



Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza  
Observatório do Valongo



# Noções de Distância no Universo Como Um Teste Para a Relatividade Geral

Marcus Vinícius Bomfim de Jesus

Rio de Janeiro  
Julho de 2024

# Noções de Distância no Universo Como Um Teste Para a Relatividade Geral

Marcus Vinícius Bomfim de Jesus

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Observatório do Valongo, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito necessário para a obtenção do título de Astrônomo.

Orientador: Ribamar Rondon de Rezende dos Reis

Rio de Janeiro  
Julho de 2024



## PROJETO FINAL

### RELATÓRIO DA COMISSÃO JULGADORA

**ALUNO:** Marcus Vinícius Bomfim de Jesus (DRE 118193656)

**TÍTULO DO TRABALHO:** “NOÇÕES DE DISTÂNCIA NO UNIVERSO COMO UM TESTE PARA A RELATIVIDADE GERAL”

**DATA DA DEFESA:** 02 de maio de 2024 às 10:30 h

#### MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Thiago Signorini Gonçalves – Presidente – OV/UFRJ

Prof. Ribamar Rondon Rezende dos Reis – Orientador – (IF/UFRJ)

Prof. Carlos Augusto Domingues Zarro – ( IF/UFRJ)

**CANDIDATO:**

Marcus Vinícius Bomfim de Jesus

Rio de Janeiro, 02 de maio de 2024.

Prof. Carlos Roberto Rabaça  
Coord. de Grad. do Curso de Astronomia

## CIP - Catalogação na Publicação

J322n Jesus, Marcus Vinícius Bomfim de  
Noções de Distância no Universo Como Um Teste Para  
a Relatividade Gera / Marcus Vinícius Bomfim de  
Jesus. -- Rio de Janeiro, 2024.  
126 f.

Orientador: Ribamar Rondon de Rezende dos Reis.  
Trabalho de conclusão de curso (graduação) -  
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Observatório  
do Valongo, Bacharel em Astronomia, 2024.

1. Relatividade Geral. 2. Cosmologia. 3.  
Geometria Diferencial. 4. Equação de Einstein. 5.  
Distâncias no Universo. I. Reis, Ribamar Rondon de  
Rezende dos , orient. II. Título.

*Dedico este trabalho a todos os que me ajudaram ao longo desta caminhada.*

# *Agradecimentos*

Agradeço a toda minha família pela paciência e confiança, ao meu orientador pelos ensinamentos e pelo minucioso escrutínio do texto. Dirijo, também, os meus mais sinceros agradecimentos a todos que contribuíram de maneira relevante à elaboração deste trabalho.

# *Resumo*

## **Noções de Distância no Universo Como Um Teste Para a Relatividade Geral**

Marcus Vinícius Bomfim de Jesus

Orientador: Ribamar Rondon de Rezende dos Reis

RESUMO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO SUBMETIDO AO OBSERVATÓRIO DO VALONGO, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, COMO REQUISITO NECESSÁRIO PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE ASTRÔNOMO.

O trabalho explora a interseção entre geometria diferencial e cosmologia, focando na compreensão das distâncias no universo. A geometria diferencial fornece ferramentas para descrever estruturas complexas, como variedades Riemannianas, fundamentais na relatividade geral. Soluções cosmológicas da equação de Einstein são discutidas, incluindo a métrica FLRW. O estudo das medidas de distância, como a lei de Hubble, é essencial na cosmologia observacional. A substituição do fator de escala por observáveis cosmológicos é destacada como um teste robusto para a teoria da relatividade geral, evidenciando a importância dessa interseção para a compreensão do universo.

**palavras chave:** *Cosmologia, Relatividade Geral, Geometria Diferencial, Distâncias no Universo, Equação de Einstein, etc.*

Rio de Janeiro

Julho de 2024

# *Abstract*

## **Notions of Distance in the Universe as a Test for General Relativity**

Marcus Vinícius Bomfim de Jesus

Advisor: Ribamar Rondon de Rezende dos Reis

ABSTRACT SUBMITTED TO THE VALONGO OBSERVATORY, FEDERAL UNIVERSITY OF RIO DE JANEIRO,  
IN FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF ASTRONOMER.

The work explores the intersection between differential geometry and cosmology, focusing on the understanding distances in the universe. Differential geometry provides tools to describe complex structures, such as Riemannian manifolds, fundamental in general relativity. Cosmological solutions to Einstein's equation are discussed, including the FLRW metric. The study of distance measurements, such as Hubble's law, is essential in observational cosmology. Replacing the scale factor with cosmological observables is highlighted as a robust test for the theory of general relativity, highlighting the importance of this intersection for understanding the universe.

