8), que foi utilizada para a obtenção da equação de Navier, está apresentada na sua forma mais geral para problemas tridimensionais. Para problemas bidimensionais, não são necessárias adaptações para o caso de estado plano de deformações (EPD). Todavia, para o estado plano de tensões (EPT), adotando uma notação indicial bidimensional, a equação constitutiva elástica (2.8) pode ser escrita como

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t) = \left( \frac{\lambda^e}{1 + \frac{\lambda^e}{2G}} \right) \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(\mathbf{x},t) + 2G \varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t) \quad (2.15)$$

Como se pode observar, o parâmetro  $G$  não sofreu alteração. Adotando  $G$  e  $\nu$  como parâmetros para as relações constitutivas elásticas, a mudança no parâmetro  $\lambda^e$  pode ser computada através de uma adaptação do coeficiente de Poisson na formulação original:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (2.16)$$

Para as equações constitutivas separadas para as parcelas esférica e desviadora, a adaptação para o EPT (com notação indicial bidimensional) é efetuada através da substituição do parâmetro  $K$  da equação (2.13):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x},t) &= 3\bar{K}\tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x},t) + 2Ge_{ij}(\mathbf{x},t) \\ \bar{K} &= \frac{E}{3(1-\nu)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nos problemas elastoplásticos e viscoplásticos, as equações constitutivas elásticas apresentadas anteriormente são substituídas pelas relações que regem os modelos da Teoria da Plasticidade, conforme apresentação do capítulo 3. As equações de equilíbrio e geométricas apresentadas neste capítulo serão mantidas.

## 2.3 – Tensões Principais e Invariantes do Tensor de Tensões

O objetivo deste item é apresentar alguns resultados úteis para o desenvolvimento da formulação da Teoria da Plasticidade. As tensões principais do tensor de tensões tridimensional podem ser definidas através do problema de autovalor

$$\sigma_{ij}\hat{n}_j = \sigma_0\hat{n}_i \quad (2.18)$$

onde  $\sigma_0$  é a tensão principal e  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor unitário da direção principal correspondente.

Do ponto de vista da equação de Cauchy (2.3), a direção principal  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor normal à faceta cujo vetor tensão  $\mathbf{p}$  correspondente possui a mesma direção da normal à faceta. Conseqüentemente, o procedimento para o cálculo das tensões principais resulta na equação polinomial de terceiro grau

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}) = 0 \Rightarrow \sigma_0^3 - I_1\sigma_0^2 - I_2\sigma_0 - I_3 = 0 \quad (2.19)$$

onde  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os invariantes do tensor de tensões, definidos a seguir:

$$I_1 = \sigma_{kk} = 3\bar{\sigma} \quad (2.20a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ji} - I_1^2) \quad (2.20b)$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \frac{1}{6}\zeta_{ijk}\zeta_{lmn}\sigma_{il}\sigma_{jm}\sigma_{kn} = \frac{1}{3}(\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - 3I_1I_2 - I_1^3) \quad (2.20c)$$

onde  $\zeta$  é o tensor de permutação de Levi-Civita de terceira ordem (equação (1.4)). Os invariantes são assim chamados porque possuem o mesmo valor independentemente do sistema de coordenadas ortonormais escolhido, ou seja, são grandezas que caracterizam o estado de tensões. O invariante  $I_1$  representa o próprio estado hidrostático de tensões e, portanto, define completa e isoladamente a parcela esférica do tensor de tensões.

Alternativamente, os invariantes podem ser escritos em função das tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , que são as soluções de (2.19):

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.21a)$$

$$I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \quad (2.21b)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (2.21c)$$

Como o tensor de tensões estudado nesta pesquisa é simétrico, o Teorema Espectral garante que este tensor pode se definido através das tensões principais como

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \hat{\mathbf{n}}_i \otimes \hat{\mathbf{n}}_i \quad (2.22)$$

onde cada vetor unitário  $\hat{\mathbf{n}}_i$  representa a direção principal associada à tensão principal  $\sigma_i$ , formando uma base tridimensional ortonormal dos vetores correspondentes às direções principais, sendo, portanto, chamados de eixos principais de tensão.

Como a formulação da Teoria da Plasticidade costuma atribuir comportamentos diferentes às parcelas esférica e desviadora das relações constitutivas, torna-se conveniente o estudo das tensões principais do tensor desviador de tensões (visto que as conclusões acerca das tensões principais do tensor esférico são imediatas). Aplicando o mesmo problema de autovalor (2.18) para o tensor desviador de tensões, obtém-se a equação

$$S_0^3 - J_1 S_0^2 - J_2 S_0 - J_3 = 0 \quad (2.23)$$

onde  $S_0$  é a tensão desviadora principal e  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  são os invariantes do tensor desviador de tensões, calculados a partir das equações (2.20):

$$J_1 = S_{kk} = 0 \quad (2.24a)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(S_{ij}S_{ji} - J_1^2) = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ji} \quad (2.24b)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}(S_{ij}S_{jk}S_{ki} - 3J_1J_2 - J_1^3) = \frac{1}{3}S_{ij}S_{jk}S_{ki} \quad (2.24c)$$

Igualmente útil é a representação de  $J_2$  em função das tensões principais, relativas tanto ao tensor de tensões totais quanto ao tensor desviador:

$$J_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) = \frac{1}{6}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right) \quad (2.25)$$

Outra conclusão conveniente pode ser obtida escrevendo a solução de (2.23) na seguinte forma (NAYAK e ZIENKIEWICZ [117]):

$$S_0 = A \operatorname{sen} \alpha_s \quad (2.26)$$

Substituindo na equação (2.23), obtém-se

$$\left(\frac{3}{4}A^3 - J_2A\right) \operatorname{sen} \alpha_s - \frac{A^3}{4} \operatorname{sen} 3\alpha_s = J_3 \quad (2.27)$$

Anulando o coeficiente de  $\operatorname{sen} \alpha_s$ , obtém-se a expressão para o coeficiente A e consequentemente o resultado para  $\alpha_s$ :

$$-\frac{\pi}{6} \leq \alpha_s = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^{-1} \left( -\frac{J_3}{2} \left( \frac{3}{J_2} \right)^{3/2} \right) \leq \frac{\pi}{6} \quad (2.28)$$

O parâmetro  $\alpha_s$ , por vezes chamado de ângulo polar de desvio, é um invariante associado exclusivamente ao tensor de tensões desviadoras. Finalmente, as tensões desviadoras principais podem ser escritas da seguinte forma:

$$S_k = 2\sqrt{\frac{J_2}{3}} \operatorname{sen} \left( \alpha_s + \frac{2\pi}{3}(ns_k - 1) \right), \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.29)$$

Na equação anterior,  $\mathbf{ns}$  é um vetor cujas componentes podem assumir os valores 1, 2 ou 3 em ordem aleatória e sem repetição, para manter genérica a ordenação das tensões desviadoras principais. Considerando que qualquer direção é principal para o tensor de tensões esféricas, pode-se concluir que as direções principais dos tensores de tensões desviadoras e totais são coincidentes. Adicionalmente, cada tensão principal pode ser separada nas parcelas esférica e desviadora:

$$\sigma_k = \tilde{\sigma} + S_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.30)$$

Para finalizar este subitem, uma última conclusão se mostrará uma ferramenta útil no próximo capítulo. A obtenção da tensão cisalhante máxima atuante em um ponto

material pode ser obtida de maneira imediata através da representação do estado de tensões em círculos de Mohr. Considerando uma ordenação genérica das tensões principais, pode-se escrever a tensão cisalhante máxima de um estado de tensões da seguinte forma:

$$\tau_{\max} = \text{Max} \left( \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|, \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| \right) \quad (2.31)$$

Das equações (2.29) e (2.30), pode-se escrever a equação anterior através das tensões desviadoras e, conseqüentemente, através da formulação em função de  $\alpha_s$  :

$$\tau_{\max} = \text{Max} \left( \frac{1}{2} |S_1 - S_2|, \frac{1}{2} |S_1 - S_3|, \frac{1}{2} |S_2 - S_3| \right) = \sqrt{J_2} \cos \alpha_s \quad (2.32)$$

A tensão normal atuante na faceta de tensão cisalhante máxima é obtida igualmente através dos círculos de Mohr e da formulação em função de  $\alpha_s$  :

$$\sigma_{N\tau} = \tilde{\sigma} - \sqrt{\frac{J_2}{3}} \text{sen} \alpha_s \quad (2.33)$$

Diante do exposto, é possível concluir que o tensor de tensões desviadoras pode ser completamente definido pelos invariantes  $J_2$  e  $J_3$  ou  $J_2$  e  $\alpha_s$ , ao passo que o tensor esférico é definido pelo invariante  $I_1$ .

## 2.4 – Energia de Deformação Elástica

A energia de deformação por unidade de volume para um material elástico linear pode ser definida como

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.34)$$

Utilizando as equações (2.10) a (2.12), obtém-se o seguinte resultado para materiais isotrópicos:

$$U = \frac{I_1^2}{18K} + \frac{J_2}{2G} \quad (2.35)$$

Logo, para materiais isotrópicos, a energia de deformação pode ser dividida nas parcelas esférica e desviadora, que também é chamada de energia de distorção. A importância destes conceitos para esta pesquisa reside no fato de que, para certos materiais, a transição do regime elástico para o plástico está relacionada com a quantidade de energia de deformação por unidade de volume que um corpo é capaz de armazenar. Conseqüentemente, limitações da energia de deformação definem diversos critérios de escoamento, conforme será visto no próximo capítulo.

## 2.5 – Tensão Octaédrica

Por motivo de conveniência, define-se a tensão octaédrica de um ponto material como sendo a tensão na faceta cujo vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  forma ângulos iguais com os eixos principais de tensão. Deste modo, utilizando o sistema de coordenadas definido pelos eixos principais de tensão (equação (2.22)) e aplicando a equação de Cauchy (2.3), obtém-se

$$\begin{aligned} p_i^{oct} &= \hat{\sigma}_{ij} n_j^{oct} \\ \mathbf{n}^{oct} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{\mathbf{n}}_i \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde  $\mathbf{p}^{oct}$  é o vetor tensão octaédrica, associado à faceta chamada de plano octaédrico, cujo vetor normal associado  $\mathbf{n}^{oct}$  define o eixo octaédrico. Este vetor pode ser escrito através das componentes octaédricas normal  $\sigma_N^{oct}$  e cisalhante  $\sigma_T^{oct}$  relacionadas ao plano octaédrico. Aplicando a equação (2.25), tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \sigma_N^{oct} &= p_i^{oct} n_i^{oct} = \tilde{\sigma} = \frac{I_1}{3} \\ \|\mathbf{p}^{oct}\|^2 &= (\sigma_N^{oct})^2 + (\sigma_T^{oct})^2 \Rightarrow \sigma_T^{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Como é possível perceber nas equações (2.37), a componente octaédrica normal é função apenas das tensões esféricas, enquanto a componente octaédrica cisalhante é dependente apenas das tensões desviadoras. Este resultado possibilita uma série de interpretações gráficas acerca do estado de tensões de um ponto material, conforme será visto no próximo item.

## 2.6 – Espaço de Haigh-Westergaard

O espaço de Haigh-Westergaard (WESTERGAARD [118]) ou espaço das tensões principais é uma representação gráfica tridimensional de um estado de tensões cujo sistema de coordenadas ortonormais é constituído pelos eixos principais de tensão. Conforme apresentado na equação (2.22), o estado de tensões de um ponto material pode ser completamente definido através das tensões principais. Deste modo, o tensor de tensões  $\sigma$  pode ser representado no Espaço de Haigh-Westergaard através do ponto  $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , cujas coordenadas são as tensões principais (figura 2.2a), e através do vetor  $\mathbf{p}_\sigma$ , definido da seguinte forma:

$$\mathbf{p}_\sigma = \sqrt{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_i \hat{\mathbf{n}}_i \quad (2.38)$$

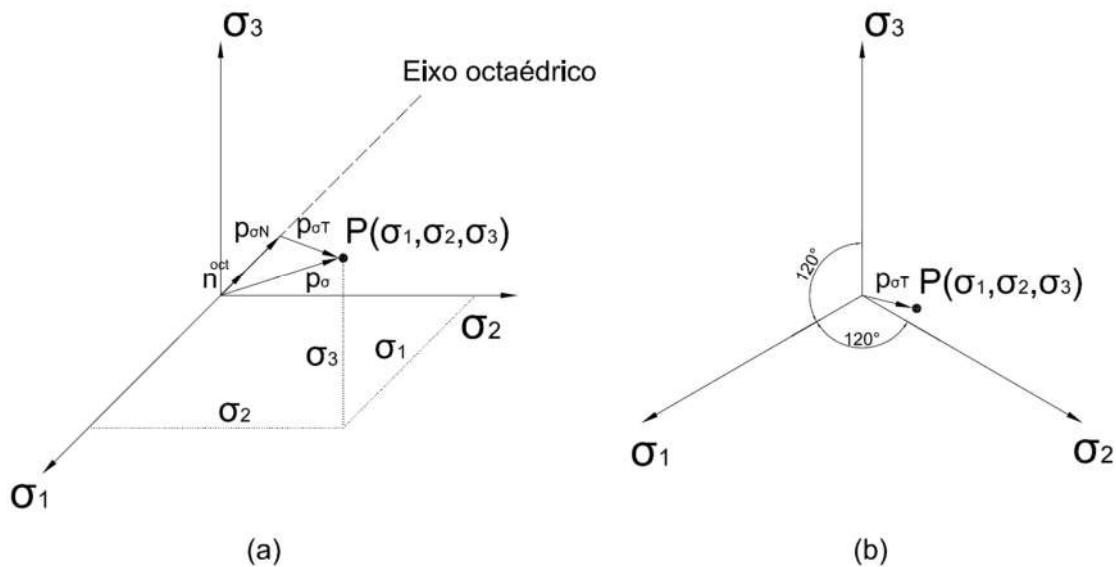


Figura 2.2 – (a) Espaço de Haigh-Wetergaard; (b) Plano  $\pi$

Aproveitando os resultados do item anterior, pode-se escrever o vetor  $\mathbf{p}_\sigma$  nas suas componentes normal e cisalhante com relação ao plano octaédrico:

$$\mathbf{p}_\sigma = \mathbf{p}_{\sigma N} + \mathbf{p}_{\sigma T} = \sigma_N^{oct} \sqrt{3} \mathbf{n}^{oct} + \sigma_T^{oct} \sqrt{3} \mathbf{v}^{oct} = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \mathbf{n}^{oct} + \sqrt{2J_2} \mathbf{v}^{oct} \quad (2.39)$$



Na equação anterior,  $\mathbf{v}^{\text{oct}}$  é um vetor unitário perpendicular ao vetor octaédrico, sendo, conseqüentemente, um vetor pertencente ao plano octaédrico. Portanto, variações na tensão esférica não geram qualquer variação na componente do vetor  $\mathbf{p}_\sigma$  projetada no plano octaédrico.

No espaço tridimensional de Haigh-Westergaard, pode-se utilizar ainda uma representação bidimensional através de planos paralelos ao plano octaédrico. O plano com esta característica onde a tensão esférica é nula é comumente chamado na literatura de plano  $\pi$  (MENDELSON [49]). Por ser perpendicular ao vetor octaédrico, a projeção do vetor  $\mathbf{p}_\sigma$  no plano  $\pi$  apresenta apenas as tensões desviadoras do tensor de tensões, conforme representação do vetor  $\mathbf{p}_{\sigma T}$  na figura 2.2b. Esta conclusão é muito útil para a representação gráfica de critérios de escoamento, conforme será visto no capítulo 3.

Para descrever mais detalhadamente a representação do vetor  $\mathbf{p}_{\sigma T}$  no plano  $\pi$ , é necessário equacionar o vetor  $\mathbf{v}^{\text{oct}}$ , sendo promissora a adoção do ângulo  $\alpha_s$  como parâmetro, dada a sua relação com as tensões desviadoras. Para tanto, são definidas três direções representadas pelos vetores  $\mathbf{v}_1 = (-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2; 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0; -\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$  e  $\mathbf{v}_3 = (\sqrt{2}/2; 0; -\sqrt{2}/2)$ , todos pertencentes ao plano  $\pi$ , conforme representação da figura 2.3. De posse das equações (2.29), (2.30) e (2.39), a projeção de  $\mathbf{p}_{\sigma T}$  em cada vetor  $\mathbf{v}_k$  ( $k=1,2,3$ ) pode ser definida como

$$\mathbf{p}_{\sigma T} \cdot \mathbf{v}_k = \sqrt{2J_2} \frac{2}{\sqrt{3}} \text{sen} \left( \frac{\pi}{3} (ns_a - ns_b) \right) \cos \left( \alpha_s + \frac{\pi}{3} (ns_a + ns_b - 2) \right) \quad (2.40)$$

onde a e b são números inteiros diferentes entre si variando entre 1, 2 e 3 e o vetor  $\mathbf{ns}$  é o mesmo da equação (2.29). A adoção do ângulo  $\alpha_s$  sugere a repartição do plano  $\pi$  em 6 regiões, dado o intervalo de variação do mesmo (ver equação (2.28)) e as possíveis combinações dos inteiros a e b. Cada uma destas regiões está associada a um vetor  $\mathbf{v}_k$  ( $k=1,2,3$ ) ou à sua respectiva reflexão  $-\mathbf{v}_k$ , dependendo da disposição em ordem decrescente das tensões desviadoras principais  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ , conforme figura 2.3. A equação (2.40) resulta, portanto, na relação

$$\mathbf{p}_{\sigma T} \cdot \mathbf{v}_k = \pm \sqrt{2J_2} \cos\left(\alpha_s + \frac{2\pi}{3}(k-1)\right) \quad (2.41)$$

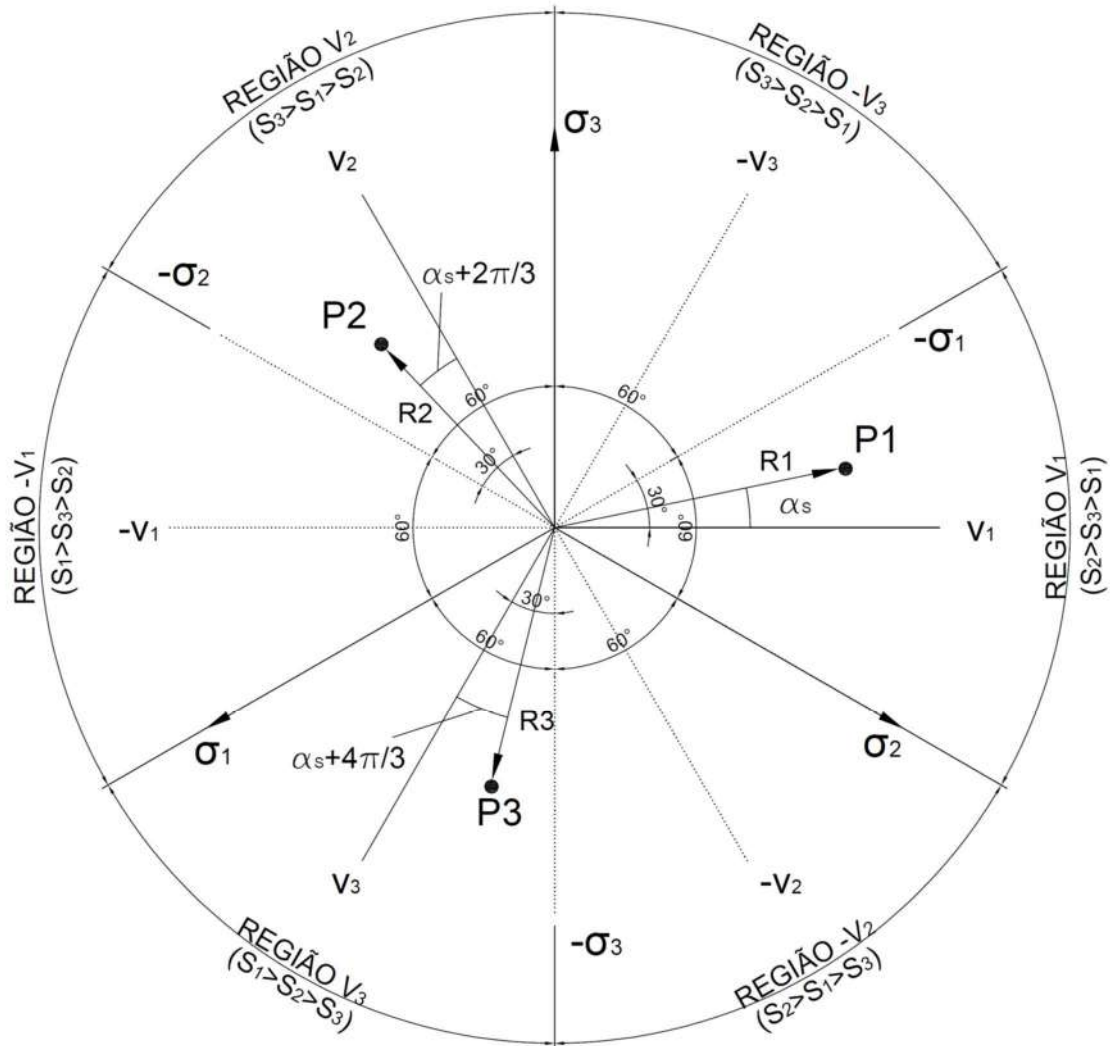


Figura 2.3 – Plano  $\pi$  com 3 estados de tensão P1, P2 e P3, localizados respectivamente nas regiões  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  e com  $\|\mathbf{p}_{\sigma T k}\| = R_k = \sqrt{2J_{2_k}}$ , sendo  $J_{2_k}$  o 2º invariante do tensor de tensões desviadoras para cada estado de tensão ( $k=1,2,3$ )

## 2.7 – Termodinâmica dos Materiais Elásticos

O presente item discorrerá de forma resumida sobre o caráter termodinâmico do comportamento dos materiais elásticos. Posteriormente, os conceitos e formulações apresentados aqui se mostrarão úteis para o estudo da Teoria da Plasticidade. O texto

apresentado a seguir tem como referência principal os trabalhos de LUBLINER [46] e LITTLE et al. [3].

Para o desenvolvimento deste item, será considerada a equação de equilíbrio dinâmico (2.2), para uma maior generalização. Define-se inicialmente o campo de velocidades de um corpo como sendo a derivada com relação ao tempo do campo de deslocamentos, ou seja,  $v_i(\mathbf{x}, t) = \dot{u}_i(\mathbf{x}, t)$ . Para simplificar a notação, as dependências do vetor posição e do tempo serão omitidas. A energia cinética de um corpo pode então ser definida como:

$$U_K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho v_i v_i d\Omega \quad (2.42)$$

É importante destacar que, devido à deformação do corpo, as grandezas  $\rho$  e  $d\Omega$  são variáveis, o que não ocorre com o produto  $\rho d\Omega$ , devido à hipótese de conservação da massa, aspecto que deverá ser considerado ao derivar as integrais a seguir em relação ao tempo. A potência externa pode ser definida em função do carregamento externo atuante no corpo:

$$P_{ext} = \int_{\Gamma} p_i v_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i v_i d\Omega \quad (2.43)$$

Aplicando o Teorema da Divergência de Gauss e a equação de Cauchy (2.3), obtém-se:

$$P_{ext} = \int_{\Omega} \left( (\sigma_{ij,j} + b_i) v_i + \sigma_{ij} v_{i,j} \right) d\Omega \quad (2.44)$$

Finalmente, define-se a potência de deformação  $P_d$  como:

$$P_d = P_{ext} - \dot{U}_K \quad (2.45)$$

Substituindo as equações (2.42) e (2.44) na equação (2.45), aplicando a equação de equilíbrio dinâmico (2.2) e a derivada da equação geométrica (2.4) com relação ao tempo e tirando proveito da simetria do tensor de tensões, tem-se:

$$P_d = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega \quad (2.46)$$

A figura 2.4 mostra o corpo de estudo submetido a fontes de energia térmica, sendo  $r(\mathbf{x},t)$  a função escalar por unidade de volume que representa a taxa de calor proveniente de fontes localizadas no interior do domínio e  $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$  é a função vetorial por unidade de área que representa o fluxo de calor no sentido de dentro para fora do corpo ao longo do contorno (superfície externa) do mesmo, constituindo uma condição de contorno que indica a influência da troca de calor com sistemas externos ao domínio do corpo estudado.

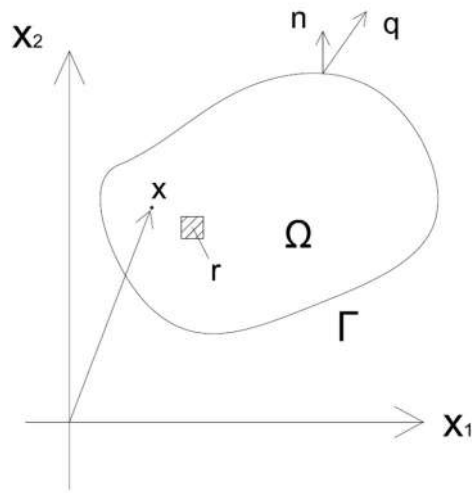


Figura 2.4 – Fontes de calor aplicadas ao corpo de estudo

A taxa de calor interno no corpo pode ser escrita como:

$$P_Q = \int_{\Omega} \rho r d\Omega - \int_{\Gamma} q_i n_i d\Gamma \quad (2.47)$$

A Primeira Lei da Termodinâmica afirma que a taxa de variação da energia interna do corpo  $U_1$  é igual à taxa de variação do calor adicionado ao corpo somada à taxa de trabalho realizada sobre o corpo, o que resulta na expressão

$$\dot{U}_1 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u_1 d\Omega = P_Q + P_d \quad (2.48)$$

onde  $u_1$  é a energia interna por unidade de volume ou densidade de energia interna.

Aplicando o Teorema da Divergência de Gauss na equação anterior, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_{\Omega} (\rho \dot{u}_l + q_{i,i} - \rho r - \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) d\Omega = 0 \quad (2.49)$$

A equação acima representa a conservação de energia global. Admitindo-se que o domínio de integração é arbitrário, pode-se escrever a equação que representa a conservação de energia local:

$$\rho \dot{u}_l + q_{i,i} - \rho r - \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0 \quad (2.50)$$

Os materiais elásticos são essencialmente caracterizados por estados locais de equilíbrio termodinâmico. Aplicando a Segunda Lei da Termodinâmica sob a ótica da desigualdade de Clausius-Planck, ou seja, considerando que a variação de entropia em um processo entre dois estados de equilíbrio termodinâmico nunca é negativa, pode-se escrever:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \eta d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho s d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\rho r}{T} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{q_i n_i}{T} d\Gamma \geq 0 \quad (2.51)$$

onde  $s$  é a densidade de entropia total interna ao corpo,  $\eta$  é a densidade de entropia efetivamente produzida pelo corpo e  $T$  é a temperatura absoluta associada ao ponto material, conforme definição

$$T^{-1} = \frac{\partial s}{\partial u_l} \quad (2.52)$$

Vale salientar que, conforme exposto na equação (2.51), a variação de calor provocada por uma fonte (representada por  $\mathbf{q}$  e  $r$ ) contribui negativamente para a entropia total efetivamente produzida pelo corpo.

É conveniente associar a distribuição de temperatura ao longo do corpo através do gradiente de temperatura  $\phi(\mathbf{x}, t)$ :

$$\phi_i = T_{,i} \quad (2.53)$$

Aplicando o Teorema da Divergência de Gauss na equação (2.51) e apoiando-se no fato de que o volume de integração  $\Omega$  é arbitrário, obtém-se a formulação local para

a produção de entropia, sendo conhecida como a versão local da desigualdade de Clausius-Duhem:

$$\rho \dot{s} + T^{-1} (q_{i,i} - \rho r) + q_i (T^{-1})_{,i} \geq 0 \quad (2.54)$$

Uma vez introduzido o conceito de entropia, segue a definição da energia livre de Helmholtz, que representa a parcela da energia interna associada à produção de trabalho:

$$h = u_I - Ts \quad (2.55)$$

De acordo com a hipótese de materiais elásticos, as grandezas de estudo  $\sigma_{ij}$ ,  $s$ ,  $\mathbf{q}$  e  $u_I$  são consideradas dependentes das deformações  $\varepsilon_{ij}$ , da temperatura absoluta  $T$  e do gradiente de temperatura  $\phi$ , sendo estas variáveis relativas ao estado de equilíbrio termodinâmico local vigente. A adoção desta última variável se justifica pela introdução da mesma no equacionamento do problema através da relação constitutiva (2.53), o que, pelo Princípio da Equipresença (TRUESDELL e TOUPIN apud LITTLE et al. [3]), acarreta a introdução da variável no problema como um todo. A adoção deste seletivo grupo de variáveis é fundamental para o entendimento do conceito de materiais elásticos e do que os diferencia dos materiais inelásticos em geral.

Deste modo, pode-se aplicar a regra da cadeia na energia livre de Helmholtz da seguinte forma:

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial h}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial h}{\partial \phi_k} \dot{\phi}_k \quad (2.56)$$

Aplicando as equações (2.50), (2.55) e (2.56) na desigualdade (2.54) e considerando ainda que a temperatura absoluta  $T$  é sempre positiva, obtém-se:

$$-\left( \rho \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \left( \frac{\partial h}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \left( \rho \frac{\partial h}{\partial \phi_i} \right) \dot{\phi}_i - \frac{q_i \phi_i}{T} \geq 0 \quad (2.57)$$

Na equação anterior, as expressões dentro dos parênteses são independentes das suas correspondentes expressões multiplicadas fora dos parênteses. Além disso, estas grandezas fora dos parênteses são independentes entre si. Deste modo, para manter a

desigualdade, as expressões dentro dos parênteses devem ser identicamente nulas, o que gera o seguinte resultado:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.58a)$$

$$s = - \frac{\partial h}{\partial T} \quad (2.58b)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \phi_i} = 0 \quad (2.58c)$$

$$- \frac{q_i \phi_i}{T} \geq 0 \quad (2.58d)$$

Da equação (2.58c), conclui-se que a energia livre de Helmholtz independe do gradiente de temperatura. Da equação (2.58a), conclui-se, portanto, que o estado de tensões no regime elástico depende somente das deformações e da temperatura.

Deste modo, do ponto de vista termodinâmico, os materiais elásticos se caracterizam pelo fato de que o estado de tensões  $\sigma_{ij}$  depende exclusivamente das deformações  $\varepsilon_{ij}$  e da temperatura absoluta  $T$  relativas ao mesmo estado, independentemente do processo ao qual o corpo foi submetido para atingir este estado, caracterizando um difeomorfismo<sup>2</sup> que justifica a reversibilidade das deformações elásticas. Estas variáveis são, portanto, variáveis de estado e definem um determinado estado local de equilíbrio termodinâmico que independe das grandezas relativas a estados anteriores. Deste modo, pode-se escrever:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t)) \quad (2.59)$$

Adicionalmente, as demais grandezas em estudo ( $s$ ,  $\mathbf{q}$  e  $u_i$ ) dependem tão somente das deformações e temperatura absoluta relativas ao estado vigente. Estas grandezas, juntamente com o estado de tensões, são ditas funções de estado, pois estão associadas unicamente às variáveis de estado  $\varepsilon_{ij}$  e  $T$ . As equações que relacionam as funções de

---

<sup>2</sup> Em Topologia Diferencial, um difeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$  é uma bijeção diferenciável  $f: M \rightarrow N$  cuja inversa  $f^{-1}$  também é diferenciável.

estado e as variáveis de estado são chamadas de “equações de estado” ou “equações constitutivas” (HORSTEMEYER e BAMMANN [5]).

A energia livre de Helmholtz é então definida de maneira única para um estado local de equilíbrio termodinâmico elástico em função das variáveis de estado  $\varepsilon_{ij}$  e  $T$ . Expandindo a função da energia livre de Helmholtz  $h$  em Série de Taylor até os termos de segunda ordem e admitindo a inexistência de tensão residual, obtém-se, a partir da equação (2.58a), a formulação geral da equação constitutiva elástica linear, conhecida como a Lei de Hooke generalizada:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) - \alpha_{kl}^{\Delta T} \Delta T(\mathbf{x}, t) \right) \quad (2.60)$$

onde o tensor  $\mathbf{C}$  é definido segundo a equação (2.7),  $\Delta T = T - T_0$  representa a variação de temperatura com relação a um referencial  $T_0$  e  $\alpha_{ij}^{\Delta T}$  é o tensor que equaciona a dilatação térmica do material.

Como tensões, deformações e temperatura formam um estado termoelástico independente dos demais, é possível afirmar que, para materiais elásticos, as deformações podem ser escritas em função das tensões e temperatura, ou seja, as relações (2.58a), (2.59) e (2.60) podem ser invertidas:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl}(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t)) \quad (2.61a)$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}(\mathbf{x}, t) + \alpha_{ij}^{\Delta T} \Delta T(\mathbf{x}, t) \quad (2.61b)$$

Os materiais inelásticos, por outro lado, possuem relação tensão-deformação dependente de variáveis adicionais, chamadas na literatura simplesmente como “variáveis internas” (LUBLINER [46]). Como exemplos destas variáveis, pode-se destacar o histórico de deformações, ou seja, as deformações em estados anteriores ao vigente, as deformações plásticas ou viscoplásticas, entre outros aspectos que podem, inclusive, conferir caráter irreversível ao processo de deformação. O estudo destas variáveis e suas respectivas relações evolutivas será realizado no próximo capítulo.



# Capítulo 3 – Teoria da Plasticidade

Este capítulo se encarregará de apresentar os principais conceitos acerca da Teoria da Plasticidade, objetivando a construção de toda a formulação necessária para caracterizar os modelos elastoplásticos e viscoplásticos que serão estudados ao longo desta pesquisa.

O texto apresentado a seguir toma como base as formulações teóricas apresentadas por diversos autores com vasta experiência de pesquisa em Teoria da Plasticidade, destacando PRAGER [15], LUBLINER [46], LITTLE et al. [3], entre outros.

## 3.1 – Modelos Elastoplásticos e Viscoplásticos Unidimensionais

Para a confecção de modelos elastoplásticos e viscoplásticos unidimensionais, que relacionam a tensão  $\sigma$  e a deformação  $\varepsilon$ , serão definidos três modelos básicos, conforme figura 3.1.

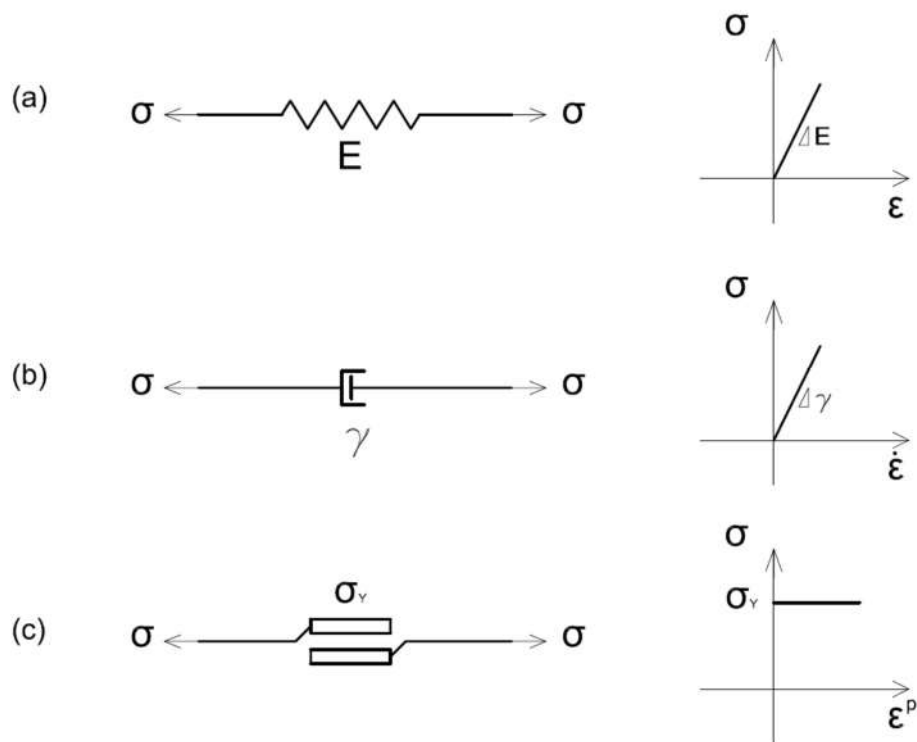


Figura 3.1 – Elementos básicos da Teoria da Plasticidade: (a) Sólido elástico; (b) Fluido viscoso; (c) Fricção

O **Modelo de sólido elástico** (figura 3.1a) é regido pela Lei de Hooke, conforme equação

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.1)$$

onde  $E$  é o Módulo de Elasticidade. Desta forma, a deformação se desenvolve proporcionalmente ao carregamento imposto. Cessada a aplicação do carregamento, o corpo retorna à configuração original, ou seja, a deformação se anula, o que é um comportamento esperado para um modelo elástico.

O **Modelo de fluido viscoso** (figura 3.1b) é um modelo reológico que segue a Lei de Newton da Viscosidade, tendo como inspiração o estudo de fluidos newtonianos. Neste modelo, a tensão é proporcional à taxa de variação da deformação ao longo do tempo, o que resulta na equação constitutiva

$$\sigma = \gamma\dot{\varepsilon} \quad (3.2)$$

onde  $\gamma$  é uma constante de proporcionalidade que pode ser definida como módulo de viscosidade. A relação constitutiva para o elemento de fluido viscoso é apresentada e estudada neste trabalho na sua forma linear, o que não impede a proposição de formulações não lineares.

O modelo de fluido viscoso não admite deformação inicial quando carregado tampouco permite descontinuidades na deformação à medida que o carregamento varia. Aplicando um histórico de carregamento ao modelo, a deformação se desenvolve gradativamente ao longo do tempo. Os arranjos entre elementos de sólido elástico e fluido viscoso produzem modelos viscoelásticos com os correspondentes fenômenos de deformação lenta e relaxação, conforme análise apresentada em FLÜGGE [23].

O **Modelo de fricção** (figura 3.1c) é também conhecido como modelo perfeitamente plástico e se encarrega justamente da modelagem da plastificação de materiais. Explorando o conceito de atrito entre duas superfícies, este modelo permite deformação apenas quando a tensão atinge o limite  $\sigma_Y$ , chamado de tensão de escoamento para o caso de modelos plásticos. A partir deste estágio, o modelo desenvolve sua deformação sem permitir tensões acima da tensão de escoamento, representando, portanto, o deslizamento entre duas superfícies. A deformação resultante  $\varepsilon^p$  é chamada de deformação plástica e não desaparece com a retirada do carregamento. Conseqüentemente, pode-se equacionar o comportamento anteriormente definido da seguinte forma:

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \sigma < \sigma_Y \\ \varepsilon^p \neq 0, & \sigma = \sigma_Y \end{cases} \quad (3.3)$$

Os modelos elastoplásticos mais simples podem ser obtidos através de arranjos entre elementos rígidos pelos modelos de sólido elástico e fricção. A adição de elementos de fluido viscoso aos arranjos introduz um comportamento viscoplástico, conferindo caráter transiente ao modelo. Estes elementos podem ser agrupados em série, em paralelo ou em combinações diversas de maneira a aumentar o número de parâmetros que definem a complexidade do modelo constitutivo do material.

A seguir, serão apresentados alguns modelos elastoplásticos e viscoplásticos que serão estudados ao longo deste trabalho. Apesar da simplicidade, estes modelos são

perfeitamente capazes de reproduzir o comportamento esperado de materiais no regime plástico. Como estes modelos admitem deformações elásticas  $\varepsilon^e$  e plásticas  $\varepsilon^p$ , pode-se escrever a deformação total  $\varepsilon$  do modelo da seguinte forma:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3.4)$$

Todos os modelos apresentados possuem três características fundamentais:

- Quando carregado, enquanto a tensão é inferior à tensão de escoamento, o material possui comportamento elástico linear regido pela Lei de Hooke, ou seja, desenvolve apenas deformações elásticas;
- Com o aumento do carregamento, para tensões superiores à tensão de escoamento, o material assume comportamento plástico, ou seja, passa a desenvolver deformações plásticas, podendo ainda desenvolver deformações elásticas adicionais;
- Com o descarregamento, o material retorna ao regime elástico e a deformação elástica diminui até desaparecer, o que é esperado para um comportamento elástico. Em contrapartida, a deformação plástica é permanente.

A irreversibilidade da deformação plástica pode ser justificada, por exemplo, pelos deslocamentos entre os átomos que compõem a estrutura química do material, quebrando as ligações existentes e criando outras, ou os deslocamentos entre partículas de solo. O comportamento plástico é modelado pelo elemento de fricção e pode ser interpretado como uma dissipação de energia de deformação, o que não ocorre no comportamento elástico. Os fenômenos físicos e químicos associados à plastificação de materiais são amplamente discutidos em LUBLINER [46].

### 3.1.1 – Modelo Elástico Perfeitamente Plástico

O modelo de material elástico perfeitamente plástico (figura 3.2) se caracteriza por um comportamento linear elástico até que o material atinja a tensão de escoamento  $\sigma_y$  (ponto B), desenvolvendo uma deformação elástica  $\varepsilon^e$  no processo do trecho AB. Após este ponto, o material se deforma plasticamente e não são admitidos aumentos de tensão, produzindo assim um trecho horizontal no gráfico que relaciona tensão e

deformação que é comumente chamado de patamar de escoamento. Este patamar é garantido pelo elemento de fricção, que também é responsável por toda a deformação plástica desenvolvida.

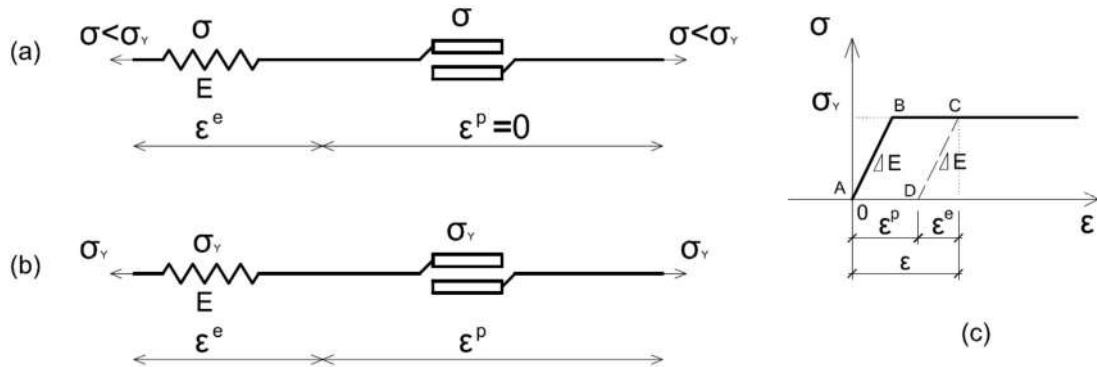


Figura 3.2 – Modelo elástico perfeitamente plástico: (a) no regime elástico (trecho AB); (b) no regime plástico (trecho BC); (c) gráfico tensão x deformação

Considerando um descarregamento após uma deformação plástica  $\epsilon^p$  (ponto C), o material perde a deformação elástica (trecho CD), sendo a deformação plástica permanente. Com uma nova aplicação do carregamento, o material recupera a deformação elástica até atingir novamente o patamar de escoamento, desta vez percorrendo o trecho DC. A partir deste momento, o material acumula uma deformação plástica adicional ao valor obtido no primeiro ciclo de carregamento.

O modelo elástico perfeitamente plástico, embora simplificado e limitado, é adotado por diversas normas técnicas como o comportamento constitutivo teórico do aço utilizado na construção civil, sendo, portanto, amplamente considerado no projeto de estruturas de concreto armado, por exemplo.

### 3.1.2 – Modelo Elastoplástico Bilinear

O modelo elastoplástico bilinear (figura 3.3) considera, diferentemente do modelo elástico perfeitamente plástico, que existe aumento de tensão após o material atingir o limite de escoamento  $\sigma_{y0}$ , o que caracteriza um processo conhecido na literatura como endurecimento ou encruamento LUBLINER [46]. No caso do modelo bilinear, como este aumento de tensão é linear com relação à deformação, este modelo pode também ser chamado de elastoplástico com endurecimento linear.

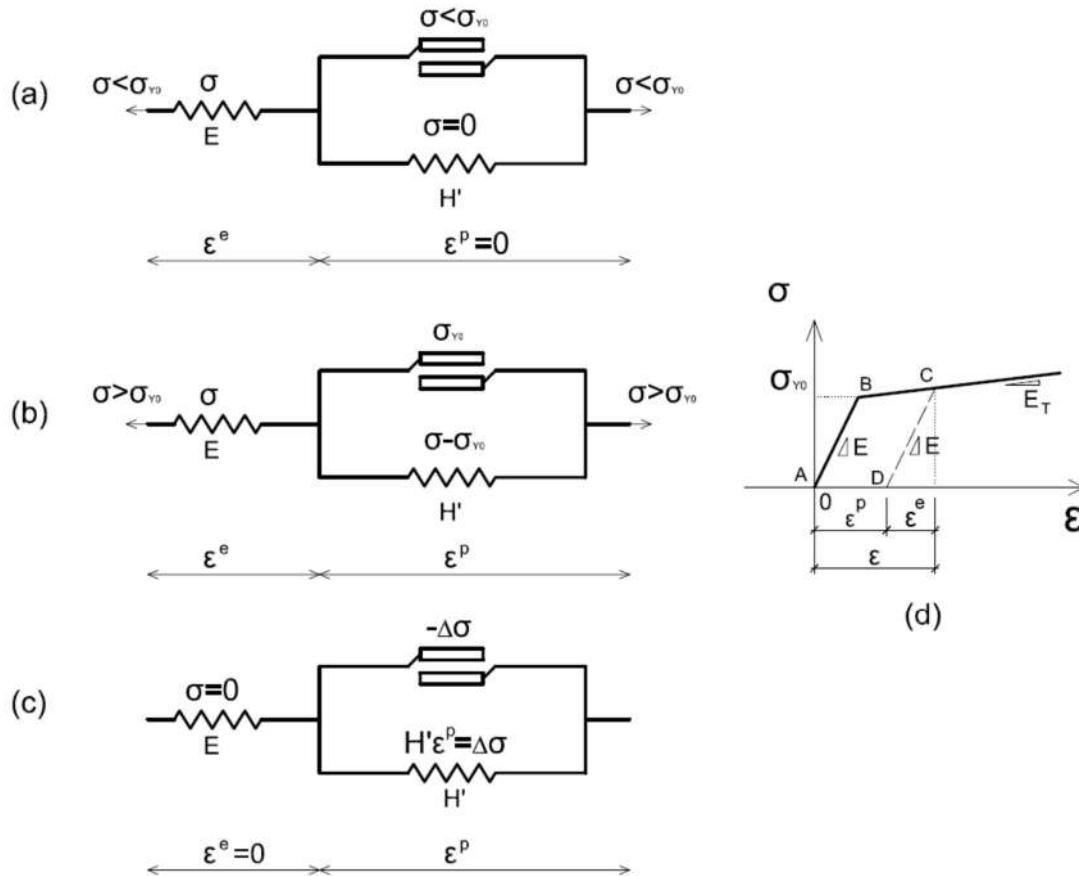


Figura 3.3 – Modelo elastoplástico bilinear: (a) no regime elástico (trecho AB); (b) no regime plástico (trecho BC); (c) ao final do 1º ciclo de carga, completamente descarregado (ponto D); (d) gráfico tensão x deformação

Olhando para o arranjo figura 3.3, é possível perceber que a associação em paralelo entre os elementos de sólido elástico e de fricção é responsável pela deformação plástica ao passo que o elemento de sólido elástico ligado em série ao conjunto é responsável pela deformação elástica. Logo, pode-se escrever a seguinte relação constitutiva:

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \tag{3.5}$$

Considerando um aumento de carga após o alcance da tensão de escoamento  $\sigma_{y0}$ , ou seja, percorrendo o trecho BC do gráfico (arranjo da figura 3.3b), admite-se a seguinte evolução da deformação plástica:

$$\sigma - \sigma_{Y0} = H' \varepsilon^p, \sigma > \sigma_{Y0} \quad (3.6)$$

Esta equação é consequência direta do arranjo em paralelo do elemento de fricção com um elemento de sólido elástico cujo módulo de elasticidade é  $H'$ . O parâmetro  $H'$  é chamado de Módulo de Endurecimento Plástico e é responsável por definir como a deformação plástica varia em função do aumento de tensão. Apesar de  $H'$  ser constante no caso de modelos elastoplásticos bilineares, pode-se definir este parâmetro de forma mais geral como sendo a tangente ao gráfico da tensão total em função da deformação plástica:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (3.7)$$

Deste modo, em casos mais gerais, é possível substituir o sólido elástico ligado em paralelo ao elemento de fricção por um modelo não linear, o que logicamente conferiria um caráter não linear ao fenômeno de endurecimento plástico. Adicionalmente, a formulação do modelo elástico perfeitamente plástico pode ser obtida fazendo  $H' = 0$ , ou seja, eliminando qualquer efeito de endurecimento.

É importante ainda salientar que, como o modelo bilinear permite aumentos de tensão durante o regime plástico, o material continuará a desenvolver deformações elásticas juntamente com as plásticas, como é possível observar pelo arranjo do modelo. Na prática, conforme pode ser observado no gráfico da figura 3.3d, o endurecimento linear pode ser interpretado como uma redução no módulo de elasticidade efetivo do material para um valor  $E_T$ , chamado módulo elastoplástico tangente. Este módulo relaciona a variação de tensão à variação da deformação total (seja ela elástica ou plástica) após o escoamento do material. Deste modo, o aumento linear de tensão no regime plástico é caracterizado pela seguinte expressão:

$$\sigma - \sigma_{Y0} = E_T \left( \varepsilon - \frac{\sigma_{Y0}}{E} \right), \sigma > \sigma_{Y0} \quad (3.8)$$

Das equações (3.5), (3.6) e (3.8), tem-se o seguinte resultado:

$$H' = \frac{EE_T}{E - E_T} \quad (3.9)$$

Supõe-se agora que, após atingir o ponto C, o material sofre descarregamento, percorrendo o trecho CD do gráfico da figura 3.3d. Neste caso, o processo de plastificação é interrompido e a deformação plástica acumulada permanece inalterada. O material é então regido unicamente pelo sólido elástico de módulo de elasticidade E, ou seja, o material volta ao regime elástico e perde a deformação elástica acumulada. Como a deformação plástica permanece inalterada, uma tensão residual  $\Delta\sigma = H' \varepsilon^p$  é mantida no elemento de sólido elástico no arranjo em paralelo para não violar a relação constitutiva. Ao atingir o ponto D, ou seja, com a remoção completa do carregamento, o elemento de fricção possuirá a mesma tensão residual com sentido oposto para garantir a anulação completa da tensão resultante no modelo, conforme pode ser visto na figura 3.3c.

Considerando que ocorra um novo carregamento, o material desenvolverá uma deformação elástica percorrendo o trecho DC, Neste caso, observa-se pela figura 3.3c que, para ativar novamente o elemento de fricção e reiniciar o processo de plastificação, este elemento deverá voltar a ser submetido à tensão de escoamento  $\sigma_{y0}$ , o que significa que uma tensão  $\sigma = \sigma_{y0} + \Delta\sigma$  deverá ser aplicada ao modelo. Consequentemente, a transição entre os regimes elástico e plástico no novo ciclo de carregamento ocorrerá em uma tensão superior a  $\sigma_{y0}$ , que foi responsável pela plastificação no primeiro ciclo.

Como pode ser visto no gráfico da figura 3.3d, esta nova tensão que reativa a plastificação, que pode ser interpretada como a tensão de escoamento para o ciclo de carga vigente, é justamente a tensão máxima atingida no regime plástico no ciclo de carga anterior (ponto C para o primeiro ciclo). Este fenômeno é consequência direta do endurecimento plástico e está associado à irreversibilidade da plastificação do material, sendo função da deformação plástica. Deste modo, para o modelo bilinear, pode-se escrever a tensão de escoamento para um determinado ciclo de carregamento em função da deformação plástica acumulada:

$$\sigma_Y(\varepsilon^p) = \sigma_{y0} + H' \varepsilon^p \quad (3.10)$$



### 3.1.3 – Modelo Elástico Viscoplastico

O modelo elástico viscoplastico da figura 3.4, chamado simplesmente de viscoplastico neste texto, considera que a deformação no regime plástico é variável ao longo do tempo. Embora seja o modelo viscoplastico mais simples, o arranjo proposto é perfeitamente capaz de reproduzir o fenômeno de fluência intrínseco ao comportamento deste tipo de material. A dependência do tempo é a principal característica que separa os modelos viscoplasticos dos puramente elastoplásticos como os dois modelos apresentados anteriormente.

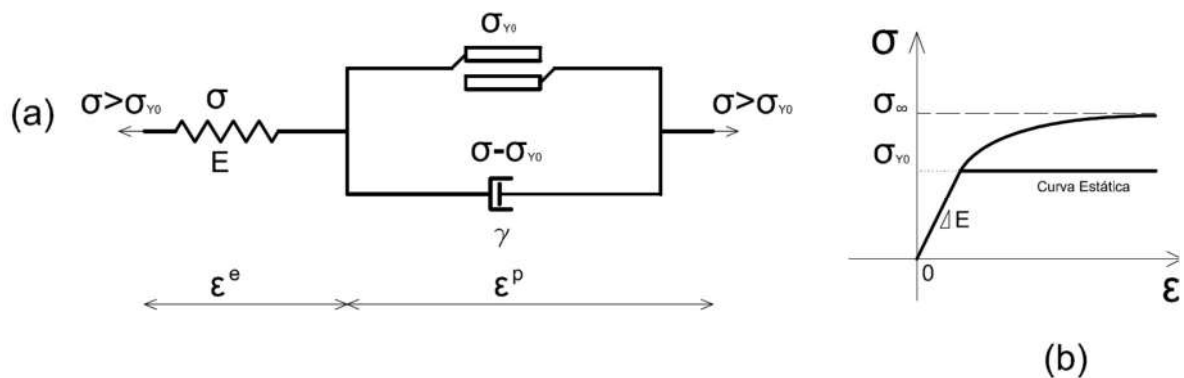


Figura 3.4 – Modelo viscoplastico: (a) no regime plástico; (b) gráfico tensão-deformação

Observando a figura 3.4, verifica-se que o elemento de sólido elástico é responsável pela deformação elástica enquanto que o arranjo em paralelo entre os elementos de fluido viscoso e fricção é responsável pela deformação viscoplastica. Este arranjo em paralelo é conhecido como modelo de Bingham (BINGHAM [40]). A formulação para materiais viscoplasticos que será apresentada e estudada nesta pesquisa é baseada na teoria proposta por PERZYNA [44] [45].

Com a aplicação progressiva do carregamento no regime elástico, o material atinge a tensão de escoamento  $\sigma_{y0}$  e, a partir deste ponto, o elemento de fluido viscoso absorverá a parcela da tensão acima de  $\sigma_{y0}$ , sofrendo a totalidade da deformação plástica. Deste modo, tem-se a seguinte relação:

$$\sigma - \sigma_{y0} = \gamma \dot{\epsilon}^p, \sigma > \sigma_{y0} \quad (3.11)$$

A equação (3.5) continua válida já que representa a relação constitutiva do sólido elástico em série no modelo. Combinando a equação (3.11) com a derivada em relação ao tempo da equação (3.5), obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\gamma} \sigma = E \dot{\varepsilon} + \frac{E}{\gamma} \sigma_{Y0}, \sigma > \sigma_{Y0} \quad (3.12)$$

Admitindo que a contagem do tempo se inicia quando o material atinge a tensão de escoamento, a condição inicial para esta equação pode ser obtida através da relação constitutiva elástica aplicada na transição entre os regimes elástico e viscoplástico:

$$\begin{aligned} \sigma(t=0) &= \sigma_{Y0} \\ \varepsilon(t=0) &= \frac{\sigma_{Y0}}{E} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Impondo ao material uma taxa de deformação constante  $\dot{\varepsilon}_0$ , como no texto de TELLES [56], a solução para o Problema de Valor Inicial (PVI) formado por (3.12) e (3.13) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma(t) = \sigma_{Y0} + \gamma \dot{\varepsilon}_0 \left( 1 - e^{-\frac{E}{\gamma} t} \right), \sigma > \sigma_{Y0} \quad (3.14)$$

Como a taxa de deformação é constante, tem-se

$$\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_0 t + \frac{\sigma_{Y0}}{E} \quad (3.15)$$

Deste modo, pode-se escrever a tensão da equação (3.15) diretamente em função da deformação:

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_{Y0} + \gamma \dot{\varepsilon}_0 \left( 1 - e^{-\frac{1}{\gamma \dot{\varepsilon}_0} (\sigma_{Y0} - E \varepsilon)} \right), \sigma > \sigma_{Y0} \quad (3.16)$$

À medida que a deformação total cresce, a tensão no modelo cresce, convergindo assintoticamente para o valor final

$$\sigma_{\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \sigma(\varepsilon) = \sigma_{Y0} + \gamma \dot{\varepsilon}_0 \quad (3.17)$$

Portanto, não existem limites teóricos impostos para a deformação plástica, o que não ocorre para a deformação elástica que, por sua vez, possui limite assintótico com o mesmo comportamento da tensão, ou seja,  $\varepsilon_{\infty}^e = \sigma_{\infty} / E$ .

Diferentemente dos modelos elastoplásticos apresentados anteriormente, o modelo viscoplástico proposto por Perzyna não retorna ao regime elástico no exato momento em que o processo de descarregamento se inicia. Isto ocorre devido ao fato de que, apesar da redução de carga, a tensão no início do descarregamento ainda é superior à tensão de escoamento  $\sigma_{Y0}$ . Se a plastificação fosse interrompida com o início do descarregamento, cessaria o desenvolvimento da deformação plástica, ou seja,  $\dot{\varepsilon}^p = 0$ . No entanto, isto anularia a tensão no elemento de fluido viscoso e, conseqüentemente, o elemento de fricção teria que absorver uma tensão superior a  $\sigma_{Y0}$ , o que não seria possível. Logo, no início do descarregamento, tem-se que  $\dot{\varepsilon}^p > 0$ , o que significa que o comportamento viscoplástico permanece ativo.

Quando a tensão finalmente atinge valores inferiores à tensão de escoamento, é admissível a ausência de tensões no elemento de fluido viscoso, ou seja,  $\dot{\varepsilon}^p = 0$  e o material volta ao regime elástico, sendo permanente a deformação viscoplástica acumulada. Em resumo, o comportamento viscoplástico ocorre apenas quando a tensão é superior ao limite de escoamento. Para ilustrar matematicamente esta proposição, a equação (3.11) é reescrita nos moldes da formulação de Perzyna:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{\gamma} \langle \sigma - \sigma_{Y0} \rangle \quad (3.18)$$

Existem na literatura alguns modelos viscoplásticos alternativos ao de Perzyna. Por exemplo, o modelo viscoplástico de consistência, proposto por WANG et al. [119], considera que o material retorna ao regime elástico assim que o processo de descarregamento se inicia, assim como ocorre nos modelos elastoplásticos convencionais.

Em linhas gerais, a curva estática, que, no caso do exemplo, engloba a parte elástica e a reta  $\sigma = \sigma_{Y0}$ , corresponde ao limite que separa o comportamento elástico do viscoplástico. Em outras palavras, o material terá comportamento elástico para todos os

pontos abaixo desta curva, do mesmo modo que o comportamento será viscoplástico para qualquer ponto acima da curva.

Adicionalmente, existem condições específicas que permitem a reprodução do comportamento do modelo elástico perfeitamente plástico através da formulação viscoplástica. Para tanto, basta impor ao modelo uma deformação inicial igual a  $\varepsilon_{\infty}^e$ . Como esta deformação é superior ao limite de escoamento do material, seria plausível assumir que o material adquiriria uma deformação plástica instantânea. No entanto, o modelo de fluido viscoso não admite deformação inicial, o que significa que a deformação plástica inicial é nula. Logo, a deformação inicial imposta será inteiramente elástica e, portanto, o modelo permanecerá no regime elástico com uma tensão total igual a  $\sigma_{\infty}$ , que é superior a tensão de escoamento.

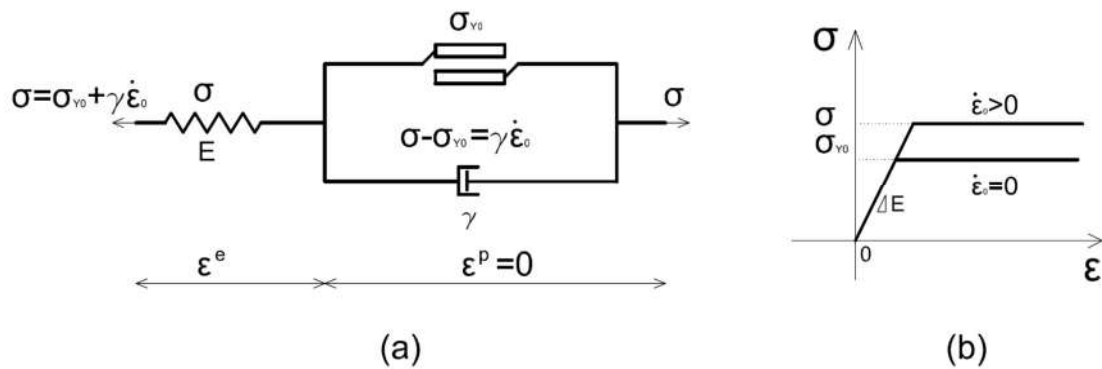


Figura 3.5 – Comportamento perfeitamente plástico em um modelo viscoplástico: (a) distribuição de tensões e deformações no modelo; (b) relação tensão x deformação

No momento da aplicação da deformação inicial, a tensão no elemento de fricção é  $\sigma_{y0}$  e no elemento de fluido viscoso é  $\gamma \dot{\varepsilon}_0$ , conforme figura 3.5a. Portanto, a taxa inicial de deformação plástica vale  $\dot{\varepsilon}_0$ , mas a deformação plástica inicial é nula. Entretanto, como o elemento de fricção está submetido à tensão de escoamento, o material encontra-se justamente na transição entre o comportamento elástico e viscoplástico.

A partir deste ponto, uma deformação é imposta a uma taxa constante  $\dot{\varepsilon}_0$ , mantendo assim a tensão aplicada no modelo constante e igual a  $\sigma_{\infty}$ , ou seja, a

deformação elástica permanece constante. Em outras palavras, não ocorreriam novos incrementos na deformação elástica e a deformação plástica cresce sem aumento de tensão. Todas estas características definem comportamento do material elástico perfeitamente plástico, como pode ser visto no gráfico da figura 3.5b.

Para escrever esta conclusão matematicamente, impõe-se a deformação inicial  $\varepsilon_0^e$  e a subsequente taxa de deformação constante  $\dot{\varepsilon}_0$  à equação diferencial (3.11), obtendo-se o resultado esperado:

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_{Y0} + \gamma \dot{\varepsilon}_0, \sigma > \sigma_{Y0} \quad (3.19)$$

Para  $\dot{\varepsilon}_0 = 0$ , tem-se como resultado o patamar de escoamento  $\sigma = \sigma_{Y0}$ , o que caracteriza o comportamento de um material elástico perfeitamente plástico. Esta conclusão reforça a ideia de que, para incrementos suficientemente lentos de carga, o modelo viscoplástico tende a se comportar de acordo com a Teoria da Plasticidade Clássica, conforme será ilustrado posteriormente.

### 3.2 – Critérios de Escoamento

Já foi apresentado que os materiais elastoplásticos e viscoplásticos possuem comportamento elástico enquanto as tensões são suficientemente pequenas. No momento em que o estado de tensões ao qual um material está submetido supera um determinado limite de escoamento, o comportamento constitutivo do material passa a ser regido por fenômenos da Teoria da Plasticidade. O objetivo de um critério de escoamento é justamente definir este limite de escoamento em função do estado de tensões em um ponto material.

