

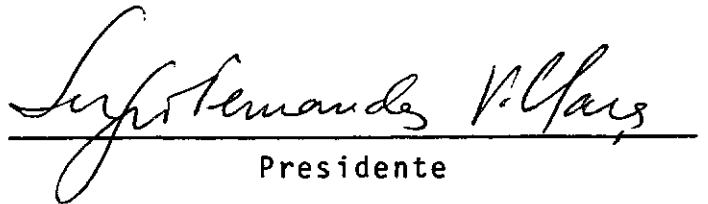
ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS SANDWICH COMPRIMIDAS

SIMPLESMENTE APOIADAS

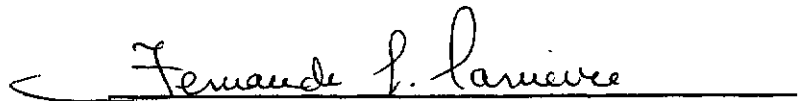
ROBERTO FERNANDES DE OLIVEIRA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:


Presidente





RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
FEVEREIRO DE 1972

A meus pais.

A Titose, pelo apoio
e estímulo nas horas
menos fáceis.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor SERGIO FERNANDES VILLAÇA, pela valiosa e dedicada orientação.

A CAPES, CNPq e BNDE pelo apoio financeiro prestado.

A WANDA F. ROCHA, pela confecção gráfica d^este trabalho.

S U M Á R I O

O presente trabalho aborda a determinação e a análise das equações das vibrações transversais de placas sandwich retangulares, simplesmente apoiadas e uniformemente comprimidas no seu plano médio, bem como o cálculo das cargas críticas de instabilidade, por um processo dinâmico.

As equações das vibrações da placa sandwich foram obtidas extremando a expressão da ação da mesma.

São apresentados gráficos e tabelas fornecendo a variação das frequências naturais de vibração e da carga de instabilidade, com a rigidez ao cisalhamento da placa sandwich. É elaborado também, para uma dada placa, um gráfico do comportamento da carga de instabilidade com o modo de vibração. Tal gráfico apresenta o modo de vibração no qual a carga crítica de instabilidade é mínima.

S U M M A R Y

The scope of this dissertation is the analysis of the dynamical behavior of sandwich plates. We have considered only simply supported rectangular plates under a compressive uniform load acting in the middle plane. The dynamical instability was also analyzed.

The equations of motion were obtained through a variational approach.

The changes in the natural frequencies and stability loads were analyzed according to the variations of the shear stiffness of the plate. The results were plotted and are included in this dissertation. It was also plotted a curve connecting the vibration modes with the critical loads. Through this curve it was possible to find out the smallest value for the critical load.

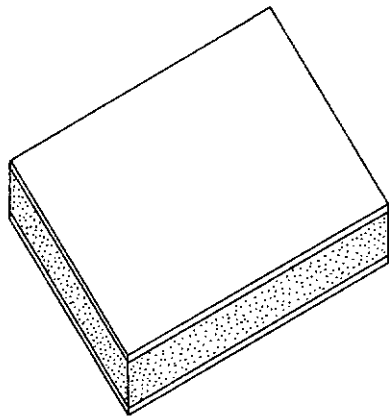
I N D I C E

Capítulos:	Páginas:
INTRODUÇÃO	1
I EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE UMA PLACA SANDWICH	3
II ENERGIA POTENCIAL TOTAL DA PLACA SANDWICH ..	18
III EQUAÇÃO DE OSTROGRADSKI	28
IV EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO DE UMA PLACA SANDWICH	45
V CARGAS CRÍTICAS E FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DE UMA PLACA SANDWICH RETANGULAR SIMPLESMEN TE APOIADA	55
VI TABELAS E GRÁFICOS	66
VII CONCLUSÕES	76
TABELAS	79
GRÁFICOS	81
NOTAÇÕES	86
BIBLIOGRAFIA	91

INTRODUÇÃO

Nêste trabalho denominaremos placa sandwich ao elemento estrutural plano constituído por duas lâminas finas de material resistente, separadas por uma camada espêssa constituída de um material leve e menos resistente.

As duas lâminas resistentes são chamadas faces, e a camada espêssa é chamada núcleo do sandwich.



O núcleo tem diversas funções vitais: deve ser suficientemente rígrado na direção ortogonal às faces para assegurar que elas permaneçam separadas a distância correta; deve ser suficientemente rígrado ao cisalhamento para assegurar que quando o sandwich é deformado, as faces não escorregam em relação à outra. Se esta última condição não fôr satis

feita, as faces simplesmente se comportam como duas placas independentes, e o efeito sandwich fica perdido.

Se o núcleo possuir uma certa resistência, ele contribuirá para a rigidez à flexão do sandwich. Por outro lado, essa contribuição é pequena no caso de núcleos com pouca resistência. Como tais núcleos são usualmente empregados, é um expediente muito frequente ignorar tal contribuição, e isso leva a considerável simplificação na análise de tensões e deflexões.

CAPÍTULO IEQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE UMA PLACA SANDWICH

Para dedução das equações diferenciais que regem o fenômeno da flexão das placas sandwich, consideraremos as seguintes hipóteses básicas, além daquelas da Resistência dos Materiais:

- 1a.) O núcleo tem rigidez transversal infinita e nele não atuam tensões normais paralelas ao plano médio da placa.
- 2a.) As faces são consideradas membranas e têm a mesma espessura.
- 3a.) A placa é ortótropa e os eixos x e y são os eixos principais de ortotropia.
- 4a.) O peso próprio da placa não será considerado.

Seja o elemento infinitesimal de placa sandwich da Fig. 1.1, o qual será desenhado duas vezes para facilitar a visualização dos esforços atuantes. Consideraremos nesse elemento todos os esforços que podem agir sobre a placa, com

exceção dos momentos situados no plano mēdio da mesma.

Na figura consideramos $N_{xy} = N_{yx}$ e $M_{xy} = M_{yx}$ (PLAN TEMA¹⁰).

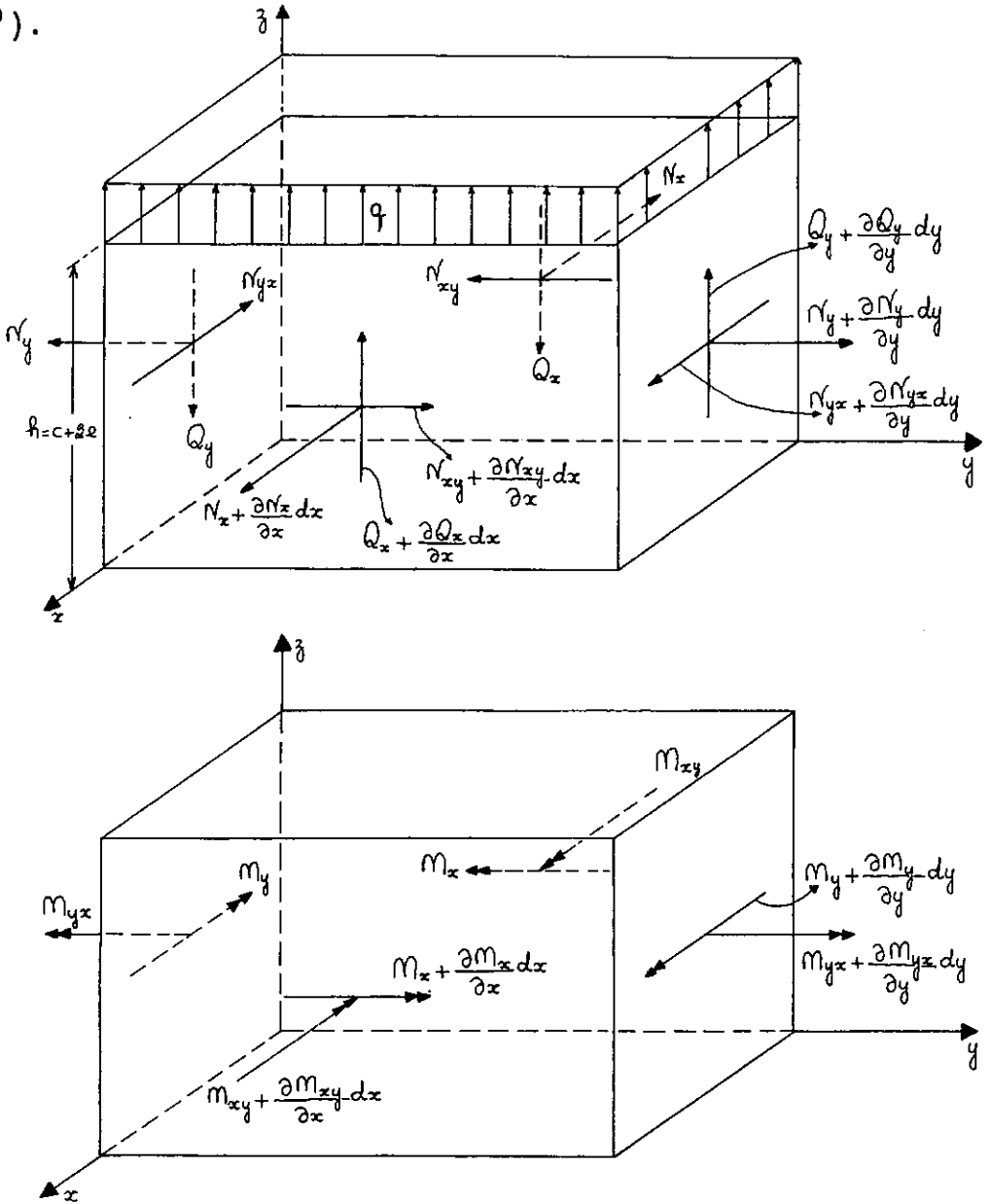


FIGURA 1.1

As propriedades físicas de uma placa ortótropa po dem ser descritas pelas seguintes constantes físicas (PLAN

TEMA¹⁰):

rigidez à flexão na direção x :

$$B_x = \frac{M_x}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} \quad (1.1a)$$

coeficiente de Poisson:

$$\nu_x = - \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} \quad (1.1b)$$

definidas quando somente M_x estiver agindo.

rigidez à flexão na direção y :

$$B_y = \frac{M_y}{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \quad (1.1c)$$

coeficiente de Poisson:

$$\nu_y = - \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \quad (1.1d)$$

definidas quando somente M_y estiver agindo.

rigidez à torção:

$$T = \frac{2 M_{xy}}{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}} \quad (1.1e)$$

definida quando M_{yx} e M_{xy} estiverem agindo.

rigidez ao cisalhamento na direção x :

$$S_x = \frac{Q_x}{\gamma_x} \quad (1.1f)$$

rigidez ao cisalhamento na direção y :

$$S_y = \frac{Q_y}{\gamma_y} \quad (1.1g)$$

respectivamente definidas quando sōmente Q_x e Q_y estiverem atuando.

Antes de aplicar as equações da Estática ao elemento acima, vamos calcular as curvaturas e torção do mesmo. A curvatura na direção x é obtida somando-se as contribuições de M_x , M_y e Q_x :

curvatura provocado por M_x

$$\frac{M_x}{B_x} \quad \text{de (1.1a).}$$

curvatura provocada por M_y

$$-\nu_y \frac{M_y}{B_y} \quad \text{de (1.1c) e (1.1d).}$$

curvatura provocada por Q_x

Temos que $\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 w_{\Delta x}}{\partial x^2}$ (PLANTEMA¹⁰). Como somente Q_x está atuando, segue que $\frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2} = 0$. Logo, $w = w_{bx} + w_{\Delta x}$ a carreta

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{\Delta x}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_{\Delta x}}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}.$$

Portanto, de (1.1f) segue que a curvatura provocada por Q_x é:

$$\frac{1}{S_x} \cdot \frac{\partial Q_x}{\partial x}.$$

A soma dessas três parcelas nos dá:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_x}{B_x} - \nu_y \frac{M_y}{B_y} + \frac{1}{S_x} \cdot \frac{\partial Q_x}{\partial x}. \quad (1.2)$$

De um modo análogo obtemos a curvatura do elemento na direção y :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{M_y}{B_y} - \nu_x \frac{M_x}{B_x} + \frac{1}{S_y} \cdot \frac{\partial Q_y}{\partial y}. \quad (1.3)$$

Para se calcular a torção $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, consideremos o elemento de placa antes e depois de experimentar a deflexão w :

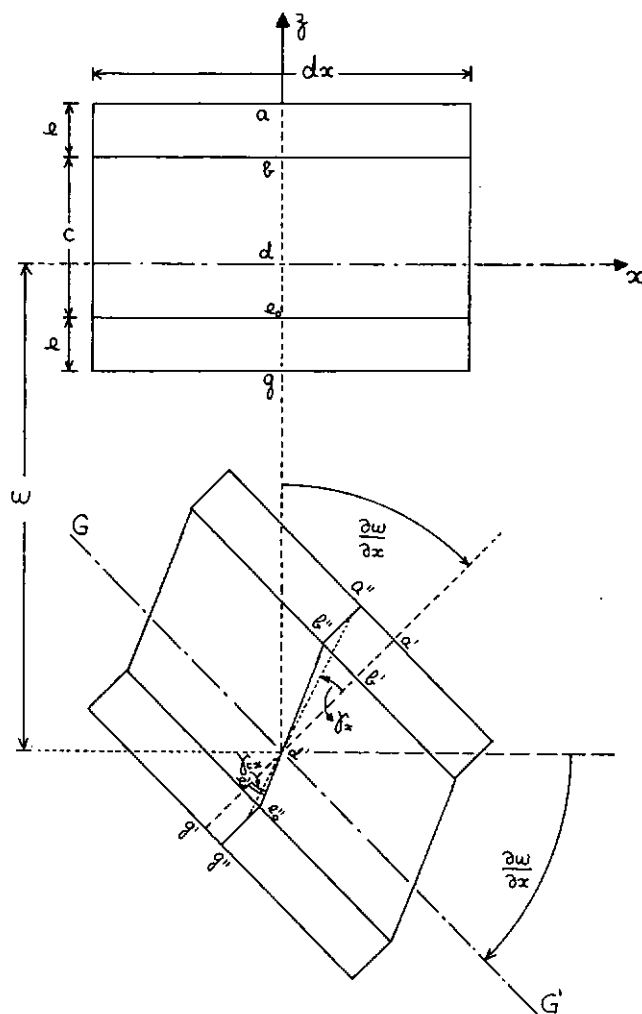


FIGURA 1.2

Se não houvesse distorção do elemento, $abde\bar{g}$ giraria de um ângulo $\frac{\partial w}{\partial x}$ e ocuparia a posição $a'b'd'e'g'$, normal a GG' , de acôrdo com as hipóteses da teoria ordinária da flexão. Entretanto, o núcleo experimenta uma distorção γ_{cx} , de modo que $abde\bar{g}$ passará a ocupar, na realidade, a posição $a''b''d''e''g''$.

$a''b''$ e $e''g''$ permanecem paralelos a ab e eg porque as distorções das faces são desprezadas. Da figura 1.2 segue que a rotação da secção $abde$ é

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x.$$

Derivando essa rotação na direção y , obteremos uma parcela da torção do plano médio do elemento:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right).$$

A outra parcela da torção é obtida de um modo análogo e vale:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right).$$

A soma dessas duas parcelas nos dá a torção do elemento:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right). \quad (1.4)$$

Usando (1.1f) e (1.1g) vamos reescrever (1.2) e (1.3) da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{m_x}{\theta_x} - \gamma_y \frac{m_y}{\theta_y} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}, \quad (1.2)'$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{m_y}{\theta_y} - \gamma_x \frac{m_x}{\theta_x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y}, \quad (1.3)'$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right). \quad (1.4)'$$

A partir destas três equações e das equações (1.1) vamos obter as relações carga-deformação, as quais nos permitirão, posteriormente, exprimir tôdas os esforços internos em função da flecha w e das distorções γ_x e γ_y .