**keywords:** *Cosmology, General Relativity, Differential Geometry, Distances in Universe, Einstein Equation.*

Rio de Janeiro

July 2024

# Lista de Figuras

2.1	Comparando os vetores $Y _p$ e $Y _{\sigma_\epsilon(p)}$ por meio do mapa diferencial $d\sigma_\epsilon$ . . . . .	32
2.2	Transporte paralelo de $V(t_0) = X_0$ ao longo da curva diferenciável $\gamma$ . . . . .	44
3.1	Representação da transformação de Lorentz no plano $x - t$ . O ângulo de boost $\alpha$ é determinado por $\beta = v/c = \tan(\alpha)$ . . . . .	65
3.2	Cone de Luz no espaço 1+2. . . . .	66
4.1	A Linha pontilhada representa a projeção no plano da superfície formada pela CMB, vista da via Láctea. A circunferência maior, de linha cheia, ilustra a expansão do Universo vista da Via Láctea. . . . .	88
4.2	A imagem é uma projeção mollweide (projeção cilíndrica) das variações de temperatura sobre a esfera celeste. Estes dados foram coletados em todo o céu ao longo de 7 anos pelo projeto Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP). A temperatura média é de 2,725 k, e as cores representam as pequenas flutuações de temperatura, como em um mapa meteorológico. As regiões vermelhas são mais quentes e as regiões azuis são mais frias em cerca de 0,0002 k. Neste mapa as contribuições de outras fontes (galáxias, estrelas etc.) foram classificadas como ruído e subtraídas. <b>Fonte:</b> <a href="https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/101080/">https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/101080/</a> . . . . .	89
4.3	Feixe de geodésicas ortogonais a hiper-superfície do tipo espaço $\Sigma_t$ , em um dado instante $t$ . . . . .	91
4.4	Hiper-superfície esférica, sobre a qual estendem-se as coordenadas ortogonais $\chi$ e $S$ . . . . .	92
4.5	Hiper-superfície plana, sobre a qual estendem-se as coordenadas ortogonais $\chi$ e $S$ . . . . .	93
4.6	Hiper-superfície hiperbólica, sobre a qual estendem-se as coordenadas ortogonais $\chi$ e $S$ . . . . .	95
4.7	Frentes de onda emitidas em $t_e$ e $t_e + \delta t_e$ , detectadas em $t_0$ e $t_e + \delta t_0$ respectivamente. . . . .	120
5.1	Dinâmica de expansão do Universo. . . . .	124
5.2	Cone de Luz passado de uma Galáxia vizinha. . . . .	127
5.3	Emissão e detecção de feixe de fótons no Universo. . . . .	129
5.4	Relação entre as quantidades usadas no cálculo do diâmetro angular e do diâmetro próprio da fonte extensa. . . . .	132
5.5	Relação entre as quantidades usadas no cálculo do diâmetro angular e do diâmetro próprio da fonte extensa no espaço-tempo completo. . . . .	133

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Elementos de Geometria Diferencial</b>	<b>13</b>
2.1	VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS . . . . .	14
2.2	Cálculo sobre Variedades Diferenciáveis . . . . .	17
2.2.1	Vetores, Formas Diferenciais e Tensores . . . . .	17
2.2.2	O Mapa Diferencial e o Retrocesso . . . . .	22
2.2.3	Campos Vetoriais . . . . .	24
2.2.4	Derivadas de Lie . . . . .	26
2.3	Variedades Riemannianas . . . . .	31
2.3.1	Métricas Riemanniana e Pseudo Riemanniana . . . . .	32
2.3.2	Conexão Afim . . . . .	38
2.3.3	Transporte paralelo . . . . .	43
2.3.4	Equação da Geodésica . . . . .	44
2.3.5	Conexão Riemanniana . . . . .	47
2.3.6	Curvatura . . . . .	51
2.3.7	Curvaturas Seccionais . . . . .	56
2.3.8	Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura . . . . .	58
2.3.9	Desvio Geodésico . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Teoria da Relatividade</b>	<b>63</b>
3.1	Relatividade Especial . . . . .	63
3.1.1	Dilatação Temporal . . . . .	67
3.1.2	Contração Espacial . . . . .	67
3.1.3	Energia Relativística . . . . .	68
3.1.4	O Fluido Relativístico . . . . .	70
3.2	Relatividade Geral . . . . .	73
3.2.1	A Teoria da Gravitação de Newton . . . . .	73
3.2.2	Equação de Einstein . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Soluções Cosmológicas da Equação de Einstein</b>	<b>84</b>
4.1	Princípio Cosmológico. . . . .	86
4.2	A Geometria Do Espaço-Tempo. . . . .	91
4.2.1	As Possíveis Geometrias Da Seção Espacial. . . . .	92
4.2.2	A Métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW). . . . .	95
4.2.3	A Equação de Friedmann . . . . .	97
4.2.4	A Adoção da Constante Cosmológica $\Lambda$ . . . . .	102
4.3	Modelos Cosmológicos. . . . .	105
4.3.1	Universo Dominado por Matéria . . . . .	105

4.3.2	Universo Dominado Por Radiação. . . . .	108
4.3.3	O Universo De de Sitter . . . . .	110
4.4	Parâmetros Cosmológicos. . . . .	111
4.4.1	Os Parâmetros de Densidade do Universo. . . . .	113
4.4.2	Parâmetro de Desaceleração do Universo. . . . .	117
4.4.3	A cinemática dos Raios de Luz: O <i>Redshift</i> . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Medidas de Distância no Universo</b>	<b>123</b>
5.1	A Lei de Hubble Geométrica. . . . .	124
5.2	A Lei de Hubble Observável. . . . .	127
5.2.1	Distância de Luminosidade. . . . .	128
5.2.2	Distância de Diâmetro Angular. . . . .	131
5.3	Cosmologia Observacional. . . . .	136
5.3.1	Supernovas do Tipo Ia. . . . .	136
5.3.2	Radiação Cósmica de Fundo (CMB) . . . . .	140
5.3.3	Oscilações Acústicas de Bárions (BAO) . . . . .	144
5.3.4	Dados Cosmológicos Atuais e Futuros. . . . .	147
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>152</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>154</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho explora a interseção entre a geometria diferencial e a cosmologia, com um foco especial na compreensão das noções de distância no universo. A geometria diferencial, discutida nos capítulos 2 e 3, fornece as ferramentas matemáticas necessárias para descrever estruturas complexas, como variedades diferenciáveis e variedades Riemannianas. Estas estruturas são fundamentais para a descrição do espaço-tempo na teoria da relatividade geral.