Para o caso de modelos unidimensionais, a definição de um critério que caracterize a transição do regime elástico para o plástico é demasiadamente simples. Define-se inicialmente a função de escoamento  $F$  unidimensional como

$$F(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y \quad (3.20)$$

Para materiais elastoplásticos, os casos onde  $F < 0$  indicam que o material se encontra no regime elástico enquanto que o comportamento plástico se verifica para os casos onde  $F = 0$ . Como foi visto no item anterior, o fenômeno de endurecimento

plástico garante a atualização da tensão de escoamento  $\sigma_y$  à medida que a tensão aplicada ao modelo cresce, mantendo a função de escoamento nula durante todo o processo de plastificação e voltando a ter um valor negativo quando o descarregamento se inicia e o material volta ao regime elástico. Logo, não será admitido o caso  $F > 0$  para este tipo de material. A influência do fenômeno de endurecimento na função  $F$  sugere que a mesma depende também das variáveis que regem o endurecimento. No presente item, entretanto, o estudo dos critérios de escoamento se limitará à análise de tensões. A introdução dos fenômenos de endurecimento será feita posteriormente.

Para materiais viscoplásticos, entretanto, a função de escoamento pode assumir valores positivos. De acordo com PERZYNA [45], a equação (3.11) e (3.18) pode inclusive ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{\gamma} \langle F(\sigma) \rangle \quad (3.21)$$

Deste modo, o comportamento viscoplástico se iniciará quando  $F > 0$ , o que torna a função de escoamento importante não apenas para indicar o início da plastificação, mas também para quantificar o desenvolvimento da deformação viscoplástica.

A generalização do modelo de Perzyna pode ser escrita da seguinte forma (PERZYNA [45]):

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{\gamma} \langle \Phi(F) \rangle \quad (3.22)$$

onde  $\Phi$  é uma função que caracteriza a variação da deformação plástica em função da função de escoamento e, conseqüentemente, do estado de tensões. Deste modo, para o regime viscoplástico, pode-se escrever a função de escoamento em função das taxas de tensão e deformação total:

$$F = \Phi^{-1} \left( \gamma \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} \right) \right), \sigma > \sigma_{y0} \quad (3.23)$$

Para incrementos lentos de carga, as derivadas das tensões e deformações serão próximas de zero, o que resulta em uma função de escoamento aproximadamente nula para o regime viscoplástico, ou seja, o comportamento do material se aproxima do

esperado para um modelo elastoplástico. Consequentemente, o fenômeno da plasticidade não transiente, chamada neste texto simplesmente como Plasticidade Clássica, pode ser entendido como um limite da teoria da Viscoplasticidade onde os processos de carregamento são suficientemente lentos, conforme apresentação de LUBLINER [46].

Para problemas tridimensionais, a definição de um critério de escoamento é um pouco mais complexa, visto que o estado de tensões possui um número maior de variáveis independentes. Felizmente, existem para este fim diversos critérios propostos na literatura, baseados essencialmente em observações experimentais.

A escolha do critério de escoamento apropriado depende, dentre outros fatores, da natureza do material. O critério de Rankine, por exemplo, limita a tensão de tração máxima admissível. Por ser um critério adequado para a modelagem de materiais frágeis, esta formulação não será estudada neste trabalho.

Alguns materiais dúcteis comumente utilizados na engenharia, tais como os principais metais, são regidos pelos critérios baseados apenas nas tensões desviadoras, uma vez que experimentalmente as tensões esféricas costumam não influenciar o comportamento plástico destes tipos de materiais. Os critérios mais difundidos que consideram apenas as tensões desviadoras são os de Tresca e de Von Mises, que serão apresentados nos subitens subsequentes.

A adição da influência da tensão hidrostática no comportamento plástico do material aos critérios de Tresca e Von Mises gera, respectivamente, os critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager. Estes critérios são adequados, por exemplo, à modelagem de solos e serão igualmente estudados nesta pesquisa.

Para a elaboração de um critério de escoamento para problemas tridimensionais, é necessário definir uma função do tipo  $F = F(\sigma_{ij})$  que possui aparentemente 6 variáveis, uma vez que o tensor de tensões é simétrico para a formulação apresentada nesta pesquisa. No entanto, conforme apresentado no capítulo 2, o estado de tensões de um ponto material pode ser completamente definido pelas tensões principais. Mais do que isso, ao invés das tensões principais, pode-se adotar os invariantes do tensor de tensões, tirando vantagem da isotropia do problema e do fato de que a função de escoamento deve ser independente do sistema de coordenadas utilizado.

Finalmente, como evidências experimentais comprovam que o comportamento plástico e viscoplástico para problemas isotrópicos é diferente para as parcelas esférica e desviadora do tensor de tensões, torna-se conveniente a consideração desta separação no critério. Como a parcela esférica é completamente definida pelo invariante  $I_1$  e a parcela desviadora é completamente definida pelos invariantes  $J_2$  e  $J_3$ , pode-se escrever a função  $F$  das seguintes formas:

$$F = F(\sigma_{ij}) = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = F(I_1, I_2, I_3) = F(I_1, J_2, J_3) \quad (3.24)$$

A representação gráfica da equação  $F = 0$ , tanto no hiperespaço das componentes  $\sigma_{ij}$  do tensor de tensões quanto no espaço de Haigh-Westergaard, é chamada de superfície de escoamento e determina o limite destes espaços a partir do qual o material inicia o processo de plastificação. As propriedades destas superfícies serão estudadas no momento oportuno.

### 3.2.1 – Critério de Tresca

O critério de Tresca (TRESKA [6]) considera que o material atinge o escoamento quando a tensão máxima cisalhante atinge um valor limite. Este critério, portanto, leva em consideração apenas a parcela desviadora do tensor de tensões, sendo uma formulação adequada para a modelagem de materiais dúcteis, conforme evidências experimentais.

Da equação (2.31), a função de escoamento pode então ser convenientemente escrita em função das tensões principais como

$$F = 2 \text{Max} \left( \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|, \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| \right) - Y \quad (3.25a)$$

ou alternativamente como

$$F = \frac{1}{2} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_1 - \sigma_3| + |\sigma_2 - \sigma_3|) - Y \quad (3.25b)$$

onde  $Y$  é o parâmetro, a ser determinado experimentalmente, que define o limite de escoamento para o material, neste caso segundo o critério de Tresca. Alternativamente, considerando a equação (2.32), o critério de Tresca pode também ser escrito em função de outros parâmetros que também caracterizam a parcela desviadora do estado de tensões:



$$F = 2\sqrt{J_2} \cos \alpha_s - Y \quad (3.26)$$

Supondo um ensaio de tração unidimensional em um corpo de prova onde se verifica o escoamento quando  $\sigma_1 = \sigma_y, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Neste caso, tem-se:

$$F = \frac{1}{2}(|\sigma_y - 0| + |\sigma_y - 0| + |0 - 0|) - Y = 0 \Rightarrow Y = \sigma_y \quad (3.27)$$

Como pode ser constatado pela formulação, o critério de Tresca independe da tensão hidrostática aplicada no material. Considerando este fato e as equações (3.25) e (3.26), pode-se concluir que, no espaço de Haigh-Westergaard, a superfície de escoamento do critério de Tresca deve ser representada por uma superfície cilíndrica de diretriz hexagonal paralela ao plano  $\pi$  e geratriz paralela ao eixo octaédrico, sendo o eixo de simetria coincidente com o eixo octaédrico, conforme figura 3.6. Alternativamente, esta superfície de escoamento pode ser interpretada como a região resultante da interseção de 6 semi-espacos gerados através da imposição  $F=0$  nas equações (3.25), resultando no prisma hexagonal de altura infinita.

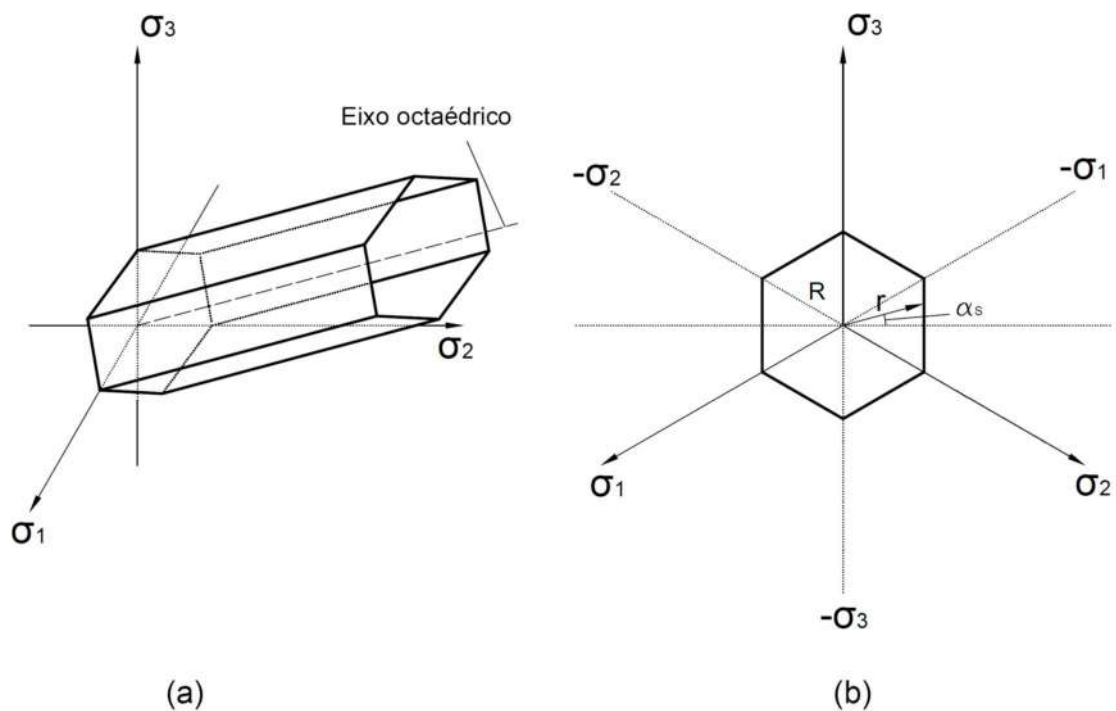


Figura 3.6 – Superfície de escoamento do critério de Tresca: (a) no espaço de Haigh-Westergaard; (b) no plano  $\pi$

### 3.2.2 – Critério de Von Mises

O Critério de Escoamento de Von Mises (MISES [7]) é um dos mais utilizados em problemas de engenharia, não apenas devido a sua adequação ao comportamento de materiais dúcteis, mas também por causa da sua simplicidade e facilidade de manipulação matemática. Assim como ocorre no critério de Tresca, o critério de escoamento de Von Mises leva em consideração unicamente as tensões desviadoras.

O critério de Von Mises pode ser interpretado como a imposição de um limite para energia de distorção do material (equação (2.35)). Deste modo, a função de escoamento para este critério depende unicamente do invariante  $J_2$  e pode ser escrita da seguinte forma:

$$F = \sqrt{3J_2} - Y \quad (3.28)$$

onde  $Y$  representa o parâmetro, a ser obtido experimentalmente, que define o limite de escoamento para o método de Von Mises.

Alternativamente, o critério de Von Mises pode ser interpretado ainda como a imposição de um limite para a componente cisalhante da tensão octaédrica (equação (2.37)). Para um material submetido a um ensaio de tração unidimensional, observa-se o limite de escoamento quando  $\sigma_1 = \sigma_Y, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Deste modo, utilizando as equações (2.35) e (2.25), a energia de distorção do material pode ser definida como

$$U_1 = \frac{\sigma_Y^2}{6G} \quad (3.29)$$

Igualando este resultado à fórmula da energia de distorção para um estado de tensões qualquer (equação (2.35)) e comparando o resultado com a função de escoamento (3.28), conclui-se que  $Y = \sigma_Y$ .

Assim como o critério de Tresca, o critério de Von Mises também independe da tensão hidrostática aplicada no material. Consequentemente, no espaço de Haigh-Westergaard, a superfície de escoamento do critério de Von Mises deve ser representada por uma superfície cilíndrica de diretriz circular paralela ao plano  $\pi$  e geratriz paralela ao eixo octaédrico, sendo o eixo de simetria coincidente com o eixo octaédrico. Neste

caso, conforme pode ser observado na figura 3.7, a diretriz circular do critério de Von Mises circunscreve a diretriz hexagonal do critério de Tresca, o que torna este último mais restritivo que o primeiro. Este fato pode ser comprovado fixando  $\alpha_s = \pi / 6$  na equação (3.26), o que associa o critério de escoamento unicamente ao raio da circunferência circunscrita ao hexágono, obtendo assim a formulação proposta pela equação (3.28).

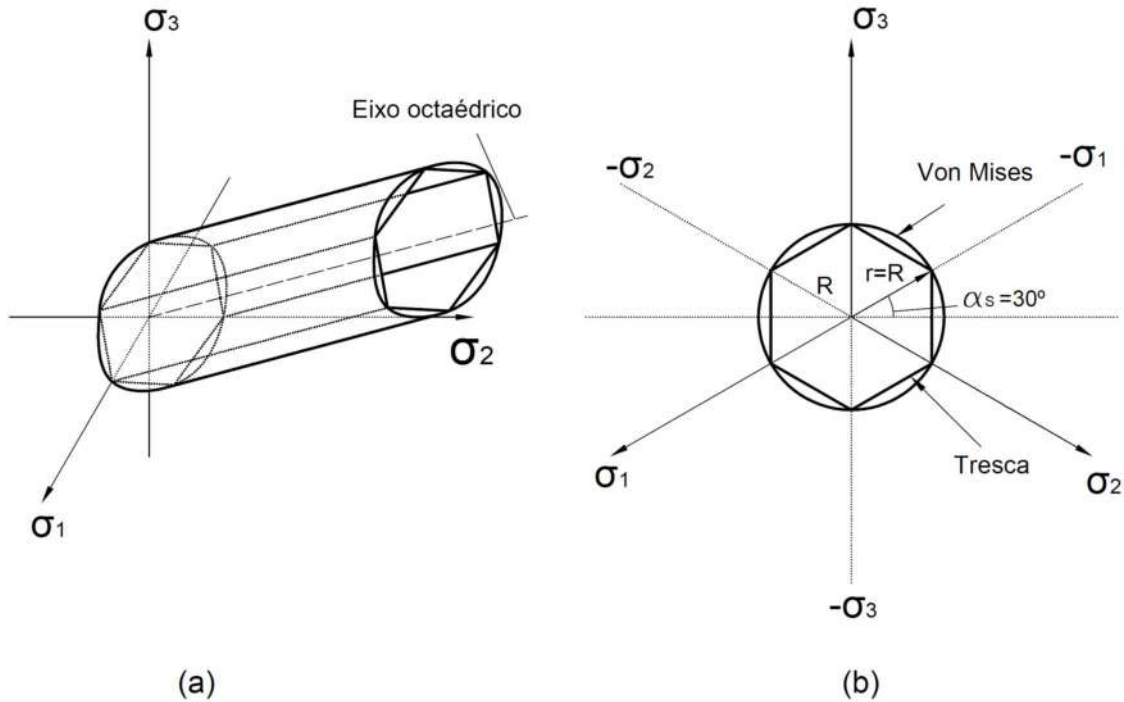


Figura 3.7 – Superfície de escoamento do critério de Von Mises: (a) no espaço de Haigh-Westergaard; (b) no plano  $\pi$

Adicionalmente, a superfície de escoamento do critério de Von Mises é suave, removendo as descontinuidades da superfície do critério de Tresca que, por sua vez, dificultam a modelagem matemática deste critério. Embora diversas soluções para este problema tenham sido propostas, conforme será visto posteriormente, a simplicidade da formulação do critério de Von Mises aliada à sua extensa aplicabilidade em problemas de engenharia justifica a popularidade deste critério frente à proposta de Tresca.

O critério de Von Mises pode ser interpretado como um caso particular do critério de Beltrami (BELTRAMI [120]), que define um limite para a energia de deformação total elástica (equação (2.35)), o que adiciona a influência da tensão hidrostática na formulação. Escrevendo os invariantes  $I_1$  e  $J_2$  respectivamente em função das

componentes normal e cisalhante da tensão octaédrica (equação (2.37)) e substituindo na equação (2.35), tem-se que, para o critério de Beltrami,  $F = (\sigma_N^{oct})^2 / 2K + 3(\sigma_T^{oct})^2 / 4G - Y$ . Logo, no espaço de Haigh-Westergaard, o critério de Beltrami pode ser representado por um elipsoide com simetria cilíndrica em relação ao eixo octaédrico.

Para problemas bidimensionais no estado plano de tensões e para uma tensão de escoamento  $\sigma_Y$  para ensaio de tração simples, obtêm-se as seguintes curvas de escoamento  $F(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ , respectivamente para o método de Tresca e de Von Mises:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_1| + |\sigma_2| = 2\sigma_Y \quad (3.30a)$$

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_Y^2 \quad (3.30b)$$

Plotando estas equações no espaço bidimensional das tensões principais para o estado plano de tensões, observa-se através da figura 3.8 que a curva de escoamento do critério de Tresca é representada por um hexágono não regular circunscrito por uma elipse com eixos rotacionados em  $45^\circ$  em relação aos eixos principais, que representa a curva de escoamento de Von Mises.

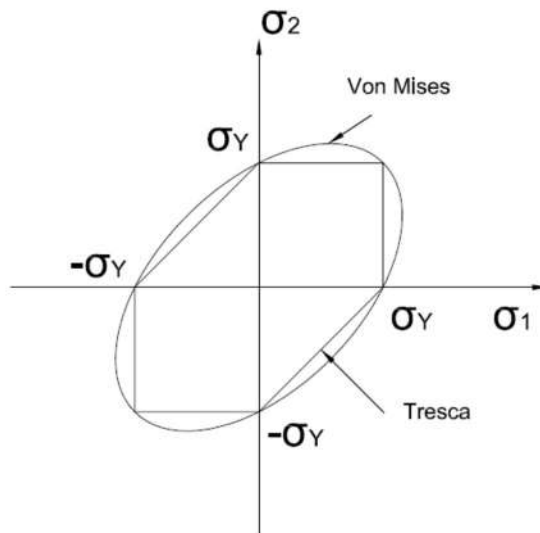


Figura 3.8 – Curvas de escoamento dos critérios de Tresca e Von Mises no espaço bidimensional para problemas de estado plano de tensões

### 3.2.3 – Critério de Mohr-Coulomb

Embora sua forma final não tenha sido proposta por nenhum dos dois cientistas homenageados, o critério de escoamento de Mohr-Coulomb se baseia nas conclusões advindas de diversos trabalhos de pesquisa de Christian Otto Mohr e Charles-Augustin de Coulomb (COULOMB [4]). A formulação tridimensional do critério pode tomar como ponto de partida o problema bidimensional comumente empregado na análise de ruptura de solos e cálculo de empuxo em muros de arrimo.

Considerando um determinado vetor tensão  $\mathbf{p}$  relativo a uma faceta de normal  $\mathbf{n}$  cujas componentes normal e cisalhante à faceta sejam respectivamente  $\sigma$  e  $\tau$ , o critério de Coulomb estipula um limite para a tensão cisalhante que é função da tensão normal à superfície de acordo com a equação

$$\tau \leq -tg(\varphi)\sigma + c \quad (3.31)$$

onde  $\varphi$  é o ângulo de atrito interno e  $c$  é o intercepto de coesão do material. Esta relação remete ao estudo de resistência de solos, onde o ângulo de atrito interno é responsável por representar o mecanismo de atrito, que impede o movimento relativo entre partículas de solo quando existe uma força normal de contato entre elas. O outro mecanismo de resistência dos solos é a coesão, que representa a força de atração química entre partículas de solo, atuando como mecanismo de resistência independente da força normal atuante (PINTO [121]).

O critério de Mohr, por sua vez, estabelece que a ruptura não ocorre enquanto o círculo de Mohr que representa o estado de tensões estiver no interior de uma curva envoltória de ruptura, chamada de envoltória de Mohr. Esta curva naturalmente se caracteriza pela envoltória de todos os círculos de Mohr representativos de estados de tensão que experimentalmente conduzem à ruptura do material.

A adoção da reta do critério de Coulomb (equação (3.31)) como envoltória de Mohr caracteriza o critério de Mohr-Coulomb. Vale destacar que, do ponto de vista da Mecânica dos Solos, o intercepto de coesão  $c$ , por vezes chamado simplesmente de coesão, é tão somente um coeficiente da reta da envoltória de ruptura, não possuindo o

sentido de coesão como mecanismo de resistência dos solos independente da força normal atuante (PINTO [121]).

Para o problema de estado plano de tensões, o círculo de Mohr que representa o estado plano de tensões está limitado à reta da equação (3.31), conforme figura 3.9. Deste modo, pode-se escrever a seguinte relação para este caso:

$$(\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 + \sigma_1) \operatorname{sen} \varphi \leq 2c \cos \varphi \quad (3.32)$$

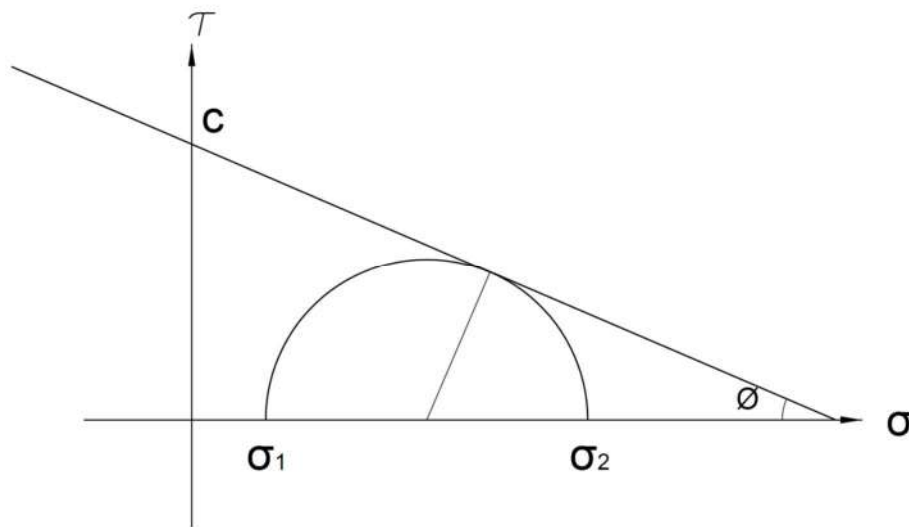


Figura 3.9 – Representação gráfica do Critério de Mohr-Coulomb para problemas bidimensionais através do círculo de Mohr

Expandindo para o caso tridimensional, ou seja, aplicando o limite definido pela reta (3.31) ao estado de tensões tridimensional, definido graficamente por três círculos de Mohr no gráfico  $\tau \times \sigma$ , tem-se o seguinte resultado para a função de escoamento do método de Mohr-Coulomb:

$$F = \operatorname{Max} \left\{ |\sigma_1 - \sigma_2| + (\sigma_1 + \sigma_2) \operatorname{sen} \varphi, |\sigma_1 - \sigma_3| + (\sigma_1 + \sigma_3) \operatorname{sen} \varphi, |\sigma_2 - \sigma_3| + (\sigma_2 + \sigma_3) \operatorname{sen} \varphi \right\} - 2C \cos \varphi \quad (3.33)$$

Ao contrário dos critérios apresentados até agora, o critério de Mohr-Coulomb possui dois parâmetros,  $\varphi$  e  $C$ , a serem determinados experimentalmente. Como exemplo, consideram-se os resultados dos experimentos de tração uniaxial

$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  e compressão uniaxial  $\sigma_1 = -\sigma_c, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Aplicando os estados de tensões na equação (3.33) e resolvendo o sistema de equações resultante, obtém-se:

$$\text{sen}\varphi = \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \quad (3.34a)$$

$$C \cos \varphi = \frac{\sigma_c \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \quad (3.34b)$$

Outros ensaios como o triaxial e o de cisalhamento puro poderiam ser também realizados para a obtenção dos parâmetros. Como é esperado, para materiais comuns utilizados na engenharia, que o ângulo de atrito seja agudo, conclui-se da equação (3.34a) que a tensão resistente à compressão simples possui módulo superior à tensão de tração simples admissível. Adicionalmente, para um ângulo de atrito nulo, tem-se a formulação de Tresca.

Separando o estado de tensões nas parcelas esférica e desviadora (equação (2.30)) na função de escoamento (3.33), conclui-se que, ao contrário dos outros dois critérios estudados, o critério de Mohr-Coulomb é dependente não apenas da parcela desviadora mas também da parcela esférica do tensor de tensões, o que justifica inclusive a existência de dois parâmetros na formulação do critério. Tem-se, portanto, o seguinte resultado:

$$F = \text{Max} \left\{ |S_1 - S_2| + (S_1 + S_2) \text{sen}\varphi, |S_1 - S_3| + (S_1 + S_3) \text{sen}\varphi, |S_2 - S_3| + (S_2 + S_3) \text{sen}\varphi \right\} + 2\tilde{\sigma} \text{sen}\varphi - 2C \cos \varphi \quad (3.35)$$

Aplicando as equações (2.32) e (2.33), a equação anterior pode ser reescrita na sua forma compacta:

$$F = 2\sqrt{J_2} \left( \cos \alpha_s - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\alpha_s \text{sen}\varphi \right) + 2\tilde{\sigma} \text{sen}\varphi - 2C \cos \varphi \quad (3.36)$$

Observando as equações anteriores, conclui-se que a representação gráfica da função de escoamento do critério de Mohr-Coulomb no espaço de Haigh-Westergaard é uma superfície cônica cujas diretrizes são hexágonos regulares localizados em planos paralelos ao  $\pi$  (figura 3.10). O eixo desta cônica coincide com o eixo octaédrico e o

vértice está localizado em um ponto deste eixo que representa a tensão esférica máxima admissível, que pode ser calculada através das duas equações anteriores:

$$\tilde{\sigma}_{\max} = C \operatorname{ctg} \varphi \quad (3.37)$$

Como o critério, conforme apresentado, não limita a compressão hidrostática no material, é possível especificar esta compressão experimentalmente. Este limite pode ser representado no espaço das tensões principais como um plano paralelo ao plano  $\pi$ , transformando a superfície resultante no contorno de uma região fechada com a forma de uma pirâmide hexagonal regular reta, conforme figura 3.10.

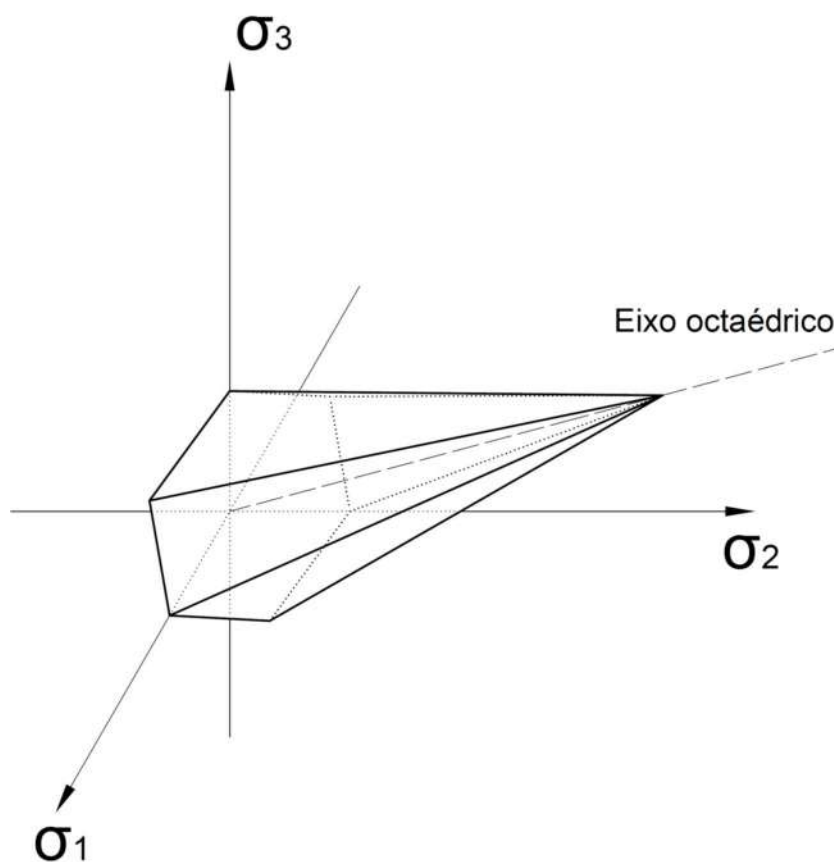


Figura 3.10 – Superfície de escoamento do Critério de Mohr-Coulomb no espaço de Haigh-Westergaard

Portanto, considerando as equações (3.35) e (3.36) e a figura 3.9, pode-se entender o critério de Mohr-Coulomb como uma adaptação do critério de Tresca para levar em consideração o efeito da tensão hidrostática. Para problemas de estado plano de tensões,



tem-se um resultado semelhante ao método de Tresca, tendo como única diferença o fato de que as tensões de compressão e tração simples possuem módulos diferentes entre si, conforme figura 3.11.

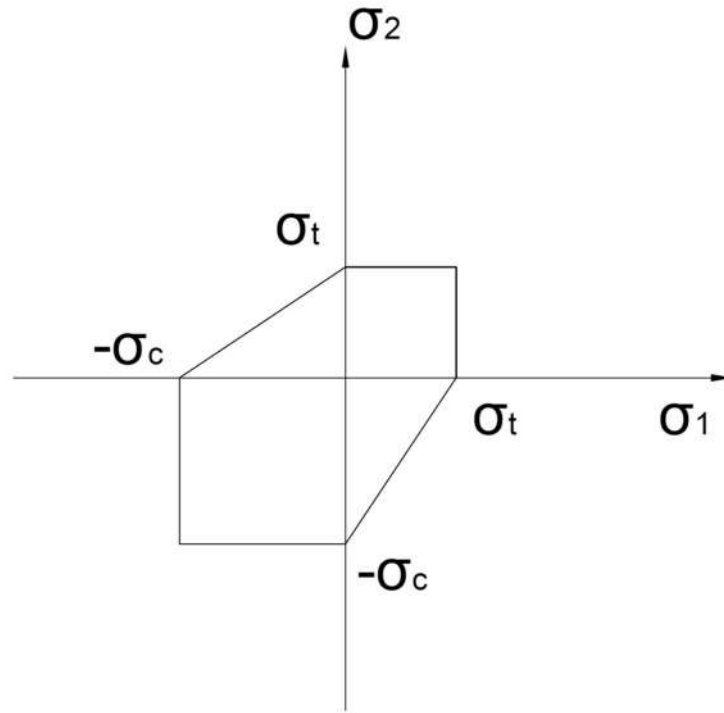


Figura 3.11 – Curva de escoamento do Critério de Mohr-Coulomb no espaço bidimensional para problemas de estado plano de tensões

### 3.2.4 – Critério de Drucker-Prager

Apesar da sua popularidade e adequabilidade para a análise elastoplástica de diversos materiais utilizados na engenharia, o critério de Von Mises não considera o efeito da tensão hidrostática atuante no material, o que seria incompatível com a modelagem de problemas de Mecânica dos Solos, por exemplo. Enunciado por DRUCKER e PRAGER [19], este método adota como ponto de partida o critério de Von Mises e introduz na formulação a influência das tensões esféricas através de uma simples combinação linear:

$$F = \sqrt{3J_2} + \mu I_1 - Y \quad (3.38)$$

sendo  $\mu$  e  $Y$  os parâmetros a serem determinados experimentalmente. Considerando, por exemplo, os resultados dos ensaios de compressão uniaxial  $\sigma_1 = -\sigma_c, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  e o ensaio de compressão triaxial  $\sigma_1 = -\sigma_c', \sigma_2 = \sigma_3 = -p$  aplicados na equação (3.38), obtém-se um sistema de equações cuja solução define os parâmetros da seguinte forma:

$$\mu = \frac{\sigma_c' - \sigma_c - p}{\sigma_c' - \sigma_c + 2p} \quad (3.39a)$$

$$Y = \frac{3p\sigma_c}{\sigma_c' - \sigma_c + 2p} \quad (3.39b)$$

A título de curiosidade, o critério de Drucker-Prager pode ser interpretado como uma limitação para a componente cisalhante da tensão octaédrica, considerando ainda o acréscimo da influência da tensão hidrostática, ou seja,  $\sigma_T^{oct} = \sqrt{2/3}Y - \mu I_1/3$ . Por esta razão, alguns autores enunciam a equação (3.38) multiplicando o fator  $1/\sqrt{6}$  à parcela da tensão hidrostática, o que não causa grandes impactos, visto que o referido fator pode ser incorporado ao parâmetro  $\mu$ .

Observando a equação (3.38), conclui-se que a representação gráfica da função de escoamento do critério de Drucker-Prager no espaço de Haigh-Westergaard é uma superfície cônica cujas diretrizes são círculos localizados em planos paralelos ao  $\pi$  (figura 3.11). O eixo desta cônica coincide com o eixo octaédrico e o vértice está localizado em um ponto deste eixo que representa a tensão esférica máxima admissível, que pode ser calculada através da equação anterior:

$$\tilde{\sigma}_{max} = \frac{Y}{3\mu} \quad (3.40)$$

Assim como no critério de Mohr-Coulomb, o critério de Drucker-Prager não limita a compressão hidrostática máxima. Este problema pode ser igualmente resolvido através da definição experimental de um limite que pode ser representado no espaço das tensões principais como um plano paralelo ao plano  $\pi$ , transformando a superfície resultante no contorno de uma região fechada em forma de cone circular reto, conforme figura 3.12. Como consequência direta da equação (3.38), as seções das superfícies de

escoamento dos critérios de Von Mises e de Drucker-Prager no plano  $\pi$  são coincidentes se o parâmetro  $Y$  for o mesmo para as duas formulações.

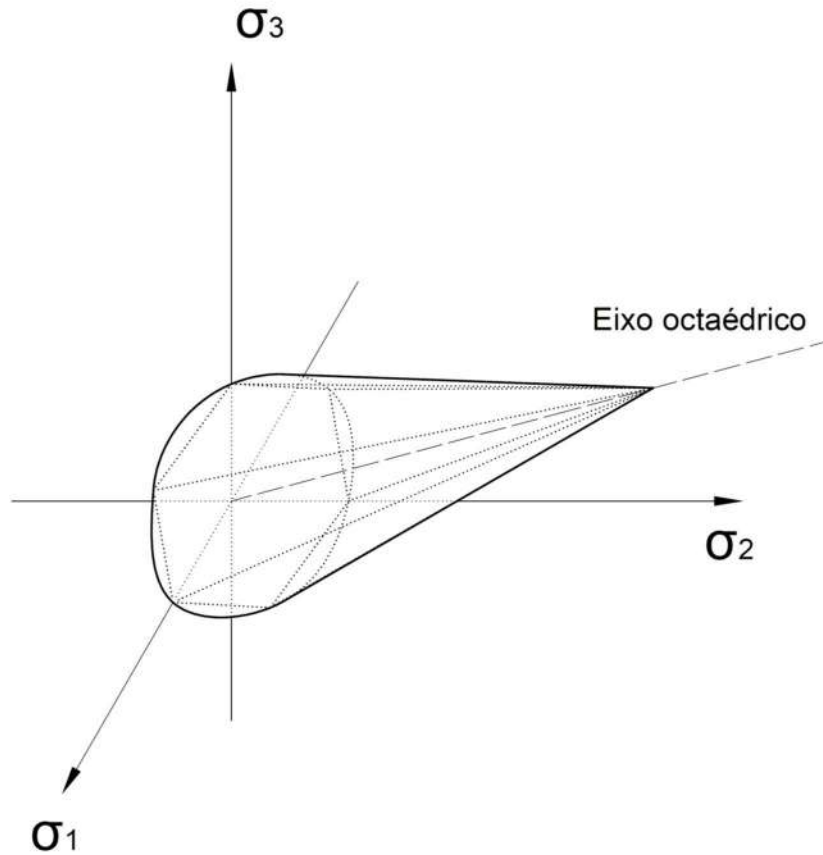


Figura 3.12 – Superfície de escoamento do Critério de Drucker-Prager no espaço de Haigh-Westergaard

Em qualquer seção paralela ao plano  $\pi$ , o critério de Drucker-Prager pode ser representado pelo círculo que circunscreve o hexágono do critério de Mohr-Coulomb (figura 3.12). Para tanto, basta fixar  $\alpha_s = \pi/6$  na equação (3.36), associando o critério unicamente ao raio do círculo que circunscreve o hexágono. Deste modo, tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 F &= \sqrt{3J_2} + \mu' I_1 - Y' \\
 \mu' &= \frac{2 \operatorname{sen} \varphi}{3 - \operatorname{sen} \varphi} \\
 Y' &= \frac{6C \cos \varphi}{3 - \operatorname{sen} \varphi}
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

### 3.3 – Variáveis Internas dos Materiais Plásticos e Viscoplasticos

No item 2.7, foi apresentado que os materiais elásticos possuem estado de deformações dependente unicamente da temperatura absoluta e das tensões relativas ao estado de equilíbrio atual do corpo. Deste modo, as tensões, deformações e temperatura em cada estado local formam um sistema local termodinamicamente equilibrado que é totalmente independente dos estados anteriores do corpo, o que caracteriza processos conservativos.

Por outro lado, os materiais inelásticos, tais como os plásticos e viscoplasticos, possuem deformações influenciadas não apenas por tensões e temperatura, mas também por variáveis adicionais chamadas na literatura de “variáveis internas” (LUBLINER [46]). A partir do momento em que o material inelástico sofre a aplicação de carregamentos e a consequente deformação, as diversas variáveis internas sofrem também alterações, muitas das quais irreversíveis, o que confere um caráter irreversível ao processo de plastificação. Consequentemente, no regime inelástico, cada estado de tensões pode depender de estados de tensões e deformações anteriores, ou seja, o histórico de carregamentos pode ser uma das variáveis internas do modelo constitutivo proposto. O desenvolvimento da deformação inelástica é, portanto, dependente do processo ao qual o corpo é submetido, o que confere um caráter dissipativo ao fenômeno, em oposição ao caráter conservativo da deformação elástica.

A natureza destas variáveis internas está associada a alterações da estrutura físico-química do material oriundas de movimento relativo entre moléculas (com quebras de ligações e formação de novas ligações químicas), reações químicas, mudanças de fase, movimento relativo entre partículas de solo, entre outros fatores. Estas variáveis podem estar associadas à própria quantificação matemática do fenômeno de plastificação, ou seja, as deformações plásticas propriamente ditas, por exemplo, podem ser entendidas como pertencentes ao grupo de variáveis internas.

A teoria que modela os materiais inelásticos através das variáveis internas foi proposta formalmente por COLEMAN e GURTIN [26], com algumas contribuições posteriores, dentre as quais é possível destacar o trabalho de RICE [32]. Esta teoria não se prontifica a fazer uma análise baseada na complexidade microscópica dos fenômenos associados à natureza das variáveis internas. Alternativamente, a formulação se propõe a

definir variáveis com o objetivo de avaliar macroscopicamente a evolução das funções de estado considerando observações experimentais aliadas a modelos matemáticos capazes de reproduzir satisfatoriamente o comportamento inelástico.

Basicamente, o objetivo final desta teoria é escrever as funções de estado de um sistema termodinâmico inelástico local de maneira única em função das deformações e temperatura absolutas, ditas variáveis de estado “observáveis”, e das variáveis internas, que são responsáveis por modelar indiretamente os efeitos inelásticos observados macroscopicamente no material (HORSTEMEYER e BAMMANN [5]).

Alternativamente, para materiais plásticos e viscoplásticos, é admissível a adoção do estado de tensões como variável de estado, o que atribui o status de função de estado às deformações. Nomeando as diversas variáveis internas genericamente como  $\xi_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , pode-se então escrever:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl}(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t), \xi_\alpha(\mathbf{x}, t)) \quad (3.42)$$

Neste caso,  $\sigma_{ij}$ ,  $T$  e  $\xi_\alpha$  são as variáveis de estado que caracterizam um determinado estado termodinâmico local, podendo o grupo de variáveis internas conter registros de estados termodinâmicos anteriores. Estas variáveis de estado também são responsáveis pela definição da evolução das variáveis internas, de acordo com as seguintes relações constitutivas, chamadas de equações de evolução:

$$\dot{\xi}_\alpha(\mathbf{x}, t) = g_\alpha(\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t), \xi_\alpha(\mathbf{x}, t)) \quad , \alpha = 1, \dots, N \quad (3.43)$$

onde  $g_\alpha$  são funções de evolução associadas a cada variável interna  $\xi_\alpha$ . Estas variáveis de estado podem ser escalares, vetoriais ou tensoriais, dependendo dos fenômenos aos quais estas estão associadas. Do ponto de vista da termodinâmica, um estado local de equilíbrio se caracteriza pela ausência de variação das variáveis internas a tensões e temperatura constantes, ou seja,  $g_\alpha = 0$  para todo  $\alpha$ , como é o caso de materiais elásticos. A não observância desta propriedade caracteriza estados de desequilíbrio local, o que caracteriza materiais inelásticos.

De acordo com LUBLINER [46], os materiais elásticos são caracterizados por estados locais de equilíbrio termodinâmico associado a uma determinada entropia e

temperatura absoluta, enquanto que os materiais inelásticos apresentam estados de desequilíbrio que se desenvolvem através de processos irreversíveis caracterizados pela evolução das variáveis internas. Por conseguinte, a princípio, a teoria desenvolvida no item 2.7, com a equação de variação de entropia local (2.54) e a definição da energia livre de Helmholtz (2.55), seria apropriada somente para estados locais de equilíbrio elásticos.

Ainda segundo Lubliner, a Termodinâmica Racional (TRUESDELL [28]) permite a definição de uma energia livre de Helmholtz de maneira única em função das variáveis de estado  $(\varepsilon_{ij}, T \text{ e } \xi_\alpha)$  para um sistema inelástico sofrendo um processo irreversível. Esta corrente permite ainda a aplicação da desigualdade local de Clausius-Duhem para problemas inelásticos, o que foi fortemente criticado por WOODS [37]. Conforme LEBON et al. [38], dentre outros aspectos, a validade da desigualdade local de Clausius-Duhem para problemas inelásticos é considerada questionável, pois a mesma é obtida para processos entre dois estados de equilíbrio termodinâmico, o que não se verifica para processos em materiais inelásticos. Para o escopo do estudo de materiais plásticos e viscoplásticos, no entanto, esta teoria vem se mostrando apropriada para a modelagem satisfatória dos processos irreversíveis associados a estes materiais, conforme pode ser visto nas referências bibliográficas desta pesquisa.

Deste modo, será admitida a existência de uma energia livre de Helmholtz aos moldes da definição proposta para materiais elásticos (equação (2.55)) com a adição da dependência das variáveis internas. Consequentemente, pode-se escrever:

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial h}{\partial T} \dot{T} + \sum_{\alpha} \frac{\partial h}{\partial \xi_{\alpha}} \dot{\xi}_{\alpha} \quad (3.44)$$

Aplicando na desigualdade da variação de entropia local (equação (2.54)) as equações (2.50), (2.55) e (3.44), tem-se o resultado

$$-T^{-1} \left( \rho \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho T^{-1} \left( \frac{\partial h}{\partial T} + s \right) \dot{T} + q_i (T^{-1})_{,i} - \rho T^{-1} \sum_{\alpha} \frac{\partial h}{\partial \xi_{\alpha}} \dot{\xi}_{\alpha} \geq 0 \quad (3.45)$$

Os termos contidos nos parênteses da equação anterior se anulam, pelos mesmos motivos considerados na análise da equação (2.57), o que gera as equações (2.58a,b). Através da observação experimental de que o calor flui do ponto de maior temperatura

para o ponto mais frio do corpo, pode-se concluir que o penúltimo termo da equação não pode ser negativo. Considerando ainda que a temperatura absoluta é estritamente positiva, tem-se como resultado a desigualdade de Kelvin (ou de dissipação):

$$-\rho \sum_{\alpha} \frac{\partial h}{\partial \xi_{\alpha}} \dot{\xi}_{\alpha} \geq 0 \quad (3.46)$$

Para dar continuidade ao desenvolvimento da formulação constitutiva de materiais plásticos e viscoplásticos, serão assumidas as seguintes características, que, segundo LUBLINER [46], são compatíveis com o comportamento de materiais inelásticos em geral:

- As deformações elásticas para um determinado estado dependem das tensões e temperatura absoluta relativa a este estado, não sendo dependentes da evolução das variáveis internas;
- O desenvolvimento das deformações plásticas e viscoplásticas é função da evolução das variáveis internas, que, de fato, regem o fenômeno da plastificação.

As equações apresentadas até o final deste item foram propostas e demonstradas por LUBLINER [46] para o caso geral de materiais inelásticos. Neste trabalho, porém, estas equações serão apresentadas especificamente para materiais plásticos e viscoplásticos para restringir a análise ao escopo desta pesquisa. De acordo com as proposições anteriores, as deformações totais podem ser escritas como uma soma das parcelas elástica e plástica ou viscoplástica:

$$\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}, T, \xi_{\alpha}) = \varepsilon_{ij}^e(\sigma_{ij}, T) + \varepsilon_{ij}^p(\xi_{\alpha}) \quad (3.47)$$

Esta proposição é compatível com a hipótese de que a energia livre de Helmholtz pode ser igualmente dividida nas parcelas elástica  $h^e$  e plástica (ou viscoplástica)  $h^p$  do seguinte modo [46]:

$$h(\varepsilon_{ij}, T, \xi_{\alpha}) = h^e(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p(\xi_{\alpha}), T) + h^p(\xi_{\alpha}, T) \quad (3.48)$$

A desigualdade de Kelvin pode então ser escrita como

$$D^p - \rho \sum_{\alpha} \frac{\partial h^p}{\partial \xi_{\alpha}} \dot{\xi}_{\alpha} \geq 0 \quad (3.49)$$

$$D^p = \dot{W}^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p$$

onde  $D^p$  é a dissipação plástica, definida como a taxa de variação do trabalho plástico  $W^p$ .

Nos modelos plásticos e viscoplásticos mais simples, como os que serão estudados neste trabalho, o grupo de variáveis internas é composto basicamente pelas deformações plásticas propriamente ditas e pelas variáveis de endurecimento, que serão introduzidas posteriormente.

### 3.4 – Regras de Fluxo

Enquanto o material se encontra no regime elástico, sua relação constitutiva é regida pela Lei de Hooke Generalizada, conforme equação (2.7). No entanto, após atingir o limite de escoamento, o material passa a desenvolver adicionalmente uma deformação plástica irreversível. A função das regras de fluxo é justamente definir como as deformações plásticas se desenvolvem em função da aplicação de um determinado estado de tensões. Trata-se, portanto, de uma relação constitutiva para o regime plástico, podendo ainda ser entendida como uma formulação para a evolução de uma variável interna chamada de deformação plástica irreversível.

Para o caso de problemas viscoplásticos unidimensionais, por exemplo, pode-se adotar como regra de fluxo a formulação de Perzyna da equação (3.22), repetida aqui:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{\gamma} \langle \Phi(F) \rangle \quad (3.50)$$

Para problemas tridimensionais no regime plástico, as deformações elásticas são completamente definidas pelas tensões totais aplicadas através do emprego da relação constitutiva da equação (2.7), ou seja,  $\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}$ . Consequentemente, a relação constitutiva elástica para o regime plástico pode então ser definida:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x}, t) \right) \quad (3.51)$$

Na tentativa de formular uma regra de fluxo para problemas plásticos tridimensionais, destaca-se a formulação de Prandtl-Reuss (PRANDTL [10] e REUSS



[11]), inspirada no estudo de fluidos newtonianos. Nesta formulação, a evolução da deformação plástica é consequência direta das tensões desviadoras aplicadas:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\bar{\lambda}} S_{ij} \quad (3.52)$$

onde  $\bar{\lambda}$  é um parâmetro de proporcionalidade, que é uma função escalar dependente das variáveis de estado (tensões, temperatura e variáveis internas). Esta formulação é baseada na proposta de LEVY [8] e MISES [7], onde a deformação da expressão (3.52) é considerada total, o que sugere que o material não desenvolveria deformação elástica durante o processo de carregamento, razão pela qual HILL [21] classifica estes materiais como “fictícios”.

Apesar das derivadas temporais, o problema puramente plástico é considerado independente do tempo. De acordo com o apresentado no item anterior, este comportamento pode ser entendido como um limite da teoria viscoplástica (transiente) para aplicações de carregamentos suficientemente lentos. A intenção desta derivação na equação anterior é caracterizar uma variação infinitesimal das grandezas, motivo pelo qual alguns autores preferem a formulação infinitesimal:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\bar{\lambda} S_{ij} \quad (3.53)$$

Diversas conclusões podem ser obtidas através da análise desta formulação. Primeiramente, é possível observar que a variação das deformações plásticas possui a direção das componentes do tensor de tensões desviadoras no hiperespaço. Além disso, os materiais regidos por esta lei são ditos plasticamente incompressíveis, uma vez que

$$\dot{\varepsilon}_{kk}^p = \dot{\bar{\lambda}} S_{kk} = 0 \quad (3.54)$$

Em outras palavras, para esta regra, apenas a parcela desviadora das relações constitutivas é regida pelo modelo plástico. Elevando a equação (3.52) ao quadrado, obtém-se o seguinte resultado:

$$d\bar{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon^p}{d\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \quad (3.55)$$

onde

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} \quad (3.56a)$$

$$d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p \quad (3.56b)$$

Nas equações anteriores,  $\bar{\sigma}$  é a tensão equivalente e  $\bar{\varepsilon}^p$  é deformação plástica equivalente. Evidentemente, esta definição de tensão equivalente seria incompatível com materiais que apresentam plastificação dependente da tensão hidrostática. Será verificado posteriormente que as definições das equações (3.56) são formas particulares de uma definição mais geral da tensão e deformação plástica equivalente.

Aplicando os resultados de um ensaio de tração uniaxial ( $\sigma_{11} = \sigma_Y$  e demais componentes de tensão nulas), verifica-se a associação com o fenômeno de endurecimento (não necessariamente linear) do modelo unidimensional:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p} = \frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}} = H' \quad (3.57)$$

Deste modo, a formulação de Prandtl-Reuss permite a associação do fenômeno do endurecimento de problemas tridimensionais aos resultados obtidos em um simples ensaio uniaxial, sendo o módulo de endurecimento plástico uma função da deformação plástica equivalente ( $H' = H'(\bar{\varepsilon}^p)$ ).

Apesar de compatível com o critério de escoamento de Von Mises (como será visto posteriormente) e com o comportamento de materiais dúcteis comuns na engenharia, a regra de Prandtl-Reuss é limitada por não considerar uma eventual influência do estado de tensões hidrostático. Desta forma, a partir deste ponto, será desenvolvida uma formulação mais genérica e adequada a uma variedade maior de problemas de sólidos deformáveis.

No item anterior, as deformações plásticas foram apresentadas como sendo dependentes apenas das variáveis internas. Conseqüentemente, pode-se escrever a seguinte expressão para a taxa de variação desta deformação:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \sum_{\alpha} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial \xi_{\alpha}} \dot{\xi}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial \xi_{\alpha}} g_{\alpha} \quad (3.58)$$

Como as funções  $g_\alpha$  dependem também das tensões e temperatura, pode-se finalmente escrever:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \sum_\alpha \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial \xi_\alpha} g_\alpha(\sigma_{kl}, T, \xi_\alpha) = g_{ij} \quad (3.59)$$

Por motivo de conveniência e por razões que ficarão mais claras posteriormente, admite-se que a função  $g_{ij}$  está associada a uma função  $Q(\sigma_{ij}, T, \xi_\alpha)$  chamada de potencial de fluxo ou potencial plástico:

$$g_{ij} = \varphi \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.60)$$

sendo  $\varphi(\sigma_{ij}, T, \xi_\alpha)$  uma função escalar positiva.

Das equações (3.59) e (3.60), obtém-se finalmente uma regra de fluxo mais geral em função do potencial de fluxo:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \hat{g}_{ij} \quad (3.61)$$

onde  $\lambda(\sigma_{ij}, T, \xi_\alpha)$  é uma função escalar de proporcionalidade, por vezes chamada de parâmetro de consistência, cuja taxa de variação no tempo será sempre positiva no regime plástico e nula no regime elástico. Mais uma vez, a formulação infinitesimal (adotada na equação (3.53)) pode ser empregada na equação (3.61) em casos de materiais regidos pela plasticidade clássica. Diferentemente da regra de Prandtl-Reuss, a regra de fluxo da equação (3.61) é suficientemente geral e pode ser aplicada para materiais plásticos e viscoplásticos, bastando para isso alterar a função do potencial de fluxo  $Q$ .

Como as deformações plásticas podem ser entendidas como variáveis internas do modelo plástico e viscoplástico, as regras de fluxo podem ser entendidas como equações de evolução, nos moldes na equação (3.43). O item a seguir discorrerá sobre regras de fluxo mais específicas para materiais plásticos com endurecimento, ficando as regras de fluxo de materiais viscoplásticos a cargo de itens posteriores.

### 3.4.1 – Materiais Plásticos com Endurecimento - Postulado de Drucker e Regras de Fluxo Associativas

Como já foi observado anteriormente neste texto, sobretudo no item 3.1, o estudo das relações constitutivas no regime plástico precisa levar em consideração os possíveis fenômenos de endurecimento do material ou a ausência deles (no caso dos materiais perfeitamente plásticos). De uma forma geral, para modelos plásticos unidimensionais submetidos a situações de carregamento e descarregamento, a seguinte definição formal pode ser considerada:

- Para materiais com endurecimento, tem-se  $\dot{\sigma}\dot{\epsilon}^p > 0$ ;
- Para materiais perfeitamente plásticos, tem-se  $\dot{\sigma}\dot{\epsilon}^p = 0$ ;
- Para materiais com amolecimento, tem-se  $\dot{\sigma}\dot{\epsilon}^p < 0$ ;

As definições anteriores podem ser escritas também na forma infinitesimal. Os três processos anteriores são apresentados na figura 3.13, que é apresentada com frequência na literatura [46].

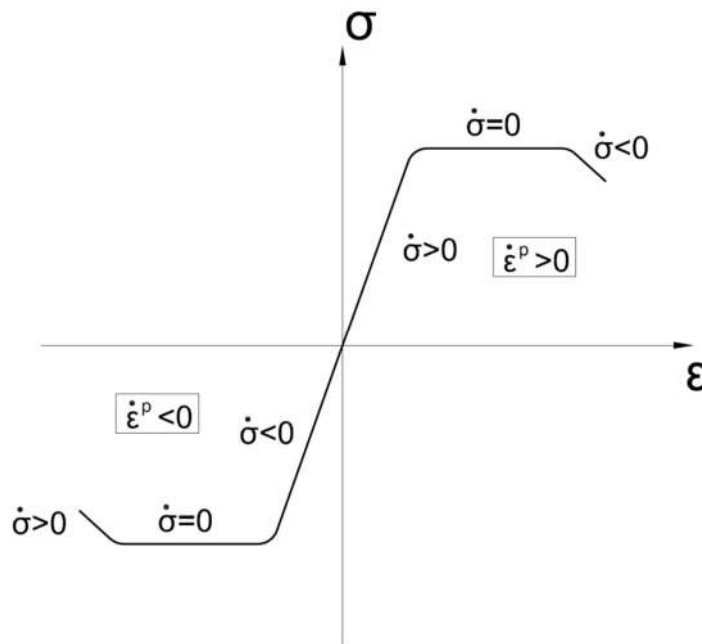


Figura 3.13 – Processos de plastificação com endurecimento, patamar de escoamento e amolecimento

Enunciado por DRUCKER [18], o Postulado de Drucker define os requisitos que um material regido pela plasticidade clássica precisa atender para ser dito “estável” e com endurecimento. Na primeira proposição do postulado, um material submetido a um estado de tensões  $\sigma_{ij}$  e de deformações  $\varepsilon_{ij}$  recebe a ação de um carregamento infinitesimal  $d\sigma_{ij}$  produzido por um agente externo (não relacionado aos agentes causadores do estado original). O trabalho (por unidade de volume) realizado pela parcela elástica do estado de deformações  $W^e = d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^e$  é sempre positivo enquanto que o trabalho da parcela plástica das deformações  $W^p = d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p$  pode ser positivo ou nulo (se não houver plastificação), o que torna o trabalho total positivo. Tem-se, portanto, a seguinte proposição para o carregamento infinitesimal:

$$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} > 0 \quad (3.62a)$$

Na segunda proposição, o carregamento externo é removido, o que remove instantaneamente a deformação elástica, restando apenas o trabalho plástico  $W^p = d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p$  como o trabalho total do ciclo. Utilizando a conclusão do parágrafo anterior, tem-se para o ciclo de carregamento proposto o seguinte resultado:

$$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (3.62b)$$

Como é possível perceber, este segundo requisito é válido tanto para materiais plásticos com endurecimento quanto para materiais perfeitamente plásticos, chamados de “neutramente estáveis” no sentido da definição de Drucker. A primeira proposição, porém, restringe o postulado aos materiais com endurecimento, uma vez que os materiais perfeitamente plásticos não permitem incrementos de carga e os materiais com amolecimento violam a equação (3.62a), tornando estes materiais “instáveis” em relação ao aumento de carga.

Adicionalmente, a proposição (3.62b) pode ser extrapolada para um processo com incrementos finitos para um determinado ciclo de carregamento:

$$\Delta\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (3.63)$$

Por exemplo, a variação de tensão pode ser escrita como  $\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$ , onde  $\sigma_{ij}^*$  é o estado de tensão no início do carregamento no regime elástico e  $\sigma_{ij}$  é um estado de tensão pertencente à superfície de escoamento, caracterizando, portanto, o regime plástico e completando o processo de carregamento. Durante este processo, o material desenvolve uma deformação plástica que, segundo a equação (3.63), não se opõe à variação de tensão. O resultado final pode ser escrito como

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \Delta\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (3.64)$$

Como  $\sigma_{ij}^*$  pode caracterizar um estado de tensões no regime elástico, o valor de  $\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$  pode ser escrito como  $\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^e + \Delta\sigma_{ij}^p$ , sendo, portanto, a soma das variações de tensão no regime elástico e plástico. Mesmo considerando que  $\Delta\sigma_{ij}^p \Delta\varepsilon_{ij}^p = 0$  para materiais perfeitamente plásticos e  $\Delta\sigma_{ij}^p \Delta\varepsilon_{ij}^p < 0$  para materiais com amolecimento, a relação  $\Delta\sigma_{ij}^e \Delta\varepsilon_{ij}^p > 0$  pode ocorrer para estes materiais. Consequentemente, apesar de a condição das equações (3.63) e (3.64) não infinitesimais ser necessária para o endurecimento, esta não é suficiente, visto que materiais perfeitamente plásticos e com amolecimento podem também apresentar este comportamento. Como consequência, a expressão (3.64) ganha individualmente força de postulado, sendo conhecida na literatura como Postulado da Dissipação Plástica Máxima. Segundo LUBLINER [46], este postulado foi individualmente proposto por MISES [9], TAYLOR apud [46] e HILL apud [46].

A expressão (3.64) pode ser estendida para uma forma infinitesimal, mais comumente apresentada na literatura. Para tanto, considera-se inicialmente que o material está submetido a um estado de tensões  $\sigma_{ij}^*$  no regime elástico, sendo então carregado para um estado  $\sigma_{ij}$  localizado na superfície de escoamento. A partir de um incremento infinitesimal de tensão  $d\sigma_{ij}$ , o material desenvolve um incremento  $d\varepsilon_{ij}^p$  de deformação plástica (ver figura 3.14c). Aplicando a equação (3.64) e sabendo que a parcela  $d\sigma_{ij}$  tende a zero na presença de  $\sigma_{ij}$  e  $\sigma_{ij}^*$ , tem-se o seguinte resultado final:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (3.65)$$

Para extrair as consequências práticas deste postulado, é conveniente interpretar os tensores de variação de tensão e deformação plástica como vetores de nove componentes no hiperespaço. Deste modo, a equação (3.63) indica que o ângulo  $\theta$  formado por estes vetores no hiperespaço é agudo ou reto.

$$\Delta\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}^p = |\Delta\sigma_{ij}||\Delta\varepsilon_{ij}^p|\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (3.66)$$

Como a variação de tensões representa um processo de carregamento que parte do regime elástico rumo à plastificação, pode-se dizer que o vetor de variação de tensão possui sempre sentido de dentro para fora da superfície de escoamento, também representada no hiperespaço. Para garantir que o ângulo  $\theta$  seja sempre agudo ou reto, é necessário que o vetor de variação de deformações plásticas seja perpendicular à superfície de escoamento, conforme pode ser visto na figura 3.14a. Esta conclusão é conhecida como Condição de Normalidade [3].

Outra conclusão interessante pode ser obtida supondo uma superfície de escoamento côncava, conforme figura 3.14b. Neste caso, o produto interno entre os vetores de variação de tensão e deformação plástica violaria o postulado da equação (3.63). Consequentemente, conclui-se que a superfície de escoamento é necessariamente convexa.

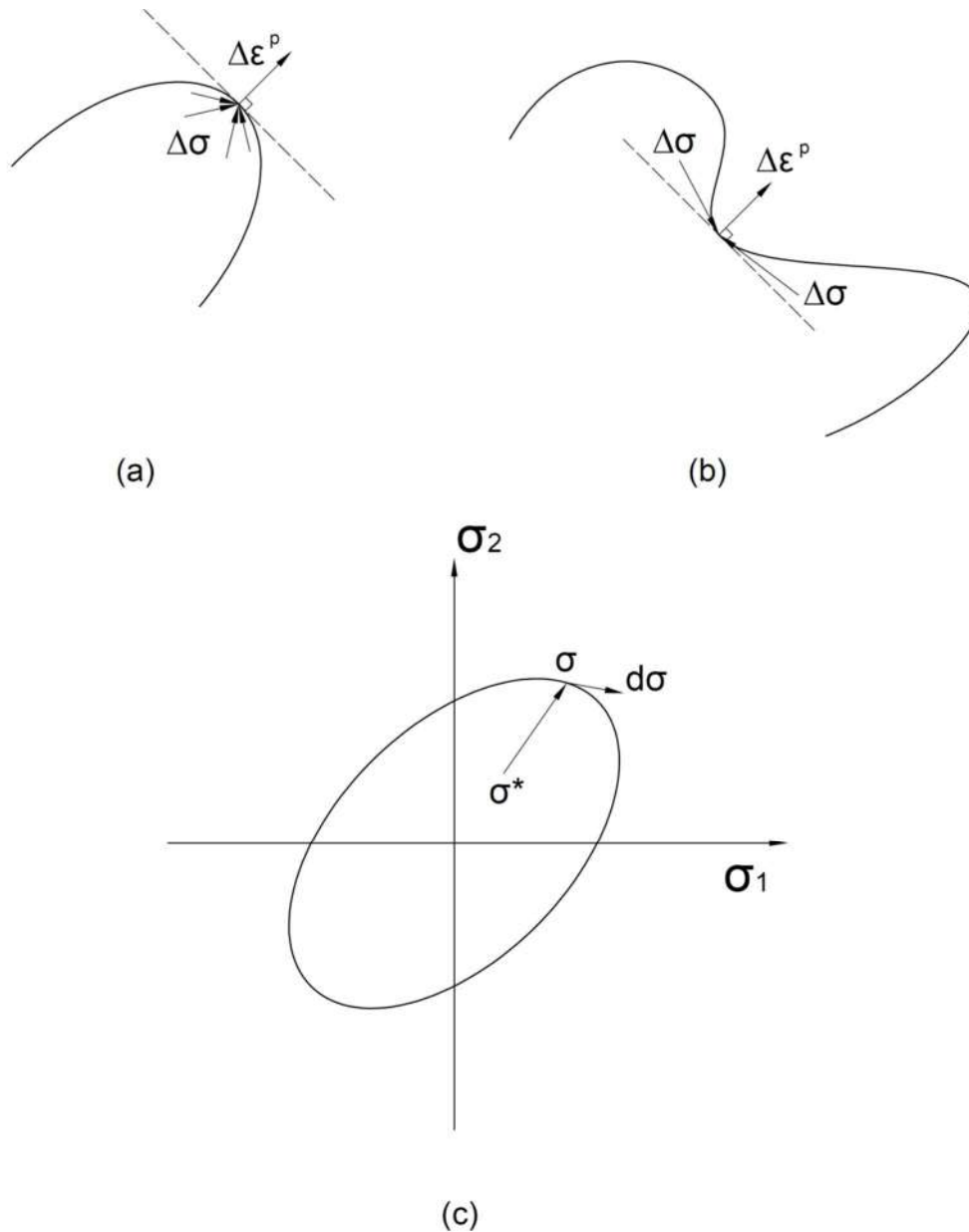


Figura 3.14: (a) Condição de Normalidade; (b) Superfície de escoamento côncava; (c) Incremento infinitesimal de carga a partir da superfície de escoamento

Vale destacar que as conclusões advindas dos dois parágrafos anteriores consideram que as superfícies de escoamento são suaves, o que significa que o vetor normal às mesmas pode ser definido em qualquer ponto ao longo das superfícies. No entanto, os critérios de Tresca e Mohr-Coulomb não atendem a este requisito, o que exige a adoção de técnicas especiais (ver apêndice B).



