



ANÁLISE NÃO LINEAR OTIMIZADA DE SISTEMAS DE PROTEÇÃO CATÓDICA  
COM MÉTODOS SEM MALHA

Samuel Berger Velten

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: José Antonio Fontes Santiago  
Wiliam Jeronimo dos Santos  
Carlos Friedrich Loeffler Neto

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2020

ANÁLISE NÃO LINEAR OTIMIZADA DE SISTEMAS DE PROTEÇÃO CATÓDICA  
COM MÉTODOS SEM MALHA

Samuel Berger Velten

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA  
DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Orientadores: José Antonio Fontes Santiago

Wilian Jeronimo dos Santos

Carlos Friedrich Loeffler Neto

Orientadores: Prof. José Antonio Fontes Santiago

Prof. Wilian Jeronimo dos Santos

Prof. Carlos Friedrich Loeffler Neto

Prof. José Claudio de Faria Telles

Prof. Luiz Carlos Wrobel

D.Sc. Edmundo Guimarães de Araújo Costa

Prof. Simone Louise Delarue Cezar Brasil

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 2020

Velten, Samuel Berger

Análise não linear otimizada de sistemas de proteção catódica com métodos sem malha / Samuel Berger Velten. -- Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2020.

XXI, 129 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: José Antonio Fontes Santiago

Wilian Jeronimo dos Santos

Carlos Friedrich Loeffler Neto

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 123 – 129.

1. *Meshless*. 2. Proteção Catódica. 3. MSF. 4. *Meshless* local Petrov-Galerkin. 5. Algoritmo Genético. I. Santiago, José Antonio Fontes, *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

À minha família.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria primeiramente de agradecer a Deus que apesar de não concordar com 1 evento da minha vida, agradeço à vida que me concedeu.

Gostaria de expressar minha gratidão aos meus orientadores, amigos e Professores: Santiago, Wilian, Telles e Loeffler. Aos amigos encontrados por aqui dentro do laboratório Wilian, Danilo, Marlúcio, Edmundo, Edivaldo e Carol, pelas horas de batalha dentro do laboratório, por todo estímulo e orientação dados durante este trabalho. Toda confiança depositada em mim, e em minhas atividades, foi essencial para meu desenvolvimento pessoal e como pesquisador.

À toda equipe e colegas de trabalho do LAMEC pelo apoio, companhia e aprendizado compartilhados ao longo desses anos. Aos meus colegas de trabalho no IFES por aprovarem minha participação no programa de doutorado da UFRJ e possibilidade de realizar esse sonho.

À CAPES pelo suporte financeiro.

À minha família que, apesar de estarem morando distante, puderam sempre se fazer presente durante esta etapa de minha vida. Amo vocês. Em especial gostaria de agradecer a minha **mãe**, que não pode estar comigo até o fim, fisicamente, mas que sonhava e sempre apoiou cada passo conquistado durante a construção deste sonho.

Aos meus amigos da COPPE, UFES e IFES agradeço pelas conversas e discussões que me encorajou durante essa fase e pelos debates e conselhos que muito me engrandeceu. Amigos para toda a vida.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ANALISE NÃO LINEAR OTIMIZADA DE SISTEMAS DE PROTEÇÃO CATÓDICA  
COM MÉTODOS SEM MALHA

Samuel Berger Velten

Fevereiro/2020

Orientadores: José Antônio Fontes Santiago

Wilian Jeronimo dos Santos

Carlos Friedrich Loeffler Neto

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho tem como objetivo implementar e aplicar métodos sem malha a estruturas que necessitam da proteção catódica para poderem operar. Entre os métodos sem malha, o Método das Soluções Fundamentais (MSF) e o método local Petrov Galerkin, vertentes 1 (MLPG1) e 2 (MLPG2), que empregam como função de ponderação a função peso e “função” delta de Dirac, respectivamente, foram implementados e aplicados ao problema da proteção catódica (PC). Para otimização dos processos, visando melhorar os resultados foram usados algoritmos genéticos. O problema de potencial eletroquímico é governado pela equação de Laplace com condições de contorno dadas por uma dependência funcional não linear entre densidade de corrente e potencial, definidas através da curva de polarização. Os diversos resultados de aplicações são discutidos neste trabalho, considerando simulações numéricas em regiões finitas. Para validar a formulação dos métodos sem malha, aplicados na simulação de sistemas de proteção catódica, foram comparados os resultados através do MSF, MLPG1 e MLPG2 com um procedimento de solução do método dos elementos de contorno (MEC), um dos métodos numéricos mais comumente usados para modelagem de sistemas de proteção catódica.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

OPTIMIZED NON-LINEAR ANALYSIS OF CATHODIC PROTECTION  
SYSTEMS WITH MESH-FREE METHODS

Samuel Berger Velten

February/2020

Advisors: José Antônio Fontes Santiago  
Wiliam Jeronimo dos Santos  
Carlos Friedrich Loeffler Neto

Department: Civil Engineering

This work aims to implement and apply meshless methods to structures that need cathodic protection in order to operate. Among the non-meshed methods, the Fundamental Solutions Method (MSF) and the local Petrov Galerkin method, strands 1 (MLPG1) and 2 (MLPG2), which employ the weight function and the Dirac delta “weight” function, respectively, were implemented and applied to the problem of cathodic protection (PC). To optimize the processes, aiming to improve the results, genetic algorithms were used. The electrochemical potential problem is governed by the Laplace equation with boundary conditions given by a non-linear functional dependence between current and potential density, defined through the polarization curve. The various results of applications are discussed in this work, considering numerical simulations in finite regions. To validate the formulation of the meshless methods applied in the simulation of cathodic protection systems, the results were compared using the MSF, MLPG1 and MLPG2 with a solution procedure of the contour element method (MEC), one of the most common numerical methods used for modeling cathodic protection systems.

## ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS XII

LISTA DE TABELAS XVIII

LISTA DE SÍMBOLOS XIX

LISTA DE ABREVIATURAS .....XXI

**CAPÍTULO 1 ..... 1**

Introdução ..... 1

1.1 Objetivos ..... 5

1.2 Organização da tese ..... 6

**CAPÍTULO 2 ..... 8**

Proteção Catódica ..... 8

2.1 Introdução ..... 8

2.2 Corrosão ..... 9

2.3 Mecanismo ..... 10

2.4 Proteção Catódica Galvânica ..... 11

2.5 Proteção Catódica por Corrente Impressa ..... 13

2.6 Reações envolvidas ..... 14

2.6.1 Galvânica ..... 14

2.6.2 Corrente impressa ou forçada ..... 15

2.7 Polarização ..... 15

2.8 Passivação ..... 16

2.9 Modelo Matemático ..... 17

2.9.1 Equação Diferencial ..... 17



2.9.2 Problema de Valor de Contorno .....	18
<b>CAPÍTULO 3 .....</b>	<b>20</b>
Funções de Interpolação .....	20
3.1 Método dos Mínimos Quadrados Móveis.....	21
3.2 Método de interpolação usando funções de base radial .....	29
<b>CAPÍTULO 4 .....</b>	<b>32</b>
Técnicas numéricas Empregadas.....	32
Método Numérico Tradicional.....	33
4.1 Método dos elementos de Contorno .....	33
4.2 Integrais de Domínio .....	37
4.3 O problema inverso .....	39
Métodos Sem Malha.....	40
4.4 Método das Soluções Fundamentais (MSF).....	42
MLPG uma Introdução .....	45
4.5 MLPG-2.....	47
4.6 MLPG-1.....	50
4.6.1 Forma Fraca Local.....	50
4.6.2 Discretização .....	55
4.6.3 Descontinuidades no contorno.....	56
4.6.4 Imposição das condições de Contorno.....	58
4.7 Integração Numérica .....	60
Otimização .....	66

4.8 Algoritmos Genéticos.....	66
4.8.1 Função Objetivo.....	71
4.9 Implementação Numérica.....	73
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>75</b>
Resultados e discussões.....	75
5.1 Testes Preliminares.....	75
Problema 5.1 .....	75
Problema 5.2 .....	76
Problema 5.3 .....	77
Problema 5.4 .....	83
Corrosão Galvânica 5.2.....	85
Problema 5.5 .....	85
Presença de Fonte 5.3 .....	104
Problema 5.6 – .....	104
Problema 5.7 .....	108
Problema 5.8 – .....	112
Problema 5.9 - .....	116
Problema 5.10 - .....	118
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>121</b>
6.1 Conclusões .....	121
6.2 sugestões para trabalhos futuros.....	122
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>123</b>

Referências Bibliográficas ..... 123

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Proteção de uma tubulação enterrada com anodo de magnésio.	12
Figura 2 - Proteção catódica por corrente impressa para uma estaca de píer de atracação de navio.	14
Figura 3 Curvas de polarização clássicas encontradas nos sistemas práticos de corrosão.	16
Figura 4 – Triângulo de Pascal para 2d.	22
Figura 5 – Domínio de influência e suporte para as devidas funções peso.	23
Figura 6 - Função Egg. Holder.	24
Figura 7 – Interpolação da função Egg. Holder com o Método dos Mínimos Quadrados Móveis base polinomial quadrática.	25
Figura 8 - Parâmetros nodais $u_i$ e função aproximada $u_{hx}$ através do MMQM, onde nem sempre existe coincidência entre o valor aproximado e o valor real.	25
Figura 9 – Apresentação esquemática de funções de interpolação para um domínio qualquer.	26
Figura 10 – Comportamento das funções Spline Quarta Ordem e Gaussiana.	27
Figura 11 – Forma da Função Spline de Quarta Ordem.	28
Figura 12 – Primeira derivada da Função Spline de Quarta Ordem.	28
Figura 13 – Domínio discretizado para o MEF.	32
Figura 14 – Representação esquemática da discretização de um domínio qualquer $\Omega$ , limitado por um contorno $\Gamma$ .	34

Figura 15 – a) Domínio de um problema discretizado em um método verdadeiramente sem malha. b) Células empregadas para os demais.	41
Figura 16 – Geometria do domínio determinando Pontos de Colocação e Fontes Virtuais.	42
Figura 17 – Comparação do MLPG com o MEF.	45
Figura 18 – Subdomínios da função de interpolação. No centro de cada função podemos notar o ponto $x(i)$ centro do subdomínio local.	48
Figura 19 - Subdomínio Local $\Omega_x$ e global $\Omega$ .	48
Figura 20 - Esquema do método MLPG.	51
Figura 21 – Interseção entre a função de ponderação $v$ e a função de interpolação $u$ construída para cada ponto de Gauss. Os subdomínios são circulares, mas os raios são diferentes conforme pode ser observado.	54
Figura 22 – Representação esquemática de domínios de integração centrados em pontos do domínio $x_i, x_j, \dots$ , e interpolação centrados em Pontos de Gauss.	55
Figura 23- Setor circular que será integrado com os respectivos pontos de Gauss. E as condições de contorno $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ .	57
Figura 24 – Identificação das semirretas usadas para confecção dos cantos dos problemas e dos devidos subdomínios de integração. Onde $\Gamma$ representa o contorno e $\Omega$ o domínio do problema.	58
Figura 25 – Identificação de subdomínios de integração $\Omega_s$ de raio $r_0$	60
Figura 26 – Exemplo da Normalização.	62
Figura 27 – Representação da distribuição dos pontos de Gauss no contorno de um domínio $2 \times 2$ . Foram usados $3 \times 3$ pontos de Gauss.	63

Figura 28 - Diferentes formas para Subdomínios formados durante o processo de integração numérica de setores circulares.	64
Figura 29 – Esquema da integração numérica onde o setor circular em azul representa o subdomínio de integração $\Omega_s$ e o círculo maior em vermelho representa o suporte de interpolação $w_i$ .	65
Figura 30 – Esquema de um Algoritmo Genético.	67
Figura 31 – Esquema de um AG acoplado com MEC/MSF/MLPG.	73
Figura 32 - Representação do problema 1.	76
Figura 33 – Potencial Exato e Aproximado com o MLPG2.	76
Figura 34 – Resultados com $k = 1.0 \Omega - 1m - 1$ .	76
Figura 35 – Resultados para $k = 4.6 \Omega - 1m - 1$ .	77
Figura 36 – Resultado para $k = 0.05 \Omega - 1m - 1$ .	77
Figura 37 – Representação do problema 5.3.	78
Figura 38 – Pontos de integração distribuídos no domínio, onde foram usados 5x5 pontos de Gauss.	78
Figura 39 - Pontos de Gauss no Domínio após refinamento da malha, atualmente com 21 pontos, 5x5 pontos de Gauss.	80
Figura 40 - Pontos de Gauss no Domínio após refinamento da malha, atualmente com 25 pontos, 3x3 pontos de Gauss.	81
Figura 41 – Distribuição dos pontos de Gauss no contorno do problema 3x3.	81
Figura 42 - Solução exata e aproximada para solução quadrática, 5x5 pontos de Gauss, 53 nós. 32 nós no contorno e 21 nós no domínio.	82

Figura 43 – Erro Local obtidos para pontos do domínio 81 nós, 9x9 Pontos de Gauss para integração.	84
Figura 44 – Potencial Aproximado e Potencial Exato em pontos do domínio.	85
Figura 45 – Exemplo de Corrosão Galvânica.	86
Figura 46 - Determinação do potencial no eletrólito.	87
Figura 47- Densidade de corrente sobre o metal.	88
Figura 48 - Determinação do potencial no eletrólito.	88
Figura 49 - Densidade de corrente sobre o metal.	89
Figura 50 - Determinação do potencial no eletrólito.	89
Figura 51 - Densidade de corrente sobre o metal.	90
Figura 52 – Distribuição do Potencial no Metal usando MSF e o MEC.	91
Figura 53 – Densidade de Corrente no Metal usando MSF e O MEC.	91
Figura 54 - Distribuição do Potencial no Metal usando MLPG2 e o MEC.	92
Figura 55 - Densidade de Corrente no Metal usando MLPG2 e o MEC.	92
Figura 56 - Distribuição do Potencial no Metal usando MLPG2 e o MEC.	93
Figura 57 - Densidade de Corrente no Metal usando MLPG2 e o MEC.	93
Figura 58 – Potencial sobre o metal usando MLPG1 e MEC.	95
Figura 59 – Densidade de corrente sobre o metal usando MLPG1 e MEC.	95
Figura 60 – Erro local para o potencial.	98
Figura 61 – Potencial na superfície do metal usando MLPG1 e MEC.	98
Figura 62 - Densidade de corrente no metal usando MLPG1 e MEC.	99

Figura 63 - Potencial na superfície do metal	99
Figura 64 - Densidade de corrente no metal usando MLPG1 e MEC.	100
Figura 65 – Potencial no Eletrólito usando MEC e MLPG1 com a base monomial linear.	100
Figura 66 – Erro local determinado para pontos do domínio.	101
Figura 67 – Potencial sobre o Metal usando MLPG1 e o MEC.	102
Figura 68 – Densidade de Corrente sobre o Metal usando MLPG1 e o MEC.	102
Figura 69 - Densidade de Corrente sobre o Metal usando MLPG1 e o MEC.	103
Figura 70 - Potencial sobre o Metal usando MLPG1 e o MEC.	103
Figura 72 – Distribuição do potencial no metal usando MEC e o MLPG2.	104
Figura 73 – Densidade de corrente no metal usando MEC e o MLPG2.	105
Figura 74 - Distribuição do potencial no metal usando MEC e o MSF	106
Figura 75 – Densidade de Corrente no metal usando MEC e o MSF.	106
Figura 76 – Potencial no eletrólito usando MEC e MLPG 2 respectivamente.	107
Figura 77 – Potencial no eletrólito usando MSF.	107
Figura 78 – Potencial distribuído no metal usando o MEC.	108
Figura 79 – Densidade de corrente no metal usando MEC.	109
Figura 80 – Distribuição do potencial no metal usando MSF.	109
Figura 81 – Densidade de corrente no metal usando MSF.	110
Figura 82 – Distribuição do potencial no metal usando o MLPG2.	110
Figura 83 – Densidade de corrente no metal usando o MLPG2.	111



Figura 84 – Potencial no eletrólito usando MEC.	111
Figura 85 – Potencial no eletrólito suando o MLPG2.	112
Figura 86 – Potencial no eletrólito usando o MSF.	112
Figura 87 – Potencial no eletrólito usando MEC.	113
Figura 88 – Potencial no eletrólito usando o MLPG2.	113
Figura 89 – Potencial no eletrólito usando MSF.	114
Figura 90 – Distribuição do potencial no metal usando o MEC e o MLPG2.	114
Figura 91 – Densidade de corrente no metal usando o MEC e o MLPG2.	115
Figura 92 – Distribuição do potencial no metal usando o MEC e o MSF.	115
Figura 93 – Densidade de corrente no metal usando MEC e o MSF.	116
Figura 94 – Valores obtidos para as Bases Linear e Quadrática aplicadas a Spline de Quarta Ordem.	117
Figura 95 – Erro obtido para as Bases Linear e Quadrática aplicadas a Spline de Quarta Ordem.	117
Figura 96- Comparação dos resultados obtidos para as diferentes condições adotadas para a solução.	118
Figura 97 – Erro calculado para as funções Spline Linear e Quadrática e Gaussiana Linear.	118
Figura 98 - O problema axissimétrico.	119
Figura 99 – Curva de polarização.	119

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2-1 Aplicações típicas dos anodos galvânicos .....	12
Tabela 2 – Erro calculado, base monomial linear.....	79
Tabela 3 – Erro calculado, base monomial quadrática.....	79
Tabela 4 – Solução exata e aproximada. Para pontos do domínio.....	83
Tabela 5 – Efeitos do Número de Pontos de Gauss sobre o Erro .....	84
Tabela 6 – Erro calculado para solução do potencial com MEC e MLPG1, base monomial linear.....	96
Tabela 7 – Erro calculado para solução da Densidade de Corrente com MEC e MLPG1 com base monomial linear. ....	97
Tabela 9 – Erro obtido para o cálculo de potencial no eletrólito. ....	101

## LISTA DE SÍMBOLOS

$C^1$  Derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

$C^2$  Derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

$F(\phi)$  uma função não linear de  $\phi$ .

$L_s$  Parte do contorno  $\partial\Omega_s$  onde não existem condições de contorno prescritas.

NP número de pontos pertencentes ao suporte da aproximação por MQM.

$\Gamma$  contorno da equação diferencial.

$\Gamma_{sc}$  parte do contorno  $\partial\Omega_s$  onde existem condições de contorno prescritas.

$\Gamma_{st}$  parte do contorno  $\partial\Omega_s$  onde existem forças de superfície prescritas.

$\Gamma_{su}$  parte do contorno  $\partial\Omega_s$  onde existem deslocamentos prescritos.

$\Gamma_u$  parte do contorno onde os deslocamentos são prescritos.

$\Omega$  domínio da equação diferencial.

$\Omega_s$  subdomínio de integração do MLPG.

$\Omega_x$  domínio de definição da aproximação por MQM.

$\bar{u}$  potencial prescrito.

K matriz de rigidez do MLPG.

R matriz de FBR.

$\partial\Omega_s$  contorno de  $\Omega_s$ .

$\phi$  função de forma.

m ordem da base polinomial utilizada na aproximação por MQM.

$p_j(x)$  vetor da base polinomial utilizada na aproximação por MQM.

$r_0$  raio de  $\Omega_S$ .

$r_i$  raio do suporte da aproximação por MQM para um ponto  $x_i$ .

$w_i(x)$  função de interpolação utilizada na aproximação por MQM.

## LISTA DE ABREVIATURAS

- MEF Método dos Elementos Finitos, p. 3, 4
- MDF Método das Diferenças Finitas, p. 4
- MEC Método dos Elementos de Contorno, p. 3, 5
- MSF Método das Soluções Fundamentais, p. 4, 5
- MLPG Método Local de Petrov-Galerkin Sem Malha, p. 4, 5
- MLS mínimos quadrados móveis, moving least square, p. 4
- SPH hidrodinâmica de partículas suavizadas, p. 4
- FBR Função de Base Radial, p. 21
- FBR-SC FBR de Suporte Compacto, p. 21
- LBIE Método dos Elementos de Contorno Local, p. 56
- LUSWF fórmula fraca assimétrica local, p. 52
- LSWF fórmula fraca simétrica local, p. 52

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Nos dias de hoje a engenharia passa por diversos desafios diários, alguns recentes como a criação de formas de empregar a nanotecnologia e outras bem antigas como a corrosão que vem junto ao desenvolvimento da sociedade. A corrosão a muitos anos vem acompanhando o desenvolvimento, em especial a partir da revolução industrial que ocorreu inicialmente na Europa entre os séculos XVIII e XIX quando a utilização de máquinas foi inserida no mundo do trabalho e junto com ela o aumento do emprego de ligas metálicas [1].

Assim, pode se definir a corrosão como a degradação de um material por um determinado meio. O material pode ser metálico ou não o meio envolvido tem de ser capaz de provocar a degradação do material com o tempo, esta degradação está ligada a alteração das propriedades físicas deste material. Esta definição indica que as propriedades, bem como os materiais podem e se deterioram [2]. A corrosão pode ocorrer por ação química ou eletroquímica e pode ser empregada com fins benéficos, por exemplo promovendo a passivação de superfícies para permitir a aplicação de um material em determinadas condições, conferindo aparência ou propriedades esperadas para a definida empregabilidade [1, 2].

A importância da corrosão na atualidade apesar de ser utilizada em alguns casos para fins benéficos, como por exemplo a corrosão controlada de jóias e acabamentos em alumínio, nesse estudo iremos enfatizar onde a corrosão deve ser evitada para diminuir os problemas causados em estruturas metálicas com o objetivo de pôr exemplo: diminuir o consumo energético na confecção de novos materiais para reposição dos destruídos pelos processos corrosivos; Reduzir a intermitência de linhas de produção contínua; Evitar impactos ambientais.

Existem diversas formas de proteger os materiais da corrosão e os estudos avançam cada vez mais em diferentes métodos de proteção da ação nociva da corrosão, por exemplo a proteção catódica (PC) é frequentemente empregada e vem trazendo bastante melhorias nas formas de combater a mesma. São utilizados diferentes tipos de aços em condições bem adversas, graças aos avanços no estudo da proteção catódica.

Sempre quando for se tratar de qualquer processo corrosivo deve se observar três fatores envolvidos: 1) o material envolvido no processo por exemplo composição química; 2) presença ou não de impurezas ou até mesmo tratamentos térmicos e mecânicos; 3) o meio corrosivo onde deve ser observada a composição química. Além dessas as condições operacionais como solicitações mecânicas e movimento relativo entre o material metálico e o meio, condições de imersão no meio total ou parcial [1, 2].

A técnica de combate a corrosão estudada nesse trabalho é a proteção catódica (PC) que é aplicada no mundo inteiro, para combater a corrosão das instalações metálicas enterradas, submersas e em contato com eletrólito. Proteger uma estrutura através da proteção catódica significa eliminar por processo artificial, as áreas anódicas da superfície do metal fazendo com que toda a estrutura adquira comportamento catódico. Como consequência, o fluxo de corrente elétrica anodo/catodo diminui e a corrosão é reduzida desta forma a estrutura pode ser preservada por anos.

São utilizados basicamente dois sistemas de proteção catódica: A *proteção galvânica*, onde o fluxo de corrente elétrica fornecido origina-se da diferença de potencial existente entre o metal a se proteger e outro escolhido como anodo; A *corrente impressa*, onde o fluxo de corrente origina-se da força eletromotriz de uma fonte geradora de corrente elétrica contínua (retificadores). Para a dispersão dessa corrente elétrica no eletrólito são utilizados anodos especiais, inertes, com características e aplicações que dependem do eletrólito onde são empregados [3].

A modelagem de sistemas de proteção catódica necessita de uma atenção especial às curvas de polarização, que estão relacionadas com a variação não linear do potencial e a densidade de corrente. O problema do potencial eletroquímico é governado pela equação de Laplace podendo ou não apresentar fontes.

A proteção catódica é estudada ao longo dos anos através de vários métodos numéricos e esses estudos têm cooperado de forma significativa para o avanço no seu emprego e melhorias de aplicações permitindo hoje a permanência de materiais em condições que sem esses estudos e aperfeiçoamentos conquistados ao longo dos anos não seria possível.

Em 1991, Santiago & Telles [4] estudaram sistemas de proteção catódica, fazendo uma análise das curvas de polarização estáticas e dinâmicas usando dados a

partir de ensaios potencioestáticos. Para a simulação numérica foi empregado o método dos elementos de contorno.

Costa Júnior [5] desenvolveram um estudo para otimizar sistemas de proteção catódica. O objetivo do estudo foi determinar um arranjo ótimo dos anodos de sacrifício a fim de satisfazer um potencial eletroquímico mínimo sobre a superfície metálica (critério de proteção). Com a finalidade de otimizar o procedimento foi utilizado um Algoritmo Genético junto ao MEC encontrando o melhor ponto de partida para minimização da função objetivo.

Recentemente o MEF vem apresentando resultados interessantes quando aplicado ao problema da proteção catódica [5, 6]. Apesar desses resultados o método numérico mais utilizado para estudar a proteção catódica, em especial a distribuição de potencial e densidade de corrente é o método dos elementos de contorno (MEC). [7, 8, 9, 10].

Em 2015, [11] utilizou o método das soluções fundamentais MSF, um método sem malha para realizar simulações numéricas em sistemas de proteção catódica, com diferentes geometrias e tratou ainda de regiões finitas e infinitas, comparou os resultados com MEC que tradicionalmente é empregado para tais avaliações. Os problemas estudados foram bidimensionais axissimétricos em meios homogêneos [56].

Considerando que Santos [11] utilizou o MSF um método verdadeiramente sem malha para resolver o problema da proteção catódica e que o presente trabalho visa empregar 3 métodos verdadeiramente sem malha na resolução de problemas da proteção catódica será feito um breve histórico para os métodos sem malha, onde é possível perceber que os mesmos vem apresentando uma evolução significativa e cada vez mais participando da resolução de problemas aplicados nas mais diversas áreas da engenharia. Os métodos tradicionais (Método dos Elementos Finitos – MEF, Método dos Elementos de Contorno – MEC) utilizam malhas de elementos que podem dificultar o estudo em situações muito específicas, algumas vezes sendo necessárias a geração de várias malhas, esse processo é comumente chamado de *remeshing* e o custo computacional associado a ele é na maioria das vezes muito alto [12].

O objetivo dos métodos verdadeiramente sem malha (meshless) é eliminar a geração da malha fazendo com que a aproximação seja feita por meio de pontos. Em muitos casos a construção do suporte para tal avaliação é local melhorando a aproximação no caso de uma distorção provocada por uma propagação de trinca em



um meio elástico por exemplo. A pesquisa através do Método de Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas, SPH do inglês *smoothed particle hydrodynamics* foi para a modelagem de fenômenos astrofísicos no espaço infinito (Lucy 1977, Gingold & Monaghan,1977) [13]. Depois deste trabalho não se teve publicações significativas em relação a este assunto durante alguns anos.

Durante a década de 90 os métodos sem malha voltaram a ser empregados em desenvolvimento e pesquisa onde entre os principais podemos citar:

Métodos dos Elementos Difusos – DEM, Difuse Element Method [14], que foi onde se utilizou pela primeira vez a interpolação por Moving Least Square (MLS), este dependendo apenas das posições relativas dos pontos utilizados, em métodos para a solução de equações diferenciais parciais.

Método de Galerkin Livre de Elementos (1994) – EFG, Element-Free Galerkin [15], que é um aperfeiçoamento do DEM. Também utiliza o MLS como função de interpolação [15,16,17].

Em 2007 [18] analisou problemas de mecânica da fratura usando a Função de Green Numérica e como ferramenta para tais análises empregou o método sem malha de elementos baseadas na equação integral de contorno, e comparou com resultado obtidos previamente com o método dos elementos de contorno, em meios heterogêneos.

Método Local Petrov-Galerkin Sem Malha – MLPG Meshless Local Petrov-Galerkin [17] foi estudado e foi apresentado a possibilidade de adaptar o método segundo a utilização de diferentes funções ponderação, desta forma possibilitando o emprego do método em diferentes situações e com características distintas para cada uma delas.

Em 2014 [19] estudou técnicas avançadas dos métodos sem malha para aplicação, a elasticidade e mecânica da fratura, na ocasião foi implementado o MLPG 1, e o MSF utilizando um acoplamento iterativo para resolução do problema proposto.

Em 2018 [20,21] estudou um modelo eficiente de integração numérica para ser aplicado a placas espessas, no presente estudo a base para integração numérica era montada uma única vez e as regiões que apresentavam contato com o contorno eram subtraídas da formulação em formas triangulares.

Neste trabalho três métodos verdadeiramente sem malha foram abordados: o MLPG1 onde a função de ponderação é a própria função peso e o MLPG2 que apresenta o delta de Dirac como função de ponderação e o Método das Soluções Fundamentais.

O MLPG1 vem chamando bastante a atenção de pesquisadores e apresentando resultados bem promissores em suas aplicações, o método apresenta formulação matemática bem similar à do MEF. Os dois métodos derivados do MLPG apresentam abordagem local e utilizam de subdomínios locais para a montagem dos sistemas lineares resultantes de suas devidas formulações. Uma diferença a ser avaliada é que o MLPG2 não necessita de integração numérica, e o MLPG1 sofre grande influência em seus resultados em função desta integração. Neste trabalho será feita uma comparação entre estes dois métodos, avaliando suas peculiaridades e vantagens.

O MSF foi empregado para comparar com os métodos acima mencionados sendo aplicado a problemas clássicos da proteção catódica.

Os resultados foram comparados com os obtidos através do MEC uma vez que este o mais utilizado para simular sistemas de proteção catódica na atualidade.

## **1.1 OBJETIVOS**

Esta tese tem o objetivo de implementar e aplicar os métodos sem malha a teoria do potencial. Considerando para esse fim problemas relacionados também a proteção catódica, em função da particularidade do problema relacionado com a distribuição de densidade de corrente e potencial eletroquímico, onde este fenômeno é governado pela equação de Poisson, as condições de contorno podem ser não lineares. Os métodos numéricos propostos para resolver o problema são derivados do MLPG e MSF e são comparados quanto a qualidade da solução com o MEC.

- 1 – Implementar os MLPG1, MLPG2 e fazer um estudo da aplicação dos mesmos à proteção catódica;
- 2 – Estudar a integração numérica para o MLPG1 e a aplicação de diferentes funções de forma e graus de polinômios para o MLPG1 e MLPG2 aplicados a proteção catódica;
- 3 – Comparar os resultados obtidos com o MLPG1, MLPG2, MSF e MEC, aplicados a proteção catódica, para domínios homogêneos.
- 4 – Aplicar o MEC ao problema de análise inversa, utilizando Algoritmos Genéticos para a otimização.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Este texto está escrito conforme a seguinte organização: no Capítulo 2 apresenta-se uma revisão sobre os conceitos envolvidos em corrosão e algumas reações que participam do fenômeno em especial a proteção catódica onde são apresentados dois mecanismos básicos para conter a corrosão, o sistema de proteção galvânica e o sistema de proteção por corrente impressa. Também nesse contexto são apresentadas as equações que representam numericamente o problema da proteção catódica.

No Capítulo 3, são apresentados os principais tipos de função de interpolação e aproximação empregadas nos métodos sem malha, também é apresentada uma discussão rápida sobre o método dos elementos de contorno, envolvendo o tratamento de integrais de domínio, um breve resumo sobre o método inverso aplicados as curvas de polarização. Também neste capítulo é apresentado a otimização por algoritmos genéticos e o acoplamento deste com os métodos numéricos propostos.

No Capítulo 4, serão apresentados os principais métodos sem malha implementados no desenvolvimento da tese. A formulação por equações integrais para o MLPG vertentes 1 e 2 é descrita e apresentada para os problemas da proteção catódica. Além da formulação do MLPG também é feito um breve resumo sobre o MSF também para o problema da proteção catódica.

No Capítulo 5, serão apresentados e discutidos resultados relacionados ao problema do potencial. Também serão apresentados problemas clássicos da proteção catódica, envolvendo todos os métodos numéricos anteriormente descritos.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

No Capítulo 7 são apresentadas as referências consultadas no desenvolvimento deste trabalho.

## **CAPÍTULO 2**

### **PROTEÇÃO CATÓDICA**

#### **2.1 INTRODUÇÃO**

A corrosão, em geral, é um processo espontâneo, está constantemente transformando os materiais metálicos de modo que a durabilidade e desempenho deles deixam de satisfazer os fins a que se destinam. No seu todo esse fenômeno assume uma grande importância na vida moderna, que vem cada vez mais utilizando metais e suas ligas [1]. Desta forma os custos financeiros da corrosão são cada vez maiores e juntamente com estes vem crescendo também os investimentos em tentar reduzir, controlar ou extinguir os processos de corrosão [2].

A corrosão pode ser definida como um processo de degradação de uma substância, metálica ou não, por ação química ou eletroquímica do meio ao qual está inserido, associada ou não a esforços mecânicos [1,2].

A NACE, já publicou um compêndio internacional de Estudo de Prevenção, Aplicação e Economia das Tecnologias de Corrosão (IMPACT). Segundo o estudo, o custo global anual da corrosão é estimado em cerca de 2,5 trilhões de dólares americanos, dos quais cerca de 25% podem ser economizados se forem implementados métodos de proteção eficazes [22].

Uma técnica extremamente empregada para combater a corrosão das instalações enterradas, submersas e em contato com eletrólitos é a proteção catódica [23].

Humphrey Davy em 1824 usa proteção catódica em embarcações Britânicas esse cientista fixou pequenos pedaços de metais não semelhantes, como ferro, estanho e zinco nas chapas de cobre que revestiam os cascos de madeira dos navios, a fim de retardar a corrosão dos mesmos [1]. No decorrer deste capítulo serão apresentados alguns conceitos sobre o tema em questão. No Brasil, o início a construção do Oleoduto Rio-Belo Horizonte (ORBEL) da PETROBRAS deu início à utilização da proteção catódica em 1964. Neste capítulo os conceitos básicos de

corrosão e proteção catódica serão discutidos. Para maiores detalhes sobre o assunto abordado aqui consultar a literatura sobre o assunto [2].

## 2.2 CORROSÃO

Os processos de corrosão são classificados em geral através do meio e da forma que a corrosão se apresenta no material envolvido no processo. A forma é utilizada principalmente para determinar a agressividade com que foi causada a corrosão e é classificada de acordo com a aparência do material corroído [1, 2].

Na corrosão eletroquímica, os elétrons são cedidos em determinada região e recebidos em outra região, desta forma apresentando o comportamento semelhante ao de uma pilha de corrosão. Assim sendo neste processo de corrosão temos basicamente dois tipos de reações, anódicas e catódicas na superfície do material metálico, com a consequente ocorrência de um fluxo de corrente elétrica no sentido convencional, das áreas anódicas para as catódicas através do eletrólito, sendo o retorno da corrente realizado por intermédio do contato metálico entre essas regiões. Devido a estas características apresenta comportamento semelhante ao de uma pilha eletroquímica [24].

A reação anódica consiste na oxidação do metal (do anodo) em um meio eletrolítico, passando o átomo metálico ao estado iônico, através da perda de elétrons.

Reação catódica que ocorre no catodo, eletrodo onde ocorrem as reações de redução, que caracterizam a área protegida da estrutura, recebendo a corrente que flui através do eletrólito.

Para que as reações anódica e catódica aconteçam é necessário um condutor por onde fluem os elétrons, no sentido anodo-catodo.

Toda pilha é caracterizada pela diferença de potencial entre seus eletrodos em circuito aberto, que é denominada de **força eletromotriz (fem)** [2].

Retirando-se qualquer um desses componentes se elimina a pilha e conseqüentemente, diminui a possibilidade de corrosão em alguns casos podendo chegar a interromper por completo o processo.

Com a utilização da proteção catódica consegue-se manter estruturas metálicas, completamente livres da corrosão por tempo indeterminado, mesmo que suas superfícies não estejam protegidas por nenhum tipo de proteção física e submetidas a condições agressivas impostas pelo meio.

### 2.3 MECANISMO

O mecanismo básico da proteção catódica é extremamente simples embora sua aplicação exija muita experiência tanto do projetista quanto do instalador do sistema proposto. O princípio da proteção catódica pode ser explicado considerando a corrosão de um metal típico M em um meio ácido. [2]:



O processo corrosivo de estruturas metálicas se caracteriza sempre pelo aparecimento de áreas catódicas e anódicas na superfície do material metálico, com a consequente ocorrência de um fluxo de corrente elétrica realizado por intermédio do contato metálico entre essas regiões. As heterogeneidades existentes no material metálico, agravam os problemas de corrosão, uma vez que tais variações (resistividade elétrica, grau de aeração, composição química, grau de umidade entre outras) originam também pilhas de corrosão na superfície de materiais enterrados [2].

Pela natureza eletroquímica da corrosão se a corrente é considerada em fluxo do (+) para (-), como em teoria convencional, a estrutura é protegida quando a corrente entra no eletrólito. Por outro lado, a aceleração da corrosão ocorre se a corrente passar do metal para o eletrólito. A corrente convencional é adotada na tecnologia de proteção catódica, assim aqui será adotada essa convenção [3].

A taxa de corrosão depende também da quantidade de corrente que flui no sistema, proteger com proteção catódica uma estrutura significa eliminar, por processo artificial, as áreas anódicas da estrutura do metal fazendo com que toda a estrutura adquira comportamento catódico.

São três os mecanismos que podem ocasionar a redução da corrosão da corrosão quando se aplica a proteção catódica:

- O potencial do metal atinge um valor tal que, em todas as áreas do metal, só ocorre um processo catódico, isso é, impede-se a reação



- O eletrólito adjacente à superfície metálica se torna mais básico devido à redução dos íons hidrogênio,  $H^{+}$ , ou à redução do oxigênio



- A elevação do PH pode acarretar a precipitação de substâncias insolúveis, como  $CaCO_3$  e  $Mg(OH)_2$ , que podem depositar-se sobre o metal produzindo camada protetora.

As duas formas mais empregadas para proteger as estruturas através da proteção catódica são: (1) Por uma fonte externa de energia; (2) Por um acoplamento galvânico apropriado.

#### **2.4 PROTEÇÃO CATÓDICA GALVÂNICA**

Na proteção catódica galvânica o fluxo de corrente elétrica fornecida origina-se da diferença de potencial existente entre o metal a proteger e outro escolhido como anodo e que tem potencial mais negativo na tabela de potenciais.

O anodo nesse caso é chamado de anodo de sacrifício e é consumido durante a proteção da estrutura metálica em questão. Proteção catódica usando anodo de sacrifício é também usada na proteção de tubulações enterradas, como na Figura 1. Os anodos são espaçados ao longo da tubulação para garantir a distribuição de corrente uniforme [1].



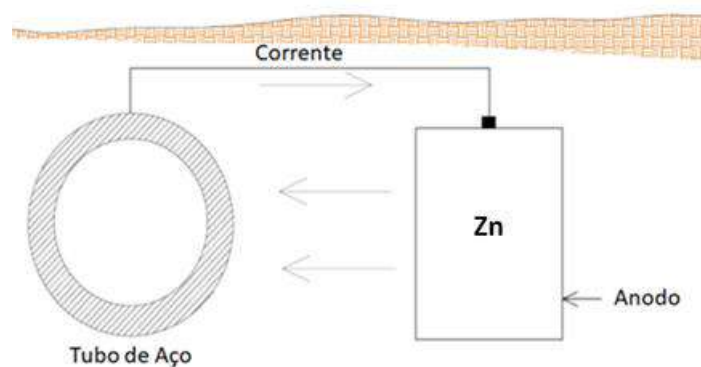


Figura 1 - Proteção de uma tubulação enterrada com anodo de magnésio.

Os materiais utilizados como anodos galvânicos são ligas de magnésio, zinco ou alumínio. A utilização dos anodos é função das características da estrutura a proteger e do tipo de eletrólito em contato com o material metálico. A Tabela 2.1 apresenta aplicações típicas dos anodos galvânicos [25].

Tabela 2-1 Aplicações típicas dos anodos galvânicos

Anodos	Aplicações
Alumínio	Estruturas metálicas imersas em água do mar
Magnésio	Estruturas metálicas imersas em água doce, de baixa resistividade, ou enterrada em solos com resistividade elétrica até 3.000 $\Omega$ .cm
Zinco	Estruturas metálicas imersas em água do mar ou enterradas em solo com resistividade elétrica até 1.000 $\Omega$ .cm

Os anodos galvânicos são utilizados, normalmente, para eletrólitos de muito baixa resistividade elétrica (até 3.000  $\Omega$ .cm) uma vez que as diferenças de potenciais são muito pequenas necessitando de circuitos de baixas resistências elétricas para a liberação da corrente de proteção catódica. Pelo mesmo motivo a proteção catódica galvânica é mais recomendada, tanto técnica quanto economicamente, para estruturas metálicas que queiram pequena quantidade de corrente, em geral até 5 A [2, 3].

## 2.5 PROTEÇÃO CATÓDICA POR CORRENTE IMPRESSA

No processo de proteção por corrente impressa o fluxo de corrente fornecido origina-se da força eletromotriz (fem) de uma fonte geradora de corrente elétrica contínua sendo utilizado retificadores que alimentados com corrente alternada, fornecem a corrente elétrica contínua necessária à proteção da estrutura metálica [1].

Para a dispersão dessa corrente elétrica no eletrólito são utilizados anodos especiais, inertes, com características e aplicações que dependem do eletrólito onde são empregados.

A grande vantagem do método por corrente impressa consiste no fato de a fonte geradora (retificador de corrente) poder ter potência e a tensão de saída de que se necessite, em função da resistividade elétrica do eletrólito, o que leva a concluir que esse método se aplica à proteção de estruturas em contato com eletrólitos de baixa (3.000 a 10.000  $\Omega\cdot\text{cm}$ ), média (10.000 a 50.000  $\Omega\cdot\text{cm}$ ), alta (50.000 a 100.000  $\Omega\cdot\text{cm}$ ) e altíssima (acima de 100.000  $\Omega\cdot\text{cm}$ ) resistividade elétrica. A Figura 2 mostra uma aplicação do sistema por corrente impressa [2, 3].

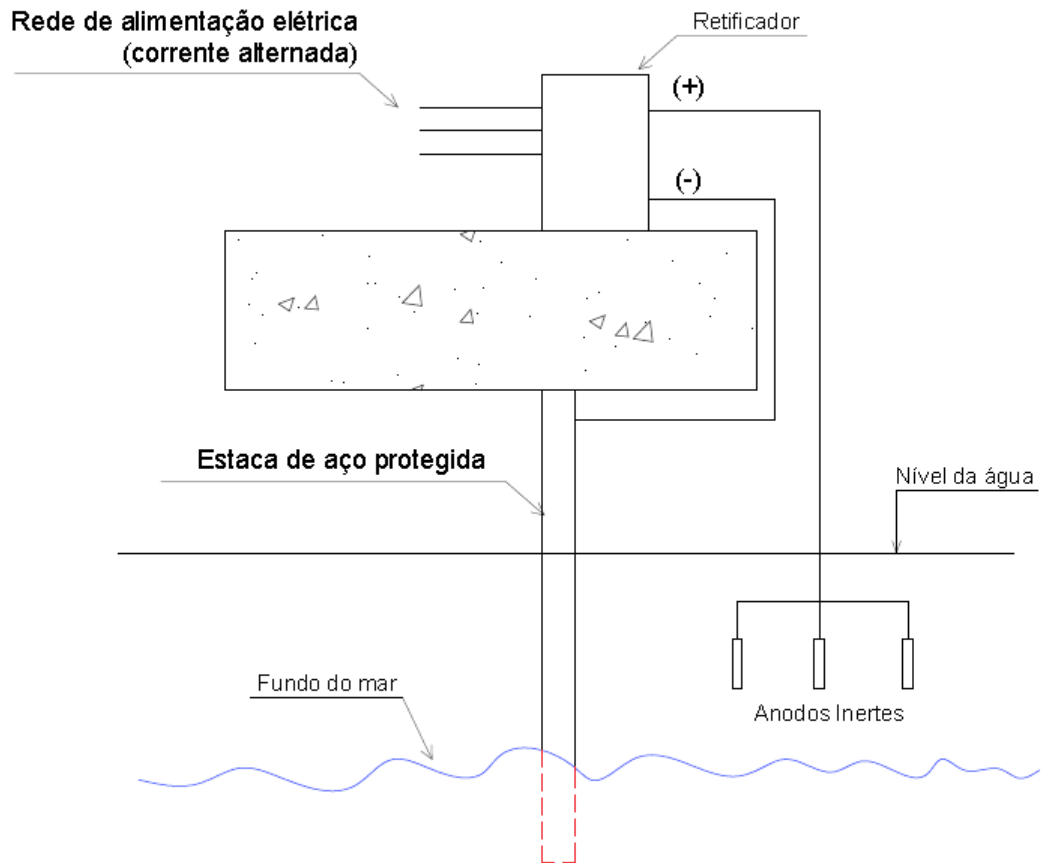


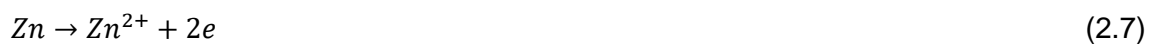
Figura 2 - Proteção catódica por corrente impressa para uma estaca de pier de atracação de navio.

## 2.6 REAÇÕES ENVOLVIDAS

As reações que se passam nos sistemas de proteção catódica são [2]:

### 2.6.1 Galvânica

- área anódica:



- área catódica

a) aerada



b) não – aerada



## 2.6.2 Corrente impressa ou forçada

- área anódica



ou



- área catódica

a) aerada



b) não – aerada



Se o anodo não for totalmente inerte, poderá ocorrer a oxidação do metal (M), observando-se a reação.



## 2.7 POLARIZAÇÃO

Todo metal imerso em uma solução contendo seus próprios íons, na ausência de reações que interfiram, possui um potencial E dado pela equação de Nernst. Se uma corrente circular por esse eletrodo, o potencial variará, e o novo valor de potencial E' dependerá da corrente aplicada. A diferença entre os dois potenciais é conhecida como sobrepotencial.

$$\eta = E' - E \quad (2.15)$$

Pode ocorrer que o potencial inicial seja diferente do potencial de equilíbrio, devido a reações no processo. Sendo esse valor conhecido como potencial de corrosão. O potencial de corrosão também varia à circular uma corrente pelo eletrodo essa variação é definida como polarização [2].