No entanto, estabelecer uma noção de distância no universo é um desafio quando o universo é interpretado como uma variedade pseudo-Riemanniana. Esta dificuldade surge devido à natureza curva do espaço-tempo, que é uma característica central da teoria da relatividade geral.

A teoria da relatividade, discutida no capítulo 3, é a base para a nossa compreensão moderna da gravidade e da dinâmica do universo em larga escala. Ela nos permite formular a equação de Einstein, que é a chave para descrever a evolução do universo.

No capítulo 4, exploramos soluções cosmológicas para a equação de Einstein, introduzindo o princípio cosmológico e a geometria do espaço-tempo. Aqui, a geometria diferencial se torna crucial, pois nos permite descrever a métrica de Friedmann Lemaître Robertson Walker (FLRW), que é a solução mais geral para um universo homogêneo e isotrópico.

No capítulo 5, aplicamos essas teorias para entender as medidas de distância no universo. A lei de Hubble, tanto em sua forma geométrica quanto observável, é discutida, juntamente com conceitos como distância de luminosidade e distância de diâmetro angular. Essas medidas de distância são fundamentais para a cosmologia observacional, permitindo-nos interpretar observações de supernovas do tipo Ia, radiação cósmica de fundo e oscilações acústicas de bárions.

Após derivarmos uma expressão para  $a(t)$ , por meio de imposições muito severas quanto a natureza do espaço-tempo, ainda não somos capazes de observar o fator de escala. Em Cosmologia, qualquer medida depende do fator de escala, quantidade impossível de ser observada, já que esse elemento é quem torna a métrica uma descrição física e não somente matemática. Por conta disso, veremos que, em sua versão observacional, a Cosmologia nos exigirá substituir o fator de escala pelos chamados observáveis cosmológicos. Quantidades que são, em última análise, um teste robusto para a teoria da Relatividade Geral.

Em resumo, a geometria diferencial fornece a linguagem matemática que usamos para descrever o universo em grande escala, enquanto a teoria da relatividade e a cosmologia nos dão o contexto físico para aplicar essa linguagem. Juntos, eles nos permitem entender conceitos fundamentais como a distância no universo. Esta interseção entre a geometria diferencial e a cosmologia é fundamental para a nossa compreensão do universo e das distâncias dentro dele. A geometria diferencial, em particular, desempenha um papel crucial na descrição e compreensão dessas distâncias.

## Capítulo 2

# Elementos de Geometria Diferencial

Diferentes conjuntos matemáticos não compartilham necessariamente as mesmas propriedades, pois essas dependem das características específicas de cada um. Em muitos casos, simples operações binárias, como a soma entre seus elementos, podem não ser permitidas. Se quisermos estender as ferramentas analíticas a espaços mais gerais que  $\mathbb{R}^n$ , precisamos ser capazes de compreender as características geométricas desses espaços em cada vizinhança de seus pontos.

A *Geometria Diferencial* é a disciplina matemática que nos possibilita descrever e analisar a noção de curvatura local e seus efeitos nos mais variados conjuntos matemáticos, empregando cálculo diferencial e integral. Essa área combina conceitos de geometria, análise e álgebra para entender a estrutura e o comportamento das chamadas *variedades diferenciáveis*, que são espaços que podem ser descritos localmente por coordenadas e funções diferenciáveis.

O Universo se enquadra no conjunto das variedades diferenciáveis com geometrias distintas da geometria plana do espaço Euclidiano. As leis físicas que descrevem o Universo precisam ser generalizadas para ambientes com curvatura significativa. Neste capítulo, apresentaremos as ferramentas da Geometria Diferencial necessárias para representar espaços curvos e descrever leis físicas aplicáveis a eles. Para obter maiores detalhes formais sobre o estudo da Geometria Diferencial, consulte Nakahara (1990);

do Carmo (1988); Wald (1984); Weinberg & Steven (1972); Misner et al. (1973); Lima (1973).

## 2.1 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

A geometria diferencial é um ramo da matemática que estuda a geometria dos espaços que não são necessariamente planos ou curvos.

*Definição 2.1.* Sejam  $X$  e  $Y$  duas classes que possuem sobre si algum tipo de estrutura matemática. Um morfismo é a associação entre elementos de  $X$  e  $Y$ , representada por  $f : X \rightarrow Y$ , que preserva as estruturas originais de ambos.  $f$  é membro da classe das aplicações, ou mapeamentos, de  $X$  em  $Y$ .

Além de morfismo a associação entre os elementos de duas classes pode ser chamada de "mapa" ou de "aplicação".

*Definição 2.2.* Dados os elementos  $x \in X$ ,  $y \in Y$  e o morfismo entre eles  $f : x \mapsto y$ , caso exista, o morfismo inverso é denotado como  $f^{-1} : y \mapsto x$ .