Considerando então que o vetor de variação de deformação plástica é perpendicular à superfície de escoamento no hiperespaço, isto significa que este vetor possui a direção do gradiente da função de escoamento  $F$ . Por conseguinte, pode-se então propor a seguinte regra de fluxo para materiais plásticos que obedecem ao postulado de Drucker:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.67)$$

Como pode ser observado, a equação (3.67) pode ser obtida fazendo  $Q=F$  na regra de fluxo geral da equação (3.61). A regra de fluxo que adota a função de escoamento como função do potencial plástico é chamada de associativa, sendo adequada para a modelagem de materiais rígidos pela plasticidade clássica. A forma geral da equação (3.61), válida para uma função  $Q$  genérica, pode então ser chamada de regra de fluxo não associativa, podendo ser adotada para descrever comportamentos plásticos alternativos à plasticidade clássica.

Aplicando a regra de fluxo anterior para o critério de Drucker-Prager, obtém-se o seguinte resultado:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \left( \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} S_{ij} + \mu \delta_{ij} \right) \quad (3.68)$$

Diferentemente da regra de fluxo de Prandl-Reuss, a formulação da equação anterior prevê compressibilidade plástica:

$$\dot{\varepsilon}_{kk}^p = 3\dot{\lambda}\mu \quad (3.69)$$

Elevando a equação (3.68) ao quadrado, obtém-se o seguinte resultado:

$$\dot{\lambda} = \sqrt{1+2\mu^2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} \quad (3.70)$$

onde a tensão equivalente e a deformação plástica equivalente seguem a mesma definição das equações (3.56).

A vantagem de se utilizar o critério de Drucker-Prager reside no fato de que é possível obter a formulação de Von Mises apenas fazendo  $\mu = 0$ . Através deste expediente, é possível, por exemplo, constatar a incompressibilidade plástica do critério de Von Mises na equação (3.69). Da equação (3.68), obtém-se a regra de fluxo associada para o critério de Von Mises:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} S_{ij} \quad (3.71)$$

A regra de fluxo anterior difere da regra de Prandtl-Reuss apenas na função escalar  $\bar{\lambda}$ , através da seguinte associação:

$$\dot{\bar{\lambda}} = \dot{\lambda} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} \quad (3.72)$$

Deste modo, comprova-se a compatibilidade do critério de Von Mises e a regra de Prandtl-Reuss, sendo estas formulações encarregadas de associar os efeitos de plastificação apenas à parcela desviadora das relações constitutivas. Estas equações são comumente referenciadas na literatura como pertencentes à Teoria da Plasticidade  $J_2$ , por estarem associadas à parcela desviadora das relações constitutivas através do segundo invariante do tensor de tensões desviadoras.

Para um critério de escoamento qualquer, o vetor gradiente da função de escoamento pode ser calculado em função dos diversos invariantes, conforme ZIENKIEWICZ e TAYLOR [53]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial I_1} \delta_{ij} + \frac{\partial F}{\partial J_2} S_{ij} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \left( S_{ik} S_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

ou, alternativamente, conforme conveniência

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_S} \frac{\partial \alpha_S}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.74a)$$

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{tg3\alpha_s}{2J_2} S_{ij} + \frac{tg3\alpha_s}{3J_3} \left( S_{ik} S_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \right) \quad (3.74b)$$

A tabela 3.1 a seguir apresenta os gradientes das funções de escoamento estudadas neste trabalho, segundo ZIENKIEWICZ e TAYLOR [53]. O detalhamento completo destas derivações pode ser encontrado no apêndice A.

Como os gradientes das funções de escoamento dos critérios de Tresca e Mohr-Coulomb apresentam descontinuidades, são necessárias técnicas especiais para a aplicação das regras de fluxo, tais como a suavização das superfícies nas regiões de descontinuidade, conforme descrito no apêndice B.

Tabela 3.1 – Derivadas das principais funções de escoamento em relação aos invariantes do tensor de tensões desviadoras

Critério de Escoamento	$\frac{\partial F}{\partial J_2}$	$\frac{\partial F}{\partial J_3}$
Tresca	$\frac{\cos \alpha_s}{\sqrt{J_2}} (1 + tg \alpha_s tg 3\alpha_s)$	$\frac{\sqrt{3} sen \alpha_s}{J_2 \cos 3\alpha_s}$
Von Mises	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}}$	0
Mohr-Coulomb	$\frac{\cos \alpha_s}{\sqrt{J_2}} \left[ 1 + tg \alpha_s tg 3\alpha_s - \frac{1}{\sqrt{3}} sen \varphi (tg \alpha_s - tg 3\alpha_s) \right]$	$\frac{\sqrt{3} sen \alpha_s + sen \varphi \cos \alpha_s}{J_2 \cos 3\alpha_s}$
Drucker-Prager	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}}$	0

### 3.5 – Regras de Endurecimento

Conforme conclusão apresentada no final do item 3.3, os modelos plásticos mais simples consideram como variáveis internas apenas as deformações plásticas

propriamente ditas e as variáveis de endurecimento. No item 3.1.2, o fenômeno do endurecimento foi apresentado no modelo elastoplástico unidimensional bilinear, onde são permitidos aumentos de tensão à medida que as deformações plásticas se desenvolvem. Supondo que, ao atingir uma determinada tensão no regime plástico, o processo de descarregamento se inicie, esta tensão máxima atingida será então o novo limite de escoamento caso um novo ciclo de carregamento seja aplicado. Logo, o aumento de tensão permitido pelo endurecimento plástico acarreta o aumento da tensão de escoamento para um novo ciclo de carregamento, ilustrando o caráter irreversível do processo de plastificação.

A discussão do item 3.1.2, no entanto, não avalia o comportamento do material quando submetido a ciclos de carregamentos envolvendo tração e compressão. Mantendo por hora a unidimensionalidade da análise, considera-se inicialmente um carregamento de tração através do qual a tensão de tração  $\sigma_T$  supera o limite de escoamento de tração  $\sigma_{YT}$ . A partir deste ponto, o material é totalmente descarregado e em seguida comprimido até atingir o limite de escoamento de compressão  $-\sigma_{YC}$ .

No modelo bilinear apresentado no item 3.1.2, o elemento de fricção é acionado à tração quando é submetido a uma tensão  $\sigma_{Y0}$  e à compressão quando a tensão é igual a  $-\sigma_{Y0}$ . Como o processo de carregamento se inicia com a tração, tem-se  $\sigma_{YT} = \sigma_{Y0}$ . Com carregamentos adicionais, o material atinge a tensão máxima de tração  $\sigma_T$ . Após o descarregamento completo, o elemento de fricção está submetido à variação de tensão  $\Delta\sigma = \sigma_{Y0} - \sigma_T$ . Para atingir o escoamento à compressão, é necessário adicionar uma tensão  $-\sigma_{YC} = -\sigma_{Y0} - \Delta\sigma$ . Deste modo, tem-se o seguinte resultado, conforme figura 3.14a:

$$-\sigma_{YC} = \sigma_T - 2\sigma_{Y0} \quad (3.75)$$

O fenômeno descrito pela equação acima é chamado de endurecimento cinemático e se caracteriza pela fixação da variação entre as tensões de escoamento de tração e compressão, que, no caso do exemplo, é igual à variação de tensão do elemento de fricção  $\Delta\sigma_0 = -2\sigma_{Y0}$ . Para manter esta variação, no caso do ciclo de carregamento proposto,

como o limite de escoamento à tração é aumentado primeiramente, a curva tensão-deformação na compressão é então deslocada, conforme figura 3.15a.

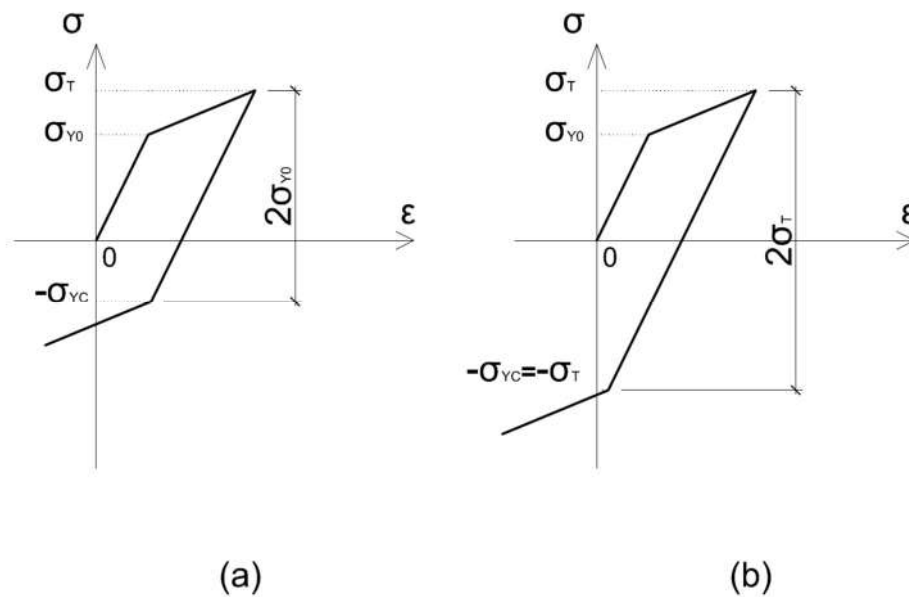


Figura 3.15 – Endurecimento unidimensional: (a) Cinemático; (b) Isotrópico

Existe, porém, uma abordagem alternativa para a formulação do endurecimento que considera que, uma vez aumentado o limite de escoamento à tensão, o limite à compressão assumirá o mesmo valor. Neste caso, tem-se:

$$\sigma_{yc} = \sigma_T \quad (3.76)$$

Este comportamento é chamado de endurecimento isotrópico (figura 3.15b) e é amplamente utilizado na prática devido a sua facilidade de implementação matemática e computacional. Quando o material é submetido a ciclos de carga que não envolvem variação de sinal de tensão, o modelo isotrópico pode ser considerado satisfatório para a formulação do endurecimento. No entanto, para ciclos com transição entre tração e compressão, é possível notar experimentalmente uma assimetria entre as relações constitutivas à tração e à compressão, o que aproxima o comportamento do modelo cinemático. Este comportamento é conhecido como Efeito Bauschinger, em homenagem ao cientista que observou a assimetria dos limites de escoamento de tração e compressão no estudo da plastificação de metais em escala molecular e fricção de Coulomb em solos (LITTLE et al. [3]).

De um modo geral, de acordo com observações experimentais, o comportamento dos materiais plásticos não é corretamente descrito por quaisquer dos dois modelos de endurecimento apresentados. Uma proposta mais generalizada consiste na combinação dos modelos isotrópico e cinemático, o que conseqüentemente introduz novos parâmetros experimentais. Este comportamento intermediário, conhecido como endurecimento combinado, pode ser quantificado através do coeficiente de endurecimento  $\beta$ , que determina o grau de assimetria dos limites de escoamento de tração e compressão para o caso de um teste de tração uniaxial  $\sigma_1 = \sigma_T, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ :

$$\beta = \frac{\sigma_T + \sigma_{YC} - 2\sigma_{Y0}}{2\sigma_T - 2\sigma_{Y0}} \quad (3.77)$$

onde as tensões apresentadas são as mesmas definidas na figura 3.15. Deste modo, têm-se os seguintes casos possíveis:

- $\sigma_{YC} = \sigma_T \Rightarrow \beta = 1$  (endurecimento isotrópico);
- $2\sigma_{Y0} - \sigma_T < \sigma_{YC} < \sigma_T \Rightarrow 0 < \beta < 1$  (endurecimento combinado);
- $\sigma_{YC} = 2\sigma_{Y0} - \sigma_T \Rightarrow \beta = 0$  (endurecimento cinemático).

Observando a figura 3.15, é possível admitir que existe um ciclo específico de carregamentos de tração e compressão capaz de fazer o corpo retornar ao estágio inicial após a aplicação deste ciclo, ou seja, com tensões e deformações totais nulas, mesmo com a passagem pelo regime plástico. Esta conclusão é motivada pelo fato de que compressões no regime plástico podem gerar deformações plásticas negativas, o que anularia as deformações plásticas positivas oriundas de um carregamento de tração anterior, conforme pode ser observado na figura 3.16. Este fato poderia sugerir uma casual reversibilidade do fenômeno da plastificação, se não fosse pelo fato de que, durante todo o ciclo, as variáveis internas de endurecimento sofreram evoluções irreversíveis, o que mantém o caráter irreversível do processo como um todo.

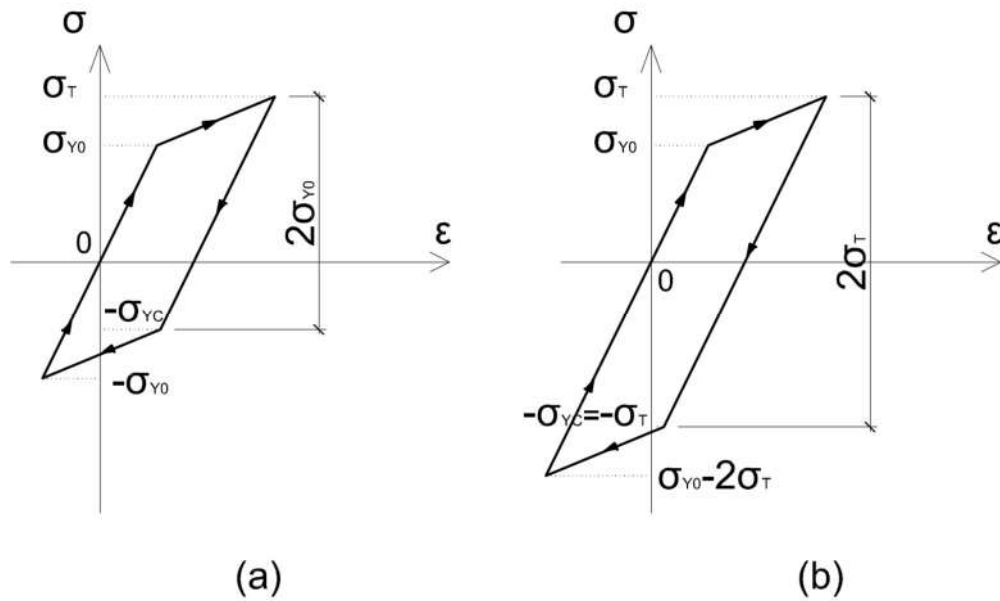


Figura 3.16 – Ciclo completo com retorno à origem no gráfico tensão-deformação para endurecimento: (a) Cinemático; (b) Isotrópico

Para o caso de endurecimento isotrópico (figura 3.16b), pode-se observar que, apesar de o ciclo de carregamento ter provocado um retorno à origem do gráfico tensão-deformação, a tensão de escoamento para um novo ciclo será  $\sigma_Y = |\sigma_{Y0} - 2\sigma_T|$ , superando a tensão de escoamento inicial  $\sigma_{Y0}$ , que, por sua vez, é irrecuperável, o que ilustra a evolução da variável interna de endurecimento. Apesar da recuperação da tensão inicial de escoamento no caso cinemático (figura 3.16a), o ciclo de carregamento promove uma dissipação de energia na forma de trabalho plástico  $W^p$ , o que também ocorre no caso isotrópico. Conforme será visto adiante, o trabalho plástico pode ser tratado como variável interna, dada a sua capacidade de quantificar a evolução dos processos irreversíveis da plastificação.

Para o caso tridimensional, os fenômenos de endurecimento isotrópico e cinemático podem ser compreendidos através dos seus efeitos na superfície de escoamento. Considera-se inicialmente que o material esteja submetido a um estado de tensão  $\sigma_{ij}^*$  no regime elástico e sofra um incremento de carregamento até atingir a superfície de escoamento com um estado de tensões  $\sigma_{ij}$ . Se um novo incremento de carga for aplicado levando a um estado de tensões  $\sigma'_{ij}$  externo à superfície de escoamento, o

fenômeno de endurecimento plástico determina que este estado de tensões fará parte de uma nova superfície de escoamento e definirá o limite de escoamento para novos ciclos de carga. A forma como este deslocamento ocorrerá é o que diferencia as diversas regras de endurecimento.

Considerando a apresentação do item 3.2, as funções de escoamento podem ser escritas da seguinte forma geral:

$$F(\sigma_{ij}, Y) = f(\sigma_{ij}) - Y \quad (3.78)$$

No sentido da análise tridimensional através da superfície de escoamento, o endurecimento isotrópico pode ser entendido como uma dilatação (expansão isotrópica) da superfície sem qualquer translação da mesma no espaço de Haigh-Westergaard. Em outras palavras, este endurecimento é caracterizado pela variação do parâmetro  $Y$ , conforme figura 3.17a. Definindo a variável interna escalar do endurecimento isotrópico como  $\kappa^I$ , pode-se escrever a equação (3.78) como:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa^I) = f(\sigma_{ij}) - Y(\kappa^I) \quad (3.79)$$

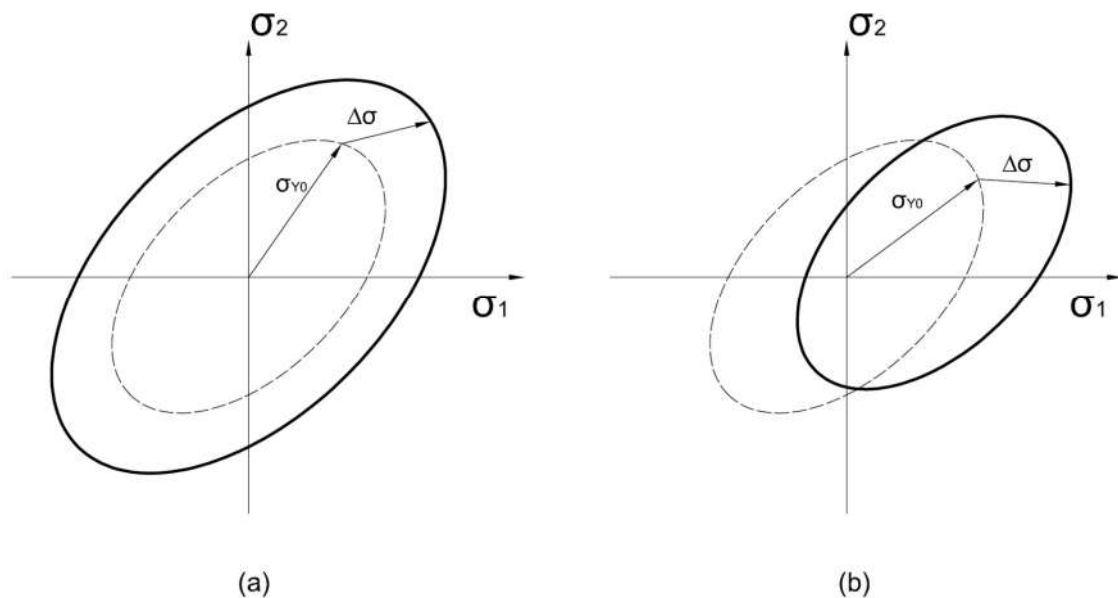


Figura 3.17 – Endurecimento para superfícies de escoamento no espaço de Haigh-Westergaard: (a) Isotrópico; (b) Cinemático



O endurecimento cinemático para problemas tridimensionais, por sua vez, pode ser interpretado como uma translação da superfície de escoamento sem qualquer dilatação da mesma (figura 3.17b). Definindo a variável interna do endurecimento cinemático como sendo o tensor de segunda ordem  $\kappa_{ij}^C$ , pode-se escrever a função de escoamento da seguinte forma:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa_{ij}^C) = f(\sigma_{ij} - \kappa_{ij}^C) - Y \quad (3.80)$$

Obviamente, para o caso de endurecimento combinado, tem-se o seguinte resultado final:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa^I, \kappa_{ij}^C) = f(\sigma_{ij} - \kappa_{ij}^C) - Y(\kappa^I) \quad (3.81)$$

Outras modalidades alternativas de endurecimento foram propostas, como a família de endurecimentos distorcionais, que podem permitir a expansão, translação, rotação e mudança de forma das superfícies de escoamento, com destaque para o endurecimento direcional distorcional (*directional distortional hardening* – DDH) de FEIGENBAUM e DAFALIAS [122]. Alternativamente, a modelagem do fenômeno do amolecimento pode ser obtida admitindo a retração da superfície de escoamento, em oposição ao observado na figura 3.16, ao passo que materiais perfeitamente plásticos possuem superfície de escoamento estática.

As deformações e demais grandezas do sistema podem ser escritas em função das variáveis de estado do modelo plástico simplificado, que considera como variáveis internas apenas as deformações plásticas e variáveis de endurecimento:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl}(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t), \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x}, t), \kappa^I(\mathbf{x}, t), \kappa_{kl}^C(\mathbf{x}, t)) \quad (3.82)$$

A formulação estará completa ao serem definidas as equações de evolução das variáveis internas de endurecimento:

$$\dot{\kappa}^I(\mathbf{x}, t) = g^I(\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t), \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}, t), \kappa^I(\mathbf{x}, t), \kappa_{ij}^C(\mathbf{x}, t)) \quad (3.83a)$$

$$\dot{\kappa}_{ij}^C(\mathbf{x}, t) = g_{ij}^C(\sigma_{kl}(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t), \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x}, t), \kappa^I(\mathbf{x}, t), \kappa_{kl}^C(\mathbf{x}, t)) \quad (3.83b)$$

Para obter estas equações, aplica-se o conceito de que, uma vez no regime plástico, o estado de tensões estará sempre na superfície de escoamento, nunca ultrapassando os limites impostos pela mesma. Neste caso, se o carregamento continuar, a superfície de escoamento terá de se transladar e/ou dilatar, dependendo da regra de endurecimento adotada, de maneira a manter a tensão na superfície, ou seja, as variáveis de endurecimento terão que variar de modo a manter a relação  $F(\sigma_{ij}, \kappa^I, \kappa_{ij}^C) = 0$ . Se um processo de descarregamento for então iniciado, o material volta ao interior da superfície já dilatada ou transladada, retornando assim ao regime elástico. Com um novo ciclo de carga, o material só voltará ao regime plástico quando o estado de tensões atingir novamente a superfície de escoamento já alterada pelo fenômeno de endurecimento.

Para garantir que o estado de tensões estará sempre na superfície de escoamento durante o regime plástico, mantendo constante a relação  $F = 0$ , é imposta a seguinte condição:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \kappa^I} \dot{\kappa}^I + \frac{\partial F}{\partial \kappa_{kl}^C} \dot{\kappa}_{kl}^C = 0 \quad (3.84)$$

A equação anterior é conhecida como condição de consistência [3] e pode ser escrita na forma incremental diferencial para evitar o entendimento de que a teoria da plasticidade clássica seria dependente do tempo. A equação anterior poderia considerar ainda a dependência da deformação plástica, o que seria consistente com o fato de que esta seria uma variável interna do sistema. No entanto, já foi mostrado que os critérios de ruptura desta pesquisa não considerarão esta dependência. Considerando que as funções de escoamento dependem também das variáveis de endurecimento, as regras de fluxo associativas também serão afetadas por este fenômeno, o que seria um comportamento razoável para materiais plásticos.

Considerando que, para materiais elastoplásticos, tem-se sempre que  $\dot{\lambda} \geq 0$  e  $F \leq 0$ , pode-se escrever a relação

$$F \dot{\lambda} = 0 \quad (3.85)$$

uma vez que, no regime elástico, tem-se  $F < 0$  e  $\dot{\lambda} = 0$ , o que anula a evolução da deformação plástica, e no regime plástico tem-se  $F = 0$  e  $\dot{\lambda} > 0$ . Estas relações são conhecidas como condições complementares de Kuhn-Tucker (SIMO e HUGHES [47]).

Aproveitando esta abordagem, pode-se escrever a condição de consistência de uma maneira mais geral, abrangendo todos os estados possíveis para um material elastoplástico:

$$\dot{F} \dot{\lambda} = 0 \quad (3.86)$$

No regime elástico, ou seja, quando  $F < 0$ , tem-se que  $\dot{\lambda} = 0$  a partir da relação (3.85) e a condição de consistência (3.84) está automaticamente atendida. No regime plástico, ou seja, com  $F = 0$ , são possíveis os seguintes casos:

- No caso  $\dot{F} < 0$ , acaba de ser iniciado um processo de descarregamento que faz o material retornar ao regime elástico. Logo,  $\dot{\lambda} = 0$ ;
- No caso  $\dot{F} = 0$ , pode-se considerar que  $\dot{\lambda} > 0$ , o que caracteriza o regime plástico, ou ainda que  $\dot{\lambda} = 0$ , o que caracteriza um carregamento neutro [47];
- O caso  $\dot{F} > 0$  não é possível, visto que o mesmo produziria o resultado  $F > 0$ , não permitido para a teoria da plasticidade clássica. Se este caso fosse possível, haveria deformação plástica ( $\dot{\lambda} > 0$ ), o que violaria a condição (3.86).

Como o fenômeno do endurecimento está intrinsicamente associado à plastificação do material, as variáveis internas do endurecimento costumam ser convenientemente escritas em função de outras variáveis que caracterizam diretamente o processo de plastificação ou a ausência do mesmo. Na literatura, é comum encontrar duas abordagens distintas que formulam a evolução das variáveis de endurecimento em função de variáveis internas alternativas.

Uma primeira abordagem considera que as variáveis internas de endurecimento são dependentes do desenvolvimento da deformação plástica. Esta hipótese pode ser motivada pelo modelo elastoplástico bilinear unidimensional, apresentado no item 3.1.2. Neste caso, o aumento de tensão durante a plastificação, que caracteriza o endurecimento, é representado através da formulação linear em função da deformação plástica, aqui repetida:

$$\sigma_Y(\varepsilon^p) = \sigma_{Y0} + H' \varepsilon^p \quad (3.87)$$

Para o caso tridimensional, define-se então a deformação plástica equivalente

$$\bar{\varepsilon}^p = \int \dot{\bar{\varepsilon}}^p dt = \int \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} dt \quad (3.88)$$

que servirá como um parâmetro escalar capaz de quantificar o processo de plastificação tridimensional. Vale destacar que, durante o regime elástico no primeiro ciclo de carregamento, a deformação plástica equivalente é nula, assumindo valores estritamente positivos a partir do momento em que o processo de plastificação se inicia juntamente com a evolução das variáveis internas que regem o endurecimento. Com o processo de descarregamento, a deformação plástica equivalente permanece inalterada, mantendo igualmente congeladas as variáveis de endurecimento.

Uma segunda abordagem considera que as variáveis internas de endurecimento são dependentes do trabalho plástico total  $W^p$ , sendo esta formulação conhecida como endurecimento energético. Pode-se definir este trabalho da seguinte forma:

$$W^p = \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (3.89)$$

A adoção destas variáveis internas auxiliares se mostra vantajosa para a determinação experimental dos parâmetros do material que regem o endurecimento. No caso da equação (3.87), por exemplo, um simples ensaio de tração uniaxial é capaz de definir o parâmetro  $H'$ , responsável pelo endurecimento.

A utilização do trabalho plástico total como variável regente do endurecimento agrega uma definição mais geral para a deformação plástica equivalente  $\bar{\varepsilon}^p$  e a correspondente tensão equivalente  $\bar{\sigma}$ , tendo como caso particular as definições apresentadas nas equações (3.56).

$$\begin{aligned} \dot{W}^p &= \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}^p \\ \dot{\bar{\varepsilon}}^p &= \lambda \frac{\partial Q}{\partial \bar{\sigma}} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Aplicando a regra da cadeia na equação de fluxo generalizada (3.61)

$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}}$  e a definição anterior, tem-se como resultado a seguinte lei:

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} \quad (3.91)$$

Para todos os critérios de escoamento apresentados neste trabalho, é fácil verificar que a função  $f(\sigma_{ij})$  é homogênea de grau 1, sendo assim aplicável o Teorema de Euler (ver item 1.1). Conseqüentemente, a seguinte definição para a tensão equivalente, que é comumente encontrada na literatura, é compatível com a lei da equação anterior:

$$\bar{\sigma} = f(\sigma_{ij}) \quad (3.92)$$

É possível verificar que, para o critério de Von Mises, as definições das equações (3.90) e (3.92) coincidem com as equações (3.56), bastando para isso elevar a regra de fluxo generalizada (3.61) ao quadrado e aplicar as definições supracitadas. Aplicando o mesmo procedimento para o critério de Drucker-Prager, tem-se o seguinte resultado:

$$\dot{\varepsilon}^p = (1 + 2\mu^2)^{-1/2} \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (3.93)$$

Esta expressão difere da definição da equação (3.88) apenas por uma constante. Aplicando a definição de deformação plástica equivalente da equação (3.88) e elevando a regra de fluxo generalizada (3.61) ao quadrado, tem-se que  $\dot{\varepsilon}^p = \lambda \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}}$ .

Conforme observado por NAYAK e ZIENKIEWICZ [123], é possível atestar que a equivalência das definições de deformação plástica equivalente das equações (3.88) e (3.90) se verifica para o critério de Von Mises e regra de fluxo associativa.

### 3.5.1 – Endurecimento Isotrópico

Para o endurecimento isotrópico, tem-se o seguinte modelo para a função de escoamento:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa^I) = f(\sigma_{ij}) - (Y + \kappa^I) \quad (3.94)$$

Neste caso, pode-se escrever diretamente:

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa^I} = -1 \quad (3.95)$$

A condição de consistência (3.84) gera então o seguinte resultado:

$$\dot{\kappa}^I = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (3.96)$$

A expressão anterior define a equação de evolução para o endurecimento isotrópico. Quando o primeiro ciclo de carga é aplicado e o material ainda se encontra no regime elástico, a variável  $\kappa^I$  assume um valor inicial nulo. A partir deste valor inicial e da equação de evolução (3.83a), a modelagem do endurecimento isotrópico fica completamente definida para o regime plástico. Quando o descarregamento se inicia e o material retorna imediatamente para o regime elástico, o valor máximo atingido por  $\kappa^I$  é então mantido inalterado até servir de valor inicial para quando o material for novamente carregado e os processos de plastificação e endurecimento forem reiniciados.

Inicialmente, a equação de evolução do endurecimento isotrópico será definida de forma geral através da função  $\hat{g}^I$ :

$$\dot{\kappa}^I = \dot{\lambda} \hat{g}^I \quad (3.97)$$

Aplicando esta equação, a relação constitutiva elástica (3.51) e a regra de fluxo generalizada (3.61) na condição de consistência, obtém-se o seguinte resultado:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial F}{\partial \kappa^I} \hat{g}^I \right) = 0 \quad (3.98)$$

Como  $\dot{\lambda} > 0$  quando a deformação plástica se desenvolve no regime plástico, a relação anterior é válida sempre que o termo entre parênteses for estritamente positivo. Esta condição é automaticamente atendida se  $F = Q$  (regra de fluxo associativa), uma vez que o tensor  $\mathbf{C}$  é positivo definido, e se a equação de evolução (3.83a) for escrita como

$$\dot{\kappa}^I = -\dot{\lambda} D^I \frac{\partial F}{\partial \kappa^I} = \dot{\lambda} D^I \quad (3.99)$$

onde  $D^I$  é um parâmetro (ou função) não negativo que caracteriza o endurecimento isotrópico e pode ser obtido experimentalmente. Conclui-se, portanto, que a condição de consistência, que é associada à Teoria da Plasticidade Clássica, é atendida pela regra de fluxo associativa. Para manter a formulação mais genérica e não restrita à plasticidade clássica, permanecerá adotada uma função de potencial plástico  $Q$  genérica para a regra de fluxo.

Diretamente da equação (3.98), o parâmetro  $\dot{\lambda}$  pode então ser expresso como

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnop} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{op}} + D^I} \quad (3.100)$$

Tomando mais uma vez a equação (3.51) e a regra de fluxo (3.61), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl} \left( \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} \right) = C_{ijkl}^p \dot{\epsilon}_{kl} \\ C_{ijkl}^p &= C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{opkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{op}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{qr}} C_{qrst} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{st}} + D^I} \end{aligned} \quad (3.101)$$

Deste modo, durante o regime plástico, é possível escrever uma equação constitutiva semelhante à relação válida para o regime elástico (Lei de Hooke Generalizada - equação (2.7)). O tensor de quarta ordem  $\mathbf{C}^p$  é chamado de tensor elastoplástico tangente. A adoção da regra associativa  $Q = F$  garante não apenas o atendimento às condições de normalidade, mas também a simetria do tensor  $\mathbf{C}^p$ .

Para uma formulação mais específica, escrevendo a variável de endurecimento isotrópico em função da deformação plástica equivalente, será adotado nesta pesquisa o endurecimento linear, aos moldes da equação (3.87):

$$\kappa^I (\bar{\epsilon}^p) = H^I \bar{\epsilon}^p \quad (3.102)$$

onde  $H^I$  é o parâmetro (não negativo) do material que rege o endurecimento isotrópico e pode ser obtido experimentalmente. Deste modo, tem-se:

$$\dot{\kappa}^I(\bar{\varepsilon}^p) = \frac{d\kappa^I}{d\bar{\varepsilon}^p} \dot{\bar{\varepsilon}}^p = H^I \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \bar{\sigma}} \quad (3.103)$$

Alternativamente, adotando o endurecimento energético e a regra de fluxo generalizada (3.61), tem-se:

$$\dot{\kappa}^I(W^p) = \frac{d\kappa^I}{dW^p} \dot{W}^p = \frac{d\kappa^I}{dW^p} \dot{\lambda} \sigma_{ij} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.104)$$

É possível ainda neste caso utilizar como variável independente a deformação plástica equivalente associada ao trabalho plástico total:

$$\dot{\kappa}^I(W^p) = \frac{d\kappa^I}{dW^p} \dot{W}^p = \frac{d\kappa^I}{d\bar{\varepsilon}^p} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{dW^p} \dot{W}^p = \frac{d\kappa^I}{d\bar{\varepsilon}^p} \frac{\dot{\lambda}}{\bar{\sigma}} \sigma_{ij} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.105)$$

A grande vantagem de se utilizar a formulação da equação anterior reside no fato de que, para um ensaio de tração uniaxial, tem-se  $\bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p = \sigma_{11} d\varepsilon_{11}^p$  e  $\bar{\sigma} = a_F \sigma_{11}$ , o que resulta em:

$$\frac{d\kappa^I}{d\bar{\varepsilon}^p} = a_F^2 \frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}^p} = a_F^2 H^I \quad (3.106)$$

onde  $a_F$  é uma constante de proporcionalidade associada à função de escoamento  $F$  ( $a_F=1$  para o critério de Von Mises, por exemplo).

Comparando as formulações em função da deformação plástica equivalente  $\bar{\varepsilon}^p$  e em função do trabalho plástico total, tem-se:

$$D^I = \frac{d\kappa^I}{d\bar{\varepsilon}^p} \frac{\partial Q}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{d\kappa^I}{dW^p} \sigma_{ij} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{d\kappa^I}{d\bar{\varepsilon}^p} \frac{1}{\bar{\sigma}} \sigma_{ij} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.107)$$

A substituição da equação anterior pode ser feita na fórmula de  $\mathbf{C}^p$  de maneira a representar o fenômeno de endurecimento isotrópico através do desenvolvimento do trabalho plástico total. Para o caso específico em que as regras de fluxo são associativas ( $Q = F$ ), tem-se o seguinte resultado:

$$D^I = \frac{d\kappa^I}{d\bar{\varepsilon}^p} = \frac{d\kappa^I}{dW^p} \bar{\sigma} \quad (3.108)$$



### 3.5.2 – Endurecimento Cinemático

No caso do endurecimento cinemático, a função de escoamento assume a forma

$$F(\sigma_{ij}, \kappa_{ij}^C) = f(\sigma_{ij} - \kappa_{ij}^C) - Y \quad (3.109)$$

Logo, pode-se escrever:

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_{ij}^C} = - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.110)$$

Diferentemente da regra de endurecimento isotrópico, que permite a evolução de uma única variável, o endurecimento cinemático para problemas tridimensionais assume infinitas possibilidades de translação da superfície de escoamento. Por conseguinte, a condição de consistência é insuficiente para determinar a equação de evolução do tensor  $\kappa_{ij}^C$ .

Enquanto o material se encontra no regime elástico no primeiro ciclo de carregamento, o tensor de endurecimento cinemático é nulo. Quando um processo de descarregamento é iniciado e o material retorna ao regime elástico após ter atingido a plastificação, a variável de endurecimento desenvolvida durante o regime plástico será mantida inalterada até servir de valor inicial para um novo processo de plastificação em um ciclo de carregamento subsequente.

Para obter uma regra de endurecimento cinemático satisfatória, a equação de evolução para as variáveis de endurecimento cinemático será escrita da seguinte forma:

$$\dot{\kappa}_{ij}^C = \dot{\lambda} \hat{g}_{ij}^C \quad (3.111)$$

Aplicando esta equação, a regra de fluxo generalizada e a relação constitutiva elástica (3.46) na condição de consistência, obtém-se o seguinte resultado:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial F}{\partial \kappa_{ij}^C} \hat{g}_{ij}^C \right) = 0 \quad (3.112)$$

Como  $\dot{\lambda} > 0$  quando a deformação plástica se desenvolve no regime plástico, a relação anterior é válida sempre que o termo entre parênteses for estritamente positivo.

Esta condição é automaticamente atendida se  $Q=F$  e se a equação de evolução do endurecimento cinemático for escrita como

$$\dot{\kappa}_{ij}^C = -\dot{\lambda} D_{ijkl}^C \frac{\partial F}{\partial \kappa_{kl}^C} = \dot{\lambda} D_{ijkl}^C \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \quad (3.113)$$

uma vez que o tensor  $\mathbf{C}$  é positivo definido. O tensor  $\mathbf{D}^C$  é igualmente positivo definido e caracteriza o modelo de endurecimento cinemático. Conclui-se, portanto, que a equação de evolução é derivada da regra de fluxo associativa e pode ser então chamada de regra de endurecimento associativa. Neste caso, considera-se que a translação da superfície de escoamento tem a direção do gradiente da função de escoamento no hiperespaço.

Com a motivação da conclusão anterior e considerando a dependência do endurecimento cinemático com relação à deformação plástica equivalente, pode-se escrever a relação comumente utilizada na literatura (SIMO e HUGHES [47] e AURICCHIO e TAYLOR [124]) derivada da regra de endurecimento associativa:

$$\dot{\kappa}_{ij}^C(\bar{\varepsilon}^p) = H^C \dot{\bar{\varepsilon}}^p \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.114)$$

onde  $H^C$  é um parâmetro (não negativo) do material que representa o endurecimento cinemático e pode ser obtido experimentalmente. Assim como ocorre com o endurecimento isotrópico, o parâmetro  $H^C$  pode ser substituído por uma função não linear em  $\bar{\varepsilon}^p$ . Aplicando o mesmo expediente utilizado no item anterior, tem-se o seguinte resultado:

$$\dot{\kappa}_{ij}^C(\bar{\varepsilon}^p) = \dot{\lambda} H^C \frac{\partial Q}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.115)$$

O parâmetro  $\dot{\lambda}$  pode então ser expresso como

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnop} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{op}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{qr}} D_{qrst}^C \frac{\partial F}{\partial \sigma_{st}}} \quad (3.116)$$

Tomando mais uma vez a equação (3.46) e a regra de fluxo (3.61), tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^p \dot{\epsilon}_{kl}$$

$$C_{ijkl}^p = C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{opkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{op}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{qr}} C_{qrst} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{st}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{uv}} D_{uvwx}^C \frac{\partial F}{\partial \sigma_{wx}}} \quad (3.117)$$

ou, alternativamente,

$$C_{ijkl}^p = C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{opkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{op}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{qr}} C_{qrst} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{st}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{uv}} H^C \frac{\partial Q}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{uv}}} \quad (3.118)$$

A partir deste momento, para a aplicação do endurecimento cinemático na formulação, como nas regras de fluxo, pode-se adotar a notação  $\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \kappa_{ij}^C$ , considerando que  $\partial Q / \partial \sigma_{ij}' = \partial Q / \partial \sigma_{ij}$ .

É possível ainda definir uma variável interna alternativa  $\alpha_{ij}^C$ , conforme apresentado em SIMO e HUGHES [47], associada à parcela inelástica da energia livre de Helmholtz:

$$\kappa_{ij}^C = -\rho \frac{\partial h^p}{\partial \alpha_{ij}^C} \quad (3.119)$$

Desenvolvendo  $h^p$  em Série de Taylor até os termos de segunda ordem e considerando  $\kappa_{ij}^C$  nulo quando  $\alpha_{ij}^C$  se anula, o tensor  $\alpha_{ij}^C$  é escolhido tal que

$$\kappa_{ij}^C = -D_{ijkl}^C \alpha_{kl}^C \quad (3.120)$$

A equação de evolução (3.113) é então escrita como

$$\dot{\alpha}_{ij}^C = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa_{kl}^C} \quad (3.121)$$

Considerando a definição (3.119) e o resultado (3.120), a variável interna do endurecimento cinemático pode então ser escrita através do potencial  $Q^C$ :

$$\kappa_{ij}^C = -\frac{\partial Q^C(\alpha_{ij}^C)}{\partial \alpha_{ij}^C} \quad (3.122)$$

$$Q^C(\alpha_{ij}^C) = \frac{1}{2} D_{ijkl}^C \alpha_{ij}^C \alpha_{kl}^C$$

Utilizando o mesmo princípio, o endurecimento isotrópico pode igualmente ser escrito através da variável interna alternativa  $\alpha^I$ , tal que

$$\begin{aligned} \kappa^I &= -\rho \frac{\partial h^p}{\partial \alpha^I} \\ \kappa^I &= -D^I \alpha^I \\ \dot{\alpha}^I &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa^I} \end{aligned} \quad (3.123)$$

Uma formulação alternativa para o endurecimento cinemático baseada em observações experimentais foi proposta por ZEIGLER [17], onde se admite que a translação da superfície de escoamento tem a direção do vetor que liga o centro da superfície ao ponto que representa o estado de tensões localizado na superfície (ou seja, no regime plástico). A regra de Zeigler será também utilizada nesta pesquisa devido a sua simplicidade aliada a sua crescente aceitação na comunidade científica (LITTLE et al. [3]). A regra de Zeigler pode ser escrita como

$$\dot{\kappa}_{ij}^C = \dot{\bar{\mu}} (\sigma_{ij} - \kappa_{ij}^C) \quad (3.124)$$

onde  $\bar{\mu}$  é o parâmetro de endurecimento cinemático cuja derivada com relação ao tempo é não negativa e pode ser obtido experimentalmente. Alternativamente, aplicando a definição (3.124) da regra de Zeigler e a equação (3.110) na condição de consistência, tem-se o seguinte resultado:

$$\dot{\bar{\mu}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} (\sigma_{kl} - \kappa_{kl}^C)} \quad (3.125)$$

Para adaptação do módulo elastoplástico tangente, introduz-se uma variável  $c$  (LITTLE et al. [3]) tal que

$$\left(\dot{\sigma}_{ij} - c\dot{\varepsilon}_{ij}^p\right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad (3.126)$$

Considerando a equação anterior juntamente com a regra de fluxo associativa (3.67) e a condição de consistência (3.84), tem-se o seguinte resultado:

$$\lambda c \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} = - \frac{\partial F}{\partial \kappa_{mn}^C} \dot{\kappa}_{mn}^C \quad (3.127)$$

O tensor elastoplástico tangente pode então ser escrito como

$$C_{ijkl}^p = C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{opkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{op}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{qr}} C_{qrst} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{st}} + c \frac{\partial F}{\partial \sigma_{uv}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{uv}}} \quad (3.128)$$

Combinando a definição (3.126) e a regra de fluxo associativa (3.67), obtém-se a relação [3]:

$$c = \frac{\dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (3.129)$$

O parâmetro  $c$  pode então ser obtido através de um teste de tração uniaxial:

$$c = \frac{\dot{\sigma}_{11} \left( \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{11} \right)}{\left( \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{11} \right)^2 + 2 \left( \dot{\varepsilon}_{22} + \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{11} \right)^2} \quad (3.130)$$

Alternativamente, é possível utilizar os resultados de um ensaio que submete o material a uma compressão hidrostática -p:

$$c = \frac{-3\dot{p}}{\dot{\varepsilon}_{kk} + \frac{1}{K} \dot{p}} \quad (3.131)$$

### 3.5.3 – Endurecimento Combinado

No caso do endurecimento combinado, a função de escoamento assume a forma

$$F(\sigma_{ij}, \kappa^I, \kappa_{ij}^C) = f(\sigma_{ij} - \kappa_{ij}^C) - (Y + \kappa^I) \quad (3.132)$$

Para formular o endurecimento combinado, serão adotadas as mesmas equações de evolução e condições iniciais para as variáveis associadas separadamente ao endurecimento isotrópico e cinemático. No entanto, como os dois efeitos ocorrem concomitantemente, é necessário estabelecer uma ponderação entre os mesmos, o que pode ser feito através da introdução do coeficiente de endurecimento  $\beta$ , que pode ser obtido num ensaio simples de tração e compressão uniaxial.

Um modelo frequentemente adotado confere o seguinte aspecto aos parâmetros que definem os dois tipos de endurecimento:

$$\begin{aligned} H^I &= \beta \bar{H} \\ H^C &= (1 - \beta) \bar{H} \end{aligned} \quad (3.133)$$

onde  $\bar{H}$  é um parâmetro (não negativo) do material que pode ser definido experimentalmente. Independentemente dos valores definidos para os parâmetros  $H^I$  e  $H^C$ , pode-se escrever o tensor elastoplástico tangente da seguinte forma:

$$C_{ijkl}^p = C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{opkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{op}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{qr}} C_{qrst} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{st}} + \left( H^I + H^C \frac{\partial F}{\partial \sigma_{uv}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{uv}} \right) \frac{\partial Q}{\partial \bar{\sigma}}} \quad (3.134)$$

Para o endurecimento isotrópico, adota-se a mesma formulação introduzida no item 3.5.1 com a adição da contribuição do coeficiente de endurecimento  $\beta$ :

$$\dot{\kappa}^I = \beta \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (3.135)$$

A evolução da variável de endurecimento cinemático, por sua vez, poderá se manter idêntica à formulação apresentada no item 3.5.2, uma vez que a condição de consistência se encarregará de controlar o desenvolvimento do fenômeno em meio à evolução das demais variáveis do sistema.

Por exemplo, adotando a regra de Zeigler (3.124) e aplicando a condição de consistência (3.84) juntamente com a equação (3.135), obtém-se o seguinte resultado para o parâmetro de endurecimento cinemático:

$$\dot{\mu} = (1 - \beta) \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} (\sigma_{kl} - \kappa_{kl}^c)} \quad (3.136)$$

Neste caso, o parâmetro  $c$  pode ser usado mais uma vez, tal que

$$\dot{\lambda} c \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} = - \frac{\partial F}{\partial \kappa^l} \dot{\kappa}^l - \frac{\partial F}{\partial \kappa_{mn}^c} \dot{\kappa}_{mn}^c \quad (3.137)$$

tornando válida a formulação para o tensor elastoplástico tangente apresentada na equação (3.128).

### 3.6 – Equações Constitutivas Viscoplasticas

A diferença básica entre a Teoria da Plasticidade Clássica e a Viscoplasticidade reside no caráter transiente da segunda, conforme foi visto ao longo do item 3.1. Para obter a formulação viscoplastica, pode-se tomar como ponto de partida a formulação plástica desenvolvida nos itens anteriores, fazendo as adaptações apresentadas a seguir.

Antes de discorrer sobre a formulação viscoplastica tridimensional generalizada, é relevante registrar algumas observações adicionais acerca do estudo do modelo unidimensional apresentado no item 3.1.3. Supõe-se, inicialmente, que este modelo é carregado instantaneamente com a tensão de escoamento  $\sigma_{Y0}$ . Em seguida, a partir do tempo  $t = 0$ , o modelo é submetido a um carregamento que provoca uma taxa de deformação constante  $\dot{\epsilon}_0$  no regime viscoplastico. No instante  $t=t_1$  (ponto C da figura 3.18a), o modelo é gradativamente descarregado a uma taxa de deformação constante  $-\dot{\epsilon}_0$ . Como o histórico de carregamentos não apresenta descontinuidades acima da curva estática, o material permanecerá no regime plástico até que a tensão volte a ser inferior ao limite de escoamento  $\sigma_{Y0}$ .

Tomando a formulação do item 3.1.3, tem-se para o tempo  $t = t_1$ :

$$\sigma(t_1) = \sigma_{Y0} + \gamma \dot{\varepsilon}_0 \left( 1 - e^{-\frac{E}{\gamma} t_1} \right), \sigma > \sigma_{Y0} \quad (3.138a)$$

$$\varepsilon(t_1) = \dot{\varepsilon}_0 t_1 + \frac{\sigma_{Y0}}{E} \quad (3.138b)$$

A partir deste instante, aplica-se um descarregamento através da redução de deformação  $-\dot{\varepsilon}_0$  na equação diferencial (3.12), com as expressões anteriores atuando como condições iniciais, o que conduz ao seguinte resultado para  $t > t_1$ :

$$\sigma(t) = \sigma_{Y0} + \gamma \dot{\varepsilon}_0 \left( 2e^{\frac{E}{\gamma} t_1} - 1 \right) e^{-\frac{E}{\gamma} t} - \gamma \dot{\varepsilon}_0, \sigma > \sigma_{Y0} \quad (3.139a)$$

$$\varepsilon(t) = -\dot{\varepsilon}_0 (t - 2t_1) + \frac{\sigma_{Y0}}{E} \quad (3.139b)$$

É importante salientar que, como o item 3.1.3 conclui que  $\dot{\varepsilon}^p > 0$  no início do descarregamento, então o processo de descarregamento deve ocorrer de maneira que  $-\dot{\sigma} / E - \dot{\varepsilon}_0 > 0$ . Deste modo, como a deformação plástica continua se desenvolvendo, o descarregamento deve ser realizado de maneira a gerar uma perda de deformação elástica que torne a deformação total decrescente.

Observando a equação (3.139a) e a desigualdade  $e^{\frac{2E}{\gamma} t_1} > 2e^{\frac{E}{\gamma} t_1} - 1$ , é possível perceber que a tensão retorna ao limite de escoamento  $\sigma_{Y0}$  para um tempo  $t_2 < 2t_1$  (ponto D da figura 3.18a), ou seja, o modelo volta ao regime elástico com uma deformação viscoplástica residual, como pode ser constatado pela equação (3.139b). Com o retorno ao limite de escoamento, o restante do processo de descarregamento é realizado no regime elástico (ponto E da figura 3.18a). Com a aplicação de um novo ciclo, o material percorre o caminho ED no gráfico da figura 3.18a.



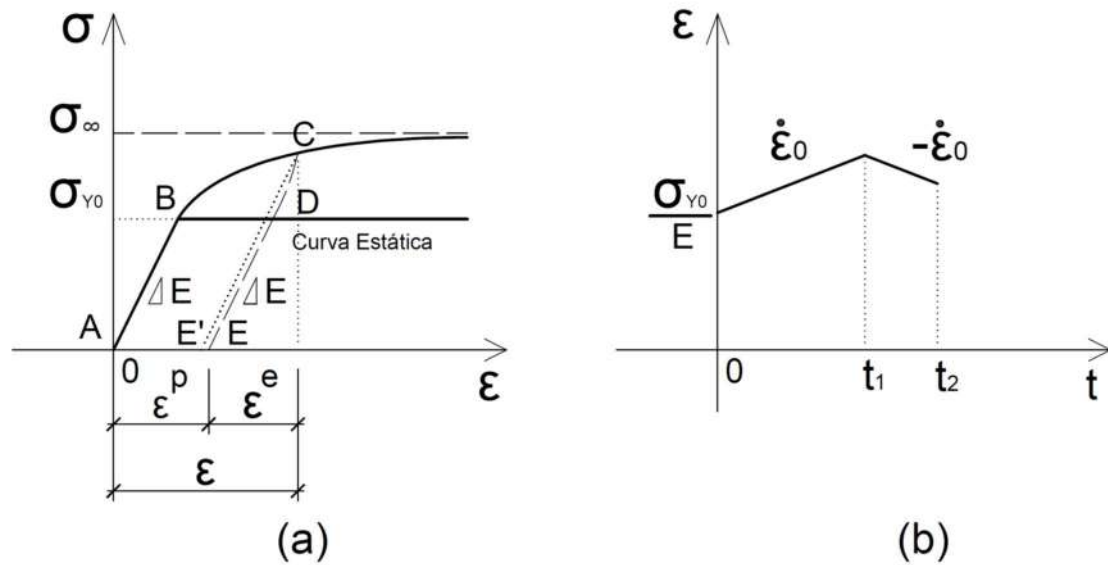


Figura 3.18 – Carregamento e descarregamento em um modelo viscoplástico unidimensional: (a) Gráfico tensão x deformação; (b) Gráfico deformação x tempo

Alguns modelos viscoplásticos alternativos ao de Perzyna foram propostos, com destaque para o modelo de consistência de WANG et al. [119], que consiste na imposição da dependência temporal às funções de escoamento, mantendo válida a condição de consistência para problemas viscoplásticos. Esta abordagem permite que o material viscoplástico volte ao regime elástico no momento que o descarregamento se inicia, conforme trajetória CE' pontilhada na figura 3.18a. Segundo HEERES et al. [125], este modelo vem se mostrando eficiente na modelagem de determinados efeitos viscoplásticos em metais.

Os modelos viscoplásticos podem apresentar o fenômeno de endurecimento, conforme modelo da figura 3.19. A presença do elemento de sólido elástico adiciona a capacidade de evolução do limite de escoamento em função do desenvolvimento da deformação viscoplástica. Somando as taxas de deformação do elemento de sólido elástico e do arranjo em paralelo, a equação diferencial deste modelo pode ser definida da seguinte forma:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{1}{\gamma} (\sigma - \sigma_{Y0} - H' \varepsilon^p), \sigma > \sigma_{Y0} \quad (3.140)$$

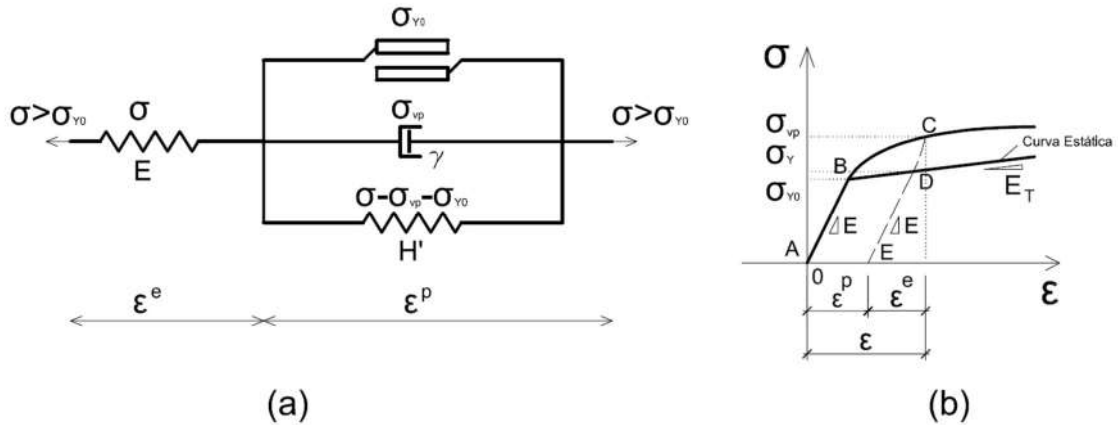


Figura 3.19 – Modelo viscoplástico com endurecimento linear: (a) Arranjo no regime viscoplástico; (b) Gráfico tensão x deformação

Para o modelo viscoplástico com endurecimento linear da figura 3.19, considere-se um ciclo de carregamento que ultrapassa a tensão de escoamento inicial  $\sigma_{y0}$  (ponto B) até atingir um valor  $\sigma_{vp}$  (ponto C) no regime viscoplástico. Com o início do descarregamento, o elemento de fluido viscoso não pode perder instantaneamente a sua tensão, pois isto acarretaria uma tensão no elemento de fricção superior a  $\sigma_{y0}$ , ou seja, ainda haverá desenvolvimento de deformação viscoplástica ( $\dot{\epsilon}^p > 0$ ) até o desaparecimento da tensão no elemento de fluido viscoso.

Com a perda completa da tensão no referido elemento, tem-se  $\dot{\epsilon}^p = 0$ , com deformação plástica total armazenada  $\epsilon^p$  e tensão  $\sigma_y$  atuante no modelo (ponto D). Neste momento, cessa o efeito viscoplástico e, persistindo o descarregamento, o material volta ao regime elástico e atinge o ponto E. A tensão  $\sigma_y$  pode ser calculada considerando a resultante nula no elemento de fluido viscoso, ou seja,  $\sigma_y - \sigma_{y0} = H' \epsilon^p$ , o que resulta em

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + H' \epsilon^p \quad (3.141)$$

Ao iniciar um novo ciclo de carregamentos, o modelo segue a trajetória ED no regime elástico, retornando ao regime viscoplástico a partir da tensão  $\sigma_y$ . Conclui-se que,

para o caso de modelo viscoplástico com endurecimento linear, tem-se uma curva estática equivalente ao modelo elastoplástico bilinear.

Do ponto de vista matemático, a formulação viscoplástica não impõe restrições à função de escoamento  $F$ , diferentemente da plasticidade clássica, onde  $F \leq 0$ . A ausência da restrição na função  $F$  não permite a imposição da condição de consistência, o que impede a obtenção do parâmetro  $\dot{\lambda}$  como consequência desta condição.

Para a obtenção do parâmetro  $\dot{\lambda}$  e a consequente formulação viscoplástica tridimensional, pode-se tomar como ponto de partida a ideia apresentada pelo modelo de PERZYNA [44] [45] unidimensional, apresentado no item 3.1.3. A deformação plástica produzida por esta formulação é de responsabilidade do modelo de Bingham, podendo ser escrita através da forma geral

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{\gamma} \langle \Phi(F) \rangle \quad (3.142)$$

onde  $\Phi$  é uma função que caracteriza a variação da deformação plástica através da função de escoamento e, conseqüentemente, do estado de tensões. A função  $\Phi$  é monótona, se anula para  $F = 0$ , pode ser obtida experimentalmente e pode assumir diversas formas, tais quais os exemplos apresentados a seguir (PERZYNA [44] [45]):

$$\Phi(F) = \sum_{i=1}^n a_i F^i \quad (3.143a)$$

$$\Phi(F) = \sum_{i=1}^n a_i (e^{F^i} - 1) \quad (3.143b)$$

sendo  $a_i$  constantes reais.

Eliminando a restrição da plasticidade clássica, o modelo viscoplástico admite que a função de escoamento pode atingir valores positivos e, enquanto  $F$  for de fato positiva, a deformação viscoplástica se desenvolverá, retornando o sistema ao regime elástico apenas quando  $F$  volta a atingir valores negativos. Para o caso tridimensional, Perzyna propôs a formulação

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{\gamma} \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.144)$$

que pode ser interpretada como uma variação da regra de fluxo associada típica de problemas da Teoria da Plasticidade Clássica. De fato, para o caso  $\Phi(F) = F$ , a expressão anterior pode ser entendida como uma regra de fluxo não associativa (equação (3.67)) com potencial plástico igual a

$$Q = \frac{1}{2\gamma} \langle F \rangle^2 \quad (3.145)$$

Alternativamente, devido à impossibilidade de se obter o parâmetro  $\dot{\lambda}$  através da condição de consistência, pode-se fazer a imposição

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\gamma} \langle \Phi(F) \rangle \quad (3.146)$$

para se obter o modelo de Perzyna. A imposição do parâmetro  $\dot{\lambda}$  pode então ser utilizada para o equacionamento dos fenômenos de endurecimento, completando assim a formulação básica da Viscoplasticidade (SIMO e HUGHES [47]):

$$\dot{\kappa}^I = \frac{1}{\gamma} \langle \Phi(F) \rangle D^I \quad (3.147a)$$

$$\dot{\kappa}_{ij}^C = \frac{1}{\gamma} \langle \Phi(F) \rangle D_{ijkl}^C \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \quad (3.147b)$$

Essa formulação está em harmonia com o pressuposto geralmente atribuído a modelos viscoplásticos de que, para estados de tensão internos à superfície de escoamento ( $F \leq 0$ ), todas as variáveis internas permanecem congeladas, ou seja, com taxa de variação nula. A existência do endurecimento em materiais viscoplásticos pode ser interpretada conforme análise de LUBLINER [46]. Considerando a taxa da função de escoamento para tensões e temperatura constantes, tem-se:

$$\dot{F}(\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}, T = \bar{T}, \kappa^I, \kappa_{ij}^C) = \frac{\partial F}{\partial \kappa^I} \dot{\kappa}^I + \frac{\partial F}{\partial \kappa_{ij}^C} \dot{\kappa}_{ij}^C = H \quad (3.148)$$

O parâmetro  $H$  define a influência das variáveis internas na função de escoamento  $F$ . Para  $H < 0$  e  $H > 0$ , têm-se, respectivamente, os fenômenos de endurecimento e amolecimento. O caso  $H = 0$  está atrelado a materiais perfeitamente plásticos, dada a independência do fenômeno de escoamento em relação às variáveis internas.

Ao longo deste item, a formulação viscoplástica foi obtida através da Teoria da Plasticidade Clássica. No entanto, muitos autores (como o LUBLINER [46]) consideram que, na verdade, a Teoria da Plasticidade Clássica é um caso particular da Teoria da Viscoplasticidade, sendo obtida através da imposição da restrição  $F \leq 0$ .

Para o caso de materiais regidos pela plasticidade clássica, basta aplicar a restrição  $F \leq 0$  através da imposição  $\dot{F} = 0$  e permitir a variação das tensões e variáveis internas, caracterizando a condição de consistência. A natureza de  $H$  definirá então a relação entre as tensões e variáveis internas, conforme apresentado anteriormente para os tipos de endurecimento estudados.

O modelo de Perzyna pode ainda ser interpretado como uma generalização do modelo de Hohenemser-Prager (HOHENEMSER e PRAGER [43]), que, por sua vez, se caracteriza pela adaptação do modelo de Bingham para o caso tridimensional aplicável a materiais regidos pelo escoamento de Von Mises. Neste caso, a regra de fluxo pode ser escrita como

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2\gamma} \left\langle 1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}} \right\rangle S_{ij} \quad (3.149)$$

Trata-se, portanto, de uma regra de fluxo não associativa com potencial plástico (ou potencial de fluxo) baseado no invariante  $J_2$ .

Torna-se conveniente a definição do segundo invariante da variação das deformações plásticas:

$$I_2^{\varepsilon p} = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.150)$$

Elevando a equação (3.144) ao quadrado no regime plástico, tem-se:

$$\sqrt{I_2^{\varepsilon p}} = \frac{1}{\gamma} \Phi(F) \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (3.151)$$

Deste modo, tem-se

$$F = \Phi^{-1} \left[ \gamma \sqrt{I_2^{\varepsilon p}} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{-1/2} \right] \quad (3.152)$$

Considerando a existência de endurecimento isotrópico na formulação, pode-se fazer  $\Phi(F) \rightarrow \Phi(F / \kappa^I)$ , o que resulta em

$$f = \kappa^I \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[ \gamma \sqrt{I_2^{\varepsilon p}} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{-1/2} \right] \right\} \quad (3.153)$$

A expressão anterior caracteriza o critério de escoamento em sua forma dinâmica (PERZYNA [45]). Para o critério de Von Mises ( $f = \sqrt{3J_2}$  e  $I_2^{\varepsilon p} = 3(\dot{\varepsilon}^p)^2 / 4$ ), por exemplo, a expressão anterior pode ser escrita como

$$\bar{\sigma} = \kappa^I \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[ \gamma \dot{\varepsilon}^p \right] \right\} \quad (3.154)$$

Segundo LITTLE et al. [3], a modelagem computacional de problemas viscoplásticos é desafiadora devido a dois aspectos. Primeiramente, as equações constitutivas exigem complexos e dispendiosos ensaios para a obtenção dos diversos parâmetros reológicos associados ao material. Além disso, a formulação viscoplástica se caracteriza por um sistema de equações diferenciais não lineares cuja solução através de métodos computacionais tradicionais geralmente se mostra instável. Consequentemente, alguns pesquisadores e profissionais consideram que a maior acurácia obtida pela adoção de modelos viscoplásticos não compensa o elevado custo computacional resultante.