## 2.8 PASSIVAÇÃO

Observa-se que experimentalmente, que alguns metais podem apresentar comportamento diferente do que seria previsto pelas suas posições na tabela de potenciais. Esse comportamento pode estar relacionado com a passivação do metal. A passivação é um processo que depende do material e do meio, alguns metais se passivam no ar por exemplo aços inoxidáveis. Outros sofrem passivação em meio muito específico, como o chumbo em ácido sulfúrico ou o ferro em ácido nítrico concentrado.

Verifica-se a existência de diversas teorias para explicar a passivação, mas o fato é que o metal, em geral, está coberto por um óxido ou hidróxido que pode ter, após envelhecimento, isto é, será uma fase estável. O fato de grande importância para fins práticos é a existência de metais que, a partir de certo potencial, cujo valor varia com o meio e outros fatores, apresentam um filme protetor na sua superfície, o qual reduz a corrente de dissolução a valores desprezíveis [2]. As curvas de polarização anódica são importantes auxiliares para o estudo e identificação de sistemas metal/meio passíveis. A Figura 3 apresenta curvas clássicas de polarização.

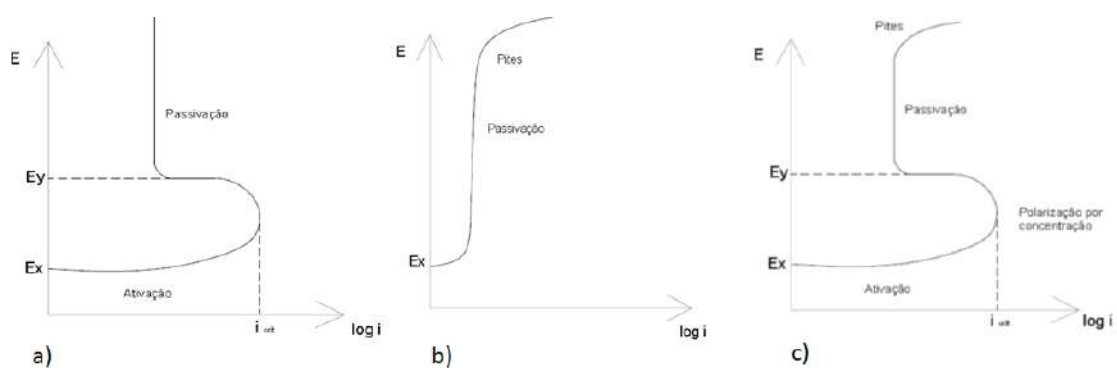


Figura 3 Curvas de polarização clássicas encontradas nos sistemas práticos de corrosão.

Adaptada: Gentil, V., 2007 [2].

Uma abordagem importante está relacionada com a dependência do tempo das curvas de polarização. Santiago & Telles [4, 26, 27] simularam sistemas de proteção

catódica com curvas de polarização não lineares e dinâmicas (que variavam com o tempo) e para tal análise o método usado foi o método dos elementos de contorno [28].

## 2.9 MODELO MATEMÁTICO

Para representar o fenômeno da proteção catódica, o problema é considerado de forma simplificada e representado por uma equação diferencial no regime estacionário, sujeita a condições de contorno que podem ser lineares e não lineares, sendo esta última fornecida por uma função dependente do potencial, relativa a um determinado potencial de formação (curvas de polarização).

### 2.9.1 Equação Diferencial

Para estudar o problema da proteção catódica é necessário que a equação diferencial abordada a nível de simulação numérica tenha condição de representar o fenômeno abordado.

Para representar o fenômeno pode-se pensar um domínio  $\Omega$  onde existe um campo elétrico gerado pela movimentação de cargas presentes em um dado eletrólito nesse domínio, que apresenta como contorno  $\Gamma$ . As cargas no interior deste eletrólito dependem da condutividade elétrica do meio dadas aqui por  $k$ .

Segundo o princípio da conservação de energia, a variação da energia em determinada região é igual ao fluxo dela através de uma dada superfície  $\Gamma$ .

Este princípio será representado pela seguinte equação diferencial:

$$\nabla \cdot i = -b, \quad (2.16)$$

onde  $i$  é a densidade de corrente e a função escalar  $b$  designa a fonte.

A densidade de corrente em um meio isotrópico está relacionada com o vetor campo elétrico ( $E$ ) pela lei de Ohm é igual

$$i = kE \quad (2.17)$$

onde  $k$  é a condutividade elétrica

Substituindo a Equação (2.16) na Equação (2.17)

$$\nabla \cdot (kE) = -b \quad (2.18)$$

Simplificando a Equação (2.18) para regiões homogêneas

$$k\nabla \cdot E = -b. \quad (2.19)$$

As componentes do campo elétrico são expressas em termos das derivadas parciais do potencial eletroquímico ( $\phi$ ) em relação às coordenadas. Logo a equação de Poisson pode ser obtida a partir da Equação (2.19).

$$\nabla^2 \phi = -b/k \quad (2.20)$$

### 2.9.2 Problema de Valor de Contorno

O fenômeno da proteção catódica em questão foi considerado de forma simplificada, por uma equação diferencial no regime estacionário, sujeita a condições de contorno que são caracterizadas por uma função dependente do potencial, e podem ser lineares ou não lineares. Também é considerado o ponto onde o eletrólito entra em contato com o metal, simplificando a discretização, para tal é adotada a formulação matemática do problema de potencial eletroquímico.

Levando em conta que os eletrodos estão considerados em contato com o eletrólito e que é discretizado a partir deste contato, pensando em um domínio qualquer  $\Omega$  onde existe campo elétrico gerado através da movimentação das cargas presentes nesse domínio, que apresenta como contorno  $\Gamma$  que se trata da região de contato entre os eletrodos e o eletrólito, assumindo que o eletrólito é homogêneo e que não temos nem acúmulo nem queda da concentração de eletrólito.

Este princípio será representado pela seguinte equação diferencial:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (2.21)$$

onde a densidade de corrente através do contorno  $\Gamma$  dada por:

$$i = k \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (2.22)$$

$\partial/\partial n$  é a derivada normal para fora. Note que o potencial elétrico  $\phi$  é definido com referência no metal, o sinal é oposto ao  $E$  adotado pela ciência corrosão, onde o

potencial é definido com referência no eletrodo tal como o eletrodo saturado de calomelano  $\phi = -E$ .

Sujeito as seguintes condições de contorno, Boyce e Diprima, 1999:

$$u(x) = \bar{\phi}(x), \quad x \in \Gamma_1 \quad (2.23)$$

$$i(x) = k \frac{\partial \phi}{\partial n}(x) = \bar{i}(x), \quad x \in \Gamma_2 \quad (2.24)$$

$$i(x) = c\phi(x) + d, \quad x \in \Gamma_3 \quad (2.25)$$

$$i(x) = F(\phi(x)), \quad x \in \Gamma_4 \quad (2.26)$$

Sendo  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  o contorno de  $\Omega$ ,  $q(x)$  a densidade de corrente na direção na normal  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  constantes conhecidas e  $F(\phi(x))$  uma função não linear de  $\phi$ . As Equações (2.23) e (2.24) representam as condições de Dirichlet e Neumann respectivamente, e as Equações (2.25) e (2.26) são as condições de contorno lineares e não lineares que é dada pela curva de polarização. Nas condições propostas em que a estrutura metálica se encontra em contato direto com o eletrólito [2].



## CAPÍTULO 3

### FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

O método sem malha Local Petrov-Galerkin utiliza pontos dispersos em um dado domínio para aproximar soluções de equações diferenciais, para alcançar tal soluções uma das etapas de fundamental importância é a aproximação satisfatória da variável desejada em um ponto específico, ponto este no qual o valor da função é conhecido. Assim são construídas as funções de forma que são posteriormente empregadas na formulação dos métodos sem malha. As funções de forma são calculadas durante o processamento, onde um grupo de pontos é destacado em um subdomínio, este pertencente ao conjunto de pontos globais. A interpolação é feita então em pontos distribuídos em um subdomínio local [17, 31].

A função de aproximação deve apresentar algumas características a fim de garantir uma solução adequada. Deve ter um caráter local, onde todos os pontos fora de um dado domínio não são considerados para a solução daquele subdomínio especificamente. O fato de ser local facilita o tratamento de condições adversas dentro de um mesmo problema encontrando soluções mais adequadas [17].

A função de aproximação deve ser estável, para que a solução do problema tenha este mesmo comportamento.

As funções de forma devem ser linearmente independentes para todos os pontos campo, para formar uma base nodal consistente. A independência é necessária pois a partir da base nodal é estabelecido um sistema de equações discretas estável.

Outra característica importante é a necessidade de convergência, à medida que é feito um refinamento no número de pontos campo, aumentando este número o valor tem de se aproximar cada vez mais do valor exato, ou da solução analítica. O grau de consistência de uma função de interpolação é igual a ordem da função polinomial a qual a função de interpolação é capaz de reproduzir perfeitamente. Existem diversos métodos utilizados na construção das funções de forma, entre eles, destacam-se [17]:

- Métodos de Mínimos Quadrados Móveis (MQM) - Moving least squares (MLS)
  - i. Aproximação por MQM;
  - ii. Aproximação por MQM Modificado;

- Métodos de Interpolação Pontual – Point Interpolation Method (PIMs):
  - i. Polinomial PIM;
  - ii. Radial PIM (RPIM);
- Métodos de Partição de Unidade – Partition of Unity (PU):
  - i. Elemento Finito de Partição de Unidade;
  - ii. Nuvens-hp – hp clouds;
- Funções de Base Radial com Suporte Compacto- Radial Basis Functions (RBF) with compact support.

Segundo [17, 31, 32, 33] o MMQM possui precisão e eficiência computacional muito boas apresentando resultados satisfatórios em um grande número de problemas ao qual o mesmo foi aplicado, sendo por isso um dos métodos de aproximação mais utilizados nos métodos sem malha.

### 3.1 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS

O Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM), segundo Belytschko [15,16], o interpolante  $u^h(\mathbf{x})$  da função  $u(\mathbf{x})$  é definido no domínio  $\Omega$  através da expressão:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})a_j(\mathbf{x}) \equiv p^T(\mathbf{x})a(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

onde  $p_1(x) = 1$  e  $p_j(x)$  são monômios do espaço coordenado  $x^T(x) = [x, y]$  de modo a base ser completa. A base linear em uma dimensão é dada por

$$P^T(x) = [1, x], \quad m= 2 \quad (3.2)$$

e para base quadrática

$$P^T(x) = [1, x, y], \quad m= 3 \quad (3.3)$$

onde para a base linear o domínio bidimensional é provido por:

$$P^T(x) = [1, x, y], \quad m= 3 \quad (3.4)$$

e para a base quadrática

$$P^T(x) = [1, x, y, x^2, xy, y^2], \quad m= 6 \quad (3.5)$$

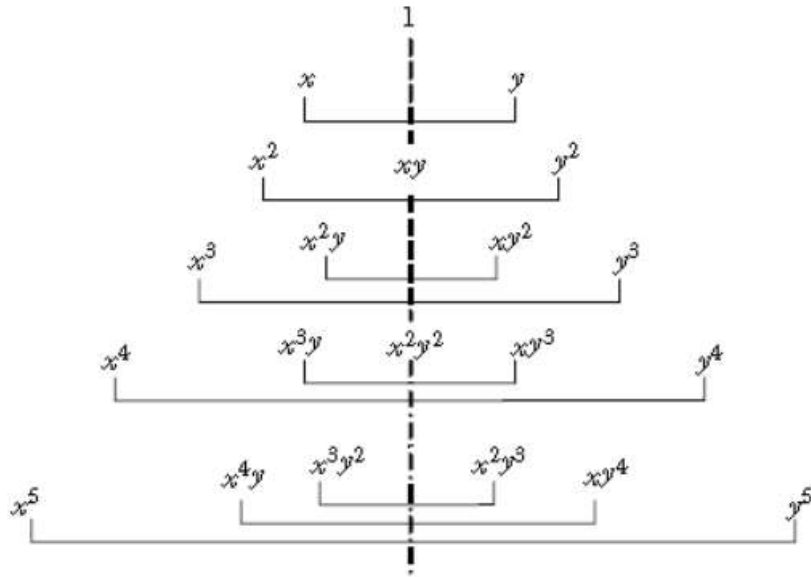


Figura 4 – Triângulo de Pascal para 2d.

Fonte: Adaptado: Liu & Gu, 2005 [31].

A Figura 4 traz o triângulo de Pascal utilizado na montagem da base monomial dos espaços coordenados [31].

Os coeficientes  $a_j(x)$  na Equação (3.1) também são função de  $x$ ;  $a(x)$  é obtido em qualquer ponto minimizando uma ponderação, discreta de norma  $L_2$  conforme a Equação (3.5):

$$J(\mathbf{a}(\mathbf{x})) = \sum_{l=1}^n W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) [P^T(\mathbf{x}_l) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_l]^2 \quad (3.5)$$

onde  $n$  é número de pontos na vizinhança de  $\mathbf{x}$  dentro da função peso  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \neq 0$ , e  $u_l$  é o valor nodal de  $u$  para  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_l$ . A vizinhança de  $\mathbf{x}$  é chamada de domínio de influência de  $\mathbf{x}$ , ou círculo de influência em duas dimensões, conforme figura.

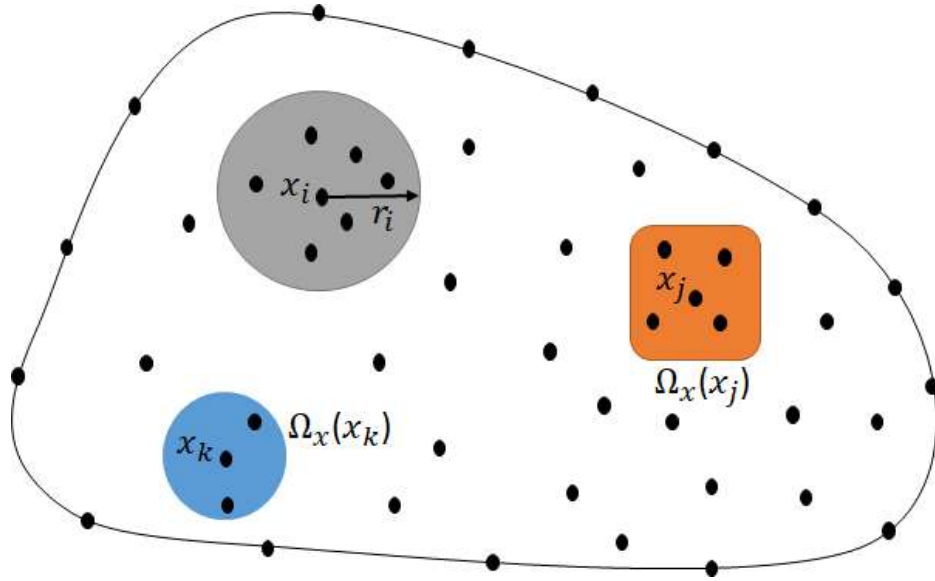


Figura 5 – Domínio de influência e suporte para as devidas funções peso.

O estacionário de  $J$  na Equação (3.5) para  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  conduz a relação linear entre  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{u}_I$  [11]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.6)$$

ou

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.7)$$

onde as matrizes  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  são definidas por

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x})\mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{P}(\mathbf{x}_I), \quad w_I(\mathbf{x}) \equiv w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_n)] \quad (3.9)$$

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \vdots & \ddots & \vdots & x_{np} \\ y_1 & y_2 & \dots & \dots & \dots & y_{np} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{(m \times NP)} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & w_{np}(x) \end{bmatrix}_{(NP \times NP)} \quad (3.11)$$

$$u^T = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (3.12)$$

a partir desta, tem se:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jl} \equiv \sum_{l=1}^n \phi_l(\mathbf{x})u_l \quad (3.13)$$

onde a função de forma  $\phi_l(\mathbf{x})$  é definida por

$$\phi_l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jl} \quad (3.14)$$

A derivada parcial de  $\phi_l(x)$  pode ser obtida segundo

$$\phi_{l,k} = \sum_{j=1}^m \{p_{j,k}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{jl} + p_j(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{,k} + \mathbf{A}_{,k}^{-1}\mathbf{B})_{jl}\} \quad (3.15)$$

Onde:

$$\mathbf{A}_{,k}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,k}\mathbf{A}^{-1} \quad (3.16)$$

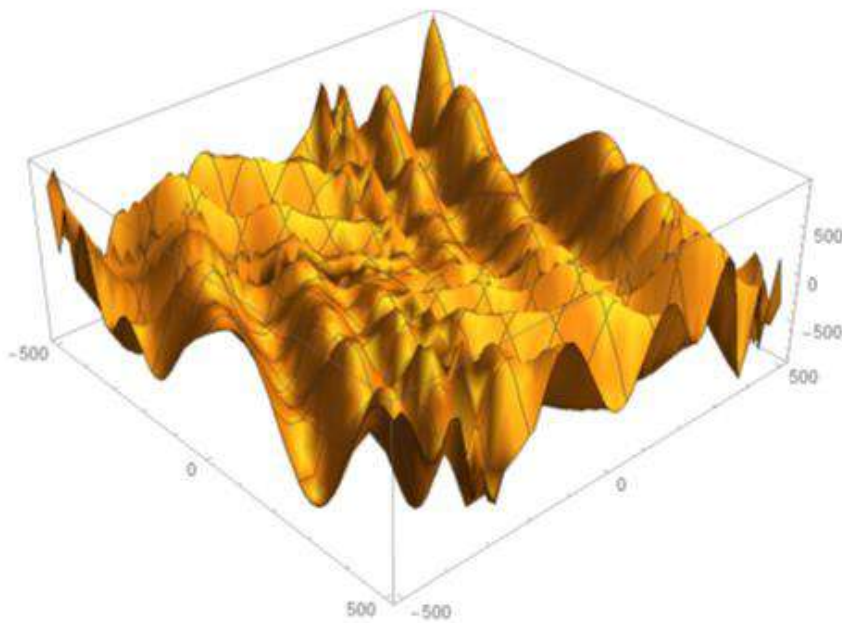


Figura 6 - Função Egg. Holder.

As Figuras 6 e 7, foram obtidas durante testes iniciais de interpolação com o Método dos Mínimos Quadrados Móveis. Onde a Figura 6 foi obtida com Wolfram Mathematica 10 e a Figura 7 pelo Matlab R16.

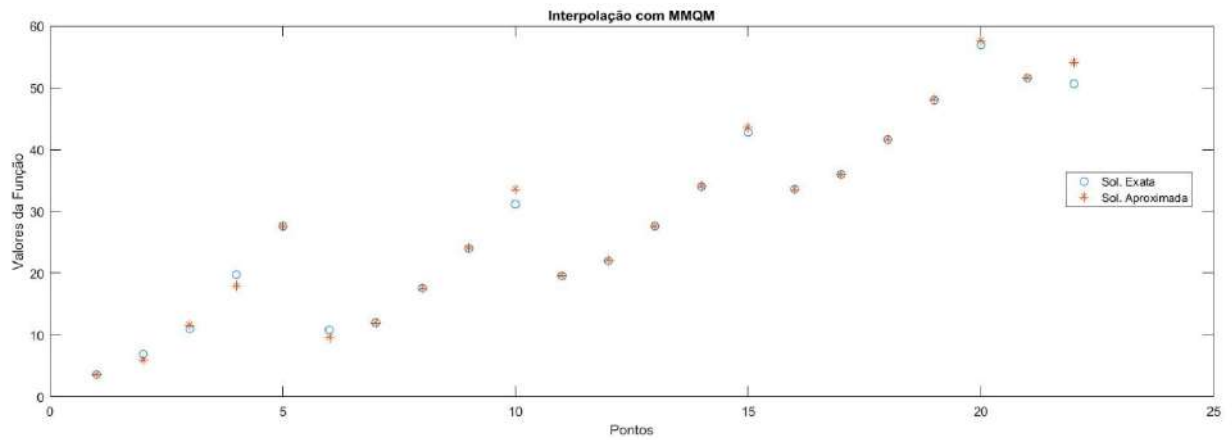


Figura 7 – Interpolação da função Egg. Holder com o Método dos Mínimos Quadrados Móveis base polinomial quadrática.

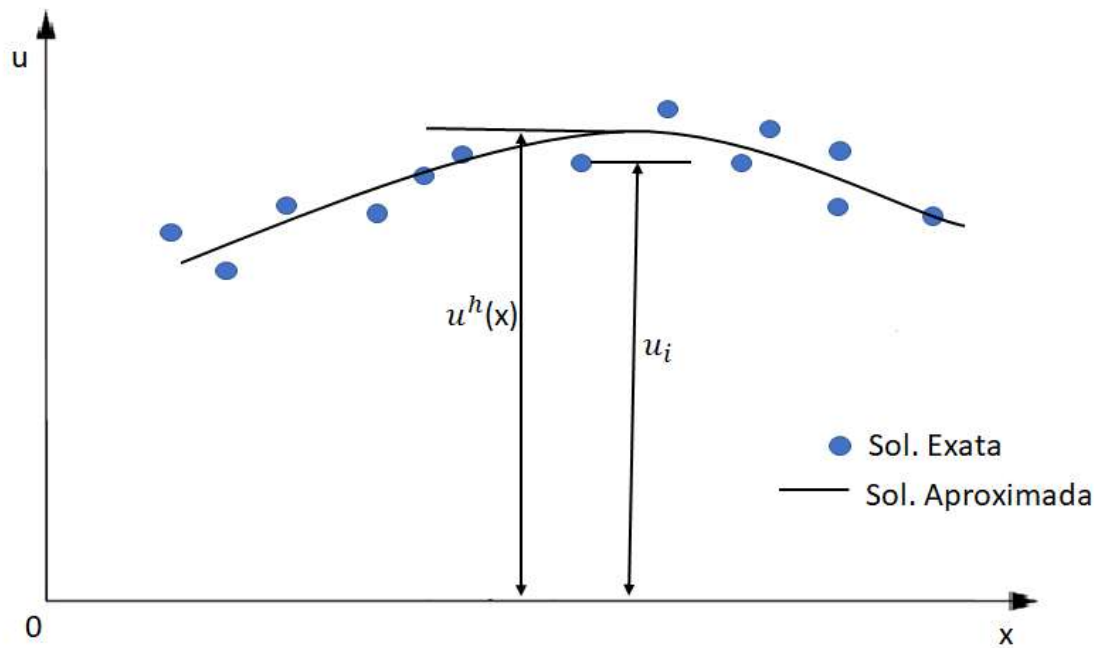


Figura 8 - Parâmetros nodais  $u_i$  e função aproximada  $u^h(x)$  através do MMQM, onde nem sempre existe coincidência entre o valor aproximado e o valor real.

A Figura 8 deixa claro que o método dos mínimos quadrados móveis se trata de uma aproximação e não apresenta a propriedade do Delta de Kronecker:  $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ , trabalha com valores fictícios, e por esse motivo apresenta certas particularidades para a imposição das condições de contorno Essenciais ou de Dirichlet. Na seção 4.4.3 será feita uma análise detalhada sobre o assunto [17, 31, 33].

Para uma representação coerente das funções de aproximação, uma etapa de fundamental importância é a escolha da função peso, onde para aplicação nos métodos sem malha a maioria delas apresenta a forma semelhante a forma de um sino quando plotadas em 3D. Dentro desta região os valores são diferentes de zero e fora dela todo o restante é zerado. A Figura 9 apresenta essa característica da função peso para diferentes pontos do domínio  $\Omega$ . Conforme observado  $\Omega_s$  representa o subdomínio local adotado para a interpolação de um dado ponto  $x_i$ . E  $\Gamma$  representa o contorno externo do problema.

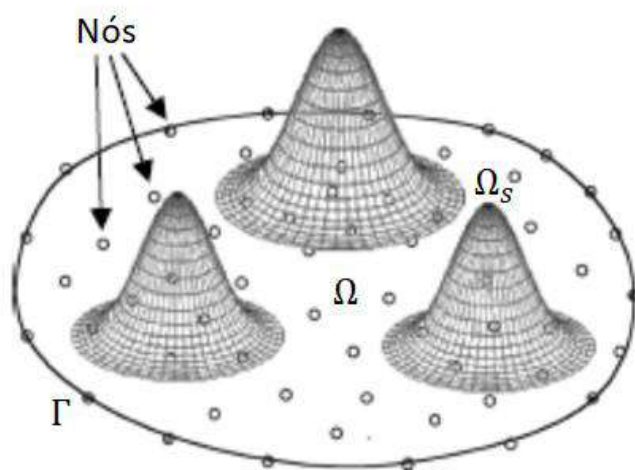


Figura 9 – Apresentação esquemática de funções de interpolação para um domínio qualquer.

Fonte: Adaptado: Liu & Gu, 2005 [31].

Na Figura 10 é feita uma comparação entre o formato das funções Gaussiana com raio e Spline. Para a função Gaussiana foram usados diferentes valores do fator  $c$ , onde este afeta diretamente a forma da função proposta para cada caso [19].

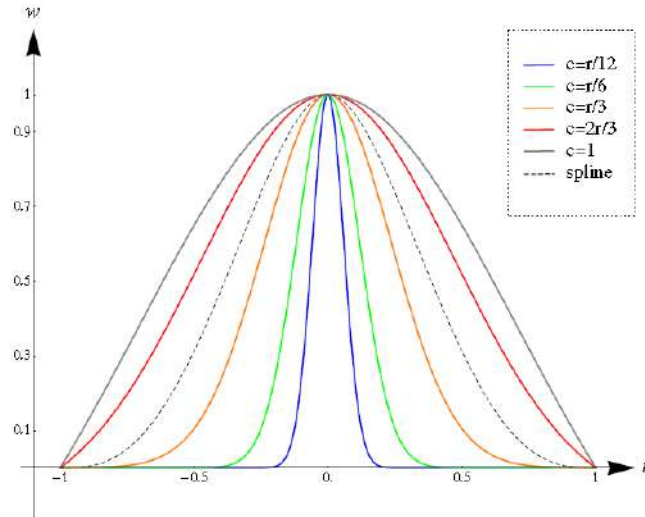


Figura 10 – Comportamento das funções Spline Quarta Ordem e Gaussiana.  
 Fonte: Fontes, E. F. J., 2014 [19].

As principais funções empregadas como função peso segundo [17, 34] são:

- ✓ Exponencial

$$w_i(\mathbf{r}) = e^{-\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2} \quad (3.17)$$

- ✓ Gaussiana com raio

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^{2k}} - e^{-\left(\frac{r_i}{c_i}\right)^{2k}}}{1 - e^{-\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^{2k}}}, & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0, & d_i \geq r_i \end{cases} \quad (3.18)$$

- ✓ Spline de 4º Grau

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^2 + 8\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^4, & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0, & d_i \geq r_i \end{cases} \quad (3.19)$$

As Figuras 11 e 12 representam a função Spline e a derivada primeira desta mesma função respectivamente.



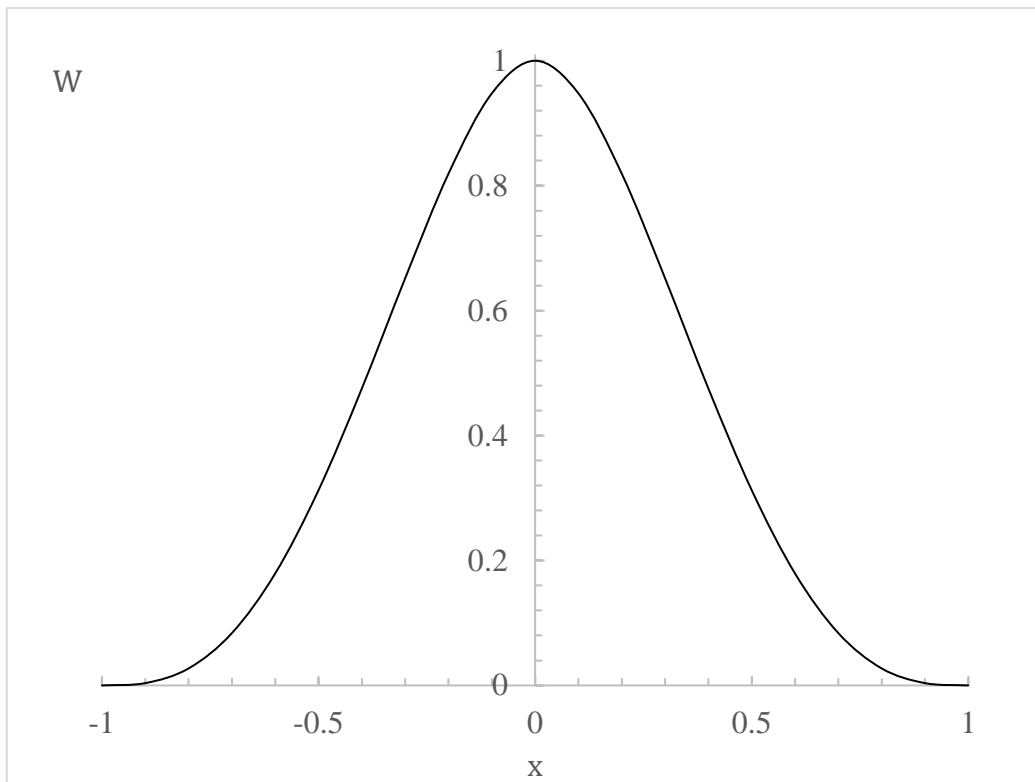


Figura 11 – Forma da Função Spline de Quarta Ordem.

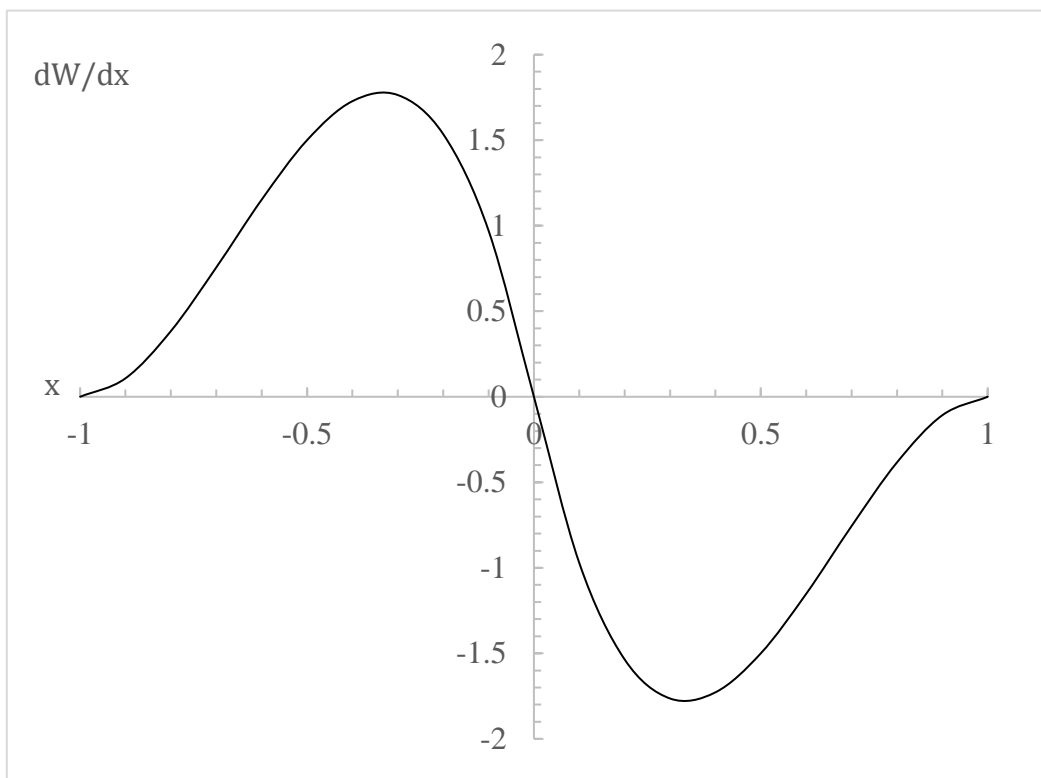


Figura 12 – Primeira derivada da Função Spline de Quarta Ordem.

Importante ressaltar que  $d_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2$  é a distância Euclidiana entre qualquer ponto campo contido no subdomínio  $\mathbf{x}_j$  e o ponto central do subdomínio local  $\mathbf{x}_i$ ; e  $r_i$  é o raio do suporte local no qual a função peso está contida.

Foram feitos testes com todas as funções pesos presentes neste texto e foi adotada a Spline por apresentar estabilidade e resultados precisos em todas as condições avaliadas, tanto para o MLPG1, quanto para o MLPG2 conforme seção 5 deste texto.

### 3.2 MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO USANDO FUNÇÕES DE BASE RADIAL

Existem diversas funções de base radial (FBR) disponíveis para serem aplicadas no processo de interpolação de funções. Na interpolação por FBR a variável independente é obtida pela distância Euclidiana entre os pontos de interesse, ponto base e os demais pontos nos quais queremos obter o valor da função aproximada, pontos campo  $\mathbf{x}_j$ .

Para interpolar a função  $u(\mathbf{x})$ , usando a função aproximada  $\tilde{u}(\mathbf{x}_i)$  em um domínio  $\Omega$  é necessário a determinação dos coeficientes  $a_j$  através da formulação proposta abaixo,

$$\tilde{u}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \mathbf{r}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \mathbf{a}_j \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{r}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  é um conjunto de FBR ao redor do ponto  $\mathbf{x}_i$  ponto base,  $\mathbf{x}_j$  são os pontos campo,  $a_j$  são os parâmetros a serem determinados,  $N$  é a quantidade de pontos que foi utilizada para aproximar  $u$  no ponto base  $\mathbf{x}_i$ .

Funções de Base Radial com suporte compacto, positivo e definido foram sugeridas apenas recentemente [16]. É demonstrado que, para uma dada dimensão e suavidade  $C^{2k}$ , uma função de base radial definida, positiva, na forma de um polinômio de grau mínimo, existe e é única dentro de um fator constante. Funções de base radial com suporte compacto positivo estudadas em [17] e apresentaram resultados precisos e coerentes:

FBR1:

$$\mathbf{r}(x) = \begin{cases} (1 - \frac{d_I}{r_I})^5 (8 + 40 \frac{d_I}{r_I} + 48 \frac{d_I^2}{r_I^2} + 25 \frac{d_I^3}{r_I^3} + 5 \frac{d_I^4}{r_I^4}), & 0 \leq d_I \leq r_I \\ 0, & d_I \geq r_I \end{cases} \quad (3.21)$$

FBR2:

$$\mathbf{r}(x) = \begin{cases} (1 - \frac{d_I}{r_I})^6 (6 + 36 \frac{d_I}{r_I} + 82 \frac{d_I^2}{r_I^2} + 72 \frac{d_I^3}{r_I^3} + 30 \frac{d_I^4}{r_I^4} + 5 \frac{d_I^5}{r_I^5}), & 0 \leq d_I \leq r_I \\ 0, & d_I \geq r_I \end{cases} \quad (3.22)$$

onde a distância de  $x_i$  ao ponto  $\mathbf{x}$ , e  $r_j$  é o tamanho do suporte da função de base radial no nó  $x_i$ . De forma matricial:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_x \quad (3.23)$$

onde,  $\mathbf{r}$  é o vetor que contém os vetores das funções de base radial no ponto  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{a}$  o vetor que contém os coeficientes de  $a_i$ .

Partindo da Equação (3.23) a interpolação FBRs, o sistema seguinte de equações lineares onde os coeficientes  $\mathbf{a}$  são obtidos da seguinte maneira conforme [17, 31]:

$$\mathbf{R}_0 \mathbf{a} = \bar{\mathbf{u}} \quad (3.24)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \mathbf{a}_j \quad (3.25)$$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} R_1(x_1) & \cdots & R_N(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(x_N) & \cdots & R_N(x_N) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Onde  $\mathbf{R}_0$  é uma matriz esparsa, contendo coeficientes a partir dos pontos base, formando a linha, e os pontos campo, formando à coluna. O vetor  $\mathbf{a}$  pode ser obtido através da Equação (3.27),

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{u} \quad (3.27)$$

A aproximação  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  pode ser expressada

$$u(x) = \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{u} = \sum_{l=1}^N \phi^l(x) u^l \quad (3.28)$$

onde a função de forma nodal é dada por

$$\phi(x) = \mathbf{r}^T(x) \mathbf{R}_0^{-1} \quad (3.29)$$

Esta função de forma depende unicamente da distribuição dos nós dispersos dentro do subdomínio, e possui as propriedades do Delta de Kronecker, essa propriedade a função de forma do MQM não possui. Em função desta propriedade a obtenção da condição de contorno essencial (Dirichlet) é obtida diretamente com a formulação, não necessitando de tratamento posterior como é comum no caso dos MQM.

Segundo Atluri e Shen 2002, a derivada parcial da função de forma pode ser obtida conforme a equação,

$$\phi(x) = [r_{1,k}(x) \ r_{2,k}(x) \ r_{3,k}(x) \ \dots \ r_{N,k}(x)] \mathbf{R}_0^{-1} \quad (3.30)$$

onde,  $(\ )_{,i}$  indica essa derivada

$$R_{i,k}(x) = \frac{\partial R_i(x)}{\partial d_i} \frac{\partial d_i}{\partial x^k} \quad (3.31)$$

com

$$\frac{\partial d_i}{\partial x^k} = \frac{x^k - x_i^k}{d_i} \quad (3.32)$$

Assim, a obtenção da derivada parcial de  $\phi^I(x)$  é simples de se obter. É notado que FBRs, e correspondentes funções de forma são suaves  $C^2$  e  $C^4$  para FBR1 e FBR2 [16, 17, 31], respectivamente.

A função de forma nodal pode ser escrita

$$\phi^I(x) = \sum_{j=1}^N \mathbf{R}_j(x) \mathbf{r}_{jI} \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{r}_{jI}$  são elementos da matriz  $\mathbf{R}_0^{-1}$ . E a correspondente derivada da função de forma pode ser expressada

$$\phi_{,k}^I(x) = \sum_{j=1}^N \mathbf{R}_{j,k}(x) \mathbf{r}_{jI} \quad (3.34)$$

Equações (3.33) e (3.34) mostram que as funções de forma e as derivadas forma polinomial de  $d_I$ .

## CAPÍTULO 4

### TÉCNICAS NUMÉRICAS EMPREGADAS

Quando a complexidade do problema aumenta tornando praticamente impossível a solução analítica, seja por meio da geometria ou das condições de contorno a resolução por métodos numéricos se torna a escolha técnica adequada eficiente e precisa para resolução de equações diferenciais. Essa acontece por meio da discretização dos problemas que envolvem tais equações, empregando elementos ou distribuições de pontos. Existe um número enorme de métodos numéricos, alguns apresentam malhas como o MEF e o MEC onde a discretização está baseada na construção de elementos, conforme apresentado na secção 4.1. A Figura 13 apresenta uma malha comumente empregada no MEF. O Método das Diferenças Finitas (MDF), utiliza distribuição de pontos agrupados em moléculas as quais definem as derivadas através dos operadores diferenciais

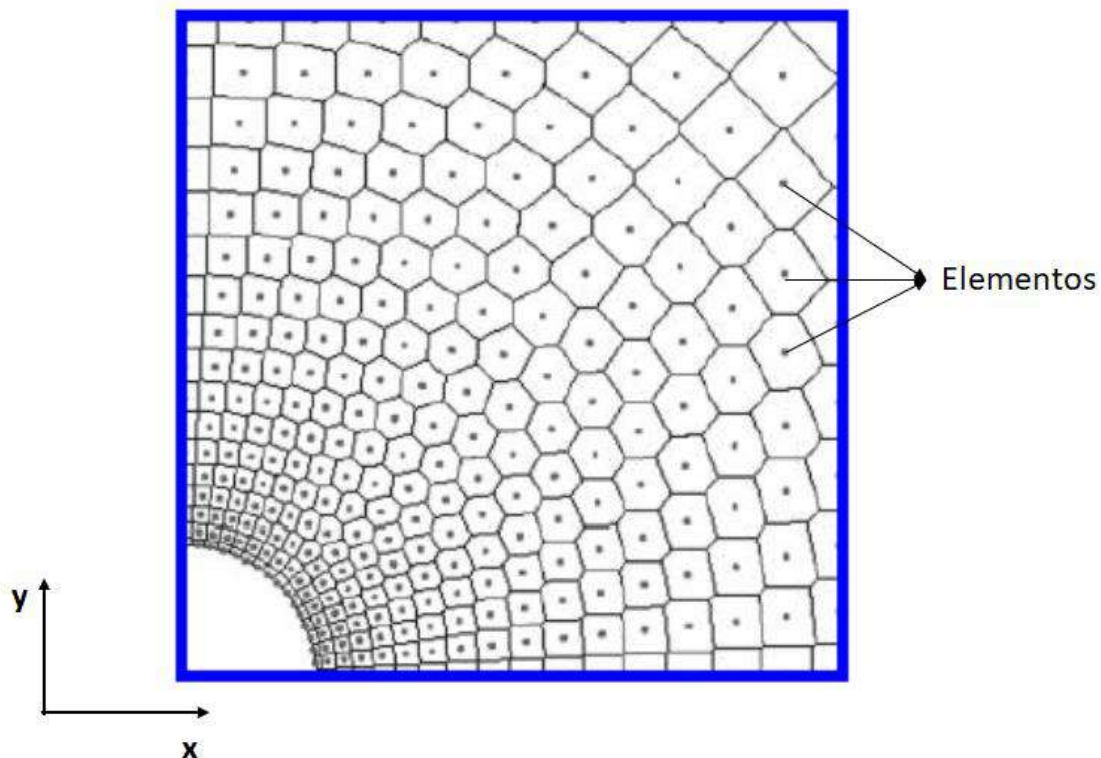


Figura 13 – Domínio discretizado para o MEF.

Fonte: Adaptado: Liu, G. R., 2010 [17].

## MÉTODO NUMÉRICO TRADICIONAL

### 4.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A equação integral do contorno aplicada a Laplace com suas devidas condições de contorno pode ser escrita como [35, 36]:

$$c(\xi)\phi(\xi) = \int_{\Gamma} \phi^*(\xi, x)i(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \phi(x) i^*(\xi, x)d\Gamma(x), \quad (4.1)$$

onde  $c(\xi)$  depende da geometria do contorno no ponto fonte  $\xi$ , sendo igual a  $\frac{1}{2}$  para contorno suaves;  $\phi^*(\xi, x)$  e  $i^*(\xi, x)$  representam as soluções fundamentais do problema conforme as Equações (4.2) e (4.3):

$$\phi^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (4.2)$$

onde  $r$  é a distância Euclidiana entre o ponto fonte  $\xi$  e o ponto campo  $x$ .

$$i^*(\xi, x) = k \frac{\partial \phi^*(\xi, x)}{\partial n} = -k \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}, \quad (4.3)$$

a integral de domínio

$$\phi_p(x) = \int_{\Omega} \phi^*(\xi, x)b(\xi)d\Omega, \quad (4.4)$$

quando substituída no lado direito da integral do contorno (4.1), torna-se equivalente à equação diferencial não homogênea e suas condições de contorno. A integral de domínio será transferida para que possa ser resolvida a transferência será pelo método da reciprocidade dual. Na seção 3.4 a integral de domínio será discutida com mais detalhes.

A abordagem para a solução da Equação (4.1) de um modo geral deve ser seguida em resumo as seguintes etapas:

- ✓ O contorno  $\Gamma$  é discretizado em uma série de elementos sobre os quais o valor prescrito do potencial e a derivada normal varia de acordo com as funções de interpolação. A geometria desses elementos pode ser modelada usando linhas, arcos circulares, parábolas etc.;

- ✓ Usando o método de colocação, a discretização da equação é aplicada para um número particular de nós dentro de cada elemento onde o valor do potencial e o valor da derivada normal é associado;
- ✓ A integral sobre cada elemento é encontrada em geral usando quadratura numérica;
- ✓ Para imposição das condições de contorno prescritas do problema, um sistema de equações algébricas lineares é obtido. A solução deste sistema de equações pode ser direta ou por método iterativo, produzindo dados do contorno remanescentes [36].
- ✓ A Figura 14 traz uma representação esquemática da subdivisão do contorno em elementos lineares.

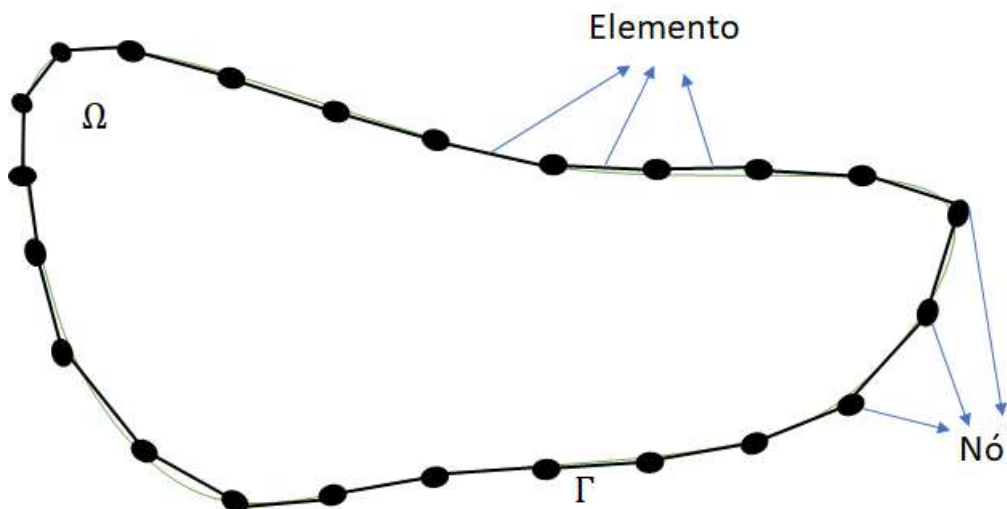


Figura 14 – Representação esquemática da discretização de um domínio qualquer  $\Omega$ , limitado por um contorno  $\Gamma$ .

No presente texto  $\phi$  e  $i$  são as variáveis funcionais e são representadas por elementos constante, e elementos lineares para a geometria.

O sistema de equações do MEC

$$\mathbf{H}\phi = \mathbf{G}i, \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  são matrizes dos coeficientes de influência. Os vetores  $\phi$  e  $i$  contém os valores a serem calculados e prescritos dos potenciais e as componentes normais do fluxo, respectivamente [30, 36].