Funções, por exemplo, são morfismos entre uma classe arbitrária e o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^1$ . De tal sorte que as propriedades e características das funções estendem-se aos morfismos, sendo esses generalizações das funções. Quando outras condições são impostas tem-se o que chamamos de morfismos especiais.

*Definição 2.3.* Um morfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre duas classes é um homeomorfismo se tiver as seguintes propriedades:

- (i)  $f$  é bijetiva;
- (ii)  $f$  é contínua;
- (iii) a aplicação inversa  $f^{-1}$  é contínua.

Dois subclasses importantes de homeomorfismos são as dos que podem ser diferenciados e as dos que associam elementos de um conjunto a si próprios.

*Definição 2.4.* O homeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre  $X$  e  $Y$  é um  $C^r$ -difeomorfismo se  $f$  for  $r$  vezes diferenciável.

*Definição 2.5.* O homeomorfismo  $id_X : a \mapsto a \forall a \in X$  definido sobre um conjunto  $X$  qualquer é chamado de identidade desse conjunto.

Outra subclasse útil é a dos homomorfismos, só que sua definição requer o emprego de outro morfismo importante a composição.

*Definição 2.6.* Dado um conjunto  $X$  chamamos o morfismo  $\circ$  de regra de composição se  $\forall a, b \in X$  sempre é possível encontrar  $c \in X$  tal que  $a \circ b = c$ .

É dito que através de  $\circ$  dois elementos de um conjunto são levados a um terceiro elemento do mesmo conjunto. Logo,  $\circ$  é definido e avaliado no mesmo conjunto, sendo, portanto, um morfismo interno ou uma estrutura interna deste.

*Definição 2.7.* Suponhamos que os elementos dos conjuntos  $X$  e  $Y$  relacionam-se por meio da atuação de  $f : X \rightarrow Y$ , ou seja  $\forall a \in X, \exists f(a) \in Y$ . Seja  $\circ$  a regra de composição de  $X$  no qual  $a \circ b = c$ , onde  $a, b, c \in X$ . Então, se  $\forall a, b, c \in X$ , sempre que for possível encontrar  $f(a), f(b), f(c) \in Y$  tais que  $f(a) \circ f(b) = f(c)$  chamamos  $f$  de homomorfismo e os conjuntos  $X$  e  $Y$  são ditos homomórficos entre si.

Um homomorfismo é um mapa que preserva a estrutura algébrica ao aplicar um conjunto sobre outro.

*Definição 2.8.* O homomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre os conjuntos  $X$  e  $Y$  é um isomorfismo quando for sobrejetivo e tiver um inverso  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  que também seja sobrejetivo.

Em outras palavras um isomorfismo é um homomorfismo bijetivo.

Assumiremos neste trabalho que se um mapa  $f$ , definido sobre um conjunto  $X$ , for um difeomorfismo ele será infinitamente diferenciável, isto é, pertencerá ao conjunto  $C^\infty(X)$ . Classificamos mapas desse tipo como suaves.

A classe no qual tem-se interesse aqui é a das variedades diferenciáveis, que é, na verdade, subclasse de outras que serão definidas antes para que alguns de seus aspectos mais importantes não sejam suprimidos.

*Definição 2.9 (Espaços Topológicos).* Consideremos um conjunto  $X$  e uma coleção  $\Upsilon = \{U_i\}_{i=1}^n$ , de dimensão  $n \in \mathbb{N}$ , dos seus subconjuntos abertos (ou apenas abertos)  $U_i \in X$ . O par  $(X, \Upsilon)$  é chamado de espaço topológico quando:

- (i) O conjunto vazio  $\emptyset$  e o próprio  $X$  pertencem a  $\Upsilon$ .

(ii) A união de um número arbitrário de abertos,

$$\bigcup_j U_j,$$

pertence a  $\Upsilon$ .

(iii) A interseção de um número finito de abertos,

$$\bigcap_k U_k,$$

pertence a  $\Upsilon$ .

*Definição 2.10 (Cobertura).* Uma coleção  $W_l$ , com  $l \in I \subset \mathbb{N}$ , é chamada de cobertura do espaço topológico  $X$  se:

$$\bigcup_{l \in I} W_l = X.$$

*Definição 2.11.* Um subconjunto  $V$  do espaço topológico arbitrário  $M$  é chamado de vizinhança de do ponto  $p \in M$  se sempre for possível encontrar ao menos um conjunto  $A$ , tal que  $p \in A \subseteq M$ .

Se  $V$  for um conjunto aberto o chamamos de vizinhança aberta.

Ao par  $(U, \phi)$  formado pelo homeomorfismo  $\phi : U \subset M \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$  e o aberto  $U$  damos o nome de carta. Uma coleção de cartas  $\{U_\alpha, \phi_\alpha, \alpha \in I \subset \mathbb{N}^*\}$  nomeamos como atlas.

*Definição 2.12.* Se existirem vizinhanças  $V_p$  e  $V_{p'}$  respectivamente de  $p, p' \in M$ , tais que sua interseção seja vazia,  $V_p \cap V_{p'} = \emptyset$ , então  $M$  é, além de um espaço topológico, um espaço de Hausdorff.

Em espaços de Hausdorff consegue-se vizinhanças independentes umas das outras.