Inicialmente, a resolução de (1.2)' e (1.3)' para M_x e M_y nos dá:

$$M_x = D_x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right) + \nu_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right) \right],$$

sendo $D_x = \frac{B_x}{1 - \nu_x^2},$

$$M_y = D_y \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right) + \nu_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right) \right],$$

sendo $D_y = \frac{B_y}{1 - \nu_y^2}.$

A torção provocada por M_{xy} é obtida de (1.1e):

$$\frac{M_{xy}}{T}.$$

A torção provocada por $M_{yx} = M_{xy}$ vale também $\frac{M_{xy}}{T}$. Somando-

-as obtemos:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2 \frac{m_{xy}}{T}.$$

Levando esta em (1.4)' obtemos:

$$m_{xy} = \frac{T}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right) \right].$$

De (1.1f) e (1.1g) obtemos:

$$Q_x = S_x \gamma_x, \quad Q_y = S_y \gamma_y.$$

Portanto, as relações carga-deformação são as cinco seguintes:

$$m_x = D_x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right) \right], \quad (1.5)$$

$$m_y = D_y \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right) \right], \quad (1.6)$$

sendo

$$D_x = \frac{B_x}{1 - \nu_x^2}, \quad D_y = \frac{B_y}{1 - \nu_y^2}, \quad (1.6a)$$

$$m_{xy} = \frac{T}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right) \right], \quad (1.7)$$

$$Q_x = S_x \gamma_x, \quad (1.8)$$

$$Q_y = S_y \gamma_y. \quad (1.9)$$

Vamos agora aplicar as equações da Estática ao elemento da figura 1.1. A equação de equilíbrio de forças na direção x nos dá:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dx dy = 0,$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0. \quad (1.10)$$

A equação análoga com relação à direção y fornece:

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} dx dy = 0,$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (1.11)$$

Para usar a equação de equilíbrio de forças na direção z devemos levar em consideração a deflexão da placa sandwich (Figuras 1.3 a 1.6):

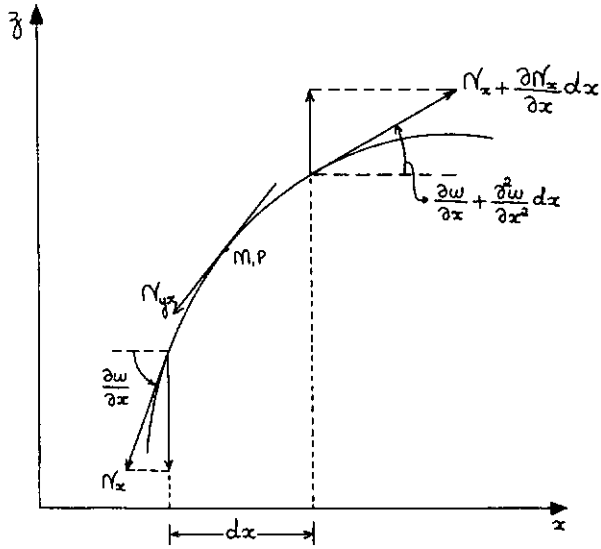


FIGURA 1.3

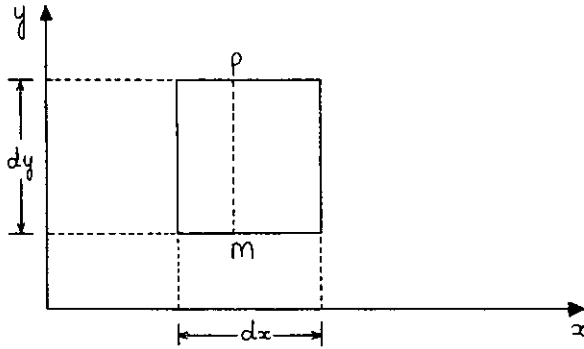


FIGURA 1.4

No ponto M o coeficiente angular de N_{yx} é $\frac{\partial w}{\partial x}$.

No ponto P o coeficiente angular de $N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy$ é

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy .$$

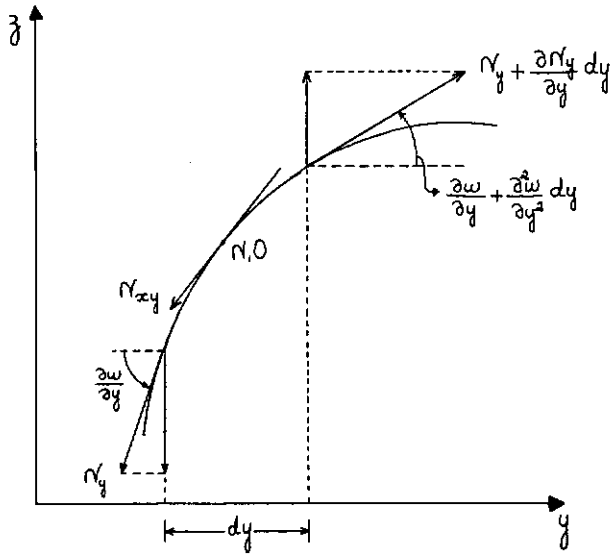


FIGURA 1.5

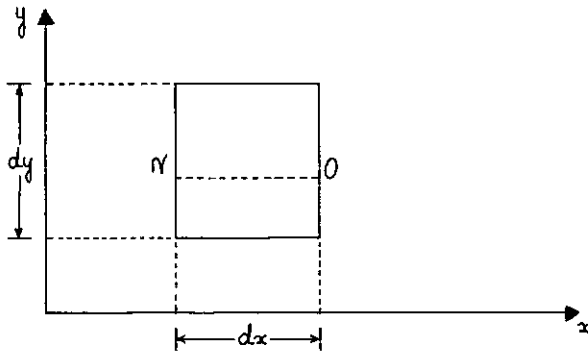


FIGURA 1.6

No ponto N o coeficiente angular de N_{xy} é $\frac{\partial w}{\partial y}$.

No ponto O o coeficiente angular de $N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx$ é

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx.$$

Com tôdas essas considerações, a equação de equilí**í** brio na direção z é:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy - N_x \frac{\partial w}{\partial x} dy + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy - \\ & - N_{yx} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right) dx - N_y \frac{\partial w}{\partial y} dx + \\ & + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dx - N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) dy + \\ & + q dx dy = 0. \end{aligned}$$

Após algumas simplificações obteremos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} + q = 0. \end{aligned}$$

Usando (1.10) e (1.11) podemos escrever:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0. \quad (1.12)$$

Vemos que nesta equação sômente aparecem derivadas de segunda ordem de w . Isto ocorre porque as fôrças de massa são supostas nulas. Usando a equação de equilí**í** brio de momentos em tórno do eixo x , obtemos:

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} dx dy + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx dy + Q_y dx dy = 0.$$

Com a equação de equilíbrio de momentos em torno do eixo y obtemos:

$$-\frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy - \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dx dy - Q_x dx dy = 0.$$

Após simplificações chegamos às equações:

$$Q_x = -\frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}, \quad (1.13)$$

$$Q_y = -\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial m_y}{\partial y}. \quad (1.14)$$

De (1.8) e (1.9) vem que:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = S_x \frac{\partial \chi_x}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = S_y \frac{\partial \chi_y}{\partial y}.$$

Levando essas relações em (1.12) temos:

$$\left(N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w + S_x \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + S_y \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + q = 0. \quad (1.15)$$

Resumindo, as equações diferenciais de uma placa

sandwich são as seguintes:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0,$$

$$Q_y = -\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial m_y}{\partial y},$$

$$Q_x = -\frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{yx}}{\partial y},$$

$$\left(N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w + S_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + S_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0.$$

CAPÍTULO II

ENERGIA POTENCIAL TOTAL DA PLACA SANDWICH

A energia de deformação armazenada, devido à ação de M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} , Q_x , Q_y , N_x , N_{xy} , N_{yx} , N_y , é igual à soma dos trabalhos realizados por êsses esforços internos:

trabalho realizado pelo momento fletor M_x

$$\frac{1}{2} \left(\frac{M_x^2}{B_x} - \nu_y \frac{M_x M_y}{B_y} \right) dx dy;$$

trabalho realizado pelo momento fletor M_y

$$\frac{1}{2} \left(\frac{M_y^2}{B_y} - \nu_x \frac{M_x M_y}{B_x} \right) dx dy;$$

trabalho realizado pelo momento de torção M_{xy}

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{M_{xy}^2}{T} dx dy;$$

trabalho realizado pelo momento de torção M_{yx}

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{M_{yx}^2}{T} dx dy;$$

trabalho realizado pelo esforço cortante Q_x

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{Q_x^2}{S_x} dx dy;$$

trabalho realizado pelo esforço cortante Q_y

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{Q_y^2}{S_y} dx dy.$$

Quando a placa deflete, ocorre uma variação da energia potencial de N_x , N_y , $N_{xy} = N_{yx}$, os quais permanecem constantes durante a flexão, porque as deflexões da placa são pequenas.

Na figura 2.1, $AC = AC'$. Para ângulos $\frac{\partial w}{\partial x}$ pequenos, como é o caso, a diferença $AB - AC' \cong \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$.

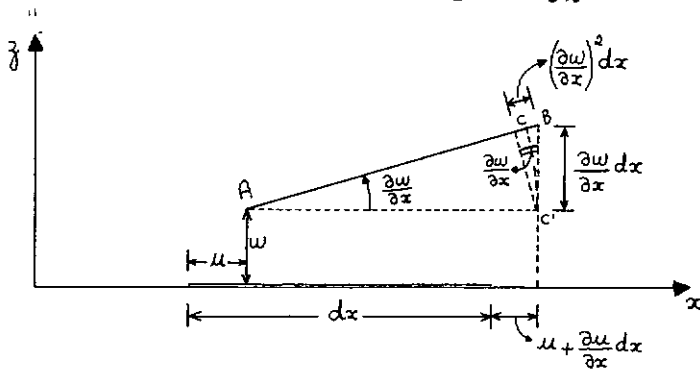


FIGURA 2.1

A deformação do plano médio do elemento é

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$

Portanto:

trabalho realizado por N_x :

$$N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy.$$

Analogamente temos:

trabalho realizado por N_y :

$$N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Para calcular o trabalho de N_{xy} e N_{yx} , consideremos a figura 2.2:

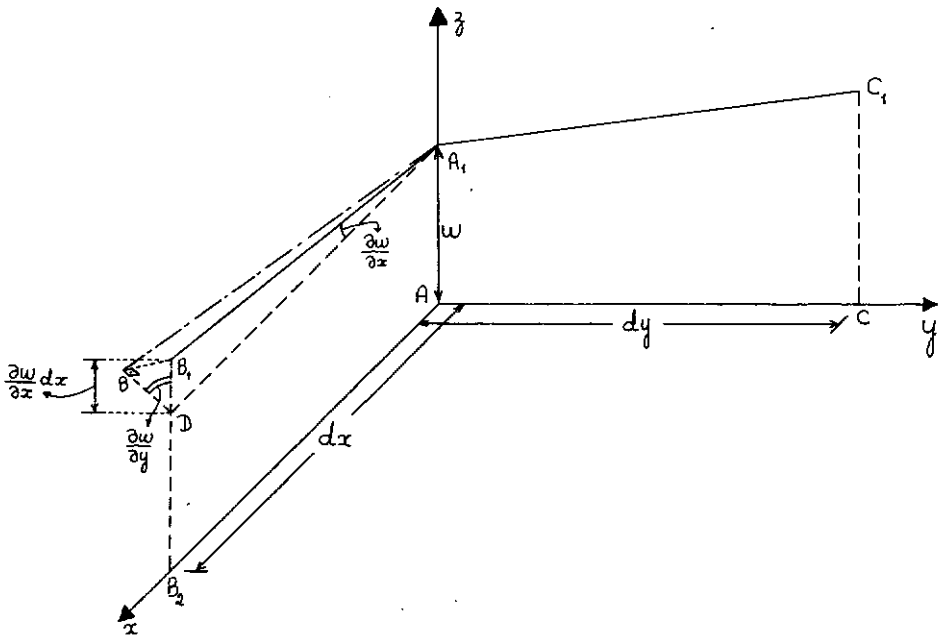


FIGURA 2.2

A distorção provocada pela deflexão da placa é a diferença entre $\frac{\pi}{2}$ e $B_1\hat{A}_1C_1$. Passemos a calculá-la: A_1D é ortogonal ao plano yz e, portanto, é ortogonal a A_1C_1 . Giremos o plano DA_1C_1 em torno de A_1C_1 até fazê-lo coincidir com o plano $B_1A_1C_1$. Como BD é ortogonal a DA_1C_1 , segue que $B\hat{D}B_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$. Da figura 2.2 tiramos:

$$B\hat{B}_1 = \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

Então, a distorção provocada pela deflexão da placa é

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Como a distorção provocada pelos deslocamentos u e v é

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

segue que a distorção total do plano médio do elemento é

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Daí vem que:

trabalho realizado por N_{xy} e N_{yx} :

$$N_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy.$$

Somando todos êsses trabalhos realizados pelos es forços internos obtemos a energia de deformação armazenada no elemento:

$$dU = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{M_x^2}{B_x} - \nu_y \frac{M_x M_y}{B_y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{M_y^2}{B_y} - \nu_x \frac{M_x M_y}{B_x} \right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{xy}^2}{T} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_x^2}{S_x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_y^2}{S_y} + N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + N_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dx dy.$$

Quando a placa deflete, a carga externa q realiza o trabalho $q w dx dy$. Esse trabalho possui sinal contrário aos trabalhos das fôrças internas acima. Somando-o com dU , obteremos a energia potencial total do elemento:

$$dU_p = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x^2}{B_x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_x}{B_x} + \frac{\nu_y}{B_y} \right) M_x M_y + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_y^2}{B_y} + \frac{M_{xy}^2}{T} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_x^2}{S_x} + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_y^2}{S_y} + N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + N_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) - q w \right\} dx dy.$$

Substituindo (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) e (1.9) nessa expressão, obteremos a energia potencial em função da flecha w e das distorções γ_x e γ_y :

$$\begin{aligned}
 dU_p = & \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{D_x^2}{B_x} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \nu_y \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right] + \nu_y^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - \\
 & - \frac{D_x D_y}{2} \left(\frac{\nu_x}{B_x} + \frac{\nu_y}{B_y} \right) \left\{ (1 + \nu_x \nu_y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) \right. \\
 & \left. + \nu_x \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right)^2 \right] + \nu_y \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \frac{D_y^2}{B_y} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \nu_x \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right] + \nu_x^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \frac{I}{4} \left[4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \right. \\
 & \left. - 4 \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} S_x \gamma_x^2 + \frac{1}{2} S_y \gamma_y^2 + \\
 & + N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + N_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) - q w \Big] dx dy. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Essa é a energia potencial de um elemento de placa sandwich ortótropa. Particularizaremos essa expressão para uma placa isótropa, isto é, placa possuindo núcleo e faces isótropas; temos então, nesse caso, as seguintes relações:

$$\nu_x = \nu_y = \nu,$$

$$D_x = D_y = D = \frac{B}{1 - \nu^2},$$

$$S_x = S_y = S,$$

$$T = \frac{B}{1+\nu} \text{ ou } T = (1-\nu)D.$$

Substituindo-as em (2.1), obteremos a energia potencial de uma placa sandwich isótropa:

$$\begin{aligned}
 U_T = & \iint \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{B}{(1-\nu^2)^2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi_y}{\partial y} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \nu^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - \frac{B\nu}{(1-\nu^2)^2} \left\{ (1+\nu^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \chi_y}{\partial y} - \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right) + \nu \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{(1-\nu^2)^2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \nu^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} \right)^2 \right] \right] \right\} + \\
 & + \frac{B}{4(1+\nu)} \left[4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial \chi_y}{\partial x} + \frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial y} + \left(\frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{S}{2} (\chi_x^2 + \chi_y^2) + \nu_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \nu_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\
 & \left. + \nu_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) - q w \right] dx dy.
 \end{aligned}$$