Após aplicadas as condições de contorno dadas pelas Equações (4.6) e (4.7) o sistema Equação (4.5) pode ser resolvido.

$$\phi(x) = \bar{\phi}(x), x \in \Gamma_1; \quad (4.6)$$

$$i(x) = k \frac{\partial \phi(x)}{\partial n(x)} = \bar{i}(x), x \in \Gamma_2; \quad (4.7)$$

Para resolução do sistema pode ser reordenado Equação (4.5) onde todas as variáveis desconhecidas ficam do lado esquerdo do sistema e os valores dos potenciais e fluxo conhecido ficam do lado direito dessa forma sendo formado o seguinte sistema de equações lineares,

$$A\mathbf{y} = \mathbf{f} \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{y}$  é o vetor dos termos desconhecidos de  $\phi$  e  $i$  [36].

Considerando a condição de contorno em que a densidade de corrente  $i$  é uma função linear do potencial  $\phi$ , a relação Equação (4.9) pode ser escrita

$$i = V\phi + d, \quad (4.9)$$

Substituindo a Equação (4.9) na Equação (4.5), o sistema de equações formado

$$A\phi = \mathbf{f}, \quad (4.10)$$

sendo

$$A = H - GV, \quad (4.11)$$

e

$$\mathbf{f} = Gd, \quad (4.12)$$

Quando a condição de contorno é apresentada na forma não linear, a solução numérica da Equação (4.5) depende de um método que resolva sistema de equações não lineares. Nesse trabalho é utilizado o método de Newton-Raphso, para resolver o Sistema (4.5). A aplicação do método de Newton-Raphson junto à formulação do MEC pode ser melhor contemplada nos trabalhos [11, 37].



De forma sucinta, considerando que cada nó funcional tenha como condição de contorno uma relação não linear entre densidade de corrente e potencial, pode-se escrever a Equação (4.5) numa forma em que esta característica esteja mais explícita, ou seja,

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{G}i(\boldsymbol{\phi}), \quad (4.13)$$

sendo possível reescrevê-la na seguinte forma recursiva

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\phi}^{k+1} - \mathbf{G}i(\boldsymbol{\phi}^{k+1}) = 0, \quad (4.14)$$

onde  $\boldsymbol{\phi}^{k+1}$  representa o vetor solução do potencial determinado na interação (k+1) e  $i(\boldsymbol{\phi}^{k+1})$  representa o vetor dos valores das funções não lineares, que relaciona a densidade de corrente ao potencial na interação (k+1).

Expandindo as funções presentes no vetor  $i(\boldsymbol{\phi})$  em uma série de Taylor de grau 1 entorno do ponto  $\boldsymbol{\phi}^{k+1}$ , é possível escrever a seguinte equação

$$i(\boldsymbol{\phi}^{k+1}) = i(\boldsymbol{\phi}^k) + \mathbf{J}(\boldsymbol{\phi}^k)(\boldsymbol{\phi}^{k+1} - \boldsymbol{\phi}^k), \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana com coeficientes  $\frac{\partial i}{\partial \boldsymbol{\phi}}$ .

Substituindo a Equação (4.15) na Equação (4.14), determina-se a seguinte relação

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\phi}^{k+1} - \mathbf{G}\left(i(\boldsymbol{\phi}^k) + \mathbf{J}(\boldsymbol{\phi}^k)(\boldsymbol{\phi}^{k+1} - \boldsymbol{\phi}^k)\right) = 0. \quad (4.16)$$

Agrupando os termos e considerando  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\phi}^k) = \mathbf{J}^k$ , a Equação (4.16) pode ser escrita na forma

$$[\mathbf{H} - \mathbf{G}\mathbf{J}^k]\boldsymbol{\phi}^{k+1} = \mathbf{G}i(\boldsymbol{\phi}^k) - \mathbf{G}\mathbf{J}^k\boldsymbol{\phi}^k, \quad (4.17)$$

ou ainda,

$$\mathbf{A}^k\boldsymbol{\phi}^{k+1} = \mathbf{f}_1^k, \quad (4.18)$$

onde

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{H} - \mathbf{G}\mathbf{J}^k \quad (4.19)$$

e

$$f_1^k = Gi(\phi^k) - GJ^k \phi^k, \quad (4.20)$$

Considerando  $\Delta\phi^{k+1} = \phi^{k+1} - \phi^k$  e substituindo  $\phi^{k+1}$  na Equação (4.18), é obtida a seguinte equação de recorrência do método de Newton-Raphson

$$A^k \Delta\phi^{k+1} = f_2^k, \quad (4.21)$$

onde

$$f_2^k = Gi(\phi^k) - H\phi^k, \quad (4.22)$$

O processo iterativo do método é realizado para  $k \geq 0$  a partir de um valor de potencial inicial ( $\phi^0$ ). O vetor  $\phi^{k+1}$  correspondente à resposta do problema quando for atendido o critério de convergência, por exemplo se o erro relativo  $\frac{\Delta\phi^{k+1}}{\phi^{k+1}}$  for menor que uma tolerância dada.

O método de Newton-Raphson pode não convergir para solução ótima ( $\phi^*$ ) caso o potencial inicial  $\phi^0$  não esteja suficientemente próximo de  $\phi^*$  ou se a matriz A for singular. Com o objetivo de obter um  $\phi^0$  mais próximo da solução ótima, antes de resolver o problema original, resolve-se o problema sem considerar as fontes inseridas no eletrólito, ou seja, determina-se a solução da equação homogênea associada, sujeita as mesmas condições de contorno não lineares. O resultado é um potencial eletroquímico constante em toda superfície metálica e uma densidade de corrente nula no contorno. Tal potencial é denominado potencial de corrosão e é utilizado nesse trabalho como o ponto de partida  $\phi^0$  do método de Newton-Raphson, acelerando, assim, sua convergência [11, 37].

## 4.2 INTEGRAIS DE DOMÍNIO

A Presença de integrais de domínio junto a formulação por exemplo do MEC conforme apresentado na Equação (3.59),

$$c(\xi)\phi(\xi) = \int_{\Gamma} \phi^*(\xi, x) i(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \phi(x) i^*(\xi, x) d\Gamma(x) +$$

$$+ \int_{\Omega} b(x)u^*(\xi, x)d\Omega(x), \quad (4.23)$$

representa uma solução particular para a equação diferencial parcial não homogênea, que aqui será substituído por um produto de funções conhecidas. Se  $b(x)$  é uma fonte pontual de intensidade  $P$  aplicada em  $x'_p$ , ou seja,  $b(x) = P(x'_p)\delta(x'_p, x)$ , com  $\delta(x'_p, x)$  sendo a “função” Delta de Dirac, uma solução particular pode ser facilmente obtida

$$u_p(\xi) = \int_{\Omega} b(x)u^*(\xi, x)d\Omega(x) = P(x'_p)u^*(\xi, x). \quad (4.24)$$

Para problemas bidimensionais, quando o anodo pode ser representado como uma fonte em linha,  $b(x) = p(x'_l)\delta(x'_l, x)ds$  e  $u_p$  é dado por [8, 41]

$$u_p(\xi) = p(x'_l) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^*(\xi, x'_l)ds = -\frac{p(x'_l)}{4\pi} \left(\frac{d+1}{2}\right) \ln \left[ \frac{l^2}{4} + \frac{dl}{4} + \frac{r_0^2}{1} \right] \\ + \frac{p(x'_l)}{4\pi} \left(\frac{d-1}{2}\right) \ln \left[ \frac{l^2}{4} + \frac{dl}{4} + \frac{r_0^2}{1} \right] + \frac{p(x'_l)l}{2\pi} - \frac{p(x'_l)l}{4\pi} V \left[ \arctan \left( \frac{d+l}{V} \right) - \left[ \arctan \left( \frac{d-l}{V} \right) \right] \right], \quad (4.25)$$

onde:

$$d = 2(a' \cos\theta + b \sin\theta) \quad (4.26)$$

$$r_0 = \sqrt{a'^2 + b'^2} \quad (4.27)$$

$$V = \sqrt{4r_0^2 - d^2} \quad (4.28)$$

$$a' = x_0 - x(\xi) \quad (4.29)$$

$$b' = y_0 - y(\xi) \quad (4.30)$$

onde  $\theta$  é a inclinação da fonte em linha de comprimento  $l$  e  $x'_l = (x_0, y_0)$  é o centro da fonte.

Para casos gerais pode-se supor que a fonte  $b$  pode ser aproximada por funções de base FBRs ( $\psi_j$ ):

$$b(x) = \sum_{j=1}^{N+L} \psi_j(x)a_j, \quad (4.31)$$

com  $N$  sendo o número de nós no contorno,  $L$  o número de nós internos e os  $a'_j$  são resolvidos usando (4.31). Desta forma uma aproximação da solução particular pode ser escrita ( $\hat{u}_p \approx u_p$ )

$$\hat{u}_p(x) = \sum_{j=1}^{N+L} \psi_j(x) a_j, \quad (4.32)$$

onde  $\psi_j$  é obtido por integração analítica, considerando a parte radial do operador Laplaciano:

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (4.33)$$

A função de base radial de Wendland de suporte compacto  $\psi_j\left(\frac{r}{\beta}\right) = \left(1 - \frac{r}{\beta}\right)^2$  é escolhida e, após a integração  $\psi_j$  tem a seguinte definição [11, 17, 31]

$$\psi\left(\frac{r}{\beta}\right) = \begin{cases} \frac{r^4}{16\beta^2} - \frac{2r^3}{9\beta} + \frac{r^2}{4}, & r \leq \beta, \\ \frac{13\beta^2}{144} - \frac{\beta^2}{12} \ln\left(\frac{r}{\beta}\right), & r > \beta, \end{cases} \quad (4.34)$$

onde  $\beta$  é o tamanho do suporte.

Neste trabalho simulações numéricas são propostas considerando o procedimento direto da solução do MEC (4.23) e o MSF combinado com o Método da Solução Particular [38, 39, 40], onde a solução geral ( $u$ ) da equação de Poisson é dividida em duas partes dadas por

$$u(x) = \int_{\Omega} b(x) u^*(\xi, x) d\Omega(x) + u_h(x), \quad (4.35)$$

onde  $u_h(x)$  satisfaz a equação de Laplace e suas correspondentes condições de contorno.

### 4.3 O PROBLEMA INVERSO

Neste trabalho, uma função matemática é apresentada como modelo de curva de polarização, onde seus parâmetros estão explicitamente relacionados com o formato da curva. Assim, o intervalo de pesquisa para os parâmetros pode ser escolhido adequadamente e a taxa de convergência do algoritmo de pesquisa aumenta. A função sigmoide logística suave é adaptada pelo modelo de van Genuchten-Mualem [42] como:

$$u(q) = u_{cor} + \frac{u_e - u_{cor}}{(1 + (\alpha q)^n)^{1 - \frac{1}{n}}}, \quad (4.36)$$

onde  $u_{cor}$ ,  $u_e$ ,  $\alpha$  e  $n$  são parâmetros a serem determinados. O potencial de corrosão ( $u_{cor}$ ) representa o potencial de circuito aberto no qual a soma das correntes anódicas e catódicas na superfície do eletrodo é zero. O parâmetro empírico  $u_e$  representa o potencial correspondente aplicado à reação catódica. As constantes  $\alpha$  e  $n$  são os parâmetros de forma da curva de polarização.

Um algoritmo genético [43] é empregado para minimizar a função objetivo dada por:

$$Z(c_j) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [u_{exp} - u_{num}^i(c_j)]^2}, \quad (4.37)$$

Onde  $M$  é o número de nós que representam o limite do ânodo no problema original,  $u_{exp}$  é o valor experimental medido no metal,  $u_{num}^i(c_j)$  é o valor numérico calculado no metal para cada  $c_j$  e  $c_j$  representa os parâmetros da curva de polarização com  $j$  sendo o número de gerações a ser fornecido pelo AG.

## MÉTODOS SEM MALHA

Dentre os métodos sem malha recentemente estudados e desenvolvidos EFG, MSF E MLPG [15, 31, 39, 46, 47] ainda apresentam uma diferenciação importante a ser feita. No caso do EFG desenvolvido através da formulação global ainda necessita a utilização de células de fundo, no processo de integração numérica, por conseguinte não pode ser classificado como método verdadeiramente sem malha [17, 31, 52, 53]. A Figura 15 representa a distribuição dos pontos e geração dos subdomínios para um método verdadeiramente sem malha e com célula, em a e b respectivamente.

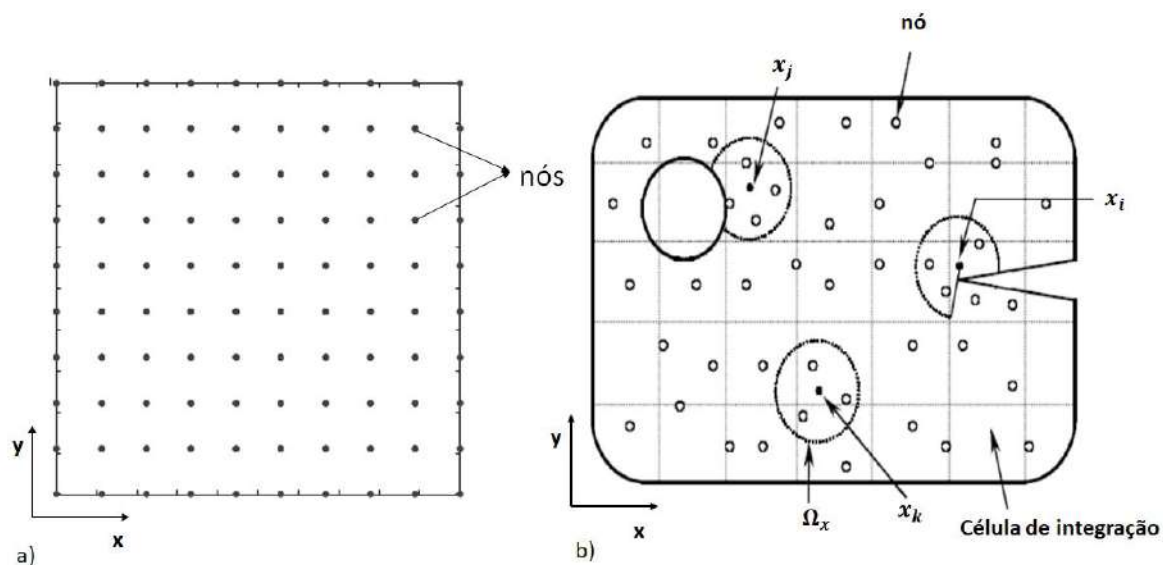


Figura 15 – a) Domínio de um problema discretizado em um método verdadeiramente sem malha. b) Células empregadas para os demais.

Fonte: Adaptado: Liu e Gu, 2005 [31].

Nesta seção será apresentado a formulação para a proteção catódica usando os métodos MSF e MLPG em duas das suas variantes que permanecem no grupo que não necessita de malha alguma durante todo o processo e por esse motivo são classificados como métodos verdadeiramente sem malha Figura 15-a). Assim o problema é representado por uma nuvem de pontos desconexos que são utilizados para a devida solução numérica [16, 49, 50, 51]. Além disso existe uma outra grande divisão que está relacionado à formulação do método ser direta ou integral, aplicando diretamente na forma forte do problema; O MSF e o MLPG2 encontram-se neste grupo, e os métodos indiretos que são aplicados à forma fraca do problema onde se encaixa o MLPG1.

A forma fraca pode ser global, quando é satisfeita usando todos os pontos, e local quando é satisfeita em subdomínios locais e estes devem cobrir todo o domínio do problema. De acordo com as escolhas da função de interpolação e de ponderação ainda pode - se classificar em Petrov-Galerkin, quando ambas são diferentes e Budnov-Galerkin quando ambas são iguais.

Neste capítulo são apresentados e discutidos os métodos verdadeiramente sem malha, MSF e MLPG2 (formulação forte) e MLPG1 (formulação fraca).

#### 4.4 MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS (MSF)

O Método das Soluções Fundamentais é uma técnica sem malha, que utiliza pontos de colocação aplicados sobre o contorno onde são impostas as condições de contorno necessárias para a resolução do problema. O Método das Soluções Fundamentais, é o de reproduzir um campo do potencial através da combinação linear dos efeitos de um conjunto de fontes virtuais, de forma a não coincidirem com o contorno e normalmente ficam localizadas fora do domínio de interesse conforme Figura 16 [46]

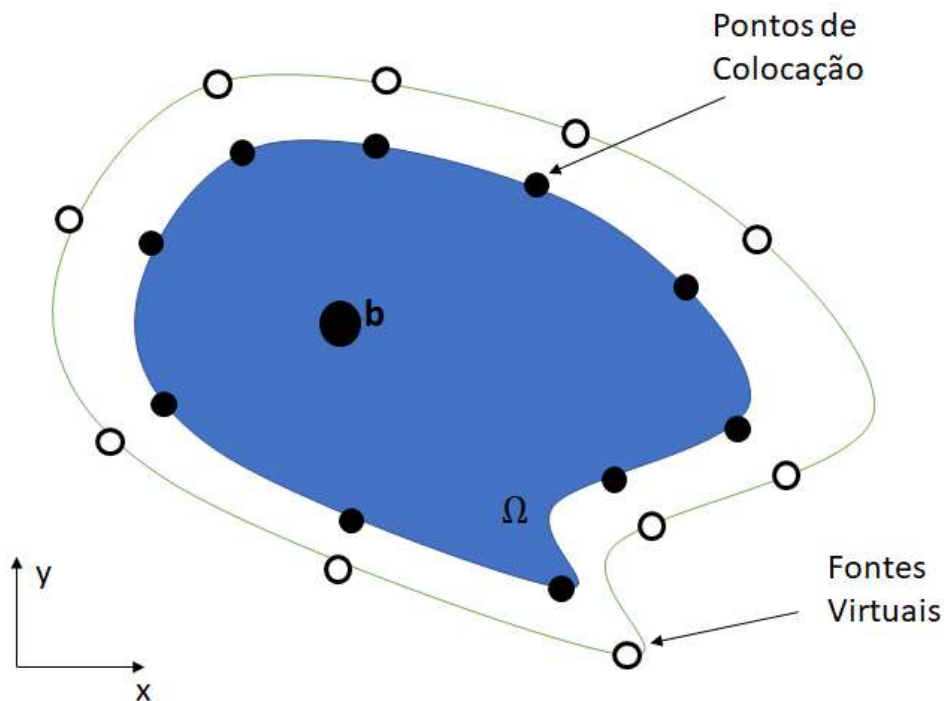


Figura 16 – Geometria do domínio determinando Pontos de Colocação e Fontes Virtuais.

A formulação do MSF pode ser particularizada para problemas que tratam da proteção catódica, governados pela equação de Poisson, escrita como:

$$\nabla^2 \phi(x) = -b(x) \quad (4.38)$$

Uma forma de solução para a equação diferencial (4.38) é através da função de Green [36], considerando o potencial  $\phi(x)$  como a soma da solução homogênea  $\phi_h(x)$  e da solução particular  $\phi_p(x)$ , ou seja:

$$\phi(x) = \phi_p(x) + \phi_h(x), \quad (4.39)$$

A solução particular é definida através da Função de Green,  $\phi^*(\xi, x)$  que torna viável a seguinte equação diferencial:

$$\nabla_x^2 \phi^*(\xi, x) = -k\delta(x - \xi), \quad (4.40)$$

onde  $\nabla_x^2$  indica que o operador Laplaciano opera sobre a função de  $x$  ficando o ponto  $\xi$  fixo e  $\delta$  é a “função” delta de Dirac. Desta forma, a solução particular da equação de Poisson se escreve como:

$$\phi_p(x) = \int_{\Omega} \phi^*(\xi, x)b(\xi)d\xi. \quad (4.41)$$

Portanto, a solução geral da equação (4.38) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\phi(x) = \int_{\Omega} \phi^*(\xi, x)b(\xi)d\Omega + \phi_h(x). \quad (4.42)$$

Substituindo  $\phi_p$  na equação de Poisson, conforme a equação (4.42), pode-se averiguar sua aplicação conforme [4]. Aplicando o operador  $\nabla^2$  dos dois lados da equação,

$$\nabla^2 \phi_p(x) = \nabla^2 \left( \int_{\Omega} \phi^*(\xi, x)b(\xi)d\xi \right) \quad (4.43)$$

Após manipulação algébrica obtemos:  $\int_{\Omega} \nabla_x^2 \phi^*(\xi, x)b(\xi)d\xi$  (4.44) substituindo a Equação (4.40) na Equação (4.44) e considerando a propriedade da Função Delta de Dirac obtemos a expressão:

$$\nabla^2 \phi_p(x) = -\frac{b(x)}{k}. \quad (4.45)$$

Considerando a Equação (4.44) se  $\xi \neq x$ , a solução fundamental é coincidente com equação homogênea associada, assim podemos escrever a Equação (4.46),

$$\nabla^2 \phi^*(\xi, x) = 0, \quad \xi \neq x. \quad (4.46)$$

Conforme a Equação (4.46) acima a solução aproximada do MSF satisfaz a equação homogênea em qualquer ponto, exceto no ponto fonte. Os pontos singulares aqui são apresentados como fontes virtuais e representados por  $f^{fv}$ . Reescrevendo o potencial eletroquímico através de um somatório conforme representado na implementação numérica,



$$\phi_h = \sum_{j=1}^{n_{fv}} \phi^*(x, f_j^{fv}) a_j, \quad (4.47)$$

onde  $n_{fv}$  representa o número de fontes virtuais, e  $a_j$  é o coeficiente que representa a intensidade das fontes virtuais desconhecidas. Da mesma forma a solução pode ser aplicada para a densidade de corrente.

Onde  $\phi^*$  e  $i^*$  são as soluções fundamentais definidas conforme as equações a seguir:

$$\phi^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{1}{r}\right), \quad (4.48)$$

$$i^*(\xi, x) = k \frac{\partial \phi^*(\xi, x)}{\partial n}. \quad (4.49)$$

No MSF o objetivo é determinar os coeficientes  $a_j$  desde que  $\phi_h$  e  $i_h$  satisfaçam as condições de contorno em nós específicos.

Para problemas com relação linear entre o potencial e a densidade de corrente aplicada no contorno  $i_g(x) = k\phi_g(x) + d$ , a determinação dos coeficientes  $c_j$  é feita através de um sistema linear simples de ser obtido onde  $i_g(x) = i_h(x) + i_p(x)$  da mesma forma será obtido o  $\phi_g(x)$ .

Conforme pode ser visto o método das soluções fundamentais é simples de ser aplicado e a implementação numérica também é relativamente simples, não necessita de integração numérica e pode ser aplicado para uma grande quantidade de problemas e geometrias. Como desvantagem do método podemos destacar a instabilidade numérica, uma mudança no posicionamento das fontes virtuais pode inviabilizar os resultados para dadas aplicações, devido principalmente ao mau condicionamento da sua matriz. Apesar disto para diversos problemas o método tem sido aplicado obtendo excelentes resultados e propiciando diversos estudos e contribuições para a ciência. Alguns trabalhos desenvolvidos com o MSF [10, 38, 39, 44, 45, 46, 47]. Também neste trabalho o método das soluções fundamentais foi aplicado a problemas clássicos da proteção catódica e obteve resultados precisos e eficientes conforme apresentado no capítulo 5.

## MLPG UMA INTRODUÇÃO

O Método sem Malha Local Petrov-Galerkin se baseia na formulação local onde o domínio do problema é representado por um conjunto de nós distribuídos aleatoriamente sem conexão alguma. Através da aplicação do método dos resíduos ponderados é montado um sistema de equações discretas, a partir da resolução deste sistema de equações se chega à solução final do problema em questão. A Figura 17 apresenta um esquema comparativo entre as etapas presentes no MEF e no MLPG de forma generalizada [17].

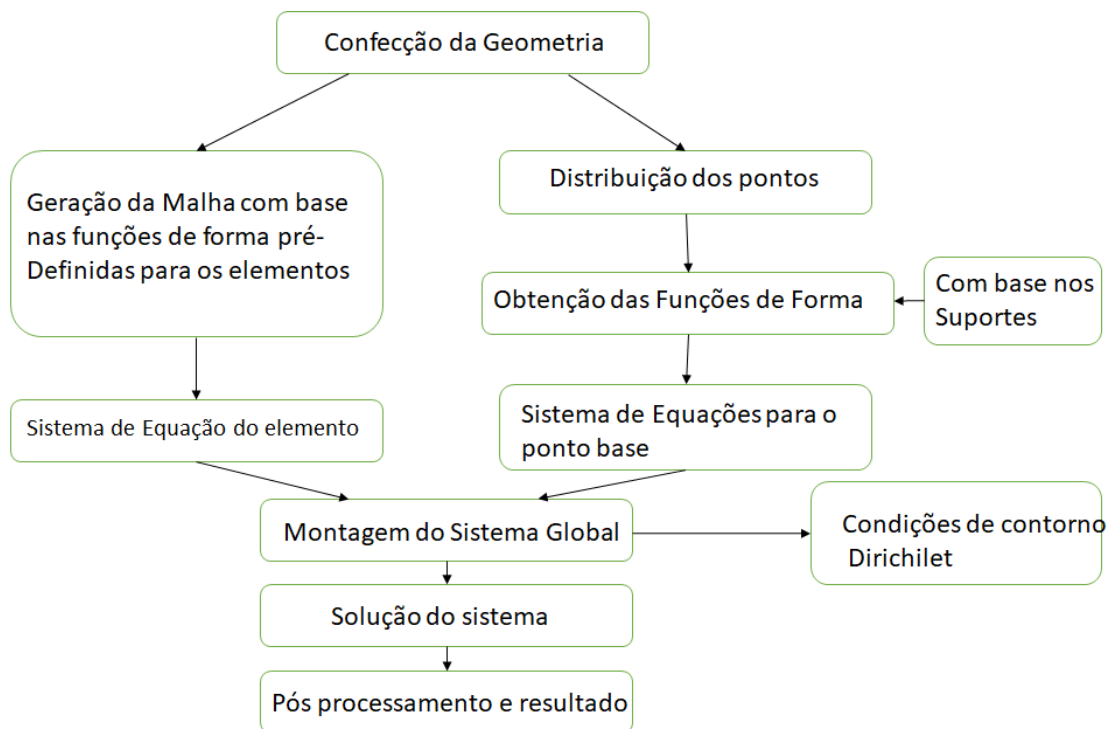


Figura 17 – Comparação do MLPG com o MEF.

Uma das características mais interessantes do MLPG é a flexibilidade de sua formulação matemática através das diferentes combinações entre as funções de aproximação e funções de ponderação. Cada uma dessas combinações gera uma variação da formulação do MLPG. Atualmente são apresentadas 6 propostas de variação para o MLPG [17, 32, 33] cada uma delas com particularidades e formulações específicas, mas todas ainda estão abertas a contribuições e desenvolvimentos conforme será discutido no Capítulo 5 deste trabalho.

- MLPG-1: A própria função peso da aproximação por MQM ou Função de Base Radial é adotada como função peso no desenvolvimento da forma fraca local;
- MLPG-2: O método é caracterizado por trabalhar com a formulação integral do problema a ser resolvido. A função de ponderação empregada, é a “função” Delta de Dirac, podendo ser também classificada como Método de Colocação.
- MLPG-3 utiliza como função de ponderação o próprio resíduo da equação de governo. A solução do problema, portanto resulta em um problema de mínimos quadrados discretos.
- MLPG-4, ou Local Boundary Integral Equation (LBIE), utiliza formulação inversa, ou seja, a integração por partes duas vezes. Empregando como função de ponderação a solução fundamental modificada da equação diferencial no contorno do problema de governo.
- MLPG-5 é discretizado por intermédio de uma formulação local fraca simétrica usando a função de Heaveside como função de ponderação. Segundo Atluri & Shen não apresenta matrizes singulares na montagem do sistema de equações e trabalha unicamente com integrais dos contornos de cada subdomínio utilizado para solucionar o problema. A solução é precisa, rápida e apresenta estabilidade, sendo assim uma formulação promissora.
- MLPG-6 utiliza uma formulação semelhante a formulação de Galerkin, utilizando a própria função de aproximação como função de ponderação em cada um dos subdomínios. É pouco explorada por não apresentar eficiência computacional e os resultados não apresentarem variações que justifiquem este elevado custo computacional [33].

O MLPG vem sendo aplicado aos mais diversos tipos de problemas e apresentando resultados precisos e eficientes. A flexibilidade do método na escolha de diferentes funções de ponderação e aproximação tem tornado o MLPG em suas várias versões muito atrativo e promissor [17, 31, 32, 33]. Neste trabalho foram desenvolvidas duas variações do MLPG para a proteção catódica. O MLPG1 e o MLPG2.

## 4.5 MLPG-2

Método de colocação pontual, no qual trabalha diretamente com a formulação forte utilizando um esquema de interpolação adequado à aproximação por pontos aleatórios no domínio do problema, por exemplo, os MMQM ou por funções de base radial (FBR) Liu e Gu [17, 31, 32, 33]. O método de colocação pontual é um método bem difundido na literatura e de simples implementação, porém derivadas de ordem superior da variável de interesse normalmente são inevitáveis, e a precisão numérica de tais derivadas com os esquemas de interpolação atuais não é garantida, surgindo problemas de instabilidade.

Os métodos aplicados a formulação forte segundo Liu & Gu [31] apresentam muitas vantagens, as principais delas seguem abaixo:

- O procedimento para discretizar a equação de governo é direto, e o algoritmo implementado para discretizar as equações é relativamente simples.
- Eles são, em geral, computacionalmente eficientes e não necessitam de integração numérica.
- Eles são métodos verdadeiramente sem malha: não necessitam de célula para aproximação e integração numérica.

Devido a essas vantagens, o método sem malha de formulação forte é usado em mecânica computacional com bastante sucesso segundo Liu & Gu [31], especialmente na mecânica dos fluidos. Neste estudo em especial o método está sendo proposto para avaliar a proteção catódica de superfícies metálicas submetidas a ambientes nocivos a sua estrutura. A Figura 18 demonstra os subdomínios locais da devida função de interpolação proposta.

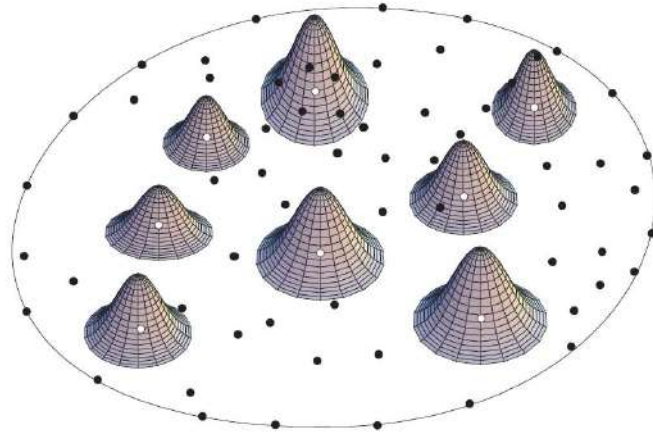


Figura 18 – Subdomínios da função de interpolação. No centro de cada função podemos notar o ponto  $x(i)$  centro do subdomínio local.

Fonte: Liu, 2010 [31].

As equações discretas são obtidas a partir da formulação fraca local assimétrica Equação (4.50). Considerando a equação de Poisson em um domínio global  $\Omega$  e envolta por um contorno  $\Gamma$  conforme Figura 19 pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 u - f] v \, d\Omega = 0 \quad (4.50)$$

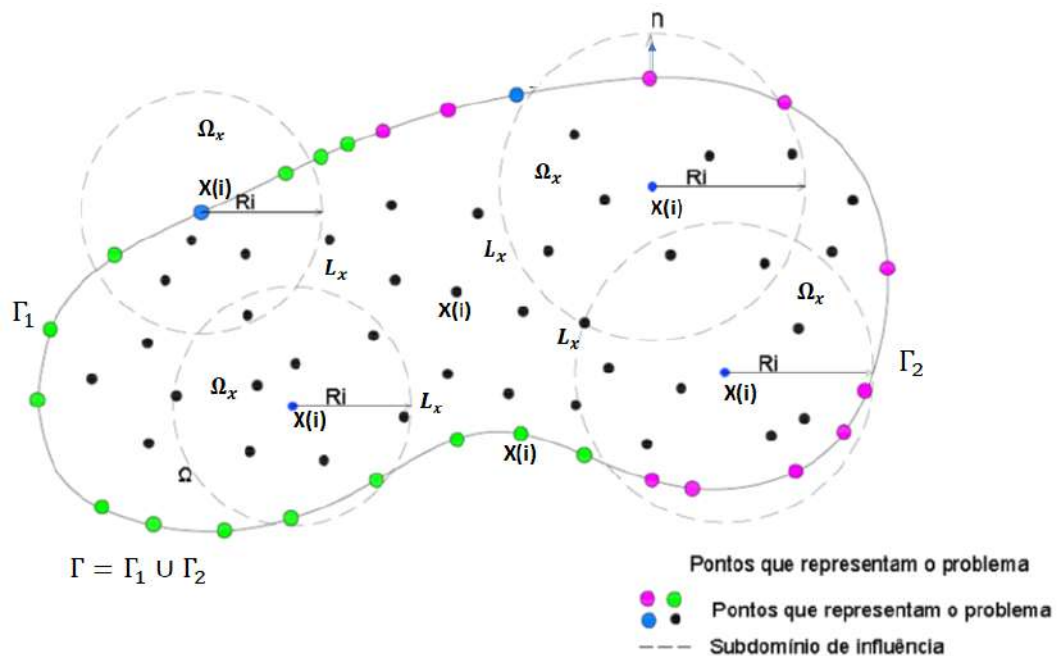


Figura 19 - Subdomínio Local  $\Omega_x$  e global  $\Omega$ .

Onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  representam as condições de contorno de Dirichlet e Neumann respectivamente,  $L_x$  o contorno interno dos subdomínios e  $\Omega_x$  representa o subdomínio local. Substituindo a função de ponderação  $v$ , pela função Delta de Dirac conforme Equação (4.51),

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 u - f] \Delta d\Omega = 0 \quad (4.51)$$

após a aplicação da função Delta de Dirac ( $\Delta$ ) como função de ponderação  $v(x) = \Delta(x - \xi_i)$  onde

$$\Delta(x - \xi_i) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = \xi_i \\ 0 & \text{se } x \neq \xi_i \end{cases} \quad (4.52)$$

que possui a seguinte propriedade:

$$\int \Delta(x - \xi_i) f(x) = f(\xi_i) \quad (4.53)$$

Retomando a Equação (4.51) obtemos a Equação (4.54),

$$\nabla^2 \phi_j(\xi_i) \hat{u}(\xi_i) = b(\xi_i). \quad (4.54)$$

A fórmula fraca se reduz à fórmula forte. Substituindo as funções de interpolação na Equação (4.51) para os nós internos, leva ao sistema discretizado de Equações lineares (4.19) em forma matricial.

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (4.55)$$

A entrada da matriz  $K$  global de rigidez e o vetor carga  $f$  são definidos conforme as Equações 4.56 e 4.57 [17, 33]:

$$\mathbf{K}_{IJ} = \begin{cases} \nabla^2 \phi_j(x_i), & x_i \in \Omega \\ \frac{\partial \phi_j(x_i)}{\partial n}, & x_i \in \Gamma_q \\ \phi_j(x_i), & x_i \in \Gamma_u \end{cases} \quad (4.56)$$

e

$$\mathbf{f}_I = \begin{cases} b(x_i), & x_i \in \Omega \\ \bar{q}(x_i), & x_i \in \Gamma_q \\ \bar{u}(x_i), & x_i \in \Gamma_u \end{cases} \quad (4.57)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor de incógnitas e  $\mathbf{K}$  é a matriz dos coeficientes que dependem do tipo de ponto considerado. Dependendo do tipo de aproximação (FBR ou MQM por exemplo) utilizado para a variável de interesse um pós processamento será necessário para obter a variável real do problema.

Resolvendo o sistema (4.55), obtém-se uma solução para o problema (2.20). O procedimento de solução acima é conhecido como método de colocação pontual e não usa nenhum tipo de conectividade entre pontos. Pode-se escolher, por exemplo, funções de interpolação do tipo FBR ou do tipo MQM para a aproximação das variáveis de interesse, outra variável importante a ser adotada é a função peso, que pode ser desde Spline de 4ª ordem até a Gaussiana, além disso a forma e tamanho do domínio de interesse são variáveis e afetam o resultado [15, 16, 17]. O grau do polinômio interpolador também exerce um papel extremamente importante no trabalho em questão foram utilizados até o 9º grau destes polinômios. Nenhum tipo de integração numérica é necessário neste método, que também pode ser representado pela sigla MLPG-2 [17, 32, 33, 51] na literatura.

Um dos aspectos mais problemáticos no uso dos métodos de colocação é sua forte instabilidade numérica. A instabilidade numérica é comum na maioria dos métodos que trabalham com a fórmula forte da equação diferencial.

#### **4.6 MLPG-1**

MLPG-1 a própria função peso da aproximação por MQM, é adotada como função peso no desenvolvimento da forma fraca local. Tem formulação matemática muito próximo a do MEF.

##### **4.6.1 Forma Fraca Local**

No método MLPG, a fórmula fraca local obtida através do método dos resíduos ponderados, sobre um subdomínio local  $\Omega_s$ , o qual é localizado no interior do domínio global  $\Omega$ , importante que após serem representados todos os subdomínios ele devem ter representado o domínio global. Esta é a maior característica distintiva do MLPG. Apesar da formula fraca local encontrar o mesmo resultado de equações discretizadas, como as encontradas na aproximação por Galerkin na formula fraca global, a formula fraca local fornece um conceito claro da integração local da formula fraca do método

sem malha [33, 34], uma vez que não necessita de célula de fundo para integração dos pontos do domínio e nem utiliza de elementos de integração em nenhuma das etapas do processo. Além disso, conduz a um caminho natural da construção da matriz de rigidez: não sobre a integração de malhas, e montagem da matriz de rigidez através da malha, mas através da integração sobre subdomínios locais [34].

O método MLPG deriva da fórmula fraca ou fórmula indireta sobre um subdomínio  $\Omega_s$  é apresentado na Figura 20, onde o domínio do suporte da função de distribuição  $\Omega_0, \Omega_x$  é sinônimo de subdomínio  $\Omega_s$ .

Considerando - se a equação linear de Poisson com domínio global  $\Omega$ , e contorno  $\Gamma$ :

$$\nabla^2 u(x) = p(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.58}$$

onde  $p$  é um ponto fonte, com as seguintes condições de contorno

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u; \tag{4.59}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv q = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q, \tag{4.60}$$

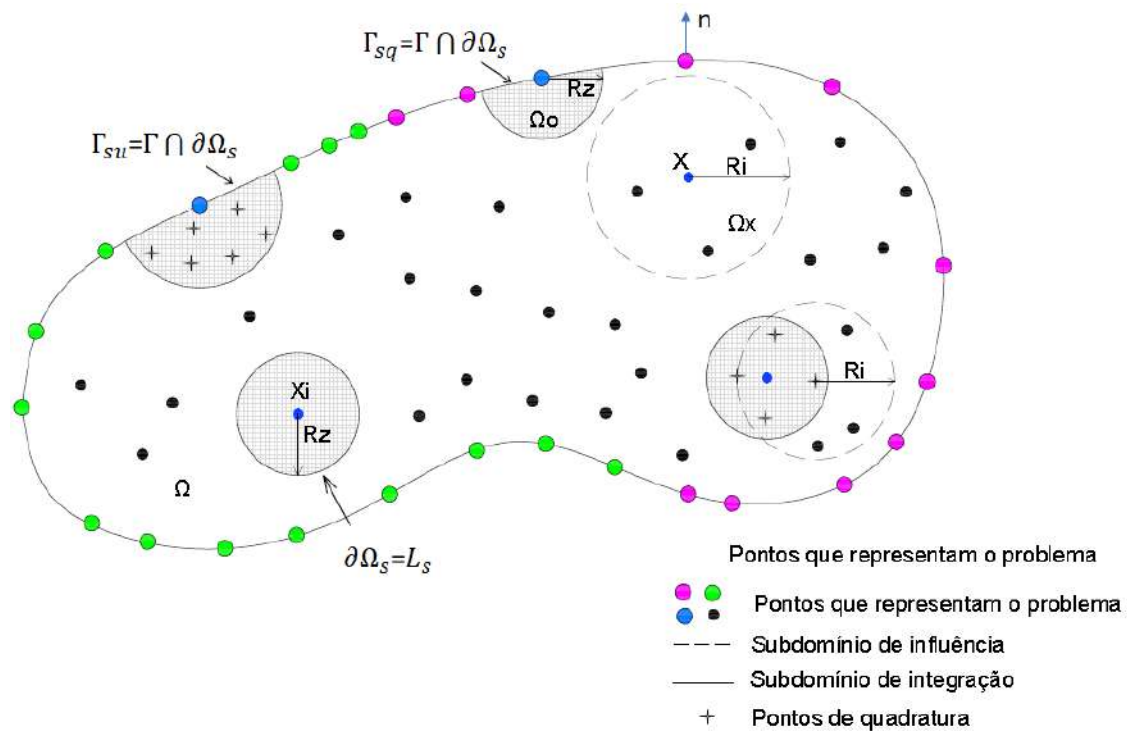


Figura 20 - Esquema do método MLPG.



onde  $\bar{u}$  e  $\bar{q}$  são o potencial, Dirichlet e o fluxo prescrito, Neumann, respectivamente, no contorno,  $L_s$  representa o subdomínio de integração quando este não tem contato algum com o contorno, e  $\mathbf{n}$  é a direção normal apontando para fora do contorno  $\Gamma$ . Como descrito acima  $\Gamma = \Gamma_{su} \cup \Gamma_{sq}$ , desta forma parte do contorno pode ser formada por Dirichlet ( $\Gamma_{su}$ ) e parte por Neumann ( $\Gamma_{sq}$ ), ou qualquer combinação entre ambos podendo esta combinação ser linear ou não linear conforme apresentado capítulo 2. Os raios  $R_z, R_i$  representam respectivamente o raio do domínio de integração e raio do suporte montado para a interpolação respectivamente [17, 33, 34, 45].

A formulação assimétrica fraca local (LUSWF1) da Equação (4.58) é escrita como:

$$\int_{\Omega_s} (\nabla^2 \mathbf{u} - p) v d\Omega = 0, \quad (4.61)$$

Onde  $\mathbf{u}$  é a função de interpolação e  $v$  a de distribuição do erro ou ponderação. Esta LUSWF requer  $\mathbf{u} \in C^1$  contínuo, enquanto  $v$  pode ser descontínuo.

Usando o teorema da divergência, a formulação local fraca simétrica (LSWF) é obtida.

$$\int_{L_s} q v d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} q v d\Gamma + \int_{\Gamma_{sq}} \bar{q} v d\Gamma - \int_{\Omega_s} (u_{,i} v_{,i} + p v) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) v d\Gamma = 0 \quad (4.62)$$

no qual,  $\Gamma_{sq}$  é a parte de  $\partial\Omega_s$ , sobre a qual a condição natural de contorno é especificada e  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_{su}$  correspondem a parte do contorno onde o potencial é prescrito.

A formulação fraca simétrica local (LSWF) requer ambos  $\mathbf{u}$  e  $v$  sejam  $C^0$  contínuo [17, 33, 34].

A função de distribuição  $v$  pode ser tal que desaparece sobre  $L_s$ . Assim a primeira integral na Equação (4.62) desaparece. Logo a fórmula fraca local (LSWF),

$$\int_{\Omega_s} u_{,i} v_{,i} d\Omega - \int_{\Gamma_{su}} q v d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_u} u v d\Gamma = \int_{\Gamma_{sq}} \bar{q} v d\Gamma + \int_{\Omega_s} p v d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_u} \bar{u} v d\Gamma \quad (4.63)$$

Usando o teorema da divergência duas vezes outra “formulação fraca assimétrica local” (LUSWF2),

$$\int_{L_s} qvd\Gamma - \int_{L_s} uv_{,i}n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{sq}} \bar{q} vd\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} qvd\Gamma - \int_{\Gamma_{sq}} uv_{,i}n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \bar{u}v_{,i}n_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} u \nabla^2 vd\Omega - \int_{\Omega_s} pvd\Omega = 0. \quad (4.64)$$

Esta (LUSWF) requer  $v$  pelo menos  $C^1$  contínuo, enquanto  $u$  pode ser descontínuo.

$$\int_{\Gamma_{su}} qvd\Gamma - \int_{L_s} uv_{,i}n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{sq}} uv_{,i}n_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} u \nabla^2 vd\Omega = \int_{\Omega_s} pvd\Omega - \int_{\Gamma_{sq}} \bar{q} vd\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} \bar{u}v_{,i}n_i d\Gamma \quad (4.65)$$

Deve - se notar que essas formas fracas se mantem, independentemente do tamanho ou da forma do subdomínio  $\partial\Omega_s$ . Com a formula fraca local para um ponto  $x$ , o problema (Equação 4.65) passa a ser avaliado localmente localizado em uma esfera de contorno  $\Gamma_s$ , e respectivamente em todos os subdomínios  $\Omega_s$  até cobrir todo o domínio global, montando a equação de equilíbrio e satisfazendo todo o domínio global  $\Omega$  e as condições de contorno  $\Gamma$  respectivamente [17, 33, 34]. A Figura 21 representa de forma simplificada o procedimento para cada subdomínio local.