Conforme TELLES [56], pode-se definir a seguinte deformação elástica equivalente e deformação total equivalente:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= E \bar{\varepsilon}^e \\ \bar{\varepsilon} &= \bar{\varepsilon}^e + \bar{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (3.155)$$

Substituindo este resultado na equação (3.154), tem-se:

$$F = \sqrt{3J_2} - \kappa^I \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[ \gamma \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} \right) \right] \right\} \quad (3.156)$$

Se as taxas de variação das tensões e deformações tenderem a zero, tem-se que  $F \rightarrow 0$ , ou seja, a Teoria da Plasticidade Clássica pode ser interpretada como o limite da formulação viscoplástica para incrementos suficientemente lentos de carregamento.

### 3.6.1 – Fluência

A fluência (*creep*) ou deformação lenta é um fenômeno intrínseco à reologia dos materiais e se caracteriza pelo desenvolvimento de deformações ao longo do tempo como resposta a um carregamento, mesmo quando este é constante. Para o caso de materiais viscoelásticos, a aplicação de um carregamento constante  $\sigma_0$  gera uma deformação transiente caracterizada por uma função de fluência  $J(t)$  associada às propriedades reológicas do material (FLÜGGE [23]):

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma_0 \quad (3.157)$$

Geralmente estas funções de fluência são escritas através de combinações lineares de funções exponenciais ou logarítmicas (CHRISTENSEN [24]). Para um caso mais geral, recorre-se à formulação baseada em Integrais Hereditárias (ou de Stieltjes), onde a deformação resultante depende diretamente de todo o histórico de carregamentos ao qual o material é submetido (FLÜGGE [23]):

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma_0 + \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.158)$$

No caso de materiais viscoelásticos, a deformação lenta desaparece assintoticamente com o descarregamento.

Por outro lado, a formulação viscoplástica adotada neste trabalho utiliza o conceito de variáveis internas para levar em consideração todo o histórico de transformações às quais o corpo é submetido, sendo geralmente obtidas deformações irreversíveis.

Segundo LUBLINER [46], o fenômeno de fluência é observado em metais de forma mais evidente em situações onde os mesmos estão submetidos a altas temperaturas. Com base em observações experimentais, o fenômeno de fluência viscoplástica pode ser descrito de maneira geral em três etapas distintas, conforme curva 2 da figura 3.20:

- A fluência primária ou transiente (trecho AB) se caracteriza por um rápido declínio da taxa de deformação e pode ser reversível com o descarregamento. Para certos casos que envolvem estudos abrangendo grandes intervalos de tempo, a parcela de fluência primária pode ser negligenciada, dada a sua curta duração;
- A fluência secundária ou estacionária (trecho BC) é geralmente o principal objeto de estudo em problemas viscoplásticos e se caracteriza por uma taxa de deformação constante mínima que gera deformação irreversível no processo;
- A fluência terciária ou acelerante (trecho CD) se caracteriza por um crescimento abrupto da taxa de deformação que leva rapidamente à ruptura. Esta etapa é influenciada pela redução na seção transversal do corpo devido às grandes deformações. Assim como ocorre com a fluência primária, a parcela terciária pode ser negligenciada devido a sua curta duração face à parcela secundária.

Para materiais submetidos a baixas tensões e temperaturas, a fluência primária se assemelha ao comportamento viscoelástico linear, com deformação crescendo assintoticamente para um valor limite e sem o aparecimento das fluências secundária e terciária, como pode ser observado na curva 1 da figura 3.20. Para altas tensões e temperaturas, o comportamento viscoplástico pode ser caracterizado pela curva 3, com a deformação de fluência dependente de funções temporais logarítmicas ou de potência [46].



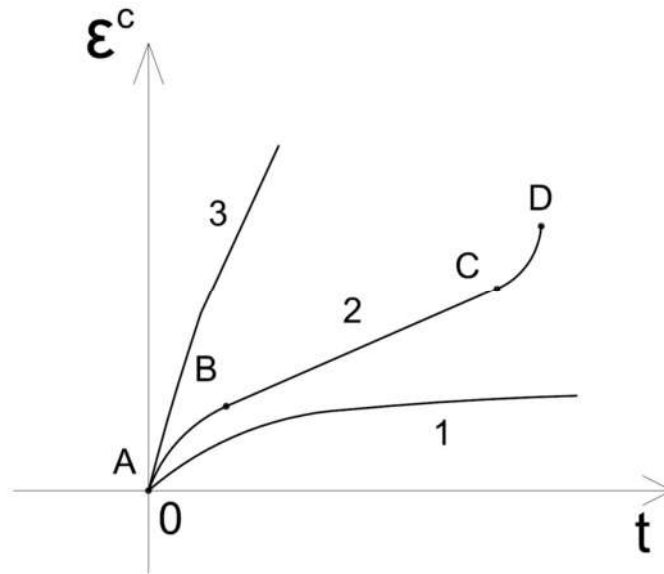


Figura 3.20 – Gráficos típicos de evolução de deformações de fluência [46]

Em harmonia com a abordagem de modelagem do comportamento viscoplástico baseado em observações experimentais macroscópicas ao invés do detalhamento aprofundado dos fenômenos microscópicos que caracterizam o processo, surge uma simples formulação unidimensional para as equações de evolução da deformação de fluência  $\varepsilon^c$  que adota o princípio de separação das variáveis para a tensão  $\sigma$ , temperatura  $T$  e tempo  $t$ :

$$\dot{\varepsilon}^c = g_c(\sigma, T, t) = g_c^\sigma(\sigma) g_c^T(T) g_c^t(t) \quad (3.159)$$

Em termos práticos, para o projeto de estruturas e componentes mecânicos, a análise viscoplástica pode se restringir às etapas primária e secundária da fluência, visto que a parcela terciária indica a iminência da ruptura. Um modelo amplamente aceito e compatível com observações experimentais para as fluências primária e secundária é a Lei de Bailey-Norton (NORTON [41]), também conhecida como a Lei da Potência ou endurecimento temporal

$$\varepsilon^c = K_c \sigma^m t^{n+1} \quad (3.160)$$

onde  $K_c$ ,  $m$  e  $n$  são parâmetros obtidos experimentalmente. A equação de evolução para a deformação de fluência é então escrita como

$$\dot{\varepsilon}^c = (n+1)K_c \sigma^m t^n \quad (3.161)$$

Para o caso de fluência secundária, é possível adotar  $n = 0$  para simular uma taxa constante de deformação de fluência, o que elimina a dependência direta do tempo na equação de evolução. Adaptações da expressão anterior serão feitas posteriormente para a consideração dos efeitos de variação de temperatura. Outras equações de evolução envolvendo funções de diferentes naturezas, tais como funções exponenciais, podem ser obtidas em NAUMENKO e ALTENBACH [126].

Para o caso da fluência primária, isolando a variável do tempo na equação (3.161) e substituindo o resultado na própria equação de evolução, obtém-se a formulação de endurecimento de deformação

$$\dot{\varepsilon}^c = (n+1)K_c^{\frac{1}{n+1}} \sigma^{\frac{m}{n+1}} (\varepsilon^c)^{\frac{n}{n+1}} \quad (3.162)$$

Segundo PENNY e MARRIOTT [127], a formulação anterior costuma apresentar comportamento mais próximo dos resultados experimentais quando comparada à formulação do endurecimento temporal da equação (3.161). NAUMENKO e ALTENBACH [126] salientam, porém, que estas abordagens possuem algumas limitações, como a impossibilidade de modelar de maneira satisfatória o comportamento do corpo quando submetido a variações abruptas de tensão. Para resolver estes problemas, modelos baseados nas variáveis internas de endurecimento cinemático e isotrópico são apresentados em MALININ e KHADJINSKY [128], CHABOCHE [129] e NAUMENKO e ALTENBACH [126].

Outra forma de eliminar a dependência direta do tempo no caso de fluência primária é adotar a seguinte substituição de variáveis:

$$\bar{t} = \int_0^t \tau^n d\tau \Rightarrow \bar{t} = \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad (3.163)$$

Para o caso tridimensional, pode-se aplicar o modelo proposto para a tensão e deformação plástica equivalentes, conforme definição da equação (3.90):

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^c = K_c \bar{\sigma}^m t^n \quad (3.164)$$

Aplicando a transformação do tempo definida em (3.163), tem-se

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^c}{d\bar{t}} = K_c \bar{\sigma}^m \quad (3.165)$$

Retornando à formulação tridimensional geral aos moldes do modelo de Perzyna, tem-se então a regra de fluxo

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^c}{d\bar{t}} = K_c \bar{\sigma}^m \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.166)$$

onde é possível escrever

$$\frac{d\lambda}{d\bar{t}} = \frac{1}{\gamma} \Phi(F) = K_c \bar{\sigma}^m \quad (3.167)$$

A transformação inversa do tempo é feita de forma imediata:

$$t = \left[ (n+1) \bar{t} \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.168)$$

A extrapolação do modelo unidimensional de fluência para o caso tridimensional baseada na tensão e deformação plástica equivalentes pode ser justificada através de evidências experimentais [126]. Considerando que os modelos viscoplásticos podem se basear no conceito do potencial plástico ou de fluxo, multiplica-se a equação de fluxo generalizada (3.61) pelo estado de tensões  $\sigma_{ij}$  e, adotando a definição de tensão e deformação plástica equivalentes da equação (3.90), obtém-se o resultado

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\bar{\sigma}} \bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{ij} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (3.169)$$

o que sugere a possibilidade de se escrever  $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p)$ , conforme equações desta seção.

Para uma formulação de fluência mais geral, pode-se recorrer à teoria desenvolvida por ODQVIST [130], baseada no potencial de fluxo  $Q$  generalizado da

equação (3.61). Adota-se para esta teoria o potencial de fluência  $Q^c$  baseado na dissipação plástica  $D^p$ :

$$\begin{aligned} Q^c &= \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^c = \bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}^c \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^c &= \frac{\partial Q^c}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (3.170)$$

Consequentemente, pode-se elaborar uma definição mais geral para a tensão equivalente

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^c = \frac{\partial Q^c}{\partial \bar{\sigma}} \quad (3.171)$$

o que gera o seguinte resultado:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{\partial Q^c}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\bar{\varepsilon}}^c \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.172)$$

Para problemas isotrópicos, espera-se que o potencial de fluência seja independente do sistema de coordenadas adotado. Deste modo, pode-se concluir que este potencial considera a dependência das tensões através dos invariantes de tensão, ou seja,  $Q^c = Q^c(I_1, J_2, J_3)$ , já considerando a separação dos efeitos esféricos e desviadores. Deste modo, adota-se o mesmo expediente da equação (3.73):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{\partial Q^c}{\partial I_1} \delta_{ij} + \frac{\partial Q^c}{\partial J_2} S_{ij} + \frac{\partial Q^c}{\partial J_3} \left( S_{ik} S_{jk} - \frac{1}{3} S_{mn} S_{nm} \delta_{ij} \right) \quad (3.173)$$

O trabalho de ALTENBACH et al. apud NAUMENKO E ALTENBACH [126] propõe uma definição de tensão equivalente mais geral apropriada para regras de fluxo não associativas:

$$\sigma_{eq} = \alpha \bar{\sigma}_1 + \beta \bar{\sigma}_2 + \gamma \bar{\sigma}_3 \quad (3.174)$$

As tensões  $\bar{\sigma}_i$  podem ser obtidas através de invariantes de tensão alternativos  $\bar{I}_i$  definidos a partir de traços de potências do tensor de tensões:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_i &= tr(\boldsymbol{\sigma}^i), \quad i=1,2,3 \\
\bar{\sigma}_1 &= \mu_1 \bar{I}_1 \\
\bar{\sigma}_2^2 &= \mu_2 \bar{I}_1^2 + \mu_3 \bar{I}_2 \\
\bar{\sigma}_3^3 &= \mu_4 \bar{I}_1^3 + \mu_5 \bar{I}_1 \bar{I}_2 + \mu_6 \bar{I}_3
\end{aligned} \tag{3.175}$$

Aplicando a equação (3.172), tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{ij}^c &= \dot{\bar{\varepsilon}}^c \left[ \alpha \mu_1 \delta_{ij} + \beta \left( \frac{\mu_2 \bar{I}_1 \delta_{ij} + \mu_3 \sigma_{ij}}{\bar{\sigma}_2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \gamma \left( \frac{\mu_4 \bar{I}_1^2 \delta_{ij} + \frac{1}{3} \mu_5 \bar{I}_2 \delta_{ij} + \frac{2}{3} \mu_5 \bar{I}_1 \sigma_{ij} + \mu_6 \sigma_{ik} \sigma_{kj}}{\bar{\sigma}_3^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.176}$$

O caso do critério de Von Mises pode ser obtido fazendo  $\alpha = \gamma = 0$  e  $\beta = 1$ , além de  $\mu_2 = -1/2$  e  $\mu_3 = 3/2$ . A inclusão do parâmetro  $\alpha$  não nulo produz o caso do critério de Drucker-Prager. Neste último caso, pode-se escrever o resultado

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \dot{\bar{\varepsilon}}^c \left[ \alpha \mu_1 \delta_{ij} + \frac{3}{2} \left( \frac{-\frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} + \sigma_{ij}}{\sqrt{3J_2}} \right) \right] \tag{3.177}$$

que, por sua vez, tem expressão dentro dos colchetes coincidente com a equação (3.68).

# Capítulo 4 – Métodos Sem Malha Aplicados a Problemas Elastoplásticos e Viscopoplásticos

Os métodos numéricos que se dedicam a solucionar um determinado Problema de Valor de Contorno (PVC) através da sua correspondente formulação fraca geralmente são baseados na discretização do domínio estudado em elementos. A construção de uma malha de elementos possui dois objetivos principais:

- Definir as variáveis no domínio através da interpolação ao longo do elemento em função dos valores destas variáveis nos nós que definem o elemento;
- Viabilizar a integração do domínio característica de formulações fracas através da integração de cada elemento, visto que domínios irregulares podem ser discretizados em elementos de geometria simples.

Apesar da comprovada eficiência e popularidade, os métodos fundamentados na discretização do domínio em malhas de elementos podem apresentar desvantagens associadas, por exemplo, à geração das malhas, sobretudo em problemas de concentração de tensões e propagação de trincas, onde podem ser exigidas atualizações das malhas ao longo do processo iterativo.

Neste sentido, os Métodos sem Malha ou *Meshless* surgem como potenciais substitutos dos métodos tradicionais, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e Métodos dos Elementos de Contorno (MEC), devido a sua flexibilidade, o que pode gerar maior precisão e menor esforço computacional em alguns casos. Estes métodos são caracterizados basicamente pela disposição teoricamente aleatória de pontos no domínio

sem a necessidade de definir elementos, tendo a capacidade de realizar a interpolação das variáveis estudadas no domínio e contorno e as integrais espaciais sem a confecção de elementos.

## 4.1 – Métodos de Interpolação Sem Malha

Antes do estudo das formulações sem malha para PVCs, é necessário definir o comportamento da solução aproximada do problema em função da nuvem de pontos escolhidos no domínio e contorno. Devido à ausência de elementos finitos e células para auxiliar na definição das funções aproximadas, pode-se recorrer a diversas técnicas, algumas das quais se caracterizam tecnicamente por ajustes de curvas, e não por funções de interpolação. Esta pesquisa se concentrará no estudo de algumas técnicas, reservando as demais para futuros trabalhos.

### 4.1.1 – Métodos dos Mínimos Quadrados Móveis

O Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM) ou *Moving Least Squares* (MLS) é um processo de ajuste de curva baseado no tradicional Método dos Mínimos Quadrados. Este método foi proposto inicialmente por LANCASTER e SALKAUSKAS [72], sendo posteriormente aprimorado em diversos trabalhos, conforme item 1.2 deste texto.

Considera-se uma função  $u$  definida em um domínio  $\Omega$  e um ponto  $\mathbf{x}$  qualquer deste domínio. Define-se ainda  $\Omega_x$ , um subdomínio de  $\Omega$  que contém  $\mathbf{x}$  e os pontos  $\bar{\mathbf{x}}$  localizados na vizinhança de  $\mathbf{x}$ , o que sugere a classificação de  $\mathbf{x}$  como o ponto base do subdomínio  $\Omega_x$ . A função aproximada  $\hat{u}$  em  $\Omega_x$  é então obtida através do ajuste de uma função de base polinomial utilizando os pontos  $\bar{\mathbf{x}} \in \Omega_x$  tendo como base o ponto  $\mathbf{x}$ :

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{nmp} a_i(\mathbf{x}) p_i^a(\bar{\mathbf{x}}) \quad (4.1)$$

sendo  $a_i(\mathbf{x})$  o coeficiente associado ao polinômio  $p_i^a(\bar{\mathbf{x}})$  da base polinomial de  $nmp$  monômios que constitui a solução aproximada no subdomínio  $\Omega_x$  de ponto base  $\mathbf{x}$ . Estes coeficientes são então calculados através do ajuste de curvas do método dos mínimos quadrados utilizando os pontos de  $\Omega_x$ , o que confere um caráter local à aproximação.

As bases polinomiais podem ser definidas através do conjunto completo de monômios de grau  $ngp$ , Para problemas bidimensionais, tem-se, por exemplo, a base linear ( $ngp=1, nmp=3$ )

$$\mathbf{p}_a^T(\mathbf{x}) = (1; x_1; x_2) \quad (4.2)$$

e a base quadrática ( $ngp=2, nmp=6$ )

$$\mathbf{p}_a^T(\mathbf{x}) = (1; x_1; x_2; x_1^2; x_1x_2; x_2^2) \quad (4.3)$$

O número de elementos da base polinomial bidimensional pode ser obtido da seguinte forma:

$$nmp = \frac{(ngp+1)(ngp+2)}{2} \quad (4.4)$$

Considerando que o subdomínio  $\Omega_x$  possui  $nx$  pontos  $\bar{\mathbf{x}}_j$  ( $1 \leq j \leq nx$ ) com os respectivos valores  $\bar{U}_j$  conhecidos da função  $u$ , aplica-se o método dos mínimos quadrados através da definição da soma do quadrado da diferença entre a solução aproximada e a exata para os pontos  $\bar{\mathbf{x}}_j$ , com a ponderação de uma função peso  $w$ :

$$\Pi = \sum_{j=1}^{nx} w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_j) [\hat{u}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}_j) - \bar{U}_j]^2 = \sum_{j=1}^{nx} w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_j) \left[ \sum_{i=1}^{nmp} a_i(\mathbf{x}) p_i^a(\bar{\mathbf{x}}_j) - \bar{U}_j \right]^2 \quad (4.5)$$

Extremizando a expressão anterior para os coeficientes  $a_k(\mathbf{x})$ ,  $1 \leq k \leq nmp$ , tem-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_k(\mathbf{x})} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{nx} w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_j) \left[ \sum_{i=1}^{nmp} a_i(\mathbf{x}) p_i^a(\bar{\mathbf{x}}_j) - \bar{U}_j \right] p_k^a(\bar{\mathbf{x}}_j) = 0 \quad (4.6)$$

O sistema anterior pode ser convenientemente escrito da forma matricial:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{U}} = 0 \quad (4.7)$$

onde

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P} \quad (4.8a)$$



$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \quad (4.8b)$$

e as matrizes e vetores apresentados são definidos como

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1^a(\bar{\mathbf{x}}_1) & p_2^a(\bar{\mathbf{x}}_1) & \cdots & p_{nmp}^a(\bar{\mathbf{x}}_1) \\ p_1^a(\bar{\mathbf{x}}_2) & p_2^a(\bar{\mathbf{x}}_2) & \cdots & p_{nmp}^a(\bar{\mathbf{x}}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^a(\bar{\mathbf{x}}_{nx}) & p_2^a(\bar{\mathbf{x}}_{nx}) & \cdots & p_{nmp}^a(\bar{\mathbf{x}}_{nx}) \end{pmatrix} \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_{nx}) \end{pmatrix} \quad (4.9b)$$

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}) \quad a_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad a_{nmp}(\mathbf{x})) \quad (4.9c)$$

$$\bar{\mathbf{U}}^T = (\bar{U}_1 \quad \bar{U}_2 \quad \cdots \quad \bar{U}_{nx}) \quad (4.9d)$$

A solução do sistema linear (4.7) compõe os coeficientes da base polinomial usada como função de ajuste, caracterizando a solução aproximada em  $\Omega_x$ :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{U}} \quad (4.10)$$

É importante notar que, no MQM, os coeficientes da combinação linear dos elementos da base polinomial variam com o ponto base  $\mathbf{x}$  onde a aproximação se realiza, o que confere o caráter móvel do ajuste de mínimos quadrados. No MQM tradicional, o ajuste de curva não é aplicável para todo o subdomínio  $\Omega_x$ , mas é restrito apenas ao ponto base  $\mathbf{x}$ . A variação de  $\mathbf{x}$  acarreta a necessidade da definição de um novo subdomínio  $\Omega_x$  na vizinhança de  $\mathbf{x}$  e a realização de um novo ajuste de curva no novo subdomínio utilizando o expediente acima descrito. Conseqüentemente, para a obtenção da formulação geral do MQM, a equação (4.1) é então reescrita da seguinte forma:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nmp} a_i(\mathbf{x}) p_i^a(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

podendo ser escrita ainda através de uma função de aproximação aplicada aos pontos utilizados no ajuste do MQM:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nx} \varphi_i(\mathbf{x}) \bar{U}_i \quad (4.12)$$

onde

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_a^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (4.13a)$$

e

$$\mathbf{p}_a^T(\mathbf{x}) = (p_1^a(\mathbf{x}) \quad p_2^a(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad p_{nmp}^a(\mathbf{x})) \quad (4.13b)$$

As funções de aproximação (ou de forma)  $\varphi_i$  do MQM não podem jamais ser confundidas com funções de interpolação, comuns em métodos numéricos com malha. Por ser tratar de um ajuste de curva, **não** é possível garantir a propriedade do delta de Kronecker descrita a seguir:

$$\sum_{i=1}^{nx} \varphi_i(\bar{\mathbf{x}}_j) \bar{U}_i = \bar{U}_j \quad (4.14)$$

No âmbito desta pesquisa, os subdomínios  $\Omega_x$  serão definidos como círculos centrados no ponto base  $\mathbf{x}$  e com raio  $R_x$ . Porém, não existem impedimentos para a adoção de outras configurações, o que pode afetar as características das técnicas de integração e das funções peso que serão apresentadas a seguir.

As funções peso  $w$  são utilizadas para estipular a influência que cada ponto da vizinhança de  $\mathbf{x}$  exerce sobre o ajuste em  $\Omega_x$ . São definidas, portanto, em função da distância  $r = |\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|$  entre cada ponto de  $\Omega_x$  e o ponto base, sendo nulas para quaisquer pontos externos ao referido subdomínio. Além disso, será adotado que  $w = 1$  no ponto base ( $r = 0$ ) e  $w = 0$  para  $r = R_x$ , o que confere influência nula aos pontos do contorno de  $\Omega_x$  e estabelece assim os limites do ajuste de curva.

A função Gaussiana será adotada neste trabalho como uma possibilidade de função peso, sendo escrita na forma a seguir para forçar a anulação no contorno de  $\Omega_x$ :

$$w(r) = \frac{e^{-\left(\frac{r}{c}\right)^2} - e^{-\left(\frac{R_x}{c}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{R_x}{c}\right)^2}} \quad (4.15)$$

O parâmetro prefixado  $c$  tem o atributo de modificar a curvatura da função peso. Quanto maior o parâmetro  $c$ , maior será o módulo da derivada primeira em  $r = R_x$  e mais afastado o ponto de inflexão da curva estará de  $r = 0$ , conforme pode ser constatado na figura 4.1.



Figura 4.1 – Função Peso Gaussiana

Outra possibilidade estudada para função peso é a adoção da spline de quarto grau, definida da seguinte forma:

$$w(r) = 1 - 6\left(\frac{r}{R_x}\right)^2 + 8\left(\frac{r}{R_x}\right)^3 - 3\left(\frac{r}{R_x}\right)^4 \quad (4.16)$$

Além de não possuir parâmetros adicionais, a spline de quarto grau possui derivadas de primeira e segunda ordem nulas em  $r = R_x$ , o que amplia a conveniência desta função, que se encontra plotada na figura 4.2.

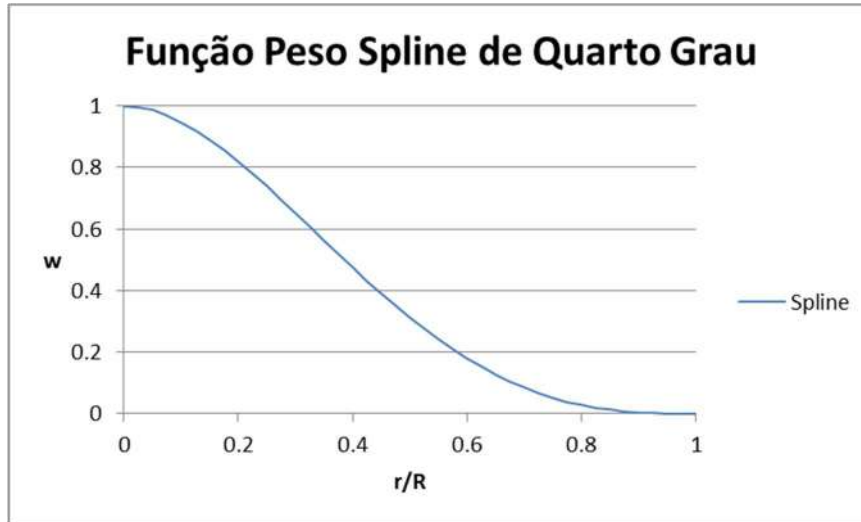


Figura 4.2 – Função Spline de Quarto Grau

A expressão final do MQM pode ser diretamente aplicada em equações diferenciais parciais através da definição das suas derivadas espaciais. Para a derivação da inversa da matriz  $\mathbf{A}$ , conhecida na literatura como matriz momento (*momentum matrix*), basta derivar a expressão  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ , obtendo:

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (4.17)$$

As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são derivadas de forma imediata:

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{P} \quad (4.18a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (4.18b)$$

A derivada da função de forma é então definida como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = & \frac{\partial \mathbf{p}_a^T(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_a^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \\ & + \mathbf{p}_a^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para as derivadas de segunda ordem, basta aplicar novas derivações nas equações (4.17) a (4.19).

Talvez a maior inconveniência do MQM seja a definição do subdomínio  $\Omega_x$ , mesmo sendo necessário apenas determinar o raio  $R_x$ . Subdomínios excessivamente grandes não apenas contradizem o aspecto local da aproximação como também aumentam o esforço computacional além de existir o risco de deteriorização do ajuste, visto que pontos consideravelmente distantes do ponto base estariam sendo considerados e o objetivo final do MQM é estimar apenas o valor da função aproximada no ponto base. Subdomínios excessivamente pequenos são igualmente problemáticos, pois existe o risco de o mesmo não conter pontos suficientes para a realização do ajuste. Consequentemente, é preciso obter o menor subdomínio possível que possibilite um ajuste de curva satisfatório em função dos pontos vizinhos ao ponto base.

Uma estimativa inicial razoável para  $\Omega_x$  consiste na definição do menor círculo de raio  $R_x$  e centro em  $\mathbf{x}$  capaz de comportar no mínimo  $nmp$  pontos em seu interior, desconsiderando o contorno, uma vez que os pontos pertencentes ao mesmo não influenciam o ajuste. Esta estimativa inicial para o número mínimo de pontos é motivada pelo número mínimo teórico de pontos para um ajuste de uma função de base polinomial com  $nmp$  parâmetros.

Entretanto, esta estimativa não garante que o ajuste será bem-sucedido. A falha do MQM pode ser expressa matematicamente pela obtenção de uma matriz  $\mathbf{A}$  com determinante suficientemente próximo de zero, o que geraria problemas numéricos na obtenção de  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Como uma entrada qualquer da matriz momento  $\mathbf{A}$  é definida como

$$A_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{nx} w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k) p_i^a(\bar{\mathbf{x}}_k) p_j^a(\bar{\mathbf{x}}_k) \quad (4.20)$$

a singularidade da referida matriz se verifica caso os vetores

$$\left( p_m^a(\bar{\mathbf{x}}_1) \quad p_m^a(\bar{\mathbf{x}}_2) \quad \cdots \quad p_m^a(\bar{\mathbf{x}}_{nx}) \right)$$

e

$$\left( p_n^a(\bar{\mathbf{x}}_1) \quad p_n^a(\bar{\mathbf{x}}_2) \quad \cdots \quad p_n^a(\bar{\mathbf{x}}_{nx}) \right)$$

sejam linearmente dependentes, ou seja, caso as linhas  $m$  e  $n$  da matriz  $\mathbf{P}^T$  sejam linearmente dependentes. Deste modo, segundo CAO et al. [131], a não-singularidade de  $\mathbf{A}$  será garantida para  $nx \geq nmp$  e  $\text{Posto}(\mathbf{P}^T) = nmp$ .

Ademais, apesar de a matriz  $\mathbf{W}$  conter apenas entradas positivas não-nulas em sua diagonal principal, os pontos mais afastados do ponto base terão peso reduzido em relação aos pontos mais centrais, o que torna a contribuição destes pontos periféricos pouco representativa na formação de  $\mathbf{A}$ , razão pela qual é preferível que estes pontos sejam excluídos na análise do posto de  $\mathbf{P}^T$ . Deste modo, a falta de pontos com peso representativo insuficientes para a garantia do posto de  $\mathbf{P}^T$  pode gerar mal condicionamento na matriz  $\mathbf{A}$ , apesar da ausência de singularidade.

Desta forma, um possível expediente para a definição de um subdomínio ótimo é partir da estimativa inicial proposta de  $nmp$  pontos e aumentar gradativamente o raio  $R_x$  incluindo novos pontos até eliminar a singularidade da matriz  $\mathbf{A}$ . Este processo possui um custo computacional razoável, que poderá ser mitigado através de técnicas simples que serão apresentadas posteriormente.

#### 4.1.1.1 – Métodos dos Mínimos Quadrados Móveis Estabilizado

É possível detectar potenciais problemas numéricos na geração e inversão da matriz  $\mathbf{A}$  do MQM decorrentes da utilização das bases polinomiais conforme apresentado em (4.2) e (4.3), uma vez que variações significativas nas coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos da nuvem podem gerar mal condicionamento da referida matriz. Para solucionar este problema, os trabalhos de LI e LI [106] e LI e WANG [107] e MIRZAEI et al. [108] sugerem a adoção de uma base polinomial local “normalizada”, apresentando o seguinte aspecto:

$$\mathbf{p}_a^T \left( \frac{\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{h} \right) = \left( 1, \frac{\bar{x}_1 - x_1}{h}, \frac{\bar{x}_2 - x_2}{h} \right) \quad (4.21a)$$

$$\mathbf{p}_a^T \left( \frac{\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{h} \right) = \left[ 1, \frac{\bar{x}_1 - x_1}{h}, \frac{\bar{x}_2 - x_2}{h}, \left( \frac{\bar{x}_1 - x_1}{h} \right)^2, \right. \\ \left. \left( \frac{\bar{x}_1 - x_1}{h} \right) \left( \frac{\bar{x}_2 - x_2}{h} \right), \left( \frac{\bar{x}_2 - x_2}{h} \right)^2 \right] \quad (4.21b)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o centro do suporte,  $\bar{\mathbf{x}}$  é um ponto qualquer dentro do suporte e  $h$  é o espaçamento nodal [106] (também chamado de *fill distance* [108]), que pode ser definido como

$$h = \max_{1 \leq i \leq nx} \left( \min_{1 \leq j \leq nx, j \neq i} |\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_j| \right) \quad (4.22)$$

Deste modo, além do caráter local, a base apresenta uma espécie de normalização, uma vez que as coordenadas aplicadas aos polinômios variam entre 0 e 1 no interior do círculo centrado em  $\mathbf{x}$  e com raio  $h$ , onde os pontos exercem maior influência no ajuste do MLS.

Segundo LI e LI [106], o número de condicionamento da matriz  $\mathbf{A}$  depende da ordem de grandeza de  $h$  e a simples adaptação da base polinomial indicada em (4.20) implica a eliminação desta dependência, o que contribui para a estabilização do MQM, razão pela qual este método é nomeado como Método dos Mínimos Quadrados Estabilizado (MQME) ou *Stabilized Moving Least Squares (SMLS)*.

#### 4.1.1.2 – Derivadas Difusas

O processo de derivação das funções de forma do MQM (equações (4.17) a 4.19)) possui alto custo computacional, já que são necessárias diversas multiplicações de matrizes. A derivada espacial da aproximação via MQM pode ser escrita como

$$\frac{\partial \hat{u}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{p}_a^T(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_a^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (4.23)$$

Com base na equação (4.19), tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \bar{\mathbf{U}} \quad (4.24)$$

Segundo MIRZAEI et al. [108], os coeficientes  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  podem ser considerados constantes para efeito de derivação espacial, tendo em vista a fraca dependência em relação a  $\mathbf{x}$ . Desta forma, a derivação espacial da aproximação do MQM se resume ao cálculo das derivadas da base polinomial, o que reduz significativamente o custo

computacional do processo. Esta formulação é conhecida como derivada difusa do MLS e pode ser escrita como

$$\frac{\partial \hat{u}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \approx \frac{\partial \mathbf{p}_a^T(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (4.25)$$

O trabalho de MIRZAEI et al. [108] demonstra que a aplicação de derivadas difusas resulta na mesma ordem de convergência em relação à derivação tradicional do MQM. Os resultados que serão apresentados no próximo capítulo sugerem que o aumento do erro da solução numérica pode ser compensado pela redução de custo computacional.

É importante salientar que, como o objetivo deste trabalho é estudar problemas com não linearidade física, as soluções numéricas serão obtidas através de incrementos de carga e iterações, o que sugere que amplificações nos erros na formulação espacial dos métodos sem malha podem causar potenciais instabilidades numéricas devido ao acúmulo de erro ao longo dos incrementos e iterações. Consequentemente, quaisquer simplificações adicionais em relação à formulação tradicional, tais como as derivadas difusas, precisam ser estudadas cautelosamente.

#### 4.1.1.3 – Métodos dos Mínimos Quadrados Móveis Ortogonais

Tendo em vista a inconveniência da inversão da matriz  $\mathbf{A}$  do MQM aliada ao seu mal condicionamento, o trabalho de LU et al. [75] propõe a adoção de uma base polinomial ortogonal, o que caracteriza o Método dos Mínimos Quadrados Ortogonais (MQMO) ou *Orthogonal Moving Least Squares (OMLS)*. Para se obter a base ortogonal, toma-se como ponto de partida a base do MQM e aplica-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

A ortogonalização é realizada através de uma definição alternativa do produto interno entre elementos da base polinomial original do MQM através dos pontos  $\bar{\mathbf{x}}_k$  ( $1 \leq k \leq nx$ ) onde a função a ser aproximada é conhecida:

$$\langle p_i^a(\mathbf{x}), p_j^a(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{k=1}^{nx} w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k) p_i^a(\bar{\mathbf{x}}_k) p_j^a(\bar{\mathbf{x}}_k) \quad (4.26)$$



Para a obtenção da base polinomial ortogonalizada  $q_i, (1 \leq i \leq nmp)$ , define-se o primeiro elemento como  $q_1 = p_1$  e o segundo como

$$q_2 = p_2 - b_{21}q_1 \quad (4.27)$$

e a constante  $b_{21}$  é calculada de maneira a tornar  $q_2$  ortogonal a  $q_1$  no sentido da definição de produto interno (4.20), ou seja,

$$\langle q_1, q_2 \rangle = 0 \Rightarrow b_{21} = \frac{\langle p_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} \quad (4.28)$$

O terceiro elemento é definido como

$$q_3 = p_3 - b_{31}q_1 - b_{32}q_2 \quad (4.29)$$

e as constantes  $b_{31}$  e  $b_{32}$  são calculadas para tornar  $q_3$  ortogonal a  $q_1$  e a  $q_2$ . A ortogonalização de Gram-Schmidt pode então ser sintetizada através da expressão geral

$$q_j = p_j - \sum_{i=1}^{j-1} b_{ji}q_i, (2 \leq j \leq nmp) \quad (4.30)$$

$$\langle q_i, q_j \rangle = 0, i \neq j \Rightarrow b_{ji} = \frac{\langle p_j, q_i \rangle}{\langle q_i, q_i \rangle}, i \neq j$$

Uma vez aplicada a base polinomial ortogonal da expressão da matriz  $\mathbf{A}$  (4.8a), o seguinte resultado é obtido:

$$\mathbf{A}_o(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \langle q_1, q_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle q_2, q_2 \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle q_{np}, q_{np} \rangle \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

As equações (4.30) ilustram que a base polinomial ortogonalizada pode ser escrita através de combinações lineares dos nomômios da base original, ou seja,

$$\mathbf{q}_a(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{p}_a(\mathbf{x}) \quad (4.32)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é uma matriz triangular inferior com entradas constantes e todos os termos da diagonal principal iguais a 1. As funções de forma podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{Q}\mathbf{P}^T\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{P}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^T \\
 \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{Q}\mathbf{P}^T\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{B}(\mathbf{x}) \\
 \varphi_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{q}_a^T(\mathbf{x})\mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) = \\
 &= \mathbf{p}_a^T(\mathbf{x})\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}^{-T}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_a^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Deste modo, as funções de forma para o MQM tradicional e o MQMO são idênticas e a mesma conclusão pode ser obtida para as derivadas espaciais. Todavia, pode-se considerar que a matriz de transformação de base  $\mathbf{Q}$  atua como um pré-condicionador, reduzindo o número de condicionamento da matriz  $\mathbf{A}$ , o que contribui para a redução do seu grau de mal condicionamento. Por esta razão, segundo [131], acredita-se no potencial do MQMO para melhorar a qualidade dos resultados numéricos do MQM tradicional.

É importante salientar que, apesar desta crença, não é possível evitar a singularidade da matriz  $\mathbf{A}_0$  caso o posto de  $\mathbf{P}^T$  seja inferior a  $nmp$ . O artigo [131] afirma, no entanto, que em alguns casos é possível obter melhorias nos resultados numéricos de Métodos Sem Malha via MQMO caso seja garantido, pela escolha do suporte, que  $\text{Posto}(\mathbf{P}^T) = nmp$ .

Como  $\mathbf{Q}$  é constante para a aplicação do MQMO em um determinado ponto base  $\mathbf{x}$ , as derivadas das funções de forma podem ser calculadas adotando o mesmo expediente das equações (4.17) a (4.19), com a inclusão das transformações de base das equações (4.32) e (4.33).

## 4.2 – Formulações Integrais Globais e Locais

A abordagem geral para a formulação dos métodos numéricos com malha utiliza a formulação fraca dos problemas estudados, obtida através da aplicação do Método dos Resíduos Ponderados nas equações diferenciais de governo. Esta formulação é então integrada ao longo do domínio através da malha de elementos para a confecção do sistema a ser solucionado. As formulações integrais dos métodos sem malha tomam como ponto de partida as mesmas abordagens utilizadas em métodos numéricos com malha populares com o MEF e o MEC.

Aplicando o Método dos Resíduos Ponderados na equação de equilíbrio (2.1) com a introdução de uma função de ponderação  $v$  e um parâmetro de penalidade  $\alpha$  para consideração das condições de contorno essenciais, obtém-se a primeira versão da Formulação Fraca Assimétrica Global (FFAG1) ou *Global Unsymmetric Weak Formulation 1 (GUSWF1)* (ATLURI e SHEN [74]):

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) v_i d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_1} (u_i - \bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0 \quad (4.34)$$

Aplicando a identidade  $(\sigma_{ij} v_i)_{,j} = \sigma_{ij,j} v_i + \sigma_{ij} v_{i,j}$ , o Teorema da Divergência e as equações de equilíbrio no contorno (2.3) na equação (4.26), obtém-se a Formulação Fraca Simétrica Global (FFSG) ou *Global Symmetric Weak Formulation (GSWF)* [74]:

$$\int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{p}_i v_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i v_i d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_1} (u_i - \bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0 \quad (4.35)$$

A equação anterior considera a influência das condições de contorno naturais como consequência direta do Teorema da Divergência e das equações de equilíbrio no contorno enquanto que as condições de contorno essenciais são impostas à formulação através do parâmetro de penalidade  $\alpha$ . Outras formas de imposição das condições essenciais são discutidas, por exemplo, em LU et al. [75].

Para o caso de problemas elásticos, aplica-se a equação constitutiva (2.7), obtendo assim a expressão

$$\int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{p}_i v_i d\Gamma - \int_{\Omega} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i v_i d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_1} (u_i - \bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0 \quad (4.36)$$

Aplicando agora a equação geométrica (2.4), tem-se a forma final da formulação global simétrica fraca (FGSF) para problemas elásticos, extensivamente utilizada no MEF:

$$\int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{p}_i v_i d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} (u_{k,l} + u_{l,k}) v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i v_i d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_1} (u_i - \bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0 \quad (4.37)$$

Analisando as equações (4.34) e (4.37), fica claro que, no sentido da definição das formulações fracas conforme ATLURI E SHEN [74], o conceito de “simétrico” está associado à coincidência entre a ordem de derivação espacial aplicada à função aproximada  $\mathbf{u}$  e à função de ponderação  $\mathbf{v}$ . A equação global anterior envolve, portanto, a derivação das funções aproximadas oriundas dos esquemas de ajuste de curvas ou interpolação, o que pode ser um processo complexo e custoso computacionalmente.

Por este motivo, o trabalho de HAN e ATLURI [98] propõe uma formulação mista que aplica a aproximação via MQM também nas deformações  $\varepsilon_{kl}$  usando diretamente a equação (4.36), o que evita a derivação das funções aproximadas resultantes na formulação integral, apesar da inclusão de variáveis adicionais. Para alimentar o sistema com novas equações, as aproximações via MQM são aplicadas diretamente na equação geométrica (2.4). Este expediente inclui derivadas espaciais da função aproximada  $\mathbf{u}$ , mas estas são aplicadas pontualmente e não em uma formulação integral.

A formulação fraca global em integrais no contorno para problemas elásticos é obtida com a consideração de que a função de ponderação  $\mathbf{v}$  é solução da equação de Navier elástica para forças de massa baseadas na função Delta de Dirac  $b_{ij}^* = \Delta(\bar{\xi}, \mathbf{x})\delta_{ij}$ , simbolizando forças unitárias concentradas na direção “i” aplicadas em um ponto  $\bar{\xi}$ . Esta função, conhecida como solução fundamental  $\mathbf{u}^*$ , é válida em um domínio infinito  $\Omega^* \supset \Omega$  onde as forças de massa  $\mathbf{b}^*$  atuam. Através da aplicação da equação de Cauchy (2.3), da equação constitutiva elástica (2.7) e da equação geométrica (2.4) na solução fundamental  $\mathbf{u}^*$ , obtém-se a correspondente função  $\mathbf{p}^*$ :

$$p_{ij}^* = \frac{1}{2} C_{jklm} (u_{il,m}^* + u_{im,l}^*) n_k \quad (4.38)$$

As expressões finais para as soluções fundamentais elásticas podem ser obtidas em TELLES [56]. Aplicando o Teorema da Divergência na primeira integral de domínio da equação (4.37) e considerando as diversas simetrias do tensor  $\mathbf{C}$ , obtém-se a segunda versão da Formulação Fraca Assimétrica Global (FFAG2) ou *Global Unsymmetric Weak Formulation 2 (GUSWF2)* [74] para problemas elásticos, adotada para o MEC:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_1} p_j(\mathbf{x}) u_{ij}^*(\mathbf{x}, \bar{\xi}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_2} \bar{p}_j(\mathbf{x}) u_{ij}^*(\mathbf{x}, \bar{\xi}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_1} \bar{u}_j(\mathbf{x}) p_{ij}^*(\mathbf{x}, \bar{\xi}) d\Gamma - \\
& - \int_{\Gamma_2} u_j(\mathbf{x}) p_{ij}^*(\mathbf{x}, \bar{\xi}) d\Gamma(\mathbf{x}) - c_{ij}(\bar{\xi}) u_j(\bar{\xi}) + \int_{\Omega} b_j(\mathbf{x}) u_{ij}^*(\mathbf{x}, \bar{\xi}) d\Omega(\mathbf{x}) = 0
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Na equação anterior, as variáveis independentes  $\mathbf{x}$  e  $\bar{\xi}$  são explicitadas para ilustrar seus papéis na formulação integral. O termo com o parâmetro de penalidade é removido, uma vez que a formulação em integrais de contorno se encarrega de considerar as condições de contorno essenciais. O tensor  $c_{ij}(\bar{\xi})$  é responsável por computar singularidades associadas à solução fundamental quando o ponto  $\bar{\xi}$  se localiza no contorno, conforme TELLES [56]. Para os casos onde  $\bar{\xi}$  está no domínio, tem-se  $c_{ij}(\bar{\xi}) = \delta_{ij}$ , sendo o resultado esperado para o comportamento da função Delta de Dirac (ver equação (1.7)).

Através da formulação global simétrica fraca (4.35), é possível obter uma formulação local válida para subdomínios  $\Omega_\xi \subset \Omega$ , conforme definição da figura 4.3. Ainda de acordo com a referida figura,  $L_\xi$  denota o trecho do contorno  $\partial\Omega_\xi$  dos subdomínios que não possuem interseção com o contorno global  $\Gamma$ . Adicionalmente,  $\Gamma_\xi$  representa a interseção entre o contorno  $\partial\Omega_\xi$  do subdomínio e o contorno global  $\Gamma$ , ou seja,  $\partial\Omega_\xi = \Gamma_\xi \cup L_\xi$ .

Evidentemente, se a equação de equilíbrio (2.1) é válida para o domínio global, esta será igualmente válida para o subdomínio local, o que estende a validade para a formulação do Método dos Resíduos Ponderados da equação (4.34). Tomando o caso onde não existe interseção entre o contorno global  $\Gamma$  e o contorno de  $\Omega_\xi$ , ou seja,  $\partial\Omega_\xi = L_\xi$ , a Formulação Fraca Simétrica Local (FFSL) ou *Local Symmetric Weak Formulation (LSWF)* [74] é então obtida em função da FGSF:

$$\int_{L_\xi} p_i v_i d\Gamma - \int_{\Omega_\xi} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega_\xi} b_i v_i d\Omega = 0 \tag{4.40a}$$

Para os casos onde existe interseção entre  $\Gamma$  e  $\partial\Omega_\xi$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_{\xi_1}} p_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{\xi_2}} \bar{p}_i v_i d\Gamma + \int_{L_\xi} p_i v_i d\Gamma - \int_{\Omega_\xi} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega_\xi} b_i v_i d\Omega - \\
& - \alpha \int_{\Gamma_{\xi_1}} (u_i - \bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.40b}$$

onde  $\Gamma_{\xi_1}$  e  $\Gamma_{\xi_2}$  são os trechos de  $\Gamma_\xi$  onde são definidas as condições de contorno essenciais e naturais respectivamente, seguindo o padrão das equações (2.5) e (2.6) e do arranjo da figura 2.1. Naturalmente, para os casos em que as funções de ponderação se anulam no contorno do suporte, as integrais em  $L_\xi$  são nulas e, portanto, são removidas da formulação.

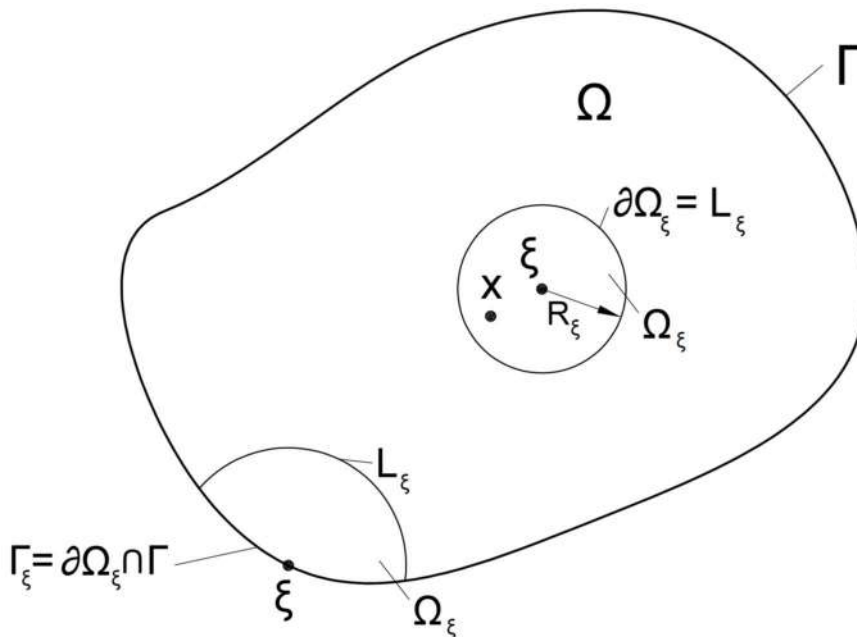


Figura 4.3 – Formulações fracas locais – domínios locais

As formulações tradicionais do MEF utilizam a formulação fraca global da equação (4.37), sendo necessária a divisão do domínio em elementos para a interpolação da solução aproximada e a realização da integração espacial ao longo de todo o domínio. Conseqüentemente, apesar de a divisão de elementos sugerir um caráter local ao método, estes elementos constituem apenas contribuições locais para uma formulação global.

Alguns métodos ditos sem malha, tais como o EFG (*Element-Free Galerkin* [73]), também utilizam as formulações fracas globais do MEF. Estes métodos basicamente utilizam técnicas de interpolação (ou ajuste de curva como o MQM) que não exigem a

criação de elementos, utilizando apenas pontos predefinidos no domínio e contorno, o que confere a titulação de métodos sem malha. No entanto, a aplicação deste expediente em formulações globais exige a confecção de células para a realização da integração no domínio, o que impede estes métodos de serem classificados como verdadeiramente sem malha [74].

Por outro lado, a família de Métodos Locais de Petrov-Galerkin (MLPG) adotam a formulação fraca local das equações (4.40), ou outras formulações locais alternativas, gerando assim uma metodologia verdadeiramente local e sem malha. Para cada ponto  $\xi$  da nuvem definida no domínio e contorno, as equações (4.40) são aplicadas no subdomínio  $\Omega_\xi$  associado ao ponto. A aplicação deste expediente para sucessivos pontos gera um sistema de equações cuja solução é o vetor aproximado dos deslocamentos em cada ponto  $\xi$ . Nesta pesquisa, os subdomínios  $\Omega_\xi$  serão considerados circulares com centro em  $\xi$  e raio  $R_\xi$ .

Para a integração do subdomínio  $\Omega_\xi$ , as funções aproximadas do integrando serão definidas em cada ponto  $\mathbf{x}$  de  $\Omega_\xi$  através do ajuste de curva do MQM, sendo possível adotar outras técnicas, conforme ATLURI e SHEN [74] (ver capítulo 1). Conseqüentemente, para cada ponto  $\mathbf{x}$ , será formado um suporte circular de raio  $R_x$  associado ao ajuste de curva, que não pode ser confundido com o círculo que forma o subdomínio  $\Omega_\xi$ . Conforme pode ser visto na figura 4.4, o suporte de  $\mathbf{x}$  pode transpor os limites de  $\Omega_\xi$  e os raios  $R_x$  e  $R_\xi$  não precisam ser necessariamente iguais. Embora os critérios para a definição de  $R_x$  estejam relacionados à convergência do MQM, a definição de  $R_\xi$  não guarda nenhuma relação com estes requisitos, permitindo assim a adoção do seguinte critério de formação, de acordo com FONTES JR [88]:

$$R_\xi = \lambda_\xi |\xi - \bar{\mathbf{x}}_1| \quad (4.41)$$

onde  $\bar{\mathbf{x}}_1$  é o ponto mais próximo do ponto  $\xi$  e  $\lambda_\xi$  é um fator de escala, que será discutido em momento oportuno.

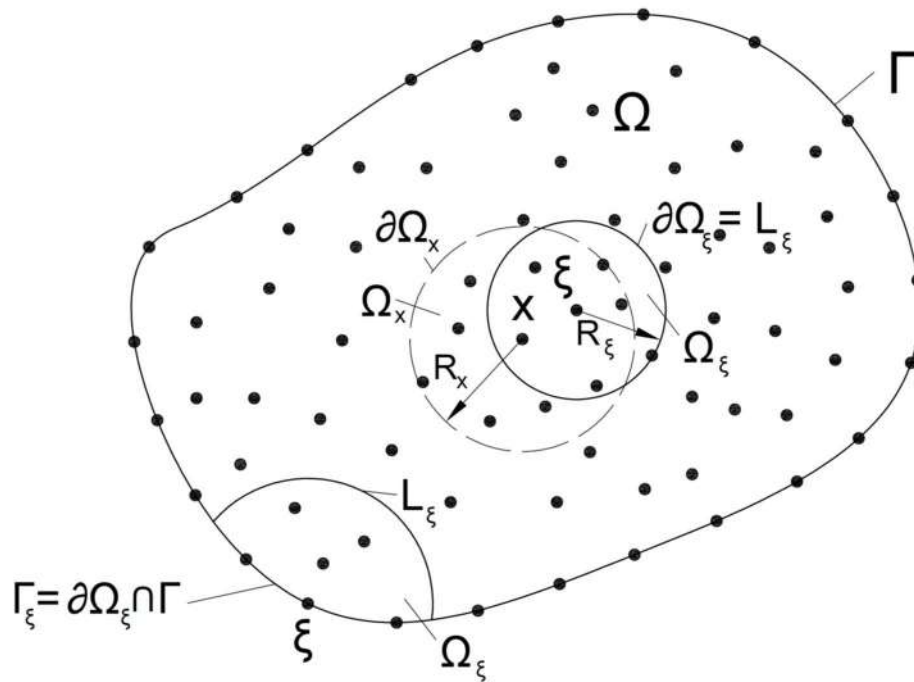


Figura 4.4 – Discretização do MLPG-1

Mesmo que o subdomínio  $\Omega_\xi$  seja significativamente pequeno em comparação ao suporte do MQM, a integração de  $\Omega_\xi$  exige que pontos externos vizinhos ao mesmo sejam considerados para o ajuste das funções do integrando, o que garante a participação de diversos pontos para cada equação local, formando assim o sistema de equações.

Para a integração espacial numérica, serão utilizados e comparados diversos esquemas de Quadratura Gaussiana, conforme será visto posteriormente. Como estes esquemas implicam o cálculo das funções do integrando em cada ponto de Gauss escolhido, a aproximação via MQM deverá ser aplicada para cada um destes pontos, o que pode resultar em um elevado custo computacional.

O artigo de ATLURI e SHEN [74] apresenta um histórico do desenvolvimento dos Métodos Sem Malha e divide o MLPG em seis categorias:

- A variante MLPG-1 adota a formulação local simétrica fraca utilizando como função de ponderação a mesma função peso adotada para o MQM com suporte coincidindo com o subdomínio  $\Omega_\xi$ , destacando-se o trabalho de ATLURI e ZHU [93];



- A variante MLPG-2 adota a função Delta de Dirac (equação (1.7)) como função de ponderação, sendo aplicada a forma local da FFAG1 (Formulação Fraca Assimétrica Local 1 – FFAL1, versão local da equação (4.26)), o que resulta no Método de Colocação Pontual (MCP) ou *Point Collocation Method* (PCM). Este método se caracteriza basicamente pela aplicação direta dos métodos de ajuste de curva ou de interpolação sem malha na formulação forte, conforme trabalhos de OÑATE et al. [85], ALURU [86] e ALTURI et al. [87];
- A variante MLPG-3 adota a mesma formulação fraca local da variante MLPG-2 e utiliza como função de ponderação a função de erro da equação diferencial usando a aproximação via mínimos quadrados, sendo possível adotar as mais diversas técnicas sem malha para interpolação/ajuste;
- A variante MLPG-4 adota a versão local da formulação fraca do MEC (FFAL2 – versão local da equação (4.31)), adotando como função de ponderação uma versão modificada da solução fundamental (que se anula em  $\partial\Omega_\xi$ ) associada à equação diferencial que rege o problema, juntamente com as técnicas de ajuste de curva ou interpolação sem malha. Este método é conhecido na literatura como Método da Equação de Contorno Local (MECL) ou *Local Boundary Integral Equation* (LBIE), conforme trabalho de ZHU et al. [95];
- A variante MLPG-5 utiliza a mesma formulação fraca local do MLPG-1 com a adoção da função de Heaviside ou degrau (equação (1.5)) como função de ponderação, sendo igual à unidade no interior do subdomínio  $\Omega_\xi$  e nula no seu exterior. O artigo [74] afirma que, tendo em vista a sua precisão, estabilidade e rápida convergência, o MLPG-5 surge como uma simples e eficiente alternativa ao MEF e MEC;
- A variante MLPG-6 adota a mesma formulação fraca local do MLPG-1 com funções de ponderação pertencentes ao mesmo espaço das funções de aproximação numérica  $\varphi_i^{ng}$  dos esquemas de ajuste de curva ou interpolação sem malha (como o MQM), caracterizando assim a versão

via MLPG do Método de Galerkin verdadeiro, popular em formulações via MEF. Esta variante pode ser encontrada em HAN e ATLURI [98].

Os esforços deste trabalho se concentrarão na aplicação das variantes MLPG-1 e MLPG-5 em problemas de Plasticidade Clássica e Viscoplasticidade, conforme itens subsequentes.

Tabela 4.1 – Variantes dos Métodos Locais de Petrov-Galerkin

Variante	Função de ponderação	Formulação Fraca Local	Tipo de integração espacial
MLPG-1	Função peso do MQM	FFSL	Domínio local
MLPG-2	Delta de Dirac	FFAL1	Sem integração
MLPG-3	Erro da EDP via mínimos quadrados	FFAL1	Domínio local
MLPG-4	Solução fundamental	FFAL2	Contorno local com singularidade
MLPG-5	Função de Heaviside	FFSL	Contorno local sem singularidade
MLPG-6	Função aproximada via Meshless	FFSL	Domínio local

### 4.3 – Formulação do MLPG-1 para Problemas Elastoplásticos

A formulação do MLPG-1 para o regime elástico pode ser obtida a partir da FFSL, com a eliminação da integral no contorno interno  $L_{\xi}$ , onde as funções de ponderação se anulam, juntamente com a introdução das equações constitutivas elásticas e a equação de equilíbrio no contorno (2.3) para a substituição da tensão superficial  $\mathbf{p}$  na integral em  $\Gamma_{\xi_1}$

:

$$\int_{\Gamma_{\xi_1}} \delta_{ui} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} n_j v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{\xi_2}} \bar{p}_i v_i d\Gamma - \int_{\Omega_{\xi}} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega_{\xi}} b_i v_i d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{\xi_1}} \delta_{ui} (u_i - \bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0 \quad (4.42)$$

para a formulação mista (envolvendo deslocamentos e deformações), sendo ainda possível substituir as equações geométricas (2.4) para a obtenção da formulação

exclusivamente baseada no campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , o que resulta na seguinte formulação matricial bidimensional:

$$\int_{\Gamma_{\xi 1}} \mathbf{V} \delta_{\mathbf{u}} \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\xi 2}} \mathbf{V} \bar{\mathbf{p}} d\Gamma - \int_{\Omega_{\xi}} \mathbf{V}_{\mathbf{B}} \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega_{\xi}} \mathbf{V} \mathbf{b} d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{\xi 1}} \mathbf{V} \delta_{\mathbf{u}} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (4.43)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T &= (u_1 \quad u_2) \\ \bar{\mathbf{u}}^T &= (\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2) \\ \bar{\mathbf{p}}^T &= (\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2) \\ \mathbf{b}^T &= (b_1 \quad b_2) \end{aligned} \quad (4.44a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{pmatrix} \quad (4.44b)$$

$$\mathbf{V}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} v_{1,1} & 0 & v_{1,2} \\ 0 & v_{2,2} & v_{2,1} \end{pmatrix} \quad (4.44c)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{pmatrix} \quad (4.44d)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \quad (4.44e)$$

$$\delta_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \delta_{u1} & 0 \\ 0 & \delta_{u2} \end{pmatrix} \quad (4.44f)$$

$$\delta_{ui} = \begin{cases} = 1, \text{ com } u_i \text{ prescrito} \\ = 0, \text{ sem } u_i \text{ prescrito} \end{cases}, i = 1, 2$$

O tensor  $\mathbf{D}$  assume a forma a seguir para o EPD

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (4.45a)$$

e assume a forma a seguir para o EPT

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (4.45b)$$

Para o regime plástico, é conveniente a aplicação da derivada em relação ao tempo nas equações (4.40), obtendo assim a forma

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{\xi 1}} \dot{p}_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{\xi 2}} \dot{\bar{p}}_i v_i d\Gamma - \int_{\Omega_{\xi}} \dot{\sigma}_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega_{\xi}} \dot{b}_i v_i d\Omega - \\ & - \alpha \int_{\Gamma_{\xi 1}} (\dot{u}_i - \dot{\bar{u}}_i) v_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Considerando a aplicação do tensor elastoplástico tangente, tem-se o resultado

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{\xi 1}} \delta_{ui} C_{ijkl}^p \dot{\epsilon}_{kl} n_j v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{\xi 2}} \dot{\bar{p}}_i v_i d\Gamma - \int_{\Omega_{\xi}} C_{ijkl}^p \dot{\epsilon}_{kl} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega_{\xi}} \dot{b}_i v_i d\Omega - \\ & - \alpha \int_{\Gamma_{\xi 1}} \delta_{ui} (\dot{u}_i - \dot{\bar{u}}_i) v_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

É pertinente relembrar que, para problemas de plasticidade clássica, as derivadas em relação ao tempo representam tão somente uma modelagem matemática dos incrementos de carga, sendo o carácter transiente reservado apenas para os problemas viscoplásticos. Colocando a equação (4.43) na forma incremental, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{\xi 1}} \mathbf{V} \delta_{\mathbf{u}} \mathbf{N} \mathbf{D}^p \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\xi 2}} \mathbf{V} \Delta \bar{\mathbf{p}} d\Gamma - \int_{\Omega_{\xi}} \mathbf{V}_B \mathbf{D}^p \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega_{\xi}} \mathbf{V} \Delta \mathbf{b} d\Omega - \\ & - \alpha \int_{\Gamma_{\xi 1}} \mathbf{V} \delta_{\mathbf{u}} (\Delta \mathbf{u} - \Delta \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde  $\mathbf{D}^p$  é a versão plástica do tensor  $\mathbf{D}$ , obtido em função do tensor plástico  $\mathbf{C}^p$ , conforme será visto posteriormente.

Com a substituição da formulação do MQM, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{nx} \left[ - \int_{\Gamma_{\xi 1}} \mathbf{V} \delta_{\mathbf{u}} \mathbf{N} \mathbf{D}^p \mathbf{B} \Phi_i d\Gamma + \int_{\Omega_{\xi}} \mathbf{V}_B \mathbf{D}^p \mathbf{B} \Phi_i d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{\xi 1}} \mathbf{V} \delta_{\mathbf{u}} \Phi_i d\Gamma \right] \Delta \mathbf{U}_i = \\ = \int_{\Gamma_{\xi 2}} \mathbf{V} \Delta \bar{\mathbf{p}} d\Gamma + \int_{\Omega_{\xi}} \mathbf{V} \Delta \mathbf{b} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{\xi 1}} \mathbf{V} \delta_{\mathbf{u}} \Delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \phi_i(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \phi_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

e  $\mathbf{U}_i$  representa os deslocamentos dos pontos da nuvem a serem utilizados na aproximação do MQM. Na equação (4.40), os termos do primeiro membro contribuem para a geração da matriz global tangente  $\mathbf{K}_t$  e o segundo membro contribui para a geração do vetor independente das forças externas  $\mathbf{F}$ , produzindo a seguinte equação geral com a aplicação da formulação integral em todos os pontos da nuvem disposta ao longo do domínio e contorno:

$$\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{F} \quad (4.51)$$

Seguindo a abordagem apresentada por LUBLINER [46] e BATHE [52] para o MEF, as formulações apresentadas até aqui podem ser interpretadas como um equilíbrio de forças externas  $\mathbf{F}_E$ , formadas pelas integrais envolvendo as condições de contorno naturais e forças de massa, e forças internas  $\mathbf{F}_I$ , representadas pelas integrais que envolvem tensões e deformações. Para a formulação no regime plástico, tem-se:

$$\dot{\mathbf{F}}_I = \dot{\mathbf{F}}_E \quad (4.52)$$

Aplicando as aproximações via *meshless* e realizando as integrais numéricas na formulação em função do campo de deslocamentos, o seguinte resultado é obtido:

$$\mathbf{K}_t \dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{F}}_E \quad (4.53)$$

A definição da adoção de  $\mathbf{C}$  ou  $\mathbf{C}^p$  na formulação depende do regime ao qual a região do corpo está submetida, ou seja, depende essencialmente do parâmetro de consistência  $\dot{\lambda}$ , sendo  $\dot{\lambda} = 0$  para o regime elástico, onde é usado  $\mathbf{C}$  e a matriz global é constante e simplesmente conhecida como  $\mathbf{K}$ , e  $\dot{\lambda} > 0$  para o regime plástico, onde é utilizado  $\mathbf{C}^p$  e a matriz tangente  $\mathbf{K}_t$  varia com as grandezas em estudo, o que acusa a não linearidade do problema.