Após simplificações, obteremos a seguinte expressão para a energia potencial total da placa sandwich isotrópica:

$$\begin{aligned}
 U_p = \frac{1}{4} \iint \left[\frac{B}{1-\nu^2} \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right)^2 + \right. \right. \\
 + 4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial \chi_y}{\partial x} + \frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial y} + \nu \left[4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\
 - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \chi_y}{\partial y} - 4 \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi_y}{\partial y} - 4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial \chi_y}{\partial x} + \frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
 \left. \left. - \left(\frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right\} + 4N_x \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + 4N_y \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\
 \left. + 4N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2S(\chi_x^2 + \chi_y^2) - 4q_w \right] dx dy. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

A energia cinética de um elemento da placa sandwich é, pela definição:

$$dK = \frac{1}{2} \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy,$$

sendo $h = c + 2e$ e ρ a massa específica da placa sandwich isotrópica, a qual será suposta constante para toda a placa. Não consideramos a energia cinética de rotação, cuja influên

cia s \tilde{o} tem inter \tilde{e} ss \tilde{e} em altas frequ \tilde{e} ncias. Desprezamos tam \tilde{e} m a energia cin \tilde{e} tica de transla \tilde{c} o \tilde{a} o nas dire \tilde{c} o \tilde{e} s x e y. Da equa \tilde{c} o \tilde{a} o anterior vem que:

$$K = \frac{1}{2} \rho h \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy. \quad (2.3)$$

Tendo as energias cin \tilde{e} tica e potencial da placa, podemos calcular a a \tilde{c} o \tilde{a} o, que \tilde{e} definida por

$$A = \int_{t_0}^t (K - U_p) dt.$$

Substituindo (2.2) e (2.3) nessa equa \tilde{c} o \tilde{a} o e abstra \tilde{i} ndo dos limites t_0 e t , a a \tilde{c} o \tilde{a} o fica com o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{4} \iiint & \left[2\rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{B}{1-\nu^2} \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & + 2 \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \\ & + \nu \left[4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} - 4 \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} - 4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. + 4 \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right] \right\} - 25 (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - 4N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - 4N_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4q_w \Big] dx dy dt.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

A região de integração de (2.2) e (2.3) é o plano médio da placa sandwich.

CAPÍTULO III

EQUAÇÃO DE OSTROGRADSKI

A fim de podermos aplicar o princípio de Hamilton à equação (2.4), deduziremos neste capítulo a expressão da primeira variação de uma integral tripla:

$$v(\omega) = \iiint_{\mathcal{D}} F\left(x, y, z, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial z}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z}\right) dx dy dz. \quad (3.1)$$

sendo $w(x, y, z) \Big|_{\partial \mathcal{D}}$ conhecido e $\partial \mathcal{D}$ a fronteira de \mathcal{D} . Isso indica que existe uma superfície $\mathcal{S}^* = w(\partial \mathcal{D})$ no espaço $xyzw$; e cada argumento de v passa por \mathcal{S}^* .

Para se calcular a primeira variação de v devemos levar em conta as duas seguintes hipóteses: $w \in C^4$ em \mathcal{D} e $F \in C^4$.

Por comodidade ponhamos:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial \omega}{\partial x} = l, & \frac{\partial \omega}{\partial y} = m, & \frac{\partial \omega}{\partial z} = n, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = p, & \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = q, & \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = r, \end{array}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = t, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = u.$$

Usando essas relações, (3.1) pode ser escrita:

$$v(w(x, y, z)) = \iiint_{\mathcal{D}} F(x, y, z, w, \ell, m, n, p, q, r, s, t, u) dx dy dz. \quad (3.2)$$

Vamos agora procurar a hiper-superfície que extremiza esse funcional. Sejam, então, $w(x, y, z)$ uma extremante de v e $w^*(x, y, z)$ uma hiper-superfície de comparação. A variação δw de w é definida da seguinte maneira:

$$\delta w = w^*(x, y, z) - w(x, y, z) \quad (3.3)$$

Consideremos a seguinte família de hiper-superfícies a um parâmetro:

$$w(x, y, z, \alpha) = w(x, y, z) + \alpha \delta w. \quad (3.4)$$

Vemos que $w(x, y, z, 0) = w(x, y, z)$ e $w(x, y, z, 1) = w^*(x, y, z)$. Consideremos, pois, que o domínio de v seja somente a família $w(x, y, z, \alpha)$. Com isso, o funcional se transforma em uma função de α somente. Como $w(x, y, z)$ é uma extremante de v , por hipótese, segue que a família $w(x, y, z, \alpha)$ possui uma ex

tremante em $\alpha=0$. Consequentemente,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} [v(w(x, y, z, \alpha))] \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Porém,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} [v(w(x, y, z, \alpha))] \right|_{\alpha=0} = \delta v \quad (\text{ELSGOLC}^2). \quad \text{Logo:}$$

$$\delta v = 0. \quad (3.5)$$

Calculemos δv :

$$\delta v = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\iiint_{\Omega} F(x, y, z, w, \ell, m, n, p, q, r, s, t, u) dx dy dz \right] \right|_{\alpha=0},$$

$$\delta v = \left[\iiint_{\Omega} \left(F_w \delta w + F_{\ell} \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} + F_m \frac{\partial m}{\partial \alpha} + F_n \frac{\partial n}{\partial \alpha} + F_p \frac{\partial p}{\partial \alpha} + F_q \frac{\partial q}{\partial \alpha} + F_r \frac{\partial r}{\partial \alpha} + F_s \frac{\partial s}{\partial \alpha} + \right. \right. \\ \left. \left. + F_t \frac{\partial t}{\partial \alpha} + F_u \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) dx dy dz \right] \Bigg|_{\alpha=0} \quad (3.6)$$

onde usamos $\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \delta w$, obtida de (3.4).

Temos que:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta \omega) = \frac{\partial}{\partial x} (\omega^* - \omega) = \frac{\partial \omega^*}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \delta \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \delta \ell \quad \therefore \quad \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \delta \ell.$$

Analogamente, obteremos:

$$\frac{\partial m}{\partial \alpha} = \delta m \quad \text{e} \quad \frac{\partial n}{\partial \alpha} = \delta n.$$

Calculemos $\frac{\partial p}{\partial \alpha}$:

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta \omega) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\omega^* - \omega) = \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \delta \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \delta p.$$

Analogamente:

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \delta q ; \quad \frac{\partial r}{\partial \alpha} = \delta r ; \quad \frac{\partial s}{\partial \alpha} = \delta s ; \quad \frac{\partial t}{\partial \alpha} = \delta t \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \delta u.$$

Levando todas essas relações em (3.6) vem:

$$\delta v = \iiint_{\mathcal{D}} (F_{\omega} \delta \omega + F_{\ell} \delta \ell + F_m \delta m + F_n \delta n + F_p \delta p + F_q \delta q + \\ F_r \delta r + F_s \delta s + F_t \delta t + F_u \delta u) dx dy dz. \quad (3.7)$$

Calculemos $\frac{\partial}{\partial x} \{F_\ell \delta \omega\}$, $\frac{\partial}{\partial y} \{F_m \delta \omega\}$ e $\frac{\partial}{\partial z} \{F_n \delta \omega\}$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_\ell \delta \omega\} = \frac{\partial}{\partial x} \{F_\ell\} \delta \omega + F_\ell \frac{\partial}{\partial x} (\delta \omega),$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \{F_\ell\} \delta \omega + F_\ell \delta \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right),$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \{F_\ell\} \delta \omega + F_\ell \delta \ell,$$

$$F_\ell \delta \ell = \frac{\partial}{\partial x} \{F_\ell \delta \omega\} - \frac{\partial}{\partial x} \{F_\ell\} \delta \omega. \quad (3.8)$$

Analogamente, obteremos:

$$F_m \delta m = \frac{\partial}{\partial y} \{F_m \delta \omega\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_m\} \delta \omega, \quad (3.9)$$

$$F_n \delta n = \frac{\partial}{\partial z} \{F_n \delta \omega\} - \frac{\partial}{\partial z} \{F_n\} \delta \omega. \quad (3.10)$$

Calculemos a parcela

$$I_1 = \iiint_{\Omega} (F_\ell \delta \ell + F_m \delta m + F_n \delta n) dx dy dz,$$

$$I_1 = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \{F_\ell \delta \omega\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_m \delta \omega\} + \frac{\partial}{\partial z} \{F_n \delta \omega\} \right) dx dy dz - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \{F_\ell\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_m\} + \frac{\partial}{\partial z} \{F_n\} \right) \delta \omega dx dy dz.$$

As funções $F_\ell \delta\omega$, $F_m \delta\omega$ e $F_n \delta\omega$, bem como $\partial\Omega$, atendem às condições do teorema de Gauss (KAPLAN⁵). Aplicando-o à primeira integral de I_1 , vem:

$$I_1 = \iint_{\partial\Omega} (F_\ell dydz + F_m dzdx + F_n dx dy) \delta\omega - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \{F_\ell\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_m\} + \frac{\partial}{\partial z} \{F_n\} \right) \delta\omega dx dy dz.$$

Como $\delta\omega|_{\partial\Omega} = 0$, porque todas as hiper-superfícies da família $w(x, y, z, \alpha)$ contêm a superfície \mathcal{S}^* , segue que:

$$\iiint_{\Omega} (F_\ell \delta\ell + F_m \delta m + F_n \delta n) dx dy dz = - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \{F_\ell\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_m\} + \frac{\partial}{\partial z} \{F_n\} \right) \delta\omega dx dy dz. \quad (3.11)$$

Calculemos agora a outra parcela de (3.7), ou seja:

$$\iiint_{\Omega} (F_p \delta p + F_q \delta q + F_r \delta r) dx dy dz.$$

Sabemos que a expressão do teorema de Gauss é a seguinte:

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} L dy dz + M dz dx + N dx dy,$$

para $L, M, N \in C^1$ e $\partial\Omega$ seccionalmente regular.

Façamos (FORSYTH³):

$$L = F_p \frac{\partial}{\partial x} (\delta\omega) - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \delta\omega,$$

$$M = F_q \frac{\partial}{\partial y} (\delta\omega) - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \delta\omega,$$

$$N = F_x \frac{\partial}{\partial z} (\delta\omega) - \frac{\partial}{\partial z} \{F_x\} \delta\omega.$$

Temos que:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\delta\omega) + F_p \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta\omega) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_p\} \delta\omega - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\delta\omega),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = F_p \delta \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_p\} \delta\omega,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = F_p \delta p - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_p\} \delta\omega. \quad (3.12)$$

Analogamente teremos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = F_q \delta q - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_q\} \delta\omega, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = F_x \delta x - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{F_x\} \delta\omega. \quad (3.14)$$

Levando (3.12), (3.13) e (3.14) na expressão do teorema de Gauss, vem:

$$\iiint_{\mathcal{D}} \left[F_p \delta p + F_q \delta q + F_r \delta r - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_p\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_q\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{F_r\} \right) \delta w \right] dx dy dz =$$

$$\iint_{\partial \mathcal{D}} \left[F_p \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \delta w \right] dy dz + \left[F_q \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \delta w \right] dz dx +$$

$$+ \left[F_r \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) - \frac{\partial}{\partial z} \{F_r\} \delta w \right] dx dy,$$

$$\iiint_{\mathcal{D}} (F_p \delta p + F_q \delta q + F_r \delta r) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_p\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_q\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{F_r\} \right) \delta w dx dy dz +$$

$$+ \iint_{\partial \mathcal{D}} F_p \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dy dz + F_q \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) dz dx + F_r \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) dx dy -$$

$$- \iint_{\partial \mathcal{D}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} dy dz + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} dz dx + \frac{\partial}{\partial z} \{F_r\} dx dy \right) \delta w.$$

Como $\delta w|_{\partial \mathcal{D}} = 0$, segue que δw é constante ao longo de $\partial \mathcal{D}$ e, portanto,

$$\iint_{\partial \mathcal{D}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} dy dz + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} dz dx + \frac{\partial}{\partial z} \{F_r\} dx dy \right) \delta w = 0.$$

Com isso podemos escrever que:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{D}} (F_p \delta p + F_q \delta q + F_x \delta x) dx dy dz &= \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_p\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_q\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{F_x\} \right) \delta \omega dx dy dz + \\ &+ \iint_{\partial \mathcal{D}} F_p \frac{\partial}{\partial x} (\delta \omega) dy dz + F_q \frac{\partial}{\partial y} (\delta \omega) dz dx + F_x \frac{\partial}{\partial z} (\delta \omega) dx dy. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Finalmente, calculemos a última parcela de (3.7), ou seja:

$$\iiint_{\mathcal{D}} (F_s \delta s + F_t \delta t + F_u \delta u) dx dy dz.$$

Façamos (FORSYTH³):

$$L_1 = F_s \frac{\partial}{\partial y} (\delta \omega) - \delta \omega \frac{\partial}{\partial y} \{F_s\}, \quad (3.16)$$

$$L_2 = F_s \frac{\partial}{\partial x} (\delta \omega) - \delta \omega \frac{\partial}{\partial x} \{F_s\}, \quad (3.17)$$

$$M_1 = F_u \frac{\partial}{\partial z} (\delta \omega) - \delta \omega \frac{\partial}{\partial z} \{F_u\}, \quad (3.18)$$

$$M_2 = F_u \frac{\partial}{\partial y} (\delta \omega) - \delta \omega \frac{\partial}{\partial y} \{F_u\}, \quad (3.19)$$

$$N_1 = F_t \frac{\partial}{\partial x} (\delta \omega) - \delta \omega \frac{\partial}{\partial x} \{F_t\}, \quad (3.20)$$

$$N_2 = F_t \frac{\partial}{\partial z} (\delta \omega) - \delta \omega \frac{\partial}{\partial z} \{F_t\}. \quad (3.21)$$

Derivemos (3.16) em relação a x e (3.17) em relação

a y :

$$\frac{\partial k_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \{F_1\} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\delta\omega) + F_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta\omega) - \frac{\partial}{\partial x} (\delta\omega) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \{F_2\} - \delta\omega \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_2\},$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \{F_2\} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\delta\omega) + F_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta\omega) - \frac{\partial}{\partial x} \{F_1\} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\delta\omega) - \delta\omega \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_1\}.$$

Somando essas duas equações e sabendo que

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta\omega) = \delta \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) = \delta \omega \quad \text{vem:}$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial x} + \frac{\partial k_2}{\partial y} = 2F_2 \delta\omega - 2\delta\omega \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_2\},$$

$$2F_2 \delta\omega = 2\delta\omega \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_2\} + \frac{\partial k_1}{\partial x} + \frac{\partial k_2}{\partial y}. \quad (3.22)$$