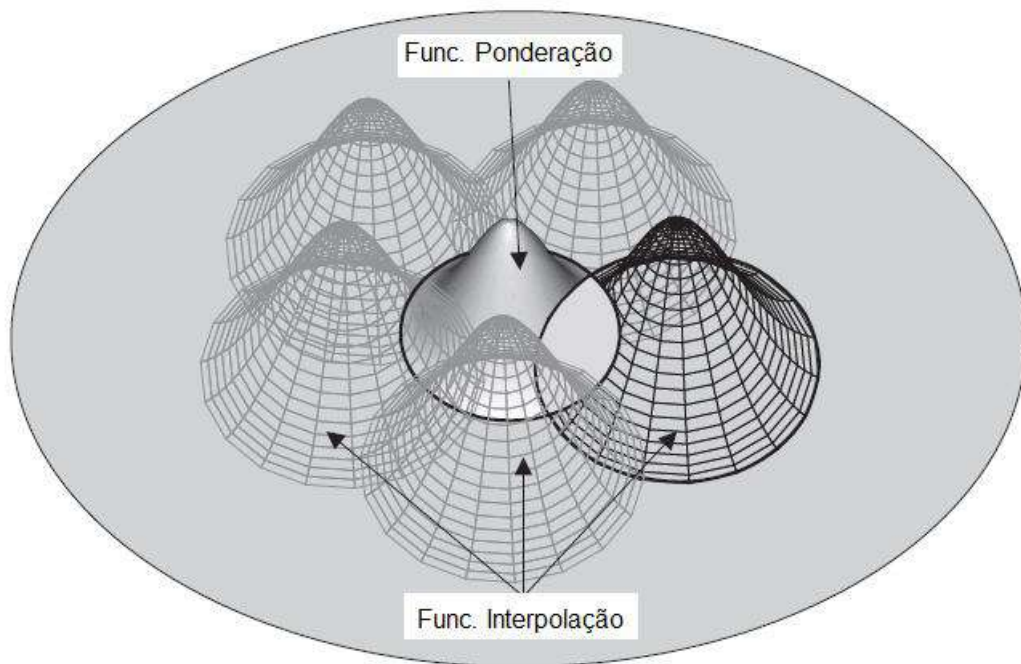


Figura 21 – Interseção entre a função de ponderação  $v$  e a função de interpolação  $u$  construída para cada ponto de Gauss. Os subdomínios são circulares, mas os raios são diferentes conforme pode ser observado.

Fonte: Adaptada Atluri, S.N., Kim, H.G., Cho, J.Y. 1999.

No MLPG, o método Petrov-Galerkin é usado em cada subdomínio local [17, 31, 34, 50], o qual a função de interpolação e a função de ponderação podem apresentar espaços diferentes conforme Figura 21. As principais funções de aproximação foram discutidas na seção 4.2. Para este trabalho foi adotado o MMQM devido a sua eficiência e empregabilidade, apresentando resultados precisos e coerentes com a literatura conforme demonstrado na seção 4.2 e no Capítulo 5. A Figura 22 traz uma

representação dos subdomínios de integração e de interpolação com suas respectivas áreas de abrangência [17, 31, 50].

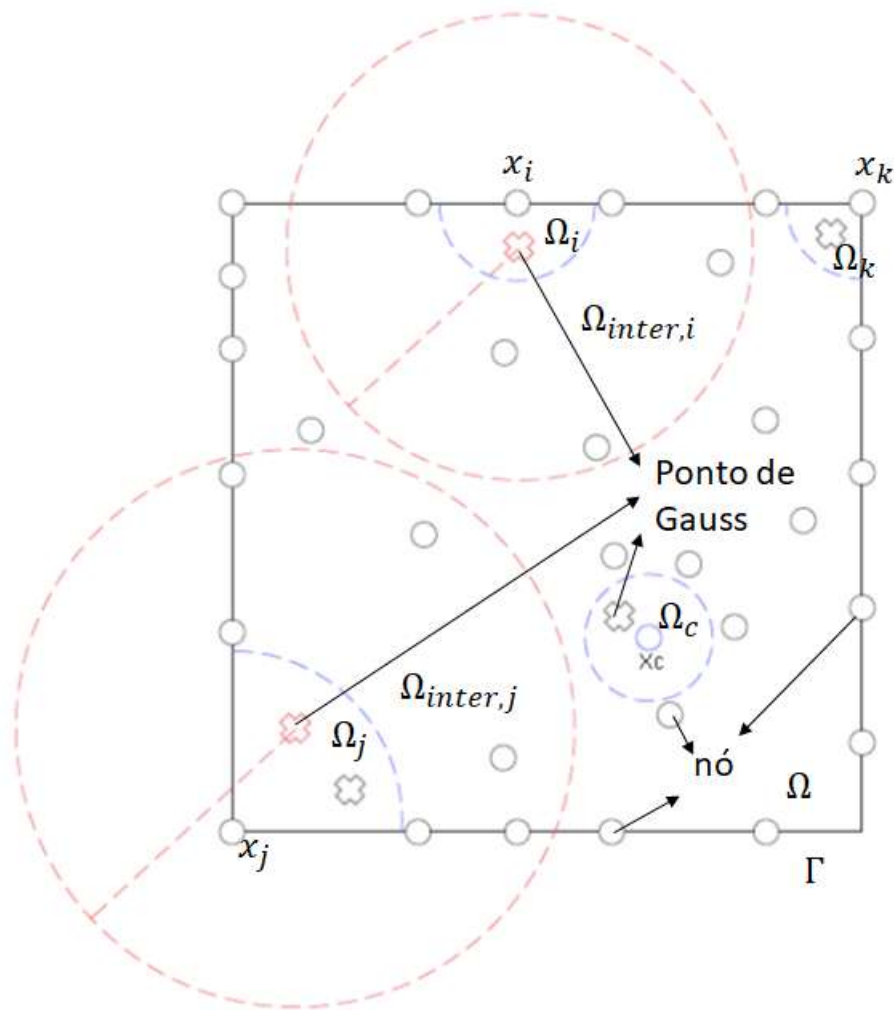


Figura 22 – Representação esquemática de domínios de integração centrados em pontos do domínio  $x_i, x_j, \dots$ , e interpolação centrados em Pontos de Gauss.

#### 4.6.2 Discretização

No presente trabalho somente problema de potencial em duas dimensões são abordados. O domínio do problema é representado por pontos, onde cada ponto possui seu próprio subdomínio local  $\Omega_s$  cobrindo todo o domínio global  $\Omega$  do problema. Os subdomínios  $\Omega_s$  são discos de raio  $r_i$  centrados em um ponto  $x_i$  e as equações discretas para o MLPG são obtidas via aproximação por MQM.

Como citado anteriormente em geral, no MLPG, a função de ponderação e a função de aproximação podem ser totalmente diferentes. Além disso, o tamanho do

subdomínio sobre o qual a função de aproximação e de ponderação são definidas são respectivamente diferentes de zero, mas podem ser diferentes entre si. Além disso entre os vários subdomínios montados para aproximar a função também pode haver variação de tamanho do raio dos suportes. Além disso os domínios também não necessitam ser circulares, ou setores circulares podendo assumir qualquer geometria.

Baseado nos conceitos do MLPG, a função de ponderação em cada subdomínio local  $\Omega_s$  pode ser escolhida através de uma variedade de caminhos conforme descrito na seção 4.1.

O MLPG1 é derivado da (LSWF) Equação (4.63); a função de aproximação é obtida através do MMQM. A função peso do MQM é usada como função de ponderação em cada subdomínio local  $\Omega_s$ . Assim as entradas da matriz global de “rigidez”  $\mathbf{K}$  e do vetor “carga” global  $\mathbf{f}$  são definidas pelas Equação (4.67) e (4.68) respectivamente [3, 6, 39].

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.66)$$

$$K_{IJ} = - \int_{\Omega_s} \phi_{,k}^J(x) v_{,k}(x, x_i) d\Omega - \int_{\Gamma_{su}} \frac{\phi^J(x)}{\partial n} v(x, x_i) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \phi^J v(x, x_i) d\Gamma, \quad (4.67)$$

$$f_I = \int_{\Gamma_{su}} \bar{q}(x) v(x, x_i) d\Gamma - \int_{\Omega_s} p(x) v(x, x_i) d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \bar{u}(x) v(x, x_i) d\Gamma \quad (4.68)$$

O fator  $\alpha$  é o fator de penalidade. É empregado para possibilitar a imposição da condição de contorno de Dirichlet que não surge de forma natural da formulação quando a interpolação é feita com MQM ou qualquer outro que não apresente a propriedade do Delta de Konecker na seção 4.6.4 este processo é discutido com detalhes.

### 4.6.3 Descontinuidades no contorno

Uma etapa de fundamental importância na simulação numérica é a avaliação dos cantos onde encontramos as descontinuidades de geometria. Esta região exige um cuidado particular para garantir de forma mais coesa e coerente possível a proximidade com o problema real que está sendo avaliado [17, 31]. Para determinar a área precisamente o domínio de integração é um círculo de raio  $r_0$ , desta forma quanto o

mesmo está formado sobre a superfície do contorno devemos determinar a área formada pelas duas linhas sobre o contorno que compõem o semicírculo proposto. Conforme a Figura 23 Quando o ponto  $x(i)$  está sendo integrado sobre o contorno, criamos um semieixo de reta de comprimento  $r_0$  em direção a  $x(i+1)$  cujo contorno é  $\Gamma_1$  ou Dirichlet e outro em direção a  $x(i-1)$  cujo o contorno  $\Gamma_2$  ou Neuman. Desta forma a área formada por esse semicírculo será representada de forma adequada.

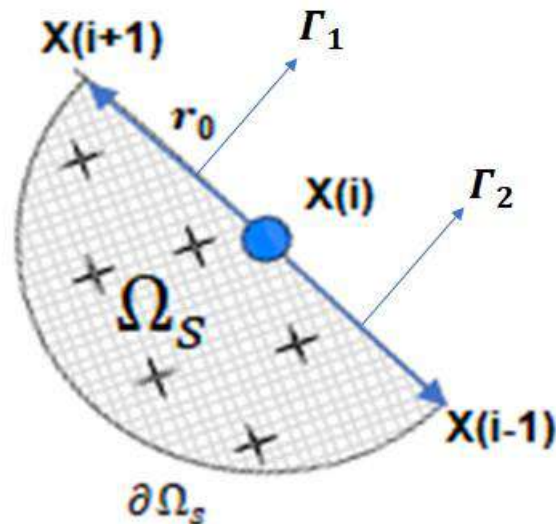


Figura 23- Setor circular que será integrado com os respectivos pontos de Gauss. E as condições de contorno  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

Após a determinação do subdomínio é feita uma medida entre os ângulos desses comprimentos de reta,  $\theta_1$  o ângulo entre o eixo plano e o primeiro comprimento de reta, e  $\theta_2$  o ângulo entre o plano e o segundo comprimento de reta, desta forma determinando a área interna do semicírculo que será integrado. A Figura 24 ilustra a integração de um domínio qualquer, criando vários subdomínios no processo de integração que será tratado melhor na secção 4.7.

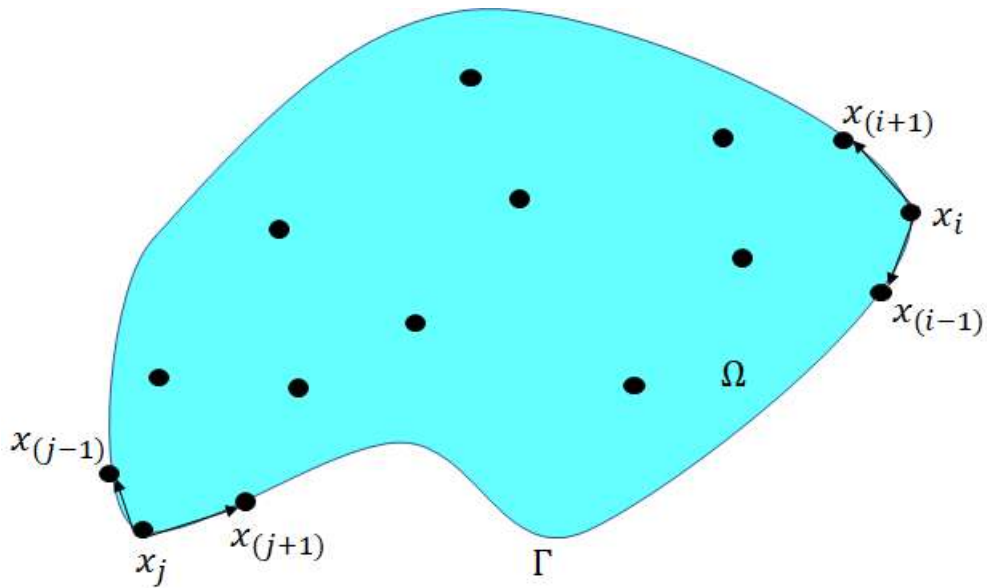


Figura 24 – Identificação das semirretas usadas para confecção dos cantos dos problemas e dos devidos subdomínios de integração. Onde  $\Gamma$  representa o contorno e  $\Omega$  o domínio do problema.

#### 4.6.4 Imposição das condições de Contorno

Durante o processo de obtenção da forma fraca, as condições de contorno naturais ou de Neumann vem junto com a formulação e não necessitam de tratamento especial, mas a condição de contorno de Dirichlet ou essencial necessita de um tratamento adicional quando trabalhamos com uma função de interpolação que não obedece a propriedade do delta de Kronecker [17, 31]. Nesse contexto o Método dos Mínimos Quadrados Móveis não satisfaz a essa propriedade, e como ele foi adotado no trabalho em questão como função de interpolação será preciso um tratamento das condições de contorno essenciais. A formulação apresentada no Capítulo 4 deste trabalho leva em consideração o Método das Penalidades para obtenção da fórmula fraca local.

O coeficiente de penalidade  $\alpha$  presentes nas Equações 4.65 e 4.66 deve ser um número muito grande para garantir que a diferença entre o valor prescrito e o valor aproximado seja muito pequena. Um dos problemas encontrados durante a imposição de  $\alpha$  é a precisão em função do fator de penalidade, a determinação do fator é um problema ainda a ser avaliado de forma a tornar o mesmo o mais genérico possível podendo alcançar o maior número possível de problemas por exemplo.

Segundo [17, 31, 33, 34], o método das penalidades é menos preciso que outros métodos, como o método da Interpolação Direta ou Multiplicador de Lagrange por exemplo. Um dos problemas encontrados na imposição do coeficiente de penalidade é que a imposição do mesmo pode tornar o sistema singular, impossibilitando a sua resolução.

Outro complicador para o método das penalidades é a própria atribuição do coeficiente, uma vez que, ele não apresenta uma padronização para ser selecionado, e para cada grupo de problemas pode haver um valor diferente, o que torna a utilização deste restrita satisfazendo apenas um grupo de problemas.

Levando em consideração a localidade do MLPG um método que vem apresentando resultados precisos e estáveis em diversas aplicações e tem sido empregado com sucesso é o Método da Imposição Direta. Como o MLPG é montado localmente ponto a ponto, a imposição direta apresenta eficiência e precisão para avaliação das integrais em que o subdomínio toca a superfície do contorno  $\Gamma_u$ , para a determinação das condições de contorno de Dirichlet [17, 54, 55].

Levando em consideração o sistema linear produzido pelo MLPG conforme Equação 4.64 e considerando o caráter local da formulação chegamos a Equação 4.69,

$$\bar{u}_i = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \varphi_i u_i = \bar{u}_i \quad (4.69)$$

sendo assim a montagem da matriz  $\mathbf{K}$  sofre uma modificação onde a substituição da linha pela Equação 4.69 deve ser considerada, e da mesma forma o vetor  $\mathbf{f}$ .

A variação provocada por essa substituição não traz grandes alterações no sistema levando em conta que a matriz  $\mathbf{K}$  não apresenta simetria. Considerando a simplicidade, eficiência, e abrangência da interpolação direta neste trabalho optou - se pela sua utilização junto a Proteção Catódica. Conforme pode ser contemplado no capítulo 5 a interpolação direta apresentou excelentes resultados também para a proteção catódica.



#### 4.7 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A integração numérica é uma etapa de fundamental importância tanto para o custo computacional, quanto para a convergência da solução a uma condição ótima. É bastante explorada e com várias técnicas já desenvolvidas e testadas ao longo de toda a literatura [17, 19, 32, 33, 54, 55], neste trabalho foi aplicada a regra chamada na literatura de regra 1, e aplicada a proteção catódica apresentando excelentes resultados conforme o capítulo 5.

Para integração através da regra 1, o domínio  $\Omega$  é dividido em subdomínios  $\Omega_s$  onde a integração é efetuada localmente. Este subdomínio de integração pode apresentar diversas forma e formatos.

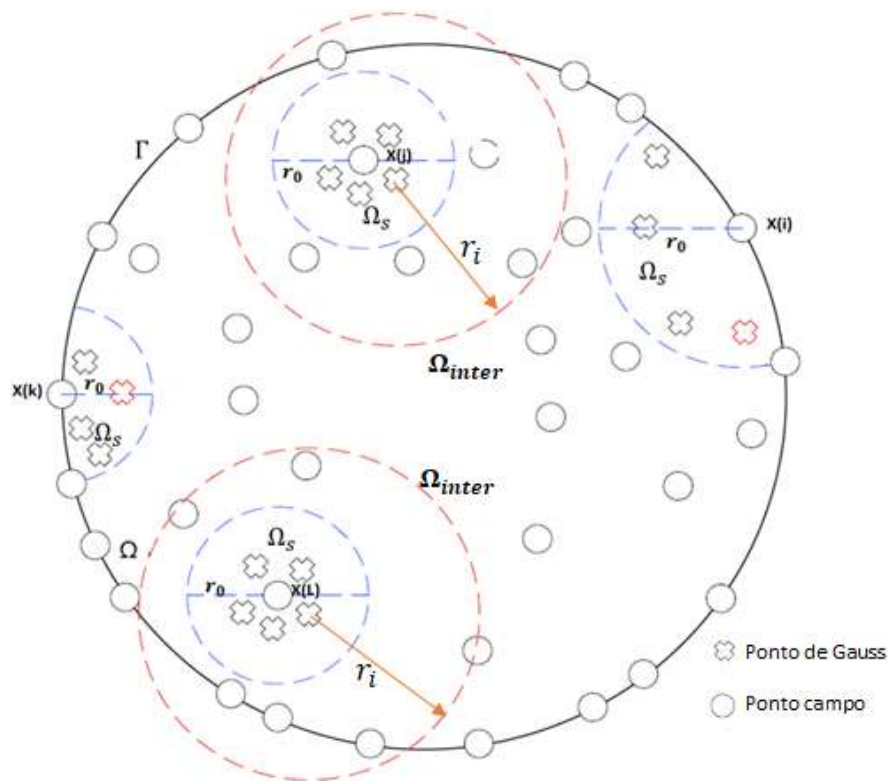


Figura 25 – Identificação de subdomínios de integração  $\Omega_s$  de raio  $r_0$  dentro de um domínio  $\Omega$ .

No presente trabalho subdomínio de integração foi adotado um domínio circular ou correspondente a um setor circular, conforme Figura 25, desta forma para que a regra possa ser adotada é necessária uma mudança de coordenadas.

Para obtenção da integração da função  $f$  sobre qualquer ponto  $P = (x_1, x_2)$  pertencentes ao  $\Omega_s$  será aplicada a seguinte mudança de coordenadas para coordenadas polares inicialmente, conforme as Equações 4.70 e 4.71:

$$x_1 = x + \rho \cos(\theta) \quad (4.70)$$

$$x_2 = y + \rho \sin(\theta) \quad (4.71)$$

onde  $0 \leq \rho \leq r_0$  e  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , onde  $r_0$  corresponde raio do subdomínio de integração e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  é utilizado para definir os contornos dos subdomínios  $\Omega_s$ . Para a transformação é adotado o seguinte Jacobiano:

$$|J_1| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} = \rho \quad (4.72)$$

Em seguida é feita uma segunda transformação para normalizar o subdomínio e facilitar a aplicação da quadratura Gauss-Legendre, as relações entre as coordenadas polares  $(r, \theta)$  e coordenadas normalizadas  $(\xi, \eta)$  são dadas pelas expressões:

$$\rho = \frac{r_0}{2}(1 + \xi), \quad \xi \in [-1,1] \quad (4.73)$$

$$\theta = \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)\eta + \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right), \quad \theta \in [-1,1] \quad (4.74)$$

Esta transformação é definida pelo Jacobiano e pode ser representada pela Figura 26:

$$|J_2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{R_i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \end{vmatrix} = \frac{r_0(\theta_2 - \theta_1)}{4} \quad (4.75)$$

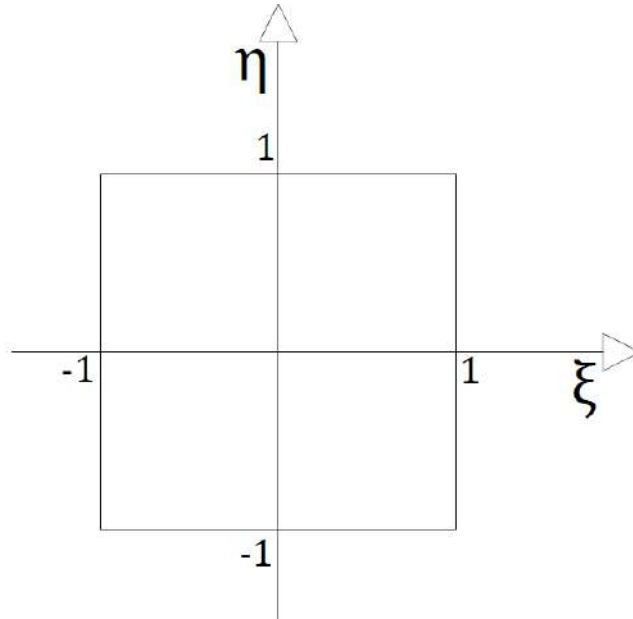


Figura 26 – Exemplo da Normalização.

Com a definição de todas as mudanças de coordenadas, a quadratura de Gauss-Legendre pode ser aplicada a cada região do domínio  $\Omega$ . Desta forma sendo  $\int_{\Omega_s} f(x, y) d\Omega_s$ , onde  $f(x, y)$  é uma função integrável no domínio  $\Omega_s$  que é um setor circular de raio  $r_0$ , e contorno entre os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

$$\int \int_{\Omega_s} F(x, y) d\Omega = \int_0^\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} f[x + \rho \cos(\theta), y + \rho \sin(\theta)] \rho d\rho d\theta \quad (4.76)$$

Substituindo as equações 4.71, 4.72 e 4.73 na equação 4.74 obtemos:

$$\int_0^\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f[\rho(\xi, \eta), \theta(\xi, \eta)] |J_{\xi, \eta}| d\xi d\eta \quad (4.77)$$

ou para implementação, será adotada a forma clássica da quadratura:

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_\rho} \sum_{j=1}^{n_\theta} w_i w_j G(\xi_i, \eta_j), \quad (4.78)$$

onde  $n_\rho$  e  $n_\theta$  são números de pontos de quadratura, onde  $\xi_i, i = 1, \dots, n_\rho$  e  $\eta_j, \dots, n_\theta$ , são as abscissas da fórmula de Gauss-Legendre com seus pesos correspondentes  $w_i$  e  $w_j$  no intervalo normalizado  $[-1, 1]$ ; a função  $G(\xi, \eta) = F(\rho, \theta) \rho [r_0(\theta_2 - \theta_1)]/4$ ,  $F(\rho, \theta) = f[x + \rho \cos(\theta), y + \rho \sin(\theta)]$ .

Como  $\theta_1$  e  $\theta_2$  apresentam os ângulos dentre um eixo horizontal perpendicular ao ponto base e os pontos  $x_{i+1}$  e  $x_{i-1}$  respectivamente, a integração numérica no contorno segue a fórmula clássica da Quadratura de Gauss Legendre.

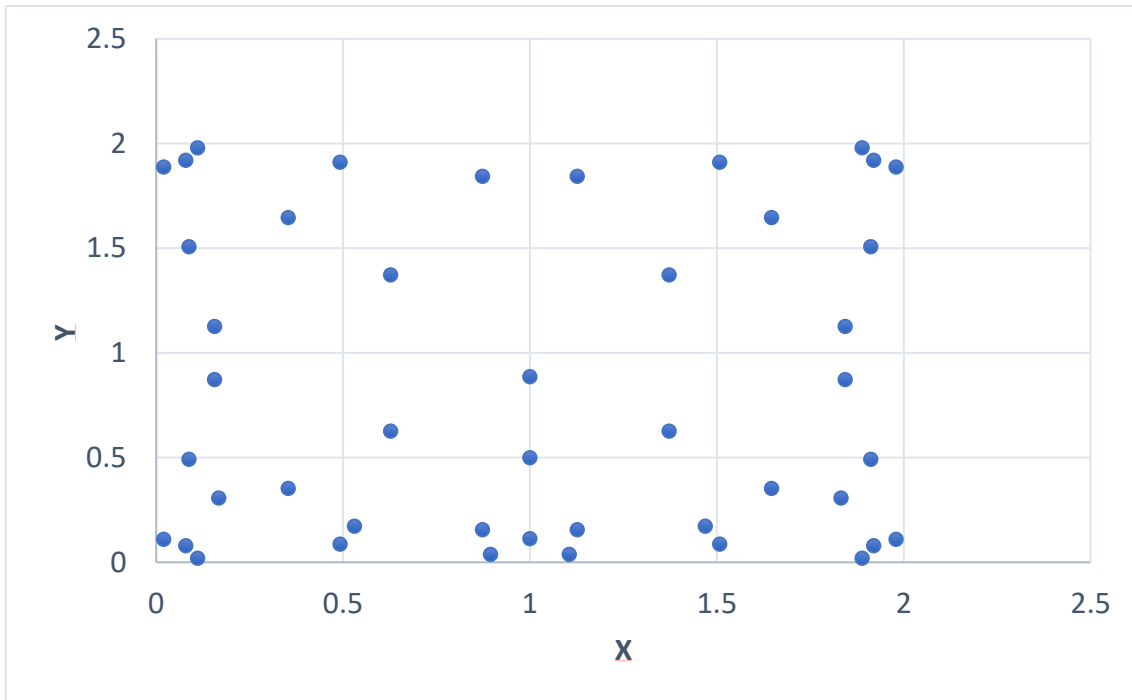


Figura 27 – Representação da distribuição dos pontos de Gauss no contorno de um domínio 2x2. Foram usados 3x3 pontos de Gauss.

É importante ressaltar que devido a estarem sobre o contorno teremos semicírculos e não círculos nesta etapa da integração numérica conforme pode ser identificado nas Figuras 27 e 28. Importante observar que todos os pontos de Gauss ficam ou sobre o contorno ou no interior do domínio do problema em questão.

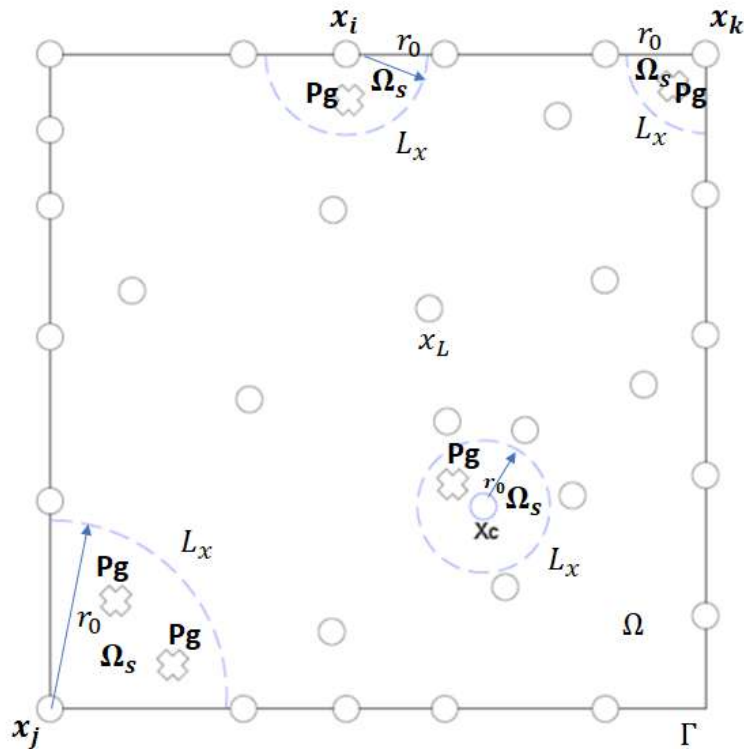


Figura 28 - Diferentes formas para Subdomínios formados durante o processo de integração numérica de setores circulares.

Para determinação do domínio de integração para um determinado ponto  $x_i$  é determinada a menor distância entre este ponto e todos os demais garantido que em cada subdomínio de integração esteja presente apenas um ponto base  $x$ . Após a definição deste subdomínio são espalhados pontos de Gauss, e sobre estes pontos são construídas as devidas funções de interpolação para cada ponto de Gauss. A Figura 29 representa a construção dos subdomínios.  $x_i, x_j, x_k, x_c$  representam pontos para os quais o subdomínio de integração  $\Omega_s$  foi representado através dos círculos ou semicírculos em na coloração azul,  $\Omega_i$  representa o suporte montado para a função de interpolação  $w_i$  que se encontra centrado em um devido ponto de Gauss (Pg). Este suporte é montando tantas vezes quantos pontos de Gauss estiverem no interior do subdomínio de integração  $\Omega_s$ .  $r_0$  é o raio do subdomínio de integração e  $w_i$  o suporte para o MQM.

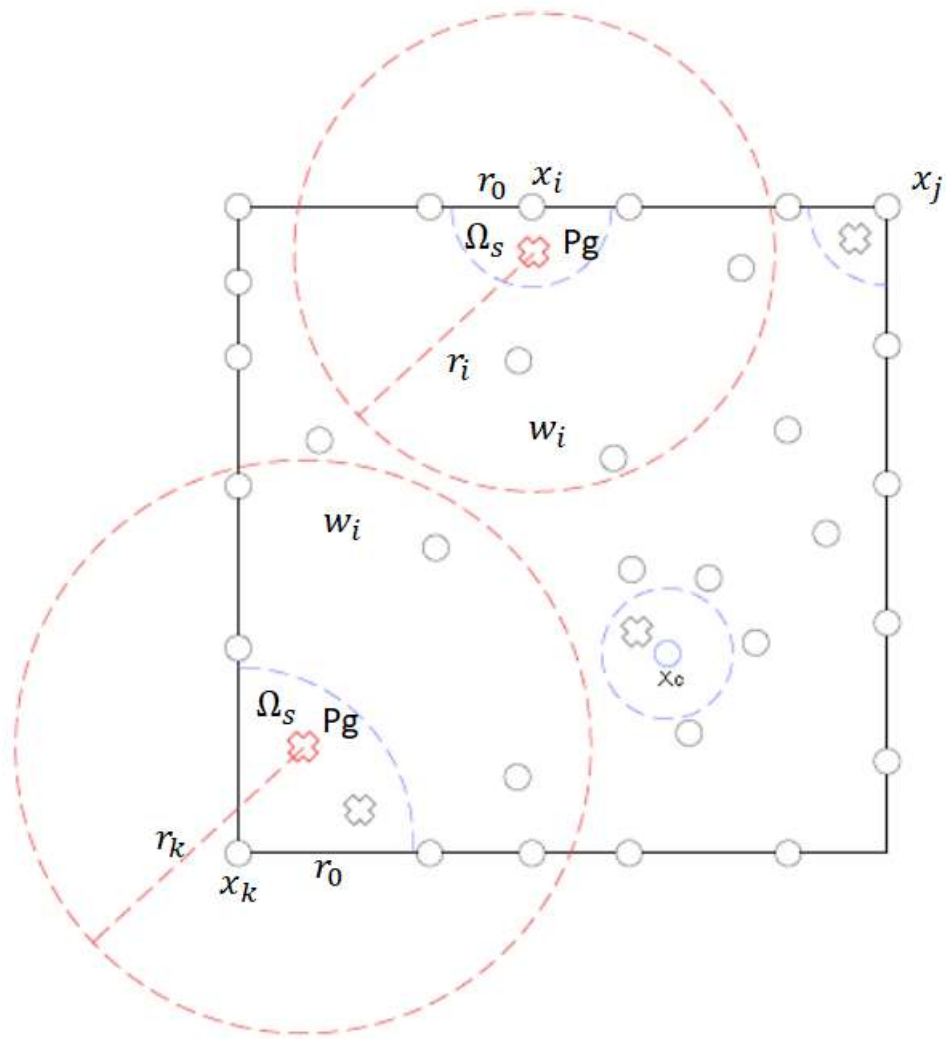


Figura 29 – Esquema da integração numérica onde o setor circular em azul representa o subdomínio de integração  $\Omega_s$  e o círculo maior em vermelho representa o suporte de interpolação  $w_i$ .

A formulação discretizada dos elementos  $K_{ij}$  e  $f_i$  correspondentes a matriz  $K$  e ao vetor  $f$  respectivamente pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 K_{ij} = & |J_2||J_1| \sum_{j=1}^{Pg} \sum_{i=1}^{Pg} \alpha_i \alpha_j \Phi_j(\xi, \eta) + \alpha |J_2||J_1| \sum_{i=1}^{Pg} \alpha_i w_i(\xi) \Phi_j(\xi, \eta) \\
 & + |J_2||J_1| \sum_{i=1}^{Pg} \alpha_i w_i(\xi) \Phi_j(\xi, \eta)
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_i = & \|\mathbf{J}_2\|\|\mathbf{J}_1\| \sum_{i=1}^{Pg} \alpha_i \mathbf{w}_i(\xi) \bar{\mathbf{t}} + \alpha \|\mathbf{J}_2\|\|\mathbf{J}_1\| \sum_{i=1}^{Pg} \alpha_i \mathbf{w}_i(\xi) \bar{\mathbf{u}} \\
& + \|\mathbf{J}_2\|\|\mathbf{J}_1\| \sum_{i=1}^{Pg} \sum_{j=1}^{Pg} \alpha_i \alpha_j \mathbf{w}_i(\xi, \eta) \mathbf{b}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Aplicando a formulação proposta para as equações 4.79 e 4.80 é determinado o valor fictício de  $\mathbf{u}$ . Para se chegar ao resultado real, a função de interpolação por mínimos quadrados móveis é aplicada mais uma vez, conforme secção 4.7.

No próximo capítulo são discutidos problemas de aplicação dos métodos apresentados durante este trabalho, inicialmente são resolvidos problemas bem simples com intuito de validar a formulação proposta e posteriormente os métodos propostos são aplicados a problemas clássicos da proteção catódica.

## OTIMIZAÇÃO

### 4.8 ALGORITMOS GENÉTICOS

Os Algoritmos Genéticos (AGs) podem ser definidos como um conjunto de buscas que estão relacionados com o processo de evolução natural, fazem parte dos algoritmos evolucionários [36].

Algoritmos genéticos são uma classe particular de algoritmos evolutivos que usam técnicas inspiradas pela biologia evolutiva como hereditariedade, mutação, seleção natural e recombinação (ou crossing over).

A implementação dos Algoritmos Genéticos está relacionada com uma busca por uma população abstrata de soluções a partir das quais são selecionadas soluções melhores para um determinado fim. Desta forma a partir de cada geração são produzidas soluções melhores de forma aleatória e esta evolução é chamada de geração. A cada geração são feitas avaliações, e a partir desta quando submetida a operadores que são capazes de selecionar, recombinar e promoverem a mutação e função destas propriedades os operadores acima são chamados operadores genéticos.

À medida que vão sendo criadas gerações algumas características são observadas para que a cada geração, e desta forma são selecionados alguns indivíduos e estes são recombinados ou passam por um processo de mutação para formar uma nova população, e a partir desta nova população o ciclo é refeito até encontrar o esperado.

A Figura 30 apresenta de forma simplificada as etapas presentes num funcionamento de um AG [56]:

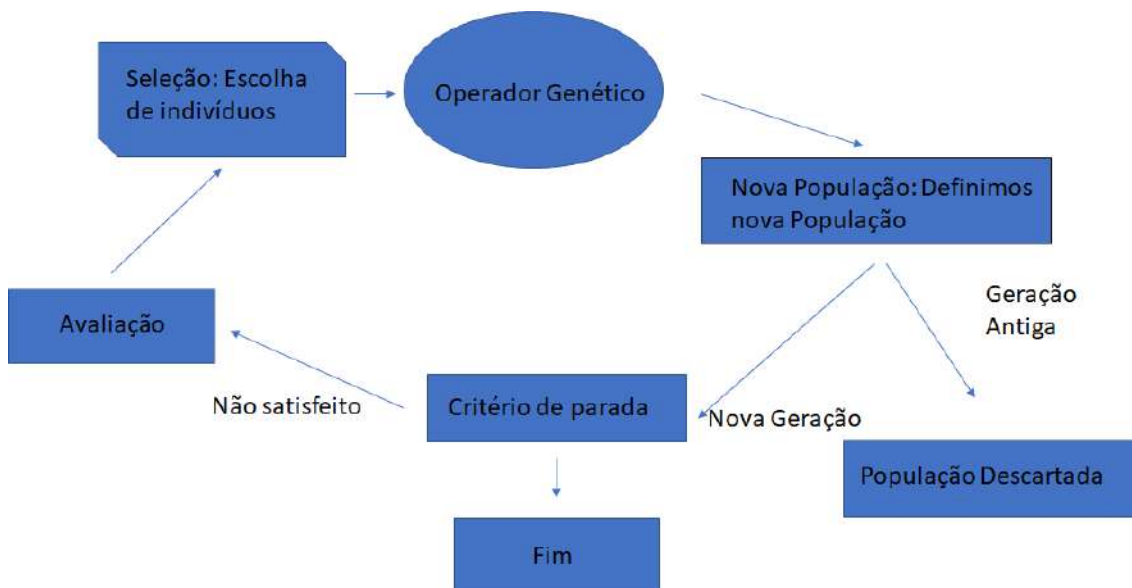


Figura 30 – Esquema de um Algoritmo Genético.

Conforme demonstrado na Figura 30 as várias gerações vão acabar promovendo uma solução natural, e esta por sua vez, deve conduzir a uma boa solução para um dado problema a partir do indivíduo selecionado.

De uma forma simplificada segundo [56] as etapas de programação de um AG são:

### Função Algoritmo Genético (População, Função-Objetivo)

**Entradas:** População – Lista de Indivíduos

- Função-objeto – Recebe um indivíduo, retorna um número real.

**Repetir**



- Lista de Pais = seleção (população, função-objetivo)
- População = reprodução (lista de pais)

### **Enquanto**

- A condição de parada não for atingida

### **Retorna (fim)**

- O melhor indivíduo para a dada aplicação, ou de acordo com a função – Objetivo.

Observando as sequencias apresentadas acima destacamos as etapas de funcionamento de um AG [56].

- a) Inicialize a população de cromossomos.
- b) Avalie cada cromossomo da população, detalhadamente.
- c) Selecione os pais com as características desejadas para gerar novos cromossomos.
- d) Aplique os operadores de recombinação e mutação de modo a melhorar estes pais e produzir através destes indivíduos de nova geração.
- e) Retire os indivíduos velhos membros da população.
- f) Avalie todos os cromossomos dessa nova população e insira-os na população.
- g) Se o objetivo foi atingido, ou o melhor cromossomo satisfaz os requerimentos e desempenho, finalize e retorne, caso contrário volte ao passo c).

Esta é apenas uma representação superficial e bem simplificada das etapas necessárias na aplicação de um AG. Uma das etapas de maior importância vem a ser a codificação da informação em cromossomos e esta informação é feita através da função objetivo, importante notar que a ligação entre o AG e o problema a ser resolvido é feita através da função objetivo.

O AG, é iniciado com cromossomos de uma população inicial que são convertidos para variáveis reais e estas são otimizadas [43]. A partir da primeira

interação o valor função objetivo é calculada para cada variável. Tendo em vista problemas de máximo e mínimo pode-se avaliar o desempenho da solução do problema.

A função-objetivo é desta forma o principal objetivo de nossa otimização. Desta forma quando o problema se tratar de um problema de otimização, a seleção inicial determina os indivíduos que apresentam aptidão ou melhores condições de atingir a um dado objetivo esse pré-determinado. Caso seja um problema de mínimo o processo de seleção prioriza os valores que priorizam os menores valores da função objetivo.

Tomando como base o citado acima, a população converge para uma solução ótima a partir de operações sequenciais onde cada um dos operadores exerce sua devida função: seleção, *crossover* (cruzamentos), mutação e elitismo. Segundo Liden uma definição para os seguintes operadores pode ser dada por:

- Seleção: operação que gera uma nova população a partir da população corrente, permitindo a transmissão à nova população dos indivíduos da população atual, com maior probabilidade para os indivíduos com melhor função-objetivo;
- Cruzamento: operação que combina a informação de dois indivíduos, gerando novos indivíduos;
- Mutação: operação que “perturba” um indivíduo, gerando um novo indivíduo com alguma semelhança com o indivíduo que o originou;
- Elitismo: causa a seleção determinística de parte da população corrente, usualmente os melhores indivíduos, para integrarem a nova população.

Existem outros tipos de operadores genéticos, além de diversos tipos de métodos de seleção diferentes, o método da roleta viciado pode ser consultado com maiores detalhes em Santos et al [11]

Os AGs podem ser implementados de diversas maneiras para as mais diversas situações em que podem ser aplicados. Uma combinação específica de realizações destes operadores constitui um algoritmo genético.

Um tipo de algoritmo genético é o binário e aqui será apresentada uma pequena descrição da forma que este procede. Desta forma, cada indivíduo é uma sequência de

números binários, nos quais se aplicam os operadores genéticos crossover ou cruzamento e operador de mutação.

O operador de mutação é necessário para a introdução e manutenção da diversidade genética da população. O cruzamento é o operador responsável pela recombinação de características dos pais durante a reprodução. É considerado o operador genético predominante por isso é aplicado com probabilidade dada pela taxa de *crossover*  $P_c$ , que deve ser maior que a taxa de mutação. São operadores dominantes segundo [56] são recomendadas faixas de 60% a 99% de *crossover*. Já para a probabilidade da mutação, operador secundário os valores são dados entre 0,1% e 1%.

Que são utilizados para assegurar que a nova geração seja totalmente nova, mas possuí, de alguma forma, características de seus pais, ou seja, a população se diversifica e mantém características de adaptação adquiridas pelas gerações anteriores. Os indivíduos representados por números binários obedecem a uma faixa de limite superior e inferior de valores reais. Esse ciclo é repetido um determinado número de vezes conforme demonstrado na Figura 30.

Quando pensamos em Algoritmos Genéticos os indivíduos são representados por vetores binários que estão ligados ao seu genótipo, onde cada elemento de um vetor (1010) denota a presença (1) ou ausência (0) de uma determinada característica: relacionada ao seu genótipo. Os elementos podem ser combinados formando as características reais do indivíduo, ou o seu fenótipo [43]. Teoricamente, esta representação é independente do problema, pois uma vez encontrada a representação em vetores binários, as operações padrão pode ser utilizadas, facilitando o seu emprego em diferentes classes de problemas. Tais números binários são convertidos para números reais dentro do AG para obter o valor da função "fitness".

A expressão matemática que converte de um número binário para um número real dentro de uma faixa de limite de valores reais é representada por:

$$real = inf \left( \frac{sup-inf}{2^k-1} \right) r \quad (4.81)$$

em que *inf* é o limite inferior de um valor real, *sup* é o limite superior, *k* é o número de bits que compõe um indivíduo e *r* é o número real correspondente ao número binário [56].

O princípio básico do funcionamento dos AGs é que um critério de seleção vai fazer com que, depois de muitas gerações, o conjunto inicial de indivíduos gere indivíduos mais aptos. A maioria dos métodos de seleção são projetados para escolher preferencialmente indivíduos com maiores notas de aptidão, embora não exclusivamente, a fim de manter a diversidade da população. Um método de seleção muito utilizado é o Método da Roleta, onde indivíduos de uma geração são escolhidos para fazer parte da próxima geração, através de um sorteio de roleta [57].

Onde, cada indivíduo da população é representado na roleta proporcionalmente ao seu índice de aptidão, ou seja, podemos encarar como uma aptidão relativa, onde os indivíduos selecionados já estão pré-determinado para o devido objetivo. Assim, aos indivíduos com alta aptidão é dada uma porção maior da roleta ou aptidão relativa, enquanto aos de aptidão mais baixa é dada uma porção relativamente menor da roleta. Finalmente, a roleta é girada um determinado número de vezes, dependendo do tamanho da população, e são escolhidos, como indivíduos que participarão da próxima geração, aqueles sorteados na roleta.

#### 4.8.1 Função Objetivo

A função-objetivo é o objeto de nossa otimização, ou seja, a função objetivo é a maior ligação entre o Algoritmo Genético e o problema a ser resolvido. Pode ser um problema de otimização, um conjunto de teste para identificar os indivíduos mais aptos. A grande vantagem dos algoritmos genéticos está no fato de não precisarmos saber como funciona esta função objetivo, apenas tê-la disponível para ser aplicada aos indivíduos e comparar os resultados.

No presente trabalho o AG é implementado unicamente para resolver problemas onde a função objetivo deve ser maximizada. É importante perceber que devido a isto nada impede que seja utilizada para minimizar uma determinada função  $u(x)$ , bastando inverter a função pretendida, conforme demonstrado pela Equação (4.82),

$$\max h(x) = \min u(x) = \max (-u(x)), \quad (4.82)$$

Para o trabalho em questão foi utilizada uma função objetivo, e esta está demonstrada na Equação (4.83),

$$Z(c_j) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [u - u_{num}^i(c_j)]^2}, \quad (4.83)$$

A decisão em adotar a função objetivo (4.83) foi tomada após a identificação por Santos et al, na aplicação da Equação (4.84) como função objetivo, veio após uma análise em que [5] identificou custos computacionais elevados quando a Equação (4.84) foi adotada como função objetivo, além disso os resultados encontrados não foram satisfatórios. Para melhorar os resultados o autor ainda limitou a base  $e$  a 625 e mesmo assim não alcançando resultados bons. Em função desta experiência foi adotada a Equação (4.83) como função objetivo.

$$z_k = \frac{100}{e^{\sum_{i=1}^{N_p} |(x_i^{i^k} - \bar{x}_i)/\bar{x}_i|}}, \quad k = 1, 2, \dots, N_p. \quad (4.84)$$

Onde  $z_k$  é o valor da função objetivo,  $x_i$  são as variáveis de otimização e  $\bar{x}_i$  são os valores conhecidos para um dado cromossomo  $k$ . Outras funções objetivo são apresentadas em [43].

Retomando a função empregada neste trabalho segundo já discutido em [55] a Equação é uma função negativa em todo o seu domínio, e em função disso em cada geração é determinado o valor mais negativo. Para tornar esse valor positivo e utilizar o método da roleta viciada, o menor valor da encontrado é somado as funções tornando todas positivas ou iguais a zero, além disso adiciona-se, ainda, um número positivo, que pode ser o menor possível, garantindo que todas as funções objetivo sejam estritamente positivas, e dessa forma permitam a aplicação do método proposto. A Figura 31 apresenta de forma simplificada o esquema de acoplado de AG aos métodos empregados nesse trabalho o MEC, MSF e MLPG, a figura ainda trata de identificar onde as variáveis do AG são apresentadas na forma binária ou real.