*Definição 2.13.* Seja  $J \subset I$  um subconjunto do conjunto  $I$  de índices de uma cobertura  $\{U_\alpha, \alpha \in I \subset \mathbb{N}^*\}$  de  $M$ . Se a subcoleção  $\{U_\alpha, \alpha \in J\}$  de abertos for também uma cobertura então  $M$  é um espaço compacto.

*Definição 2.14.* Um espaço topológico  $M$  é chamado de variedade caso possua um atlas  $\{U_\alpha, \phi_\alpha, \alpha \in I \subset \mathbb{N}^*\}$  onde  $\bigcup_{\alpha} U_\alpha = M$ .

Variedades de dimensão  $m$ , portanto, são espaços topológicos cujo os abertos de sua cobertura são homeomorfos a abertos de  $\mathbb{R}^m$ . Em outras palavras, variedades são espaços topológicos localmente equivalentes a espaços euclidianos. Já variedades diferenciáveis requerem condições adicionais as da definição 2.14.

*Definição 2.15.* O conjunto  $M$ , de dimensão  $m$ , é uma variedade diferenciável se:

- (1) For um espaço topológico;
- (2) possuir um atlas  $\{U_\alpha, \phi_\alpha, \alpha \in I \subset \mathbb{N}^*\}$  em que  $\bigcup_{\alpha} U_\alpha = M$ ;
- (3)  $\forall \alpha$  e  $\beta$ , com  $U_\alpha \cap U_\beta = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\phi_\alpha(W)$  e  $\phi_\beta(W)$  forem abertos em  $\mathbb{R}^m$ ;
- (4) dados  $U_\alpha$  e  $U_\beta \in \{U'_\alpha, \phi_\alpha^{-1}, \alpha \in I \subset \mathbb{N}^*\}$  o mapa  $\psi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ , de  $\phi_\beta(W)$  a  $\phi_\alpha(W)$ , for um difeomorfismo;
- (5) a coleção  $\{U'_\alpha, \phi_\alpha^{-1}, \alpha \in I \subset \mathbb{N}^*\}$  é máxima relativamente às condições anteriores.

Dentro da classe de espaços topológicos existem membros que são de enorme valia para a Física, como os espaços métricos. Esta classificação ocorre por abrigarem a função métrica.

## 2.2 Cálculo sobre Variedades Diferenciáveis

### 2.2.1 Vetores, Formas Diferenciais e Tensores

A peculiaridade em lançar mão do cálculo diferencial em conjuntos que não possuem espaço ambiente nos obriga a substituir a noção de que vetores tangentes a curvas em  $\mathbb{R}^n$  são as velocidades dessas curvas no ponto de tangência. Para tal, alguns aspectos usuais de vetores que motivarão a definição subsequente se fazem necessários .

Seja  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva diferencial de  $\mathbb{R}^n$ , onde  $\gamma : 0 \mapsto p$ . De maneira que, dado  $\epsilon \in I$  obtêm-se o ponto  $\gamma(\epsilon) = (x_1(\epsilon), \dots, x_n(\epsilon)) \in \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ . É simples notar que uma função diferenciável qualquer  $f : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida em uma vizinhança  $V$  de  $p$ , quando restringida a curva  $\gamma(I)$ , pode ter sua derivada calculada como

$$\left. \frac{d(f \circ \gamma)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0}. \quad (2.1)$$

O lado direito da equação é a derivada direcional de  $f$  ao longo da curva  $\gamma(I)$  segundo o vetor

$$v = \left( \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon}, \dots, \frac{dx_n(\epsilon)}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0}. \quad (2.2)$$

sendo o conjunto

$$B = \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{\epsilon=0}, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{\epsilon=0} \right\} \quad (2.3)$$

a base associada devido as coordenadas  $\{x_i\}_{i=1}^m$ . Portanto, um vetor é uma aplicação sobre o conjunto de funções diferenciáveis  $\mathcal{D}$ , avaliada no espaço  $\mathbb{R}$ . Pode-se evidenciar essa afirmação reescrevendo a equação (2.1),

$$\left. \frac{d(f \circ \gamma)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{d\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{\epsilon=0} f \quad (2.4)$$

Deste ponto em diante será adotada a notação de Einstein Einstein (1916) com a soma sendo realizada entre fatores com índices repetidos

$$X = \left( \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i e_i \quad (2.5)$$

A generalização para vetores tangentes em variedades diferenciáveis é imediata e intuitiva.

*Definição 2.16.* Seja  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  uma curva suave sobre a variedade diferenciável  $M$ , e seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função pertencente ao conjunto  $\mathcal{D}(M)$  das funções diferenciáveis em  $M$ . Denota-se como  $f : \gamma(I \subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  a restrição de  $f$  a curva  $\gamma(I)$ . O vetor tangente a curva  $\gamma(I)$  no ponto  $\gamma(0) = p \in M$  é a derivada direcional de  $f$ , neste ponto, ao longo da curva

$$X[f] = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

Pelo fato de, em variedades diferenciáveis, o vetor ser a aplicação sobre o conjunto  $\mathcal{D}$  de suas funções diferenciáveis não há a necessidade da adoção de um sistema de coordenadas.