Derivando (3.18) em relação a y , (3.19) em relação a z , (3.20) em relação a z , e (3.21) em relação a x , e procedendo como acima, encontraremos:

$$2F_t \delta t = 2\delta\omega \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \{F_t\} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial z}, \quad (3.23)$$

$$2F_u \delta u = 2\delta\omega \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \{F_u\} + \frac{\partial m_1}{\partial y} + \frac{\partial m_2}{\partial z}. \quad (3.24)$$

De (3.22), (3.23) e (3.24) podemos escrever:

$$2 \iiint_{\mathcal{D}} (F_s \delta s + F_t \delta t + F_u \delta u) dx dy dz = 2 \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial^2 \{F_s\}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \{F_t\}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \{F_u\}}{\partial y \partial z} \right) \delta w dx dy dz +$$

$$+ \iiint_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (L_1 + N_2) + \frac{\partial}{\partial y} (L_2 + M_1) + \frac{\partial}{\partial z} (M_2 + N_1) \right] dx dy dz.$$

Aplicando o teorema de Gauss à segunda integral do segundo membro, obtemos, denotando essa integral por I_2 :

$$I_2 = \iint_{\partial \mathcal{D}} (L_1 + N_2) dy dz + (L_2 + M_1) dz dx + (M_2 + N_1) dx dy.$$

Substituindo nessa as equações (3.16) a (3.21) obtemos:

$$I_2 = \iint_{\partial \mathcal{D}} \left[F_s \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + F_t \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right] dy dz + \left[F_s \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + F_u \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right] dz dx +$$

$$\left[F_t \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + F_u \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \right] dx dy - \iiint_{\partial \mathcal{D}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \{F_s\} + \frac{\partial}{\partial z} \{F_t\} \right) dy dz + \left(\frac{\partial}{\partial x} \{F_s\} + \frac{\partial}{\partial z} \{F_u\} \right) dz dx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial}{\partial x} \{F_t\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_u\} \right) dx dy \right] \delta w.$$

Como $\delta w|_{\partial \mathcal{D}} = 0$ segue que:

$$\iiint_{\partial \mathcal{D}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \{F_s\} + \frac{\partial}{\partial z} \{F_t\} \right) dy dz + \left(\frac{\partial}{\partial x} \{F_s\} + \frac{\partial}{\partial z} \{F_u\} \right) dz dx + \left(\frac{\partial}{\partial x} \{F_t\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_u\} \right) dx dy \right] \delta w = 0.$$

Substituindo o valor de I_2 na sua equação, obtemos:

$$2 \iiint_{\mathcal{D}} (F_s \delta s + F_t \delta t + F_u \delta u) dx dy dz = 2 \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_s\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \{F_t\} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \{F_u\} \right) \delta w dx dy dz +$$

$$\iint_{\partial \mathcal{D}} \left[F_s \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + F_t \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right] dy dz + \left[F_s \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + F_u \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right] dz dx + \left[F_t \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + F_u \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \right] dx dy. \quad (3.25)$$

Levando (3.11), (3.15) e (3.25) em (3.7) obtemos:

$$\delta v = \iiint_{\mathcal{D}} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \{F_t\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_m\} - \frac{\partial}{\partial z} \{F_n\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_t\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_t\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{F_u\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_s\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \{F_t\} + \right.$$

$$\left. F_u + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \{F_u\} \right) \delta w dx dy dz + \iint_{\partial \mathcal{D}} \left[F_t \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \frac{1}{2} F_s \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{1}{2} F_t \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right] dy dz + \left[\frac{1}{2} F_s \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \right.$$

$$\left. F_t \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{1}{2} F_u \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right] dz dx + \left[\frac{1}{2} F_t \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \frac{1}{2} F_u \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + F_u \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right] dx dy. \quad (3.26)$$

Para tornar mais simples essa expressão da variação, vamos fazer uma hipótese relativa à natureza do extremo do funcional v . Para isso, consideremos a seguinte *definição*: duas hipersuperfícies, $w(x, y, z)$ e $w_1(x, y, z)$, são próximas no sentido de proximidade de ordem um se, e somente se,

$$|w(x, y, z) - w_1(x, y, z)| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} [w(x, y, z)] - \frac{\partial}{\partial x} [w_1(x, y, z)] \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{\partial [\omega(x, y, z)]}{\partial y} - \frac{\partial [\omega_1(x, y, z)]}{\partial y} \right| < \epsilon,$$

$$\left| \frac{\partial [\omega(x, y, z)]}{\partial z} - \frac{\partial [\omega_1(x, y, z)]}{\partial z} \right| < \epsilon,$$

sendo ϵ arbitrariamente pequeno.

Consideremos agora que as hiper-superfícies de (3.3) sejam próximas, com uma proximidade de ordem um. A definição acima pode ser escrita da seguinte maneira:

$$|\delta w| < \epsilon,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \right| < \epsilon,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \right| < \epsilon,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right| < \epsilon, \quad \epsilon \text{ pequeno.}$$

Isso nos permite concluir que δw e suas três derivadas são da mesma ordem de grandeza. Portanto, se $\delta w|_{\partial \mathcal{D}} = 0$, podemos dizer também que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \right] \Big|_{\partial \Omega} = \left[\frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \right] \Big|_{\partial \Omega} = \left[\frac{\partial}{\partial z} (\delta w) \right] \Big|_{\partial \Omega} = 0.$$

Quando $\delta v = 0$, o funcional v assume um valor extremo. A hiper-superfície que extremiza êsse funcional pertence a uma família de hiper-superfícies próximas, com uma proximidade de ordem um. Por definição, êsse extremo é chamado extremo fraco. Por conseguinte, para um tal extremo, a equação (3.26) toma a forma simples abaixo:

$$\delta v = \iiint_{\Omega} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \{F_l\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_m\} - \frac{\partial}{\partial z} \{F_n\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_p\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_q\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{F_r\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_s\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \{F_t\} + F_w + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \{F_u\} \right) \delta w \, dx \, dy \, dz. \quad (3.27)$$

A equação (3.27) é a expressão da primeira variação da integral tripla (3.1), quando esta assume um extremo fraco.

Levando (3.27) em (3.5) vem:

$$\iiint_{\Omega} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \{F_l\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_m\} - \frac{\partial}{\partial z} \{F_n\} + F_w + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_p\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_q\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{F_r\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_s\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \{F_t\} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \{F_u\} \right) \delta w \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Como $\delta w \in C^4$ em \mathcal{D} , se anula em $\partial\mathcal{D}$ e o outro t ermo do integrando é uma função contínua, segue, pelo Lema Fundamental do Cálculo das Variações, que:

$$F_w - \frac{\partial}{\partial x} \{F_x\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_y\} - \frac{\partial}{\partial z} \{F_z\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_{xx}\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_{yy}\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{F_{zz}\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_{xy}\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \{F_{xz}\} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \{F_{yz}\} \equiv 0 \quad \text{em } \mathcal{D}.$$

Logo, a hiper-superfície $w(x, y, z)$ que extremiza o funcional $v(w)$   uma solu o da equa o diferencial

$$F_w - \frac{\partial}{\partial x} \{F_{w_x}\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_{w_y}\} - \frac{\partial}{\partial z} \{F_{w_z}\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_{w_{xx}}\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_{w_{yy}}\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{F_{w_{zz}}\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_{w_{xy}}\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \{F_{w_{xz}}\} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \{F_{w_{yz}}\} = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}. \quad (3.28)$$

Essa equação diferencial é chamada equação de Ostrogradski.

Vamos agora achar a equação de Ostrogradski para um funcional da forma:

$$v(w_1, \dots, w_m) = \iiint_{\mathcal{D}} F\left(x, y, z, w_1, \dots, w_m, \frac{\partial w_i}{\partial x}, \frac{\partial w_i}{\partial y}, \frac{\partial w_i}{\partial z}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial y \partial z}, \dots\right) dx dy dz, \quad (3.29)$$

sendo $w_i(x, y, z) \Big|_{\partial D}$ conhecido, $i=1, 2, \dots, n$. F e w_i , $i=1, 2, \dots, n$, atendem as mesmas hipóteses de (3.1).

Consideremos a variação da função w_j , $1 \leq j \leq n$, mantendo as outras fixas. Assim fazendo, o funcional $v(w_1, \dots, w_j, \dots, w_n)$ torna-se um funcional dependendo apenas da função w_j , $1 \leq j \leq n$. Para esse, a equação de Ostrogradski é da forma:

$$F_{w_j} - \frac{\partial}{\partial x} \{F_{l_j}\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_{m_j}\} - \frac{\partial}{\partial z} \{F_{n_j}\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_{p_j}\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_{q_j}\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{F_{r_j}\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_{s_j}\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \{F_{t_j}\} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \{F_{u_j}\} = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \text{ em } D,$$

sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_j}{\partial x} &= l_j, & \frac{\partial w_j}{\partial y} &= m_j, & \frac{\partial w_j}{\partial z} &= n_j, \\ \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} &= p_j, & \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} &= q_j, & \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} &= r_j, \\ \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} &= s_j, & \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial z} &= t_j, & \frac{\partial^2 w_j}{\partial y \partial z} &= u_j, \\ & & & & & 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Como esse argumento é válido para cada $1 \leq j \leq n$, segue que as extremantes de $v(w_1, \dots, w_n)$ são soluções do seguinte sistema

de equações de Ostrogradski:

$$\begin{aligned}
 F_{w_j} - \frac{\partial}{\partial x} \{F_{t_j}\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_{m_j}\} - \frac{\partial}{\partial z} \{F_{n_j}\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_{p_j}\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_{q_j}\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{F_{r_j}\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_{s_j}\} \\
 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \{F_{t_j}\} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \{F_{u_j}\} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{em } \mathcal{D}.
 \end{aligned}$$

(3.30)

OBS: Os símbolos $\frac{\partial}{\partial x} \{.\}$, $\frac{\partial}{\partial y} \{.\}$ e $\frac{\partial}{\partial z} \{.\}$ têm os seguintes significados:

$\frac{\partial}{\partial x} \{.\}$ somente são consideradas constantes as variáveis y e z ;

$\frac{\partial}{\partial y} \{.\}$ somente são consideradas constantes as variáveis x e z ;

$\frac{\partial}{\partial z} \{.\}$ somente são consideradas constantes as variáveis y e x .

CAPÍTULO IV

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO DE UMA PLACA SANDWICH

Vamos aplicar o princípio de Hamilton à expressão da ação (equação (2.4)). Este princípio garante que as soluções das equações de Ostrogradski, (3.30), fazem com que a ação assuma um valor extremo. A função F , que aparece na equação (3.29), é o integrando da equação (2.4). Então, o funcional A que queremos extremar é da forma:

$$\begin{aligned}
 A[u, v, w, \gamma_x, \gamma_y] = & \iiint_{\Omega} F \left(x, y, t, u, v, w, \gamma_x, \gamma_y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial t}, \right. \\
 & \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}, \frac{\partial \gamma_x}{\partial y}, \frac{\partial \gamma_x}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_y}{\partial x}, \frac{\partial \gamma_y}{\partial y}, \frac{\partial \gamma_y}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\
 & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \\
 & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}, \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial t}, \\
 & \left. \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial y \partial t}, \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial y \partial t} \right) dx dy dt.
 \end{aligned}$$

Tal como fizemos no Capítulo III podemos escrever:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = l_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = m_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = n_1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p_1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q_1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r_1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = s_1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = t_1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} = u_1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = l_2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = m_2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = n_2,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = p_2,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = q_2,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = r_2,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = s_2,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = t_2,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} = u_2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = l_3,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = m_3,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = n_3,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p_3,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q_3,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = r_3,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = s_3,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = t_3,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} = u_3,$$

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} = l_4,$$

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} = m_4,$$

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial t} = n_4,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x^2} = p_4,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial y^2} = q_4,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2} = r_4,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial y} = s_4,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial t} = t_4,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial y \partial t} = u_4,$$

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} = l_5,$$

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} = m_5,$$

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial t} = n_5,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x^2} = p_5,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial y^2} = q_5,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial t^2} = r_5,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x \partial y} = s_5,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x \partial t} = t_5,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial y \partial t} = u_5.$$

Usando estas notações, a função F em (2.4) fica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 F = & 2\rho h m_3^2 - \frac{B}{1-\nu^2} \left\{ 2p_3^2 + 2q_3^2 - 4(p_3 l_4 + q_3 m_5) + 2l_4^2 + 2m_5^2 + 4s_3^2 - 4(l_5 + m_4) s_3 + \right. \\
 & l_5^2 + m_4^2 + 2l_5 m_4 + \left. \left[4p_3 q_3 - 4p_3 m_5 - 4l_4 q_3 + 4l_4 m_5 - 4s_3^2 + 4(l_5 + m_4) s_3 - l_5^2 - m_4^2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2l_5 m_4 \right] \right\} - 2S(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - 4N_x \left(l_1 + \frac{1}{2} l_3^2 \right) - 4N_y \left(m_2 + \frac{1}{2} m_3^2 \right) - \\
 & - 4N_{xy} \left(l_2 + m_1 + l_3 m_3 \right) + 4q w.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Usando (3.30) as cinco equações de Ostrogradski são as seguintes:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{B}{1-\nu^2} \Delta \Delta w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{B}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Delta \gamma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \gamma_y) \right] = q, \quad (4.4)$$

$$\Delta \gamma_x + \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x \partial y} - \frac{2S(1-\nu^2)}{B} \gamma_x - \nu \left(\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x \partial y} \right) - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad (4.5)$$

$$\Delta \gamma_y + \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial y} - \frac{2S(1-\nu^2)}{B} \gamma_y - \nu \left(\frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial y} \right) - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad (4.6)$$

sendo Δ o operador laplaciano em duas dimensões, isto é,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

A solução geral de (4.2) e (4.3) é (LANGHAAR⁶) uma função $\phi(x,y)$ arbitrária, porém sujeita às seguintes restrições:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = N_x, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = N_y, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -N_{xy}. \quad (4.7)$$

$\phi(x, y)$ é chamada função de tensão de Airy.

Para resolver (4.4), (4.5) e (4.6) basta escolher funções de onda para w , γ_x e γ_y . Entretanto, pode não ser fácil achar três funções de onda compatíveis entre si, sem introduzir um grande número de parâmetros, o que levaria a cálculos laboriosos (PLANTEMA¹⁰). Para evitar isso, vamos exprimir γ_x e γ_y em função de w e de dois parâmetros. Para tanto, devemos considerar a seguinte hipótese: cada secção plana do núcleo originalmente perpendicular às faces, permanece plana, porém gira em torno de uma linha paralela ao plano xy , cuja distância à face superior é constante. Como a placa sandwich é isotropa, essa linha paralela está localizada na metade da espessura do núcleo.

Consideremos o elemento de placa sandwich da figura 4.1, antes e depois de experimentar a flecha w . Se não houvesse distorção do núcleo, $abdeg$ giraria de um ângulo $\frac{\partial w}{\partial x}$ e ocuparia a posição $a'b'd'e'g'$ normal a GG' , de acordo com as hipóteses da teoria ordinária da flexão. Entretanto, o núcleo experimenta uma distorção γ_{cx} , de modo que $abdeg$ passará a ocupar, na realidade, a posição $a''b''d'e''g''$. $a''b''$ e $e''g''$ permanecem paralelas a ab e eg , porque as distorções das faces são desprezadas.