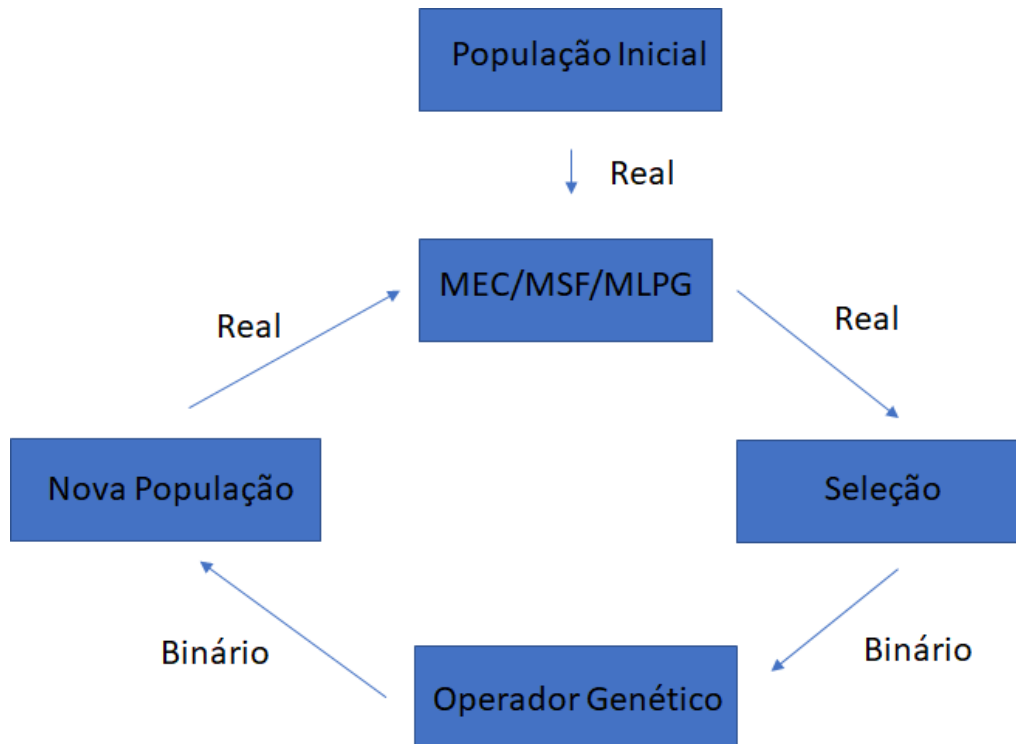


Figura 31 – Esquema de um AG acoplado com MEC/MSF/MLPG.

#### 4.9 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

A descrição da implementação realizada no MLPG-1 e 2 aplicados a proteção catódica abaixo:

1 – Dados de entrada:

- Coordenadas dos nós de contorno são lançados ordenadamente;
- Coordenadas dos nós do domínio;
- A base polinomial é adotada inicialmente, em caso da impossibilidade desta em representar o problema no interior do programa ocorre um aumento progressivo dela até o nono grau;
- Determinação da função peso e do número de pontos de Gauss;
- Determinação da condutividade do meio envolvido;
- Leitura das condições de contorno, e dos valores das fontes;

## 2 – Etapa de resolução;

- Calcular as abscissas e pesos de Gauss;
- Determinação das normais;
- Encontrar a menor distância para cada ponto e através deste determinar o raio para o subdomínio local;
- Determine o raio  $r_i$  do suporte para as funções de ponderação  $w_i(x)$ ;
- Determinar das matrizes base para cada ponto de interesse  $x_i$  do problema em questão;
- Considerando um ponto  $x_i$  após determinado o raio do subdomínio e a coordenadas das abscissas e pesos de Gauss, centrados nos pontos de Gauss é calculado o tamanho do suporte  $w_i(x)$  para cada ponto de Gauss;
- É feita a montagem da função  $\phi_j(pg)$  e de suas derivadas para cada ponto de Gauss;
- A integração é resolvida para o subdomínio criado para o ponto  $x_i$  para a montagem do sistema de equações lineares;
- Resolução do sistema linear ou não para obtenção do valor fictício;

## 3 – Obtenção da solução;

- Em função dos MQM não apresentarem a propriedade do delta de Kronecker é necessário um pós processamento onde o MQM é aplicado mais uma vez para a obtenção da variável real em função das variáveis fictícias obtidas anteriormente;
- Obtenção do resultado final.

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS E DISCUSSÕES

#### 5.1 TESTES PRELIMINARES

Os problemas iniciais serão adotados para validar e comparar resultados. Nesta etapa alguns estudos serão feitos para aperfeiçoar o método para o problema da proteção catódica. Tendo em vista a quantidade de variáveis envolvidas nos métodos propostos para estudos em cada um deles serão feitas algumas verificações e estudos com o objetivo de tonar mais eficientes para a aplicação pretendida.

Inicialmente na seção foram feitos testes para verificar a consistência dos programas implementados e adaptados para o caso particular da proteção catódica. No caso particular do MLPG 2 a avaliação dos subdomínios locais para a interpolação. A seleção da função peso que apresentou um melhor comportamento. Outro ponto importante avaliado foi a base monomial usada nos mínimos quadrados móveis para interpolação. Para o MLPG 1 foram feitos os mesmos testes acima e identificadas particularidades que foram discutidas nessa seção.

Foi feita a verificação do posicionamento dos pontos de Gauss para identificar se as mudanças de coordenadas propostas atingiram o objetivo pretendido. Também foi resolvida a integração de domínio para potencial em 2D e comparado com a solução exata de cada caso particular.

Um estudo interessante e consistente desenvolvido durante a tese foi em relação aos contornos, tornando possível a resolução de problemas em diversas geometrias.

**Problema 5.1** - Considerando o problema 2D apresentado na Figura 32. Onde a dimensão  $x = 2a$  ( $a = 1\text{m}$ ) e  $y = a$ , são utilizados 12 nós no contorno e 3 nós em pontos internos, para representar o problema, importante notar que nesses nós não há nenhuma união conforme Figura 32, onde os lados superior e inferior do retângulo estão isolados (fluxo = 0.0), e o potencial em  $x(0) = 20,0^\circ\text{C}$  e em  $x(5) = 80,0^\circ\text{C}$ . O valor do potencial foi determinado com exatidão em todos os pontos do domínio na primeira interação conforme Figura 33. Esse problema foi resolvido com o MLPG 2, a interpolação foi feita com MQM, e a função peso adotada foi a Spline de quarta ordem.



Uma ressalva importante é que para problemas simples como esse a base monomial não influencia no resultado [54, 55].

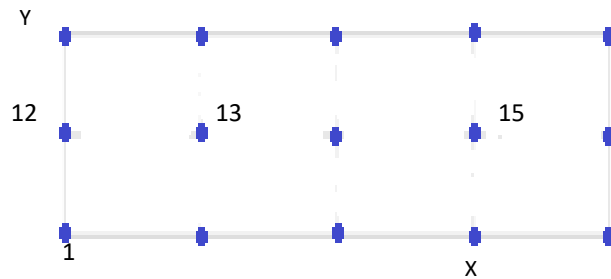


Figura 32 - Representação do problema 1.

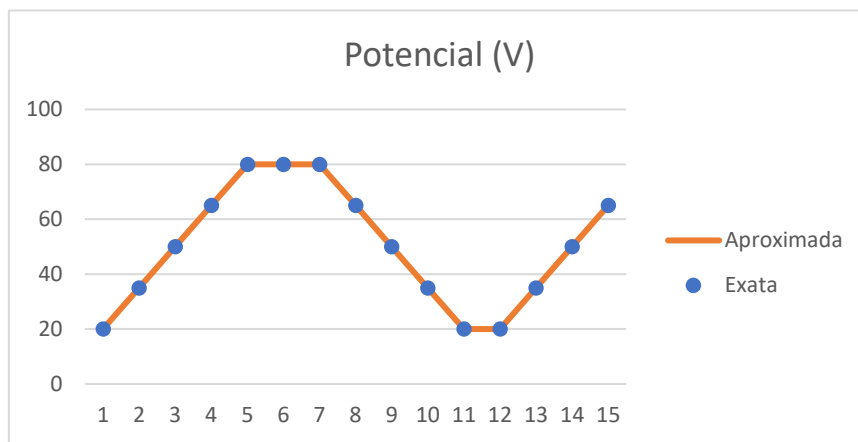


Figura 33 – Potencial Exato e Aproximado com o MLPG2.

**Problema 5.2** - O problema proposto é um retângulo com lados 2m x 2m são utilizados 30 nós no contorno e 36 nós em pontos internos a função de interpolação adotada foi a Spline de quarta ordem, a base polinomial adotada foi a quadrática em ambos os casos. O problema foi feito uma comparação entre a solução do MEC e do Método de Colocação para diferentes situações onde foi analisada a densidade de corrente e o potencial em diferentes meios condutividades conforme Figuras 34 e 35.

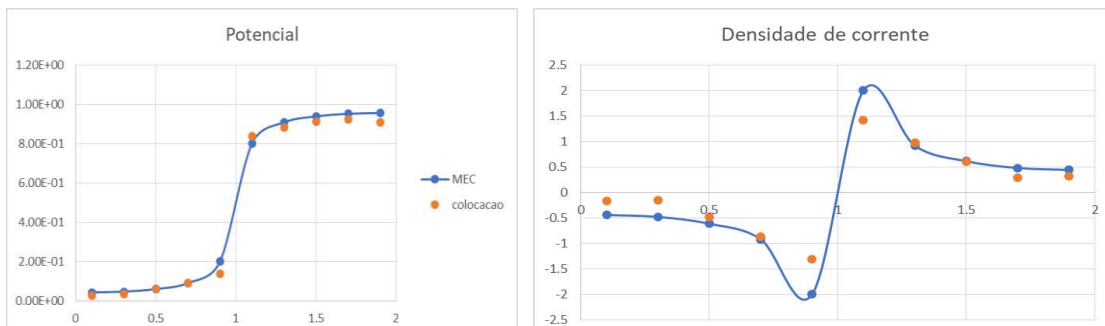


Figura 34 – Resultados com  $k = 1.0 \Omega^{-1}m^{-1}$ .

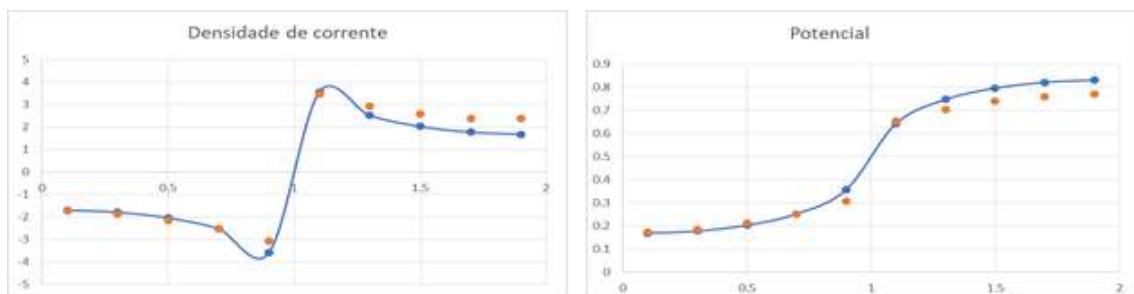


Figura 35 – Resultados para  $k = 4.6 \Omega^{-1}m^{-1}$ .

Esses foram os testes iniciais para avaliarmos a variação em relação a condutividade. Para valores pequenos de K não observou - se tendência. As Figuras 34 e 35 apresentam a possibilidade de aplicação do método de colocação a proteção catódica. A Figura 36 a) e b) ilustra a simulação feita com 84 pontos no contorno e 351 no domínio, base polinomial cúbica e  $k = 0.05 \Omega^{-1}m^{-1}$ , mesmo assim não apresentou precisão conforme já descrito.

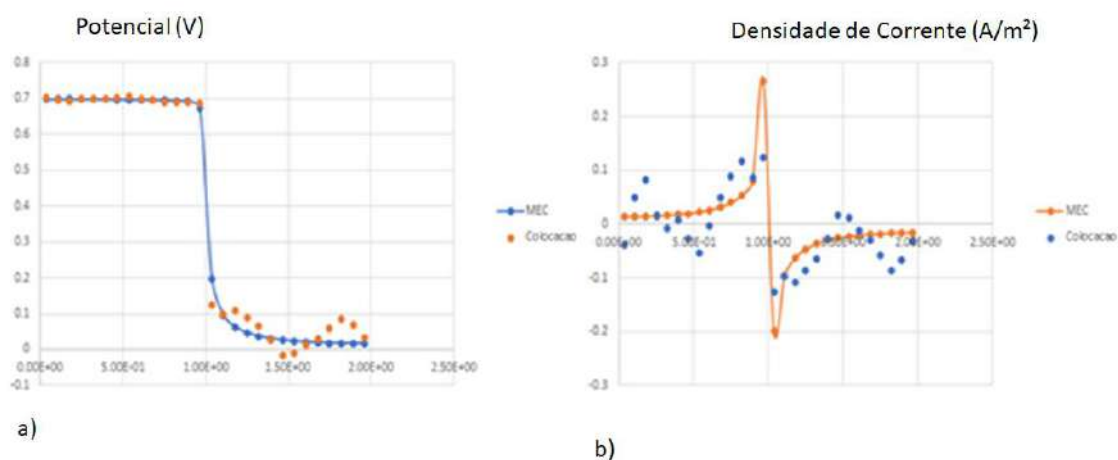


Figura 36 – Resultado para  $k = 0.05 \Omega^{-1}m^{-1}$ .

**Problema 5.3** – Problema de Dirichlet semelhante ao proposto por Mazzia & Pini e Bathe respectivamente em [54, 58] foram feitos testes para problema com base linear e base quadrática submetidos a condições de contorno que são fornecidas pela solução exata de cada problema, o domínio é 2m x 2m, a função de aproximação adotada foi a dos mínimos quadrados móveis. O início dos testes será com 9 pontos onde 8 estão distribuídos sobre o contorno e 1 no domínio e a partir destes foi feito o refinamento para

o problema linear e quadrático respectivamente. A Figura 37, ilustra o problema. Onde as soluções exatas linear e quadrática são dadas respectivamente por:  $u^{exact} = x + y$  e  $u^{exact} = x^2 - y^2 + xy$ .

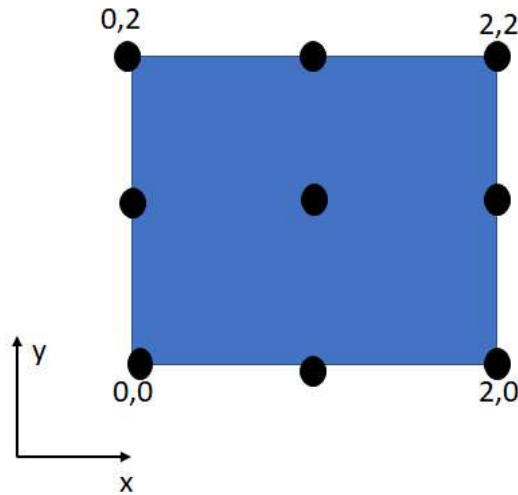


Figura 37 – Representação do problema 5.3.

A distribuição dos pontos de Gauss no Domínio deste quadrado é apresentada na Figura 38 para ilustrar a regra 1 de integração numérica conforme proposto na secção anterior.

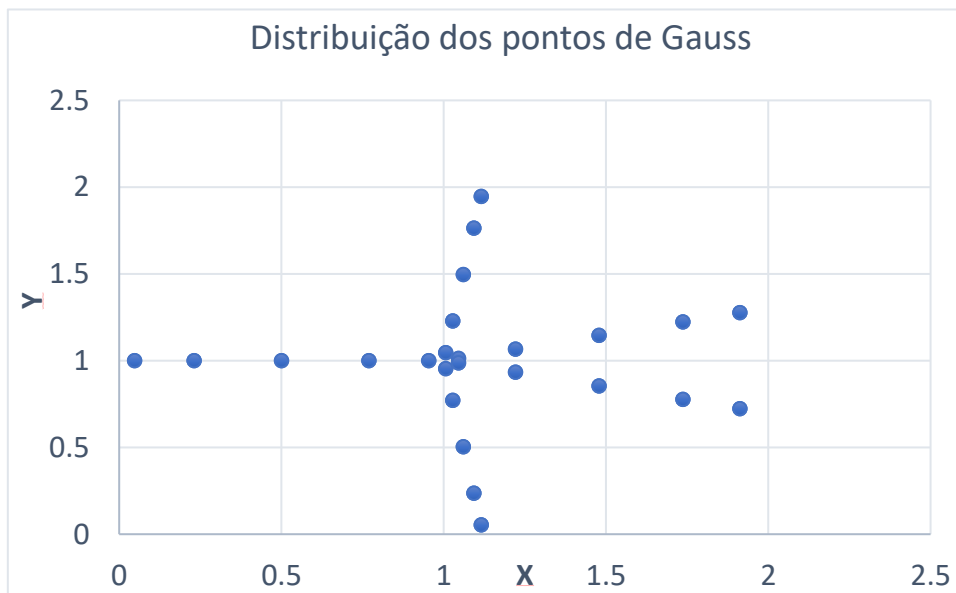


Figura 38 – Pontos de integração distribuídos no domínio, onde foram usados 5x5 pontos de Gauss.

As Tabelas 2 e 3 trazem a qualidade da aproximação alcançada já com esse refinamento considerando a solução para a base monomial linear e quadrática

respectivamente. O erro foi obtido segundo a seguinte expressão proposta Mazzia & Pini [54, 55].

$$e = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - u_i^{exato})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^{exato})^2}}$$

Tabela 2 – Erro calculado, base monomial linear.

Sol. Aprox.	Sol. Exata.	Erro = e
-1.29E-06	0	0
1	1	0
2	2	0
3	3	0
4	4	0
3	3	0
2	2	0
1	1	0
2	2	0

Tabela 3 – Erro calculado, base monomial quadrática.

Sol. Aprox.	Sol_Exata	Erro = e
0	0	0
0.99537	1	0.00463
4.0019	4	0.000475
4.9954	5	0.00092
4.0019	4	0.000475
-1.0046	-1	0.0046
-3.9981	-4	0.000475
-1.0046	-1	0.0046
1.0212	1	0.0212

Após um refinamento inicial o posicionamento dos pontos de Gauss em vários pontos diferentes no domínio e contorno do problema em questão conforme Figuras 39, 40 e 41. A observação desta distribuição de pontos é interessante para entender como o aumento de pontos de Gauss possibilita um melhor resultado na maioria dos casos.

Outra análise importante é que esse aumento resulta em melhora significativa até um dado valor e a partir deste ele começa a não afetar significativamente o resultado.

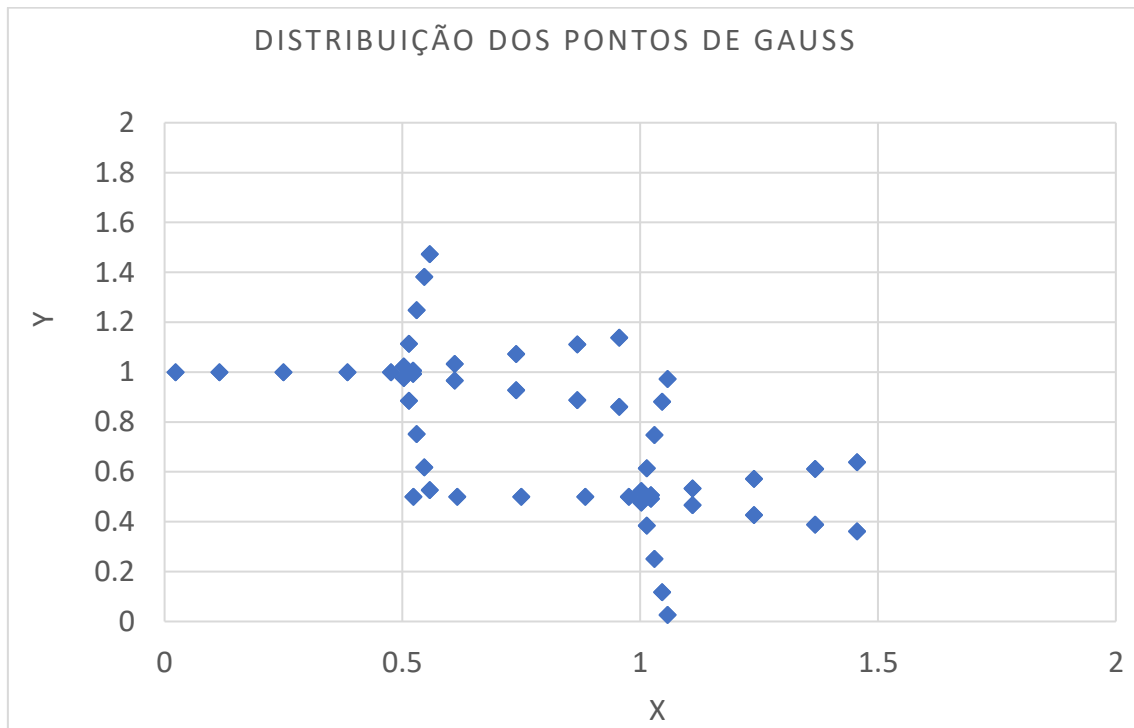


Figura 39 - Pontos de Gauss no Domínio após refinamento da malha, atualmente com 21 pontos, 5x5 pontos de Gauss.

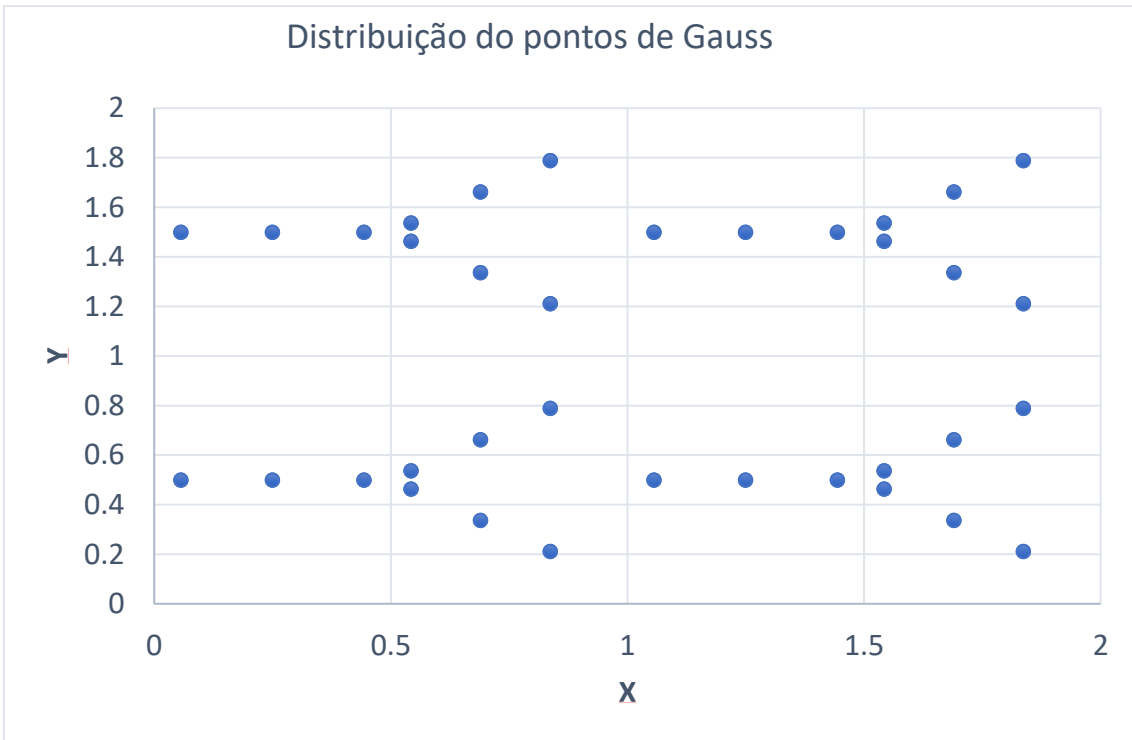


Figura 40 - Pontos de Gauss no Domínio após refinamento da malha, atualmente com 25 pontos, 3x3 pontos de Gauss.

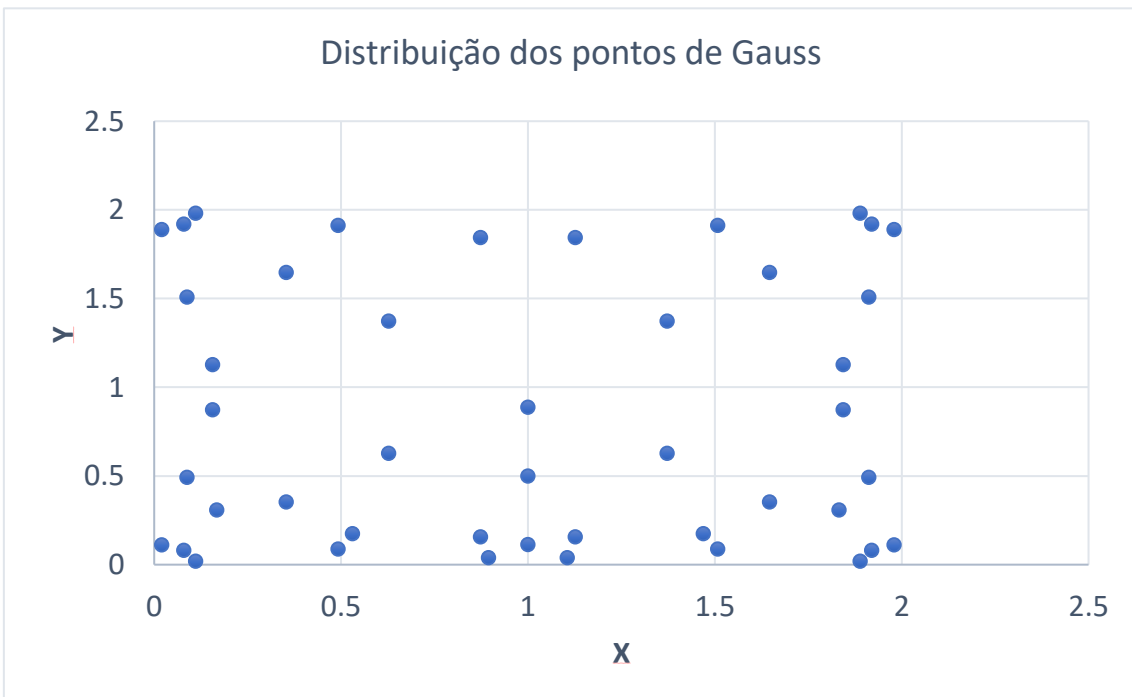


Figura 41 – Distribuição dos pontos de Gauss no contorno do problema 3x3.

Comparando a solução exata e a solução aproximada para cada um dos problemas acima representado, conseguiu-se perceber a eficiência do método atingindo

resultado preciso mesmo com poucos pontos como é o caso dos 9x9 pontos de Gauss no quadrado.

A Figura 42 demonstra a solução exata e aproximada para pontos no domínio do problema considerando a base monomial quadrática na interpolação com os Mínimos Quadrados Moveis.

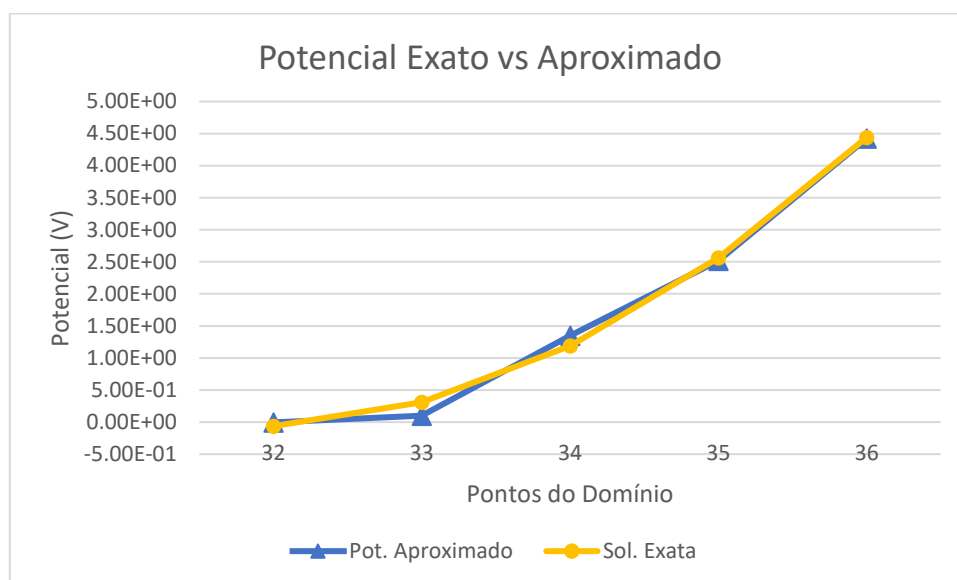


Figura 42 - Solução exata e aproximada para solução quadrática, 5x5 pontos de Gauss, 53 nós. 32 nós no contorno e 21 nós no domínio.

A Tabela 4 apresenta a solução exata e aproximada quando a malha é refinada para 53 pontos e 5x5 pontos de Gauss. É possível notar a coincidência dos resultados demonstrando a qualidade da solução quando a malha é refinada. Durante o processo à medida que a malha foi sendo refinada a aproximação manteve coincidência com a solução exata. Desta forma consideramos que a metodologia proposta apresenta precisão e qualidade na solução conforme demonstrado nesse trabalho. A Tabela 4 os resultados apresentados referem-se apenas ao domínio, uma vez que, é a região onde o cálculo do potencial é um pouco mais complexo levando em conta a distribuição dos pontos de Gauss, mesmo assim a tabela demonstra que os resultados são praticamente coincidentes entre o valor obtido pela solução exata e o valor obtido através da aproximação proposta neste trabalho.

Tabela 4 – Solução exata e aproximada. Para pontos do domínio.

Nós	Sol. Exata	Sol. Aprox.	Erro = $e$
33	0.75	0.74999	1.3334E-05
34	1.25	1.25	0
35	1.75	1.75	0
36	1	1	0
37	1.5	1.5	0
38	2	2	0
39	1.25	1.25	0
40	1.75	1.75	0
41	2.25	2.25	0
42	1.5	1.5	0
43	2	2	0
44	2.5	2.5	0
45	1.75	1.75	0
46	2.25	2.25	0
47	2.75	2.75	0
48	2	2	0
49	2.5	2.5	0
50	3	3	0
51	2.25	2.25	0
52	2.75	2.75	0
53	3.25	3.25	0

**Problema 5.4** – Considerando as dimensões  $2m \times 2m$  a Equação de Laplace com solução exata,  $u^{exato} = -x^3 - y^3 + 3x^2y + 3xy^2$  [17, 54, 59, 60]. Dirichlet são prescritas em todos os lados. Será avaliado a precisão do método. O erro será medido entre o valor aproximado, obtido através da simulação numérica e o valor exato obtido através da expressão acima. Nesse exemplo foi comparado o aumento de número de Gauss, refino de número de pontos e a utilização de funções com diferentes graus na base do problema.

Com o objetivo da avaliação da precisão da solução obtida através do MLPG1 como não é possível o cálculo analítico das integrais obtidas através do MLPG1. O erro global será calculado comparando a solução exata e a aproximação obtida através do MLPG1. O erro será estimado através da norma  $L_2$  que é obtida através da diferença entre o vetor solução numérica  $\mathbf{u}$  e o vetor solução exata  $\mathbf{u}^{exato}$ :



$$|e| = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - u_i^{exato})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^{exato})^2}}$$

Tabela 5 – Efeitos do Número de Pontos de Gauss sobre o Erro Global

Número de Nós	5x5 PG	9x9 PG	15x15 PG
9	0.051460582	0.030574359	0.030574585
25	0.003820889	0.024141999	0.00382098
53	1.11E-01	1.27E-01	1.27E-01
81	1.48E-02	4.49E-04	4.49E-04

A Tabela 5, traz os valores do erro global calculado para diferentes condições propostas, importante notar aqui que tanto o aumento do número de pontos de Gauss, como um refino no número de pontos para identificação do problema afetam os resultados obtidos. Além disso no caso dos pontos de Gauss podemos perceber que a ampliação de 9x9 para 15x15 não chegou a afetar os resultados significativamente. Enquanto isso o aumento do número de pontos de 53 para 81 afetou significativamente a precisão permitindo valores de erro na ordem de  $10^{-4}$ .

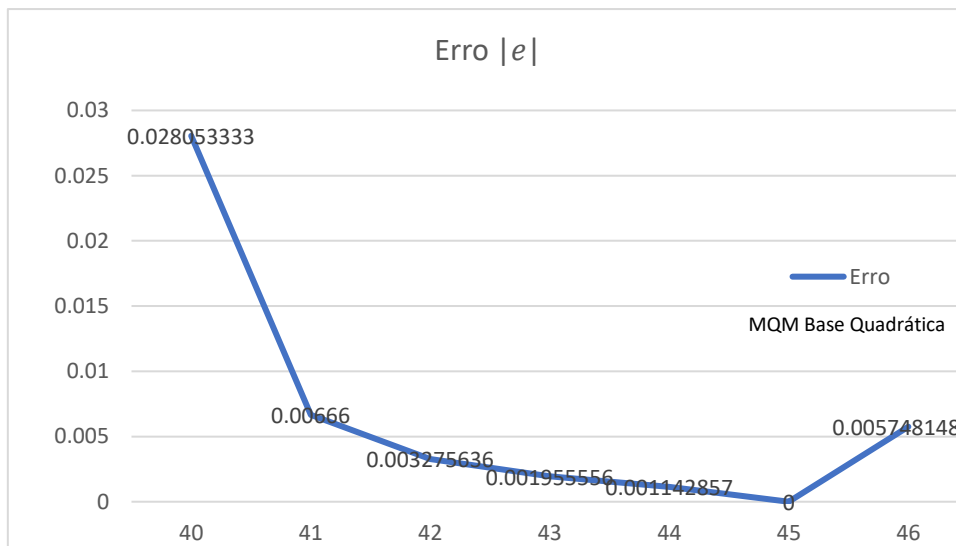


Figura 43 – Erro Local obtidos para pontos do domínio 81 nós, 9x9 Pontos de Gauss para integração.

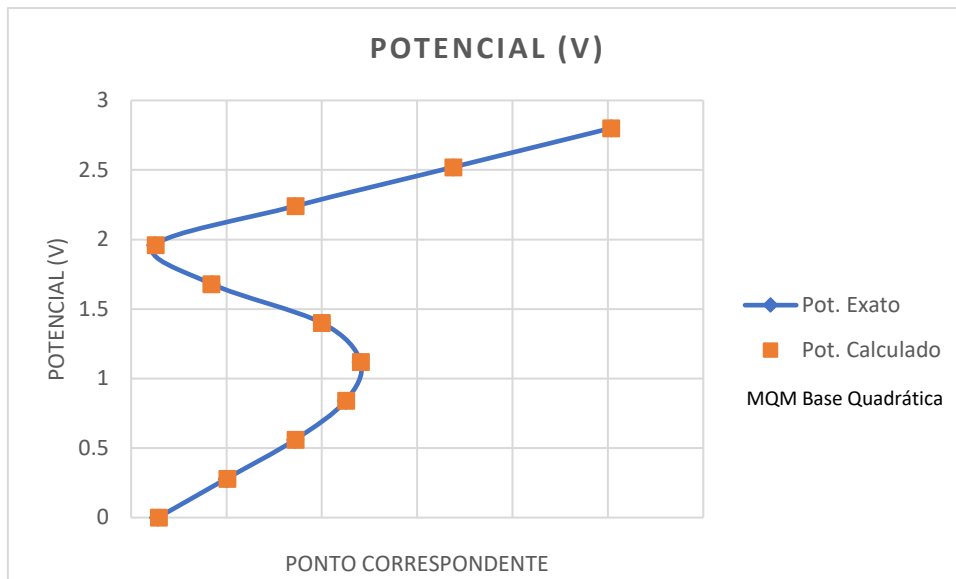


Figura 44 – Potencial Aproximado e Potencial Exato em pontos do domínio.

As Figuras 43 e 44, representam os valores do erro  $|e|$  e potencial (V) em pontos do domínio do problema de Laplace. Analisando os mesmos podemos considerar que a formulação apresenta eficiência e precisão para a resolução dos problemas obtendo valores de erro  $|e|$  local aceitável.

## CORROSÃO GALVÂNICA 5.2

**Problema 5.5** – Tratando o acoplamento de 2 materiais para avaliar a corrosão galvânica. Dois materiais dissimilares imersos em um eletrólito, causando uma transferência de carga elétrica um para o outro, levando em consideração que os eles têm potenciais eletroquímicos diferentes. Particularmente nesse formato de acoplamento a corrosão ocorre no contato entre os 2 materiais metálicos, o material que funciona como anodo será corroído [2, 11, 62, 63, 64].

Considerando – se o contato de materiais que estão envolvidos por um eletrólito e apresentam potenciais de corrosão diferentes conforme Figura 45. Considerando a corrente negativa no anodo (a corrente entra no eletrólito), contrária à convenção normal. O fluxo da corrente sai do eletrólito no catodo [65, 67, 68].

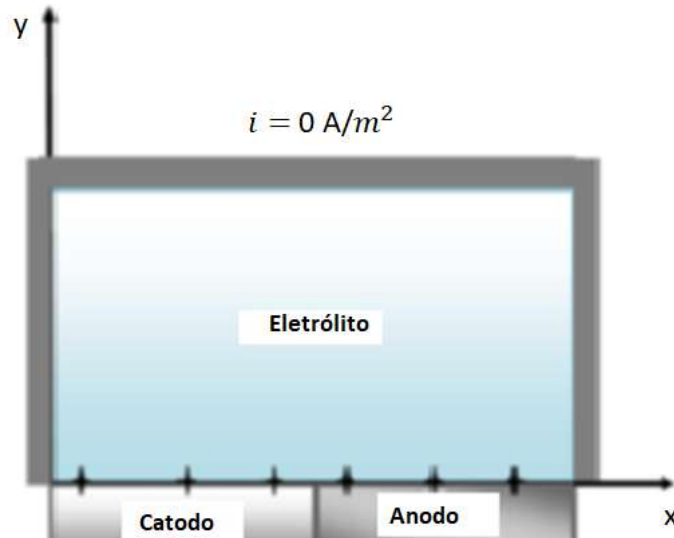


Figura 45 – Exemplo de Corrosão Galvânica.

As curvas de polarização não lineares presentes no catodo e anodo são definidas pelas Equações 5.1 e 5.2

$$\phi = a_1 \operatorname{arcsenh} i + b_1, \text{ representa o catodo,} \quad (5.1)$$

$$\phi = a_2 \operatorname{arcsenh} i + b_2, \text{ representa o anodo} \quad (5.2)$$

Reescrevendo as curvas de polarização catódica e anódica em função da variável  $i$ , obtemos as seguintes condições de contorno

$$i(\phi) = \operatorname{senh} \left( \frac{\phi - b_1}{a_1} \right), \text{ para o catodo,} \quad (5.3)$$

$$i(\phi) = \operatorname{senh} \left( \frac{\phi - b_2}{a_2} \right), \text{ para o anodo,} \quad (5.4)$$

As dimensões de  $\phi$  e  $i$  são V e  $A/m^2$  respectivamente. A geometria do problema é 1m x 2m. Os valores que caracterizam a curva de polarização do problema são:  $a_1 = -0.1V$ ,  $b_1 = 0.7V$ ,  $a_2 = -1.0V$  e  $b_2 = 0.0V$ . Levando em consideração que fora da região metálica é considerada uma condição de isolamento eletroquímico, fazendo  $i = 0 A/m^2$ . O problema foi analisado em três diferentes meios de condutividade:  $k = 1.0 \Omega^{-1}m^{-1}$ ,  $k = 4.6 \Omega^{-1}m^{-1}$ ,  $k = 10.0 \Omega^{-1}m^{-1}$ .

Para solução do problema são considerados 84 pontos no contorno e 351 pontos internos, o problema não linear é resolvido usando o LMDIF que utiliza o método

Levenberg – Marquardt com diferenças finitas para o cálculo das derivadas [66, 69]. Além disso para a resolução do problema foram usadas três ordens para a base monomial utilizada nos mínimos quadrados móveis. Para o MSF foram considerados 83 fontes virtuais em forma retangular. A distância entre o contorno real e das fontes virtuais foi 0,12 m.

Inicialmente foram feitos testes com o coeficiente de condutividade  $k = 4.6 \Omega^{-1}m^{-1}$ . Para o método de colocação foi utilizado MMQM na interpolação. A função peso adotado foi a spline de 4ª ordem. E a base monomial polinomial foi variada.

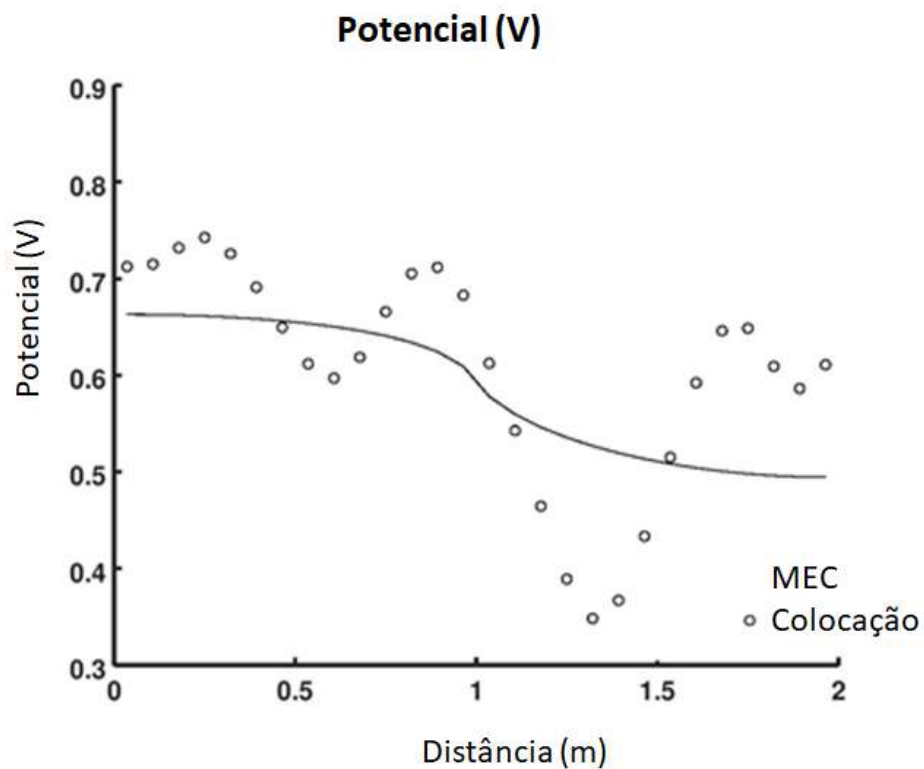


Figura 46 - Determinação do potencial no eletrólito.

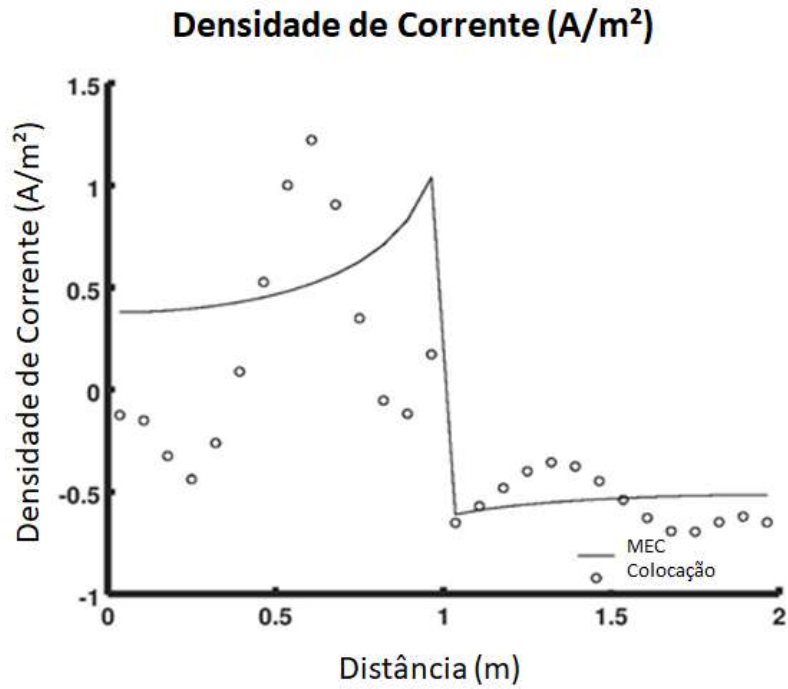


Figura 47- Densidade de corrente sobre o metal.

As Figuras 46 e 47 apresentam a distribuição de potencial e a densidade de corrente respectivamente no eletrólito e sobre o metal para a base monomial linear.

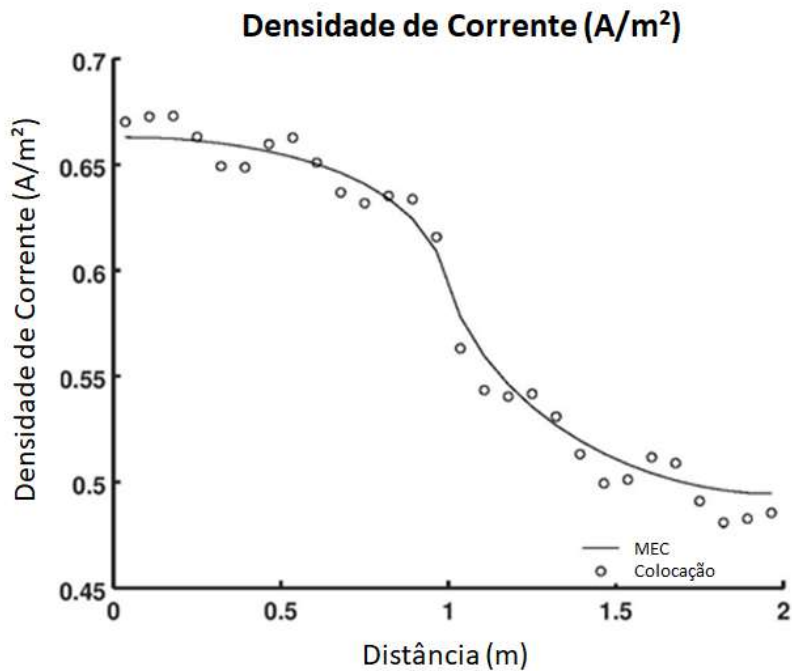


Figura 48 - Determinação do potencial no eletrólito.