Para o caso de existirem a coordenatização  $\phi : U \subset M \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$  e a função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  automaticamente existe a composição  $f \circ \phi^{-1} : U' \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , que será chamada de  $F = f \circ \phi^{-1}$ . A limitação de  $F$  a curva  $\phi \circ \gamma : \gamma(I \subset \mathbb{R}) \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$  produz o conjunto imagem em  $\mathbb{R}$  de coordenadas  $\{x_i\}_{i=1}^m$  parametrizadas por  $\epsilon \in I$ ,  $(F \circ \phi \circ \gamma)(\epsilon) = F(x_\gamma^1(\epsilon), \dots, x_\gamma^m(\epsilon))$ .

A composição de funções diferenciais é uma função diferencial, logo,

$$\left. \frac{d(F \circ \phi \circ \gamma)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = (X^i e_i) \Big|_{\epsilon=0} [F] = X[f]. \quad (2.6)$$

Em analogia direta ao resultado (2.1) vê-se que a derivada direcional de  $F$  no ponto  $\gamma(0) = p$  da imagem de  $\phi(\gamma(I))$ , em  $\mathbb{R}^m$ , é o vetor  $X = X^i e_i$ . As componentes de  $X$  de  $\{x_i(\epsilon), \epsilon \in I \subset \mathbb{R}\}_{i=1}^m$  estão relacionadas a base coordenada  $\{e_i\}_{i=1}^m$ .

Importante notar que de acordo com a definição 2.5  $\phi \circ \phi^{-1} : U' \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$  é a identidade em  $U' \subset \mathbb{R}^m$ . Assim sendo,

$$X[(F \circ \phi \circ \gamma)(\epsilon)] = X[(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma)(\epsilon)] = X[(f \circ \gamma)(\epsilon)].$$

*Proposição 2.1.* Sejam  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  duas cartas de  $M$ , homeomorfas aos abertos  $U', V' \subset \mathbb{R}^m$ , em que os homeomorfismos são as aplicações  $\phi$  e  $\psi$ . Suponhamos que exista o ponto  $p \in U \cap V$  com representação em ambos os sistemas de coordenadas como sendo, respectivamente,  $\phi(p) = (x^1, \dots, x^m)$  e  $\psi(p) = (y^1, \dots, y^m)$ . A transformação entre as representações de um mesmo vetor definido sobre  $p \in U \cap V$  é

$$\tilde{X}^j = X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

*Demonstração.* Para mostrar a transformação entre as coordenadas  $\phi(p) = (x^1, \dots, x^m)$  e  $\psi(p) = (y^1, \dots, y^m)$  é preciso primeiro evidenciar a relação entre ambas. O modo mais simples de fazer isso é por meio da coordenatização composta  $\psi \circ \phi^{-1} : U' \cap V' \rightarrow U' \cap V'$ . De sorte que, o conjunto de coordenadas de  $p \in U \cap V$  é agora  $(\psi \circ \phi^{-1})(p) = (y^1(x^1, \dots, x^m), \dots, y^m(x^1, \dots, x^m)) = (y^j(x^i))$ . Como na equação (2.2) a função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  e a curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  que passa por  $\gamma(0) = p$ , possibilitam a parametrização das coordenadas, ou seja,

$$(\psi \circ \phi^{-1})(p) = (y^j(x^i(\epsilon)))$$

logo,

$$X[F] = \left( \frac{dx^i}{d\epsilon} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial F(y(x(\epsilon)))}{\partial y_j} \right) \Big|_{\epsilon=0} = \left( X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \bar{e}_j \right) \Big|_{\epsilon=0} [F(y(x(\epsilon)))].$$

Assim fica claro que as componentes  $X$  na base  $\{\bar{e}_j\}_{j=1}^m$  são

$$\bar{X}^i = X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

Observemos que a expressão de  $X$  em  $(\phi \circ \gamma)(0) = p$  é diferente,

$$X[F] = \left( \frac{dx^i}{d\epsilon} \frac{\partial F(x(\epsilon))}{\partial x_i} \right) \Big|_{\epsilon=0} = (X^i e_i) \Big|_{\epsilon=0} [F(x(\epsilon))]$$

onde nota-se que os conjuntos de coordenadas nas duas bases diferem entre si a menos do fator de transformação, o que prova a proposição.  $\square$

O conjunto dos vetores tangentes a uma variedade diferencial  $M$  em  $p \in M$  é um espaço vetorial, chamado de espaço tangente a variedade  $M$  em  $p$ , simbolizado por  $T_p M$ .

Espaços tangentes também possuem sobre si aplicações importantes. Um dos mais importantes mapas definidos nos conjuntos  $T_p M$  com valores em  $\mathbb{R}$  é o das formas diferenciais.

*Definição 2.17.* As funções suaves do tipo  $w : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  são chamadas de vetores duais ou vetores adjuntos, já que apresentam propriedades análogas as dos vetores tangentes.

O conjunto formado por essas aplicações é um espaço vetorial simbolizado como  $T_p^* M$  chamado de Espaço Vetorial Dual ou Espaço Cotangente. No contexto das variedades diferenciáveis é comum chamar as funções  $w$  de formas diferenciais. Notemos que, tal qual ocorre com os vetores, a definição dos vetores duais não requer o uso de nenhuma coordenatização.