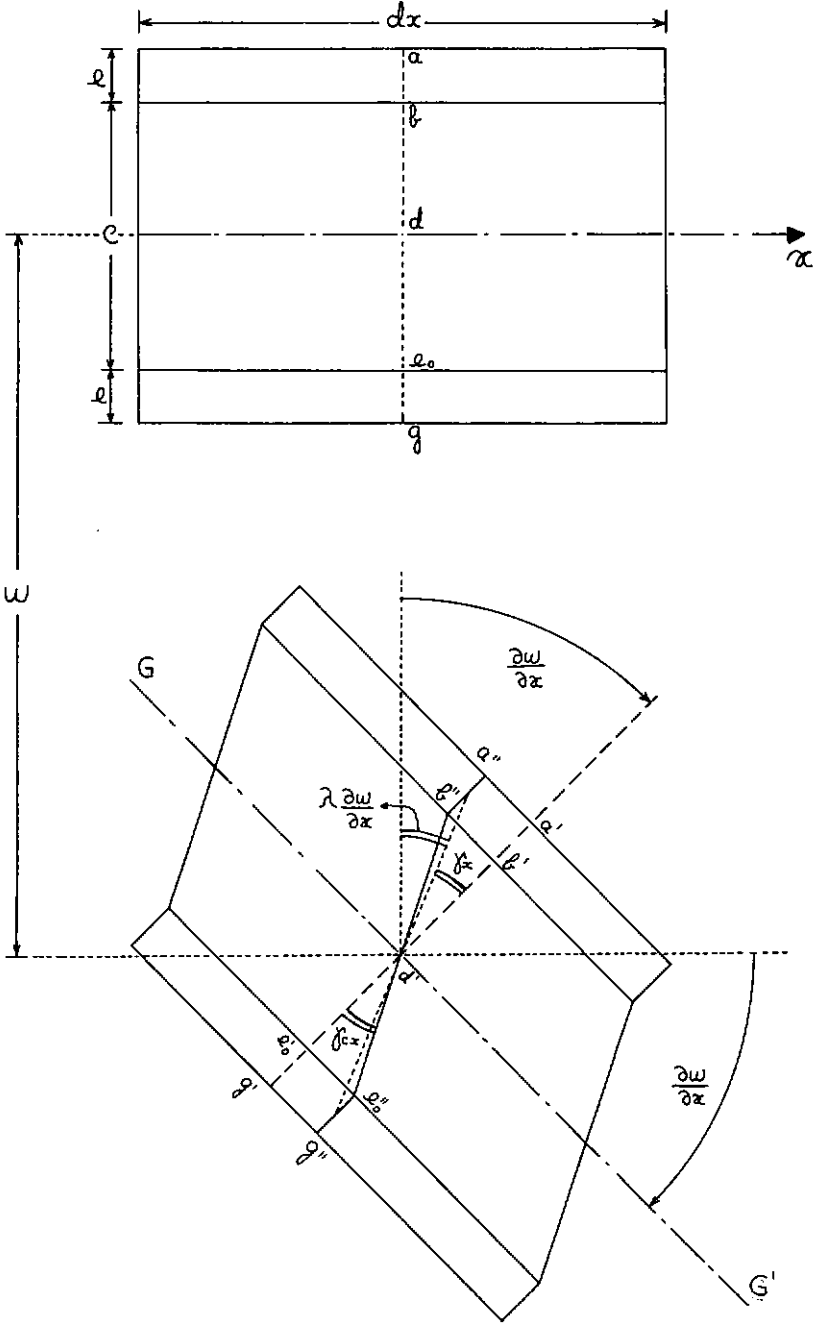


FIGURA 4.1

A rotação da secção $abdeg$ é denotada por $\lambda \frac{\partial w}{\partial x}$, sendo λ um coeficiente cujos limites determinaremos a seguir.

Da figura 4.1 vem que:

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \lambda \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma_x = (1-\lambda) \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4.8)$$

O limite superior de λ é obtido quando a rigidez ao cisalhamento do núcleo é infinita (ou, em termos práticos, muito grande). Nesse caso, não haverá distorção do núcleo, de modo que a linha $abdeg$ ocupará a posição $a'b'd'e'g'$, o que implica $\gamma_x = 0$. Levando esse valor em (4.8) obtemos:

$$\lambda_{sup.} = 1.$$

O limite inferior de λ é obtido quando a rigidez ao cisalhamento do núcleo é muito pequena (praticamente nula). Nesse caso, o núcleo é tão deformável que não provê qualquer conexão entre as duas faces, as quais trabalham como placas independentes, tendo em comum a flecha. A figura 4.1 fica da seguinte maneira:

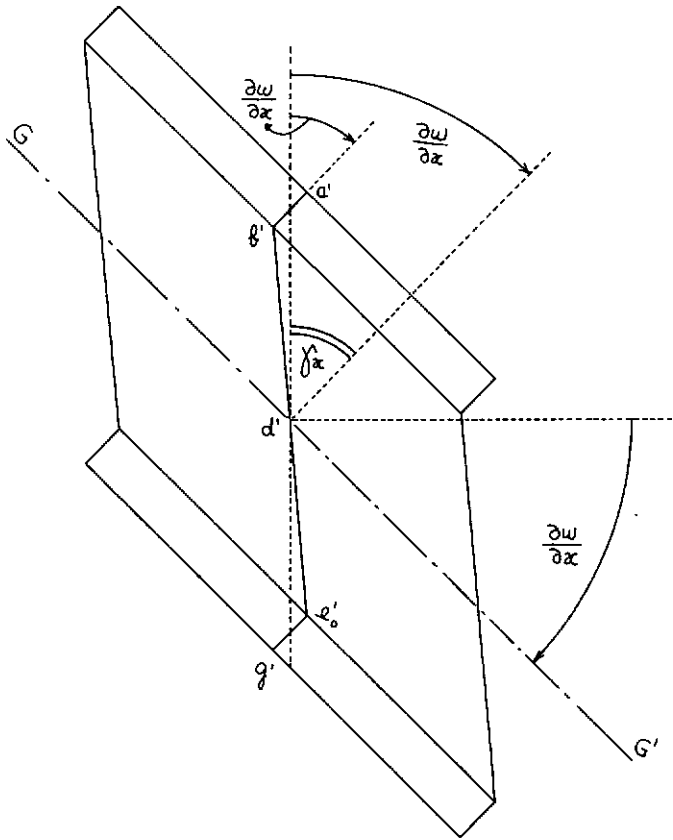


FIGURA 4.2

As linhas ab e eg giram de um ângulo $\frac{\partial w}{\partial x}$ para a posição definitiva $a'b'$ e $e'g'$. Da figura vem que $\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x}$. Levando em (4.8) obtemos:

$$\lambda_{inf.} = 0.$$

Logo, temos que $0 \leq \lambda \leq 1$.

De uma maneira análoga deduziremos que:

$$\gamma_y = (1-\mu) \frac{\partial w}{\partial y}, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (4.9)$$

Observemos que λ e μ são independentes da posição do elemento de placa, valendo, pois, para qualquer elemento. Logo λ e μ não dependem de x e y (ALLEN¹).

Levando (4.8) e (4.9) em (4.4), (4.5) e (4.6) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{B}{1-\nu^2} \left[\lambda \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \right] - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\ - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$2\lambda \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + [\mu + \lambda + \nu(\mu - \lambda)] \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{25(1-\nu^2)(1-\lambda)}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (4.11)$$

$$2\mu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + [\lambda + \mu + \nu(\lambda - \mu)] \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{25(1-\nu^2)(1-\mu)}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (4.12)$$

Derivando (4.11) em relação a x , (4.12) em relação a y , e somando obtemos:

$$\frac{B}{1-\nu^2} \left[\lambda \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \right] = -5 \left[(1-\lambda) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right].$$

Levando essa equação em (4.10) e reescrevendo (4.11) e (4.12) vem:

$$\left[5(1-\nu) + \nu_x\right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left[5(1-\mu) + \nu_y\right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q, \quad (4.13)$$

$$2\lambda \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left[\mu + \lambda + \nu(\mu - \lambda)\right] \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{25(1-\nu^2)(1-\lambda)}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (4.14)$$

$$2\mu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left[\lambda + \mu + \nu(\lambda - \mu)\right] \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{25(1-\nu^2)(1-\mu)}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (4.15)$$

CAPÍTULO V

CARGAS CRÍTICAS E FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DE UMA PLACA SANDWICH RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

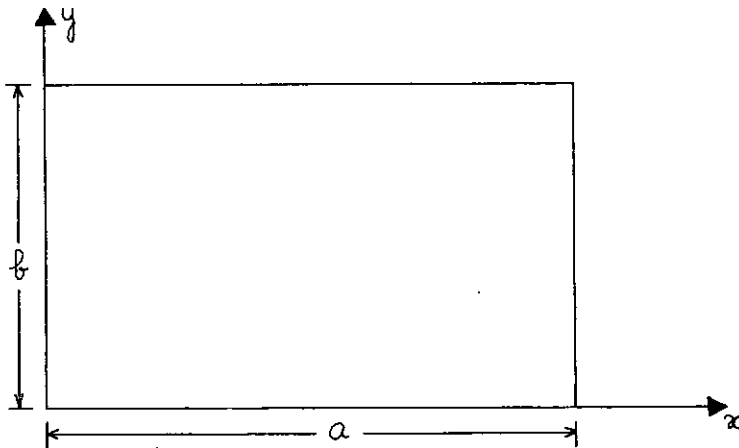


FIGURA 5.1

As condições de contorno são:

$$1a.) \quad w \Big|_{x=0} = w \Big|_{x=a} = 0 ,$$

$$2a.) \quad M_x \Big|_{x=0} = M_x \Big|_{x=a} = 0 .$$

Para termos a terceira condição de contorno, devemos fazer a seguinte hipótese: os quatro lados simplesmen

te apoiados têm enrijecimento tal que impede a distorção do núcleo nos apoios. Com essa hipótese, a terceira condição de contorno fica:

$$3a.) \quad \gamma_y \Big|_{x=0} = \gamma_y \Big|_{x=a} = 0 .$$

Na direção y as condições são análogas:

$$1a.) \quad w \Big|_{y=0} = w \Big|_{y=b} = 0 ,$$

$$2a.) \quad M_y \Big|_{y=0} = M_y \Big|_{y=b} = 0 ,$$

$$3a.) \quad \gamma_x \Big|_{y=0} = \gamma_x \Big|_{y=b} = 0 .$$

A expressão da flecha, para uma placa simplesmente apoiada, tem o seguinte aspecto (PLANTEMA¹⁰):

$$w = C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i\delta t}, \quad m=n=1,2,\dots, \quad (5.1)$$

onde C é uma constante, e f a frequência de vibrações.

Mostremos que (5.1) satisfaz às condições de con

tôrno acima. Para a direção x temos:

$$1a.) \omega|_{x=0} = C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot 0\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i\omega t} \therefore \omega|_{x=0} = 0.$$

$$\omega|_{x=a} = C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot a\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i\omega t} \therefore \omega|_{x=a} = 0.$$

2a.) De (1.5) temos:

$$M_x = \frac{B}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \gamma_x \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \gamma_y \right) \right].$$

Substituindo (4.8) e (4.9) nessa equação obtemos:

$$M_x = \frac{B}{1-\nu^2} \left(\lambda \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right).$$

Substituindo (5.1) nessa expressão vem:

$$M_x = -\frac{BC\pi^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\lambda m^2}{a^2} + \frac{\nu \mu n^2}{b^2} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i\omega t}.$$

Logo:

$$M_x|_{x=0} = -\frac{BC\pi^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\lambda m^2}{a^2} + \frac{\nu \mu n^2}{b^2} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot 0\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i\omega t} \therefore M_x|_{x=0} = 0,$$

$$M_x|_{x=a} = -\frac{BC\pi^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\lambda m^2}{a^2} + \frac{\nu \mu m^2}{b^2} \right) \sin(m\pi) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{\frac{ift}{b}} \therefore M_{x=a} = 0.$$

3a.) De (4.9) vem que:

$$\gamma_y = (1-\mu) \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Substituindo (5.1) nessa equação, obtemos:

$$\gamma_y = \frac{Cm\pi}{b} (1-\mu) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{\frac{ift}{b}}.$$

Logo:

$$\gamma_y|_{x=0} = \frac{Cm\pi}{b} (1-\mu) \sin\left(\frac{m\pi \cdot 0}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{\frac{ift}{b}} \therefore \gamma_y|_{x=0} = 0,$$

$$\gamma_y|_{x=a} = \frac{Cm\pi}{b} (1-\mu) \sin(m\pi) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{\frac{ift}{b}} \therefore \gamma_y|_{x=a} = 0.$$

Procedendo análogamente para a direção y , concluiremos que as condições de contorno para essa direção são também verificadas.

Vamos supor que a carga transversal \bar{e} nula ($q=0$) em

(4.13). Dêsse modo, a placa sandwich fica sōmente sob a ação de cargas aplicadas no seu plano mēdio. Levando (5.1) em (4.13), (4.14) e (4.15) obtemos:

$$C \left\{ -\frac{\pi^2 m^2}{\alpha^2} [5(1-\lambda) + N_x] - \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2} [5(1-\mu) + N_y] + \rho h \beta^2 \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i\beta t} \\ + 2N_{xy} \frac{C\pi^2 m m}{\alpha\beta} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i\beta t} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{C\pi m}{a} \left\{ -2\lambda \frac{\pi^2 m^2}{\alpha^2} - [\mu + \lambda + \nu(\mu - \lambda)] \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2} + \frac{2S(1-\nu^2)(1-\lambda)}{B} \right\} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right).$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i\beta t} = 0,$$

$$\frac{C\pi m}{b} \left\{ -2\mu \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2} - [\lambda + \mu + \nu(\lambda - \mu)] \frac{\pi^2 m^2}{\alpha^2} + \frac{2S(1-\nu^2)(1-\mu)}{B} \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right).$$

$$\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{i\beta t} = 0.$$

As incōgnitas sã β , λ e μ . Inicialmente, vamos resolver as duas ũltimas equaçōes. Como elas sã vãlidas para qual quer ponto (x, y) da placa, e como $e^{i\beta t}$ ě sempre diferente de zero, podemos escrever:

$$\frac{2S(1-\nu^2)(1-\lambda)}{B} - 2\frac{\pi^2 m^2}{\alpha^2} \lambda - [\mu + \lambda + \nu(\mu - \lambda)] \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2} = 0,$$

$$\frac{2S(1-\nu^2)(1-\mu)}{B} - 2\frac{\pi^2 m^2}{b^2}\mu - [\lambda + \mu + \nu(\lambda - \mu)]\frac{\pi^2 m^2}{a^2} = 0.$$

Explicitando λ e μ no primeiro membro, obtemos:

$$\left[\frac{2S(1-\nu^2)}{B} + 2\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2(1-\nu)}{b^2} \right] \lambda + \frac{\pi^2 m^2(1+\nu)}{b^2} \mu = \frac{2S(1-\nu^2)}{B},$$

$$\frac{\pi^2 m^2(1+\nu)}{a^2} \lambda + \left[\frac{2S(1-\nu^2)}{B} + 2\frac{\pi^2 m^2}{b^2} + \frac{\pi^2 m^2(1-\nu)}{a^2} \right] \mu = \frac{2S(1-\nu^2)}{B}.$$

Pela regra de Cramer encontra-se:

$$\lambda = \mu = \frac{\frac{S(1-\nu^2)}{B}}{\frac{S(1-\nu^2)}{B} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}}. \quad (5.3)$$

Com a finalidade de facilitar a resolução de (5.2), vamos fazer $N_{xy} = 0$ e $N_x = C_1$, $N_y = C_2$, C_1 e C_2 constantes positivas. Com essa hipótese e sabendo que $\lambda = \mu$, por (5.3), (5.2) pode ser escrita:

$$\left\{ \rho h b^2 - \frac{\pi^2 m^2}{a^2} [S(1-\lambda) + \nu_x] - \frac{\pi^2 m^2}{b^2} [S(1-\lambda) + \nu_y] \right\} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i\omega t} = 0.$$

Como essa equação é válida para qualquer ponto (x,y) da placa, e como $e^{i\delta t}$ é sempre diferente de zero, podemos escrever, após substituir (5.3) nessa última:

$$\rho h \dot{f}^2 = S \left(\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2} \right) \frac{\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2}}{\frac{S(1-\nu^2)}{B} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2}} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2} N_x + \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2} N_y,$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{\rho h}} \sqrt{\frac{S \left(\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2} \right)^2}{\frac{S(1-\nu^2)}{B} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2}} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2} N_x + \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2} N_y}. \quad (5.4)$$

Das equações (4.7) vamos calcular a função de tensão de Airy. Temos que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = C_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = C_2.$$

Da primeira vem que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = C_1 y + C_{11},$$

$$\phi_1(x, y) = \frac{C_1}{2} y^2 + C_{11}y + C_{12}. \quad (5.5)$$

C_{11} e C_{12} são constantes e não funções de x . A razão será dada abaixo.