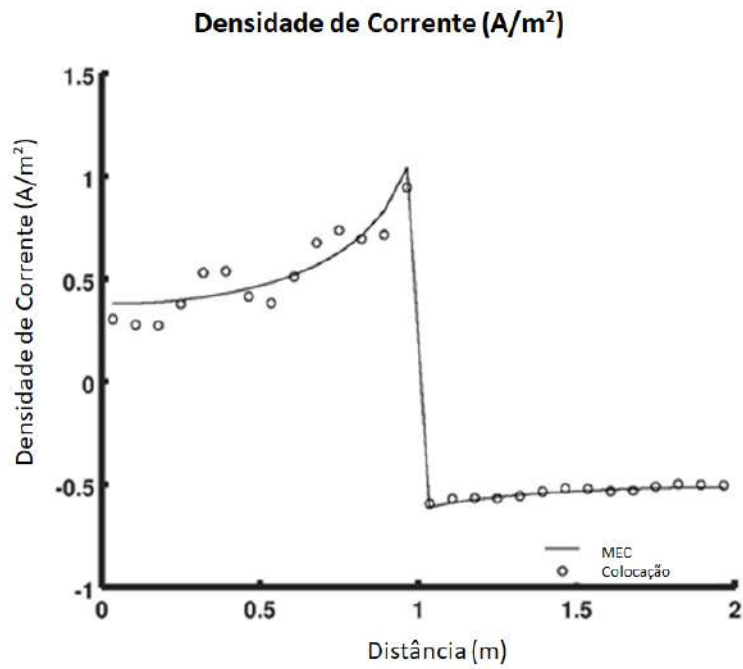


Figura 49 - Densidade de corrente sobre o metal.

As Figuras 48 e 49 apresentam a distribuição de potencial e a densidade de corrente respectivamente no eletrólito e sobre o metal para a base monomial quadrática.

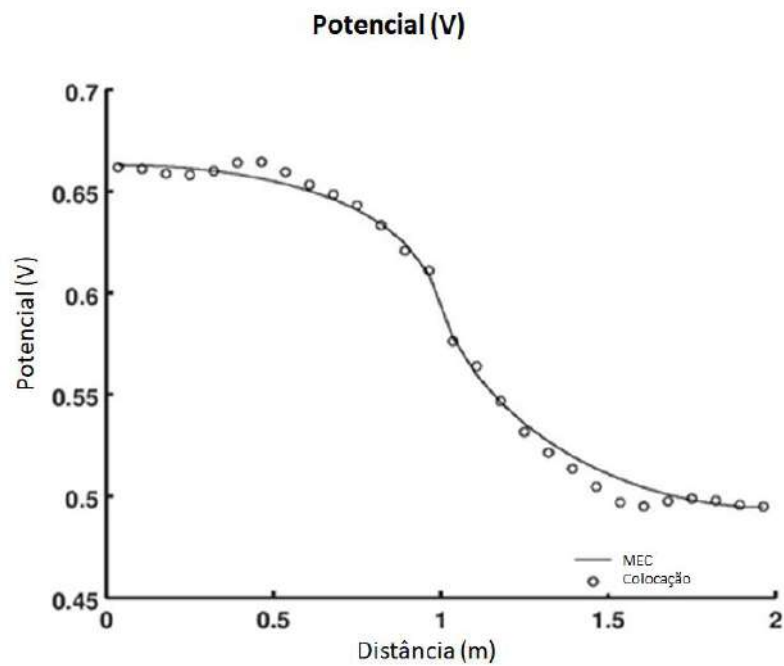


Figura 50 - Determinação do potencial no eletrólito.

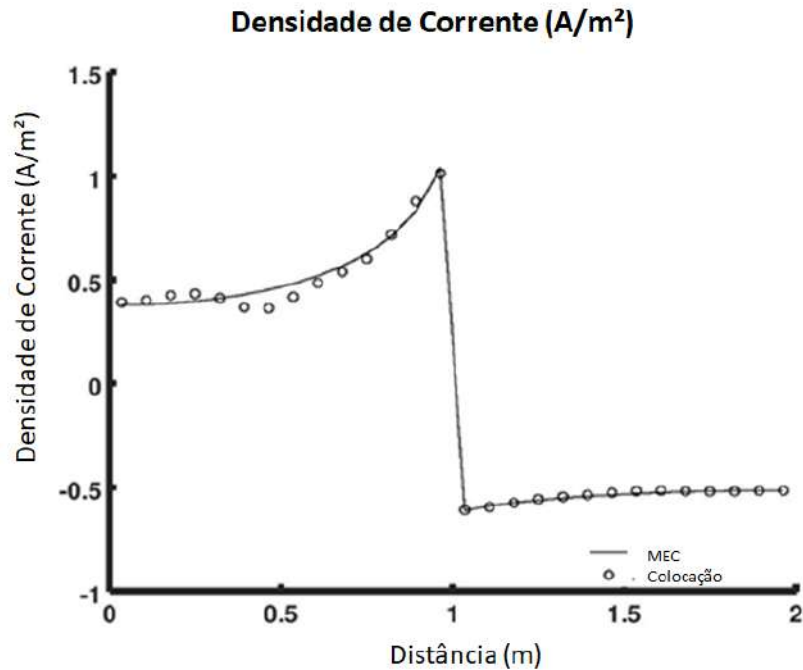


Figura 51 - Densidade de corrente sobre o metal.

As Figuras 50 e 51 apresentam a distribuição de potencial e a densidade de corrente respectivamente no eletrólito e metal para a base monomial cúbica.

De acordo com estes testes iniciais foram identificadas algumas particularidades.

- 1) O aumento da base monomial afeta a resolução do problema de forma considerável.
- 2) A quantidade de pontos selecionados para a composição do subdomínio de interpolação também influencia na resolução do problema. Para esses exemplos foram adotados  $m+2$  pontos para a montagem do subdomínio local e  $m$  depende da base monomial adotada conforme seção 3.1 deste trabalho.

Para a segunda parte dos testes o coeficiente de condutividade foi alterado para  $10.0 \Omega^{-1}m^{-1}$ . As Figuras 52 e 53 apresentam a distribuição de potencial e a densidade de corrente no metal comparando os resultados entre o MSF e o MEC. As figuras 54 a 55 comparam o potencial e a densidade de corrente respectivamente com base monomial linear para o MLPG2.

As Figuras 56 a 57 comparam o potencial e a densidade de corrente respectivamente com base monomial mista para o MLPG2. Esta base mista é formada por uma parte linear e uma parte quinta que é usada apenas próximo ao contato entre o anodo e catodo.

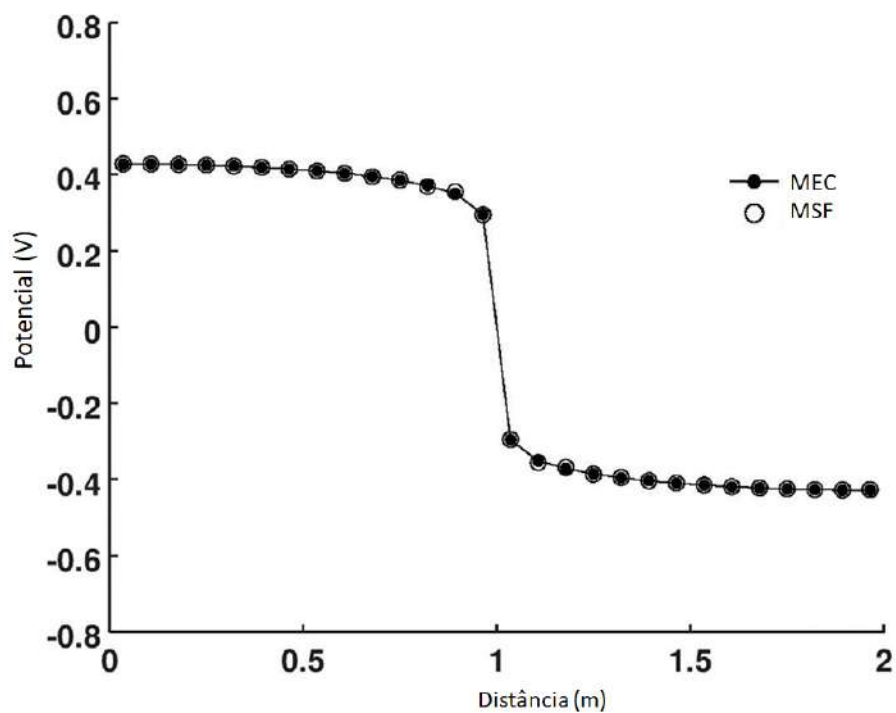


Figura 52 – Distribuição do Potencial no Metal usando MSF e o MEC.

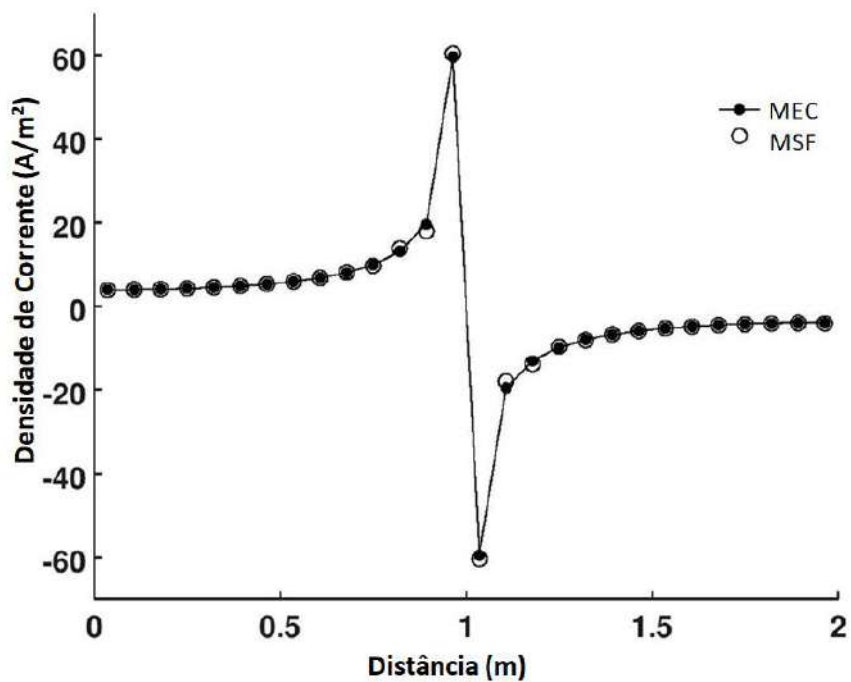


Figura 53 – Densidade de Corrente no Metal usando MSF e O MEC.



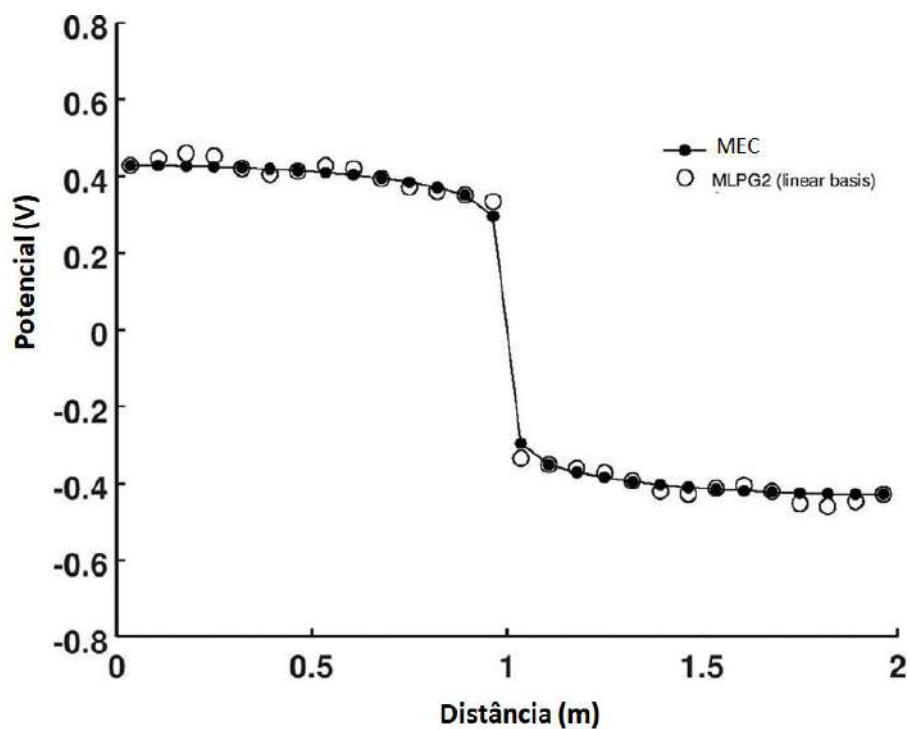


Figura 54 - Distribuição do Potencial no Metal usando MLPG2 e o MEC.

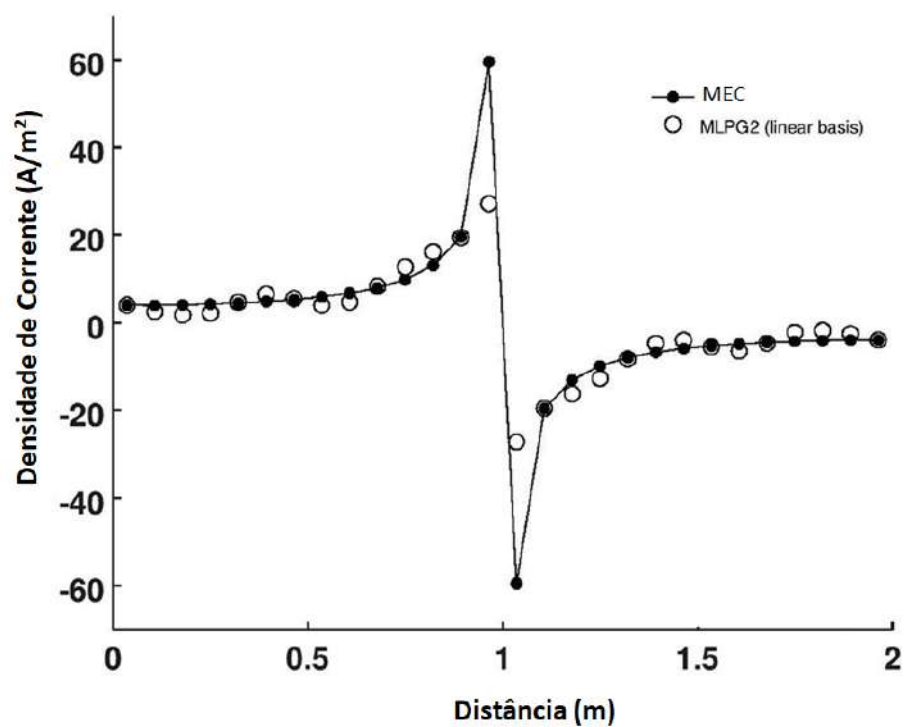


Figura 55 - Densidade de Corrente no Metal usando MLPG2 e o MEC.

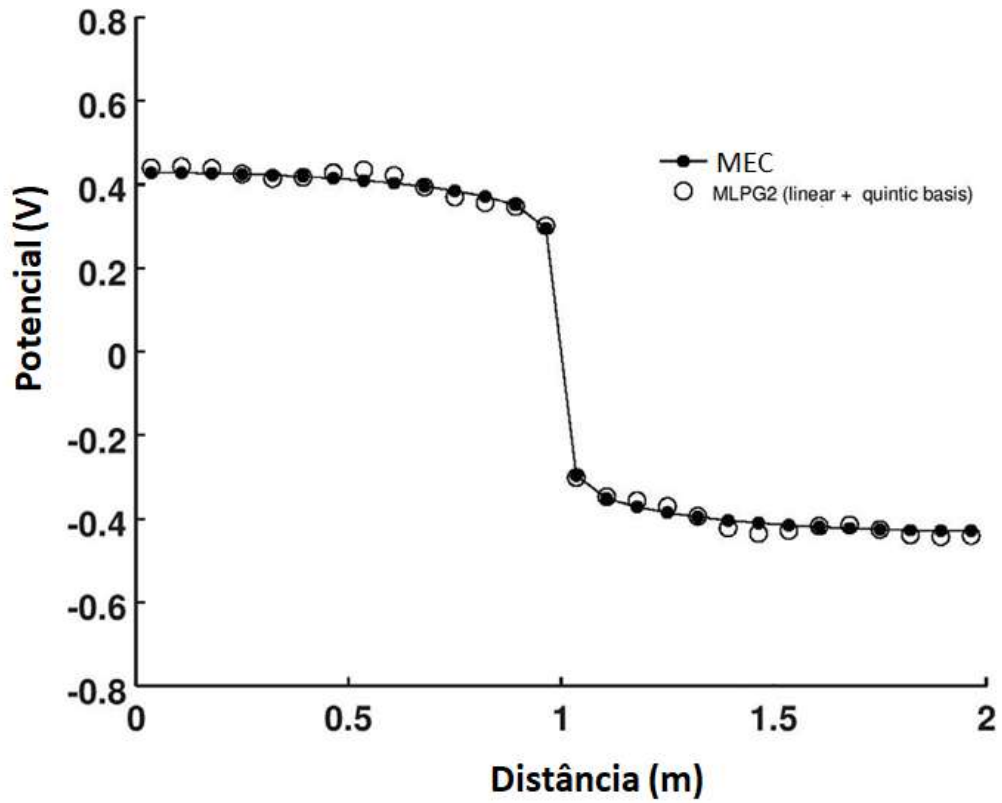


Figura 56 - Distribuição do Potencial no Metal usando MLPG2 e o MEC.

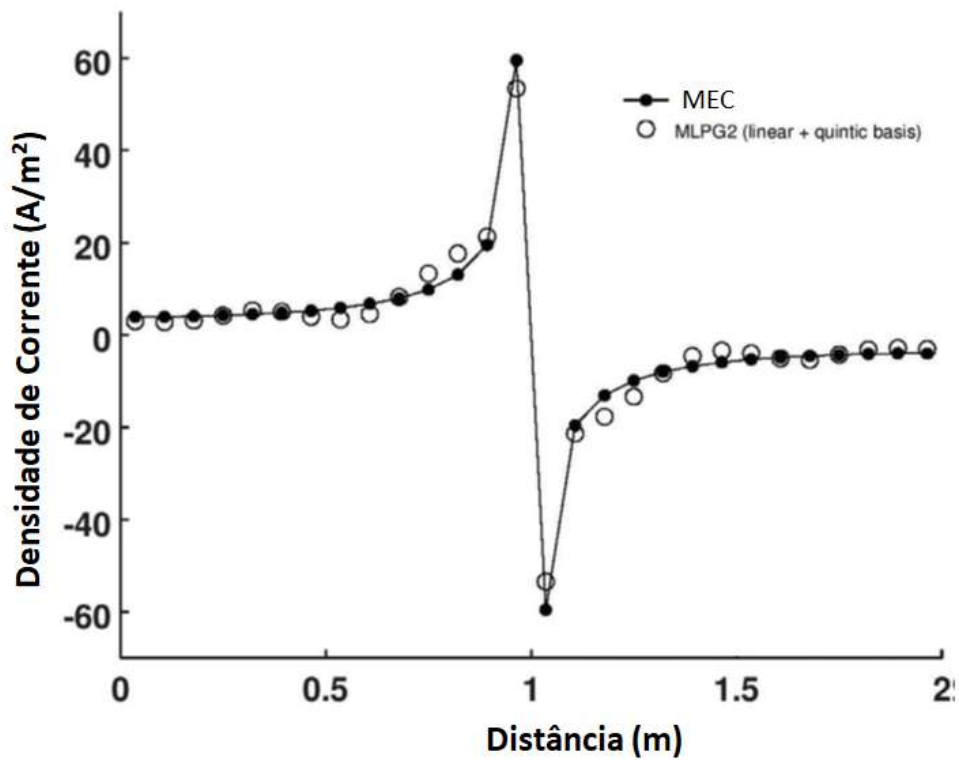


Figura 57 - Densidade de Corrente no Metal usando MLPG2 e o MEC.

O mesmo estudo comparativo foi feito entre o MLPG1 e o MEC, e para este caso em função de apresentar uma estabilidade numérica interessante a comparação foi realizada em três condições de condutividade,  $k = 1.0\Omega^{-1}m^{-1}$ ,  $k = 4.6\Omega^{-1}m^{-1}$  e  $k = 10.0\Omega^{-1}m^{-1}$ . O potencial também foi analisado em 2 pontos distintos, um sobre o metal e outro diretamente no fluido. Foi feita uma variação nos valores das bases monomiais e está detalhada em cada ponto. Os demais parâmetros foram mantidos, como interpolação no MLPG1 são utilizados o MQM e a função de peso adotada a Spline de Quarta Ordem.

No primeiro caso a análise foi feita com base monomial linear, e coeficiente de condutividade elétrica  $k = 1.0 \Omega^{-1}m^{-1}$ . As Figuras 58 e 59 apresentam o potencial e a densidade de corrente respectivamente, sobre o metal. O Erro  $e$  foi determinado segundo as equações 5.5 e 5.6:

$$|e| = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - u_i^{exato})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^{exato})^2}} \quad (5.5)$$

$$|e| = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i - q_i^{exato})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i^{exato})^2}} \quad (5.6)$$

Onde  $u$  e  $q$  representam o potencial em V e a densidade de corrente A/m<sup>2</sup> respectivamente.

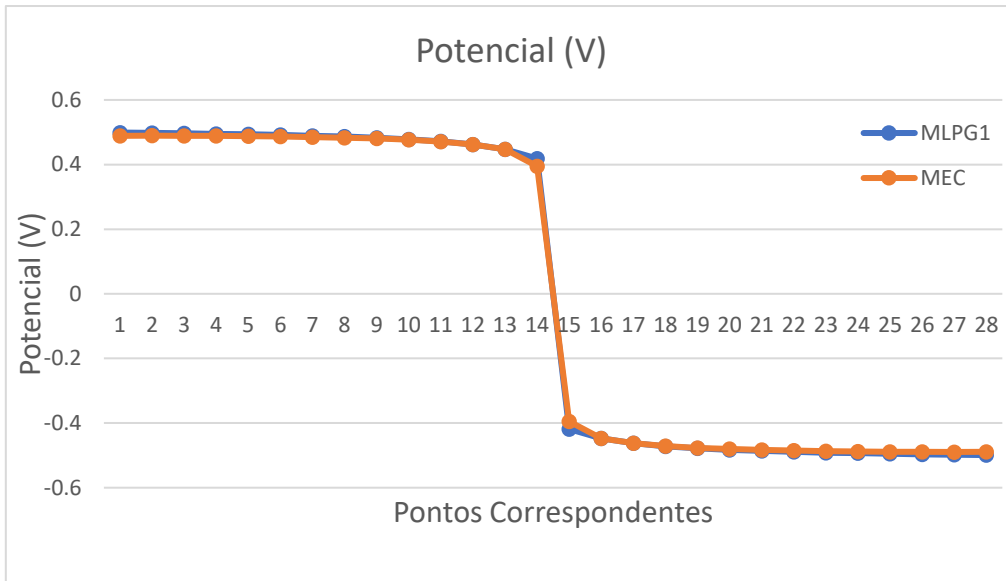


Figura 58 – Potencial sobre o metal usando MLPG1 e MEC.

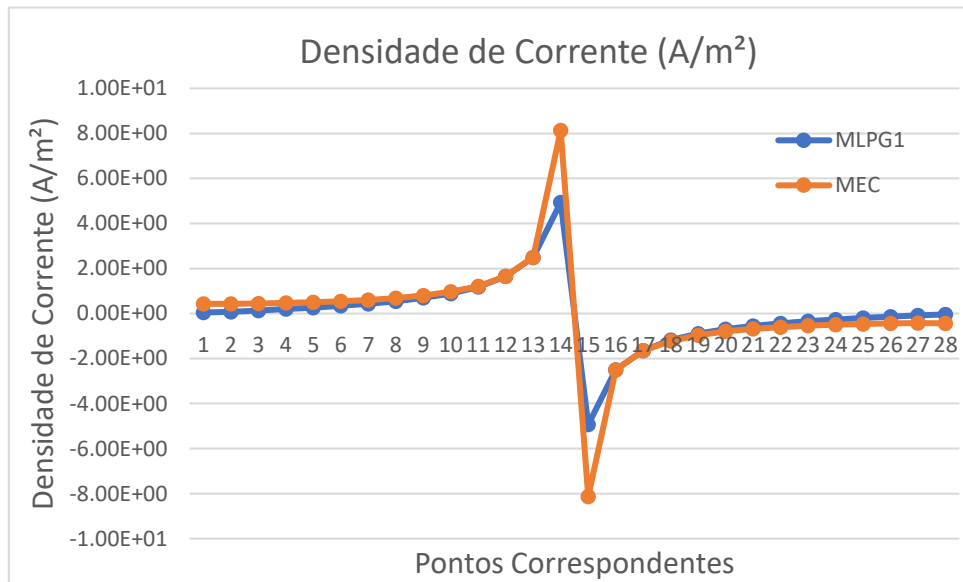


Figura 59 – Densidade de corrente sobre o metal usando MLPG1 e MEC.

A Tabela 6 traz uma comparação entre o Erro calculado comparado a solução obtida com o MEC e com o MLPG1 para o potencial nos pontos sobre o metal, ou  $y = 0$  e variando o  $x$  entre 0 e 2. A Tabela 7 o estudo do erro é feito para o caso da densidade de corrente.

Tabela 6 – Erro calculado para solução do potencial com MEC e MLPG1, base monomial linear.

X	Y	POT	POT.MEC	Erro POT
3.57E-02	0	0.49905	0.48918958	0.02015664
0.10714	0	0.49806	0.4894475	0.01759637
0.17857	0	0.49665	0.48905149	0.01553724
0.25	0	0.4951	0.48847189	0.01356907
0.32143	0	0.49339	0.48766304	0.01174368
0.39286	0	0.49145	0.48656979	0.01002983
0.46429	0	0.48919	0.48510961	0.00841127
0.53571	0	0.48645	0.48315239	0.0068252
0.60714	0	0.48301	0.48048356	0.00525812
0.67857	0	0.47844	0.47672836	0.00359039
0.75	0	0.47208	0.47118128	0.00190738
0.82143	0	0.46247	0.46235054	0.00025838
0.89286	0	0.44766	0.44769797	8.4812E-05
0.96429	0	0.41827	0.39444929	0.06038979
1.0357	0	-0.41827	-0.39444929	0.06038979
1.1071	0	-0.44766	-0.44769797	8.4812E-05
1.1786	0	-0.46247	-0.46235054	0.00025838
1.25	0	-0.47208	-0.47118128	0.00190738
1.3214	0	-0.47844	-0.47672836	0.00359039
1.3929	0	-0.48301	-0.48048356	0.00525812
1.4643	0	-0.48645	-0.48315239	0.0068252
1.5357	0	-0.48919	-0.48510961	0.00841127
1.6071	0	-0.49145	-0.48656979	0.01002983
1.6786	0	-0.49339	-0.48766304	0.01174368
1.75	0	-0.4951	-0.48847189	0.01356907
1.8214	0	-0.49665	-0.48905149	0.01553724
1.8929	0	-0.49806	-0.4894475	0.01759637
1.9643	0	-0.49905	-0.48918958	0.02015664

Conforme pode ser observado na Tabela 6 o Erro  $|e|$  se manteve em valores aceitáveis em todo o domínio.

Tabela 7 – Erro calculado para solução da Densidade de Corrente com MEC e MLPG1 com base monomial linear.

X	Y	FLUXO	FLUXO.MEC	Erro_FLUXO
3.57E-02	0	3.82E-02	0.43579351	0.91241265
0.10714	0	7.75E-02	0.42524051	0.81764202
0.17857	0	0.13397	0.44144851	0.6965218
0.25	0	0.19611	0.46522092	0.57845834
0.32143	0	0.26514	0.49850099	0.46812543
0.39286	0	0.34366	0.54369154	0.36791365
0.46429	0	0.43584	0.60445897	0.2789585
0.53571	0	0.5485	0.68672921	0.20128634
0.60714	0	0.69261	0.80063211	0.13492103
0.67857	0	0.88921	0.96483992	0.07838598
0.75	0	1.1759	1.21764261	0.0342815
0.82143	0	1.6463	1.65238073	0.00367998
0.89286	0	2.4977	2.495033	0.00106892
0.96429	0	4.9323	8.13549519	0.39373082
1.0357	0	-4.9323	-8.1354952	0.39373082
1.1071	0	-2.4977	-2.495033	0.00106892
1.1786	0	-1.6463	-1.6523807	0.00367998
1.25	0	-1.1759	-1.2176426	0.0342815
1.3214	0	-0.88921	-0.9648399	0.07838598
1.3929	0	-0.69261	-0.8006321	0.13492103
1.4643	0	-0.5485	-0.6867292	0.20128634
1.5357	0	-0.43584	-0.604459	0.2789585
1.6071	0	-0.34366	-0.5436915	0.36791365
1.6786	0	-0.26514	-0.498501	0.46812543
1.75	0	-0.19611	-0.4652209	0.57845834
1.8214	0	-0.13397	-0.4414485	0.6965218
1.8929	0	-7.75E-02	-0.4252405	0.81764202
1.9643	0	-3.82E-02	-0.4357935	0.91241265

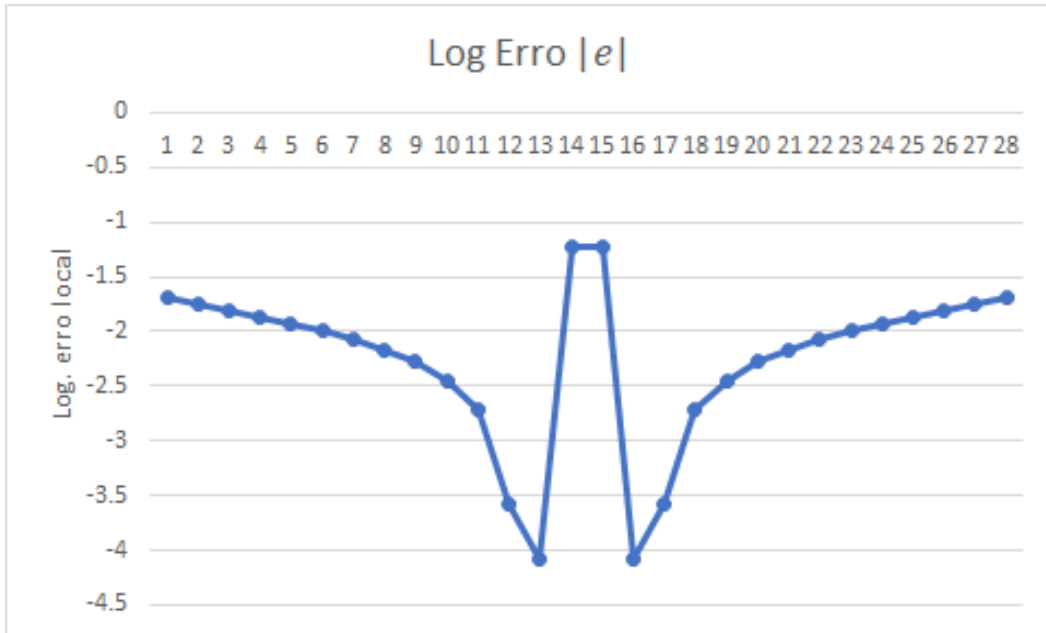


Figura 60 – Logaritmo do erro local para o potencial.

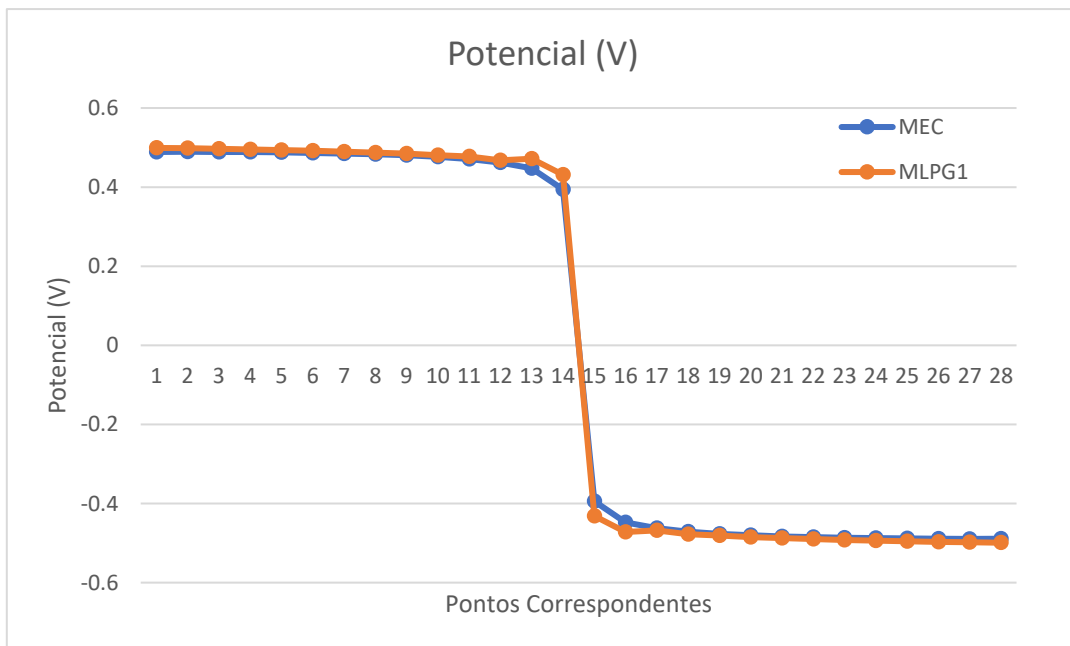


Figura 61 – Potencial na superfície do metal usando MLPG1 e MEC.

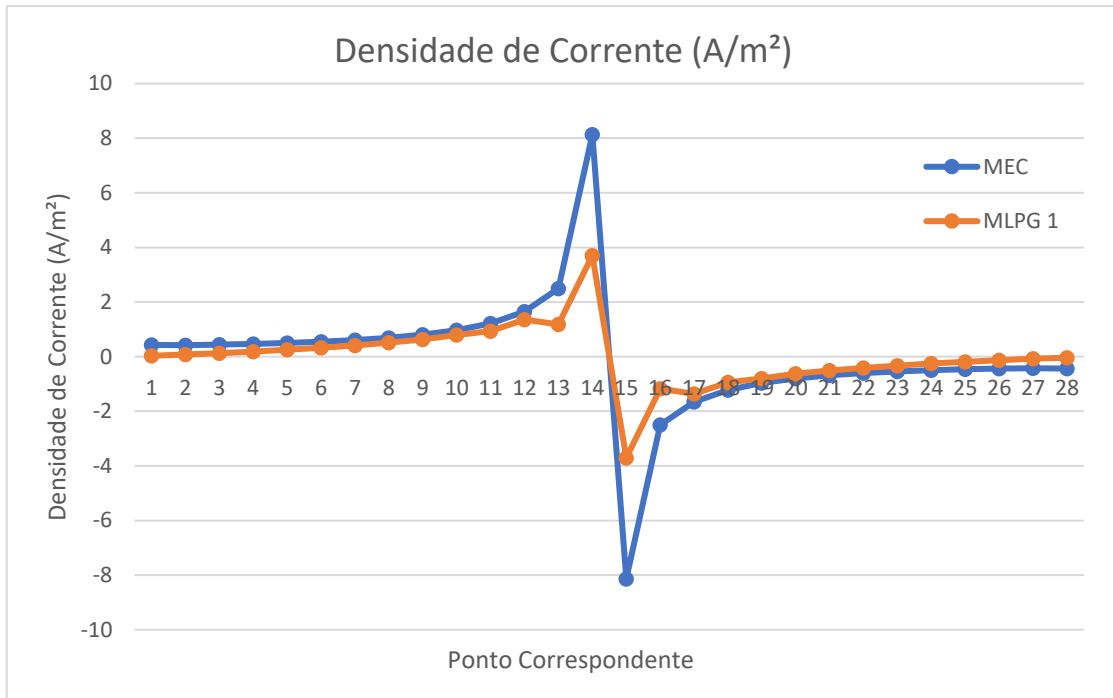


Figura 62 - Densidade de corrente no metal usando MLPG1 e MEC.

As Figuras 61 e 62 trazem a comparação entre potencial e densidade de corrente para a base monomial cúbica. Os outros parâmetros não foram alterados.

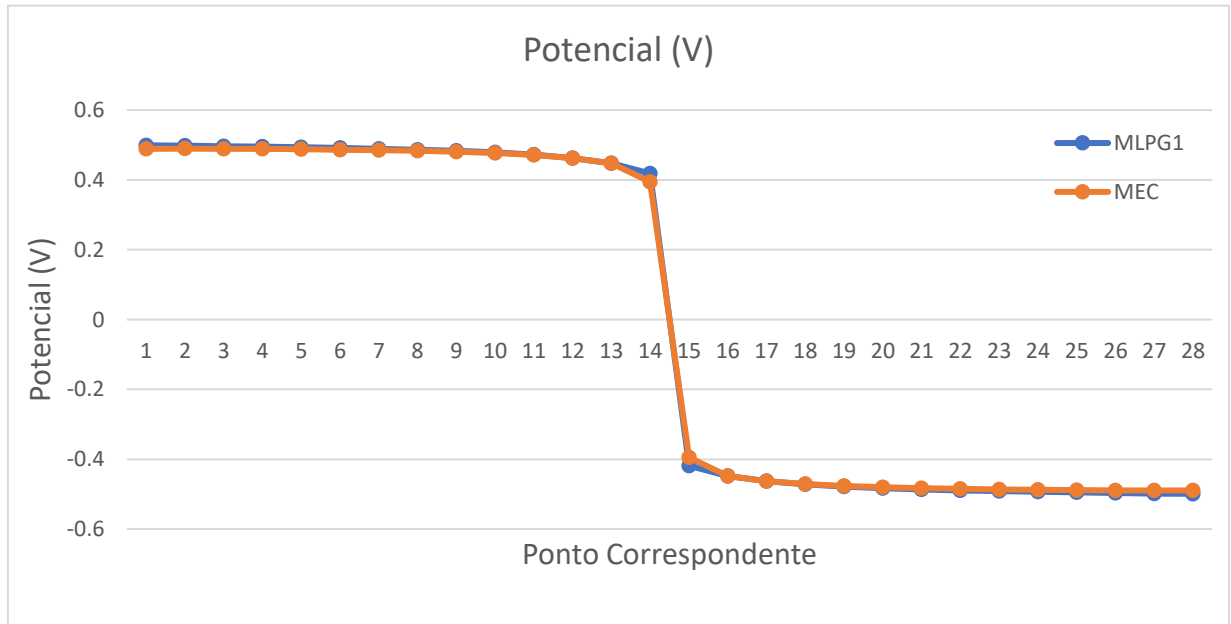


Figura 63 - Potencial na superfície do metal



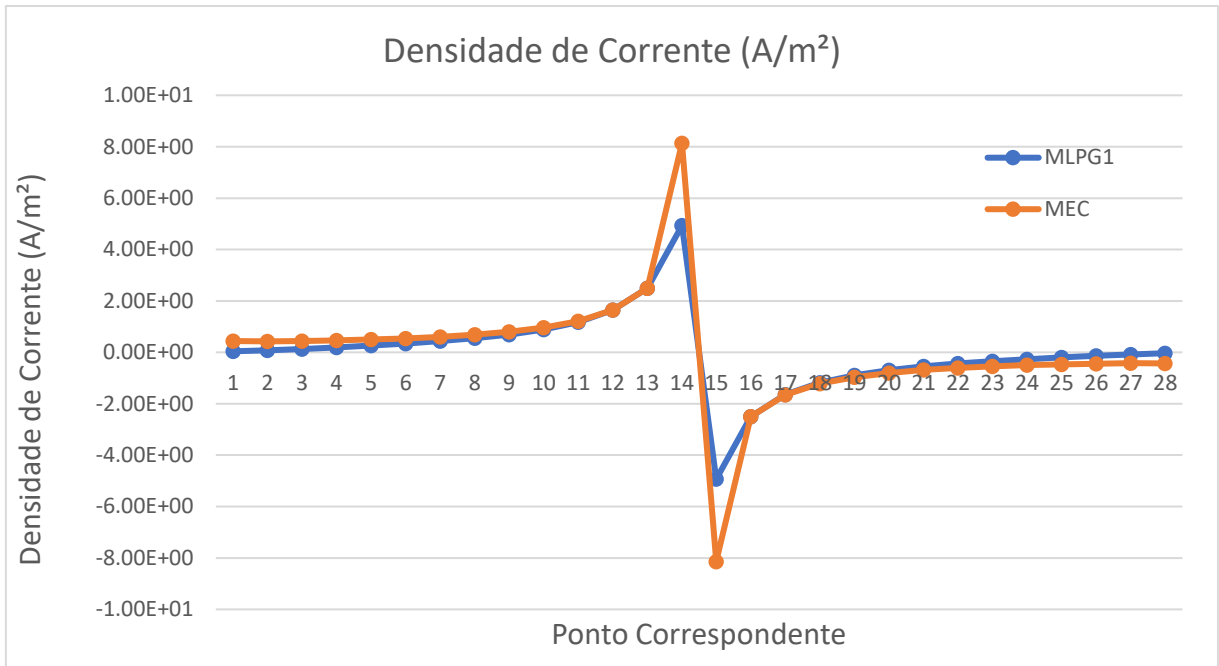


Figura 64 - Densidade de corrente no metal usando MLPG1 e MEC.

As Figuras 63 e 64 trazem a comparação entre potencial e densidade de corrente para a base monomial mista. Onde nos pontos afastados da transição entre anodo e catodo foi usada a base monomial linear e exatamente nos pontos de transição foi adotada uma base quadrática. Os outros parâmetros não foram alterados.

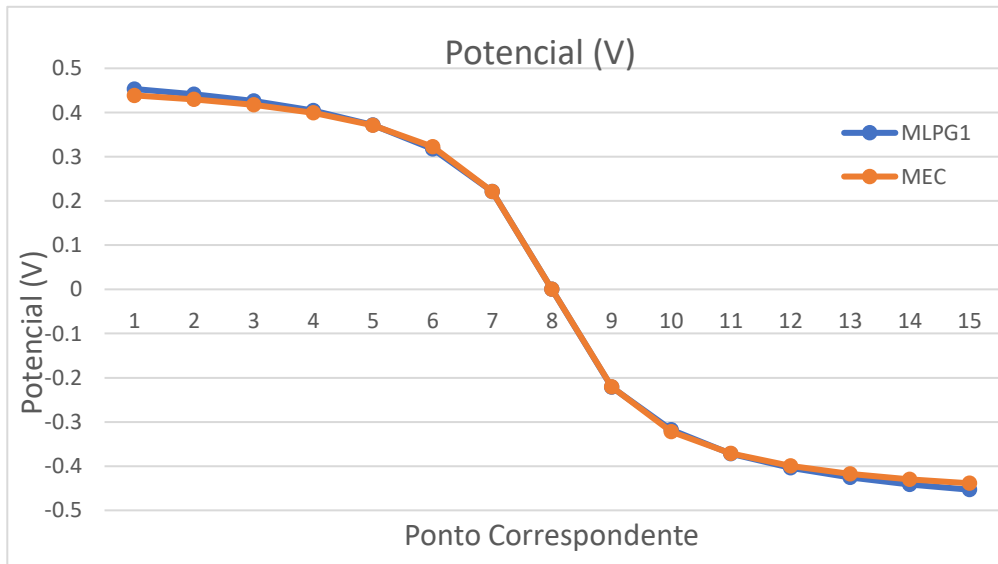


Figura 65 – Potencial no Eletrólito usando MEC e MLPG1 com a base monomial linear.

Tabela 8 – Erro obtido para o cálculo de potencial no eletrólito.

X	Y	POT.MEC	POT	ERRO
0.5	0.071429	0.4387869	0.45326	0.032984
0.571429	0.071429	0.4298534	0.44132	0.026676
0.642857	0.071429	0.4174224	0.42581	0.020094
0.714286	0.071429	0.3993475	0.40412	0.011951
0.785714	0.071429	0.3712019	0.37219	0.002662
0.857143	0.071429	0.3223261	0.31784	0.013918
0.928571	0.071429	0.2208683	0.22139	0.002362
1	0.071429	0	8.19E-11	#DIV/0!
1.071429	0.071429	-0.2208683	-0.22139	0.002362
1.142857	0.071429	-0.3223261	-0.31784	0.013918
1.214286	0.071429	-0.3712019	-0.37219	0.002662
1.285714	0.071429	-0.3993475	-0.40412	0.011951
1.357143	0.071429	-0.4174224	-0.42581	0.020094
1.428571	0.071429	-0.4298534	-0.44132	0.026676
1.5	0.071429	-0.4387869	-0.45326	0.032984

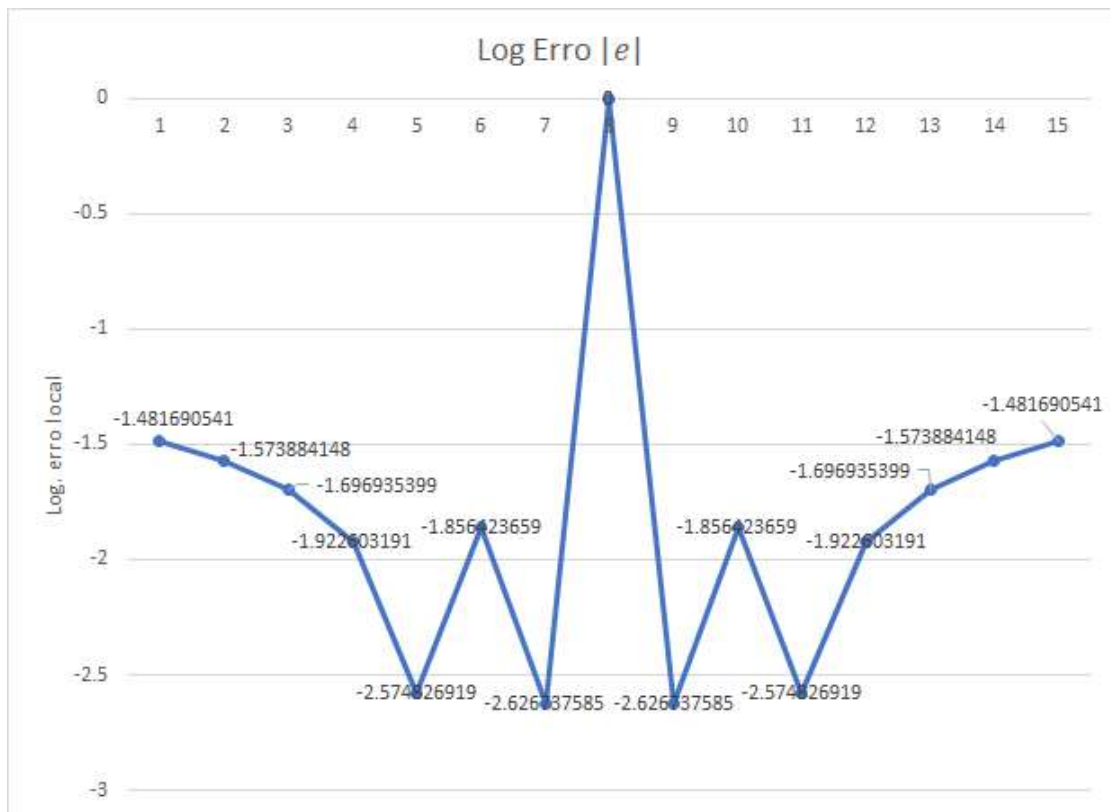


Figura 66 – Logaritmo do erro local determinado para pontos do domínio.