Evidentemente, quando o processo de carregamento se desenvolve, algumas regiões com tensões mais concentradas entram no regime plástico, enquanto outras permanecem no regime elástico. A transição do regime elástico para o plástico afeta a forma como as tensões se distribuem no corpo nas regiões plastificadas, o que gera uma redistribuição de tensões que afeta também as regiões sob o regime elástico. O processo para a definição das regiões plastificadas em cada incremento de carga é iterativo, sendo necessária uma definição inicial destas regiões seguida de adaptações para o mapeamento final das regiões plastificadas. Supondo inicialmente que não existe plastificação em nenhum ponto, tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}^{(1)} &= \mathbf{K}_t^{(0)-1} \dot{\mathbf{F}}_E \\ \mathbf{K}_t^{(0)} &= \mathbf{K}\end{aligned}\tag{4.54}$$

Com as taxas dos deslocamentos calculadas, é possível calcular as taxas de deformações. As taxas de deformações possibilitam, através das equações (3.100) e (3.116), por exemplo, verificar se o parâmetro de consistência  $\dot{\lambda}$  é nulo ou positivo, sendo possível verificar se as definições iniciais da existência de plastificação estão corretas. Caso contrário, calcula-se uma nova matriz global tangente  $\mathbf{K}_t^{(1)}$  com a nova configuração de plastificação e então é determinado um novo campo de taxas dos deslocamentos:

$$\dot{\mathbf{U}}^{(2)} = \mathbf{K}_t^{(1)-1} \dot{\mathbf{F}}_E\tag{4.55}$$

O processo é então repetido até a convergência, o que, segundo LUBLINER [46], não costuma requerer muitas iterações. Uma vez atualizada a matriz global tangente, o objetivo é obter o comportamento do sistema para um incremento de carga  $\Delta \mathbf{F}_E$ , através da seguinte estimativa inicial:

$$\Delta \mathbf{F}_t^{(0)} = \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{U}^{(0)} = \Delta \mathbf{F}_E \Rightarrow \Delta \mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{K}_t^{-1} \Delta \mathbf{F}_E\tag{4.56}$$

Com o cálculo de  $\Delta \mathbf{U}^{(0)}$ , as deformações são calculadas diretamente através das equações geométricas (2.4). Através dos Algoritmos de Retorno Mapeado, que serão apresentados a seguir, são calculados os incrementos das variáveis internas e tensões, o que vai gerar novo incremento de forças internas  $\Delta \mathbf{F}_I^{(1)}$ . A princípio, este incremento de forças internas não se igualará às forças externas  $\Delta \mathbf{F}_E$ , gerando assim uma força residual  $\Delta \mathbf{F}_R^{(1)} = \Delta \mathbf{F}_I^{(1)} - \Delta \mathbf{F}_E$  que deverá ser adicionada a  $\Delta \mathbf{F}_E$  na iteração subsequente. Desta forma, a iteração seguinte possui o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}_I^{(1)} &= \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{U}^{(1)} = \Delta \mathbf{F}_E + \Delta \mathbf{F}_R^{(1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta \mathbf{U}^{(1)} &= \Delta \mathbf{U}^{(0)} + \mathbf{K}_t^{-1} \Delta \mathbf{F}_R^{(1)} \end{aligned} \quad (4.57)$$

As forças residuais podem ser calculadas como

$$\Delta \mathbf{F}_R = - \int_{\Omega_\xi} \mathbf{V}_B \Delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_{\xi 1}} \mathbf{V} \delta_u \mathbf{N} \Delta \boldsymbol{\sigma} d\Gamma \quad (4.58)$$

onde

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^T = (\Delta \sigma_{11} \quad \Delta \sigma_{22} \quad \Delta \sigma_{12}) \quad (4.59)$$

representa o vetor de tensões da correção plástica, aproximada ao longo do domínio e contorno através da aplicação direta da aproximação via MQM nas correções plásticas dos pontos da nuvem.

O processo é então repetido até que haja convergência da variação do campo de deslocamentos, ou seja, até que a força residual se anule. Para o processo de incremento de forças externas, existem diversas estratégias para o processo de atualização da matriz global tangente, dentre as quais podem ser destacadas [46]:

- O Método da Matriz Global Tangente (ou *Tangent-Stiffness Method* para o MEF), equivalente à metodologia de Newton-Raphson, segue metodologia apresentada anteriormente, com a atualização da matriz global tangente a cada iteração, o que acelera a convergência, mas gera maior esforço computacional;
- O Método da Matriz Global Tangente Modificado (ou *Modified Tangent-Stiffness Method* para o MEF) atualiza a matriz global tangente apenas a cada incremento de carga;

- O Método da Matriz Global Tangente Inicial (ou *Initial-Stiffness Method* para o MEF) utiliza a matriz global elástica  $\mathbf{K}$  (usando apenas o tensor  $\mathbf{C}$ ) como matriz global tangente em todos os passos, o que resulta em uma convergência mais lenta, apesar da maior simplicidade.

### 4.3.1 – Integração Numérica do MLPG-1

A variante MLPG-1 exige integração numérica do domínio local  $\Omega_\xi$ , que pode ser realizada utilizando o tradicional Método da Quadratura Gaussiana bidimensional. A rigor, tendo em vista o caráter móvel da aproximação via MQM, é necessário calcular o suporte, as funções de forma e suas derivadas para cada ponto de Gauss. Adicionando o fato de a complexidade das funções de forma exigirem um número razoável de pontos de Gauss para garantir resultados numéricos satisfatórios, pode-se suspeitar que o processo de integração numérica do MLPG-1 apresenta custo computacional superior ao de métodos tradicionais como o MEF, mesmo para problemas elásticos. Logicamente, a adoção de técnicas como as derivadas difusas pode mitigar estes efeitos.

Como os suportes adotados neste trabalho são circulares, torna-se conveniente a integração em coordenadas polares, como apresentado a seguir:

$$\int_{\Omega_\xi} F(x_1, x_2) d\Omega = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{R_\xi} F(R, \theta) R dR d\theta = \frac{R_\xi (\theta_2 - \theta_1)}{4} \sum_{i=1}^{npg} \sum_{j=1}^{npg} F(R_i^g, \theta_j^g) R_i^g \omega_i^g \omega_j^g \quad (4.60)$$

onde  $npg$  é o número de pontos de Gauss,  $\omega_i^g$  são os pesos de Gauss e os pontos de Gauss  $\xi_i^g$  são distribuídos ao longo das coordenadas  $R$  e  $\theta$  como

$$\begin{aligned} R_i^g &= \frac{R_\xi}{2} (1 + \xi_i^g) \\ \theta_j^g &= \theta_1 + \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} (1 + \xi_j^g) \end{aligned} \quad (4.61)$$

A rotina do MLPG-1 proposta nesta pesquisa prevê somente círculos completos ou setores circulares como domínios locais (figura 4.5a,b,d,e), sendo necessária a redução do valor de  $R_\xi$  pré-definido pela equação (4.41) sempre que ocorrerem casos como o da figura 4.5c, evitando assim a integração de domínios envolvendo polígonos.



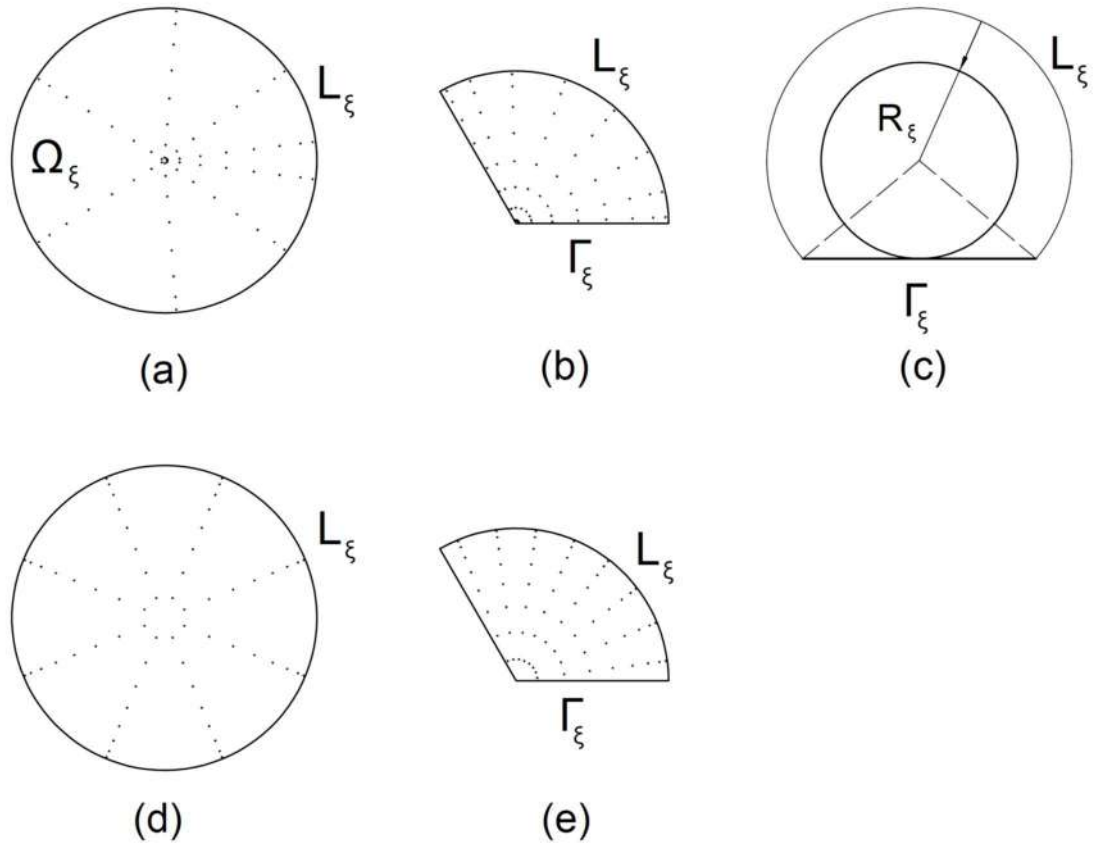


Figura 4.5 – Distribuição de pontos de Gauss para a integração numérica do MLPG-1 - Integração clássica: (a) de domínio circular; (b) de setor circular; (c) Redução de  $R_\xi$  para evitar domínios de integração poligonais; (d) Integração em anéis: (d) de domínio circular; (e) de setor circular

Ao transportar os pontos gerados para o plano cartesiano, é possível observar imperfeições na distribuição dos pontos ao longo do domínio local, efeito colateral da adoção de coordenadas polares para a distribuição dos pontos de Gauss, como pode ser visto na figura 4.5. Para solucionar este problema, pode-se adotar a formulação proposta por PIERCE [99], onde a integração é executada através da divisão do domínio circular em anéis, permitindo a adoção de um espaçamento angular constante entre as fileiras radiais de pontos de integração. Deste modo, o processo de integração se transforma da seguinte forma:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{R_\xi} F(R, \theta) R dR d\theta = \frac{R_\xi^2 (\theta_2 - \theta_1)}{4n_\theta} \sum_{i=1}^{np_g} \sum_{j=1}^{n_\theta} F(R_i^g, \theta_j^g) \omega_i^g \quad (4.62a)$$

$$\begin{aligned} (R_i^g)^2 &= \frac{R_\xi^2}{2} (1 + \xi_i^g) \\ \theta_j^g &= \theta_1 + \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2n_\theta} \left( j - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.62b)$$

onde  $n_\theta$  é o número de divisões angulares do domínio de integração.

Tendo em vista a simplicidade aliada aos excelentes resultados obtidos com esta técnica alternativa, principalmente em relação à quadratura tradicional, este trabalho se limitará à aplicação das duas técnicas detalhadas neste subitem. Outras técnicas de integração alternativas podem ser encontradas na literatura, com especial referência à Quadratura Gaussiana generalizada (MA et al. [100]). Um estudo comparativo mais aprofundado sobre diversas técnicas de integração adequadas para o MLPG-1 pode ser encontrado em FONTES JR [88] e MAZZIA et al. [103].

#### 4.4 – Algoritmos de Retorno Mapeado

No item anterior, foi ilustrado um processo iterativo para problemas plásticos baseado em incrementos sucessivos do campo de deslocamentos. Para cada incremento aplicado, é necessário identificar se o ponto material do corpo se encontra no regime elástico, plástico ou na transição entre os dois regimes, o que indicará efeitos diferentes para o incremento de deslocamentos.

Para a construção desta formulação, são tomadas como ponto de partida as estratégias comumente adotadas para o MEF, onde são utilizados procedimentos numéricos incrementais que envolvem esquemas de predição-correção. Basicamente, estes métodos consideram que o incremento de deslocamentos resultará em um incremento de tensão no regime elástico, constituindo assim a predição elástica. Caso os testes da função de escoamento indiquem que o material está de fato no regime elástico, o efeito do incremento de deslocamentos está corretamente computado e um novo incremento poderá ser aplicado. Caso contrário, deverá ser aplicada uma correção plástica para a consideração dos efeitos de plastificação.

Serão estudadas inicialmente as metodologias pertencentes à família de Algoritmos de Retorno Mapeado (*Return-Mapping Algorithm*), que são uma generalização do Algoritmo de Retorno Radial (*Radial-Return Algorithm*), introduzido

por MAENCHEN e SACKS [58] e WILKINS [59], que envolve um esquema de predição elástica seguida de uma correção plástica, podendo ocorrer através de incrementos de deformação ou tensão (*strain control* e *stress control*, respectivamente - LUBLINER [46]). Serão estudadas duas variações destes algoritmos [46] [47] [65]:

- Algoritmo do Plano Secante – APS (Cutting-Plane Algorithm – CPA);
- Algoritmo da Projeção do Ponto Mais Próximo - APPMP (*Closest-Point Projection Algorithm* - CPPA).

Para a aplicação dos Algoritmos de Retorno Mapeado (ARM), será considerado inicialmente o Método de Euler para a discretização das derivadas temporais, conforme exemplo a seguir aplicado para o tensor de deformações:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{{}_{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} - {}_t \varepsilon_{ij}}{\Delta t} \quad (4.63)$$

É importante salientar que, para o caso de problemas elastoplásticos, os instantes de tempo  $t$  e  $t + \Delta t$  podem ser interpretados como diferentes passos no esquema incremental de evolução da plastificação, não tendo relação concreta com uma variação temporal propriamente dita. Considerando conhecidas as grandezas em estudo para um determinado passo  $t$  ( ${}_t \sigma_{ij}, {}_t \varepsilon_{ij}, {}_t \kappa^I, {}_t \kappa_{ij}^C$ ), aplica-se um incremento de carga  $\Delta F_i$  e obtém-se um novo incremento do campo de deslocamentos e deformações ( $\Delta u_i, \Delta \varepsilon_{ij}$ ) através da formulação incremental discutida anteriormente, podendo esta ser no regime elástico ou plástico.

A primeira etapa do processo é admitir inicialmente que este incremento de deformação é elástico, o que caracteriza o seguinte problema (LUBLINER [46]), chamado de predição elástica:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}), \Delta \varepsilon_{ij}^p = 0, \Delta \kappa^I = 0, \Delta \kappa_{ij}^C = 0 \quad (4.64)$$

Consequentemente, as tensões e as variáveis de endurecimento podem ser atualizadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
{}_{t+\Delta t}^{(1)}\sigma_{ij} &= {}_t\sigma_{ij} + C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} \\
{}_{t+\Delta t}^{(1)}\varepsilon_{ij}^p &= {}_t\varepsilon_{ij}^p \\
{}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa^I &= {}_t\kappa^I \\
{}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa_{ij}^C &= {}_t\kappa_{ij}^C
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Caso seja verificado que  $F\left({}_{t+\Delta t}^{(1)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa^I, {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa_{ij}^C\right) < 0$ , conclui-se que o incremento foi realmente elástico e o processo pode prosseguir com um novo incremento  $(\Delta u_i, \Delta\varepsilon_{ij})$ . Caso contrário, será necessária a aplicação de uma correção plástica, que pode ser entendida através do seguinte Problema de Valor Inicial (PVI) com restrição [46]:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}\sigma_{ij}(\lambda) &= -C_{ijkl}\hat{g}_{kl}\left(\sigma_{ij}(\lambda), \kappa^I(\lambda), \kappa_{ij}^C(\lambda)\right) \\
\frac{d}{d\lambda}\kappa^I(\lambda) &= \hat{g}^I\left(\sigma_{ij}(\lambda), \kappa^I(\lambda), \kappa_{ij}^C(\lambda)\right) \\
\frac{d}{d\lambda}\kappa_{ij}^C(\lambda) &= \hat{g}_{ij}^C\left(\sigma_{ij}(\lambda), \kappa^I(\lambda), \kappa_{ij}^C(\lambda)\right) \\
\sigma_{ij}(\lambda=0) &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\sigma_{ij}; \kappa^I(\lambda=0) = {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa^I; \kappa_{ij}^C(\lambda=0) = {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa_{ij}^C \\
F\left(\sigma_{ij}(\lambda), \kappa^I(\lambda), \kappa_{ij}^C(\lambda)\right) &= 0
\end{aligned} \tag{4.66}$$

A partir deste momento, as abordagens do APS e APPMP diferem. Para o Algoritmo do Plano Secante, as variáveis internas (incluindo as deformações plásticas) de uma iteração são calculadas em função das variáveis obtidas na iteração anterior, caracterizando um esquema explícito. Consequentemente, a correção plástica é aplicada através do seguinte processo incremental:

$$\begin{aligned}
{}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij} &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\sigma_{ij} - C_{ijkl}\left({}_{t+\Delta t}^{(2)}\varepsilon_{kl}^p - {}_{t+\Delta t}^{(1)}\varepsilon_{kl}^p\right) \\
{}_{t+\Delta t}^{(2)}\varepsilon_{ij}^p &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\varepsilon_{ij}^p + {}_{t+\Delta t}^{(1)}\Delta\lambda\left[\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}}\left({}_{t+\Delta t}^{(1)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa^I, {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa_{ij}^C\right)\right] \\
{}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa^I &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa^I + {}_{t+\Delta t}^{(1)}\Delta\lambda\left[\hat{g}^I\left({}_{t+\Delta t}^{(1)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa^I, {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa_{ij}^C\right)\right] \\
{}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa_{ij}^C &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa_{ij}^C + {}_{t+\Delta t}^{(1)}\Delta\lambda\left[\hat{g}_{ij}^C\left({}_{t+\Delta t}^{(1)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa^I, {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa_{ij}^C\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.67}$$

O cálculo de  ${}_{t+\Delta t}^{(1)}\Delta\lambda$  pode ser realizado através da expansão de F em Série de Taylor até os termos de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
{}_{t+\Delta t}^{(2)}F &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}F + \frac{{}^{(1)}\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij} - {}_{t+\Delta t}^{(1)}\sigma_{ij} \right) + \frac{{}^{(1)}\partial F}{\partial \kappa^I} \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa^I - {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa^I \right) + \\
&+ \frac{{}^{(1)}\partial F}{\partial \kappa_{ij}^C} \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa_{ij}^C - {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa_{ij}^C \right) \\
{}_{t+\Delta t}^{(2)}F &= F \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa^I, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa_{ij}^C \right) \\
{}_{t+\Delta t}^{(1)}F &= F \left( {}_{t+\Delta t}^{(1)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa^I, {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa_{ij}^C \right)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Substituindo a formulação das equações (4.67) e impondo  ${}_{t+\Delta t}^{(2)}F = 0$ , tem-se:

$${}_{t+\Delta t}^{(1)}\Delta\lambda = \frac{{}_{t+\Delta t}^{(1)}F}{\frac{{}^{(1)}\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{{}^{(1)}\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{{}^{(1)}\partial F}{\partial \kappa^I} {}_{t+\Delta t}^{(1)}\hat{g}^I - \frac{{}^{(1)}\partial F}{\partial \kappa_{ij}^C} {}_{t+\Delta t}^{(1)}\hat{g}_{ij}^C} \tag{4.69}$$

Com as grandezas calculadas na iteração (2), pode-se verificar se  ${}_{t+\Delta t}^{(2)}F$  realmente é suficientemente próximo de zero (conforme tolerância adotada), o que geralmente ocorre nos modelos mais simples com incrementos suficientemente pequenos. Caso contrário, uma nova correção plástica pode ser aplicada. Segundo SIMO e HUGHES [47], este método garante que cada iteração obterá um estado de tensões na superfície de ruptura ou além dela, visto que a convexidade de F implica que

$$\begin{aligned}
{}_{t+\Delta t}^{(2)}F - {}_{t+\Delta t}^{(1)}F - \frac{{}^{(1)}\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij} - {}_{t+\Delta t}^{(1)}\sigma_{ij} \right) - \frac{{}^{(1)}\partial F}{\partial \kappa^I} \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa^I - {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa^I \right) - \\
- \frac{{}^{(1)}\partial F}{\partial \kappa_{ij}^C} \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa_{ij}^C - {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa_{ij}^C \right) \geq 0
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Para o caso particular do critério de Von Mises com regra de fluxo associativa e endurecimento isotrópico, tem-se a seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} &= 3K\tilde{\varepsilon} \\
\dot{S}_{ij} &= 2G(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) \\
F &= \sqrt{3J_2} - (Y + \kappa^I) \\
\dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} S_{ij} \\
\dot{\kappa}^I &= \dot{\lambda} H
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Com a aplicação da equação (4.69), tem-se:

$${}_{t+\Delta t}^{(1)}\Delta\lambda = \frac{{}_{t+\Delta t}^{(1)}F}{3G + H} \quad (4.72)$$

A predição elástica (1) e a correção plástica (2) são indicadas a seguir:

$$\begin{aligned} {}_{t+\Delta t}^{(1)}\Delta\tilde{\sigma}_{ij} &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\tilde{\sigma}_{ij} - {}_t\tilde{\sigma}_{ij} = 3K\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij} \\ {}_{t+\Delta t}^{(1)}\Delta S_{ij} &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}S_{ij} - {}_tS_{ij} = 2G\Delta e_{ij} \\ {}_{t+\Delta t}^{(2)}\Delta S_{ij} &= {}_{t+\Delta t}^{(2)}S_{ij} - {}_{t+\Delta t}^{(1)}S_{ij} = -2G\left({}_{t+\Delta t}^{(2)}e_{ij}^p - {}_{t+\Delta t}^{(1)}e_{ij}^p\right) = -2G {}_{t+\Delta t}^{(1)}\Delta\lambda \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} {}_{t+\Delta t}^{(1)}S_{ij} \quad (4.73) \\ {}_{t+\Delta t}^{(2)}e_{ij}^p &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}e_{ij}^p + {}_{t+\Delta t}^{(1)}\Delta\lambda \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} {}_{t+\Delta t}^{(1)}S_{ij} \\ {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa^I &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa^I + {}_{t+\Delta t}^{(1)}\Delta\lambda H \end{aligned}$$

Considerando que  ${}_{t+\Delta t}^{(2)}S_{ij} - {}_{t+\Delta t}^{(2)}\Delta S_{ij} = {}_{t+\Delta t}^{(1)}S_{ij}$  e tendo em vista os resultados das equações (4.73), observa-se que a correção plástica do estado de tensões ocorre na direção do vetor que representa a tensão final  ${}_{t+\Delta t}^{(2)}S_{ij}$  no plano  $\pi$ , razão pela qual, para o caso do critério de Von Mises e regra de fluxo associativa, o método em questão é conhecido como Algoritmo de Retorno Radial ou *Radial-Return Algorithm*, conforme é ilustrado na figura 4.6. Segundo BATHE [52], a figura 4.6 evidencia os erros numéricos provenientes de desvios do vetor que representa as tensões desviadoras.

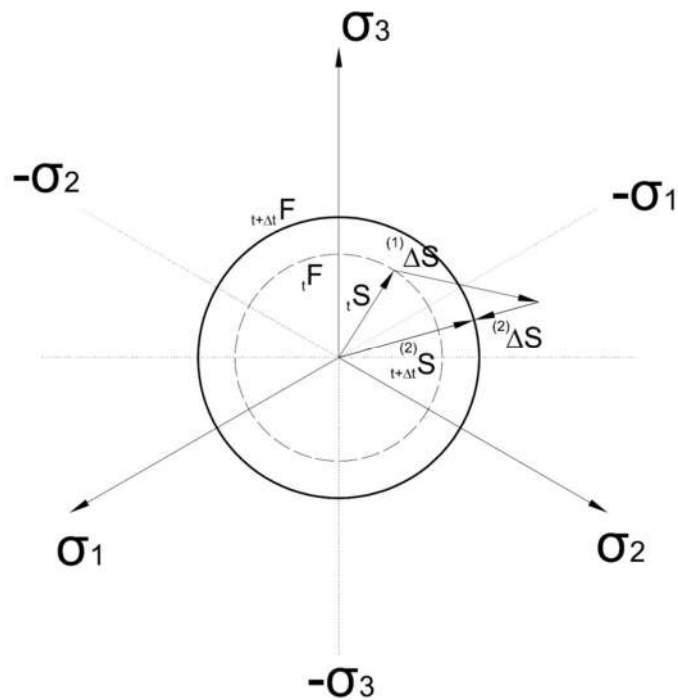


Figura 4.6 – Algoritmo do Retorno Mapeado para o critério de Von Mises, regra de fluxo associativa e endurecimento isotrópico – Algoritmo de Retorno Radial

Com a predição elástica, pode-se entender que o estado de tensões atinge uma superfície de ruptura fictícia, associada a uma variável de endurecimento fictícia, retornando a superfície real após a correção plástica. Considerando a segunda equação do grupo (4.67) para o caso  $Q = F$ , fica claro que a condição de normalidade está imposta nesta superfície fictícia, no passo da iteração anterior à correção plástica. Deste modo, a correção plástica ocorre em uma trajetória perpendicular à superfície fictícia (ver figura 4.7), o que resulta no retorno radial para o caso do critério de Von Mises.

Para a correção plástica do Algoritmo da Projeção do Ponto Mais Próximo, as variáveis internas (incluindo as deformações plásticas) de uma iteração são calculadas em função das variáveis obtidas na própria iteração, caracterizando um esquema implícito. Consequentemente, a correção plástica é aplicada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
{}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij} &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\sigma_{ij} - C_{ijkl} \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\varepsilon_{kl}^p - {}_{t+\Delta t}^{(1)}\varepsilon_{kl}^p \right) \\
{}_{t+\Delta t}^{(2)}\varepsilon_{ij}^p &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\varepsilon_{ij}^p + {}_{t+\Delta t}^{(2)}\Delta\lambda \left[ \hat{g}_{ij} \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa^I, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa_{ij}^C \right) \right] \\
{}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa^I &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa^I + {}_{t+\Delta t}^{(2)}\Delta\lambda \left[ \hat{g}^I \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa^I, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa_{ij}^C \right) \right] \\
{}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa_{ij}^C &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\kappa_{ij}^C + {}_{t+\Delta t}^{(2)}\Delta\lambda \left[ \hat{g}_{ij}^C \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa^I, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa_{ij}^C \right) \right] \\
{}_{t+\Delta t}^{(2)}F &= F \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa^I, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\kappa_{ij}^C \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Diferentemente da formulação explícita do APS, a formulação anterior representa um sistema algébrico não linear para o cálculo das variáveis internas na iteração (2). O cálculo de  ${}_{t+\Delta t}^{(2)}\Delta\lambda$  pode ser realizado através do processo de Newton-Raphson aplicado a cada equação de (4.74). Para tanto, para a iteração (2), será introduzido um novo processo iterativo com sobrescrito (k). Para despoluir a notação, será usada a simplificação  ${}^{(k)}\Delta\sigma_{ij} = {}^{(k)(2)}\Delta\sigma_{ij}$  para todas as variáveis. Adicionalmente, para maiores simplificações, será dado retorno à notação de potencial plástico  $\hat{g}_{ij} = \partial Q / \partial \sigma_{ij}$ . Considerando as tensões e variáveis internas como variáveis para o processo de Newton-Raphson, tem-se então a definição dos seguintes resíduos para o Método de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned}
R_{ij}^\varepsilon &= C_{ijkl}^{-1} \Delta\sigma_{kl} + \Delta\lambda \hat{g}_{ij} \\
R^{\kappa^I} &= -\Delta\kappa^I + \Delta\lambda \hat{g}^I \\
R_{ij}^{\kappa^C} &= -\Delta\kappa_{ij}^C + \Delta\lambda \hat{g}_{ij}^C \\
F &= 0
\end{aligned} \tag{4.75}$$

O desenvolvimento da matriz Jacobiana para este sistema não linear resulta na formação do sistema algébrico linear

$${}^{(k)} \begin{pmatrix} C_{ijkl}^{-1} + \Delta\lambda \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \right) & \Delta\lambda \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \kappa^I} \right) & \Delta\lambda \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \kappa_{mn}^C} \right) & \hat{g}_{ij} \\ \Delta\lambda \left( \frac{\partial \hat{g}^I}{\partial \sigma_{kl}} \right) & -1 + \Delta\lambda \left( \frac{\partial \hat{g}^I}{\partial \kappa^I} \right) & \Delta\lambda \left( \frac{\partial \hat{g}^I}{\partial \kappa_{mn}^C} \right) & \hat{g}^I \\ \Delta\lambda \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}^C}{\partial \sigma_{kl}} \right) & \Delta\lambda \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}^C}{\partial \kappa^I} \right) & -\delta_{im} \delta_{jn} + \Delta\lambda \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}^C}{\partial \kappa_{mn}^C} \right) & \hat{g}_{ij}^C \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\partial F}{\partial \kappa^I} & \frac{\partial F}{\partial \kappa_{mn}^C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\sigma_{kl} \\ \delta\kappa^I \\ \delta\kappa_{mn}^C \\ \delta\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_{ij}^\varepsilon \\ R^{\kappa^I} \\ R_{ij}^{\kappa^C} \\ F \end{pmatrix} \tag{4.76a}$$



cuja notação pode ser simplificada como

$${}^{(k)}\mathbf{M}_\lambda {}^{(k)}\delta\mathbf{x} = -{}^{(k)}\mathbf{R} \quad (4.76b)$$

onde

$${}^{(k)}\delta\mathbf{x} = {}^{(k+1)}\Delta\mathbf{x} - {}^{(k)}\Delta\mathbf{x} \quad (4.77)$$

A atualização das deformações plásticas é feita através da correção plástica:

$${}^{(k+1)}\varepsilon_{ij}^p = {}^{(k)}\varepsilon_{ij}^p + {}^{(k)}\Delta\varepsilon_{ij}^p = {}^{(k)}\varepsilon_{ij}^p - C_{ijkl}^{-1} {}^{(k)}\Delta\sigma_{kl} \quad (4.78)$$

O inconveniente desta formulação é a necessidade da derivada de segunda ordem em relação ao potencial plástico  $Q$  ou  $F$ , conforme apresentado no apêndice A. Em SIMO e HUGHES [47], é demonstrado que a correção plástica descrita nas equações anteriores pode ser interpretada geometricamente como uma trajetória reta que parte da tensão elástica prevista e reencontra a curva de escoamento na direção normal à mesma e no ponto mais próximo da previsão elástica, razão pela qual este método é conhecido como Algoritmo da Projeção do Ponto Mais Próximo, conforme figura 4.7.

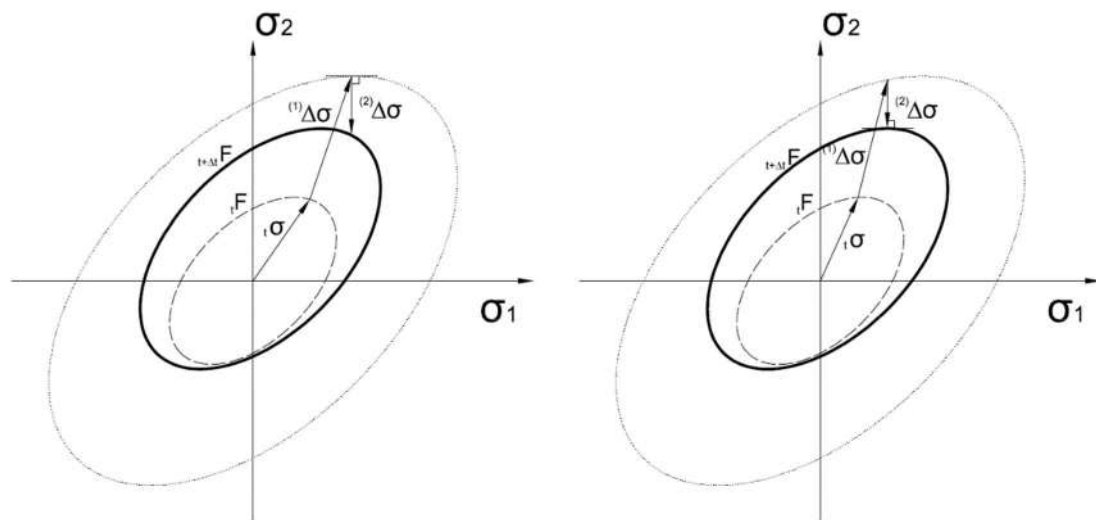


Figura 4.7 – Comparativo entre o APS (esquerda) e APPMP (direita). No APS, a condição de normalidade é aplicada a partir da superfície de escoamento fictícia (após a previsão elástica), enquanto que, no APPMP, a condição de normalidade é imposta à superfície de escoamento final (após a correção plástica)

De fato, conforme salienta HUANG e GRIFFITHS [65], a segunda equação do grupo (4.74) para o caso  $Q = F$  deixa claro que a condição de normalidade está imposta ao final da iteração, após a correção plástica, ou seja, está imposta à superfície de escoamento real final. Deste modo, a correção plástica ocorre em uma trajetória perpendicular à superfície de escoamento real ao final da iteração, o que justifica o nome do algoritmo.

Adicionalmente, segundo [52] [46] [47], para manter a convergência quadrática do método de Newton-Raphson, a formulação plástica precisa adotar um tensor plástico algorítmico, que é consistente com o processo incremental utilizado. Neste caso, tem-se:

$$C_{ijkl}^{p(alg)} = \left( \frac{\partial_{t+\Delta t} \sigma_{ij}}{\partial_{t+\Delta t} \varepsilon_{kl}} \right) \quad (4.79)$$

O tensor plástico algorítmico é gerado através do resultado da aplicação do APPMP, através da inversão da matriz Jacobiana do Método de Newton-Raphson:

$$\mathbf{M}_\lambda \begin{pmatrix} d\sigma_{kl} \\ d\kappa^I \\ d\kappa_{mn}^C \\ d(\Delta\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\varepsilon_{ij} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} d\sigma_{kl} \\ d\kappa^I \\ d\kappa_{mn}^C \\ d(\Delta\lambda) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_\lambda^{-1} \begin{pmatrix} d\varepsilon_{ij} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{p(alg)} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4.80)$$

Logicamente, conforme será ilustrado no próximo capítulo, a formulação explícita do APS exige menor esforço computacional por iteração quando comparada à formulação implícita do APPMP, com a contrapartida da necessidade de um maior número de iterações para garantir a convergência da correção plástica. Apesar da aparente superioridade do APPMP em relação à acurácia da correção plástica, a escolha do algoritmo mais eficiente para as iterações plásticas é consideravelmente menos óbvia.

#### 4.4.1 – Considerações sobre os Algoritmos de Incrementos de Carga

A combinação do Método da Matriz Global Tangente Inicial, usando o tensor  $\mathbf{C}$  elástico para qualquer incremento de carga, com o APS constitui o algoritmo mais simples que esta pesquisa apresenta para as iterações plásticas e, conforme será visto no próximo capítulo, pode apresentar resultados satisfatórios, embora seja necessária uma grande quantidade de iterações plásticas e um incremento de carga suficientemente pequeno.

Considerando não haver a necessidade de atualização da matriz global, a inversa da mesma pode ser armazenada, o que garante esforço computacional mínimo para cada iteração.

A adoção do APPMP em conjunto com o tensor plástico algorítmico e o critério de atualização da matriz global plástica em cada iteração plástica e incremento de carga (Método da Matriz Global Tangente) se caracteriza pelo Método de Newton-Raphson verdadeiro e constitui o algoritmo mais completo apresentado por esta pesquisa. Apesar da promessa de maior acurácia e de menor número de iterações necessárias para a convergência, se não forem tomados os devidos cuidados na definição dos valores da iteração inicial, esta metodologia pode apresentar problemas para o caso de descarregamento, onde o retorno ao comportamento elástico é esperado (ver figura 4.8d), para o caso de variações bruscas de carregamentos ou para históricos de carregamentos complexos que podem gerar regiões que oscilam entre os regimes elástico e plástico ao longo dos incrementos de carga. Em alguns casos, estes problemas de convergência e oscilações de regimes elástico e plástico podem ocorrer até mesmo durante iterações em históricos de carregamento simples.

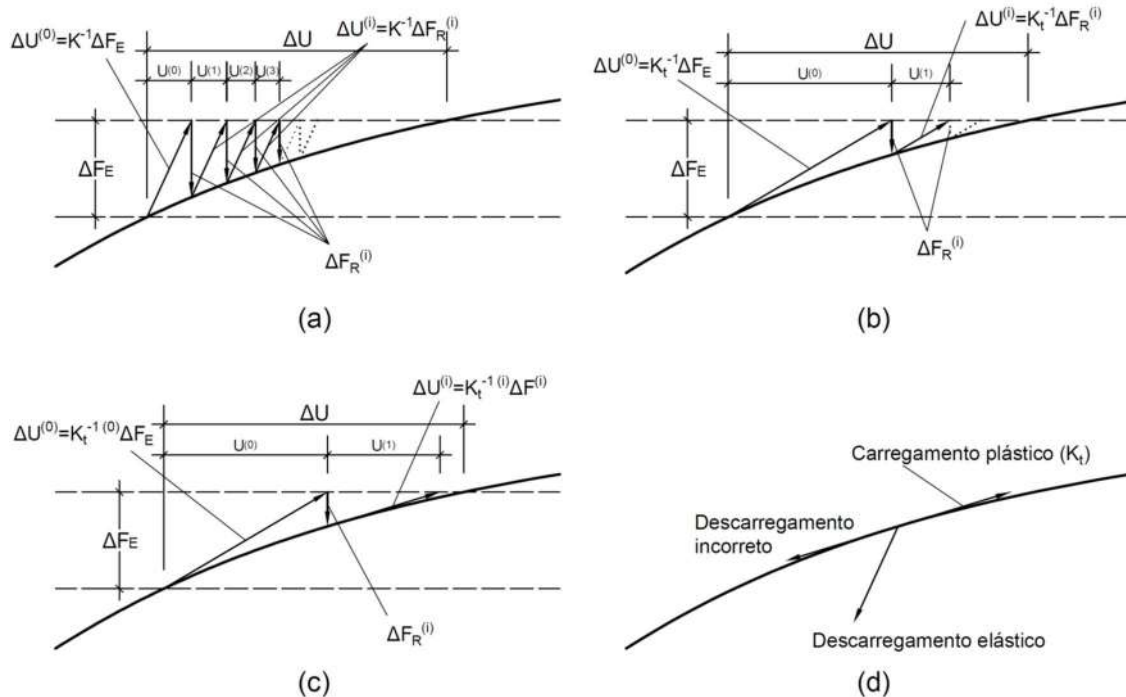


Figura 4.8 – Algoritmo de incrementos de carga: (a) Método da Matriz Global Tangente Inicial ( $\mathbf{K}$  elástica); (b) Método da Matriz Global Tangente Modificado; (c) Método da Matriz Global Tangente; (d) Obtenção de  $\mathbf{K}_t$  incorretas para o caso de descarregamento elástico

Ademais, conforme salientam HUANG e GRIFFITHS [65] e CRISFIELD [132], o método de Newton-Raphson verdadeiro para a solução de problemas plásticos através do Método dos Elementos Finitos pode apresentar problemas de convergência dependendo dos parâmetros adotados para o método numérico e para os incrementos de carga, exigindo a adoção de algoritmos de *line search* para computar o tensor plástico algorítmico nos pontos de Gauss da integração espacial numérica, o que aumenta ainda mais o custo computacional e não necessariamente garante a convergência.

Pelos motivos descritos acima, alguns autores, tais como [65], defendem a adoção do APS em conjunto com o tensor plástico  $\mathbf{C}^p$  (chamado também de tensor plástico contínuo), uma vez que esta metodologia não exige tratamentos especiais, é suficientemente acurada e possui convergência mais rápida que os algoritmos mais simples (apesar do maior esforço computacional). O algoritmo supracitado poderia ser vantajoso, uma vez que incrementos de carga maiores poderiam ser adotados. No entanto, o mesmo artigo salienta que, para garantir a convergência do referido algoritmo via MEF,

a matriz global tangente precisa ser atualizada a cada incremento de carga e iteração plástica, sendo necessário evitar o Método da Matriz Global Modificado, o que aumenta ainda mais o custo computacional.

#### 4.5 – Algoritmos para Problemas Viscoplasticos

Para o estudo de metodologias para a solução de problemas viscoplasticos, pode-se tomar como ponto de partida os trabalhos de ZIENKIEWICZ e CORMEAU [61] [62]. Conforme item 3.6, a formulação viscoplastica de Perzyna define uma forma explicita para o parâmetro de consistência:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\gamma} \langle \Phi(F) \rangle \quad (4.81)$$

Como o parâmetro de consistência depende da função de escoamento, a adoção de um esquema implícito se torna necessária, conforme formulação a seguir:

$$\begin{aligned} {}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij} &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\sigma_{ij} - C_{ijkl} \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\varepsilon_{kl}^p - {}_{t+\Delta t}^{(1)}\varepsilon_{kl}^p \right) \\ {}_{t+\Delta t}^{(2)}\varepsilon_{ij}^p &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\varepsilon_{ij}^p + {}_{t+\Delta t}^{(2)}\Delta\lambda \left[ \hat{g}_{ij} \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\mathbf{K}^I, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\mathbf{K}_{ij}^C \right) \right] \\ {}_{t+\Delta t}^{(2)}\mathbf{K}^I &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\mathbf{K}^I + {}_{t+\Delta t}^{(2)}\Delta\lambda \left[ \hat{g}^I \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\mathbf{K}^I, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\mathbf{K}_{ij}^C \right) \right] \\ {}_{t+\Delta t}^{(2)}\mathbf{K}_{ij}^C &= {}_{t+\Delta t}^{(1)}\mathbf{K}_{ij}^C + {}_{t+\Delta t}^{(2)}\Delta\lambda \left[ \hat{g}_{ij}^C \left( {}_{t+\Delta t}^{(2)}\sigma_{ij}, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\mathbf{K}^I, {}_{t+\Delta t}^{(2)}\mathbf{K}_{ij}^C \right) \right] \\ {}_{t+\Delta t}^{(2)}\Delta\lambda &= \Delta t \frac{1}{\gamma} \langle \Phi({}_{t+\Delta t}^{(2)}F) \rangle \end{aligned} \quad (4.82)$$

Deste modo, conforme SIMO e HUGHES [47], o APPMP adotado para problemas elastoplasticos pode ser utilizado, substituindo a restrição  $F = 0$  da função de escoamento pela equação (4.81). Neste caso, o estado de tensões viscoplasticas poderá transcender os limites da superfície de escoamento, mesmo com a presença dos fenômenos de endurecimento. Adicionalmente, a formulação garante que eventuais descarregamentos manterão o material no regime viscoplastico quando  $F > 0$ .

O Método de Newton-Raphson pode ser então aplicado, conduzindo ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
R_{ij}^\varepsilon &= C_{ijkl}^{-1} \Delta \sigma_{kl} + \Delta \lambda \hat{g}_{ij} \\
R^{\kappa^I} &= -\Delta \kappa^I + \Delta \lambda \hat{g}^I \\
R_{ij}^{\kappa^C} &= -\Delta \kappa_{ij}^C + \Delta \lambda \hat{g}_{ij}^C \\
R^\lambda &= -\Delta \lambda + \Delta t \frac{1}{\gamma} \langle \Phi(F) \rangle
\end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\begin{pmatrix}
C_{ijkl}^{-1} + \Delta \lambda \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \right) & \Delta \lambda \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \kappa^I} \right) & \Delta \lambda \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \kappa_{mn}^C} \right) & \hat{g}_{ij} \\
\Delta \lambda \left( \frac{\partial \hat{g}^I}{\partial \sigma_{kl}} \right) & -1 + \Delta \lambda \left( \frac{\partial \hat{g}^I}{\partial \kappa^I} \right) & \Delta \lambda \left( \frac{\partial \hat{g}^I}{\partial \kappa_{mn}^C} \right) & \hat{g}^I \\
\Delta \lambda \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}^C}{\partial \sigma_{kl}} \right) & \Delta \lambda \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}^C}{\partial \kappa^I} \right) & -\delta_{im} \delta_{jn} + \Delta \lambda \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}^C}{\partial \kappa_{mn}^C} \right) & \hat{g}_{ij}^C \\
\frac{\Delta t}{\gamma} \frac{\partial \langle \Phi(F) \rangle}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\Delta t}{\gamma} \frac{\partial \langle \Phi(F) \rangle}{\partial \kappa^I} & \frac{\Delta t}{\gamma} \frac{\partial \langle \Phi(F) \rangle}{\partial \kappa_{mn}^C} & -1
\end{pmatrix}^{(k)} \begin{pmatrix} \delta \sigma_{kl} \\ \delta \kappa^I \\ \delta \kappa_{mn}^C \\ \delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_{ij}^\varepsilon \\ R^{\kappa^I} \\ R_{ij}^{\kappa^C} \\ R^\lambda \end{pmatrix}^{(k)} \tag{4.84}$$

O APPMP para problemas viscoplásticos pode ser utilizado em conjunto com os mesmos métodos de atualização da matriz global apresentados para problemas elastoplásticos, usando o mesmo expediente para a produção do tensor plástico algorítmico.

Para a utilização de uma matriz global diferente da elástica, considera-se o problema

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) = C_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \mathbf{g}_{kl}) \\
\mathbf{g}_{ij} &= \frac{1}{\gamma} \langle \Phi(F) \rangle \hat{g}_{ij} \\
\dot{\kappa}^I &= \frac{1}{\gamma} \langle \Phi(F) \rangle \hat{g}^I \\
\dot{\kappa}_{ij}^C &= \frac{1}{\gamma} \langle \Phi(F) \rangle \hat{g}_{ij}^C
\end{aligned} \tag{4.85}$$

que, na forma matricial, pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{K} \dot{\mathbf{U}} - \mathbf{G} = \dot{\mathbf{F}}_E \tag{4.86}$$

Adotando o Método de Euler para as derivadas temporais, tem-se

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta t {}_t g_{ij} \Rightarrow \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} - \Delta t \mathbf{G} = \Delta \mathbf{F}_E \quad (4.87)$$

Expandindo para o Método de Euler Generalizado, tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij}^p &= \Delta t \left[ (1 - \alpha_t) {}_t g_{ij} + (\alpha_t) {}_{t+\Delta t} g_{ij} \right] \\ \Delta \sigma_{ij} &= -C_{ijkl} \Delta t \left[ g_{kl} + \alpha_t \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial \sigma_{mn}} \Delta \sigma_{mn} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial \kappa^I} \Delta \kappa^I + \frac{\partial g_{kl}}{\partial \kappa^C} \Delta \kappa^C \right) \right] \\ \Delta \kappa^I &= \Delta t \left[ g^I + \alpha_t \left( \frac{\partial g^I}{\partial \sigma_{mn}} \Delta \sigma_{mn} + \frac{\partial g^I}{\partial \kappa^I} \Delta \kappa^I + \frac{\partial g^I}{\partial \kappa^C} \Delta \kappa^C \right) \right] \\ \Delta \kappa_{ij}^C &= \Delta t \left[ g_{ij}^C + \alpha_t \left( \frac{\partial g_{ij}^C}{\partial \sigma_{mn}} \Delta \sigma_{mn} + \frac{\partial g_{ij}^C}{\partial \kappa^I} \Delta \kappa^I + \frac{\partial g_{ij}^C}{\partial \kappa^C} \Delta \kappa^C \right) \right] \end{aligned} \quad (4.88)$$

A manipulação algébrica deste sistema resulta no tensor viscoplástico contínuo  $\mathbf{C}^{vp}$ :

$$\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl}^{vp} (\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta t g_{kl}^{vp}) \Rightarrow \mathbf{K}^{vp} \Delta \mathbf{U} - \Delta t \mathbf{G}^{vp} = \Delta \mathbf{F}_E \quad (4.89)$$

## 4.6 – Formulação da Variante MLPG-5

Com o objetivo de ampliar a análise dos diversos Métodos Sem Malha, este trabalho adiciona o estudo da variante MLPG-5 para problemas elastoplásticos e viscoplásticos. Esta variante se caracteriza pela adoção da função de Heaviside como função de ponderação:

$$v(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_\xi \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_\xi \end{cases} \quad (4.90)$$

Na FFSL, observa-se que as derivadas da função de ponderação se anulam no domínio local  $\Omega_\xi$ . Em contrapartida, a integral no contorno interno  $L_\xi$  permanece não nula, resultando na seguinte formulação integral:

$$\int_{\Gamma_{\xi 1}} p_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{\xi 2}} \bar{p}_i d\Gamma + \int_{L_\xi} p_i d\Gamma + \int_{\Omega_\xi} b_i d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{\xi 1}} (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.91)$$

Desta forma, a versão matricial da formulação do MLPG-5 pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{nx} \left[ - \int_{\Gamma_{\xi 1}} \delta_u \mathbf{N} \mathbf{D}^p \mathbf{B} \Phi_i d\Gamma - \int_{L_{\xi}} \mathbf{N} \mathbf{D}^p \mathbf{B} \Phi_i d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{\xi 1}} \delta_u \Phi_i d\Gamma \right] \Delta \mathbf{U}_i = \\
& = \int_{\Gamma_{\xi 2}} \Delta \bar{\mathbf{p}} d\Gamma + \int_{\Omega_{\xi}} \Delta \mathbf{b} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{\xi 1}} \delta_u \Delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.92}$$

A grande vantagem desta variante é a ausência da integral no domínio local para a geração da matriz global, sendo necessárias apenas integrais no contorno local para o caso de ausência de forças de massa.

Para o cálculo das forças residuais oriundas da correção plástica, a expressão (4.58) deve ser adaptada da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{F}_R = \int_{L_{\xi}} \mathbf{N} \Delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_{\xi 1}} \delta_u \mathbf{N} \Delta \boldsymbol{\sigma} d\Gamma \tag{4.93}$$

#### 4.7 – Adaptações para Problemas Planos

A formulação elastoplástica e viscoplástica apresentada até o momento é adequada para problemas tridimensionais generalizados. Nesta seção, serão apresentadas as adaptações necessárias para a modelagem de domínios planos, nas modalidades Estado Plano de Tensões (EPT) e Estado Plano de Deformações (EPD).

Para o regime elástico, a consideração destes estados está contemplada pelo tensor  $\mathbf{D}$  (equações (4.45)), com o desaparecimento da tensão  $\sigma_{33}$  e deformação  $\varepsilon_{33}$  da formulação. Para o regime plástico ou viscoplástico, as tensões e deformações no eixo perpendicular ao plano estudado inicialmente são mantidas na formulação, sendo adicionadas às restrições apresentadas a seguir.

Para problemas elastoplásticos e viscoplásticos, o EPD pode ser definido através da seguinte restrição:

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^e + \varepsilon_{33}^p = 0 \tag{4.94}$$

Naturalmente, esta restrição gera uma tensão não nula na direção normal ao estado plano. Através das equações constitutivas elásticas, obtém-se a seguinte expressão para a tensão transversal:



$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - E\varepsilon_{33}^p \quad (4.95)$$

Derivando a expressão anterior com relação ao tempo e aplicando as regras de fluxo, tem-se:

$$\dot{\sigma}_{33} = \nu(\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22}) - E\dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{33}} \quad (4.96)$$

Para a aplicação da correção plástica, a tensão  $\sigma_{33}$  e a deformação plástica  $\varepsilon_{33}^p$  são mantidas como incógnita dos sistemas (4.74) ou (4.82), com a substituição da equação original relativa à tensão pela restrição da equação acima.

Ainda aplicando a restrição da equação (4.96), seguem abaixo algumas adaptações de expressões necessárias para a correção plástica ou para o cálculo do tensor plástico  $\mathbf{C}^p$ , seguindo o formato apresentado por TELLES [56]:

$$d_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} \rightarrow \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{12} \\ d_{33} \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} \partial Q / \partial \sigma_{11} + \omega_Q \\ \partial Q / \partial \sigma_{22} + \omega_Q \\ \partial Q / \partial \sigma_{12} \\ \partial Q / \partial \sigma_{33} + \omega_Q \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

$$\omega_Q = \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{11}} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{22}} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{33}} \right)$$

Para o EPT, a restrição  $\sigma_{33} = 0$  é aplicada normalmente nas formulações da correção plástica, sendo a deformação plástica  $\varepsilon_{33}^p$  mantida como incógnita. Para as adaptações adicionais, tem-se [56]:

$$d_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} \rightarrow \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{12} \\ d_{33} \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} \partial Q / \partial \sigma_{11} + \omega_Q \\ \partial Q / \partial \sigma_{22} + \omega_Q \\ \partial Q / \partial \sigma_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

$$\omega_Q = \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{11}} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{22}} \right)$$

O tensor  $\mathbf{D}^p$  pode ser calculado em função do tensor plástico  $\mathbf{C}^p$  utilizando o mesmo expediente de adaptação do tensor elástico  $\mathbf{C}$  para  $\mathbf{D}$ , atentando-se para o fato de

que, para estes casos, a deformação transversal adotada é a distorção  $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ . Considerando regras de fluxo associativas e o tensor plástico  $\mathbf{C}^p$  da equação (3.134), tem-se o seguinte resultado para problemas planos:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^p &= \mathbf{D} - \frac{\bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\mathbf{d}}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + H^I + H^C \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}} \\ \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{11}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{22}} & 2 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{12}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{33}} \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{a}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{11}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{22}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{12}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{33}} \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{d}} &= (d_{11} \quad d_{22} \quad d_{12}) \end{aligned} \quad (4.99)$$

Segundo DRUCKER e PRAGER [19], quando os materiais regidos pela Plasticidade Clássica atingem a carga limite responsável pelo colapso, este ocorre num regime de estado de tensões constante. Consequentemente, a taxa de variação das deformações é puramente plástica, ou seja,  $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ . De posse desta conclusão, para o EPD, tem-se  $\dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_{33}^p = 0$  no momento do colapso. Aplicando a regra de fluxo associativa para o critério de Drucker-Prager (equação (3.68)), obtém-se

$$\sigma_{33} = -2 \frac{\mu}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} + \frac{I_1}{3} \quad (4.100)$$

Substituindo o resultado na função de escoamento do critério de Drucker-Prager (equação (3.38)), é possível concluir que, para problemas de EPD, no momento do colapso, o critério de Drucker-Prager pode ser utilizado para simular o critério de Mohr-Coulomb através da seguinte adaptação de parâmetros [19]:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\sqrt{3} \text{tg} \phi}{(9 + 12 \text{tg}^2 \phi)^{1/2}} \\ Y &= \frac{3\sqrt{3}C}{(9 + 12 \text{tg}^2 \phi)^{1/2}} \end{aligned} \quad (4.101)$$

Fazendo  $\phi = 0$ , a conclusão anterior pode ser estendida para a simulação do critério de Tresca através do critério de Von Mises, com  $\mu = 0$  e  $Y = C\sqrt{3}$ .

## 4.8 – Carregamento de Temperatura

Adicionando uma variação uniforme de temperatura ao sistema, as equações constitutivas no regime elástico podem ser escritas como na equação (2.60), repetida aqui:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) - \alpha_{kl}^{\Delta T} \Delta T(\mathbf{x}, t) \right) \quad (4.102)$$

No regime plástico, tem-se:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x}, t) - \alpha_{kl}^{\Delta T} \Delta T(\mathbf{x}, t) \right) \quad (4.103)$$

Considerando a isotropia do material, pode-se definir que

$$\alpha_{ij}^{\Delta T} = \alpha_{\Delta T} \delta_{ij} \quad (4.104)$$

onde  $\alpha_{\Delta T}$  é o coeficiente de dilatação térmica. Consequentemente, tem-se:

$$C_{ijkl} \alpha_{kl}^{\Delta T} \Delta T = 3K \alpha_{\Delta T} \Delta T \delta_{ij} \quad (4.105)$$

Substituindo esta relação na equação (4.40b), obtém-se, além da formulação fraca local tradicional, uma força equivalente ao efeito da variação uniforme de temperatura, a ser somada ao vetor independente do sistema global:

$$F_T = 3K \alpha_{\Delta T} \Delta T \left[ - \int_{\Gamma_{\xi_1}} \delta_{ij} n_j v_i d\Gamma - \int_{L_{\xi}} \delta_{ij} n_j v_i d\Gamma + \int_{\Omega_{\xi}} \delta_{ij} v_{i,j} d\Omega \right] \quad (4.106)$$

A formulação deste subitem é válida para problemas tridimensionais e para o EPD. Para o EPT, é necessário substituir o parâmetro  $K$  por  $\bar{K}$ , conforme equação (2.17).

## 4.9 – Discussões sobre os Parâmetros do MLPG

A família de métodos MLPG via MQM/MQMO exige a definição de diversos parâmetros que, de certa forma, substituem os dados de conectividades que caracterizam as malhas de métodos numéricos tradicionais. Apesar da ausência de necessidade de geração de malha, o ajuste dos parâmetros do MLPG pode impactar a qualidade dos resultados numéricos. Desta forma, uma análise cuidadosa da variação destes parâmetros se faz mandatória.

O primeiro parâmetro a ser analisado é o raio  $R_\xi$  do domínio local de integração, onde é sugerida a definição da equação (4.41), aqui repetida:

$$R_\xi = \lambda_\xi d_1 \quad (4.107)$$

onde  $d_1$  representa a distância do centro  $\xi$  do círculo ao ponto da nuvem mais próximo. Para os problemas numéricos estudados, será adotado um fator de escala  $\lambda_\xi = 1$ , que é suficientemente pequeno para manter o caráter local da formulação fraca e suficientemente grande para garantir a integração total do domínio e do contorno na formação da matriz global e do vetor independente. Para a variante MLPG-5, alguns autores, tais como ATLURI e SHEN [74], defendem a utilização de fatores de escala do domínio de integração inferiores a 1, como será testado para alguns problemas nesta pesquisa.

Ainda mais importante é o ajuste do raio  $R_x$  do suporte do MQM/MQMO, que precisa ser pequeno o suficiente para manter o caráter local do método e grande o suficiente para conter o número mínimo de pontos necessários para garantir o sucesso do ajuste de curva do método. Conforme foi visto no item 4.1.1, a inversibilidade da matriz momento  $\mathbf{A}$  depende do posto da matriz  $\mathbf{P}^T$  e o mal condicionamento de  $\mathbf{A}$  depende da representatividade dos pontos na aproximação do MQM, o que depende da distribuição dos pesos do método.

Para reduzir o esforço computacional geral do MLPG, algumas abordagens simples vêm sendo adotadas para definir o suporte do MQM. O modelo mais básico define um novo fator de escala  $\lambda_x$  nos mesmos moldes da equação anterior:

$$R_x = \lambda_{x1} d_1 \quad (4.108)$$

Na prática, o fator de escala da equação anterior estipula a magnitude do peso atribuída ao ponto mais próximo do ponto base do suporte do MQM.

Uma segunda abordagem, que foi extensivamente testada por FONTES JR [88], consiste em atribuir a magnitude do peso ao  $nmp$ -ésimo ponto mais próximo do ponto base, o que garante a representatividade de pelo menos  $nmp$  pontos dentro dos limites do suporte do MQM, definindo assim o fator de escala alternativo  $\lambda_{xnmp}$  :

$$R_x = \lambda_{x_{nmp}} d_{nmp} \quad (4.109)$$

onde  $d_{nmp}$  representa a maior distância entre o ponto base e os seus  $nmp$  pontos mais próximos.

Outros autores, tais como MIRZAEI et al. [108], preferem a definição do suporte através da atribuição de um fator de escala ao espaçamento nodal  $h$ , definido pela equação (4.22), gerando o seguinte resultado:

$$R_x = \lambda_{xh} \cdot ngp \cdot h \quad (4.110)$$

O trabalho de NIE et al. [133] sugere alguns valores otimizados para o fator de escala  $\lambda_{xh}$  para o MQM com base polinomial até o segundo grau e considerando uma distribuição retangular uniforme para a nuvem de pontos. Esta pesquisa utilizará as faixas de fatores de escala padronizados sugeridos conforme experiências ilustradas pela revisão bibliográfica apresentada.

Finalmente, a necessidade da utilização de um parâmetro de penalidade  $\alpha$  para a imposição das condições de contorno essenciais pode gerar problemas numéricos, visto que valores pequenos deterioram a qualidade dos resultados, ao passo que valores muito grandes geram problemas de mal condicionamento da matriz global do MLPG. Segundo [88], normalmente são adotados parâmetros de penalidade entre  $10^8$  e  $10^{20}$ . Este trabalho adotou  $\alpha = 10^{15}$ , sendo observados casos de mal condicionamento em alguns problemas quando foram adotados valores maiores. A decomposição da matriz global em valores singulares (DVS) permite a verificação da ordem de grandeza dos termos da matriz, viabilizando a adoção de um parâmetro de penalidade adequado para cada problema.

## Capítulo 5 – Exemplos Numéricos

Este capítulo objetiva a apresentação dos resultados da aplicação das metodologias numéricas propostas neste trabalho em alguns problemas clássicos. Apesar da simplicidade e recorrência destes problemas em análises lineares elásticas empregadas em projetos de Engenharia, a adição do comportamento constitutivo elastoplástico e viscoplástico inviabiliza, na maioria dos casos, a obtenção de soluções analíticas. Deste modo, muitas comparações de soluções numéricas via Meshless serão feitas em relação às correspondentes soluções via Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC), onde todos os resultados via MEC são oriundos do trabalho de TELLES [56].

É importante salientar que estas comparações podem atuar apenas como referências, não sendo pertinente a comparação minuciosa de erro entre elas, uma vez que o caráter não linear do modelo físico conduz a resultados numericamente diferentes, embora fisicamente compatíveis. Alterações na metodologia de incremento de carga, atualização da matriz global, correção plástica e variações nas taxas de incremento de carga ou passo no tempo podem gerar resultados numéricos distintos, embora suficientemente próximos para a aferição do comportamento físico do problema.

Observação semelhante pode ser atribuída às soluções analíticas propostas, uma vez que as mesmas só podem ser obtidas através de simplificações não reproduzidas fielmente pelos modelos numéricos. Portanto, apesar da compatibilidade física entre as soluções analíticas e numéricas apresentadas a seguir, não se pode esperar a convergência entre elas. As soluções analíticas das versões simplificadas de alguns problemas estudados neste capítulo são discutidas no apêndice C.

Diante do exposto, as comparações das respostas numéricas via Métodos Sem Malha com as soluções analíticas ou com as soluções produzidas por outros métodos

numéricos servirão apenas para a análise qualitativa dos resultados, avaliando a coerência do comportamento físico da resposta numérica. Adicionalmente, serão acrescentadas comparações entre as variantes MLPG-1 e 5, APS e APPMP, variações no incremento de carga e passo no tempo, entre outros aspectos.

Para a caracterização das modelagens numérica, são introduzidos os seguintes parâmetros:

- NN é o número de pontos da nuvem da aproximação sem malha, incluindo pontos internos e no contorno;
- NX é o número de pontos adotado na formação do suporte do MQM;
- $p_0$  é a carga do limite de escoamento e  $p_U$  é a carga última, responsável pelo colapso estrutural;
- NP é o número de incrementos de carga partindo da carga nula, abrangendo os regimes elástico e plástico, ou seja, o incremento de carga é  $\Delta p = p/NP$ , onde  $p$  é a carga final, que pode não ser atingida se  $p > p_U$ ;
- IP é o índice do incremento de carga, onde  $1 \leq IP \leq \min\{IP_U, NP\}$  e  $IP_U$  é o incremento onde o modelo numérico diverge, indicando o colapso;
- NT é o número de passos no tempo das iterações viscoplásticas;
- NG é o número de pontos de Gauss adotado para a integração numérica.