Da segunda equação obtemos análogamente:

$$\phi_2(x, y) = \frac{C_2}{2} x^2 + C_{21}x + C_{22}. \quad (5.6)$$

Do mesmo modo, C_{21} e C_{22} são constantes e não funções de y .

Somando (5.5) e (5.6) vem:

$$\phi(x, y) = \frac{C_2}{2} x^2 + \frac{C_1}{2} y^2 + C_{21}x + C_{11}y + C_{22} + C_{12}. \quad (5.7)$$

Essa é a função de tensão de Airy para a placa sandwich que está sendo considerada. Calculemos N_{xy} de (5.7). Por (4.7) sabemos que:

$$N_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y},$$

$$N_{xy} = - \frac{\partial}{\partial x} (C_1 y + C_{11}) = 0 \quad \therefore \quad N_{xy} = 0.$$

Isso está de acordo com a hipótese feita anteriormente para se resolver (5.2). Vemos que esse resultado se verifica somente quando C_{11} e C_{12} em (5.5), e C_{21} e C_{22} em (5.6) atendem às condições estabelecidas naquelas equações.

N_x e N_y são cargas que atuam num elemento da placa sandwich. Como elas não dependem de x e y , segue que o carregamento externo da placa, o qual atua na sua fronteira, é o seguinte:

$$P_x = N_x = C_1 ,$$

$$P_y = N_y = C_2 .$$

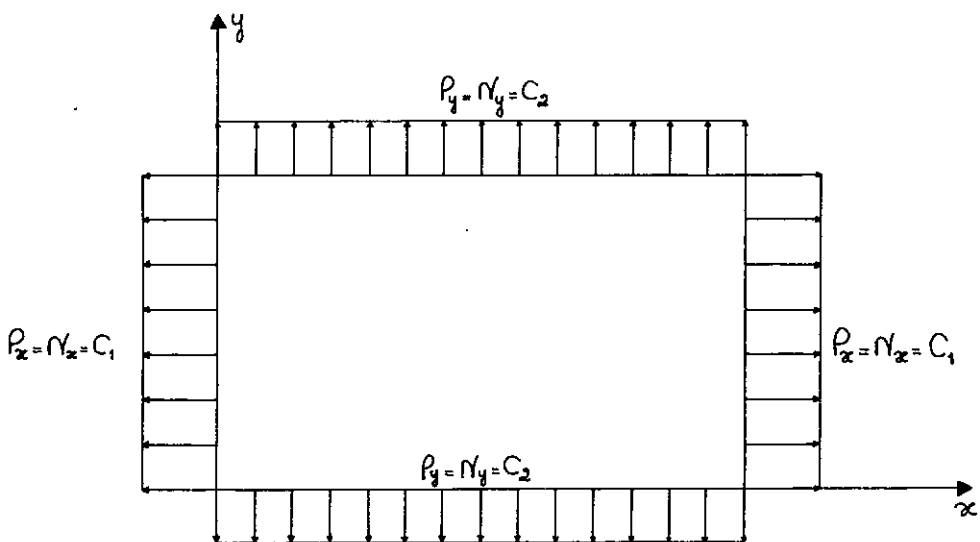


FIGURA 5.2

Para se achar a frequência de vibrações da placa sem carga, fazemos $N_x = P_x = 0$ e $N_y = P_y = 0$ em (5.4):

$$f_0 = \frac{\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}{\sqrt{\rho h}} \sqrt{\frac{S}{\frac{S(1-\nu^2)}{B} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}} \quad (5.8)$$

As cargas críticas da placa sandwich são calculadas fazendo $f=0$ em (5.4):

$$\frac{\pi^2 m^2}{a^2} P_x + \frac{\pi^2 n^2}{b^2} P_y = - \frac{S \left(\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{S(1-\nu^2)}{B} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}$$

Após transformações, obtemos:

$$\left(\frac{P}{\alpha} \right)_{crit.} = - \frac{a^2}{m^2} \left[\frac{n^2}{b^2} P_y + \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{S \left(\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{S(1-\nu^2)}{B} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}} \right] \quad (5.9)$$

Essa equação nos fornece a carga crítica na direção x para qualquer P_y constante.

CAPÍTULO VI

TABELAS E GRÁFICOS

A fim de facilitar a elaboração de tabelas e gráfi-
cos, vamos considerar que P_x e P_y são de compressão. Nessas
condições, e fazendo $\frac{a}{b} = R$, (5.9) pode ser escrita:

$$(P_z)_{cut.} = \frac{1}{m^2} \left[R^2 m^2 P_y + \frac{5(m^2 + m^2 R^2)^2}{\frac{5a^2(1-\nu^2)}{8\pi^2} + m^2 + m^2 R^2} \right]. \quad (6.1)$$

Sabemos que $D = \frac{B}{1-\nu^2}$. Multiplicando ambos os membros por
 $\frac{a^2}{D\pi^2}$ vem:

$$\frac{a^2}{D\pi^2} (P_z)_{cut.} = \frac{1}{m^2} \left[R^2 m^2 \frac{a^2}{D\pi^2} P_y + \frac{\frac{5a^2}{D\pi^2} (m^2 + m^2 R^2)^2}{\frac{5a^2}{D\pi^2} + m^2 + m^2 R^2} \right].$$

Façamos:

$$\frac{a^2}{D\pi^2} (P_x)_{crit.} = X_0, \quad (6.2)$$

$$\frac{P_y a^2}{D\pi^2} = y, \quad (6.3)$$

$$\frac{S a^2}{D\pi^2} = s = \frac{1}{H}. \quad (6.4)$$

Levando essas relações na equação anterior vem:

$$X_0 = \frac{1}{m^2} \left[R^2 m^2 y + \frac{s(m^2 + m^2 R^2)^2}{s + m^2 + m^2 R^2} \right]. \quad (6.5)$$

Mostremos que X_0 é crescente com n . Para tal, derivemos (6.5) em relação a n :

$$\frac{\partial X_0}{\partial n} = \frac{2m}{m^2} \left[y R^2 + s R^2 (m^2 + m^2 R^2) \frac{2s + m^2 + m^2 R^2}{(s + m^2 + m^2 R^2)^2} \right] > 0.$$

Como $\frac{\partial X_0}{\partial n} > 0$, segue que X_0 cresce com n . Então, o menor valor de X_0 corresponde a $n=1$ e vale:

$$X_0 = \frac{1}{m^2} \left[YR^2 + \frac{\delta(m^2+R^2)^2}{\delta+m^2+R^2} \right]. \quad (6.6)$$

Calculamos $\frac{\partial X_0}{\partial m}$:

$$\frac{\partial X_0}{\partial m} = \frac{2\delta(m^2+R^2) [\delta(m^2-R^2) - R^2(m^2+R^2)]}{m^3(\delta+m^2+R^2)^2} - \frac{2}{m^3} YR^3.$$

Quando $m < R$, $\frac{\partial X_0}{\partial m} < 0$. Portanto, enquanto $m < R$, X_0 decresce quando m cresce.

Escrevamos $\frac{\partial X_0}{\partial m}$ de um outro modo:

$$\frac{\partial X_0}{\partial m} = \frac{2\delta(m^2+R^2) [(\delta-R^2)m^2 - R^2(\delta+R^2)]}{m^3(\delta+m^2+R^2)^2} - \frac{2}{m^3} YR^3.$$

Vemos que quando $\delta \leq R^2$, X_0 decresce quando m cresce. Vejamos até qual valor X_0 decrescerá, quando m crescer indefinidamente:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\delta \frac{m^4 + 2m^2 R^2 + R^4}{m^4 + m^2 (\delta + R^2)} \right] + \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{YR^2}{m^2} \right),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_0 = \delta.$$

Quando $\delta \leq R^2$, o maior valor de X_0 corresponde a $m=1$ e vale:

$$\frac{\delta(1+R^2)^2}{\delta+1+R^2} + YR^2.$$

Portanto, para $\delta \leq R^2$,

$$\delta \leq X_0 \leq \left[\frac{\delta(1+R^2)^2}{\delta+1+R^2} + YR^2 \right], \quad \forall m. \quad (6.7)$$

Vamos analisar o caso $\delta > R^2$. Pela conclusão anterior ã da equação (6.7), X_0 decresce enquanto m cresce quando $m < R$. Continuando a crescer, m ultrapassará o valor de R , porém enquanto estiver próximo do valor de R , o minuendo da equação modificada de $\frac{\partial X_0}{\partial m}$ continuará negativo. À medida que fôr crescendo, m atingirá um valor m^* para o qual o minuendo daquela equação será positivo. A partir de m^* , o minuendo crescerá com m e o subtraendo decrescerá, para valores crescentes de m . Haverá um inteiro m^{**} para o qual $\frac{\partial X_0}{\partial m}$ será positiva. Isso nos permite concluir que: para $\delta > R^2$, enquanto $m < m^{**}$ X_0 decrescerá quando m crescer; para $m \geq m^{**}$ X_0 crescerá com m , até o valor limite δ , como foi mostrado

anteriormente. O valor m^{**} pode ser calculado fazendo $\frac{\partial X_0}{\partial m} = 0$. Calcularemos esse valor para a placa comprimida sõmente na direção x .

Para esse caso a equação (6.6) pode ser escrita, usando (6.4):

$$X_0 = \frac{1}{m^2} \times \frac{(m^2 + R^2)^2}{1 + (m^2 + R^2)H} \quad (6.8)$$

Nesse caso:

$$\frac{\partial X_0}{\partial m} = \frac{2\delta(m^2 + R^2) \cdot [(\delta - R^2)m - R^2(\delta + R^2)]}{m^3(\delta + m^2 + R^2)^2}$$

Fazendo $\frac{\partial X_0}{\partial m} = 0$ acharemos o valor de m^{**} :

$$(\delta - R^2)(m^{**})^2 = (\delta + R^2)R^2,$$

$$(m^{**})^2 = \frac{\delta + R^2}{\delta - R^2} R^2,$$

$$m^{**} = R \sqrt{\frac{\delta + R^2}{\delta - R^2}}$$

Calculemos $\frac{\partial m^{**}}{\partial \delta}$:

$$\frac{\partial m^{**}}{\partial \delta} = - \frac{R^3}{(\delta - R^2) \sqrt{(\delta + R^2)(\delta - R^2)}} < 0,$$

porque $\delta > R^2$. Portanto, m^{**} decresce quando δ cresce. O menor valor de m^{**} ocorre para a placa ordinária ($\delta = \infty$) e vale:

$$(m^{**})_{\min.} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left(R \sqrt{\frac{\delta + R^2}{\delta - R^2}} \right),$$

$$(m^{**})_{\min.} = R.$$

Como m é inteiro, segue que $(m^{**})_{\min.}$ é o inteiro mais próximo de R , para o qual X_0 é mínimo.

Façamos $N_x = -P_x$ e $N_y = -P_y$ em (5.4):

$$f = \frac{1}{\sqrt{\rho k}} \sqrt{\frac{S \left(\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2} \right)^2}{\frac{S(1-\nu^2)}{\beta} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2}} - \frac{\pi^2 m^2}{a^2} P_x - \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2} P_y}.$$

Usando $D = \frac{B}{1-\nu^2}$, $R = \frac{a}{b}$ e (6.4) vem:

$$\delta \sqrt{\frac{\rho h a^4}{D \pi^4}} = \sqrt{\frac{\delta (m^2 + R^2 n^2)^2}{\delta + m^2 + R^2 n^2} - m^2 \frac{P_x a^2}{D \pi^2} - R^2 n^2 \frac{P_y a^2}{D \pi^2}}$$

Façamos:

$$\delta \sqrt{\frac{\rho h a^4}{D \pi^4}} = V \quad ; \quad \frac{P_x a^2}{D \pi^2} = X \quad . \quad (6.9)$$

Levando (6.3) e (6.9) na equação acima temos:

$$V = \sqrt{\frac{\delta (m^2 + R^2 n^2)^2}{\delta + m^2 + R^2 n^2} - X m^2 - Y R^2 n^2} \quad . \quad (6.10)$$

Considerando que a placa é comprimida somente na direção x , (6.10) fica:

$$V = \sqrt{\frac{\delta (m^2 + R^2 n^2)^2}{\delta + m^2 + R^2 n^2} - X m^2} \quad .$$

Calculemos $\frac{\partial V}{\partial n}$:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{2V} \times \frac{4nR^2\delta^2(m^2+R^2n^2)+2n\delta R^2(m^2+R^2n^2)}{(\delta+m^2+R^2n^2)^2} > 0.$$

Portanto, V cresce com n . O menor valor de V corresponde a $n=1$ e vale:

$$V = \sqrt{\frac{\delta(m^2+R^2)^2}{\delta+m^2+R^2} - X m^2}. \quad (6.11)$$

A frequência V_0 sem carga axial é obtida fazendo $X=0$ em (6.11):

$$V_0 = \sqrt{\frac{\delta(m^2+R^2)^2}{\delta+m^2+R^2}}. \quad (6.12)$$

De (6.8) vem:

$$\frac{\delta(m^2+R^2)^2}{\delta+m^2+R^2} = X_0 m^2.$$

Levando em (6.11) e (6.12) vem:

$$V = \sqrt{(X_0 - X)m^2},$$

$$V_0 = \sqrt{X_0 m^2}.$$

Logo:

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{1 - \frac{X}{X_0}}. \quad (6.13)$$

Portanto, a relação entre $\frac{V}{V_0}$ e $\frac{X}{X_0}$ independe de m , δ e R .
Usando (6.4), (6.11) e (6.12) são escritas:

$$V = \sqrt{\frac{(m^2 + R^2)^2}{1 + (m^2 + R^2)H} - X m^2}, \quad (6.14)$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{(m^2 + R^2)^2}{1 + (m^2 + R^2)H}}. \quad (6.15)$$

Com (6.8), (6.14) e (6.15) foram confeccionados gráficos e tabelas.