As Figuras 67 e 68 foram obtidas para o mesmo problema sendo resolvido agora com  $k = 4.6 \Omega^{-1}m^{-1}$ . Os outros parâmetros foram mantidos inalterados. A base monomial adotada MQM foi a linear.

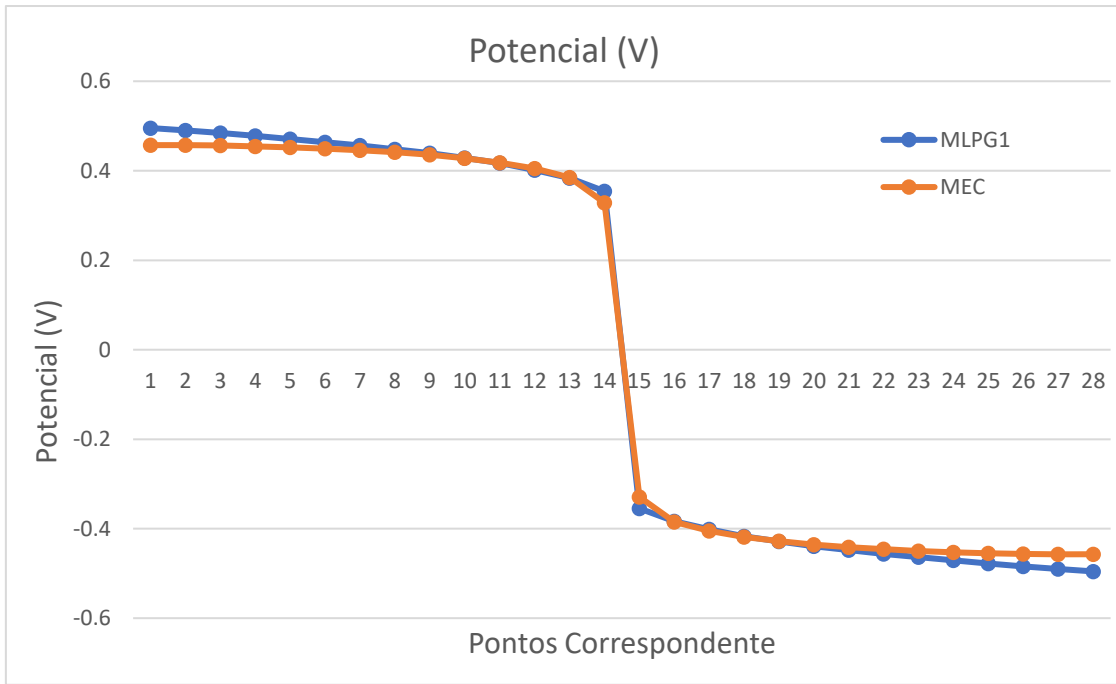


Figura 67 – Potencial sobre o Metal usando MLPG1 e o MEC.

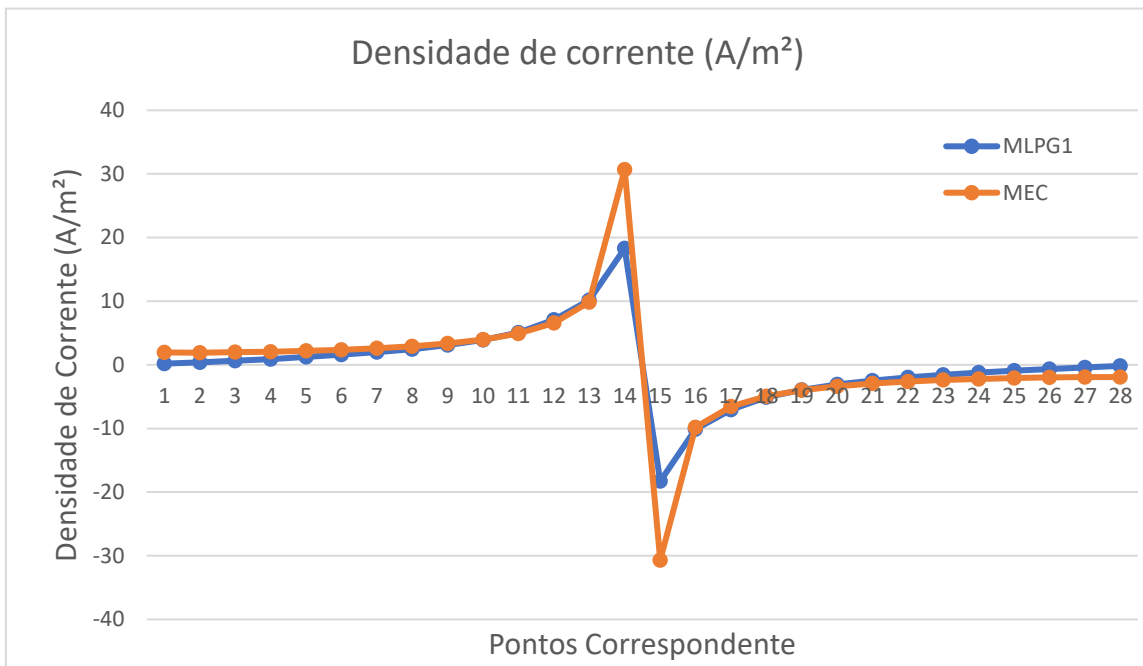


Figura 68 – Densidade de Corrente sobre o Metal usando MLPG1 e o MEC.

As Figuras 69 e 70 foram obtidas para o mesmo problema sendo resolvido agora com  $k = 10.0 \Omega^{-1}m^{-1}$ . Os outros parâmetros foram mantidos inalterados. A base monomial adotada para o MQM foi a linear.

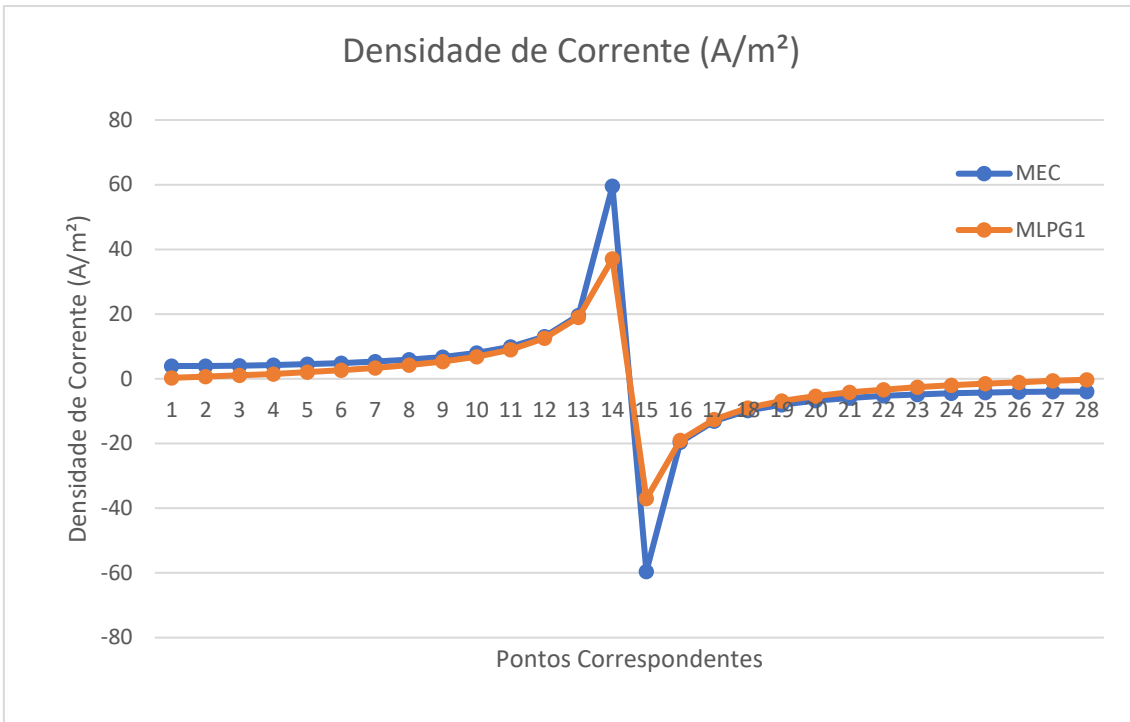


Figura 69 - Densidade de Corrente sobre o Metal usando MLPG1 e o MEC.

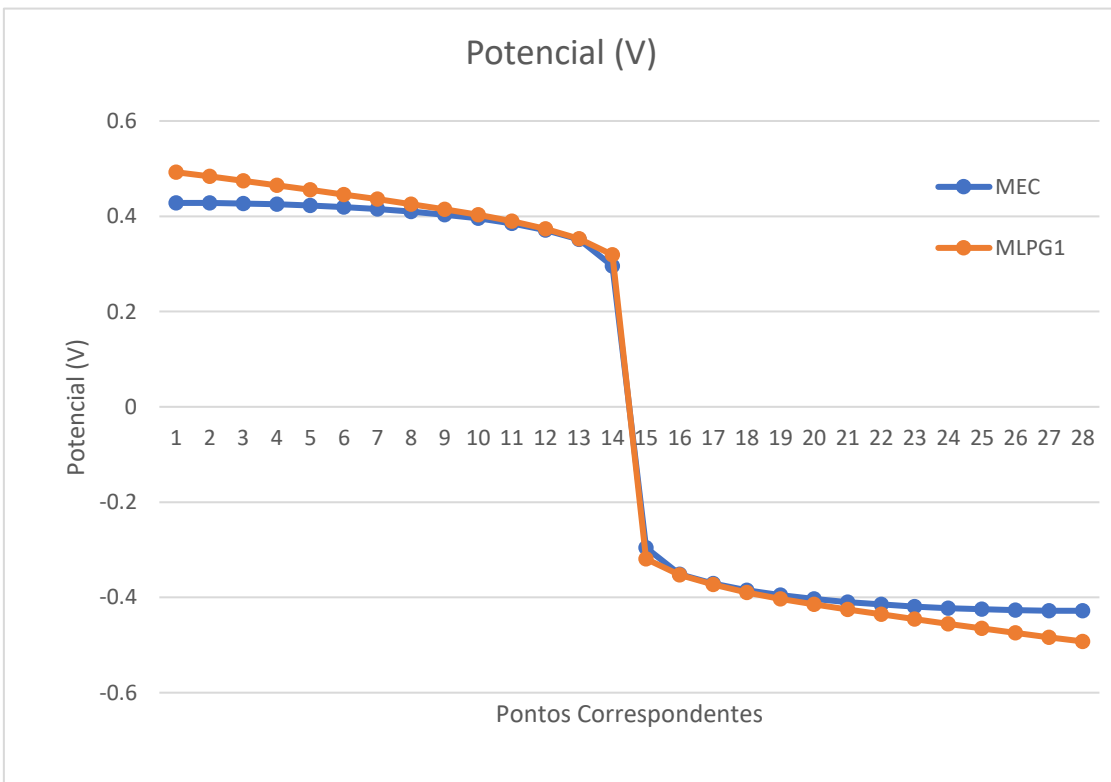


Figura 70 - Potencial sobre o Metal usando MLPG1 e o MEC.

### PRESENÇA DE FONTE 5.3

**Problema 5.6** – Avaliar com o MLPG2 um quadrado protegido por uma fonte pontual em seu interior, onde a intensidade da fonte  $P(5.0,5.0) = -20mA$ , com lado de 10 cm, e o eletrólito com condutividade  $k = 0.04\Omega^{-1}cm^{-1}$  com a curva de polarização prescrita conforme [28] condições de contorno ( $t = 0$ ):

$$q = 0.06 + 0.0001 \left( 10^{\frac{-u-0.4}{0.2}} - 10^{\frac{u+1.0}{0.1}} \right), \quad (5.7)$$

Onde:  $u(V)$  e  $q \left( \frac{mA}{cm^2} \right)$ .

Para solução o contorno foi representado por 64 nós e o domínio interno por 224 nós. Para o MSF foram usadas 60 fontes virtuais posicionadas de forma circular centradas no ponto (5.0,5.0) com raio ótimo igual 5.98 cm. Além disto para o MLPG2 a base cúbica foi usada para aproximação com o MMQM.

As Figuras 72 e 73 apresentam o potencial e a densidade de corrente resolvendo por MEC e MLPG2 respectivamente:

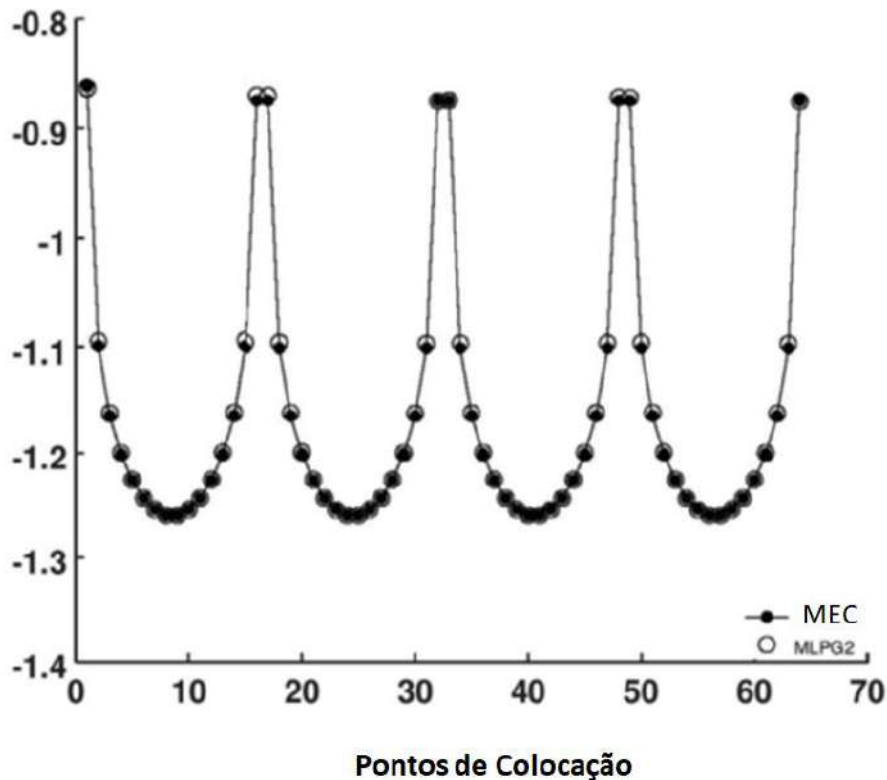


Figura 71 – Distribuição do potencial no metal usando MEC e o MLPG2.

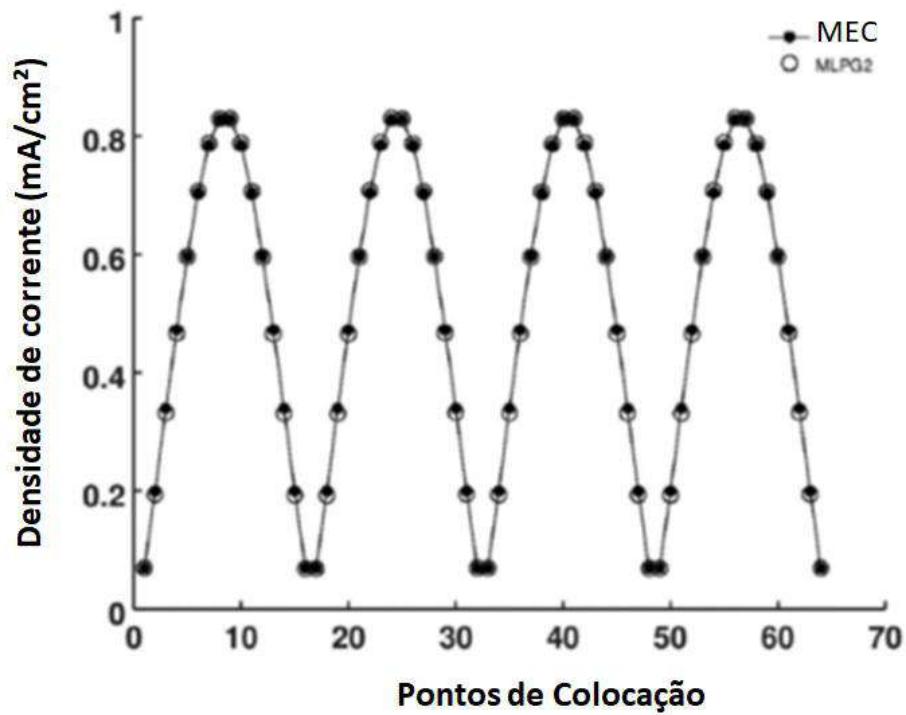


Figura 72 – Densidade de corrente no metal usando MEC e o MLPG2.

As Figuras 74 e 75 apresentam o potencial e a densidade de corrente resolvendo por MEC e MSF respectivamente

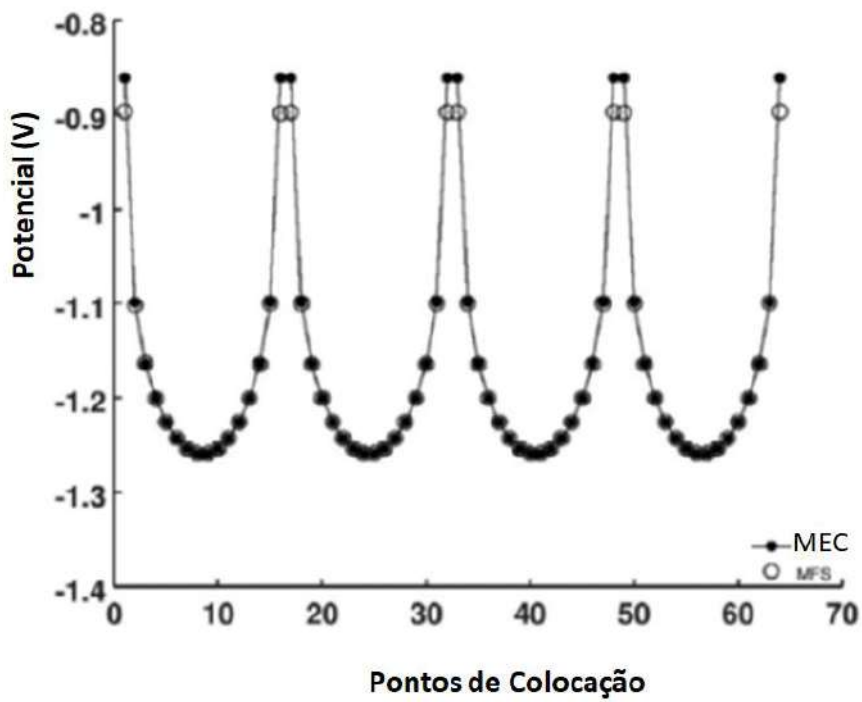


Figura 73 - Distribuição do potencial no metal usando MEC e o MSF

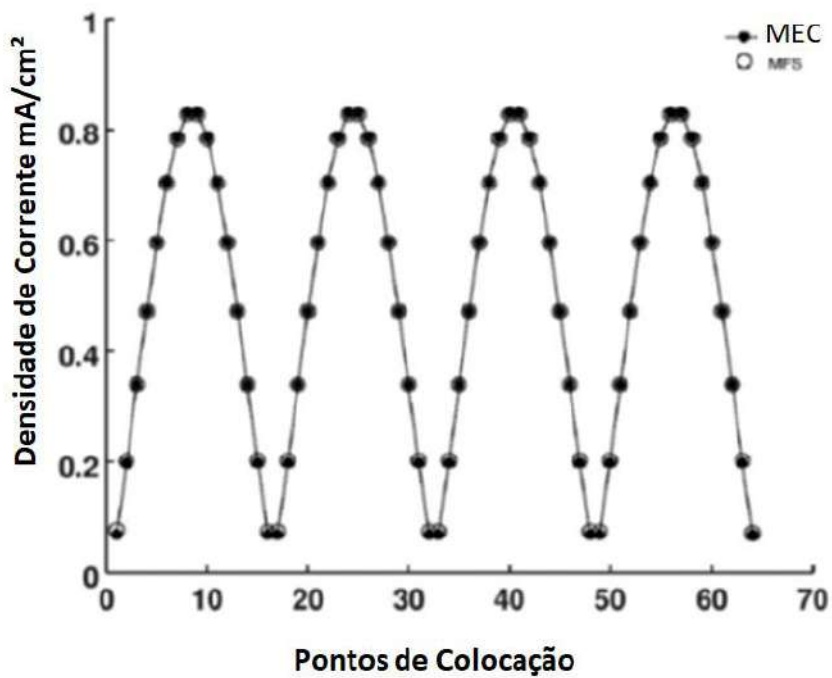


Figura 74 – Densidade de Corrente no metal usando MEC e o MSF.

As Figuras 76 a) e b) representam o potencial (V) para o MEC e o MLPG2 respectivamente e a Figura 77 apresenta o potencial MSF. Conforme pode ser identificado a semelhança entre as figuras é evidente apresentando de forma clara a qualidade da solução para o problema proposto.

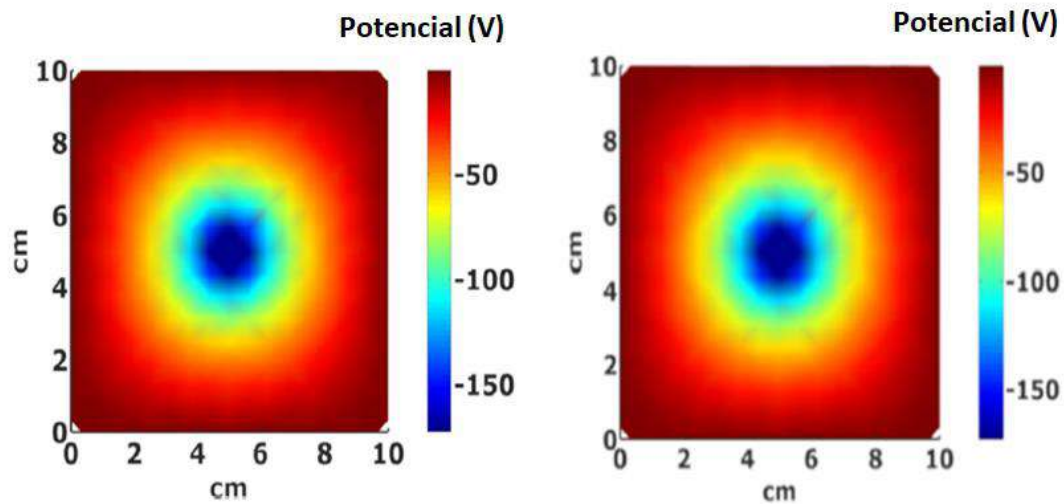


Figura 75 – Potencial no eletrólito usando MEC e MLPG 2 respectivamente.

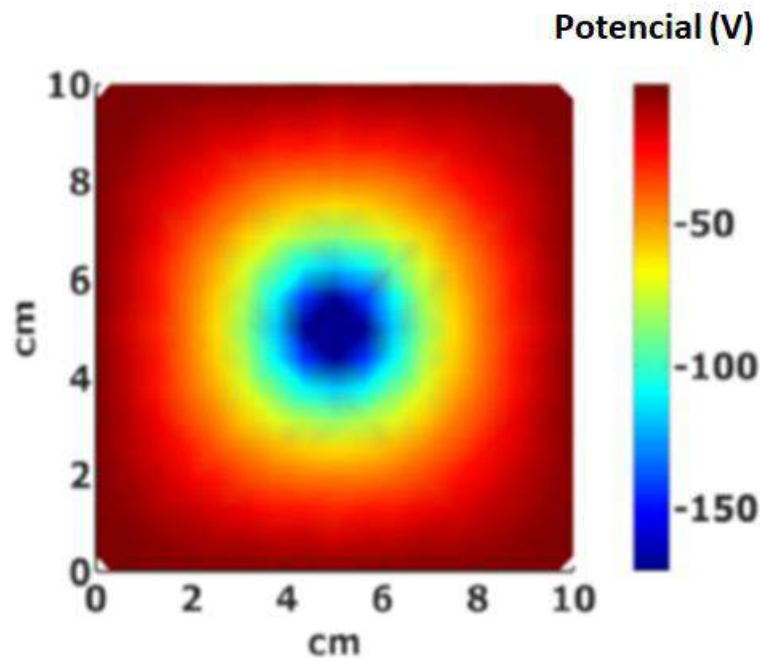


Figura 76 – Potencial no eletrólito usando MSF.



**Problema 5.7** – Considerando um problema semelhante ao anterior onde a fonte é representada por uma função Gaussiana (5.8), com o coeficiente  $\sigma = 1$ . A solução particular é necessária para a solução geral do MEC e MSF, mas para o MLPG2 não é necessária. Os resultados são apresentados com o objetivo de validar a substituição do ponto fonte por uma Função Gaussiana. As Figuras 78, 79, 80 e 81 demonstram os resultados alcançados pelo MEC e MSF através desta substituição. As Figuras 82 e 83 apresentam os resultados para o MLPG2

$$b(x) = P(x'_g) \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{-x'^2_g}{2\sigma^2}}, \quad (5.8)$$

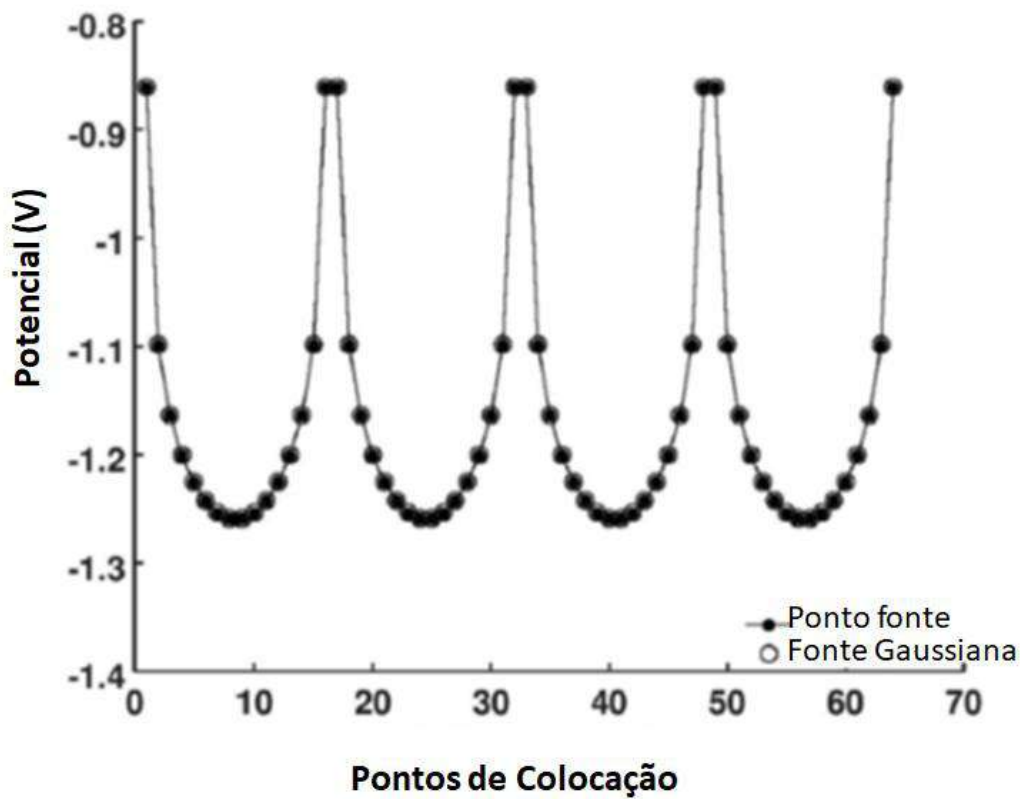


Figura 77 – Potencial distribuído no metal usando o MEC.

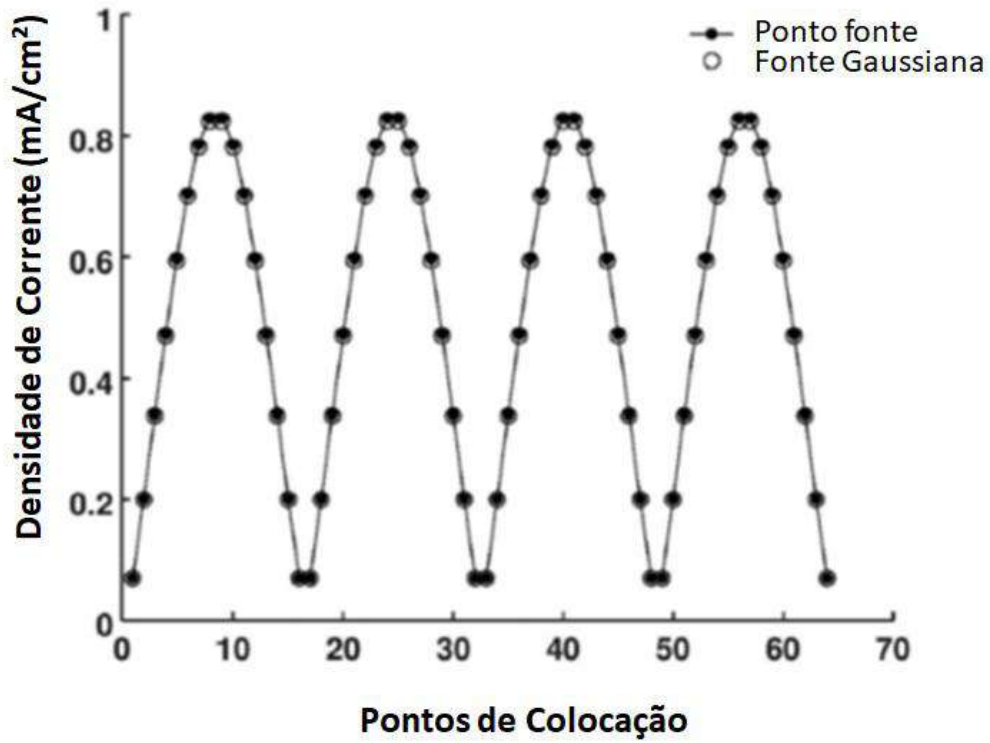


Figura 78 – Densidade de corrente no metal usando MEC.

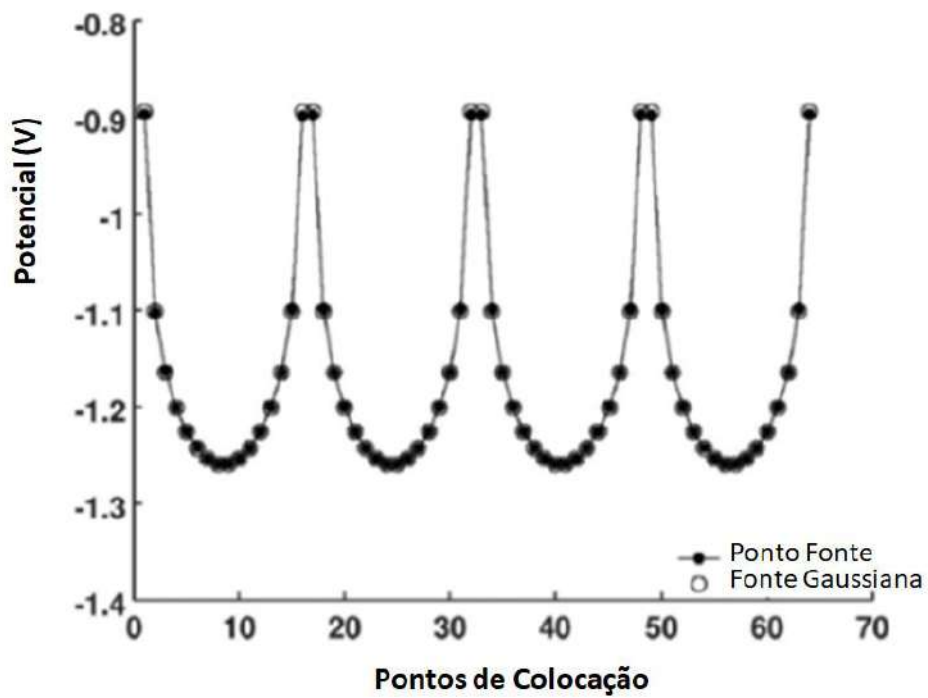


Figura 79 – Distribuição do potencial no metal usando MSF.

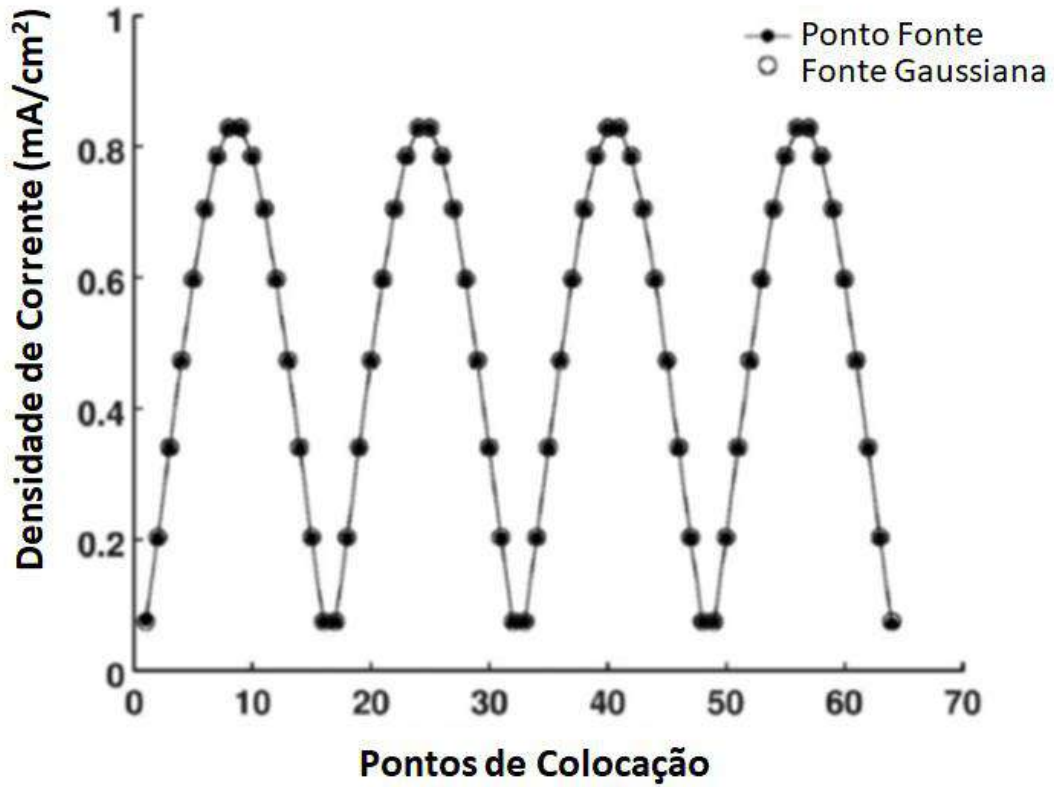


Figura 80 – Densidade de corrente no metal usando MSF.

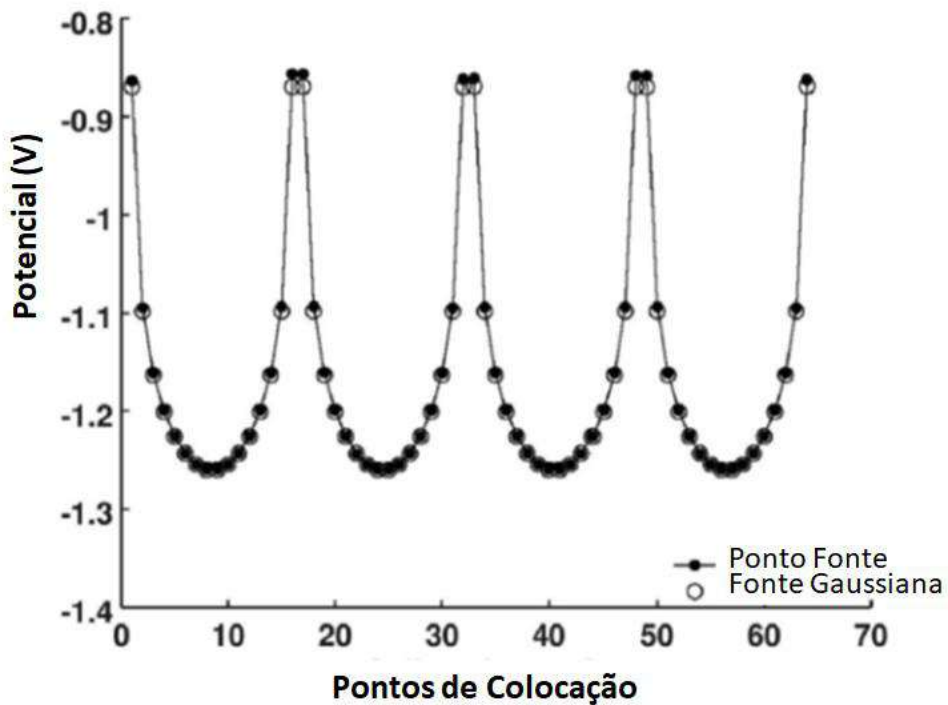


Figura 81 – Distribuição do potencial no metal usando o MLPG2.

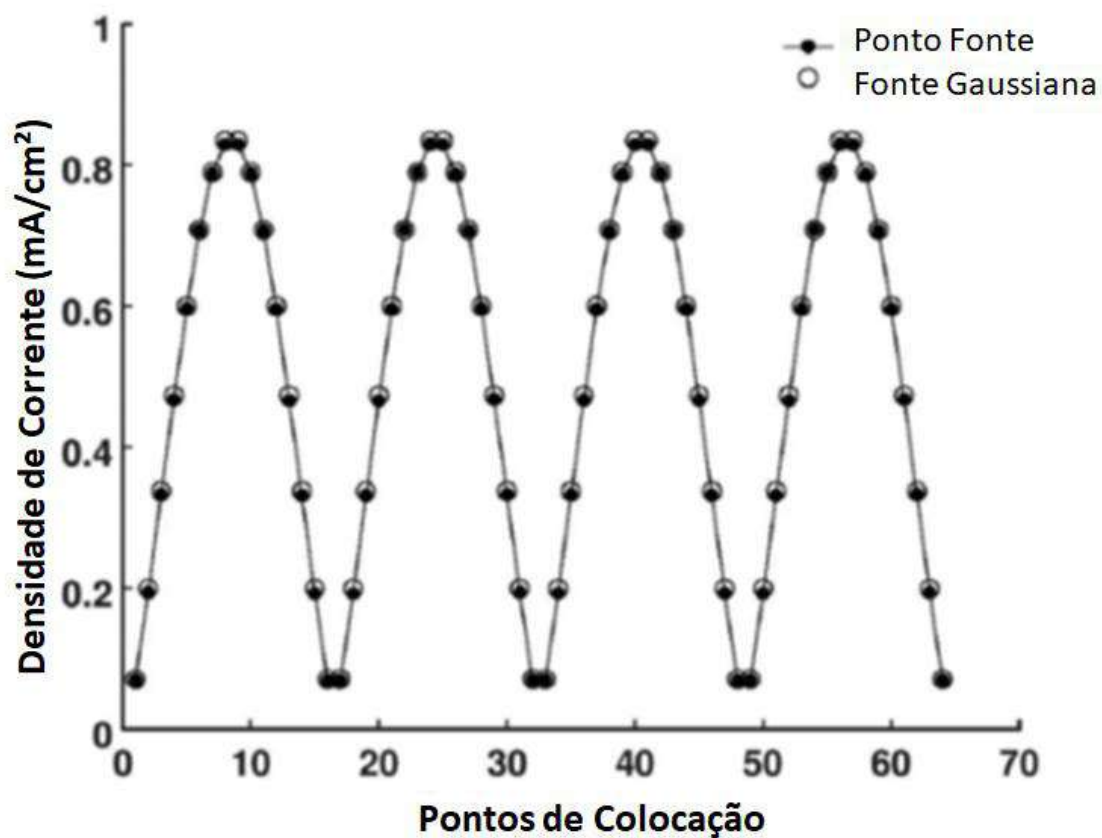


Figura 82 – Densidade de corrente no metal usando o MLPG2.

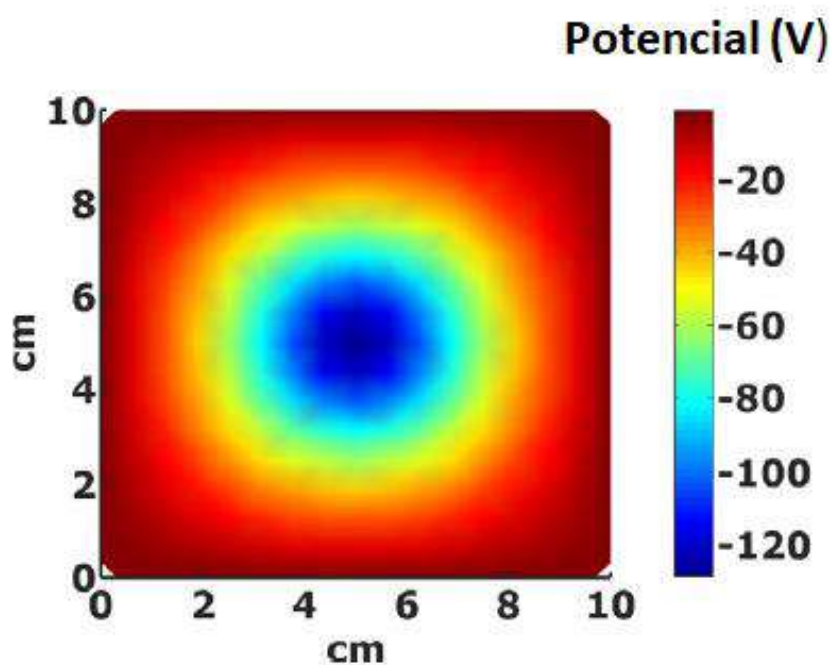


Figura 83 – Potencial no eletrólito usando MEC.

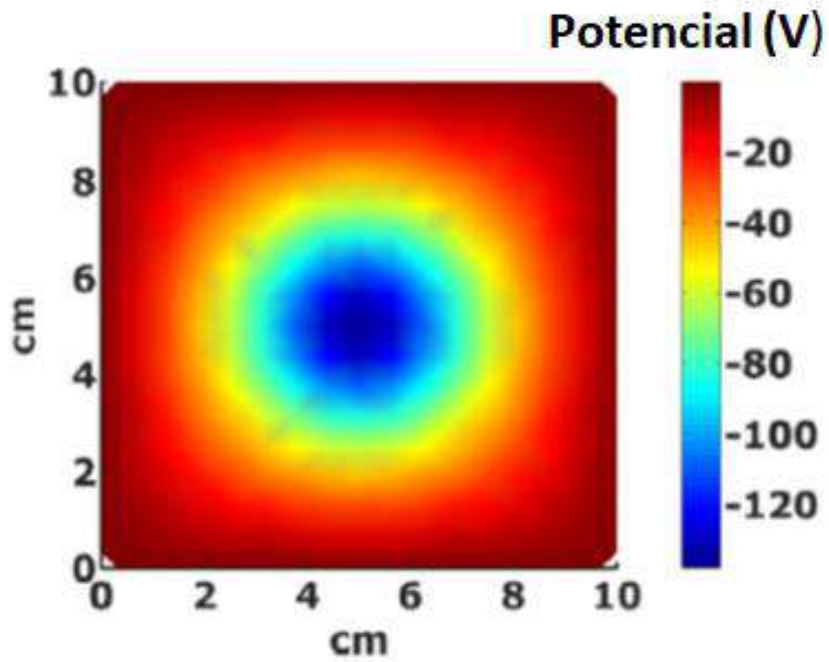


Figura 84 – Potencial no eletrólito suando o MLPG2.

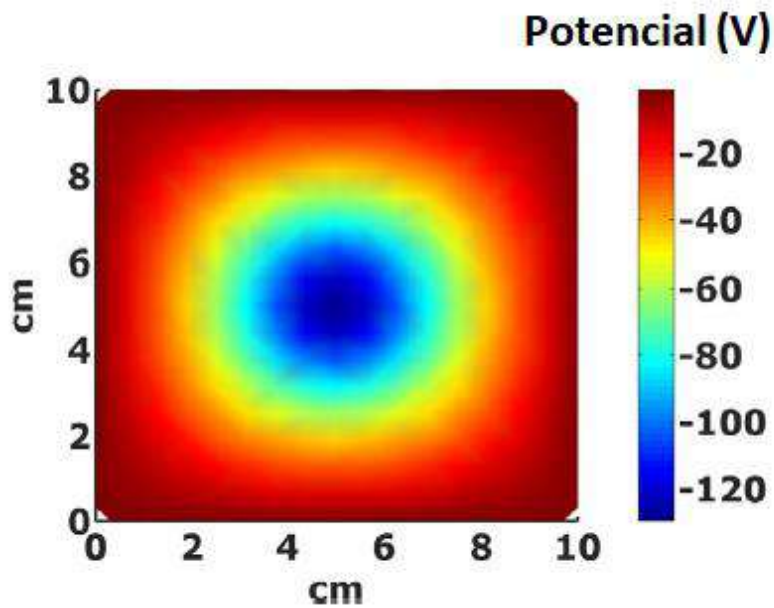


Figura 85 – Potencial no eletrólito usando o MSF.