Um vetor dual em termos de uma carta  $(U, \phi)$  da variedade diferenciável  $M$  terá como representação

$$w = w_i dx^i, \tag{2.7}$$

pois, para  $p \in M$ ,  $\phi(p) = x = (x^1, \dots, x^m)$ . Nota-se que as componentes  $\{w_i\}_{i=1}^m$  estão associadas a base coordenada  $\{dx^i\}_{i=1}^m$  chamada de base dual ou base cotangente.

A forma explícita da atuação de  $w \in T_p^*M$  sobre um vetor  $X \in T_pM$  requer o emprego da função  $\langle, \rangle : T_p^*M \otimes T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  que opera no espaço produto tensorial  $T_p^*M \otimes T_pM$  da maneira como segue

$$\begin{aligned} w(X) &= \langle w, X \rangle = \left\langle w_j dx^j, X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle \\ &= w_j X^i dx^j \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= w_j X^i \delta_i^j \\ &= w_j X^j \end{aligned} \tag{2.8}$$

As características dos elementos de  $T_p^*M$  são análogas as dos vetores em  $T_pM$ . De maneira que, dadas as cartas  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$ , caso exista um ponto  $p \in U \cap V \subset M$ , pode-se levar um vetor dual  $w \in T_p^*M$  representando em uma coordenatização para outra,

$$w = w_i dx^i = w_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \tag{2.9}$$

*Definição 2.18.* Seja  $M$  uma variedade diferenciável, na qual  $T_pM$  e  $T_p^*M$  são seus espaços tangente e cotangente no ponto  $p \in M$ , respectivamente. O conjunto formado por  $q$  espaços cotangentes independentes, e  $r$  espaços tangentes independentes  $\otimes^q T_p^*M \otimes^r T_pM$  é chamado de espaço produto. Neste espaço um elemento  $T \in \otimes^q T_p^*M \otimes^r T_pM$  é um multilinear nomeado de tensor, cuja definição coordenatizada exhibe as componentes  $T^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_r}$  na base  $\otimes^q \{e_i\}_{i=1}^m \otimes^r \{dx^j\}_{j=1}^m$ :

$$T = T^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_q}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r},$$

O tensor  $T$  é classificado como um tensor de posto  $(q, r)$  em função dos fatores que formam o espaço produto de onde ele é proveniente.

Por construção as propriedades dos elementos dos espaços  $T_pM$  e  $T_p^*M$  que formam o espaço produto não se alteram. Neste caso, dadas duas cartas  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$ , nas quais seus abertos possuam interseção, a transformação de um tensor do tipo  $(q, r)$  em  $p \in U \cap V$  é bem definida

$$\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_q}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_1}} T^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_r} = T^{k_1 \dots k_q}_{l_1 \dots l_r} \quad (2.10)$$

### 2.2.2 O Mapa Diferencial e o Retrocesso

Em posse do que já foi estabelecido até aqui nada impede que espaços tangentes e cotangentes de variedade diferenciáveis distintas sejam mapeados uns nos outros. Este fato motiva a seguinte definição.

*Definição 2.19.* Consideremos um mapa  $f : M \rightarrow N$  entre as variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$  onde  $\forall p \in M, \exists q \in N$  tal que  $f(p) = q$ . Se  $f \in \mathcal{C}(M)^\infty$  então este induzirá sobre  $M$  o mapa  $df = f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  chamado de mapa diferencial.

Sob esta definição estabelecem-se relações entre os elementos de  $M$  e  $N$ , já que decorrem da presença do mapa  $f : M \rightarrow N$ . Logo, dada a curva suave  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  existe a curva  $f \circ \gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow N$ . Da mesma forma a função  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  compõe a função  $g \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Portanto, a atuação explícita de um vetor  $(f_* V) \in T_{f(p)} N$  resulta destas correspondências, isto é,

$$(f_* V)[g] \equiv V[g \circ f]. \quad (2.11)$$

Para o caso de estarem presentes as cartas  $(U, \phi)$  de  $M$  e  $(\psi, V)$  de  $N$ , nas quais  $\phi(p) = x = (x^1, \dots, x^m) = (x^i)$  e  $\psi(p) = y = (y^1, \dots, y^n) = (y^j)$ ,

$$f_* \left( X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (2.12)$$

Agora sobre os pontos  $g \circ \psi^{-1}(y) = (y^j)$  e  $g \circ f \circ \psi^{-1}(x) = (y^j(x^i))$  a definição (2.11) é exibida em sua versão coordenatizada

$$\begin{aligned} (f_*(X^i e_i)) [g \circ \psi^{-1}(y)] &= (Y^l \bar{e}_l) [g \circ \psi^{-1}(y)] \\ &= (X^i e_i) [g \circ f \circ \psi^{-1}(x)] \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} Y^l \frac{\partial y^j}{\partial y^l} &= X^k \frac{\partial y^j(x^k)}{\partial x^k} \\ Y^l \delta_l^i &= X^k \frac{\partial y^j(x^k)}{\partial x^k} \\ Y^j &= X^k \frac{\partial y^j(x^k)}{\partial x^k} = X^k e_k(y^j) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$e_k(y^j)$  é o inverso do Jacobiano da transformação entre as cartas para o qual  $(e_k(y^j))_{m \times n}$  é a matriz associada. Se  $f$  for um difeomorfismo então a matriz será quadrada.