Vimos que quando $\delta \ll R^2$, $\frac{\partial X_0}{\partial m}$ é sempre negativa. Co

mo $\lim_{m \rightarrow \infty} X_0 = \delta$, segue que no gráfico de X_0 em função de m , a curva será assintótica à reta $X_0 = \delta$. Além disso, sendo $\lim_{m \rightarrow 0} X_0 = \infty$, segue que a curva será também assintótica ao eixo X_0 . Essa curva é obtida fixando-se R e H em (6.8). Quando $\delta > R^2$, $\frac{\partial X}{\partial m} < 0$ enquanto $m < m^{**}$. Fixando-se R e H em (6.8) obtemos uma curva X_0 em função de m . Portanto, essa curva é assintótica ao eixo X_0 . Para $m \geq m^{**}$, $\frac{\partial X_0}{\partial m}$ será sempre positiva, isto é, sempre de mesmo sinal. Sendo $\lim_{m \rightarrow \infty} X_0 = \delta$, segue que a curva é assintótica também à reta $X_0 = \delta = \frac{1}{H}$.

Na equação (6.15) calculemos $\frac{\partial V_0}{\partial m}$:

$$\frac{\partial V_0}{\partial m} = \frac{m(m^2 + R^2)}{V_0} \times \frac{2 + (m^2 + R^2)H}{[1 + (m^2 + R^2)H]^2} > 0.$$

Portanto, o menor valor de V_0 corresponde a $m=1$ e vale:

$$V_0 = \sqrt{\frac{(1+R^2)^2}{1+(1+R^2)H}}. \quad (6.16)$$

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

De (6.8) sabemos:

$$X_0 = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{(m^2 + R^2)^2}{1 + (m^2 + R^2)H},$$

ou

$$X_0 = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{\delta (m^2 + R^2)^2}{\delta + m^2 + R^2}.$$

No capítulo anterior vimos que X_0 decresce quando m cresce, para $\delta \leq R^2$. Fixando δ e R , podemos fazer um gráfico de $X_0 = X_0(m)$. Nesse gráfico, X_0 se aproxima assintoticamente da reta $X_0 = \delta$. A curva $X_0 = X_0(m)$ é assintótica ao eixo $m=0$. Podemos, pois, concluir que quando $\delta \leq R^2$, a instabilidade da placa sandwich ocorrerá com uma carga $(P_x)_{crit.} = S$ (obtida de (6.2) e (6.4)).

Já quando $\delta > R^2$, o comportamento de $X_0 = X_0(m)$ é diferente: a curva $X_0 = X_0(m)$ é assintótica ao eixo $m=0$; desse

atê um certo valor de m , X_0 decresce quando m cresce, e atinge um mínimo para êsse valor de m (m^{**}); a partir daí, X_0 cresce com m , e se aproxima assintoticamente da reta $X_0 = \delta$. O valor m^{**} , no qual X_0 atinge um mínimo, decresce quando δ cresce. O menor modo de vibração m^{**} ocorre para $\delta = \infty$, isto é, para a placa ordinária, e é exatamente igual ã relação R entre os lados da placa.

Derivando (6.6) e (6.12) em relação a δ , conclui-se que X_0 e V_0 crescem com δ . Isso implica que os valores máximos de X_0 e V_0 correspondem a $\delta = \infty$, o que nos permite escrever os dois seguintes resultados:

- 1º) a carga de instabilidade de uma placa ordinária ($\delta = \infty$) é sempre superior a de uma placa sandwich, cujas faces sejam constituídas pelo mesmo material da placa ordinária;
- 2º) a frequência de vibrações de uma placa ordinária ($\delta = \infty$) descarregada é sempre superior a de uma placa sandwich, cujas faces sejam constituídas pelo mesmo material da placa ordinária.

O primeiro resultado é válido mesmo para a placa comprimida nas duas direções x e y .

Para a placa sandwich simplesmente apoiada, a variação da relação $\frac{V}{V_0}$ com $\frac{X}{X_0}$ independe do modo de vibração, da relação dos lados R e do parâmetro δ . A expressão que liga essas duas relações é idêntica a de uma viga sandwich simplesmente apoiada (VILLAÇA¹²).

O presente trabalho pode ser continuado fazendo-se o estudo para outras condições de contorno e de carregamento.

TABELA 2.
FREQUENCIA SEM CARGA AXIAL (V₀).

I		I		R		I				
I	H	I	0.5	I	1.0	I	1.5	I	2.0	I
I	0.00	I	1.250	I	2.000	I	3.250	I	5.000	I
I	0.01	I	1.242	I	1.980	I	3.198	I	4.879	I
I	0.02	I	1.234	I	1.961	I	3.149	I	4.767	I
I	0.03	I	1.227	I	1.942	I	3.102	I	4.662	I
I	0.04	I	1.219	I	1.924	I	3.057	I	4.564	I
I	0.05	I	1.212	I	1.906	I	3.014	I	4.472	I
I	0.06	I	1.205	I	1.889	I	2.973	I	4.385	I
I	0.07	I	1.198	I	1.873	I	2.933	I	4.303	I
I	0.08	I	1.191	I	1.856	I	2.895	I	4.225	I
I	0.09	I	1.185	I	1.841	I	2.858	I	4.152	I
I	0.10	I	1.178	I	1.825	I	2.823	I	4.082	I
I	0.11	I	1.172	I	1.810	I	2.789	I	4.016	I
I	0.12	I	1.165	I	1.796	I	2.756	I	3.952	I
I	0.13	I	1.159	I	1.781	I	2.724	I	3.892	I
I	0.14	I	1.153	I	1.767	I	2.694	I	3.834	I
I	0.15	I	1.147	I	1.754	I	2.664	I	3.779	I
I	0.16	I	1.141	I	1.740	I	2.636	I	3.726	I
I	0.17	I	1.135	I	1.727	I	2.608	I	3.676	I
I	0.18	I	1.129	I	1.714	I	2.581	I	3.627	I
I	0.19	I	1.123	I	1.702	I	2.555	I	3.580	I
I	0.20	I	1.118	I	1.690	I	2.530	I	3.535	I

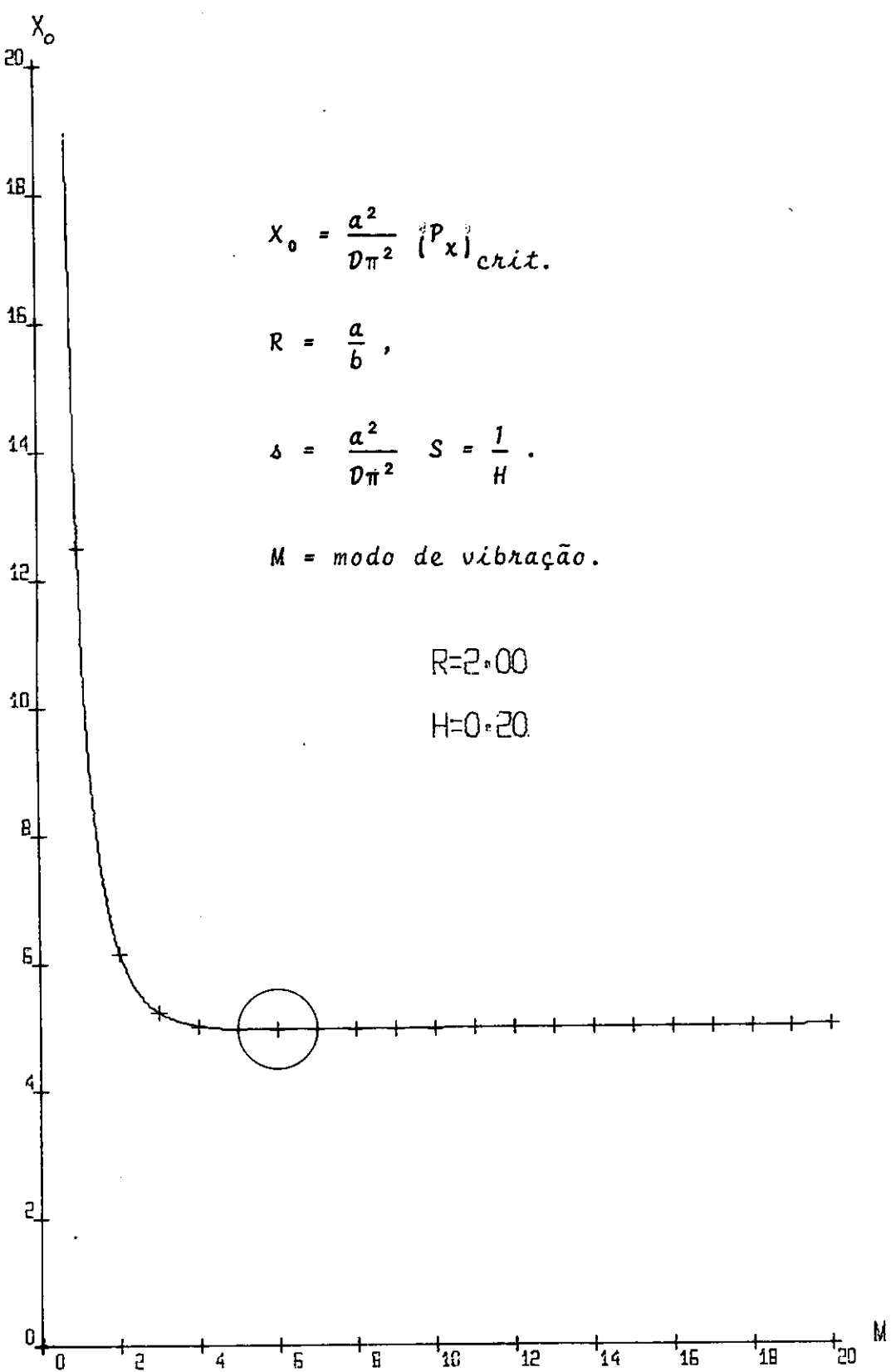
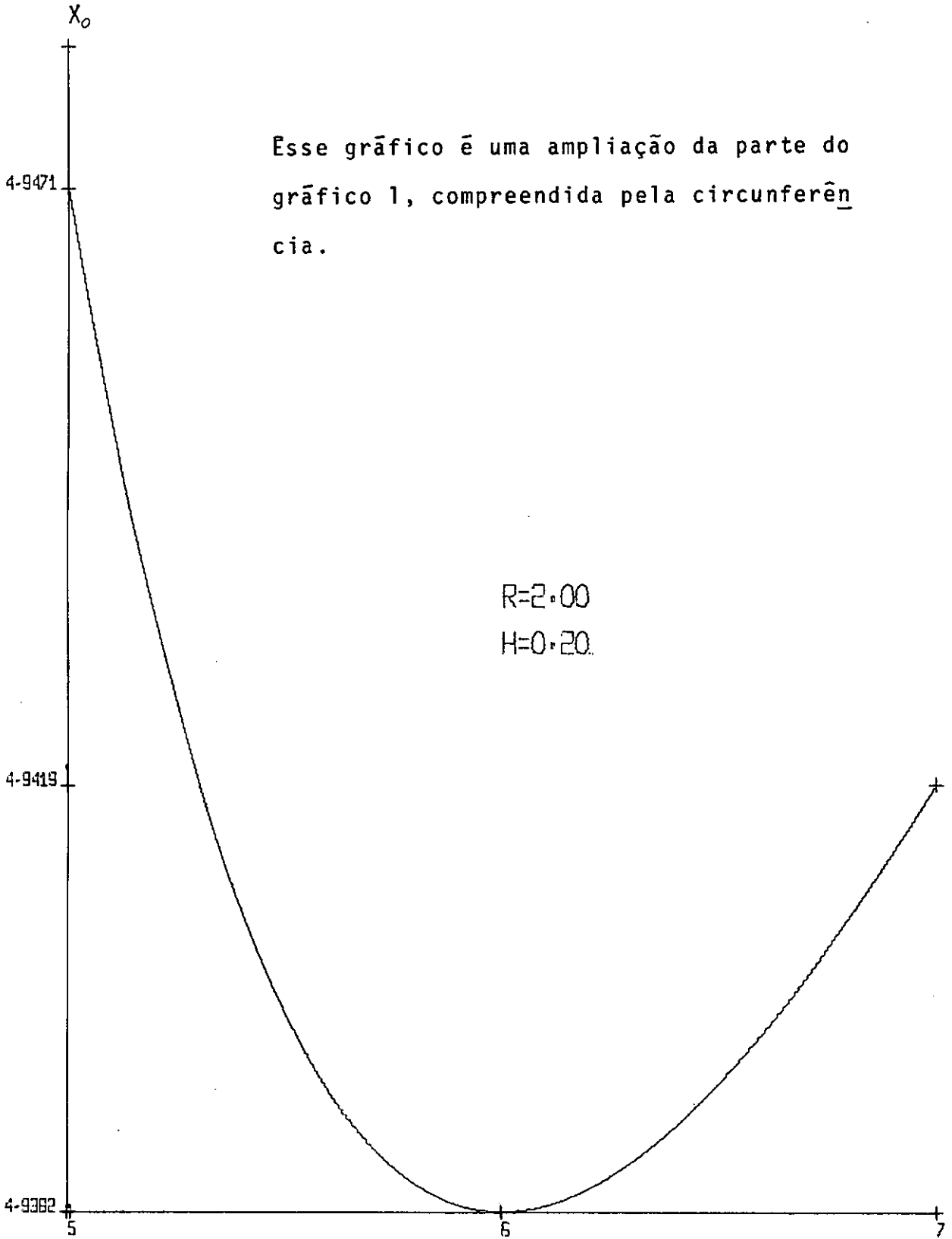


GRÁFICO 1

Esse gráfico é uma ampliação da parte do gráfico 1, compreendida pela circunferência.