Figuras 84, 85 e 86 representam o potencial onde não existe singularidade no centro da fonte Gaussiana. Para representar a função Gaussiana  $\sigma < 1$  deve ser adotado.

**Problema 5.8** – Anodos usados como fonte espalhados de forma circular a geometria.

Superfícies circulares concêntricas, de raio 10 cm e 5 cm, são os limites das geometrias deste exemplo. Onde 2 pontos fontes são selecionados para proteger o círculo interno, a curva de polarização adotada Equação 5.7 é usada para determinar as condições de contorno. No outro círculo,  $q = 0 \text{ mA/cm}^2$  são prescritas. O problema é representado usando 170 nós (112+58) ao longo do contorno e 721 pontos no domínio. O número de fontes é 168 (112+56) fontes virtuais com raio ótimo 112,22 cm e 2,94 cm respectivamente.

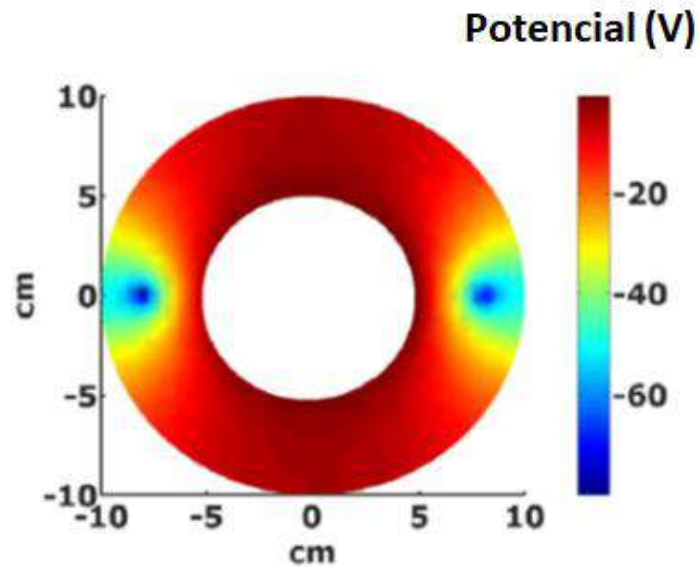


Figura 86 – Potencial no eletrólito usando MEC.

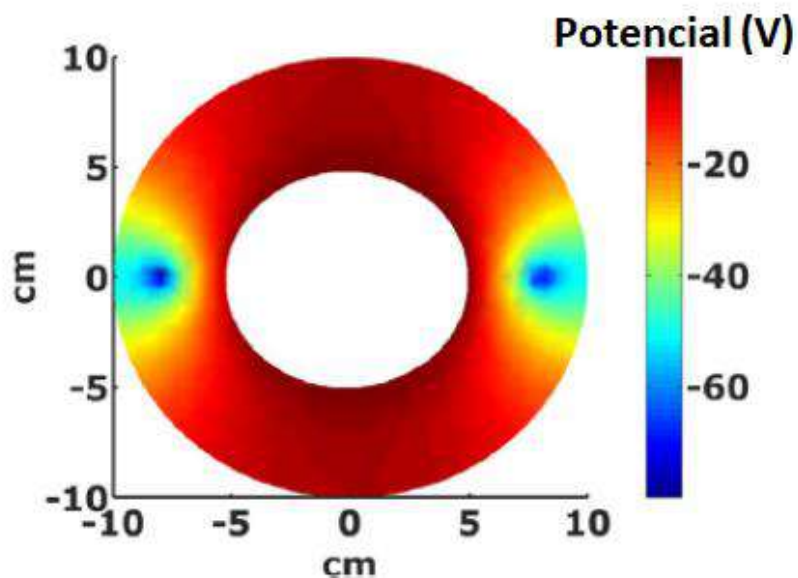


Figura 87 – Potencial no eletrólito usando o MLPG2.

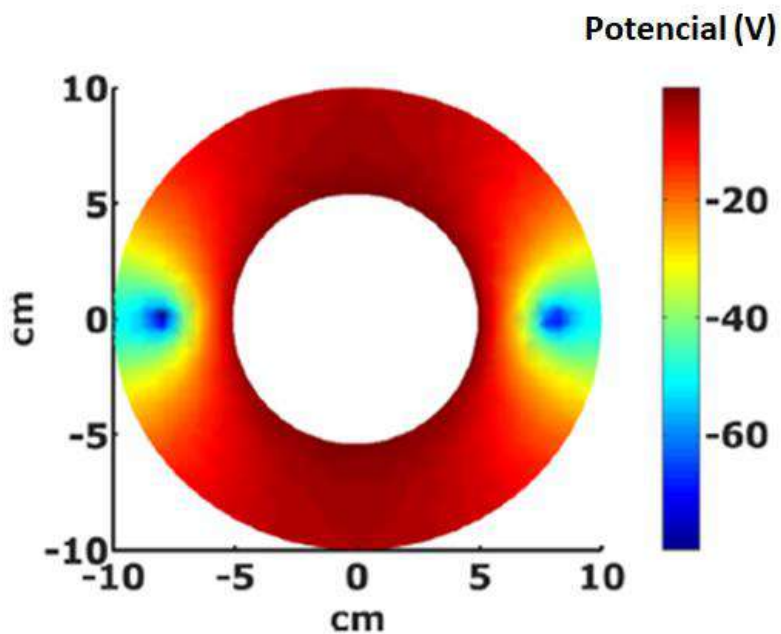


Figura 88 – Potencial no eletrólito usando MSF.

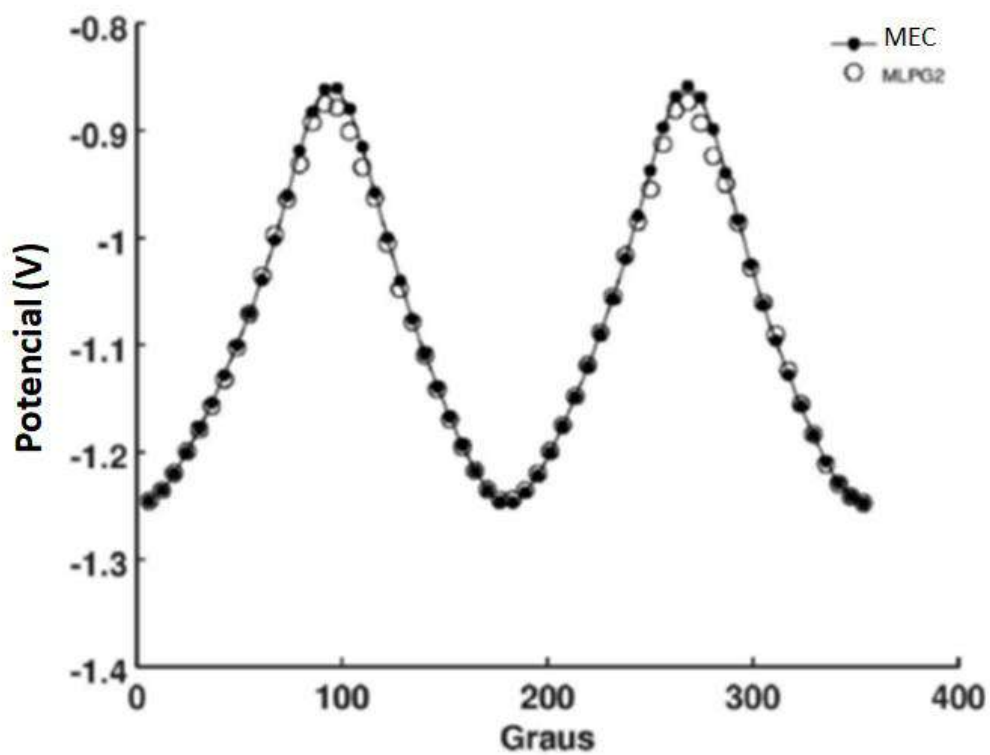


Figura 89 – Distribuição do potencial no metal usando o MEC e o MLPG2.



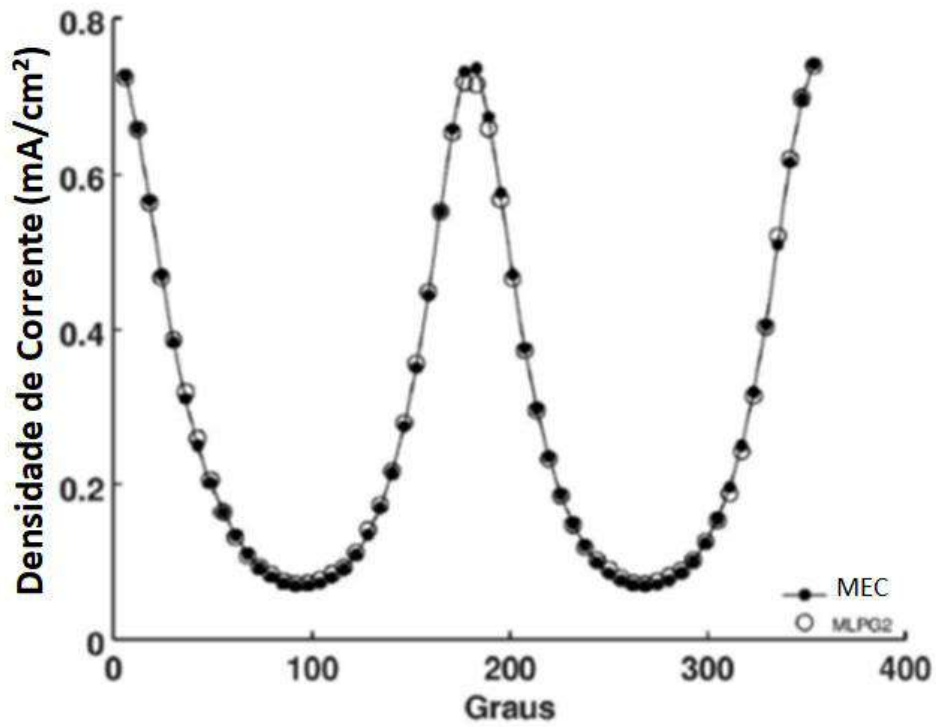


Figura 90 – Densidade de corrente no metal usando o MEC e o MLPG2.

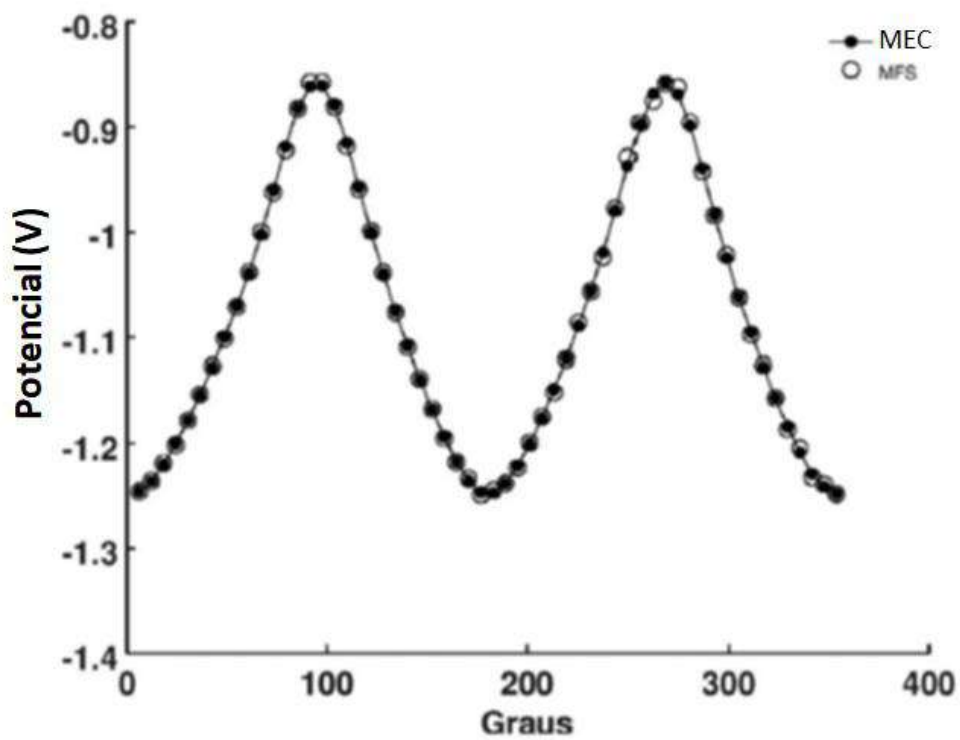


Figura 91 – Distribuição do potencial no metal usando o MEC e o MSF.



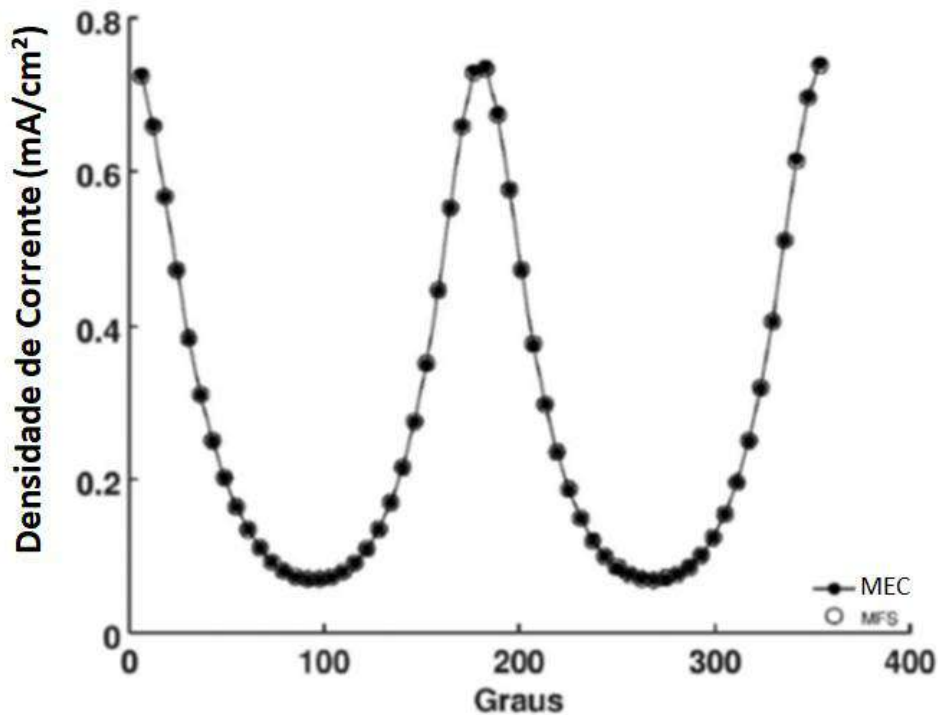


Figura 92 – Densidade de corrente no metal usando MEC e o MSF.

O ponto fonte tem intensidade de  $-4.5mA$ , e estão localizados nas coordenadas  $(-8.0,0.0)$  e  $(8.0,0.0)$ . As Figuras 87, 88 e 89 representam o potencial distribuído sobre o eletrólito usando o MEC, MLPG2 e MSF. A solução usando MEC e MLPG2 são apresentadas nas Figuras 90 e 91, e MSF pode ser observada nas Figuras 92 e 93. Todos os métodos apresentaram resultados similares.

**Problema 5.9** - Esse problema foi feito uma análise em relação a Equação de Poisson, onde o ponto fonte pela função  $p = x + y$ , o domínio do problema é  $2m \times 2m$  e a solução exata é dada pela Equação (5.9),

$$u = -\frac{1}{6} [(x)^3 + 3(y)^3] + 3(x)^2y + 3xy^2, \quad (5.9)$$

As condições de contorno são dadas pelas condições de contorno de Dirichlet em todos os lados do problema, foram feitas comparações entre as funções peso Gaussiana e Spline, além da avaliação da diferença de resultados entre uma base linear e quadrática para a função Spline. Foram usados  $6 \times 6$  pontos de Gauss para a integração numérica. As Figuras 94 e 95 apresentam os resultados obtidos para 81 pontos 32 no contorno e 49 no domínio. Para este problema o erro  $|e|$  é dado pela Equação 5.8

$$|e| = \frac{|u_i - u_{exato}|}{|u_{exato}|} \quad (5.10)$$

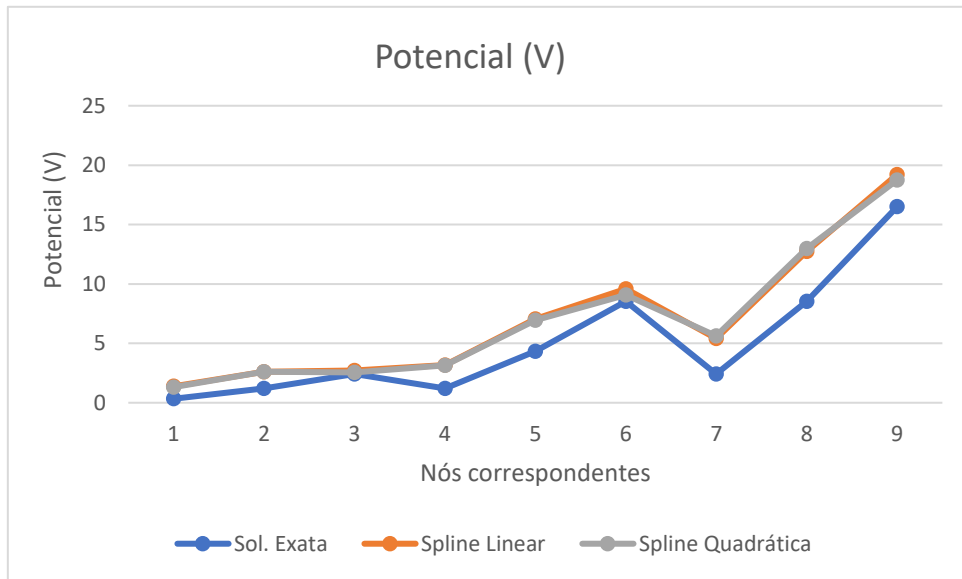


Figura 93 – Valores obtidos para as Bases Linear e Quadrática aplicadas a Spline de Quarta Ordem.

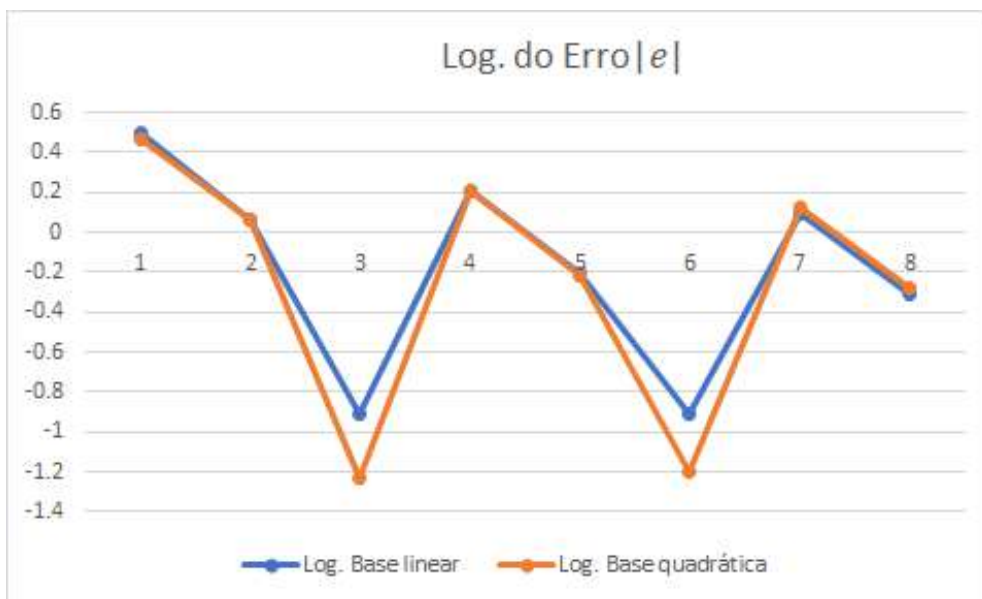


Figura 94 – Erro obtido para as Bases Linear e Quadrática aplicadas a Spline de Quarta Ordem.

As Figuras 96 e 97 apresentam os resultados obtidos para 287 pontos 62 no contorno e 225 no domínio.

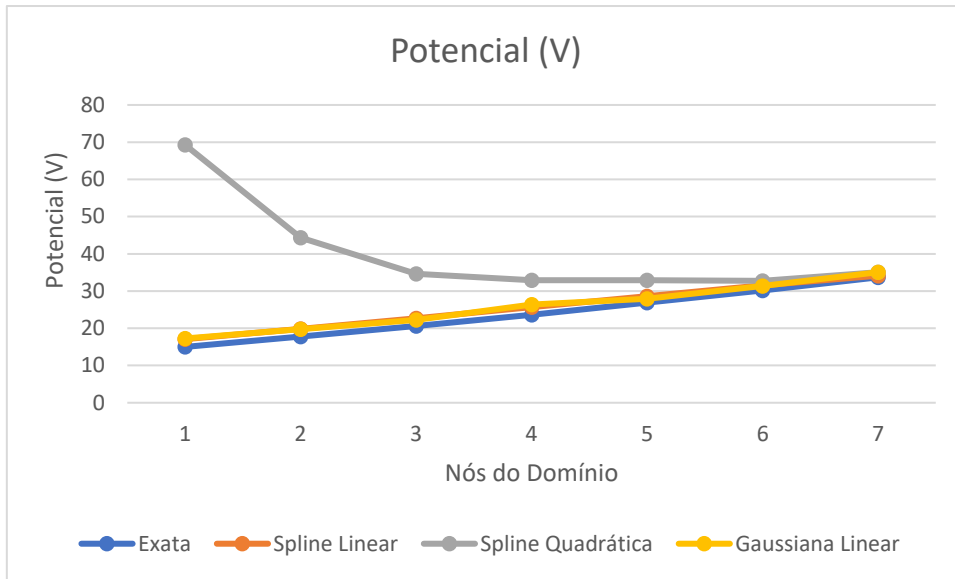


Figura 95- Comparação dos resultados obtidos para as diferentes condições adotadas para a solução.

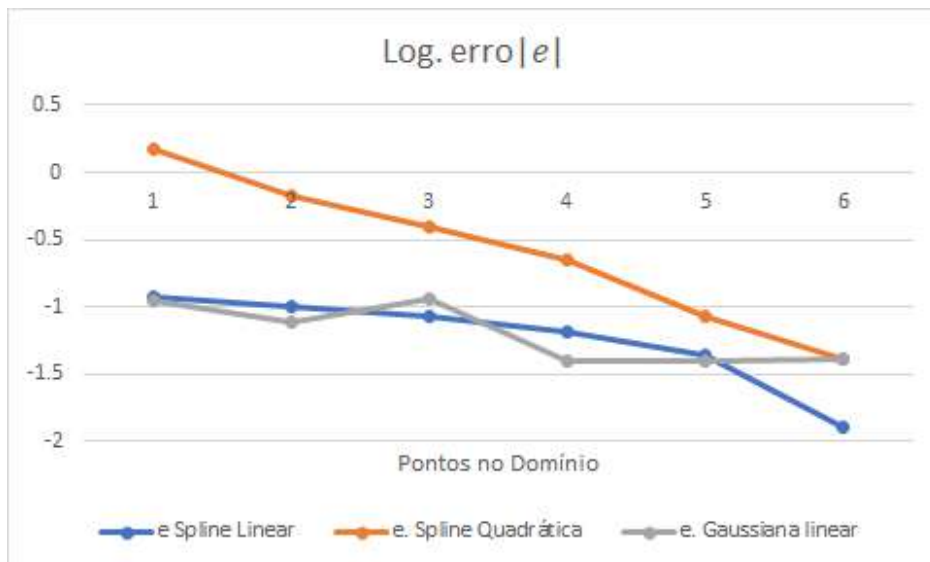


Figura 96 – Erro calculado para as funções Spline Linear e Quadrática e Gaussiana Linear.

**Problema 5.10** - Neste problema, é realizada uma análise inversa para identificar a curva de polarização do fundo de um tanque. A condutividade do eletrólito é igual a  $1.0 \Omega^{-1}cm^{-1}$ . O tanque possui 20 m de raio (R) e sete anodos (fontes em linha) foram

inseridos entre o fundo do tanque e o revestimento, conforme mostrado na Fig. 98. A corrente impressa total é igual a  $-0,35 \text{ A / m}^2$ .

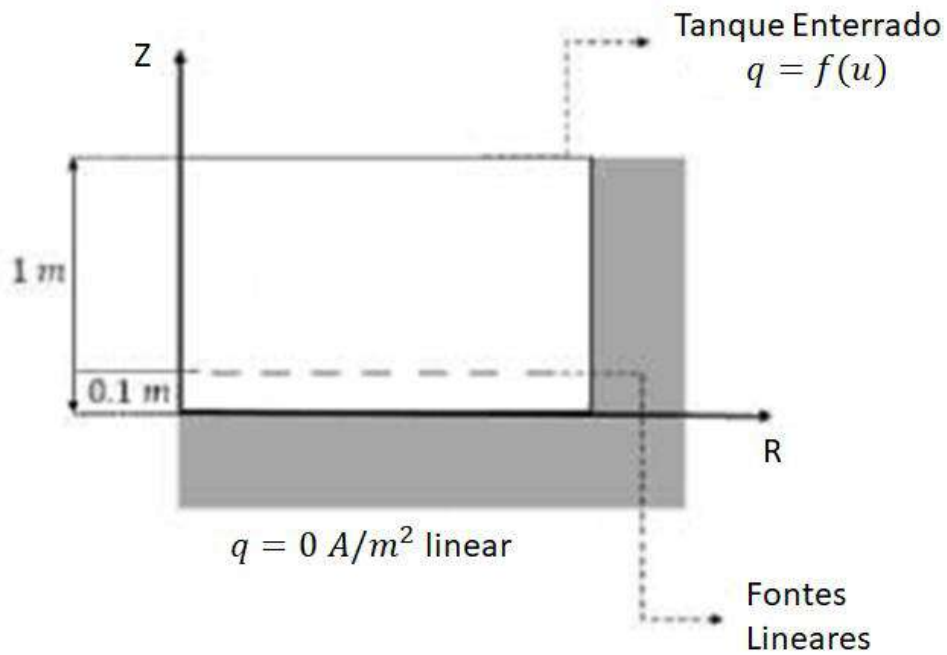


Figura 97 - O problema axissimétrico.

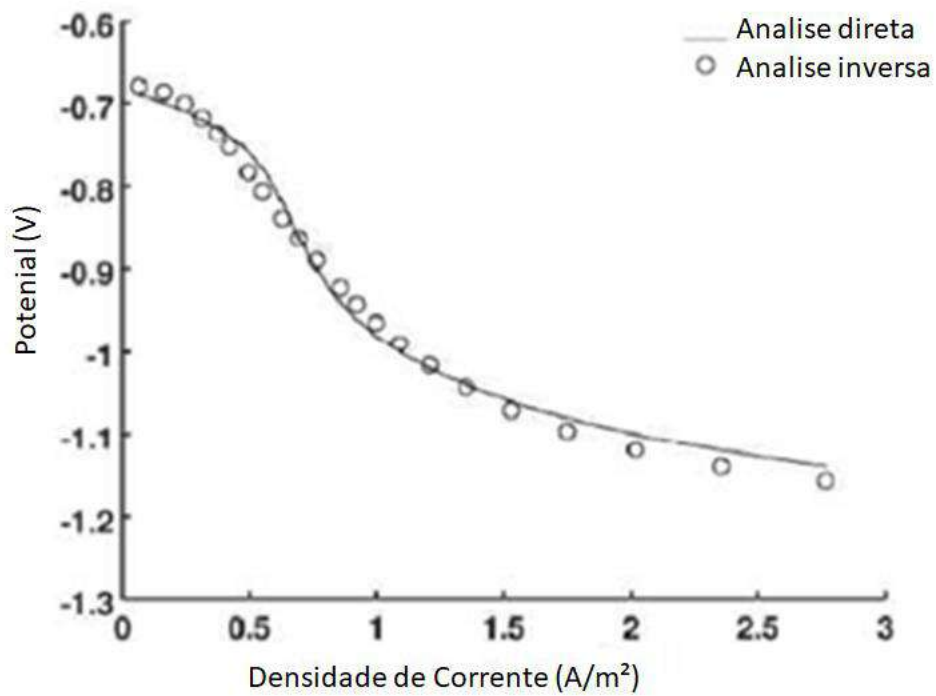


Figura 98 – Curva de polarização.

O problema direto é resolvido usando o MEC com 290 nós de limite. Neste modelo, a solução fundamental axissimétrica da equação de Laplace é aplicada. A curva de polarização Equação 5.9 é, em primeiro lugar, usada para calcular os valores de potencial sobre o fundo do tanque, nas posições  $R = 1,0, 3,0, 5,0, 10,0$  e  $18,0$  m. Os valores potenciais obtidos pelo modelo MEC foram  $-1,225$  V,  $-0,978$  V,  $-0,839$  V,  $-0,738$  V e  $-0,699$  V. Dessa forma, o AG foi utilizado para minimizar a função objetivo Equação 3.74, a fim de obter as variáveis de projeto  $u_{cor}$ ,  $u_e$ ,  $\alpha$  e  $n$ . O intervalo desses parâmetros é assumido como  $[-0,7, -0,1]$ ,  $[-1,5, -0,7]$ ,  $[0,5, 10,0]$  e  $[-2,0, -0,1]$ . Na geração 99<sup>th</sup>, o AG forneceu  $u_{cor} = -0,680$  V,  $u_e = -1,209$  V,  $\alpha = 1,434$  m<sup>2</sup>/A e  $n = -1,922$  ( $Z(c_{99}) = 10^{-4}$ ). A Figura 99 mostra a curva de polarização real e os valores estimados usando os parâmetros ótimos fornecidos pela abordagem proposta. A análise desses resultados confirma claramente que há uma boa concordância entre as duas curvas [42, 45].

$$u = u_{cor} + \frac{u_e - u_{cor}}{(1 + (\alpha q)^n)^{1 - \frac{1}{n}}}, \quad (5.11)$$

## CAPÍTULO 6

### 6.1 CONCLUSÕES

Os métodos propostos apresentaram um desempenho favorável e empregabilidade ao problema da proteção catódica. A versatilidade dos métodos verdadeiramente sem malha ficou evidenciada. O estudo desenvolvido neste trabalho permitiu uma avaliação dos métodos propostos apresentando resultados condizentes com a literatura e outros métodos clássicos aplicados a problemas de potencial governados pela equação de Laplace em especial o problema da proteção catódica.

Uma das etapas mais importantes no processo de interpolação para o MLPG2 conforme pode ser identificado na seção 5 deste trabalho é a escolha da base polinomial adequada, tendo em vista que ela afeta de forma significativa os resultados propostos para cada situação. Sendo interessante em alguns casos usar um conjunto destas funções alcançando solução mais precisas em determinadas aplicações.

Para o MLPG1 os polinômios da base afetam menos os resultados, mas ainda assim devem ser avaliadas. No caso particular do MLPG1, o aumento do número de pontos de Gauss utilizados na integração numérica e o refino da malha foram comparados, observando que a partir de uma certa quantidade de pontos de Gauss a melhoria no resultado se torna muito pequena ou inexistente.

Um ponto extremamente importante a ser avaliado é a integração numérica, uma vez que, afeta de forma significativa tanto os resultados quanto o desempenho computacional do MLPG1 em especial. Neste trabalho foi desenvolvido um estudo conforme apresentado na seção 5 onde o posicionamento dos pontos de Gauss foi avaliado, e desta forma permitindo uma generalização do método para as mais variadas geometrias.

O acoplamento com algoritmo genético se mostrou eficiente trazendo resultados precisos e de qualidade para os problemas da proteção catódica onde as condições de contorno são dadas em condições muito específicas dependente da curva de polarização para cada aplicação em particular.

## 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Os métodos sem malha testados neste trabalho apresentaram um resultado satisfatório quando aplicados a proteção catódica. Em especial o MLPG deve ser testado em outros problemas de engenharia para confirmar sua eficiência nas mais diversas situações.

Ainda quando empregado a proteção catódica o MLPG1 e o MLPG2 devem ser implementados e aplicados a problemas heterogêneos com variação da condutividade do eletrólito ponto a ponto. Para problemas homogêneos e infinitos o MEC ainda permanece imbatível. Mas com domínios limitados e heterogêneos o MLPG1 pode ser uma opção interessante.

Implementar e aplicar outros métodos verdadeiramente sem malha a problemas da proteção catódica, em especial os MLPG4 e MLPG5. Conforme pode ser encontrado na vasta literatura [17, 32, 33, 34] esses métodos devem apresentar uma opção interessante com resultados precisos aos problemas da proteção catódica. Segundo Atluri e Shen o MLPG5 apresenta precisão, e desempenho interessantes para talvez algum dia substituir o MEF.

Além disso o acoplamento entre métodos deve ser considerado para problemas localmente heterogêneos, ou com problemas locais como por exemplo a propagação de trincas. Outra avaliação importante a se fazer seria a confecção de um refino local para avaliar pontos de interesse. Acrescentando uma nuvem mais densa de pontos em pontos de interesses específicos.

Os métodos sem malha vêm apresentando resultados interessantes em diversas áreas do conhecimento e aumentando significativamente o interesse de pesquisadores em aplicar os mesmos. Ainda necessitam ser avaliados e testados, mas podem ser muito importantes para tornarem os programas hoje utilizados para resolução de equações diferenciais ainda mais eficientes e precisos, permitindo resoluções ainda melhores para os mais diversos tipos de problemas. Desta forma deixar o mundo acadêmico e permitir que se tornem um padrão industrial.

## CAPÍTULO 7

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Fontana, M. G., Corrosion Engineering. McGraw-Hill: New York, 1967.
- [2] Gentil, V., Corrosão. LTC, 5ª edição: Rio de Janeiro, Brasil, 2007.
- [3] W. von Baeckmann, W. Schwenk, e W.Prinz, "Handbook of Cathodic Corrosion Protection." Elsevier Science. USA, 1997.
- [4] Santiago, J. A. F., "Simulação Estática e Dinâmica de Sistemas de Proteção Catódica com o Método dos Elementos de Contorno", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1991.
- [5] Fu JW . A finite element analysis of corrosion cells. Corrosion/NACE 1982;38(5):9–12 .
- [6] Montoya, R., Rendon, O., and J. Genesca, "Mathematical simulation of cathodic protection system by finite element method", Materials and Corrosion, **56**, 404-411 (2005).
- [7] Kim YS, Kim J, Choi D, Lim JY, Kim JG. "Optimizing the sacrificial an- ode cathodic protection of the rail canal structure in seawater using the boundary element method". Eng Anal Bound Elem 2017;77: 36–48.
- [8] Miltiadou, P. e Wrobel, L. C., "A BEM- based genetic algorithm for identification of polarization curves in cathodic protection systems." International Journal for Numerical Methods in Engineering: v. 54, pp. 159-174, 2002.
- [9] Santos, W. J., Santiago, J. A. F., Telles, J. C. F., Optimization of cathodic protection systems combining genetic algorithms and the method of fundamental solutions". In: Proceedings of the International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques, pp. 426-431, Paris, 2013.
- [10] Santos, W. J., Brasil, S. L. D. C., Santiago, J. A. F. and Telles, J. C. F., "A new solution technique for cathodic protection systems with homogeneous region by



- the boundary element method”, *European Journal of Computational Mechanics*, **1**, 1-15 (2018).
- [11] Santos, W. J., *Análise de sistemas otimizados de proteção catódica usando métodos numéricos dependentes da função de Green*, tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2015.
- [12] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z., “The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals.” 6<sup>a</sup> ed, Elsevier, 2005.
- [13] Monaghan, J., J., “Smoothed particle hydrodynamics”, Department of mathematics, Monash University, Clayton, Victória 3168, *Annu. Rev. Astron. Astrophys, Australia*, v. 30, 543-74, 1992.
- [14] Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, P., “Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements”, *Comput. Mech.*, v.10, pp 307-318, 1992.
- [15] Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu., “Element-Free Galerkin Methods”, *Journal for Numerical Methods in engineering*, v.37, pp. 229-259, 1994.
- [16] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., Krysl, P., “Meshless Methods: An Overview and Recent Developments”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, pp. 3-47, 1996.
- [17] Liu, G.R., “Mesh free methods Moving beyond the Finite Element Method”. CRC Press, 2<sup>a</sup> ed, Boca Roca, 2010.
- [18] Miers L. S., “Formulação não convencionais de métodos tipo meshless baseados na equação integral do contorno”, Ph.D. Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.
- [19] Fontes, E. F., “Técnicas avançadas em métodos verdadeiramente sem malha com Aplicação em problemas de elasticidade e mecânica da fratura via superposição da função de Green Numérica”, Ph.D. Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2014.

- [20] Konda, D.H., "Análise de flexão de placas espessas através de métodos sem malhas com a utilização de uma técnica eficiente de integração." Ph.D. Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2018.
- [21] Konda, D. H., Santiago, J. A. F., J. Telles, C. F., Mello, J. P. F. and Costa, E. G. A., "A meshless reissner plate bending procedure using local radial point interpolation with an efficient integration scheme, Engineering Analysis with Boundary Elements, 99, 46-59 (2019).
- [22] Koch G, Varney J, Thompson N, Moghissi O, Gould M, Payer J." International measures of prevention, application and economics of corrosion technologies study." NACE International, Houston, TX: NACE International IMAPCT Report; 2016.
- [23] Cicek, V., Cathodic Protection: Industrial Solutions for Protecting Against Corrosion, John Wiley & Sons Inc, New York, United States (2013).
- [24] Roperge, P. R., "Corrosion Engineering Principles and Practice". Mc Graw Hill, USA, 2008.
- [25] Dutra, A. C e Nunes, L. de P., "Proteção Catódica Técnica de Combate a Corrosão". Editora Interciência Ltda. Rio de Janeiro, 2006.
- [26] Santiago, J. A. F. and Telles, J. C. F. "On Boundary Elements for Simulation of Cathodic Protection Systems with Dynamic Polarization Curves, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40, 2611-2622 (1997).
- [27] Santiago, J. A. F. and Telles, J. C. F., "A solution technique for cathodic protection with dynamic boundary conditions by the boundary element method." Advances in Engineering Software, 30, 663-671, 1999.
- [28] Nisancioglu. K., "Predicting the time dependence of polarization on Cathodically Protected steel in Seawater", Corrosion/87, vol. 43, Nº 2, pp. 100, National Association of Corrosion Engineers, Houston, Texas, USA (1987).
- [29] Boyce, W. E. e DiPrima, R. C., "Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno" LTC: Rio de Janeiro, 1999.
- [30] Brebbia, C. A., "The birth of the boundary element method from conception to application", Engineering Analysis with Boundary Elements, 77, iii-x (2017).

- [31] Liu, G.R. e Gu, Y.T., "An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming". Springer: Netherlands, 2005.
- [32] Atluri, S. N., Shen, S., "The basis of meshless domain discretization: the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method." *Advances in Computational Mathematics*, v 23, 73-93, 2005.
- [33] Atluri, S.N., Shen, S., "The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite and Boundary Element Methods", *CMES*, v. 3, nº 1, pp. 11-51, 2002.
- [34] Atluri, S. N., Zhu, t., "A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics", *Computational Mechanics*, v. 22, pp. 117-127, 1998.
- [35] Brebbia, C.A., "The boundary elemento method for engineers." Pentech Press, London, 1978.
- [36] Brebbia, C.A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C., "Boundary Elements Techniques: Theory and Applications in Engineering". Springer-Verlag: New York, 1984.
- [37] Burden, R. L. e Faires, J. Douglas., "Análise Numérica". Cengage Learning: São Paulo 2015.
- [38] Santos, W. J., Santiago, J. A. F., Telles, J. C. F., "Optimal positioning of anodes and virtual sources in the design of cathodic protection systems using the method of fundamental solutions", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 46, n. 1, pp. 67-74, 2014.
- [39] Santos, W. J. Santiago, J. A. F. and Telles, J. C. F., "Using the Gaussian function to simulate constant potential anodes in multiobjective optimization of cathodic protection systems." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **73**, 35-41 (2016).
- [40] Velten, S.B., Santos, W.J., Brasil, S.L.D.C., Santiago, J.A.F., Telles, J.C.F., "A study of meshless methods for optimization of cathodic protection." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 107, pp.233-242, 2019.

- [41] Vinh Phu Nguyen, Timon Rabczuk, Stéphane Bordas, Marc Duflot : Meshless Methods: A Review and computer implementation aspects, *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 79, pp. 763-813, 2008.
- [42] Genuchten, M. T. van “A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils.” *Soil Science Society of America Journal*, **44**, 892-898 (1980).
- [43] Michalewicz, Z., “Genetic Algorithms + Data Structures” = Evolution Programs, Springer-Verlag (1996).
- [44] Santos, W. J., Santiago, J. A. F. and Telles, J. C. F., “An Application of Genetic Algorithms and the Method of Fundamental Solutions to Simulate Cathodic Protection Systems”. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **87**, 23-40 (2012).
- [45] Velten, S.B., Santos, W.J., Brasil, S.L.D.C., Santiago, J.A.F., Telles, J.C.F.,” A Comparative study of alternative numerical procedures for optimization of cathodic protection design including direct and inverse problems.” *Advances in Boundary Element and Meshless Techniques XX*, Ec Ltd, UK, 2019.
- [46] Costa, E.G.A.,”Aplicação dos elementos de contorno e das soluções fundamentais usando funções de green para problemas acústicos.” Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2013.
- [47] Fontes, E. F., Santiago, J. A. F. and Telles, J. C. F., “An iterative coupling between meshless methods to solve embedded crack problems.” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **55**, 52-57 (2015).
- [48] Dolbow, J. & Belytschko, T., “An introduction to programming the meshless Element Free Galerkin method”. *Computational Methods in Engineering*, Volume 5, pp. 207-241.1998.
- [49] Atluri, S. N., Sladek, J.,Sladek, V., Zhu, T.,“The local boundary integral equation (LBIE) and it’s meshless implementation for linear elasticity”, *Computational Mechanics*, v. 25, pp.180-198, 2000.

- [50] Atluri, S.N., Kim, H.G., Cho, J.Y., "A critical assessment of the truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) methods." *Computational Mechanics*, 24, 348-372, Springer-Verlag, 1999.
- [51] Atluri, S. N., Zhu, t., "The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics." *Computational Mechanics*, 25, 169-179 (2000).
- [52] Sladek, J., Stanak, P., Han, Z-D., Sladek, V., Atluri, S.N., "Applications of the MLPG Method in engineering & Sciences: A Review." *CMES*, v.92, pp.423-475, 2013.
- [53] Soares, D., Sladek, V. & Sladek, J., "Modified meshless local PetrovGalerkin Formulations for Elastodynamics". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(12), pp. 1508-1828. 2012.
- [54] Mazzia, A., Forronato, M., Pini, G., Gambolati, G., "A comparison of numerical integration rules for the meshless local Petrov-Galerkin method". *Numerical Algorithms*, 45(1-4), 61-74, 2007.
- [55] Mazzia, A., Pini, G., "Product Gauss quadrature rules vs. Cubature rules in the meshless local Petrov-Galerkin Method". *Journal of Complexity*, 26, 82-101, 2010.
- [56] Liden, R. *Algoritmos Genéticos – Uma Importante Ferramenta da Inteligência Computacional*. 2ª ed. Rio de Janeiro-RJ: Editora Brasport, 2008.
- [57] Takahashi, R.H.C.; Martins, F.V.C. *Avaliação e Interpretação do Operador AG no Algoritmo Genético Real-Polarizado*. Anais: XXXVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. São João del-Rei-MG: UFSJ, 2004.
- [58] S. De, K.J. Bathe., "The method of finite spheres." *Computational Mechanics*, 25, 329-345, Springer-Verlag, 2000.
- [59] Melenk, J. M. & Babuska, I., "The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications." *Seminar für Angewandte Mathematik*. 1996.
- [60] Kupradze, V. D. and Aleksidze, M. A., "Aproximate method of solving certain boundary-value problems". *Soobshch akad nauk Gruz SSR*, **30**, 529-536 (1963).

- [61] Brasil, S. L. D. C., Telles, J. C. F. and Miranda, L. R. M., "On the effect of some critical parameters in cathodic protection systems: A numerical/experimental study", *Computer Modeling in Corrosion*, ASTM STP 1154, R.S. Munn Ed., American Society for Testing and Materials, **380**, 277-291 (1991).
- [62] Fleck, R. N., "Numerical evaluation of current distribution in electrical systems", Master's thesis, University of California (Sept 1964).
- [63] Telles, J. C. F., Santiago, J. A. F., Brasil, S. L. D.C', et al., "Avaliação da Proteção Catódica de Estruturas Metálicas por Simulação Numérica". In: Segundo Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás, Rio de Janeiro, 2003.
- [64] Doig, P. and P. E. J. "Flewitt A finite difference numerical analysis of galvanic corrosion for semi-infinite linear coplanar electrodes", *Journal of the Electrochemical Society*, **12**, 2057-2063 (1979).
- [65] Aoki, Shigeru e Amaya, Kenji., "Optimization of cathodic protection system by BEM". *Engineering Analysis with Boundary Elements* v. 19, pp. 147-156, 1997.
- [66] Garbow B.S, Hillstrom K.E, Moré J.J. MINPACK project. Argonne, Illinois, USA: Argonne National Laboratory; 1980.
- [67] Soares Jr, D., Telles, J.C.F., Mansur, W.J., "Boundary elements with equilibrium satisfaction – a consistent formulation for dynamic problems considering non-linear effects." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65, 701-713, 2006.
- [68] Telles, J. C. F., Mansur, W. J., Wrobel, L. C. and Marinho, M. G., "Marinho Numerical Simulation of a Cathodically Protected Semisubmersible Platform using PROCAT System", *Corrosion*, **46**, 513-518 (1990).
- [69] Azevedo, J.P.S. and Wrobel, L.C., "Non-linear heat conduction in composite bodies: a boundary element formulation". *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, 19-38, 1988.