A alternativa de adoção de incrementos de carga NP a partir da carga nula no regime elástico foi escolhida para manter um caráter geral para o histórico de carregamentos. Para históricos simples, com carregamento gradual crescente, pode-se partir de uma solução elástica inicial com a detecção do ponto com o valor máximo da função de escoamento  $F$ . Através da proporcionalidade da formulação no regime elástico, é então definida a carga  $p_0$  responsável pela plastificação, que corresponde à carga que anula a função  $F$  para o ponto detectado. Deste modo, a iteração seguinte pode partir diretamente de  $p_0$ , já no regime plástico. De qualquer modo, as iterações elásticas possuem custo computacional baixo em comparação às iterações plásticas, sobretudo nas proximidades da carga de colapso.

Para evitar excesso de variação de parâmetros do MQM, será dada preferência à base polinomial quadrática ( $ngp=2$ ) e a spline de quarto grau como função peso, exceto onde indicado de outra forma. Como foram escolhidos fatores de escala padronizados para a definição dos tamanhos do suporte do MQM, os exemplos testados a seguir acusaram variações insignificantes entre o MQM e o MQMO, razão pela qual apenas os resultados via MQM são apresentados.

A distribuição de pontos de Gauss foi igualmente fixada, com  $NG=10 \times 10$  para o MLPG-1 e  $NG=40$  para MLPG-5, sendo adotada a integração anelar, por consistentemente apresentar resultados melhores em comparação à integração tradicional em coordenadas polares. Apesar do fato de os valores de  $NG$  indicados anteriormente serem baseados em experiências de pesquisas anteriores, foi realizado inicialmente um estudo de convergência com variação de  $NG$ , sendo atestado que os valores supracitados são suficientes para garantir a precisão da solução numérica para todos os exemplos que serão apresentados a seguir, sendo registradas variações insignificantes para valores maiores. Além do registro de degradações da solução numérica para valores de  $NG$  inferiores a  $8 \times 8$  para o MLPG-1 e 30 para o MLPG-5.

Para a plotagem das zonas plásticas, será utilizado o software View 3D, desenvolvido na COPPE, para a visualização de resultados de análises numéricas via MEF. Neste caso, para quantificação da plastificação, é definido o coeficiente  $k_F$ , tal que a plastificação ocorre para  $k_F = 1$ :

$$k_F = 1 + \frac{F}{Y} \quad (5.1)$$

## 5.1 – Cilindro Submetido à Pressão Interna

O clássico problema de Estado Plano de Deformações (EPD) caracterizado por um cilindro de paredes espessas submetido à pressão interna é estudado considerando a adição do comportamento elastoplástico clássico. É considerado que o material obedece ao critério de escoamento de Von Mises sem endurecimento. Para a aferição das soluções numéricas apresentadas, será adotada como referência uma solução analítica simplificada, obtida através da adaptação da formulação do critério de escoamento, conforme exposto no apêndice C.



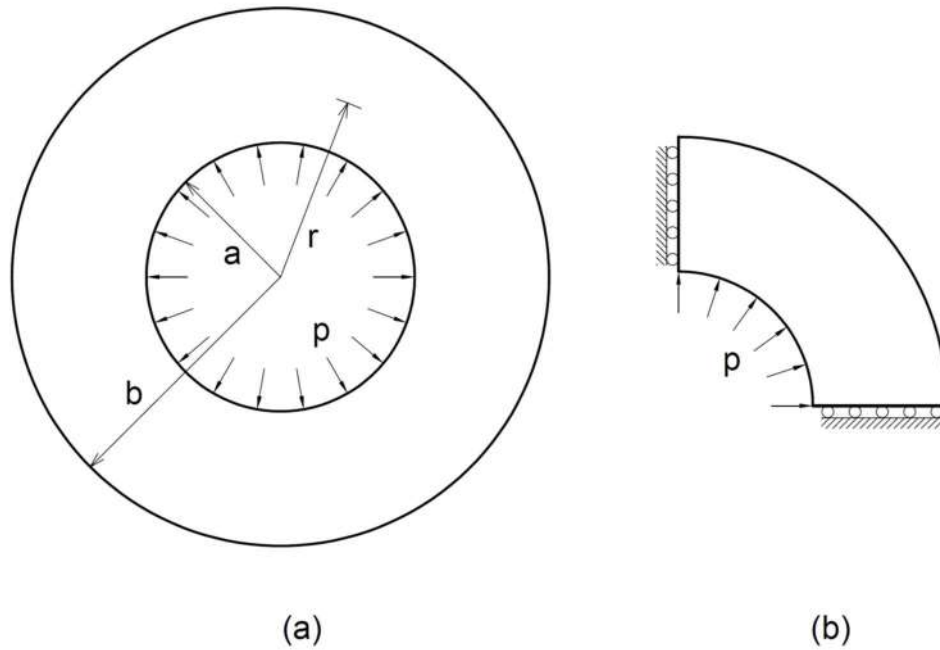


Figura 5.1 – (a) Cilindro submetido à pressão interna; (b) Modelo de cálculo

Foi adotada uma nuvem de pontos com distribuição em coordenadas polares, com 10 divisões na direção radial e 20 na direção transversal, totalizando  $NN=11 \times 21=231$  pontos. Os dados numéricos adotados são apresentados a seguir.

Tabela 5.1 – Cilindro submetido à pressão interna – dados numéricos

Dados geométricos	$a = 100\text{mm}$	$b = 200\text{mm}$	
Parâmetros elásticos	$E = 1200\text{N/mm}^2$	$\nu = 0,3$	
Critério de Von Mises	$Y = 2,4\text{N/mm}^2$	$H^I = H^C = 0$	
Parâmetros do MLPG-1	$\lambda_\xi = 1$	$NG = 10 \times 10$	$\lambda_{xh} = 2,0$
MLPG-1 com derivadas difusas	$\lambda_\xi = 1$	$NG = 10 \times 10$	$\lambda_{xntp} = 2,0$
Parâmetros do MLPG-5	$\lambda_\xi = 1$	$NG = 40$	$\lambda_{xntp} = 2,0$

Da solução analítica do apêndice C, tem-se que o início do escoamento do critério de Tresca adaptado ocorre para  $p/Y=0,433$ , ao passo que  $p/Y=0,4323$  para o início do escoamento do critério de Von Mises. O colapso teórico ocorre para  $p/Y=0,8004$ . Os resultados numéricos a seguir apresentam conformidade com os valores previstos pela solução analítica adaptada.

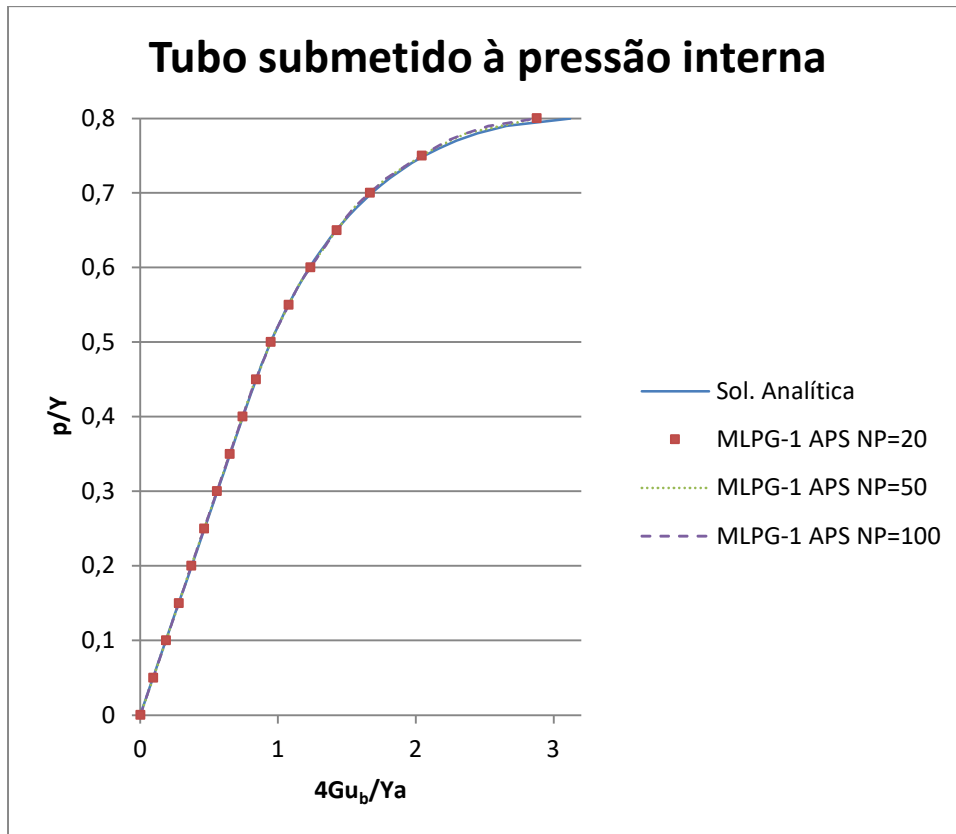


Figura 5.2 – Tubo submetido à pressão interna – Comparativo de incrementos de carga para o APS

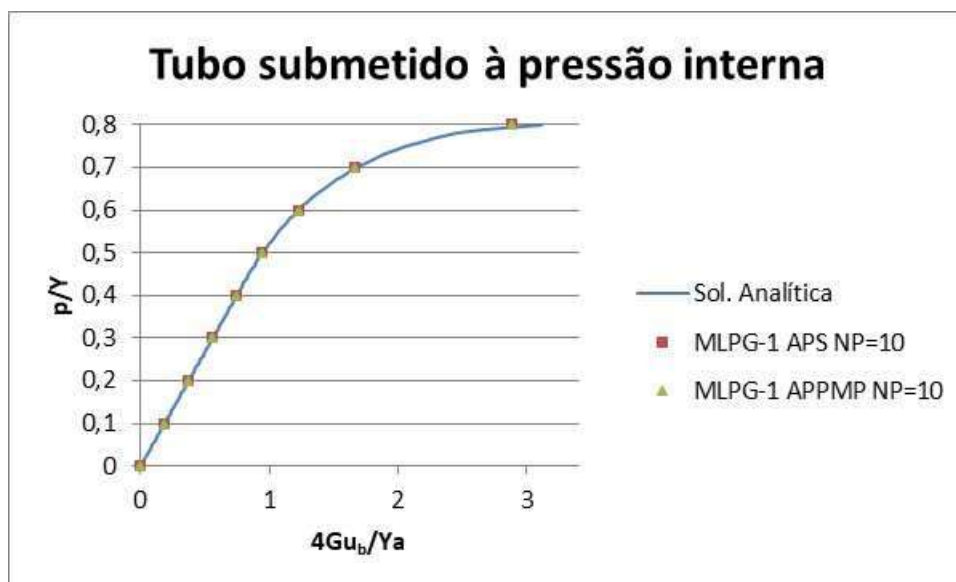


Figura 5.3 - Tubo submetido à pressão interna – Comparativo entre o APS e APPMP

Os resultados dos gráficos das figuras 5.2 e 5.3 mostram que o problema em questão é pouco sensível a variações de incremento de carga, gerando resultados

praticamente coincidentes para NP=20, 50 e 100. Insignificante também foi a diferença entre o APS e o APPMP para este exemplo, como mostram os resultados para NP=10. Para valores maiores de NP, as diferenças entre os algoritmos tornam-se ainda mais insignificantes para este exemplo. Para uma carga final  $p = 2,4\text{N/mm}^2$  e NP=100, a primeira iteração plástica ocorreu em IP=44 e o último incremento de carga convergente ocorreu em IP=80, o que está de acordo com a teoria.

Os erros relativos dos deslocamentos em relação à solução analítica adaptada foram inferiores a 1% até  $p/Y=0,7$ , chegando a 5% para  $p/Y=0,79$  e 8% para  $p/Y=0,8$ . Vale destacar, porém, que os resultados se tornam pouco representativos à medida que a carga se aproxima do colapso assintótico teórico, principalmente considerando que a solução analítica adota um critério de escoamento adaptado, ou seja, apesar de a carga de colapso ser equivalente, os deslocamentos podem apresentar desvios maiores, sobretudo nas proximidades do colapso.

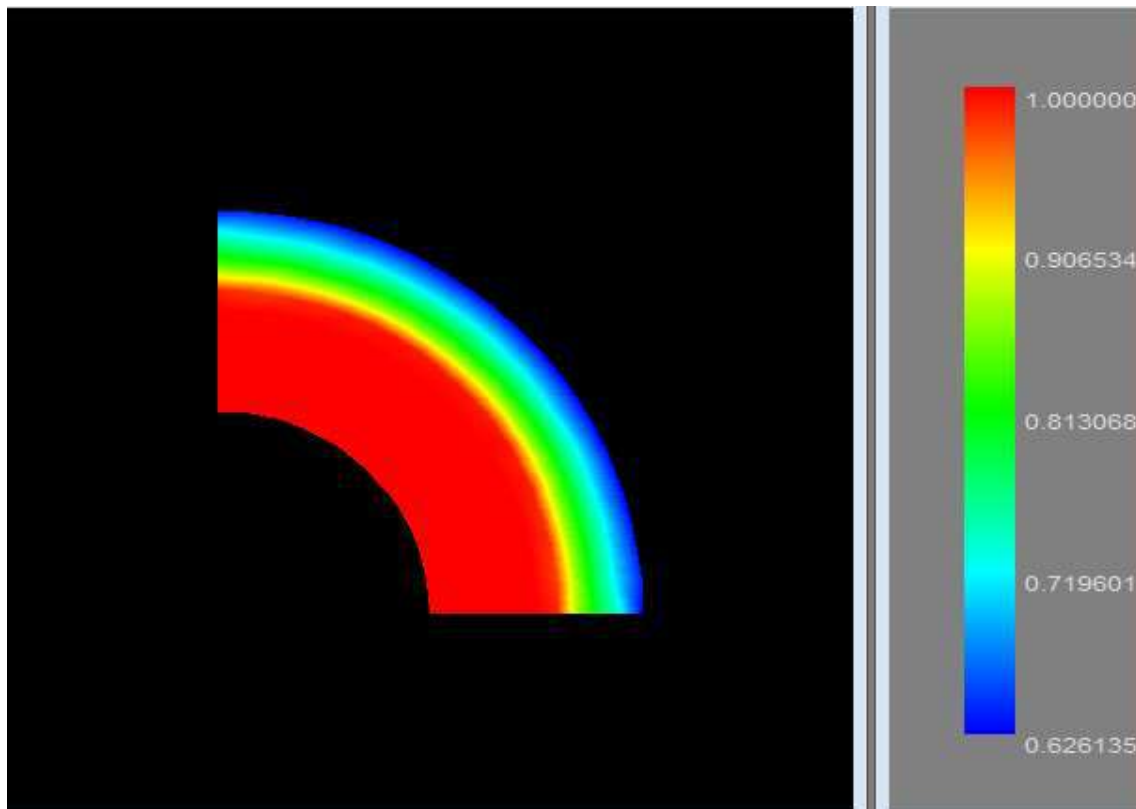


Figura 5.4 – Tubo submetido à pressão interna – Zona plástica – Valores de  $k_F$  para  $p/Y=0,75$  (raio plástico  $r_p \cong 1,6a$ )

O gráfico da figura 5.5 apresenta um comparativo com as formulações via MLPG-5 e o método simplificado do MLPG-1 com derivadas difusas, onde pode ser observada uma leve degradação dos resultados para a formulação com derivadas difusas, sobretudo para os incrementos de carga próximos ao colapso assintótico. Para o presente exemplo, o menor esforço computacional das derivadas difusas compensa a perda de precisão, pois esta degradação não compromete a qualidade dos resultados.

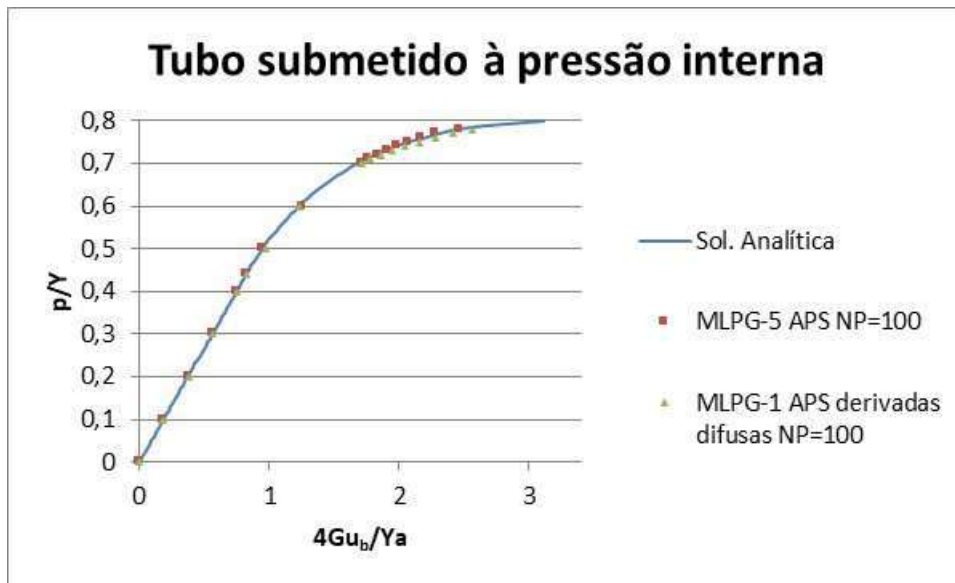


Figura 5.5 – Tubo submetido à pressão interna – Resultados para o MLPG-5 e MLPG-1 com derivadas difusas

Adicionando um endurecimento isotrópico linear com  $H^I = 0,1\text{N/mm}^2$ , observa-se grande compatibilidade com a solução analítica adaptada, conforme pode ser observado no gráfico da figura 5.6, sendo  $Y_0$  a tensão de escoamento inicial igual a  $2,4\text{N/mm}^2$ .

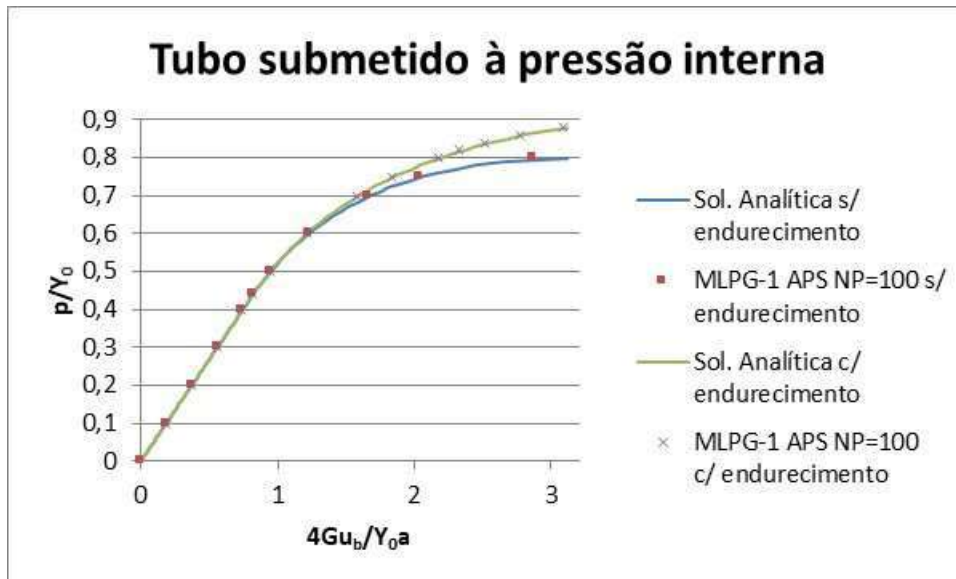


Figura 5.6 – Tubo submetido à pressão interna – Efeito do endurecimento isotrópico linear

Para simular as diferenças entre as formulações de endurecimento, é realizada uma comparação com o modelo de endurecimento cinemático com  $H^C = 0,1\text{N/mm}^2$ , onde o carregamento é realizado até  $p/Y_0 = 0,79$ , com posterior descarregamento e compressão até  $p/Y_0 = -0,42$ . Para o caso sem endurecimento, a plastificação é reiniciada para  $p/Y_0 = -0,08$ , com os correspondentes valores  $-0,21$  e  $-0,08$  respectivamente para os endurecimentos isotrópico e cinemático. Tendo em vista as tensões residuais remanescentes após o completo descarregamento ( $p=0$ ), a simetria entre os limites de escoamento na tração e compressão não se verifica para nenhum dos 3 modelos.

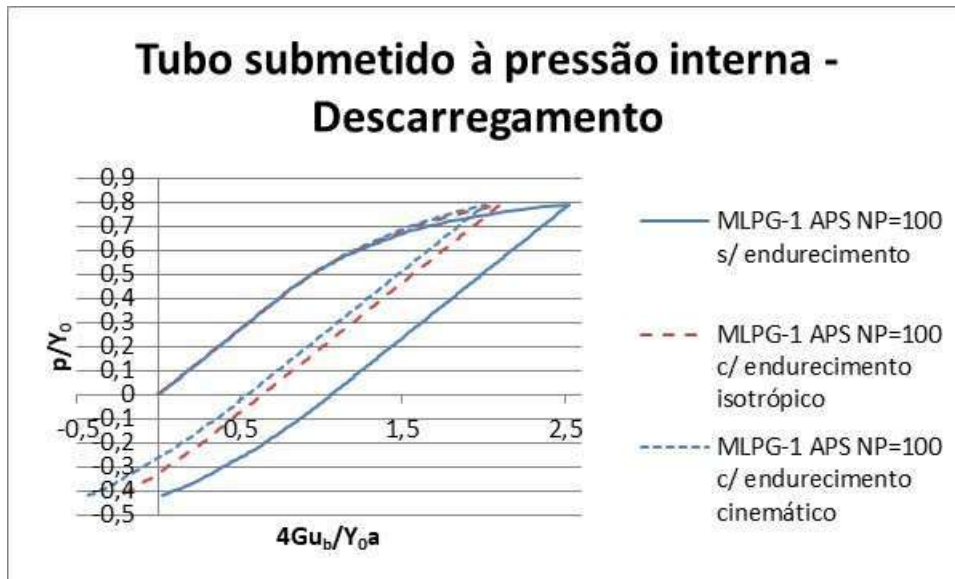


Figura 5.7 – Tubo submetido à pressão interna – Carregamento e descarregamento para modelos sem endurecimento e com endurecimento isotrópico e cinemático

## 5.2 – Chapa Tractionada com Furo Circular

Este problema tradicional de Estado Plano de Tensões (EPT) se caracteriza por uma chapa tracionada com um furo circular em seu centro, onde é prevista pela Teoria da Elasticidade uma concentração de tensões que desencadeará o início do processo de plastificação. É considerado que o material obedece à Plasticidade Clássica, com a adoção do critério de escoamento de Von Mises com endurecimento isotrópico.

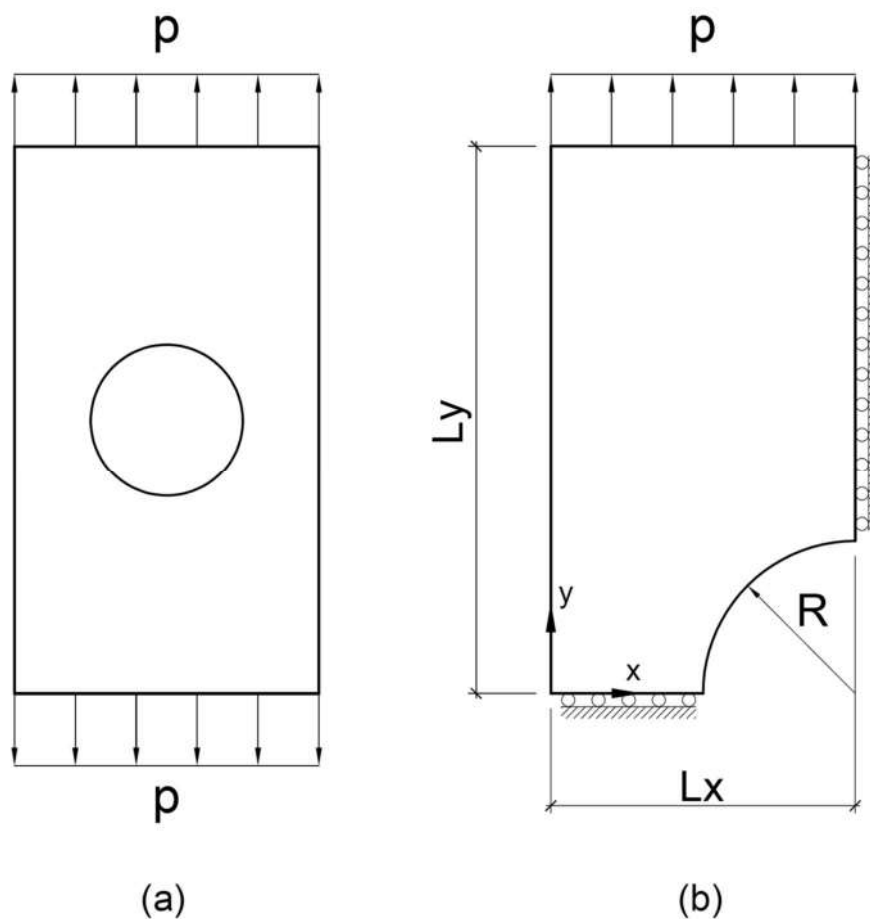


Figura 5.8 – (a) Chapa tracionada com furo circular; (b) Modelo de cálculo

Tabela 5.2 – Chapa tracionada com furo circular – dados numéricos

Dados geométricos	$L_x=10\text{mm}$	$L_y=18\text{mm}$	$R=5\text{mm}$
Parâmetros elásticos	$E = 7000\text{kgf/mm}^2$		$\nu = 0,2$
Critério de Von Mises	$Y_0=24,3\text{kgf/mm}^2$	$H^l=224\text{kgf/mm}^2$	$H^C = 0$
Parâmetros do MLPG-1	$\lambda_\xi = 1$	$NG = 10 \times 10$	$\lambda_{xnlmp} = 2,0$
MLPG-1 com derivadas difusas	$\lambda_\xi = 1$	$NG = 10 \times 10$	$\lambda_{xnlmp} = 1,9$

Para larguras de chapa ( $L_x$ ) suficientemente grandes em relação ao diâmetro do furo circular, a solução analítica elástica prevê um pico de tensão vertical na região do furo igual a  $3p$ . No entanto, esta magnitude não é esperada para as medidas indicadas na tabela 5.2, que, por sua vez, foram definidas nas análises numéricas de diversos trabalhos

da literatura para permitir comparações com os resultados experimentais de THEOCARIS e MARKETOS apud TELLES [56].

Dada a dificuldade para reproduzir numericamente o pico de tensão na região do furo circular, serão testadas nuvens de pontos com diversos níveis de refinamento. As nuvens #1, #2 e #3 adotam distribuição retangular com distâncias mínimas entre pontos de, respectivamente, 1mm, 0,625mm e 0,5mm, totalizando, respectivamente, NP=190, 452 e 700 pontos.

Os gráficos das figuras 5.9 e 5.10 mostram a distribuição de tensões ao longo da seção transversal  $y = 0$  e o gráfico da figura 5.11 mostra os deslocamentos longitudinais da barra, onde pode ser observada pouca sensibilidade dos resultados com o maior refinamento, exceto para carregamentos acima de  $p/Y=1,0$ . Para uma carga final  $p=14,375\text{kgf/mm}^2$  e NP=100, a primeira iteração plástica foi registrada em IP=37 para a nuvem #1 e IP=38 para as demais nuvens.

A solução via MEC [56] para  $2p/Y_0=0,95$  apresentou compatibilidade com os resultados via MLPG-1, exceto para a região próxima ao furo circular. Esta solução via MEC foi obtida a partir de uma malha com 33 elementos de contorno com interpolação linear, sendo 15 elementos para a modelagem do conjunto formado pelos contornos do furo e da seção  $y = 0$ , garantindo uma satisfatória modelagem da concentração de tensões. Além disso, células de integração foram distribuídas nas regiões do domínio onde é esperado o desenvolvimento de plastificação.

Os resultados para a formulação com derivadas difusas foram satisfatórios, sendo necessário reduzir levemente o fator de escala do suporte do MQM para a obtenção dos melhores resultados, conforme tabela 5.2. No entanto, a resposta dos deslocamentos para carregamentos acima de  $p/Y=1,0$  se mostrou sensível à variação do fator de escala do suporte do MQM. Em função da dependência da precisão das tensões para uma evolução estável do processo de plastificação e considerando ainda os picos de tensões intrínsecos a este exemplo, a adoção da simplificação das derivadas difusas para este caso deve ser tratada com cautela.



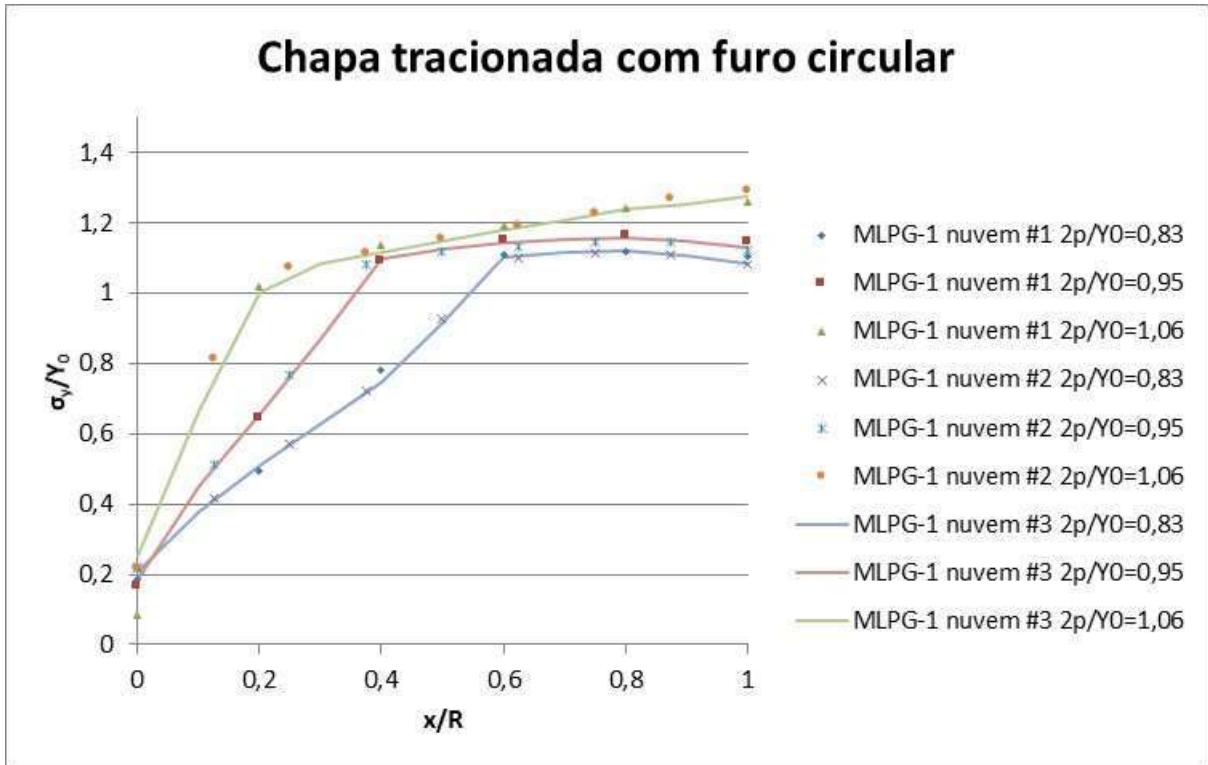


Figura 5.9 – Chapa tracionada com furo circular – Tensão vertical na seção  $y=0$  –  
Comparativo entre nuvens

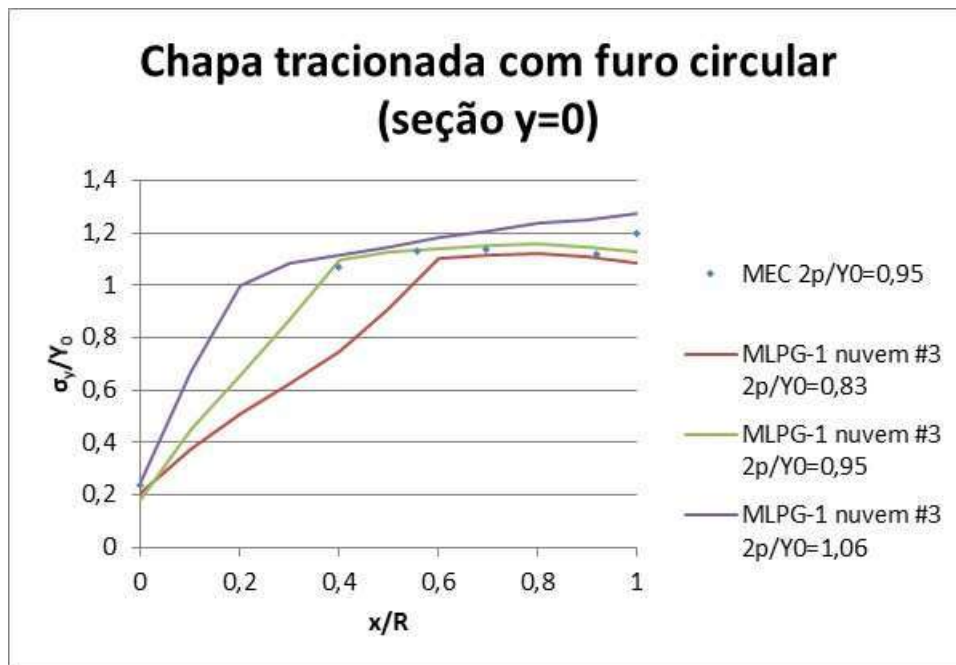


Figura 5.10 – Chapa tracionada com furo circular – Tensão vertical na seção  $y=0$  –  
Comparativo com o MEC

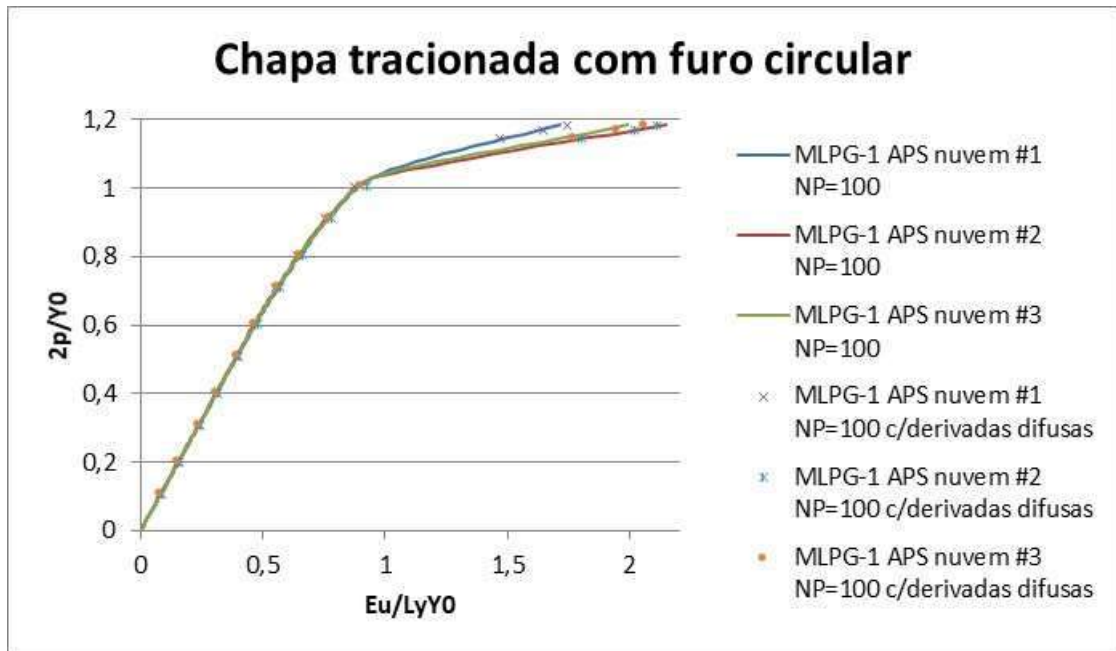


Figura 5.11a – Chapa tracionada com furo circular – Deslocamento longitudinal  $u$  para o ponto  $(x=L_x; y=L_y)$  – Comparativo entre nuvens e derivadas difusas

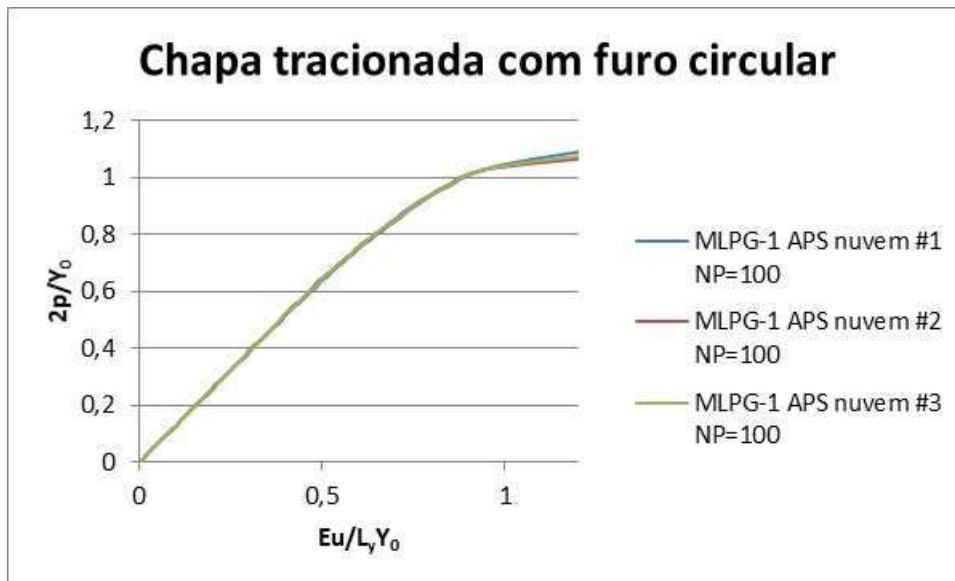


Figura 5.11b – Chapa tracionada com furo circular – Deslocamento longitudinal  $u$  para o ponto  $(x=L_x; y=L_y)$  – Ampliação até  $p/Y=1,0$

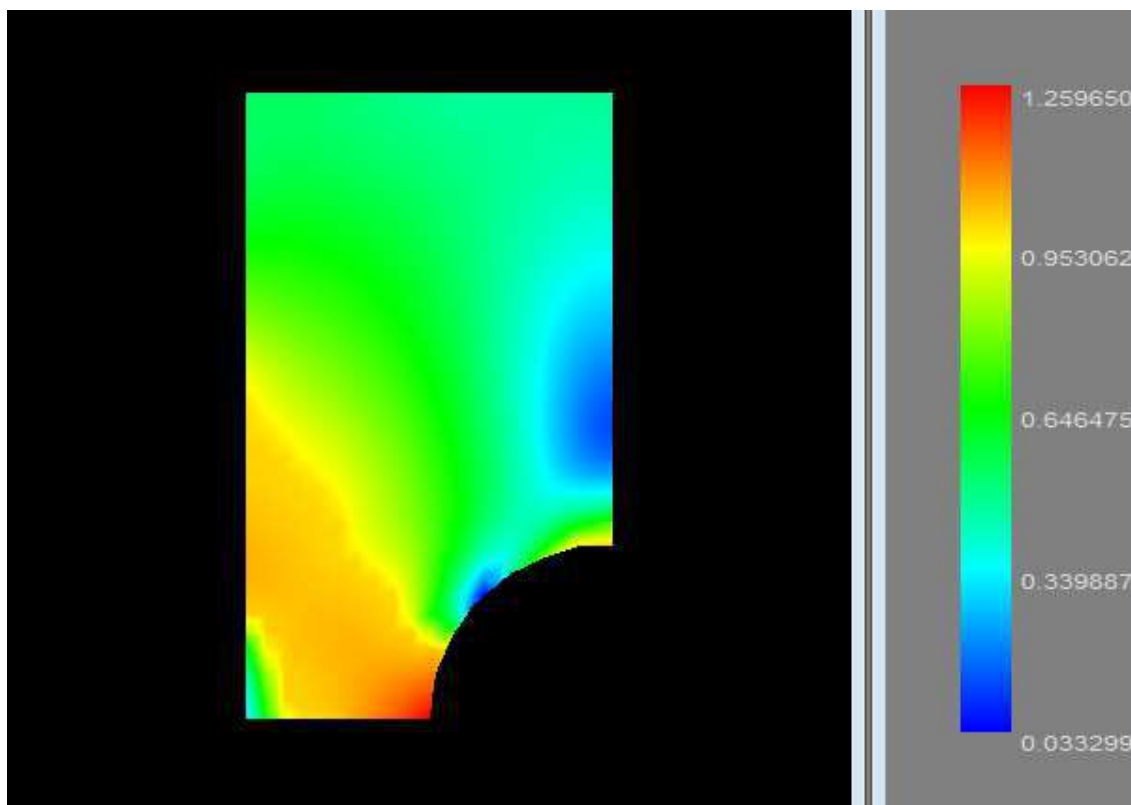


Figura 5.12 – Chapa tracionada com furo circular – Zona plástica – Coeficiente  $k_F$  para  $2p/Y_0=1,06$  (MLPG-1 APS nuvem #3)

### 5.3 – Chapa Tracionada com Ranhura

Este problema, modelado neste trabalho tanto no EPD quanto no EPT, consiste em uma chapa tracionada com uma ranhura, conforme figura 5.13, onde se espera a formação de uma zona plástica no estrangulamento da seção transversal tracionada. É considerado que o material obedece à Plasticidade Clássica, com a adoção do critério de escoamento de Von Mises sem endurecimento.

A solução via MEC [56] utilizada para comparação foi obtida a partir de uma malha com 13 elementos de contorno com interpolação linear, tirando proveito da dupla simetria do problema. Além disso, 50 células de integração foram distribuídas nas regiões do domínio onde é esperado o desenvolvimento de plastificação.

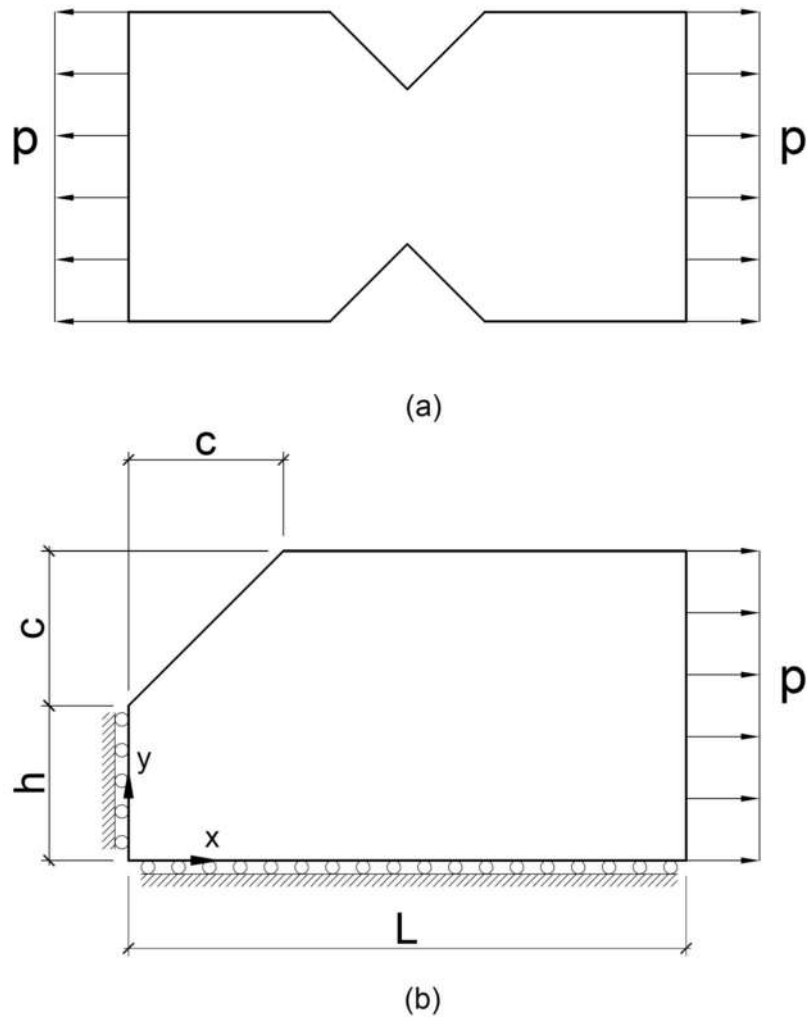


Figura 5.13 – (a) Chapa tracionada com ranhura; (b) Modelo de cálculo

Tabela 5.3 – Chapa tracionada com ranhura – dados numéricos

Dados geométricos	$L=18\text{mm}$	$h=5\text{mm}$	$c=5\text{mm}$
Parâmetros elásticos	$E = 7000\text{kgf/mm}^2$		$\nu = 0,2$
Critério de Von Mises	$Y=24,3\text{kgf/mm}^2$		$H^I = H^C = 0$
Parâmetros do MLPG-1	$\lambda_\xi = 1$	$NG = 10 \times 10$	$\lambda_{xnmp} = 1,8$
Parâmetros do MLPG-5	$\lambda_\xi = 1$	$NG = 40$	$\lambda_{xnmp} = 1,8$

Para a discretização via MLPG, a nuvem de pontos foi disposta de forma retangular com  $\Delta x = \Delta y = 1\text{mm}$ , totalizando  $NN=194$  pontos. A seguir são apresentados os resultados do deslocamento horizontal no ponto  $(x=L, y=0)$  para o EPT e EPD.

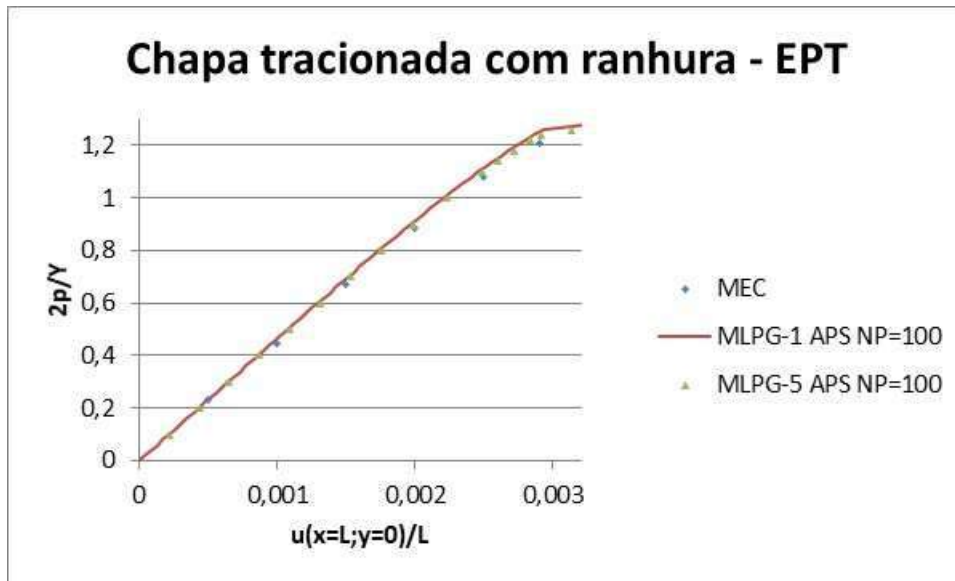


Figura 5.14 – Chapa tracionada com ranhura no EPT – Comparação entre métodos numéricos

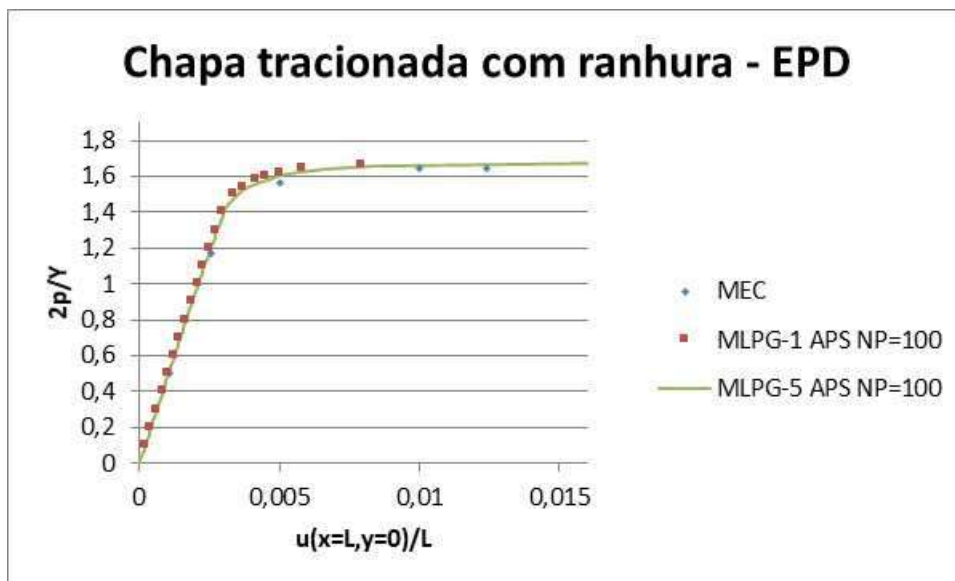


Figura 5.15 – Chapa tracionada com ranhura no EPD – Comparação entre métodos numéricos

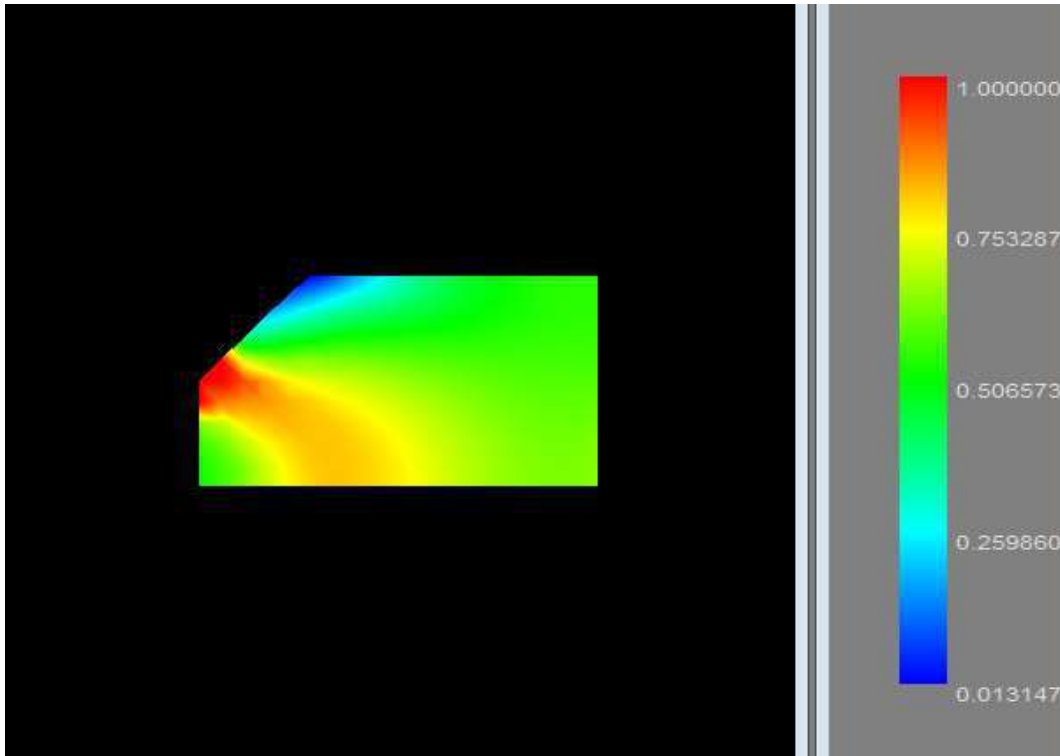


Figura 5.16 – Chapa tracionada com ranhura no EPD – Zona plástica – Coeficiente  $k_F$  para  $2p/Y=1,2$  (MLPG-1 APS NP=100)

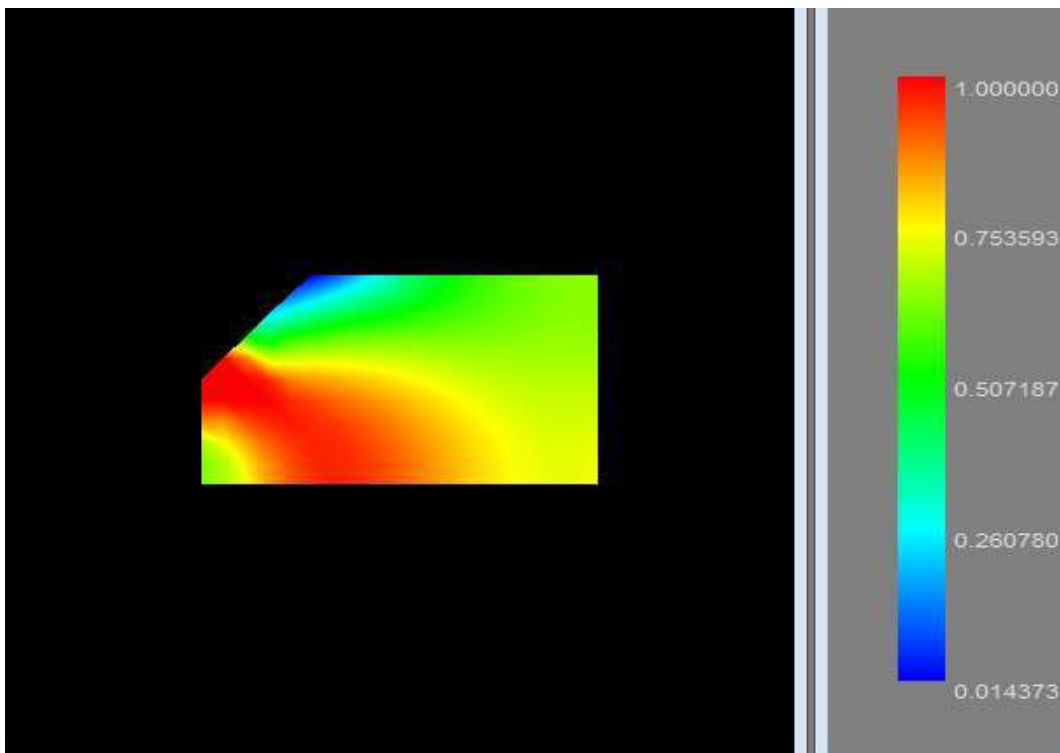


Figura 5.17 – Chapa tracionada com ranhura no EPD – Zona plástica – Coeficiente  $k_F$  para  $2p/Y=1,4$  (MLPG-1 APS NP=100)

Os gráficos apresentados ilustram a grande compatibilidade entre os resultados dos diversos métodos numéricos, tanto para o EPT quanto para o EPD. Segundo [56], para o EPT e EPD via MEC, foram registrados colapsos em  $2p/Y=1,21$  e  $1,64$ , respectivamente. Para as variantes 1 e 5 do MLPG, no EPD, foram registrados colapsos para  $2p/Y=1,66$  e  $1,68$ , respectivamente. Para o EPT, os limites encontrados foram  $2p/Y=1,28$  e  $1,26$ , respectivamente.

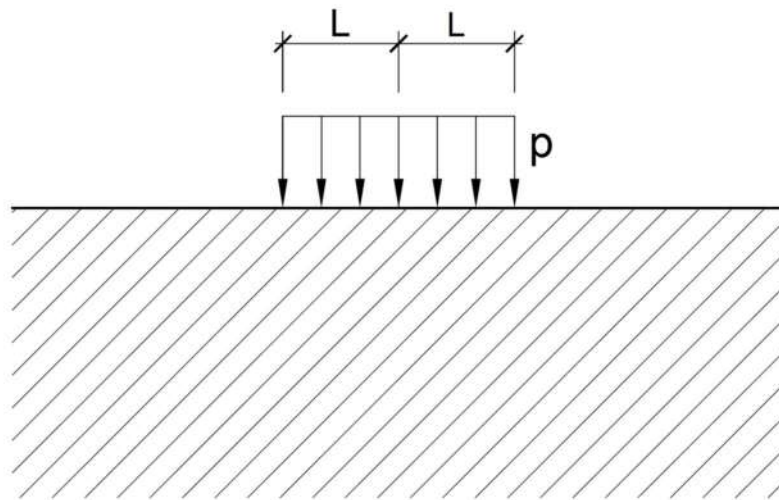
Para uma carga final  $p = 24,3\text{kgf/mm}^2$  e  $NP=100$ , a modelagem no EPD acusou a primeira iteração plástica para  $IP=33$  e  $35$  para as variantes 1 e 5 do MLPG, respectivamente, e o último incremento de carga convergente foi registrado para  $IP=82$  e  $83$  para as variantes 1 e 5, respectivamente. Para o EPT, os correspondentes incrementos foram  $IP=29$  e  $28$  para a primeira iteração plástica e  $IP=63$  e  $62$  para o último incremento de carga convergente.

Vale ressaltar que este problema pode ser consideravelmente mais sensível à metodologia numérica adotada quando o carregamento se aproxima do limite. Em TELLES [56], é apresentado um comparativo dos resultados do MEC com uma solução via MEF, sendo observada uma carga de colapso  $2p/Y=1,85$  para o MEF.

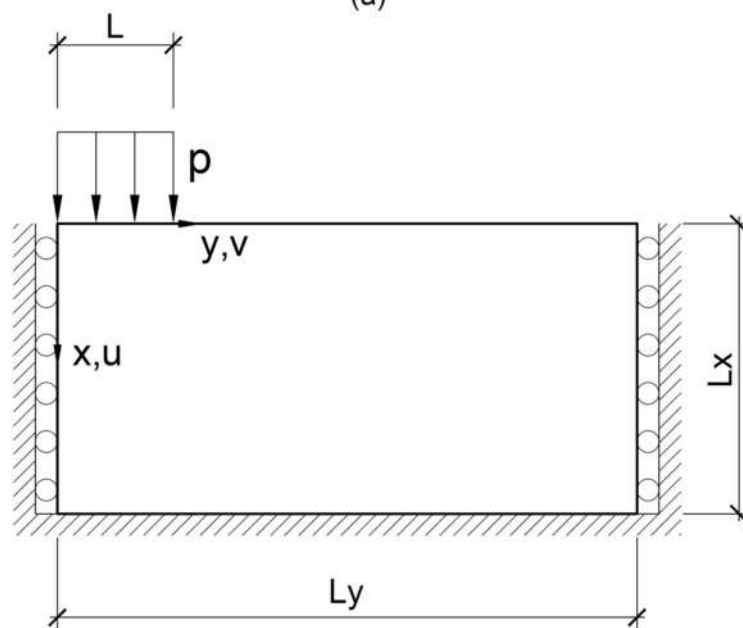
Para este exemplo, foram registradas diferenças pouco significativas nos resultados com a adoção de diferentes incrementos de carga. As diferenças entre o APS e APPMP são insignificantes para este exemplo, existindo apenas uma menor quantidade de iterações para o APPMP em alguns incrementos.

#### **5.4 – Solo Submetido a uma Carga Distribuída**

É também objeto de estudo desta pesquisa o problema clássico de Mecânica dos Solos e projeto de fundações superficiais que consiste em um trecho de solo submetido a uma carga distribuída. Considerando a formulação elastoplástica clássica no EPD sem endurecimento, será adotado o critério de escoamento de Mohr-Coulomb, amplamente utilizado em modelos de ruptura de solos. O critério de Drucker-Prager também será adotado para efeito de comparação, onde será testada a simulação do critério de Mohr-Coulomb descrita no subitem 4.7, equação (4.101).



(a)



(b)

Figura 5.18 – (a) Solo submetido a uma carga distribuída; (b) Modelo de cálculo

Tabela 5.4 – Solo submetido a uma carga distribuída – dados numéricos

Dados geométricos	$L_x=12\text{ft}$	$L_y=24\text{ft}$	$L=5\text{ft}$
Parâmetros elásticos	$E = 30000\text{psi}$		$\nu = 0,3$
Critério de Mohr-Coulomb	$C=10\text{psi}$	$\phi=20^\circ$	$H^I=H^C=0$
Parâmetros do MLPG-1	$\lambda_\xi = 1$	$NG = 10 \times 10$	$\lambda_{xnm} = 1,8$
Parâmetros do MLPG-5	$\lambda_\xi = 0,5$	$NG = 40$	$\lambda_{xnm} = 1,8$



A solução via MEC [56] utilizada para comparação foi obtida a partir de uma malha com 14 elementos de contorno com interpolação linear, tirando proveito da simetria do problema e da solução fundamental para domínios semi-infinitos. Além disso, células de integração foram distribuídas em todo o domínio modelado.

Para a modelagem via MLPG, foi adotada uma nuvem de pontos com distribuição retangular  $\Delta x = \Delta y = 1ft$  , totalizando NN=325 pontos. Para a verificação da carga de ruptura, será adotada como referência a solução encontrada em VESIC [134], onde a carga de copaso  $p_U$  é calculada como

$$p_U = C \cot \phi \left( e^{\pi \operatorname{tg} \phi} \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) - 1 \right) \quad (5.2)$$

Para  $\phi = 0$  , a equação acima resulta na clássica solução de Prandtl

$$\frac{p_U}{C} = 2 + \pi \cong 5,14 \quad (5.3)$$

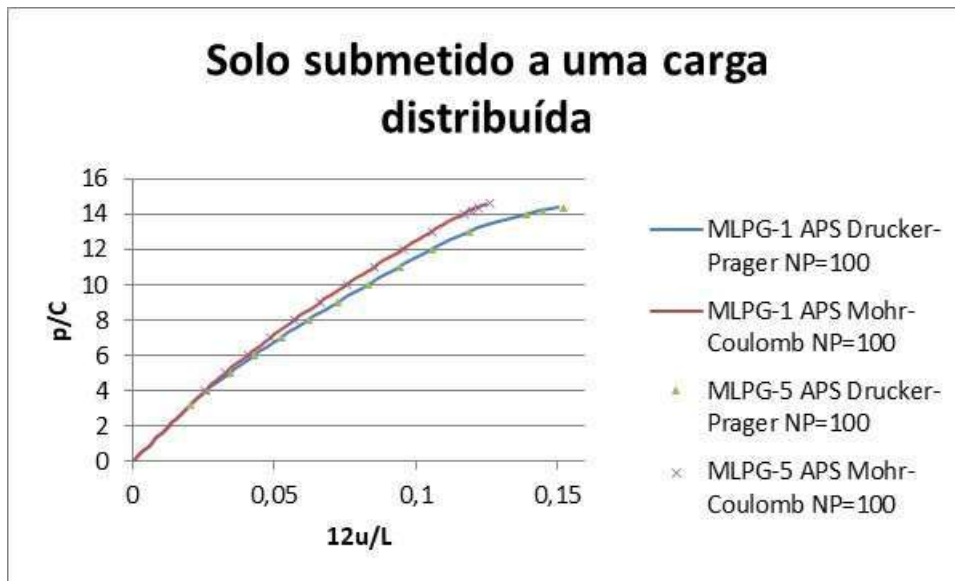


Figura 5.19 – Solo submetido a uma carga distribuída – Deslocamento vertical para o ponto  $(x=0;y=0)$

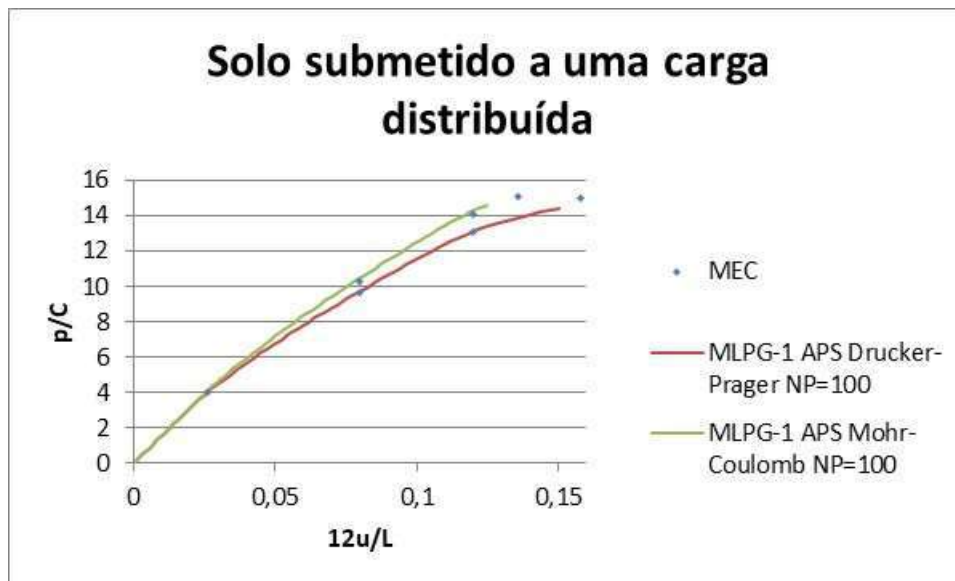


Figura 5.20 – Solo submetido a uma carga distribuída – Deslocamento vertical para o ponto  $(x=0;y=0)$  – Comparativo com a formulação via MEC

Os gráficos das figuras 5.19 e 5.20 apresentam os resultados numéricos de diversas análises envolvendo os critérios de Mohr-Coulomb e sua simulação através do critério de Drucker-Prager, com cargas de ruptura de  $p_U/C=14,8$  e  $14,6$ , respectivamente, sendo muito próximas da referência da equação (5.2) ( $p_U/C=14,83$ ). Apesar da proximidade entre as cargas de ruptura dos critérios, o que é esperado pela teoria, notam-se diferenças no campo de deslocamentos, tendo em vista que as regras de fluxo são diferentes ao longo do desenvolvimento das deformações plásticas. A comparação com a formulação via MEC apresenta grande compatibilidade com o MLPG, exceto pela carga de ruptura sensivelmente maior ( $p_U/Y=14,9$ ).