$$R=2.00$$

$$H=0.20$$

GRÁFICO 1.A

$$X_0 = \frac{a^2}{D\pi^2} (P_x)_{crit.}$$

$$\delta = \frac{a^2}{D\pi^2} \quad S = \frac{1}{H}$$

$$R = \frac{a}{b}$$

$m = \text{modo de vibração.}$

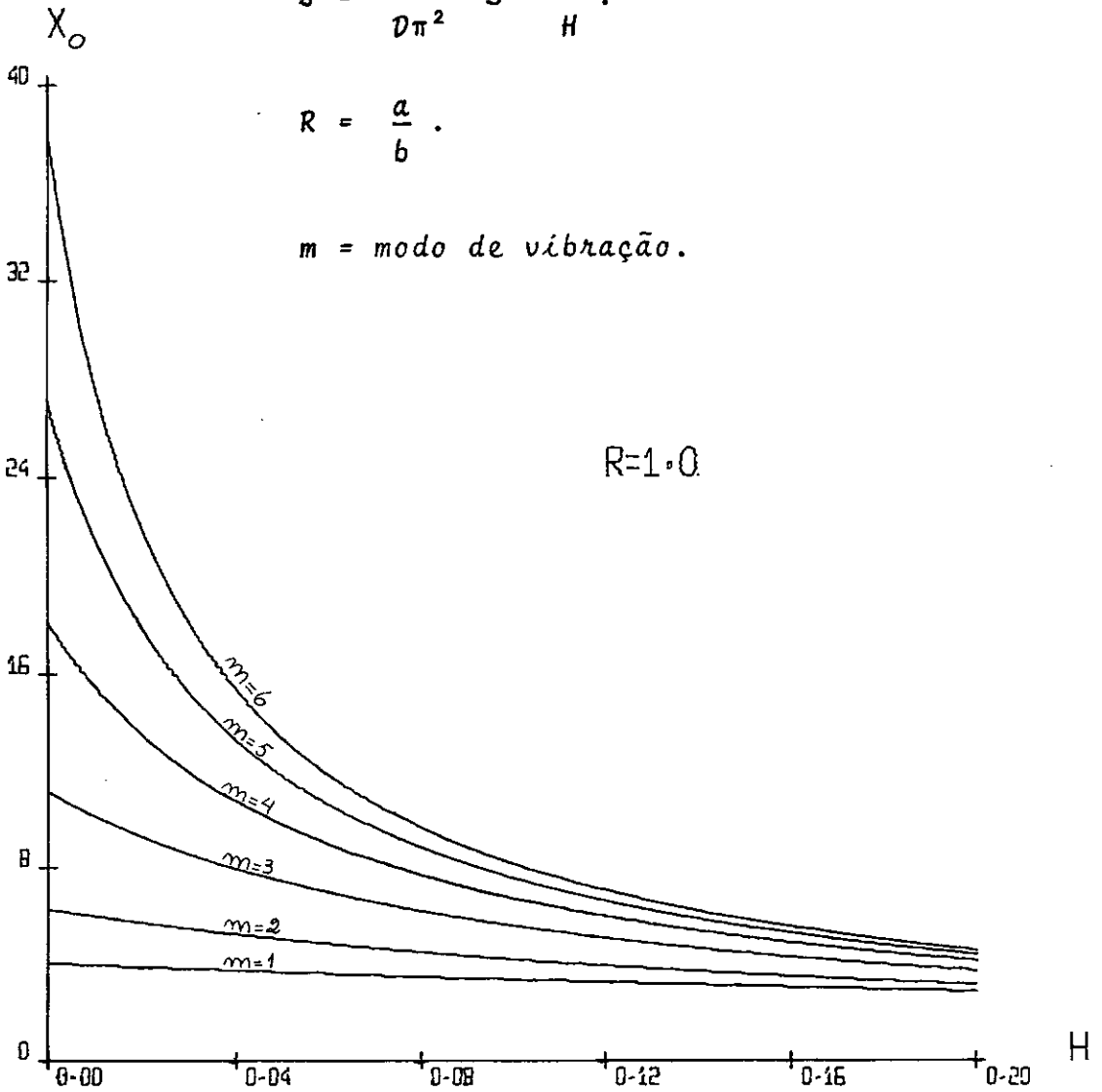


GRÁFICO 2

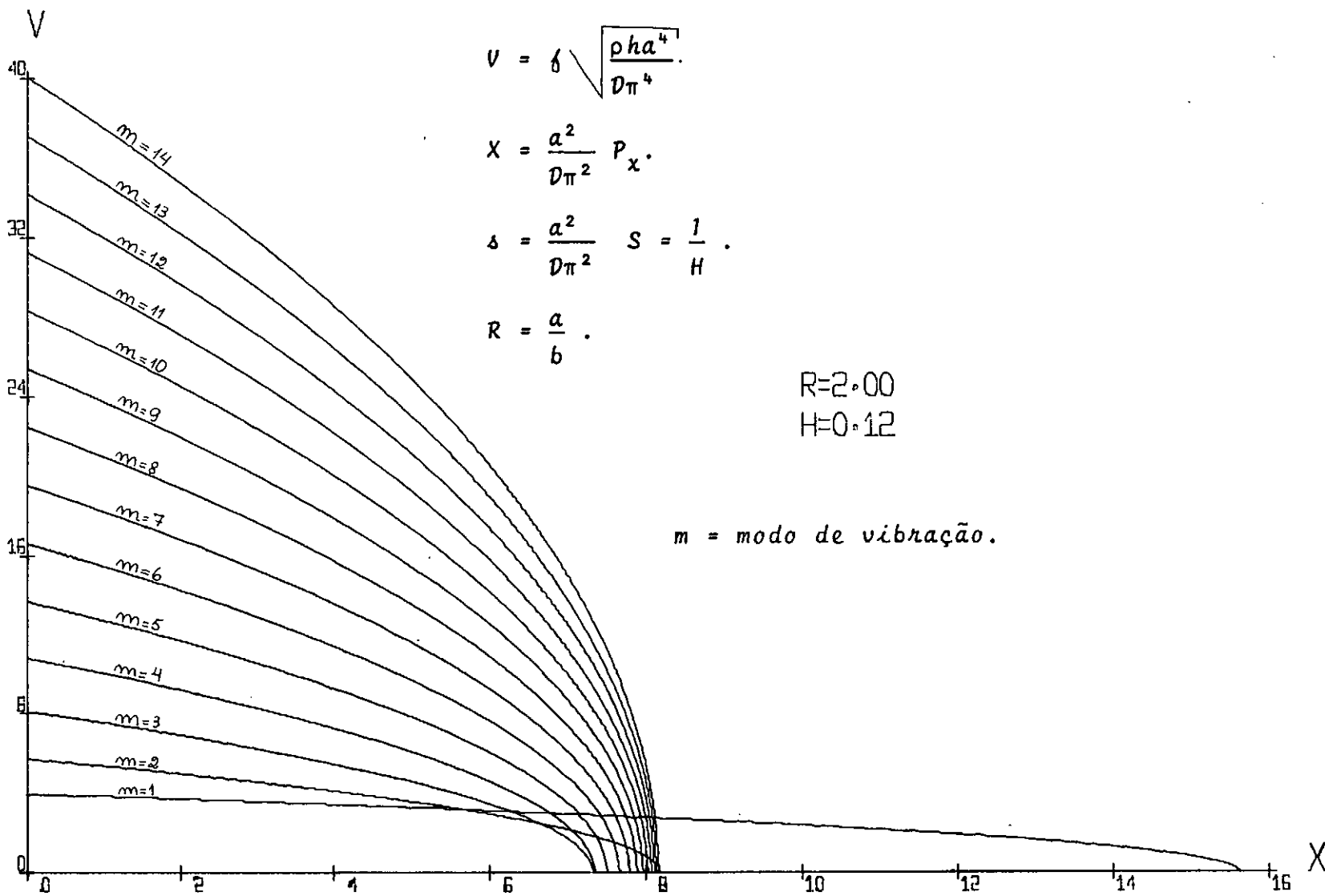


GRÁFICO 3

$$V = \delta \sqrt{\frac{\rho h a^4}{D \pi^4}}$$

$$X = \frac{a^2}{D \pi^2} P_x$$

$$\delta = \frac{a^2}{D \pi^2} \quad S = \frac{1}{H}$$

$$R = \frac{a}{b}$$

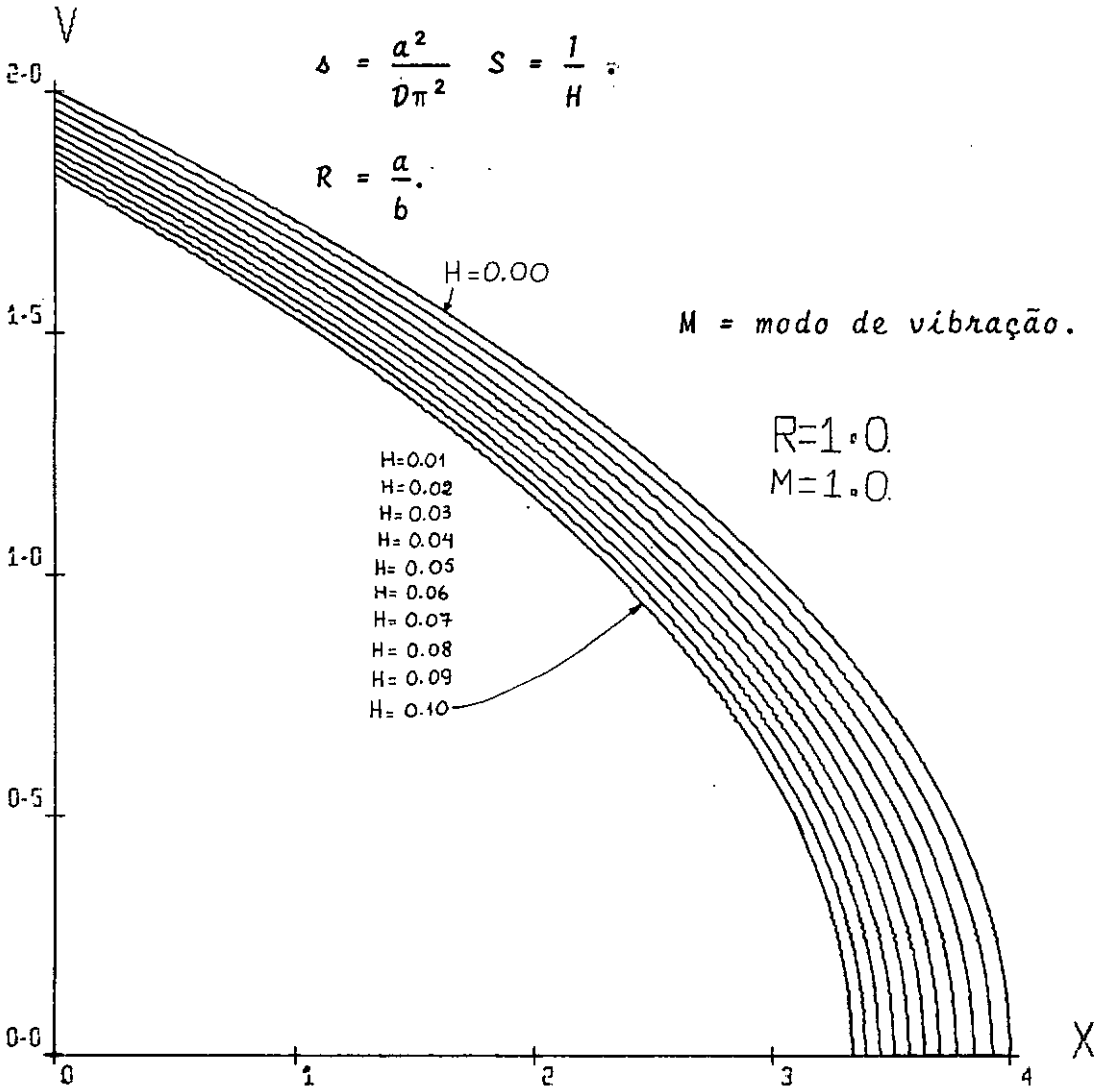


GRÁFICO 4

NOTAÇÕES

N_x, N_y, N_{xy} - esforços internos por unidade de comprimento.

Q_x - esforço cortante numa secção $x = \text{constante}$.

Q_y - esforço cortante numa secção $y = \text{constante}$.

M_x - momento fletor numa secção $x = \text{constante}$, por unidade de comprimento.

M_y - momento fletor numa secção $y = \text{constante}$, por unidade de comprimento.

M_{xy}, M_{yx} - momentos de torção, por unidade de comprimento.

q - carga transversal ao plano médio da placa sandwich, por unidade de área.

B_x - rigidez à flexão na direção x , por unidade de comprimento.

B_y - rigidez à flexão na direção y , por unidade de comprimento.

- T - rigidez à torção, por unidade de comprimento.
- S_x - rigidez ao cisalhamento na direção x , por unidade de comprimento.
- S_y - rigidez ao cisalhamento na direção y , por unidade de comprimento.
- ν_x, ν_y - coeficientes de Poisson nas direções x e y .
- γ_x - distorção do elemento de placa no plano xz .
- γ_y - distorção do elemento de placa no plano yz .
- u - deslocamento do plano médio da placa sandwich, na direção x .
- v - deslocamento do plano médio da placa sandwich, na direção y .
- w - deflexão do plano médio da placa sandwich, na direção z .
- w_{bx} - deflexão parcial do plano médio da placa sandwich, correspondente a $S_x = \infty$.
- $w_{\delta x}$ - deflexão parcial do plano médio da placa sandwich, correspondente a $B_x = \infty$.

e - espessura da face.

c - espessura do núcleo.

D_x, D_y - grandezas definidas no texto (pág. 10).

D - grandeza definida no texto (pág. 23).

K - energia cinética na direção z .

A - ação.

B - rigidez à flexão.

ρ, h - grandezas definidas no texto (pág. 25).

S - rigidez ao cisalhamento.

ν - coeficiente de Poisson.

U - energia de deformação.

U_p - energia potencial total.

x, y - coordenadas de um ponto do plano médio da placa sandwich.

t - variável tempo.

$\phi(x, y)$ - função de tensão de Airy.

γ_{cx} - distorção do núcleo no plano xz .

γ_{cy} - distorção do núcleo no plano yz .

λ - parâmetro adimensional definido no texto (equação (4.8)).

μ - parâmetro adimensional definido no texto (equação (4.9)).

a - dimensão da placa na direção x .

b - dimensão da placa na direção y .

c - amplitude do movimento vibratório.

δ - frequência de vibrações da placa sandwich carregada.

δ_0 - frequência de vibrações da placa sandwich descarregada.

m, n - modos de vibração.

P_x, P_y - carga no plano médio da placa sandwich, por unidade de comprimento.

- R - relação entre os lados da placa sandwich ($R \equiv \frac{a}{b}$).
- X_0 - parâmetro adimensional proporcional à carga de instabilidade na direção x , definido no texto (pág. 67).
- Y - parâmetro adimensional, proporcional ao carregamento na direção y , definido no texto (pág. 67).
- δ - parâmetro adimensional, proporcional à rigidez ao cisalhamento, definido no texto (pág. 67).
- H - inverso de δ (para fins de computação).
- m^* , m^{**} - modos de vibração definidos no texto (pág. 69).
- V - parâmetro adimensional, proporcional à frequência de vibrações, definido no texto (pág. 72).
- X - parâmetro adimensional, proporcional ao carregamento na direção x , definido no texto (pág. 72).
- V_0 - parâmetro adimensional, proporcional à frequência de vibrações da placa sandwich descarregada.
- M - nas tabelas e gráficos é a mesma coisa que m .

BIBLIOGRAFIA

1. ALLEN, Howard G.: "Analysis and Design of Structural Sandwich Panels"; Pergamon Press, 1969.
2. ELSGOLC, L.E.: "Calculus of Variations".
3. FORSYTH, A.R.: "Calculus of Variations"; Dover, New York, 1960.
4. GELFAND, I.M., FOMIN, S.V.: "Calculus of Variations"; Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
5. KAPLAN, Wilfred: "Advanced Calculus"; Addison-Wesley Publishing Company, 1952.
6. LANGHAAR, H.L.: "Energy Methods in Applied Mechanics"; John Wiley and Sons, New York, 1962.
7. NOWACKI, W.: "Dynamics of Elastic Systems"; Chapman and Hall, Ltd., London, 1963.

8. GOMES, Paulo, BEVILÁCQUA, Luiz: "Vibrações e Instabilidade de Placas Retangulares Submetidas a Cargas de Compressão Não Uniformes"; COPPE-UFRJ, 1968.
9. GOMES, Paulo: "Vibrações Livres de Placas Submetidas a Cargas Distribuídas de Modo Não Uniforme ao Longo de sua Superfície Média"; COPPE-UFRJ, 1968.
10. PLANTEMA, Frederik J.: "Sandwich Construction"; John Wiley and Sons, New York, 1966.
11. TIMOSHENKO, S.P.: "Theory of Plates and Shells"; McGraw-Hill, 1959.
12. VILLAÇA, Sérgio Fernandes: "Análise Dinâmica de Vigas Sandwich Comprimidas"; Tese de Mestrado, COPPE-UFRJ, 1970.
13. WEINSTOCK, Robert: "Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering"; McGraw-Hill, New York, 1952.