Para uma carga final  $p = 200\text{psi}$  e  $NP=100$ , para as variantes 1 e 5 do MLPG, as primeiras iterações plásticas foram registradas para  $IP=21$  e  $18$  para o critério de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager, respectivamente, e os correspondentes valores para o último incremento de carga convergente foram  $IP=73$  e  $72$ . A maior diferença entre as cargas de início da plastificação dos dois critérios é esperada, visto que a simulação da equivalência entre os métodos se refere tão somente para a carga de colapso.

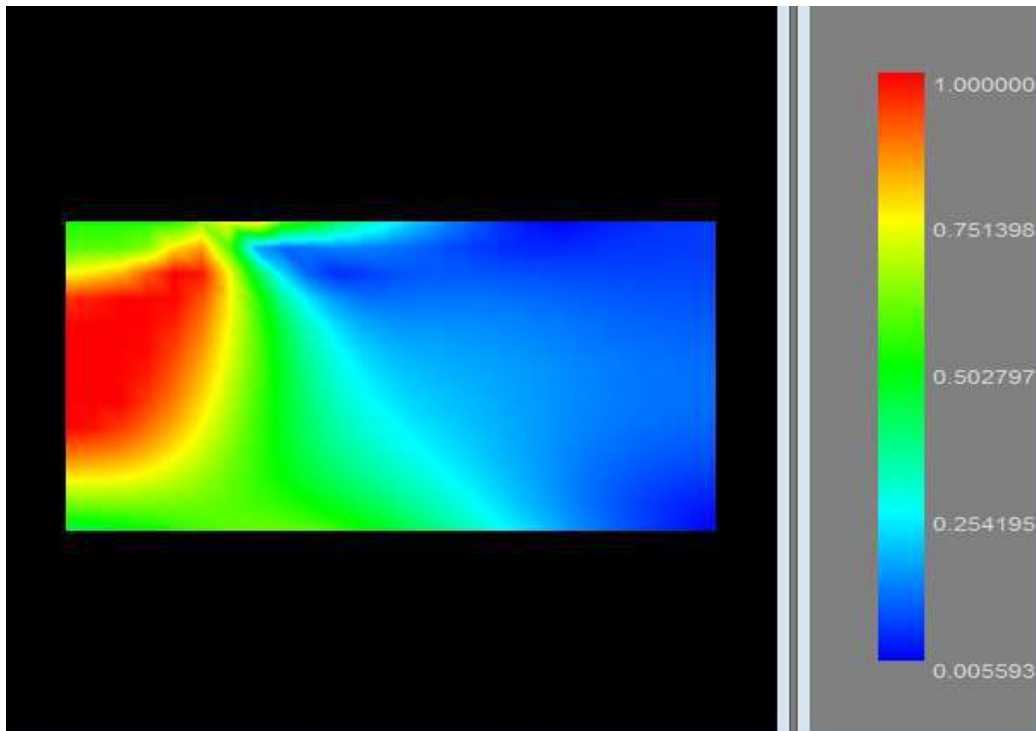


Figura 5.21 – Solo submetido a uma carga distribuída – Zona plástica – Coeficiente  $k_F$  para  $p/C=4,6$  (MLPG-1 APS NP=100 para o critério de Mohr-Coulomb)

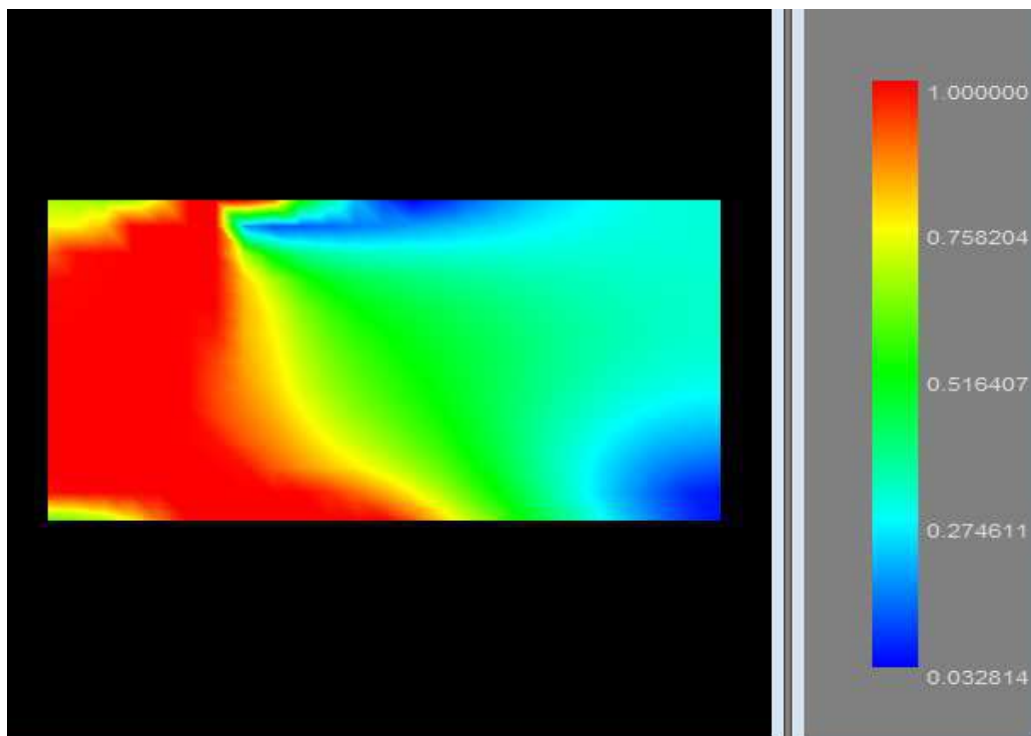


Figura 5.22 – Solo submetido a uma carga distribuída – Zona plástica – Coeficiente  $k_F$  para  $p/C=8,4$  (MLPG-1 APS NP=100 para o critério de Mohr-Coulomb)

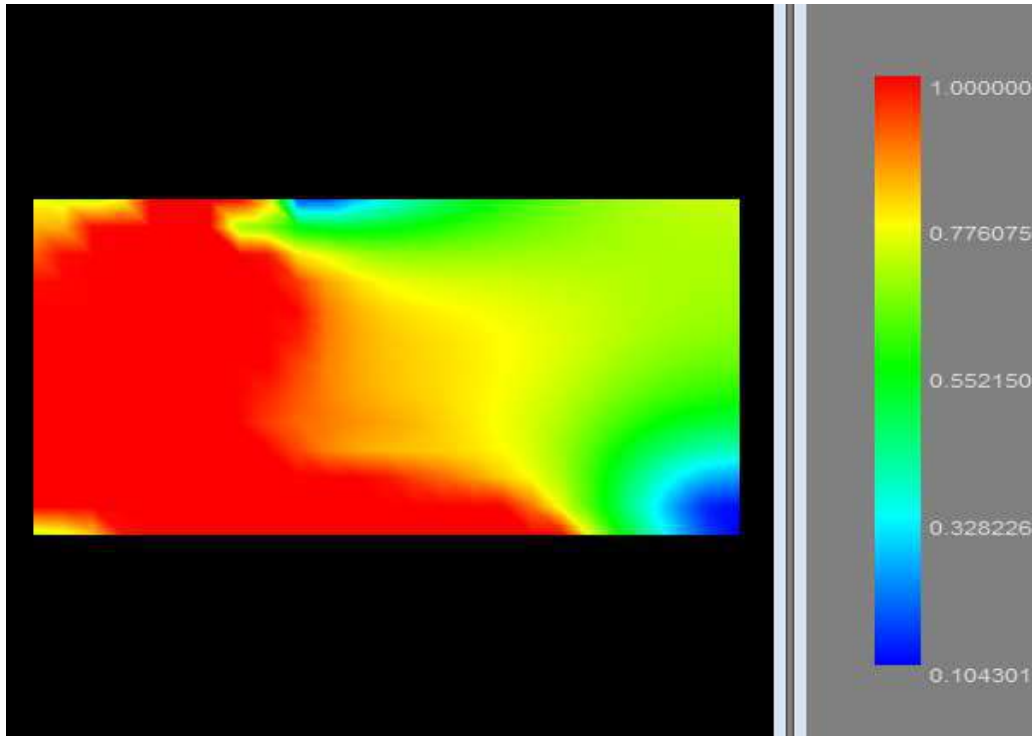


Figura 5.23 – Solo submetido a uma carga distribuída – Zona plástica – Coeficiente  $k_F$  para  $p/C=12,2$  (MLPG-1 APS NP=100 para o critério de Mohr-Coulomb)

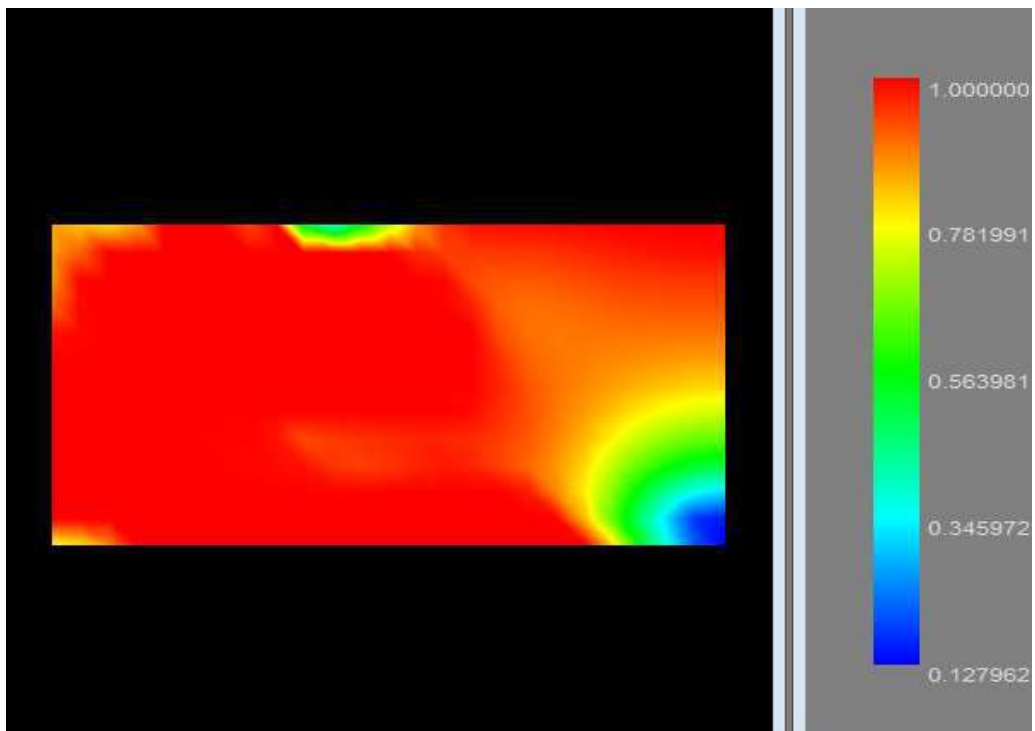


Figura 5.24 – Solo submetido a uma carga distribuída – Zona plástica – Coeficiente  $k_F$  para  $p/C=14,2$  (MLPG-1 APS NP=100 para o critério de Mohr-Coulomb)

Para este exemplo, os resultados para o MLPG-5 estão suficientemente próximos do MLPG-1, o que concede vantagem à variante MLPG-5, dado o seu menor esforço computacional. No entanto, para este exemplo, foi necessário utilizar um fator de escala  $\lambda_\xi = 0,5$  para o domínio local de integração. Tecnicamente, a spline de quarto grau como função de ponderação do MLPG-1 garante integrações próximas de zero para a coroa circular do domínio local onde  $R/R_\xi > 0,5$ .

## 5.5 – Viga Biapoiada com Carga Uniformemente Distribuída

O problema clássico da viga biapoiada submetida a uma carga uniformemente distribuída é modelado no EPT, com a adoção do modelo viscoplástico de Perzyna com o critério de Tresca e sem endurecimento. À medida que a carga distribuída aumenta, o momento no meio da viga provoca a plastificação das fibras inferiores e superiores da região, mantendo a região próxima à linha neutra ainda no regime elástico até a completa plastificação da seção transversal e a formação da rótula plástica.

Para este exemplo, será feita uma simulação da Teoria da Plasticidade Clássica através da aplicação de sucessivos incrementos de carga suficientemente pequenos na formulação viscoplástica. Para cada incremento, o passo no tempo é mantido até a taxa de deformação viscoplástica se tornar estacionária, onde atinge valores desprezíveis, conforme descrito no subitem 3.6, sendo o somatório das deformações ao longo do tempo igual à deformação plástica relativa ao incremento de carga. O resultado desta análise será comparado ao modelo elastoplástico clássico.

Para a análise qualitativa das soluções numéricas apresentadas, será adotada como referência a solução analítica da Teoria de Vigas da Resistência dos Materiais, conforme descrito no apêndice C. Vale destacar que a modelagem numérica proposta é incapaz de reproduzir as simplificações impostas para a obtenção da solução analítica adotada, tais como a hipótese das seções planas e a consideração apenas das tensões longitudinais.

Além disso, o problema de flexão de vigas é muito sensível às aplicações das condições de contorno naturais e essenciais, o que ocasiona perturbações próximas aos apoios em função da não observância, por exemplo, da distribuição parabólica das tensões cisalhantes oriundas das reações nos apoios. Consequentemente, a solução analítica serve

tão somente como uma referência para a análise qualitativa do comportamento elastoplástico do problema.

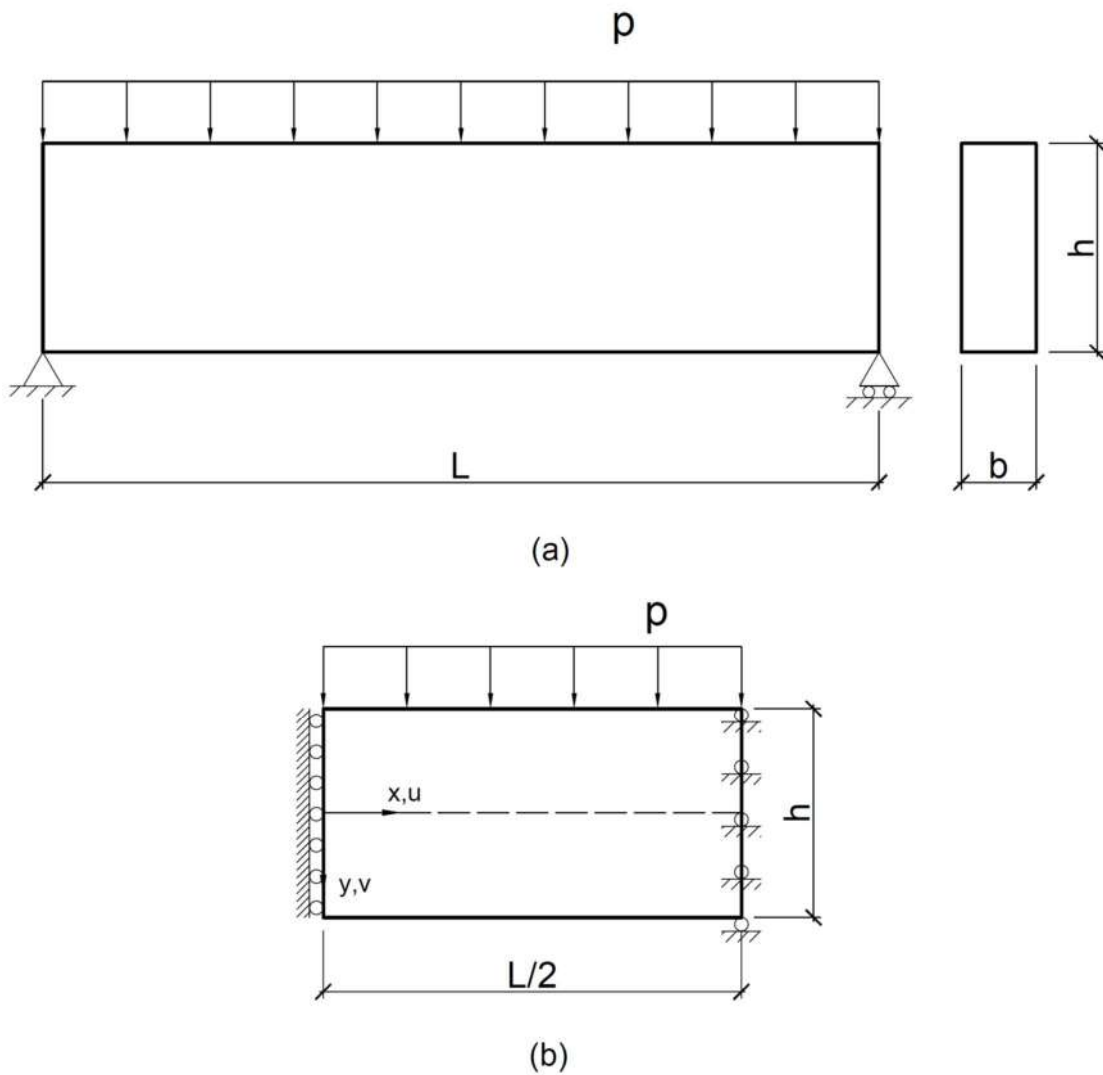


Figura 5.25 – (a) Viga biapoiada com carga uniformemente distribuída; (b) Modelo de cálculo

Tabela 5.5 – Viga biapoiada com carga uniformemente distribuída – dados numéricos

Dados geométricos	$L=16\text{in}$	$h=4\text{in}$	$b=1\text{in}$
Parâmetros elásticos	$E = 30 \times 10^6 \text{psi}$		$\nu = 0,3$
Critério de Tresca	$Y=36000\text{psi}$		$H^I=H^C=0$
Parâmetros do MLPG-1	$\lambda_\xi = 1$	$NG = 10 \times 10$	$\lambda_{xh} = 1,5$
MLPG-1 com derivadas difusas	$\lambda_\xi = 1$	$NG = 10 \times 10$	$\lambda_{xh} = 1,4$

O modelo viscoplástico de Perzyna adotado é tal que  $\Phi(F) = F/Y$  e  $\gamma = 1s^{-1}$ .

A solução via MEC [56] utilizada para comparação foi obtida a partir de uma malha com 36 elementos de contorno com interpolação linear e 68 células de integração distribuídas nas regiões do domínio onde é esperado o desenvolvimento de plastificação.

Para a modelagem numérica, foi adotada uma nuvem de pontos com distribuição retangular uniforme com espaçamentos  $\Delta x = \Delta y = 0,5in$ , totalizando NN=153 pontos. Para a modelagem viscoplástica, foi adotado passo no tempo  $\Delta t = 0,1s$ . Para os dados numéricos da tabela anterior, os valores teóricos do carregamento para o início da plastificação e o colapso são, respectivamente,  $p_0/Y=0,0833$  e  $p_U/Y=0,125$ , conforme apêndice C.

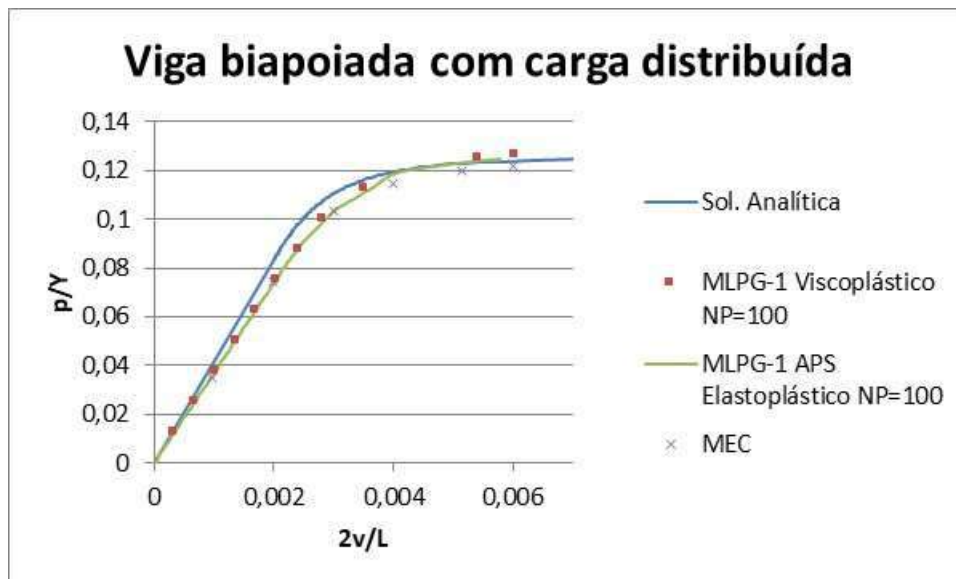


Figura 5.26 – Viga biapoada com carga uniformemente distribuída – Deslocamento vertical no meio do vão – Comparativo entre formulações elastoplástica e viscoplástica

O gráfico da figura 5.26 indica divergências entre as soluções numéricas e analítica da Teoria de Vigas já no regime elástico, o que é previsível, tendo em vista as simplificações dos resultados teóricos. É possível observar, no entanto, grande compatibilidade entre as soluções via MLPG-1 e os resultados via MEC, exceto para carregamentos próximos da ruptura. A formulação com derivadas difusas (figura 5.28) apresentou resultados satisfatórios com a adoção de um fator de escala do suporte do MQM ligeiramente inferior, conforme tabela 5.5.

Para uma carga final  $p = 5000\text{psi}$  e  $NP=100$  para a modelagem elastoplástica, a primeira iteração plástica foi registrada para  $IP=61$ , ao passo que o último incremento de carga convergente foi obtido em  $IP=90$ .

As formulações elastoplástica e viscoplástica adaptada apresentaram diferenças mínimas em seus resultados numéricos, exceto para a carga de ruptura sensivelmente maior para a formulação viscoplástica ( $p/Y=0,126$  e  $0,128$  para os modelos elastoplástico e viscoplástico, respectivamente).

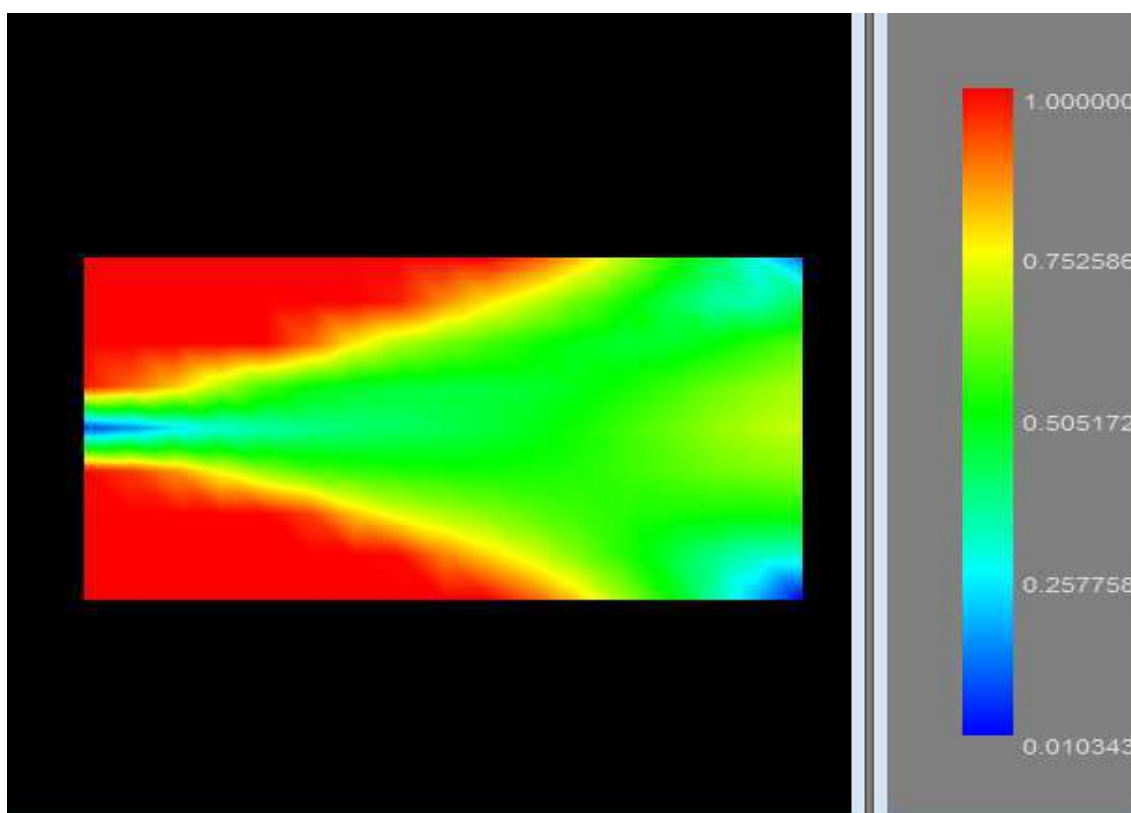


Figura 5.27 – Viga biapoiada com carga uniformemente distribuída – Zona plástica – Coeficiente  $k_F$  para  $p/Y=0,125$  (MLPG-1 APS  $NP=100$ )



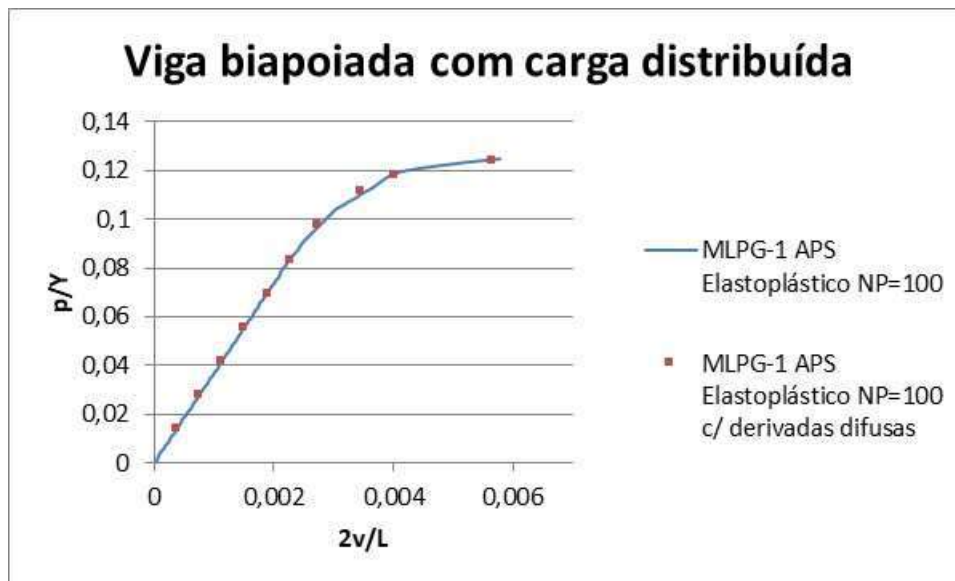


Figura 5.28 – Viga com carga uniformemente distribuída – Deslocamento no meio do vão – Comparativo com derivadas difusas

### 5.6 – Disco com Núcleo Rígido Submetido à Tração

O problema de EPT do disco de núcleo rígido submetido à tração ao longo da superfície externa será modelado com comportamento viscoplástico regido pela Lei da Potência de Bailey-Norton. Com a tração  $p$  aplicada instantaneamente, o material entra no regime viscoplástico em toda a extensão deformável do disco, desenvolvendo deformações viscoplásticas na direção radial ao longo do tempo.

A solução via MEC [56] utilizada para comparação foi obtida a partir de uma malha com 12 elementos de contorno com interpolação linear, tirando proveito da dupla simetria do problema. Além disso, 48 células de integração foram distribuídas ao longo do domínio modelado.

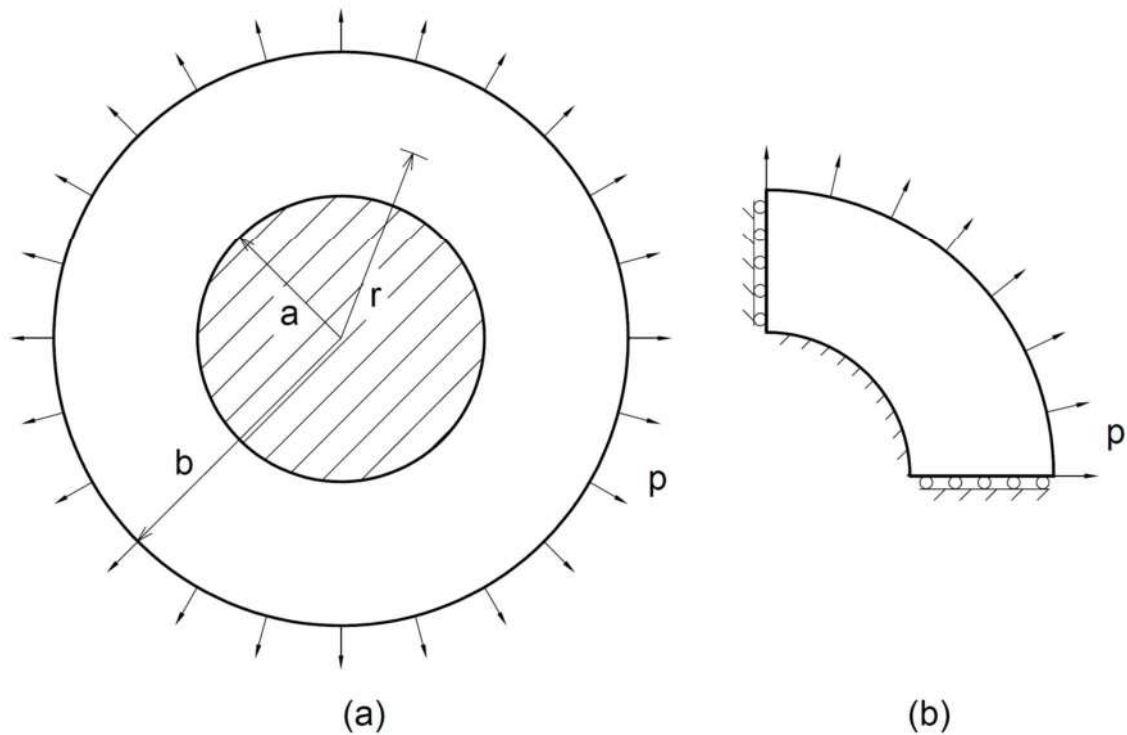


Figura 5.29 – (a) Disco com núcleo rígido submetido à tração; (b) Modelo de cálculo

Tabela 5.6 – Disco com núcleo rígido submetido à tração – dados numéricos

Dados geométricos	$a = 0,16\text{in}$	$b = 0,25\text{in}$	
Parâmetros elásticos	$E = 17 \times 10^6 \text{psi}$	$\nu = 0,33$	
Critério de Von Mises	$Y = 0$	$H^I = H^C = 0$	
Lei de Barley-Norton	$K_c = 5,8 \times 10^{-18}$	$m = 4,4$	$n = 0$
Parâmetros do MLPG-1	$\lambda_\xi = 1$	$NG = 10 \times 10$	$\lambda_{xh} = 1,5$
Parâmetros do MLPG-5	$\lambda_\xi = 1$	$NG = 40$	$\lambda_{xh} = 1,5$

A nuvem de pontos do MLPG foi definida através de uma distribuição polar, com 5 divisões na direção radial e 16 divisões na direção transversal, totalizando  $NN = 6 \times 17 = 102$  pontos.

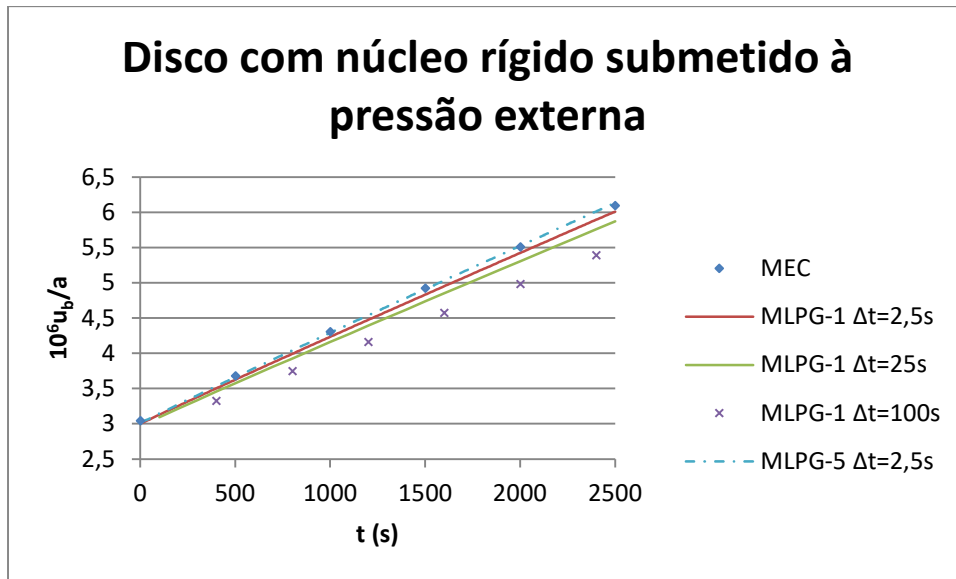


Figura 5.30 – Disco com núcleo rígido submetido à tração externa – Deslocamento radial para  $r=b$  – Comparação entre métodos e variação de passos no tempo

O gráfico da figura 5.30 mostra grande semelhança entre os resultados via MEC e as variantes 1 e 5 do MLPG para  $\Delta t = 2,5s$ , sendo a MLPG-5 mais próxima da solução via MEC. Variações no passo no tempo foram testadas, onde maiores passos no tempo acarretam maiores desvios em relação à referência ao longo do tempo.

## 5.7 – Chapa Submetida à Retração

O problema de EPT em questão consiste em uma chapa retangular impedida de se deformar ao longo de um dos seus lados e submetida à retração, que será modelada através de um carregamento de variação de temperatura equivalente. O material será regido pela formulação elasto-viscoplástica, com a adoção do modelo de Perzyna e o critério de escoamento de Von Mises.

A retração é aplicada instantaneamente, gerando um estado de tensões elástico inicial decorrente do impedimento de deformações em uma das faces laterais da chapa. Como haverá a formação de uma região plastificada, com o desenvolvimento de deformações viscoplásticas ao longo do tempo, espera-se uma variação temporal do estado de tensões como consequência da restrição de deslocamento, com uma convergência assintótica típica de modelos viscoplásticos.

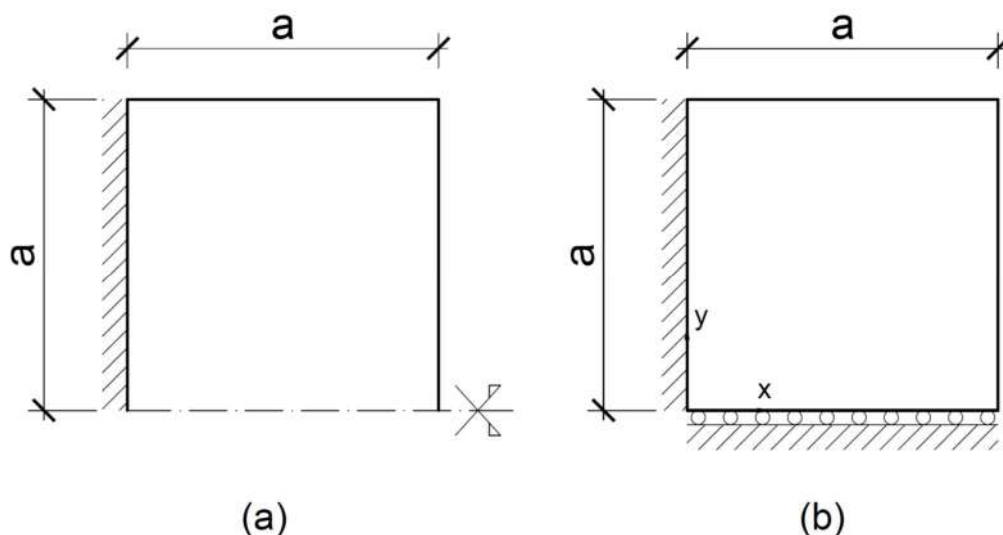


Figura 5.31 – (a) Chapa submetida à retração; (b) Modelo de cálculo

Tabela 5.7 – Chapa submetida à retração – dados numéricos

Dados geométricos	a = 1m		
Parâmetros elásticos	E = 100bar	ν = 0,32	
Critério de Von Mises	Y=1bar	H <sup>l</sup> =H <sup>c</sup> =0	
Parâmetros do MLPG-1	λ <sub>ξ</sub> = 1	NG = 10x10	λ <sub>xh</sub> = 1,5

O modelo viscoplástico de Perzyna adotado é tal que  $\Phi(F) = F/Y$  e  $\gamma = 1s^{-1}$ .

Para a modelagem via MLPG, foram adotadas duas nuvens de pontos com distribuição retangular, sendo a nuvem #1 com  $\Delta x = \Delta y = 0,1m$ , totalizando NN=121 pontos, e a nuvem #2 com  $\Delta x = \Delta y = 0,05m$ , totalizando NN=441 pontos. A deformação imposta de retração  $\varepsilon_{ij}^R = -0,01\delta_{ij}$  aplicada em toda a placa é modelada através de uma variação uniforme de temperatura  $\Delta T = -1000^\circ C$ , com  $\alpha_{\Delta T} = 10^{-5}/^\circ C$ . Para a obtenção do estado de tensões viscoplástico estacionário (convergência assintótica), foram adotados passos no tempo  $\Delta t = 0,01s$  e  $\Delta t = 0,001s$ .

Para avaliação qualitativa da resposta numérica via MLPG, foi adotada como referência para o regime elástico a solução numérica via Método das Diferenças Finitas

de BAUER e REISS [133]. Para a solução viscoplástica estacionária, foi adotada a solução numérica via MEC [56], que, por sua vez, foi obtida a partir de uma malha com 26 elementos de contorno com interpolação linear, tirando proveito da simetria do problema. Além disso, 39 células de integração foram distribuídas nas regiões do domínio onde é esperado o desenvolvimento de plastificação.

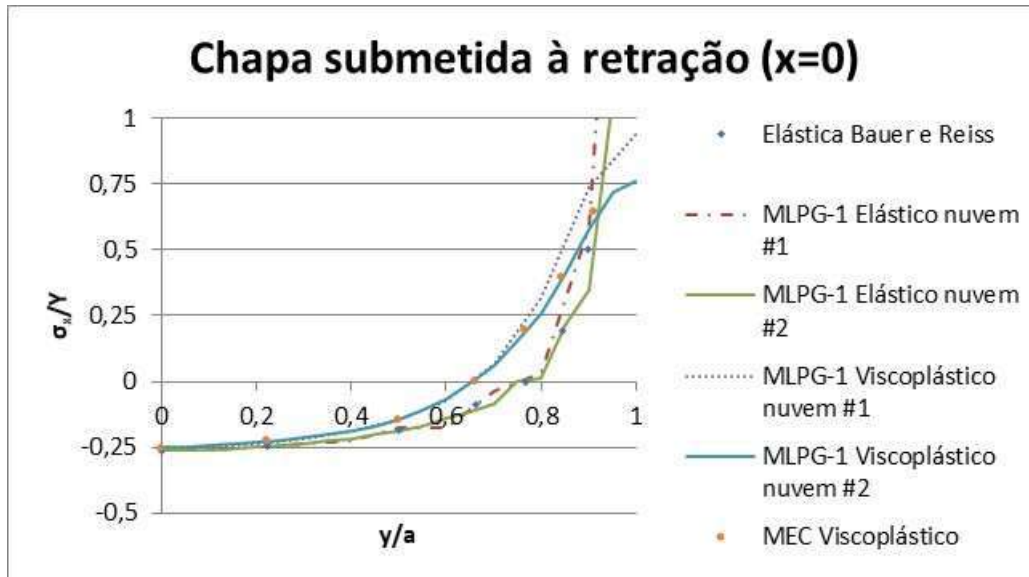


Figura 5.32 – Chapa submetida à retração – Tensão  $\sigma_x$  para a face  $x=0$

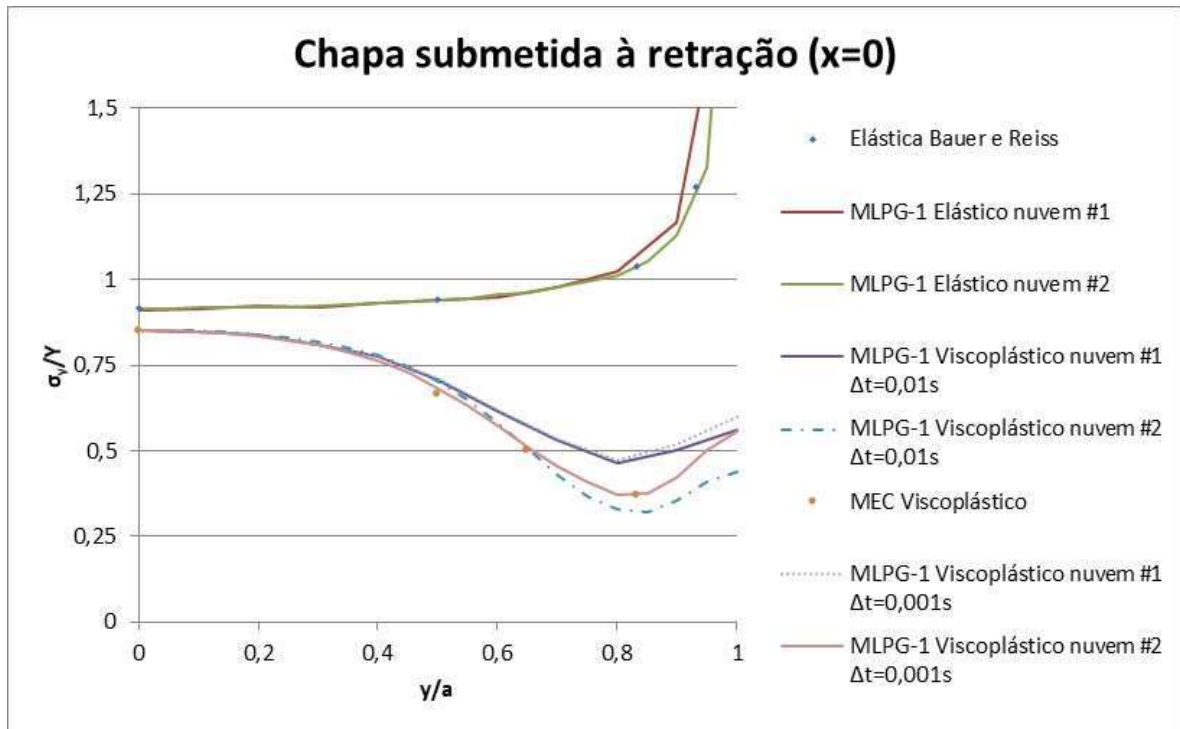


Figura 5.33 – Chapa submetida à retração – Tensão  $\sigma_y$  para a face  $x=0$

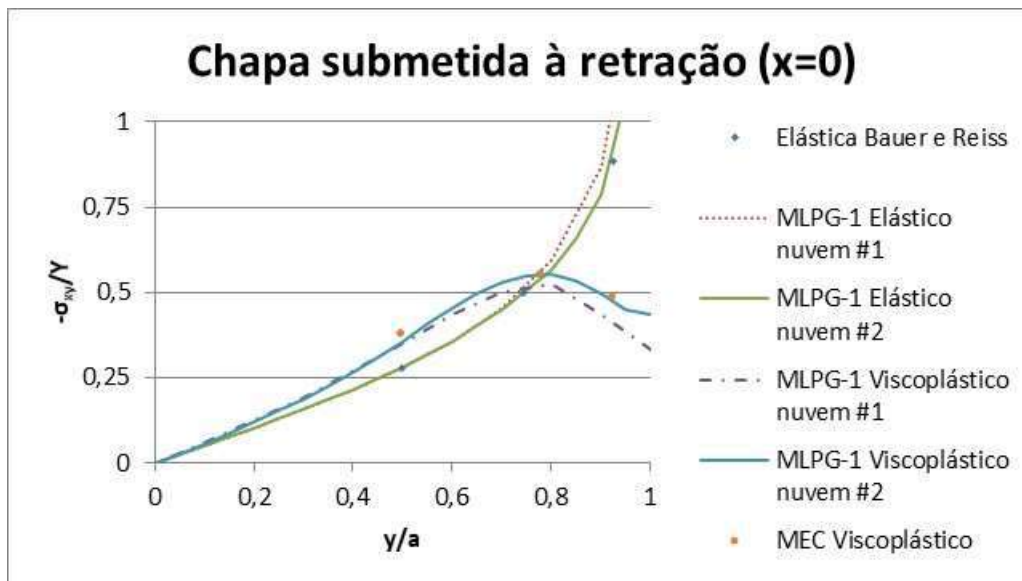


Figura 5.34 – Chapa submetida à retração – Tensão  $\sigma_{xy}$  para a face  $x=0$

Nos gráficos das figuras 5.32 a 5.34, os resultados viscoplásticos são referentes à configuração estacionária para  $\Delta t = 0,01s$ , exceto onde indicado de outro modo. Os resultados mostram grande concordância entre as referências elástica e viscoplástica, sendo observada maior concordância para a nuvem de maior densidade de pontos. Foram

registradas diferenças pouco relevantes entre as soluções viscoplásticas estacionárias para os dois passos no tempo empregados, exceto para as tensões  $\sigma_y$ , onde o passo  $\Delta t = 0,001s$  foi necessário para garantir maior aproximação em relação à referência.

É importante salientar que os valores próximos ao vértice ( $x = 0, y = a$ ) devem ser negligenciados, dada a impossibilidade de os métodos numéricos simularem o resultado teórico da tendência ao infinito do estado de tensões elásticas nesta região. As mudanças profundas no estado de tensões ao longo do tempo demonstram a relevância da teoria viscoplástica na modelagem deste problema.

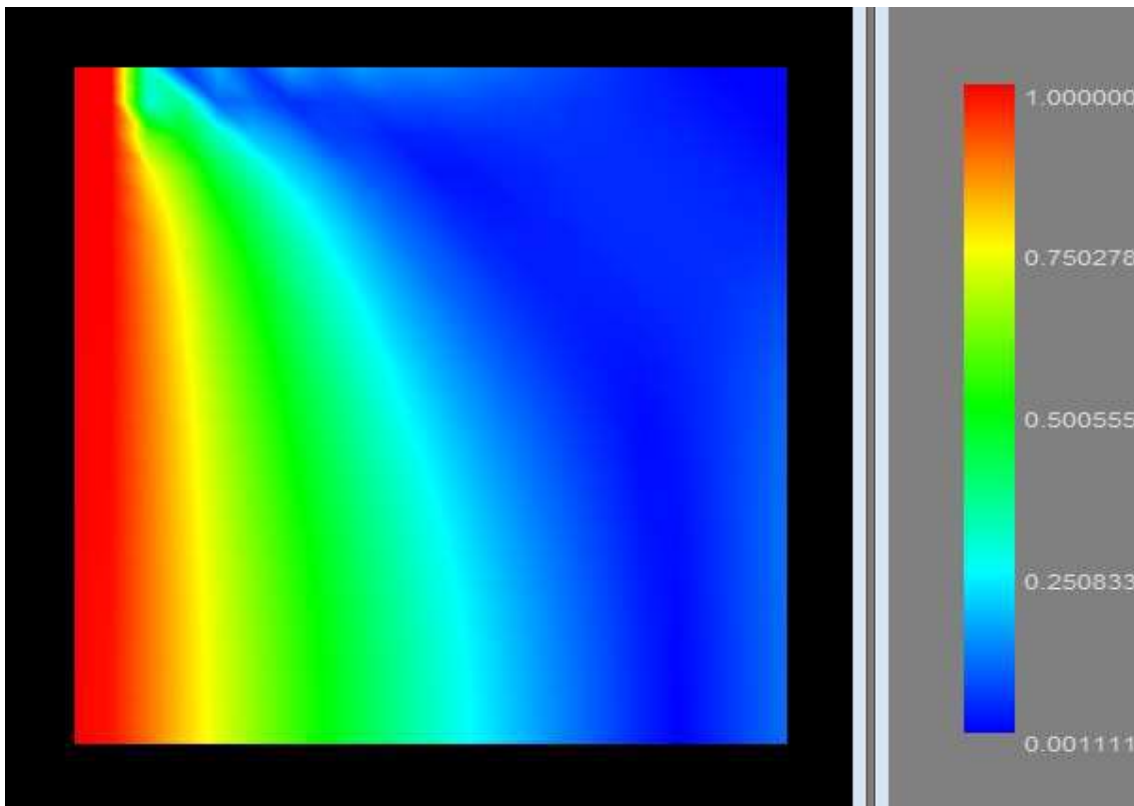


Figura 5.35 – Chapa submetida à retração – Zona plástica estacionária – Coeficiente  $k_F$  para o MLPG-1, nuvem #2 e  $\Delta t = 0,001s$

## Capítulo 6 – Conclusões

Conforme apresentado na revisão bibliográfica do subitem 1.2, a literatura apresenta uma extensa variedade de aplicações de procedimentos numéricos iterativos para a simulação do efeito de não-linearidade física da Teoria da Plasticidade Clássica e Viscoplasticidade na análise estrutural via métodos numéricos tradicionais, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). A presente pesquisa foi capaz de mostrar a adequabilidade da adaptação destes procedimentos para sua aplicação em formulações fracas locais via métodos verdadeiramente sem malha, de modo especial para as variantes 1 e 5 da família de Métodos Locais de Petrov-Galerkin (MLPG).

Ademais, as análises elasto-plásticas e viscoplásticas via MEF geralmente apresentam algumas patologias e dificuldades adicionais que aparentemente puderam ser superadas de maneira simplificada através dos métodos sem malha estudados. Um exemplo de fenômeno de *locking* do MEF associado a problemas elasto-plásticos não detectado nos resultados desta pesquisa é decorrente da deteriorização da interpolação à medida que as deformações se tornam majoritariamente plásticas, o que ocorre nos carregamentos próximos ao colapso.

Outra patologia comum do MEF igualmente superada de forma simples pela variante 1 do MLPG é o *shear locking*, que costuma afetar os resultados das análises numéricas de placas. Esta última patologia foi igualmente superada de forma simples pelo MLPG, conforme KONDA [136]. O estudo da presença das patologias numéricas típicas do MEF nas formulações do MLPG ainda carece de maior desenvolvimento, sobretudo no que concerne à consolidação das estratégias a serem tomadas para mitigar ou eventualmente evitar estes problemas.



Apesar da semelhança da formulação das variantes do MLPG estudadas com o MEF, o que é consequência do fato de que todos estes casos estão relacionados a integrações de domínio, a maioria dos exemplos mostrou maior concordância com os resultados via MEC apresentados em TELLES [56]. O próprio trabalho supracitado ilustra em alguns casos diferenças consideráveis entre os resultados do MEC e soluções clássicas via MEF encontradas na literatura para carregamentos próximos ao colapso. De um modo geral, o MEC não apresenta as patologias descritas nos parágrafos anteriores, o que amplia a confiabilidade da comparação entre o MEC e o MLPG realizada nesta pesquisa.

A sensibilidade do modelo numérico em relação à carga de colapso pode ser verificada não apenas entre métodos diferentes, mas até mesmo para um mesmo método, dependendo dos parâmetros adotados, tais como incremento de carga e discretização da malha ou nuvem. Do ponto de vista matemático, esta sensibilidade é compreensível, visto que está associada à tentativa do modelo numérico de simular um comportamento teórico assintótico que caracteriza o limite de um modelo matemático. Felizmente, em uma situação real de projeto no regime plástico, é recomendável manter o estado de tensões dentro das faixas iniciais e intermediárias do comportamento plástico, evitando estados de tensões próximos ao colapso, assim como se costuma evitar a fluência terciária em modelagens viscoplásticas.

Uma clara desvantagem do MLPG, no entanto, é o maior custo computacional em comparação aos métodos tradicionais, sobretudo para a geração da matriz global. A adoção da variante MLPG-5 ou a aplicação de técnicas de integração numérica especiais no MLPG-1 reduzem o custo computacional sem necessariamente comprometer a precisão e convergência. Outras técnicas estudadas, tais como as derivadas difusas, garantem reduções adicionais no custo, sob o risco de causar instabilidades adicionais, sobretudo para o potencial acúmulo de erro intrínseco às iterações do regime plástico ou viscoplástico, o que ressalta a necessidade de investigações exaustivas para comprovar sua aplicabilidade em análises não-lineares.

Apesar do crescente interesse da comunidade científica no estudo de métodos sem malha para a solução de Problemas de Valor de Contorno, existem diversas lacunas a serem preenchidas na procura por um algoritmo otimizado, estável, preciso e, portanto,

confiável. Conforme apresentado no subitem 4.9, o MLPG exige a calibração de diversos parâmetros para a definição do tamanho do domínio local de integração, do tamanho do suporte da função de interpolação ou ajuste da função aproximada, da metodologia de imposição das condições de contorno essenciais, das funções de ponderação, das técnicas de integração numérica, dentre outros aspectos.

Dentre os parâmetros supracitados, as definições referentes ao ajuste de curva da função aproximada são definitivamente as mais impactantes para o resultado final da metodologia. Suportes demasiadamente pequenos impedem a obtenção de um ajuste satisfatório, ao passo que suportes consideravelmente grandes deterioram a aproximação em decorrência da perda do caráter local do método. As experiências desta pesquisa mostram que tamanhos de suporte inadequados podem causar instabilidades até mesmo nas análises no regime elástico.

Embora ocasione incremento no custo computacional, a versão ortogonal do Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQMO) contribui para uma maior estabilidade da formulação, mas a solução definitiva para a otimização do tamanho do suporte ainda parece distante. Outras técnicas especiais como a redução de base (CAO et al. [131]) aliada ao MQMO ainda precisam de estudos mais aprofundados para verificação da sua real eficácia na estabilização do método. Conforme demonstrado teoricamente no subitem 4.1.1.3, quando o tamanho do suporte produz uma aproximação satisfatória para o MQM tradicional, não existem diferenças perceptíveis nos resultados em relação ao MQMO.

Estes problemas não podem ser traduzidos como impedimentos ao uso das metodologias numéricas sem malha como alternativas aos métodos numéricos tradicionais. A literatura sobre o tema aliada a esta pesquisa e demais teses desenvolvidas recentemente na COPPE apresentam resultados encorajadores que destacam o potencial destas abordagens.

Todos os métodos numéricos possuem vantagens e desvantagens, cada qual sendo mais adequado para naturezas específicas de problemas. Por conseguinte, o especialista em métodos numéricos deve conhecer e dominar as principais técnicas referentes a cada tipo de método, seja ele com ou sem malha, para possibilitar a escolha mais apropriada e otimizada para cada problema estudado. Técnicas de acoplamento entre métodos podem

ser usadas para tirar vantagem das especificidades de cada formulação em análises mais complexas.

Uma aparente vantagem dos métodos sem malha que vem sendo explorada é a sua flexibilidade para a adaptação da nuvem de pontos, com a movimentação, adição ou remoção de pontos para aumentar a precisão da modelagem de problemas que envolvem concentrações de tensões e propagação de fissuras. A aplicação destes procedimentos juntamente com a modelagem do fenômeno da plastificação constitui ferramenta poderosa e versátil para a solução de problemas complexos.

Os algoritmos de retorno mapeado para a correção plástica se mostraram eficientes em conjunto com a formulação fraca local incremental, não sendo observadas diferenças significativas nos resultados para o APS e o APPMP. Para problemas viscoplásticos, no entanto, a formulação implícita do APPMP se mostrou consideravelmente mais estável, mesmo com a adoção da matriz global elástica para a formulação fraca local.

A adoção da matriz global elástica para os incrementos de carga nos regimes plástico e viscoplástico se mostrou estável e suficientemente precisa, tendo como único inconveniente a realização de um número maior de iterações para cada incremento de carga, apesar do custo computacional mínimo para cada iteração, pois são economizados os tempos para geração e inversão da matriz global.

As metodologias que incluem a atualização da matriz global tangente possuem custo computacional consideravelmente maior, o que, em alguns casos, acaba eliminando a vantagem do menor número de iterações. Este problema é particularmente mais acentuado em métodos sem malha, que geralmente exigem tempos de processamento maiores para a geração da matriz global em relação aos métodos tradicionais. Adicionalmente, o processo de obtenção da matriz global tangente pode se mostrar desafiador, existindo o risco de erros numéricos, sobretudo para variações abruptas de carregamentos ou para casos de descarregamento.

## **6.1 – Sugestões para pesquisas futuras**

Dentre as ramificações de aplicações dos métodos sem malha geradas a partir desta pesquisa, as seguintes propostas merecem destaque:

- Análise dinâmica de materiais elastoplásticos e viscoplásticos;
- Estudo de propagação de ondas em meios elastoplásticos e viscoplásticos;
- Inclusão do efeito da temperatura, conforme formulação do apêndice D;
- Inclusão da formulação com não-linearidade geométrica, para a análise de grandes deslocamentos em problemas elastoplásticos e viscoplásticos, sobretudo com inclusão do efeito de temperatura;
- Estudo de formulações de acoplamento de métodos sem malha com formulações numéricas tradicionais;
- Estudo de formação e propagação de fissuras, considerando a flexibilidade trazida pela ausência de malha.

Sobre os desafios do desenvolvimento das formulações dos métodos sem malha em geral, os seguintes aspectos merecem atenção:

- Estudo de otimização do suporte de interpolação ou ajuste da função aproximada, definindo critérios para garantir a inexistência de singularidade ou mal-condicionamento. Uma possível estratégia é a aplicação de algoritmos genéticos, tal como apresentado em OLIVEIRA et al. [137];
- Estudo comparativo de técnicas de integração espacial numérica otimizadas para a aplicação em métodos sem malha, sobretudo para a família do MLPG, objetivando a redução do número de pontos de integração sem comprometimento da qualidade dos resultados numéricos, tal como ocorre em FONTES JR [88];
- Estudo comparativo da aplicação de formulações para a imposição das condições de contorno essenciais, tais como Multiplicadores de Lagrange e imposição direta pelo Método da Colocação;
- Amplificação do estudo de técnicas alternativas para o MQM e MLPG, incluindo redução de base (CAO et al. [131]), derivadas difusas, formulações mistas, entre outras possibilidades listadas no item 1.2;
- Estudo de técnicas de paralelização dos algoritmos computacionais dos métodos sem malha, tendo em vista a independência das equações que compõem o sistema linear como consequência da aplicação de formulações fracas locais.

# Referências Bibliográficas

- [1] C. G. RIOBOM NETO, “Análise Quasi-estática de Problemas Viscoelásticos Usando o Método dos Elementos de Contorno Via Galerkin,” Tese de M.Sc, PEC/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2013.
- [2] K. OSAKADA, “History of plasticity and metal forming analysis,” *Journal of Materials Processing Technology*, nº 210, pp. 1436-1454, 2010.
- [3] D. N. LITTLE, D. H. ALLEN e A. BHASIN, *Modeling and Design of Flexible Pavements and Materials*, Springer International Publishing, 2018.
- [4] C. A. COULOMB, “Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture,” *Academie Royale Des Sciences*, vol. 7, pp. 343-382, 1776.
- [5] M. F. HORSTEMEYER e D. J. BAMMANN, “Historical review of internal state variable theory for inelasticity,” *International Journal of Plasticity*, vol. 26, pp. 1310-1334, 2010.
- [6] H. TRESCA, “Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions,” *Comptes Rendus*, vol. 59, pp. 754-760, 1864.
- [7] R. VON MISES, “Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand,” *Göttinger Nachrichten Mathematisch - Physikalische Klasse*, vol. 4, pp. 582-592, 1913.
- [8] M. LEVY, “Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état,” *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, vol. 70, pp. 1323-1325, 1871.

- [9] R. VON MISES, "Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 8, n° 3, pp. 161-185, 1928.
- [10] L. PRANDTL, "Spannungsverteilung in plastischen Körpern," *Proceedings of the first international for applied mechanics*, pp. 43-54, 1924.
- [11] A. REUSS, "Berücksichtigung des elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 10, pp. 266-274, 1930.
- [12] F. K. G. ODQVIST, "Die Verfestigung von flußeisenähnlichen Körpern. Ein Beitrag zur Plastizitätstheorie," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 13, n° 5, pp. 360-363, 1933.
- [13] W. PRAGER, "An introduction to the mathematical theory of plasticity," *Journal of applied physics*, vol. 18, n° 4, pp. 375-383, 1947.
- [14] W. PRAGER, "Recent developments in the mathematical theory of plasticity," *Journal of applied physics*, vol. 20, pp. 235-241, 1949.
- [15] W. PRAGER, *An introduction to plasticity*, Addison-Wesley, 1959.
- [16] W. PRAGER, "A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids," *Journal of applied mechanics*, vol. 23, pp. 493-496, 1956.
- [17] H. ZEIGLER, "A modification of Prager's hardening rule," *Quarterly of applied mathematics*, vol. 17, pp. 55-65, 1959.
- [18] D. C. DRUCKER, "A more fundamental approach to plastic stress-strain relations," *Proceedings of the first US national congress of applied mechanics*, pp. 487-491, 1951.
- [19] D. C. DRUCKER e W. PRAGER, "Soil mechanics and plastic analysis or limit design," *Quarterly of applied mathematics*, vol. 10, pp. 157-165, 1952.
- [20] R. HILL, "A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals," *Proceedings of the royal society of London series A - Mathematical and physical sciences*, vol. 193, pp. 281-297, 1948.
- [21] R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, London: Oxford University Press, 1950.

- [22] P. M. NAGHDI, "Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity," em *Proceedings of the second symposium on naval structural mechanics*, Oxford, Pergamon, 1960, pp. 121-167.
- [23] W. FLÜGGE, *Viscoelasticity*, Blaisdell Publishing Company, 1967.
- [24] R. M. CHRISTENSEN, *Theory of Viscoelasticity*, New York: Dover Publications, 2003.
- [25] M. E. GURTIN e E. STERNBERG, "On the linear theory of viscoelasticity," *Archive of rational mechanics and analysis*, vol. 11, pp. 291-356, 1962.
- [26] B. D. COLEMAN e M. E. GURTIN, "Thermodynamics with internal state variables," *The journal of chemical physics*, vol. 47, pp. 597-613, 1967.
- [27] C. TRUESDELL, "Thermodynamics for beginners," em *Parkus H., Sedov L.I. (eds) Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids. IUTAM Symposia (International Union of Theoretical and Applied Mechanics)*, Vienna, Springer, 1968, pp. 373-389.
- [28] C. TRUESDELL, *Rational thermodynamics*, New York: Springer-Verlag, 1984.
- [29] B. D. COLEMAN, "Thermodynamics of materials with memory," *Archive for rational mechanics and analysis*, vol. 17, pp. 1-46, 1964.
- [30] J. KESTIN e J. R. RICE, "Paradoxes in the application of thermodynamics to strained rods," em *A critical review of thermodynamics (eds. E. B. Stuart, B. Gal-Or and A. J. Brainard)*, Baltimore, Mono Book Corp., 1970, pp. 275-298.
- [31] J. KRATOCHVIL e O. W. DILLON, "Thermodynamics of crystalline elastic-visco-plastic materials," *Journal of applied physics*, vol. 41, pp. 1470-1479, 1970.
- [32] J. R. RICE, "Inelastic constitutive relations for solids: an internal-variable theory and its application to metal plasticity," *Journal of the mechanics and physics of solids*, vol. 19, pp. 433-455, 1971.
- [33] B. HALPHEN e Q. S. NGUYEN, "Sur des materiaux standards généralisés," *Journal de mecanique*, vol. 14, pp. 39-63, 1975.
- [34] A. E. GREEN e P. M. NAGHDI, "A general theory of an elastic-plastic continuum," *Archive for rational mechanics and analysis*, vol. 18, n° 4, pp. 251-281, 1965.

- [35] E. KRÖNER, “How the internal state of a physically deformed body is to be described in a continuum theory,” *Fourth international congress on rheology*, 1960.
- [36] E. KRÖNER, “On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics,” *International journal of engineering science*, vol. 1, n° 2, pp. 261-278, 1963.
- [37] L. C. WOODS, “The bogus axioms of continuum mechanics,” *Bulletin of the institute of mathematics and its applications*, vol. 17, pp. 98-102, 1981.
- [38] G. LEBON, D. JOU e J. CASAS-VÁZQUEZ, *Understanding non-equilibrium thermodynamics*, Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [39] J. LEMAITRE e L. CHABOCHE, *Mechanics of solid materials*, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [40] E. C. BINGHAM, *Fluidity and plasticity*, New York: McGraw-Hill, 1922.
- [41] F. H. NORTON, *The creep of steel at high temperatures*, New York: McGraw-Hill, 1929.
- [42] F. K. G. ODQVIST, “Creep stresses in a rotating disc,” em *Proceedings of the fourth international congress for applied mechanics*, Cambridge, 1934, pp. 228-229.
- [43] K. HOHENEMSER e W. PRAGER, “Fundamental equations and definitions concerning the mechanics of isotropic continua,” *Journal of rheology*, vol. 3, n° 1, pp. 16-22, 1932.
- [44] P. PERZYNA, “The constitutive equations for rate sensitive plastic materials,” *Quarterly of applied mathematics*, vol. 20, n° 4, pp. 321-332, 1963.
- [45] P. PERZYNA, “Fundamental problems in viscoplasticity,” *Advances in applied mechanics*, vol. 9, pp. 243-377, 1966.
- [46] J. LUBLINER, *Plasticity theory*, New York: Dover publications, 2008.
- [47] J. C. SIMO e T. J. R. HUGHES, *Computational inelasticity*, Springer, 1998.
- [48] J. CHAKRABARTY, *Theory of Plasticity*, Butterworth-Heinemann, 2006.
- [49] A. MENDELSON, *Plasticity - Theory and application*, New York: McMillan Company, 1968.
- [50] A. NADAI, *Theory of flow and fracture of solids*, volume 1, McGraw-Hill, 1950.



- [51] M. NEGAHBAN, The mechanical and thermodynamical theory of plasticity, CRC Press, 2012.
- [52] K. J. BATHE, Finite element procedures, Prentice-Hall, 1996.
- [53] O. C. ZIENKIEWICZ e R. L. TAYLOR, The finite element method - volume2: solid mechanics, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [54] D. R. J. OWEN e E. HINTON, Finite elements in plasticity: theory and practice, Swansea: Pineridge Press, 1980.
- [55] M. A. CRISFIELD, Non-linear finite element analysis of solids and structures, John Wiley and Sons, 1997.
- [56] J. C. F. TELLES, The boundary element method applied to inelastic problems, New York: Springer-Verlag, 1983.
- [57] C. A. BREBBIA, J. C. F. TELLES e L. C. WROBEL, Boundary element techniques, Theory and applications in engineering, New York: Springer-Verlag, 1984.
- [58] G. MAENCHEN e S. SACKS, "The tensor code," *Alder, B. (ed.), Methods in computational physics*, vol. 3, pp. 181-210, 1964.
- [59] M. L. WILKINS, "Calculation of elastic-plastic flow," *Alder, B., Methods in computational physics*, vol. 3, pp. 211-263, 1964.
- [60] O. C. ZIENKIEWICZ, S. VALLIAPPAN e I. P. KING, "Elastic-plastic solutions of engineering problems, initial stress finite element approach," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 1, pp. 75-100, 1969.
- [61] O. C. ZIENKIEWICZ e I. C. CORMEAU, "Visco-plasticity solution by finite element process," *Archives of mechanics*, vol. 24, pp. 873-889, 1972.
- [62] O. C. ZIENKIEWICZ e I. C. CORMEAU, "Visco-plasticity, plasticity and creep in elastic solids - a unified numerical solution approach," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 8, pp. 821-845, 1974.
- [63] J. C. SIMO e R. L. TAYLOR, "Consistent tangent operators for rate-independent plasticity," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 48, pp. 101-118, 1985.

- [64] J. C. SIMO e R. L. TAYLOR, "A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 22, pp. 649-670, 1986.
- [65] J. HUANG e D. V. GRIFFITHS, "Return mapping algorithms and stress predictors for failure analysis in geomechanics," *Journal of engineering mechanics*, vol. 135, n° 4, pp. 276-284, 2009.
- [66] V. D. KUPRADZE e M. A. ALEKSIDZE, "The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems," *USSR Computational mathematics and mathematical physics*, vol. 4, n° 4, pp. 82-126, 1964.
- [67] J. C. F. TELLES, G. S. CASTOR e S. GUIMARAES, "A numerical Green's function approach for boundary elements applied to fracture mechanics," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 38, pp. 3259-3274, 1995.
- [68] L. B. LUCY, "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis," *Astronomical journal*, vol. 82, pp. 1013-1024, 1977.
- [69] R. A. GINGOLD e J. J. MONAGHAN, "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars," *Monthly notices of the royal astronomical society*, vol. 181, pp. 375-389, 1977.
- [70] T. BELYTSCHKO, Y. KRONGAUZ, D. ORGAN, M. FLEMING e P. KRYSL, "Meshless methods: an overview and recent developments," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 139, pp. 3-47, 1996.
- [71] B. NAYROLES, G. TOUZOT e P. VILLON, "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements," *Computational mechanics*, vol. 10, pp. 307-318, 1992.
- [72] P. LANCASTER e K. SALKAUSKAS, "Surfaces generated by moving least squares methods," *Mathematics of computation*, vol. 37, n° 155, pp. 141-158, 1981.
- [73] T. BELYTSCHKO, Y. Y. LU e G. L., "Element-free galerkin methods," *International Journal for numerical methods in engineering*, vol. 37, n° 2, pp. 229-256, 1994.
- [74] S. N. ATLURI e S. SHEN, "The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: a simple and less-costly alternative to the finite element and boundary element

- methods,” *Computer modelling in engineering and sciences*, vol. 3, n° 1, pp. 11-51, 2002.
- [75] Y. Y. LU, T. BELYTSCHKO e L. GU, “A new implementation of the element free Galerkin method,” *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 113, pp. 397-414, 1994.
- [76] H. WENDLAND, “Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree,” *Advances in computational mathematics*, vol. 4, pp. 389-396, 1995.
- [77] Z. WU, “Compactly supported positive definite radial functions,” *Advances in computational mathematics*, vol. 4, pp. 283-292, 1995.
- [78] C. A. BREBBIA e D. NARDINI, “Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure,” *Soil dynamics and earthquake engineering*, vol. 2, n° 4, pp. 228-233, 1983.
- [79] L. C. WROBEL e C. A. BREBBIA, “The dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems,” *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 65, pp. 147-164, 1987.
- [80] P. W. PARTRIDGE, C. A. BREBBIA e L. C. WROBEL, *The dual reciprocity boundary element method*, Springer, 1991, pp. 69-75.
- [81] M. A. GOLDBERG, “The method of fundamental solutions for Poisson's equation,” *Engineering analysis with boundary elements*, vol. 16, n° 3, pp. 205-213, 1995.
- [82] W. K. LIU, J. ADEE e S. JUN, “Reproducing kernel and wavelets particle methods for elastic and plastic problems,” em *BESON, D. J., ASARO, R. A. (eds.), Advanced computational methods for material modeling*, 1993, pp. 175-190.
- [83] L. BABUSKA e J. M. MELENK, “The partition of unity finite element method: Basic theory and applications,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 289-314, 1996.
- [84] C. DUARTE e J. ODEN, “Hp Clouds— A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems,” *Numerical methods for partial differential equations*, vol. 12, pp. 673-705, 1996.
- [85] E. OÑATE, S. IDELSOHN, O. C. ZIENKIEWICZ e R. L. TAYLOR, “A finite point method in computational mechanics, applications to convective transport

- and fluid flow,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 39, n° 22, pp. 3839-3866, 1996.
- [86] N. R. ALURU, “A point collocation method based on reproducing kernel approximations,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 47, n° 6, pp. 1083-1121, 2000.
- [87] S. N. ATLURI, H. T. LIU e Z. D. HAN, “Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) mixed collocation method for elasticity problems,” *Computer modeling in engineering and sciences*, vol. 14, n° 3, pp. 141-152, 2006.
- [88] E. F. FONTES JR, “Técnicas avançadas em métodos verdadeiramente sem malha com aplicações em problemas de elasticidade e mecânica da fratura via superposição da função de Green numérica,” Tese de D.Sc, PEC/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2014.
- [89] N. PERRONE e R. KAO, “A general finite difference method for arbitrary meshes,” *Computers and structures*, vol. 5, n° 1, pp. 45-57, 1975.
- [90] T. LISZKA e J. ORKISZ, “The finite difference method for arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics,” *Computers and structures*, vol. 11, pp. 83-95, 1980.
- [91] S. KITIPORNCHAI, K. M. LIEW e Y. CHENG, “A boundary element-free method (BEFM) for three-dimensional elasticity problems,” *Computational mechanics*, vol. 36, n° 1, pp. 13-20, 2005.
- [92] K. M. LIEW, Y. CHENG e S. KITIPORNCHAI, “Boundary element-free method (BEFM) and its application to two-dimensional elasticity problems,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 65, n° 8, pp. 1310-1332, 2006.
- [93] S. N. ATLURI e T. ZHU, “A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics,” *Computational mechanics*, vol. 22, pp. 117-127, 1998.
- [94] S. N. ATLURI e T. ZHU, “A new meshless Petrov-Galerkin (MLPG) approach to nonlinear problems in computer modeling and simulation,” *Computational modeling and simulation in engineering*, vol. 3, pp. 187-196, 1998.
- [95] T. ZHU, J. D. ZHANG e S. N. ATLURI, “A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach,” *Computational mechanics*, vol. 21, n° 3, pp. 223-235, 1998.

- [96] L. S. MIERS, “Formulações não-convencionais de métodos do tipo meshless baseados na equação integral de contorno,” Tese de D.Sc, PEC/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.
- [97] K. L. SILVA, “Uma aplicação da estratégia OMLS para elastoplasticidade dinâmica com o método dos elementos de contorno,” Tese de D.Sc, PEC/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2010.
- [98] Z. D. HAN e S. N. ATLURI, “A truly-meshless Galerkin method, through the MLPG "mixed approach",” *Journal of marine science and technology*, vol. 19, nº 4, pp. 444-452, 2011.
- [99] W. H. PEIRCE, “Numerical integration over the planar annulus,” *Journal of the society for industrial and applied mathematics*, vol. 5, nº 2, pp. 66-73, 1957.
- [100] J. MA, V. ROKHLIN e S. WANDZURA, “Generalized Gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions,” *SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) journal on numerical analysis*, vol. 33, nº 3, pp. 971-996, 1996.
- [101] S. DE e K. J. BATHE, “The method of finite spheres with improved numerical integration,” *Computers and structures*, vol. 79, pp. 2183-2196, 2001.
- [102] R. PECHER, “Efficient cubature formulae for MLPG and related methods,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 65, nº 4, pp. 566-593, 2006.
- [103] A. MAZZIA, M. FERRONATO, G. PINI e G. GAMBOLATI, “A comparison of numerical integration rules for the meshless local Petrov-Galerkin method,” *Numerical algorithms*, vol. 45, pp. 61-74, 2007.
- [104] A. MAZZIA e G. PINI, “Product Gauss quadrature rules vs. cubature rules in the meshless local Petrov-Galerkin method,” *Journal of complexity*, vol. 26, nº 1, pp. 82-101, 2010.
- [105] J. SARADA e K. NAGARAJA, “Generalized Gaussian quadrature rules over two-dimensional regions with linear sides,” *Applied mathematics and computation*, vol. 217, nº 12, pp. 5612-5621, 2011.
- [106] X. LI e S. LI, “On the stability of the moving least squares approximation and the element-free Galerkin method,” *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 72, pp. 1515-1531, 2016.

- [107] X. LI e O. WANG, “Analysis of the inherent instability of the interpolating moving least squares method when using improper polynomial bases,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 73, pp. 21-34, 2016.
- [108] D. MIRZAEI, R. SCHABACK e D. M., “On generalized moving least squares and diffuse derivatives,” *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 32, pp. 983-1000, 2012.
- [109] H. MEHRABI e B. VOOSOGHI, “Recursive moving least squares,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 58, pp. 119-128, 2015.
- [110] Q. WANG, W. ZHOU, Y. CHENG, G. MA, X. CHANG, Y. MIAO e E. CHEN, “Regularized moving least-square method and regularized improved interpolating moving least-square method with nonsingular moment matrices,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 325, pp. 120-145, 2018.
- [111] Y. CHEN, A. ESKANDARIAN, M. OSKARD e J. D. LEE, “Meshless analysis of plasticity with application to crack growth problems,” *Theoretical and applied fracture mechanics*, vol. 41, pp. 83-94, 2004.
- [112] M. PENG, D. LI e Y. CHENG, “The complex variable element-free Galerkin (CVEFG) method for elasto-plasticity problems,” *Engineering structures*, vol. 33, pp. 127-135, 2011.
- [113] Y. CHENG e J. LI, “A complex variable meshless method for fracture problems,” *Science in China series G*, vol. 49, n° 1, pp. 46-59, 2006.
- [114] K. M. LIEW, C. FENG, Y. CHENG e S. KITIPORNCHAI, “Complex variable moving least-squares method: a meshless approximation technique,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 70, n° 1, pp. 46-70, 2007.
- [115] S. P. TIMOSHENKO e J. N. GOODIER, *Teoria da Elasticidade*, McGraw-Hill, 1980.
- [116] S. F. VILLAÇA e L. F. T. GARCIA, *Introdução à Teoria da Elasticidade*, Rio de Janeiro: Escola Politécnica, UFRJ, 2006.
- [117] G. C. NAYAK e O. C. ZIENKIEWICZ, “Note on the 'alpha'-constant stiffness method for the analysis of nonlinear problems,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 4, pp. 579-582, 1972.
- [118] H. M. WESTERGAARD, “On the resistance of ductile materials to combined stresses in two or three directions perpendicular to one another,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 189, n° 5, pp. 627-640, 1920.

- [119] W. M. WANG, L. J. SLUYS e R. BORST, “Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 40, pp. 3839-3864, 1997.
- [120] E. BELTRAMI, “Sulle condizioni di resistenze dei corpi elastici,” *Il nuovo cimento*, vol. 18, n° 1, pp. 145-155, 1885.
- [121] C. S. PINTO, *Curso básico de mecânica dos solos*, São Paulo: Oficina de textos, 2006.
- [122] H. P. FEIGENBAUM e Y. F. DAFALIAS, “Directional distortional hardening in metal plasticity within thermodynamics,” *International journal of solids and structures*, vol. 44, pp. 7526-7542, 2007.
- [123] G. C. NAYAK e O. C. ZIENKIEWICZ, “Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 5, pp. 113-135, 1972.
- [124] F. AURICCHIO e R. L. TAYLOR, “Two material models for cyclic plasticity: nonlinear kinematics hardening and generalized plasticity,” *International journal of plasticity*, vol. 11, n° 1, pp. 65-98, 1995.
- [125] O. M. HEERES, A. S. J. SUIKER e R. BORST, “A comparison between the Perzyna viscoplastic model and the Consistency viscoplastic model,” *European journal of mechanics A/Solids*, vol. 21, pp. 1-12, 2002.
- [126] K. NAUMENKO e H. ALTENBACH, *Modeling high temperature materials behavior for structural analysis*, Springer International Publishing, 2016.
- [127] R. K. PENNY e D. L. MARRIOTT, *Design for creep*, Springer Netherlands, 1995.
- [128] N. N. MALININ e G. M. KHADJINSKY, “Theory of creep with anisotropic hardening,” *International journal of mechanical sciences*, vol. 14, n° 4, pp. 235-246, 1972.
- [129] J. L. CHABOCHE, “Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity,” *International journal of plasticity*, vol. 5, pp. 247-302, 1989.
- [130] F. K. G. ODQVIST, *Mathematical theory of creep and creep rupture*, Oxford: Oxford University Press, 1974.

- [131] Y. CAO, J. L. DONG e L. Q. YAO, “A Modification of the Moving Least-Squares Approximation in the Element Free Galerkin,” *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2014, p. 13, 2014.
- [132] M. A. CRISFIELD, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Chichester: John Wiley and Sons, 1991.
- [133] Y. F. NIE, S. N. ATLURI e C. W. ZUO, “The Optimal Radius of the Support of Radial Weights Used in Moving Least Squares Approximation,” *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 12(2), pp. 137-147, 2006.
- [134] A. S. VESIC, “Bearing capacity of shallow foundations,” em *Foundation engineering handbook*, New York, Van Nostrand Reinhold Co., 1975, pp. 121-147.
- [135] F. BAUER e E. L. REISS, “On the Numerical Determination of Shrinkage Stresses,” *Journal of Applied Mechanics*, pp. 123-127, Março 1970.
- [136] D. H. KONDA, “Análise de Flexão de Placas Espessas através de Métodos Sem Malhas com a Utilização de uma Técnica Eficiente de Integração,” Tese de D.Sc, PEC/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2018.
- [137] T. OLIVEIRA, W. VÉLEZ, E. SANTANA, T. ARAÚJO, F. MENDONÇA e A. PORTELA, “A local mesh free method for linear elasticity and fracture mechanics,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 101, pp. 221-242, 2019.
- [138] A. J. ABBO, A. V. LYANMIN, S. W. SLOAN e J. P. HAMBLETON, “A C2 continuous approximation to the Mohr-Coulomb yield surface,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, pp. 3001-3010, 2011.
- [139] W. PRAGER e P. G. HODGE, *Theory of Perfectly Plastic Solids*, New York: Dover, 1968.



# Apêndice A – Derivadas das Funções de Escoamento

Este apêndice objetiva apresentar as derivadas de primeira e segunda ordem das funções de escoamento estudadas nesta pesquisa. As derivadas de primeira ordem são amplamente aplicadas nas formulações no regime plástico e viscoplástico, ao passo que as derivadas de segunda ordem são necessárias apenas para a rotina do APPMP.

Para um critério de escoamento qualquer, o vetor gradiente da função de escoamento pode ser calculado em função dos diversos invariantes (que são variáveis independentes para efeito de derivação), conforme ZIENKIEWICZ e TAYLOR [53]:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{A.1})$$

ou, alternativamente, conforme conveniência

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_s} \frac{\partial \alpha_s}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{A.2a})$$

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \alpha_s}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \alpha_s}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{A.2b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_s}{\partial J_2} &= -\frac{\text{tg}3\alpha_s}{2J_2} \\ \frac{\partial \alpha_s}{\partial J_3} &= \frac{\text{tg}3\alpha_s}{3J_3} \end{aligned} \quad (\text{A.2c})$$

É pertinente lembrar que, como o objetivo final é obter derivadas de segunda ordem, para efeito de cálculo das derivadas, as tensões  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{21}$  são variáveis diferentes,

apesar de assumirem sempre o mesmo valor. As derivadas dos invariantes são definidas como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} &= \delta_{ij} \\ \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} &= S_{ji} \\ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} &= S_{mi}S_{jm} - \frac{2}{3}J_2\delta_{ij}\end{aligned}\tag{A.3}$$

As derivadas de segunda ordem das funções de escoamento podem ser escritas na forma geral

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} &= \frac{\partial^2 F}{\partial J_2^2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial^2 F}{\partial J_2 J_3} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial^2 J_2}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} + \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial J_3^2} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial^2 F}{\partial J_2 J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \frac{\partial^2 J_3}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}}\end{aligned}\tag{A.4}$$

Por conveniência, são definidas as seguintes funções auxiliares:

$$\begin{aligned}F_1 &= \sqrt{J_2} \\ F_2 &= \sqrt{J_2} \cos \alpha_s \\ F_3 &= \sqrt{J_2} \sin \alpha_s\end{aligned}\tag{A.5}$$

Os critérios de escoamento estudados nesta pesquisa podem então ser reescritos:

- Tresca:  $F = 2F_2 - Y$  ;
- Von Mises:  $F = \sqrt{3}F_1 - Y$  ;
- Mohr-Coulomb:  $F = 2F_2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \phi F_3 + \frac{2}{3} \sin \phi I_1 - 2C \cos \phi$  ;
- Drucker-Prager:  $F = \sqrt{3}F_1 + \mu I_1 - Y$  .

Para as funções  $F_1$  e  $I_1$ , as derivadas são imediatas. A tabela a seguir apresenta as derivadas de primeira e de segunda ordem das demais funções auxiliares que compõem os critérios de escoamento.

Tabela A.1 – Derivadas das funções auxiliares dos critérios de escoamento

	$F_2$	$F_3$
$\frac{\partial}{\partial J_2}$	$\frac{(J_2)^{-1/2}}{2} \cos \alpha_s [1 + \operatorname{tg} \alpha_s \operatorname{tg} 3 \alpha_s]$	$\frac{(J_2)^{-1/2}}{2} \cos \alpha_s [\operatorname{tg} \alpha_s - \operatorname{tg} 3 \alpha_s]$
$\frac{\partial}{\partial J_3}$	$\frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha_s}{2 J_2 \cos 3 \alpha_s}$	$-\frac{\sqrt{3} \cos \alpha_s}{2 J_2 \cos 3 \alpha_s}$
$\frac{\partial^2}{\partial J_2^2}$	$-\frac{(J_2)^{-3/2}}{4} \frac{\cos \alpha_s + 3 \operatorname{sen} \alpha_s \operatorname{tg} 3 \alpha_s}{\cos^2 3 \alpha_s}$	$-\frac{(J_2)^{-3/2}}{4} \frac{\operatorname{sen} \alpha_s - 3 \cos \alpha_s \operatorname{tg} 3 \alpha_s}{\cos^2 3 \alpha_s}$
$\frac{\partial^2}{\partial J_2 \partial J_3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4 J_2^2 \cos 3 \alpha_s} [\cos \alpha_s \operatorname{tg} 3 \alpha_s + \operatorname{sen} \alpha_s (3 \sec^2 3 \alpha_s - 1)]$	$-\frac{\sqrt{3}}{4 J_2^2 \cos 3 \alpha_s} [\operatorname{sen} \alpha_s \operatorname{tg} 3 \alpha_s + \cos \alpha_s (1 - 3 \sec^2 3 \alpha_s)]$
$\frac{\partial^2}{\partial J_3^2}$	$-\frac{3(J_2)^{-5/2}}{4 \cos^3 3 \alpha_s} [\cos \alpha_s \cos 3 \alpha_s + 3 \operatorname{sen} \alpha_s \operatorname{sen} 3 \alpha_s]$	$\frac{3(J_2)^{-5/2}}{4 \cos^3 3 \alpha_s} [3 \cos \alpha_s \operatorname{sen} 3 \alpha_s - \operatorname{sen} \alpha_s \cos 3 \alpha_s]$

As derivadas de segunda ordem dos invariantes de tensão são escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J_2}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} &= \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \\ \frac{\partial^2 J_3}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} &= \delta_{il} S_{jk} + \delta_{jk} S_{il} - \frac{2}{3} (\delta_{ij} S_{kl} + \delta_{kl} S_{ij}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

# Apêndice B – Suavização de Funções de Escoamento Multissuperfície

Do universo de critérios de escoamento estudados nesta pesquisa, os modelos de Tresca e Mohr-Coulomb apresentam descontinuidades nos gradientes das suas respectivas superfícies. Apesar da existência de diversas abordagens para o tratamento destas descontinuidades, conforme descrito no capítulo 3, este trabalho se concentrará no processo de suavização proposto por ABBO et al. [138], por se tratar de uma formulação simples e satisfatória para os objetivos da pesquisa. Toda a formulação descrita neste apêndice é baseada no critério de Mohr-Coulomb, sendo o critério de Tresca tratado como um caso particular onde  $\phi = 0$ .

O critério de Mohr-Coulomb possui descontinuidade no gradiente da superfície para  $|\alpha_S| = \pi/6$ . O artigo supracitado apresenta uma aproximação com continuidade C2 para uma região  $\alpha_{ST} \leq |\alpha_S| \leq \pi/6$ , sendo  $\alpha_{ST}$  um ângulo suficientemente próximo da descontinuidade, definido nesta pesquisa como

$$\alpha_{ST} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180} = 29^\circ \tag{B.1}$$

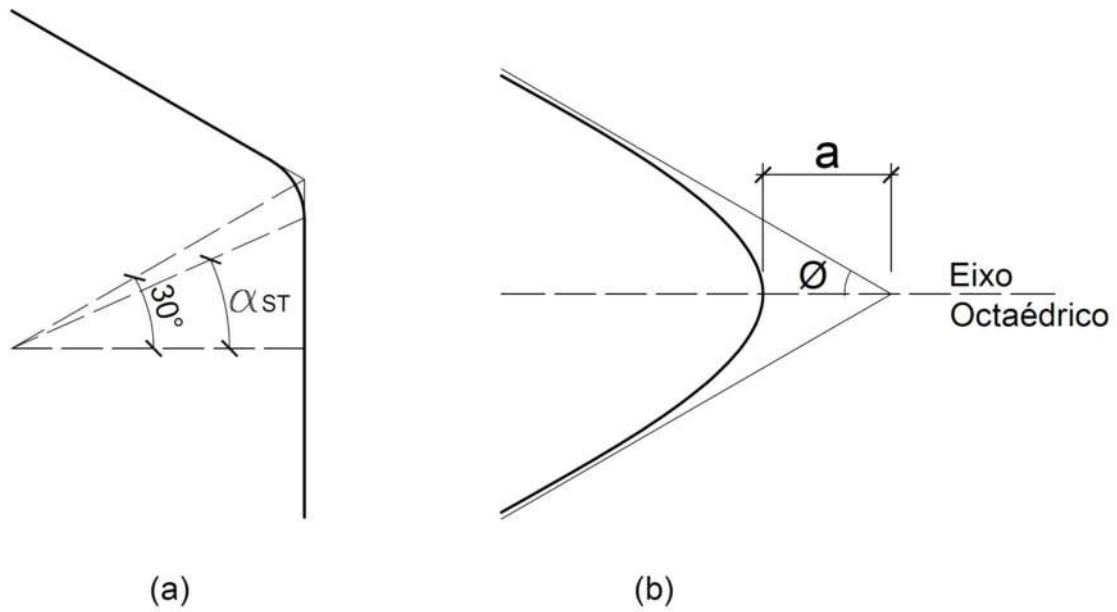


Figura B.1 – Suavização C2 para o critério de Mohr-Coulomb: (a) Descontinuidade em  $|\alpha_s| = \pi/6$ ; (b) Suavização hiperbólica para o vértice do eixo octaédrico

A continuidade C2 do critério de Mohr-Coulomb, indispensável para a aplicação do APPMP, é garantida através da seguinte adaptação da função de escoamento:

$$F = 2\sqrt{J_2}K(\alpha_s) + \frac{2}{3}\text{sen}\phi I_1 - 2C \cos\phi$$

$$K(\alpha_s) = \begin{cases} \cos\alpha_s - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{sen}\phi\text{sen}\alpha_s, & |\alpha_s| \leq \alpha_{ST} \\ A + B\text{sen}3\alpha_s + C\text{sen}^23\alpha_s, & |\alpha_s| > \alpha_{ST} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Impondo as condições de continuidade C2 em  $|\alpha_s| = \alpha_{ST}$ , tem-se o seguinte resultado para os coeficientes A, B e C:

$$\begin{aligned}
D &= \cos \alpha_{ST} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen} \phi \langle \alpha_S \rangle \text{sen} \alpha_{ST} \\
E &= \langle \alpha_S \rangle \text{sen} \alpha_{ST} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen} \phi \cos \alpha_{ST} \\
B &= \frac{D \langle \alpha_S \rangle \text{sen} 6 \alpha_{ST} - 6 E \cos 6 \alpha_{ST}}{18 \cos^3 3 \alpha_{ST}} \\
C &= \frac{-D \cos 3 \alpha_{ST} - 3 E \langle \alpha_S \rangle \text{sen} 3 \alpha_{ST}}{18 \cos^3 3 \alpha_{ST}} \\
A &= \cos \alpha_{ST} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen} \phi \langle \alpha_S \rangle \text{sen} \alpha_{ST} - B \langle \alpha_S \rangle \text{sen} 3 \alpha_{ST} - C \text{sen}^2 3 \alpha_{ST}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

A tabela B.1 a seguir detalha as derivadas de primeira e segunda ordem das novas funções apresentadas na equação (B.2).

Tabela B.1 – Derivadas das funções de suavização do critério de Mohr-Coulomb

	$\sqrt{J_2} \text{sen} 3 \alpha_S$	$\sqrt{J_2} \text{sen}^2 3 \alpha_S$
$\frac{\partial}{\partial J_2}$	$-\frac{\text{sen} 3 \alpha_S}{\sqrt{J_2}}$	$-\frac{5}{2\sqrt{J_2}} \text{sen}^2 3 \alpha_S$
$\frac{\partial}{\partial J_3}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2J_2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{J_2} \text{sen} 3 \alpha_S$
$\frac{\partial^2}{\partial J_2^2}$	$2(J_2)^{-3/2} \text{sen} 3 \alpha_S$	$\frac{35}{4}(J_2)^{-3/2} \text{sen}^2 3 \alpha_S$
$\frac{\partial^2}{\partial J_2 \partial J_3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2J_2^2}$	$\frac{15\sqrt{3}}{2J_2^2} \text{sen} 3 \alpha_S$
$\frac{\partial^2}{\partial J_3^2}$	0	$\frac{27}{2}(J_2)^{-5/2}$

Para problemas com previsão de ruptura à tração, o artigo [131] sugere ainda uma suavização do vértice da pirâmide da superfície de ruptura do critério de Mohr-Coulomb

através de um hiperbolóide cuja interseção com o eixo octaédrico está localizada a uma distância  $a$  do referido vértice (ver figura B.1b):

$$F = 2\sqrt{J_2 [K(\alpha_s)]^2 + a^2 \text{sen}^2 \phi} + \frac{2}{3} \text{sen} \phi I_1 - 2C \cos \phi \quad (\text{B.4})$$

# Apêndice C – Soluções Analíticas para Alguns Problemas Elastoplásticos

A seguir serão apresentadas as soluções analíticas das versões simplificadas de alguns problemas estudados no capítulo 5. Tendo em vista o caráter não linear do modelo físico adotado, as simplificações que serão introduzidas são necessárias para viabilizar a obtenção de uma solução analítica e não poderão ser reproduzidas em sua totalidade na análise numérica, razão pela qual as fórmulas desenvolvidas aqui servirão apenas como uma referência para avaliação qualitativa dos resultados numéricos.

## C.1 – Tubo Submetido à Pressão Interna

Para o problema descrito no item 5.1, com a adoção do critério de Von Mises, a solução analítica foi apresentada por HODGE e WHITE apud PRAGER e HODGE [139] e é extensivamente detalhada por LUBLINER [46]. Esta solução envolve um sistema de equações diferenciais parciais não lineares que precisa ser resolvida numericamente. O artigo e livro supracitados apresentam os resultados numéricos graficamente. Para viabilizar a obtenção de uma solução analítica que não envolve soluções numéricas de equações diferenciais, será utilizado um critério de Tresca adaptado, conforme NADAI [50] e LUBLINER [46], que será apresentado a seguir.



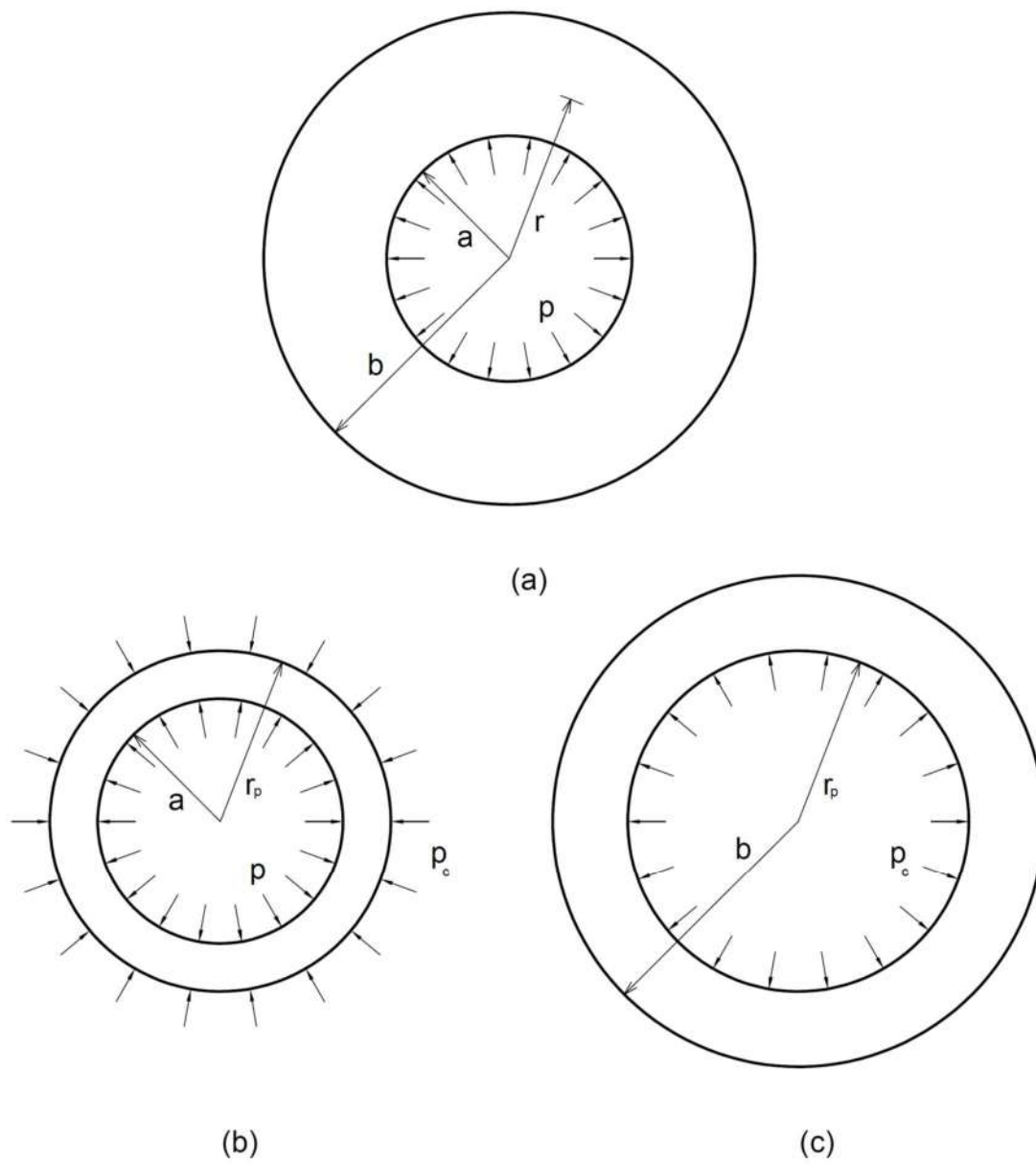


Figura C.1 – (a) Cilindro submetido à pressão interna; (b) Zona plástica; (c) Zona elástica

Inicialmente, a solução para o problema no regime elástico no Estado Plano de Deformações (EPD) pode ser escrita em coordenadas polares conforme [115]:

$$\begin{aligned}
u_r(r) &= \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \left[ (1-2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right] \\
\sigma_r(r) &= \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\
\sigma_\theta(r) &= \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \\
\sigma_z(r) &= \frac{2\nu pa^2}{b^2 - a^2}
\end{aligned} \tag{C.1}$$

O tensor de tensões elásticas, que, devido à natureza axissimétrica do problema, possui apenas variação radial, indica uma maior concentração de tensões ao longo da superfície interna, com redução ao longo da direção radial até a superfície externa. Consequentemente, com o incremento da pressão interna, a plastificação se inicia na superfície interna e a região plastificada se expande radialmente de dentro para fora da seção do cilindro.

Para a região plástica, no intuito de viabilizar uma solução analítica, será adotado o critério de Tresca adaptado, considerando  $\sigma_r \leq \sigma_z \leq \sigma_\theta$  :

$$F = \sqrt{3} \left( \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} \right) - Y = 0 \tag{C.2}$$

Como a plastificação se inicia no raio interno ( $r = a$ ), a pressão  $p_0$  de início da plastificação pode ser escrita como

$$p_0 = \frac{Y}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \tag{C.3a}$$

Na figura C.1, o raio plástico  $r_p$  define o limite da região plastificada  $a \leq r \leq r_p$  e  $p_c$  é a pressão de interface entre as regiões plástica e elástica. Na região  $r_p \leq r \leq b$ , que permanece no regime elástico, a solução analítica é idêntica ao campo de deslocamentos e estado de tensões das equações C.1, com a substituição do raio  $a$  por  $r_p$  e da pressão  $p$  por  $p_c$ .

Aplicando o critério de escoamento (equação (C.2)) no estado de tensões elástico na interface de plastificação  $r=r_p$ , obtém-se a pressão na interface

$$p_c = \frac{Y}{\sqrt{3}} \left( 1 - \left( \frac{r_p}{b} \right)^2 \right) \quad (\text{C.3b})$$

Como a equação de equilíbrio para problemas axissimétricos

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (\text{C.4})$$

permanece válida no regime plástico, a tensão radial é calculada como

$$\sigma_r(a \leq r \leq r_p) = -p + 2 \frac{Y}{\sqrt{3}} \ln \left( \frac{r}{a} \right) \quad (\text{C.5})$$

Igualando a tensão radial plástica e elástica na interface  $r = r_p$ , obtém-se a equação para o cálculo do raio plástico  $r_p$ , que pode ser resolvida numericamente:

$$1 - \left( \frac{r_p}{b} \right)^2 + 2 \ln \left( \frac{r_p}{a} \right) - \sqrt{3} \frac{p}{Y} = 0 \quad (\text{C.6})$$

A regra de fluxo associada ao critério de Tresca adaptado (C.2) garante que a deformação na direção  $z$  seja totalmente elástica. Deste modo, a tensão  $\sigma_z$  pode ser calculada usando a mesma formulação do EPD para problemas elásticos, gerando o seguinte estado de tensões na região plastificada:

$$\begin{aligned} \sigma_r(a \leq r \leq r_p) &= \frac{Y}{\sqrt{3}} \left( -1 + \frac{r_p^2}{b^2} + 2 \ln \left( \frac{r}{r_p} \right) \right) \\ \sigma_\theta(a \leq r \leq r_p) &= \frac{Y}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{r_p^2}{b^2} + 2 \ln \left( \frac{r}{r_p} \right) \right) \\ \sigma_z(a \leq r \leq r_p) &= \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu \frac{Y}{\sqrt{3}} \left( \frac{r_p^2}{b^2} + 2 \ln \left( \frac{r}{r_p} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Finalmente, considerando que, no regime plástico, a regra de fluxo garante uma variação volumétrica puramente elástica, ou seja,

$$3K(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z \quad (\text{C.8})$$

e as equações geométricas para problemas axissimétricos

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{du_r}{dr} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r}\end{aligned}\tag{C.9}$$

permanecem válidas, e considerando ainda a continuidade do campo de deslocamentos na interface  $r=r_p$ , tem-se o deslocamento radial para a região plástica:

$$u_r(a \leq r \leq r_p) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} r \sigma_r + \frac{2Y(1-\nu^2)}{\sqrt{3}E} \frac{r_p^2}{r}\tag{C.10}$$

A partir da equação (C.6), a pressão máxima teórica que o tubo pode suportar será atingida quando o mesmo estiver totalmente plastificado ( $r_p=b$ ):

$$p_U = 2 \frac{Y}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\tag{C.11}$$

No subitem 4.7, foi demonstrado que, na situação de colapso, o critério de Von Mises pode ser utilizado para simular o de Tresca, o que, para o problema em estudo, resulta no critério de Tresca adaptado da equação (C.2). Consequentemente, para a análise numérica via Von Mises espera-se uma pressão de colapso suficientemente próxima da expressão anterior.

Ademais, para o caso do critério de escoamento de Von Mises, a pressão de início da plastificação pode ser calculada como

$$p_0^{VM} = \frac{Y}{\sqrt{3}} \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}{\sqrt{1 + (1-2\nu)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^4}}\tag{C.12}$$

Como o tubo é de parede espessa, o denominador da expressão anterior é aproximadamente igual a 1, o que garante a proximidade entre as pressões de plastificação para os critérios de Von Mises e Tresca adaptado. Diante do exposto, espera-se uma resposta numérica da formulação do critério de Von Mises próxima aos resultados analíticos apresentados aqui, o que pode ser comprovado no subitem 5.1.

### C.1.1 – Efeito do Endurecimento

Adicionando a influência do fenômeno do endurecimento isotrópico, tem-se  $Y = Y(\kappa^I) = Y(\bar{\varepsilon}^p)$ . As regras de fluxo associativas para o critério de Tresca adaptado garantem a relação

$$\dot{\varepsilon}_r^p = -\dot{\varepsilon}_\theta^p \quad (\text{C.13})$$

Logo, utilizando as definições apresentadas no subitem 3.5, a deformação equivalente pode ser escrita exclusivamente em função da deformação transversal como

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \dot{\varepsilon}_\theta^p \quad (\text{C.14})$$

De posse da relação anterior, das equações geométricas (C.9), das relações constitutivas elásticas em coordenadas polares (considerando a axissimetria) e da equação de equilíbrio (C.4), obtém-se a equação diferencial

$$2\varepsilon_\theta^p + r \frac{d\varepsilon_\theta^p}{dr} = -\frac{1-\nu^2}{E} \left[ 2\bar{Y}(\varepsilon_\theta^p) + r \frac{d\bar{Y}(\varepsilon_\theta^p)}{dr} \right] \quad (\text{C.15})$$

onde  $\bar{Y}(\varepsilon_\theta^p) = 2Y(\varepsilon_\theta^p)/\sqrt{3}$ . Multiplicando a equação anterior por  $r$ , integrando o resultado e impondo a condição  $\varepsilon_\theta^p(r=r_p) = 0$  na interface entre as zonas elástica e plástica, tem-se:

$$\varepsilon_\theta^p = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \bar{Y}_0 \left( \frac{r_p}{r} \right)^2 - \bar{Y}(\varepsilon_\theta^p) \right] \quad (\text{C.16})$$

onde  $\bar{Y}_0 = \bar{Y}(\varepsilon_\theta^p = 0)$ , o que ocorre na interface  $r=r_p$ .

Voltando à equação de equilíbrio (C.4), considerando a derivada da equação anterior em relação a  $r$  e impondo as condições

$$\begin{aligned}\sigma_r(r=a) &= -p \\ \sigma_r(r=r_p) &= -\frac{\bar{Y}_0}{2} \left(1 - \frac{r_p^2}{b^2}\right)\end{aligned}\quad (C.17)$$

tem-se:

$$p = \frac{\bar{Y}_0}{2} \left(1 - \frac{r_p^2}{b^2}\right) + \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_a} \frac{E + (1-\nu^2)\bar{H}(\varepsilon_\theta^p)}{E\varepsilon_\theta^p + (1-\nu^2)\bar{Y}(\varepsilon_\theta^p)} \bar{Y}(\varepsilon_\theta^p) d\varepsilon_\theta^p \quad (C.18)$$

onde  $\bar{H}(\varepsilon_\theta^p) = d\bar{Y}(\varepsilon_\theta^p)/d\varepsilon_\theta^p$  e  $\varepsilon_a = \varepsilon_\theta^p(r=a)$ .

Deste modo, combinando as equações (C.18) e (C.16) para  $r=a$ , pode-se obter numericamente (através, por exemplo, do Método de Newton-Raphson) o raio  $r_p$  em função da pressão  $p$ . Adotando uma regra de endurecimento isotrópico linear, tem-se

$$Y(\bar{\varepsilon}^p) = Y_0 + H^I \bar{\varepsilon}^p \quad (C.19a)$$

ou, alternativamente,

$$\bar{Y}(\varepsilon_\theta^p) = \bar{Y}_0 + \bar{H}^I \varepsilon_\theta^p \quad (C.19b)$$

onde  $\bar{H}^I = 4H^I/3$ . Com o endurecimento linear, a integral da equação (C.18) pode ser calculada analiticamente de forma imediata, gerando a seguinte relação entre  $p$  e  $r_p$ :

$$p = \frac{\bar{Y}_0}{2} \left(1 - \frac{r_p^2}{b^2}\right) + \frac{E\bar{Y}_0}{E + (1-\nu^2)\bar{H}^I} \ln\left(\frac{r_p}{a}\right) + \frac{\bar{H}^I \bar{Y}_0}{2\left(\frac{E}{1-\nu^2} + \bar{H}^I\right)} \left(\frac{r_p^2}{a^2} - 1\right) \quad (C.20)$$

Como  $\varepsilon_\theta^p = 0$ , ou seja,  $\bar{Y} = \bar{Y}_0$  para a interface  $r=r_p$ , as equações para o regime elástico apresentadas anteriormente permanecem válidas.

## C.2 – Viga Biapoiada com Carga Uniformemente Distribuída

A solução analítica para o problema elastoplástico da viga biapoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído é baseada no modelo de flexão de vigas da Resistência dos Materiais, conforme PRAGER e HODGE [132] e LUBLINER [46]. Deste modo, a formulação obtida pode ser utilizada apenas como uma referência para

análise qualitativa do comportamento físico apresentado pela solução numérica, uma vez que não é possível reproduzir na formulação numérica as simplificações sugeridas pela Teoria de Vigas da Resistência dos Materiais, tais como:

- Seções transversais permanecem planas;
- Consideração apenas das tensões longitudinais provocadas pela flexão;
- Consideração de apoios simples, desprezando as perturbações geradas pela aplicação de condições de contorno ao longo das seções transversais das extremidades da viga, conforme modelagem numérica do item 5.4.

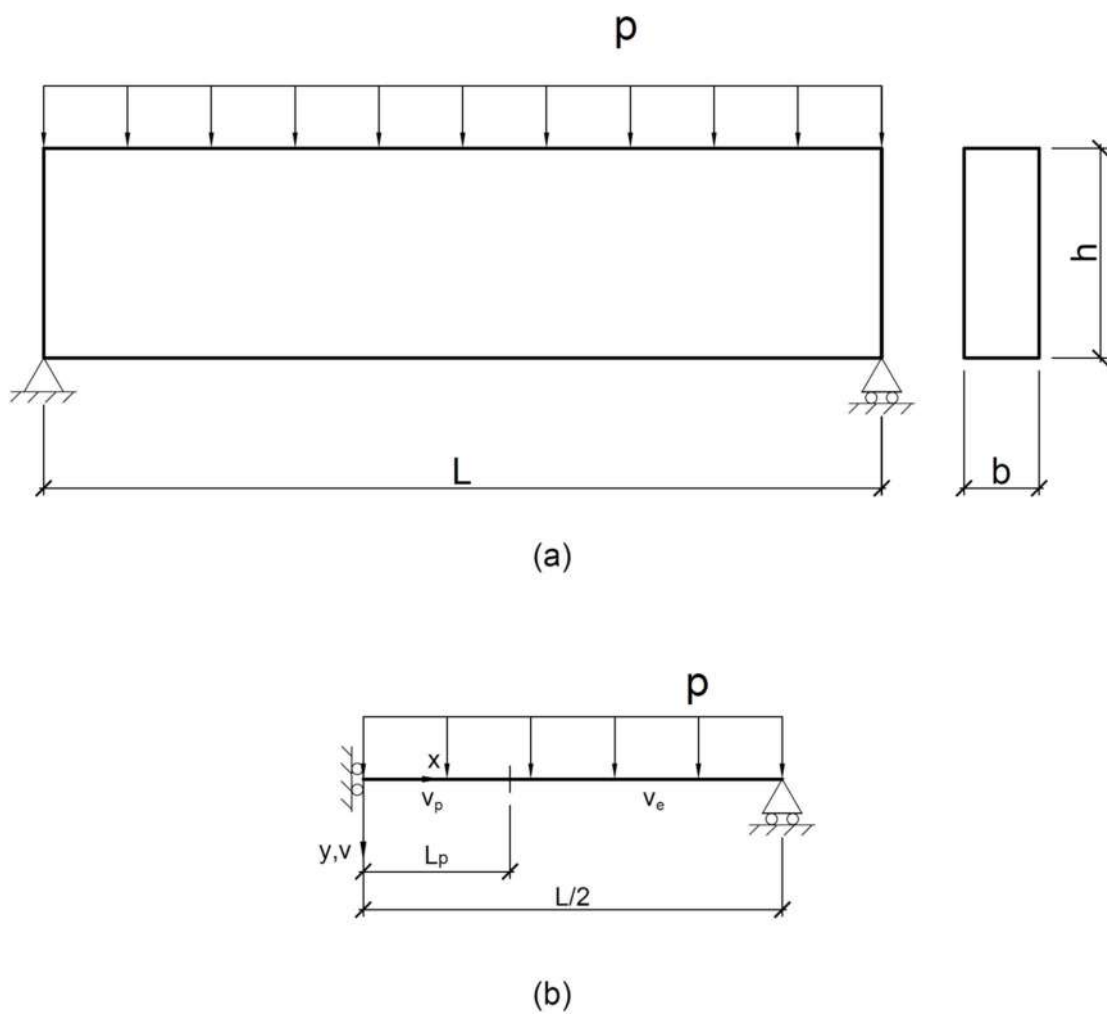


Figura C.2 – (a) Viga biapoiada com carga distribuída; (b) Modelo de Teoria de Vigas

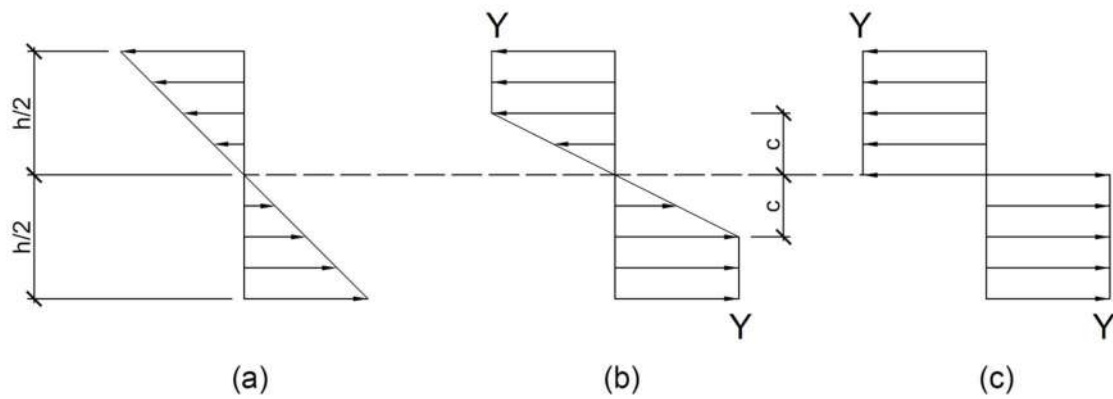


Figura C.3 – Tensões longitudinais na seção transversal segundo a Resistência dos Materiais: (a) Regime elástico; (b) Plastificação parcial da seção; (c) Plastificação total da seção – formação de rótula plástica

Com o aumento do momento fletor no meio do vão provocado pelo aumento gradual da carga distribuída  $q$ , as fibras superiores e inferiores iniciarão o processo de plastificação, mantendo a região próxima da linha neutra ainda no regime elástico (figura C.3b). Com o aumento do momento até um valor limite, a plastificação da seção do meio do vão gera uma rótula plástica, caracterizando o momento do colapso (figura C.3c). As cargas  $p_0$  e  $p_U$  responsáveis, respectivamente, pelo início do escoamento e a formação da rótula plástica no meio do vão são calculados como

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \frac{4Ybh^2}{3L^2} \\
 p_U &= \frac{2Ybh^2}{L^2}
 \end{aligned}
 \tag{C.21}$$

O comprimento  $L_p$  do trecho plastificado é calculado da seguinte forma:

$$L_p = \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{Ybh^2}{3p}}
 \tag{C.22}$$

A altura  $2c$  da seção elástica na região plástica pode ser calculada da seguinte forma:

$$c(0 \leq x \leq L_p) = \sqrt{\frac{3h^2}{4} - \frac{3p(L^2 - 4x^2)}{8Y}}
 \tag{C.23}$$



Na região plastificada, as tensões longitudinais na zona elástica da seção transversal (ver figura C.3b) podem ser escritas como:

$$\sigma_x (-c \leq y \leq c) = \frac{Y}{c} y = E \varepsilon_x \quad (\text{C.24})$$

Da Resistência dos Materiais, tem-se a seguinte equação geométrica para pequenos deslocamentos:

$$\varepsilon_x = ky = -\frac{d^2 v_p}{dx^2} y \quad (\text{C.25})$$

onde  $v_p$  é a deflexão na região plastificada.

Das equações (C.24) e (C.25), adicionando a Equação da Linha Elástica para a região elástica, com deflexão  $v_e$  e considerando as condições de contorno para as extremidades e a interface entre as regiões elástica e plástica, tem-se o seguinte Problema de Valor de Contorno:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_p}{dx^2} &= -\frac{Y}{Ec(x)}, 0 \leq x \leq L_p \\ \frac{d^2 v_e}{dx^2} &= -\frac{3Yp}{2Ebh^3} (L^2 - 4x^2), L_p \leq x \leq L/2 \\ \frac{dv_p}{dx}(0) &= 0 \\ v_p(L_p) &= v_e(L_p) \\ \frac{dv_p}{dx}(L_p) &= \frac{dv_e}{dx}(L_p) \\ v_e(L/2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

A solução final possui o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned}
v_p(x) &= \varphi_1(x) + v_e(L_p) - \varphi_1(L_p), 0 \leq x \leq L_p \\
v_e &= -\frac{p}{Ebh^3} \left[ \frac{3}{4} L^2 x^2 - \frac{x^4}{2} - \left( \frac{Ebh^3}{q} \varphi_2(L_p) + \frac{3}{2} L^2 L_p - 2L_p^3 \right) \left( x - \frac{L}{2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{5L^4}{32} \right], L_p \leq x \leq L/2 \\
\varphi_1(x) &= -\frac{Y}{Ea^2} \left( ax \operatorname{senh}^{-1} \left( \frac{ax}{b} \right) - \sqrt{a^2 x^2 + b^2} \right) \\
\varphi_2(x) &= -\frac{Y}{Ea} \operatorname{senh}^{-1} \left( \frac{ax}{b} \right) \\
a &= \sqrt{\frac{3p}{2Y}}, b = \sqrt{\frac{3h^2}{4} - \frac{3pL^2}{8Y}}
\end{aligned} \tag{C.27}$$

# Apêndice D – Termoelastoplasticidade e Termoviscoplasticidade

O objetivo deste apêndice é introduzir a influência da temperatura no comportamento plástico e viscoplástico dos materiais. Para atingir este objetivo, faz-se necessário adicionar à formulação desenvolvida as equações das Leis da Termodinâmica juntamente com a inserção da influência da temperatura nas equações de evolução plásticas e viscoplásticas. O desenvolvimento desta seção segue exposição de LITTLE et al. [3].

De acordo com o exposto no item 3.3 (equação (3.44)) e considerando o modelo plástico e viscoplástico proposto neste trabalho, a energia livre de Helmholtz pode ser escrita da seguinte forma:

$$h = h(\varepsilon_{ij}, T, \varepsilon_{ij}^p, \kappa^l, \kappa_{ij}^c) \quad (D.1)$$

Considerando a Lei de Hooke Generalizada com a presença de variação de temperatura (equação (2.60)) juntamente com a equação (3.51), resultante da suposição de que o tensor de deformações pode ser dividido nas parcelas elástica e plástica, tem-se a seguinte adaptação para materiais plásticos e viscoplásticos:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x}, t) - \alpha_{kl}^{\Delta T} \Delta T \right) \quad (D.2)$$

A equação anterior é obtida através da aplicação da expansão em série de Taylor até os termos de segunda ordem da energia livre de Helmholtz na equação (2.58a), que também é válida para materiais plásticos e viscoplásticos, conforme tratativas do item 3.3. Para conduzir os resultados desta abordagem para a equação anterior, duas suposições

são necessárias. A primeira consiste em uma simplificação da equação (D.1) que, segundo LITTLE et al. [3], é suficiente para os materiais estudados nesta pesquisa:

$$h = h(\varepsilon_{ij}, T, \varepsilon_{ij}^p) \quad (D.3)$$

A segunda suposição é baseada em evidências experimentais [3] e afirma que, para processos isotérmicos, a deformação plástica produz uma energia livre de Helmholtz desprezível. Aplicando a regra da cadeia na equação anterior, considerando que o processo é isotérmico e separando o tensor de deformações nas parcelas elástica e plástica, tem-se:

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \left( \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (D.4)$$

Como a deformação plástica produz uma energia livre de Helmholtz desprezível, pode-se considerar a aproximação

$$\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = - \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (D.5)$$

que, por sua vez, define o resultado final da segunda suposição.

Tomando a equação da conservação da energia local (2.50) e a definição da energia livre de Helmholtz (2.55), obtém-se

$$\rho(\dot{h} + \dot{T}s + T\dot{s}) + q_{i,i} - \rho r - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad (D.6)$$

Aplicando a regra da cadeia da derivada temporal da equação (D.3) bem como as equações (2.58a,b), também válidas para problemas plásticos e viscoplásticos, a equação anterior se transforma em

$$\rho T\dot{s} + \rho \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + q_{i,i} - \rho r = 0 \quad (D.7)$$

A equação (2.58b) garante que a densidade de entropia total interna  $s$  possui as mesmas variáveis independentes da energia livre de Helmholtz  $h$ . Aplicando então a regra da cadeia da derivada temporal de  $s$  bem como as equações (2.58a,b), tem-se

$$\rho T \left( -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial^2 h}{\partial T^2} \dot{T} \right) - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + q_{i,i} - \rho r = 0 \quad (\text{D.8})$$

Para a obtenção da forma final da equação anterior, são necessárias três definições associadas às propriedades físicas do material. Define-se primeiramente que, dada a isotropia assumida para o material, a expansão térmica do mesmo pode ser descrita da seguinte forma:

$$\alpha_{ij}^{\Delta T} = \alpha_{\Delta T} \delta_{ij} \quad (\text{D.9})$$

onde  $\alpha_{\Delta T}$  é o coeficiente de dilatação térmica. Consequentemente, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = C_{ijkl} (-\alpha_{ij}^{\Delta T}) = -(3\lambda^e + 2G) \alpha_{\Delta T} \delta_{ij} \quad (\text{D.10})$$

Expandindo o fluxo de calor  $\mathbf{q}$  em função do gradiente de temperatura, tem-se a seguinte definição:

$$q_i = -k_{ij}^{\Delta T} \gamma_j \quad (\text{D.11})$$

onde  $k_{ij}^{\Delta T}$  é o tensor de condutividade térmica. A expressão é conhecida como a Lei de Fourier quando o referido tensor é constante, o que é compatível com diversos materiais, visto que, na maioria dos casos, este tensor é uma função fraca da deformação e temperatura [3]. Considerando a isotropia do material, tem-se que

$$k_{ij}^{\Delta T} = k_{\Delta T} \delta_{ij} \Rightarrow q_i = -k_{\Delta T} \gamma_i \quad (\text{D.12})$$

Finalmente, define-se o calor específico a volume constante  $c_v$ :

$$c_v = -\frac{\partial^2 h}{\partial T^2} T \quad (\text{D.13})$$

Substituindo as equações (D.10), (D.12) e (D.13) na equação (D.8), tem-se:

$$\rho c_v \dot{T} + (3\lambda^e + 2G) \alpha_{\Delta T} T (\varepsilon_{kk} - \dot{\varepsilon}_{kk}^p) - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = (k_{\Delta T} T_{,i})_{,i} + \rho r \quad (\text{D.14})$$

A aplicação da isotropia do tensor de dilatação térmica (equação (D.9)) transforma a expressão (D.2) da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda^e (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p) \delta_{ij} + 2G (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) - (3\lambda^e + 2G) \alpha_{\Delta T} \Delta T \delta_{ij} \quad (D.15)$$

Como é possível observar nas duas equações anteriores, as formulações mecânica e termodinâmica são acopladas, o que significa que as mesmas não podem ser resolvidas separadamente. Segundo LITTLE et al. [3], esse acoplamento pode ser maior em problemas plásticos e viscoplásticos quando comparado a problemas elásticos, devido à presença da taxa do trabalho plástico.

Para certas classes de materiais, tais como os que serão estudados nesta pesquisa, as parcelas dependentes das deformações na equação (D.14) podem ser desprezadas, o que resulta na formulação desacoplada

$$\rho c_v \dot{T} = (k_{\Delta T} T_{,i})_{,i} + \rho r \quad (D.16)$$

A equação anterior pode ser obtida através da aplicação da conservação de energia considerando a temperatura T como a única variável, caracterizando a teoria desenvolvida por Fourier. Considerando a homogeneidade dos materiais estudados neste trabalho, é razoável considerar que a condutividade térmica é constante ao longo do domínio do corpo, o que gera o seguinte resultado:

$$\rho c_v \dot{T} = k_{\Delta T} T_{,ii} + \rho r \quad (D.17)$$

Através da simplificação trazida pelo desacoplamento, um Problema de Valor de Contorno (PVC) pode ser resolvido para a equação anterior, obtendo assim a distribuição de temperatura no corpo. De posse deste resultado, o PVC formado pelas equações mecânicas plásticas ou viscoplásticas pode ser resolvido, tendo a distribuição de temperatura como dado de entrada.

Para problemas viscoplásticos, sobretudo para os casos de fluência, pode-se considerar a seguinte fator de temperatura  $g_c^T(T)$ , conhecida como Lei ou Equação de Arrhenius [46] [126] oriundo da hipótese de separação de variáveis (ver equação (3.159)):

$$g_c^T(T) = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \quad (D.18)$$

onde  $k=1,38 \times 10^{-23}$  J/K é a Constante de Boltzmann e  $\Delta E$  é a energia de ativação do processo, que é função da temperatura. De um modo geral, o fator de temperatura  $g_c^T(T)$  pode ser obtido experimentalmente, sendo adotada por BATHE [52], por exemplo, a seguinte forma simplificada:

$$g_c^T(T) = e^{-\frac{a_T}{T}} \quad (D.19)$$

onde  $a_T$  é uma constante a ser determinada experimentalmente.

Para problemas plásticos em geral, este ou outros fatores de temperatura podem ser aplicados às equações de evolução (regras de fluxo e de endurecimento), alterando a relação entre a tensão equivalente e a deformação plástica equivalente, conforme figura a seguir.

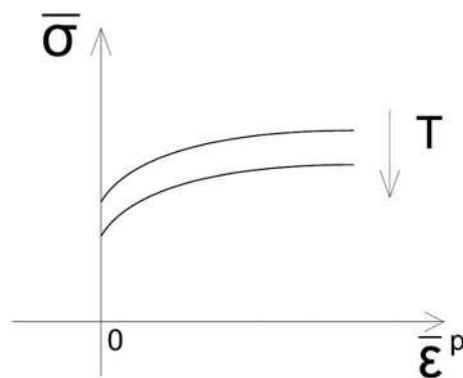


Figura D.1 – Variação da curva tensão equivalente x deformação plástica equivalente em função da variação da temperatura