*Definição 2.20.* Consideremos um mapa  $f : M \rightarrow N$  entre as variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$  onde  $\forall p \in M, \exists q \in N$  tal que  $f(p) = q$ . Se  $f \in \mathcal{C}(M)^\infty$  então este induzirá sobre  $M$  o mapa  $(df)^{-1} = f^* : T_p^* M \rightarrow T_{f(p)}^* N$  chamado de retrocesso.

A presença de espaços tangentes garante a existência de espaços cotangentes, que são difeomórficos entre si. Então, nada impede que os espaços tangentes mencionados nesta definição sejam os mesmos dos da definição de mapa diferencial. De sorte que, tendo o mapa diferencial e o retrocesso sempre será possível encontrar um vetor  $X$  e um vetor dual  $w$  no qual

$$f^* w(X) = w(f_* X) \quad (2.14)$$

$\forall X \in T_p M$ .

Ao existir entre as variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$  o difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  e existir a função  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  sempre será possível encontrar cartas sobre  $M$  e  $N$  tais que a equação (2.14) seja exibida na sua forma coordenatizada. Assim sendo, tomando  $X = X^i e_i$  e  $f_* X = Y = Y^j \bar{e}_j$ , onde  $Y^j = \partial y^j / \partial x^i X^i$ ,

$$w(f_* X) = w_k dy^k(Y^j \bar{e}_j) = w_k \frac{\partial y^j}{\partial x^i} X^i \quad (2.15)$$

no entanto,  $f^* w = v \in T_p^* M$ , logo

$$f^* w(X) = v_l X^l \quad (2.16)$$

supondo que  $X$  é arbitrário e igualando os dos lados das equações (2.15) e (2.16),

$$v_l = \frac{\partial y^k}{\partial x^l} w_k \quad (2.17)$$

Vemos que as componentes de da representação vetorial dual mudam com a matriz Jacobiana, em quanto que as componentes de um vetor tangente mudam com a inversa da matriz jacobiana. Por essa razão, em física, é comum chamarmos o objeto (2.7) de vetor covariante e o objeto (2.5) de vetor contravariante, respectivamente.

### 2.2.3 Campos Vetoriais

*Proposição 2.2.* Seja  $M$  uma variedade diferenciável. O conjunto  $A = \{(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in I \subset \mathbb{N}\}$  é um atlas de  $M$ , no qual  $\forall p \in M \exists U'_\alpha \subset \mathbb{R}^m$  tal que  $\phi_\alpha(p) = (x^i) \in U'_\alpha$ . Para todo  $\alpha$  a existência de  $\phi_\alpha$  induz o mapa diferencial  $d\phi_\alpha : T_p M \rightarrow T_{\phi_\alpha(p)} \mathbb{R}^m$ . O conjunto  $TM = \{(p, V); p \in M, V \in T_p M\}$ , chamado de fibrado tangente, é uma variedade diferenciável, no qual  $AF = \{((U_\alpha \subset M) \otimes T_p M, (\phi_\alpha, d\phi_\alpha)), p \in U_\alpha \subset M, \alpha \in I \subset \mathbb{N}\}$  é um de seus atlas.

*Demonstração.* No espaço produto  $(U_\alpha \subset M) \otimes T_p$  os fatores são independentes para todo  $\alpha$  e para todo  $p \in U_\alpha \subset M$ . Uma vez que  $\cup_\alpha (U_\alpha \subset M) = M$  e  $(d\phi_\alpha)^{-1}(T_{\phi_\alpha(p)} \mathbb{R}^m) = T_p M$ , logo,

$$\bigcup_{\alpha} \bigcup_p (U_\alpha \subset M) \otimes T_p M = TM$$

o que verifica as duas primeiras condições da definição 2.15. Seja agora,

$$(p, V) \in (U_\alpha \subset M) \otimes T_p M \cap (U_\beta \subset M) \otimes T_p M$$

então dado o mapa  $\Phi = (\phi, d\phi)$

$$\Phi_\alpha(p, V) = \Phi_\beta(p, V) = (\phi_\alpha(p), d\phi_\alpha(V)) = (\phi_\beta(p), d\phi_\beta(V)),$$

portanto,

$$\Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\alpha(p, V) = \Phi_\beta^{-1}(\phi_\alpha(p), d\phi_\alpha(V)) = (\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha(p), d\phi_\beta^{-1} \circ d\phi_\alpha(V))$$

As aplicações  $\phi_\alpha$  e  $\phi_\beta$  são diferenciáveis, então, por definição,  $d\phi_\alpha$  e  $d\phi_\beta$  também são diferenciáveis, assim como suas inversas. A conclusão é que  $\forall \alpha$  os mapas  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\alpha^{-1}$  são diferenciáveis. Os abertos de  $TM$ , portanto, são difeomórficos aos abertos de  $\mathbb{R}^m \otimes T_{\phi_\alpha(p)}\mathbb{R}^m$ , para todos os  $p \in M$ . O que satisfaz as 3 últimas condições da definição 2.15 provando a proposição.  $\square$

Antes de abordar a noção de derivada de Lie, ferramenta útil no cálculo das integrais dos campos vetoriais em variedades diferenciáveis, convém introduzir a importante noção global de orientação em uma variedade diferenciável.

*Definição 2.21.* Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Diz-se que  $M$  é orientável se admitir uma estrutura diferenciável, um Atlas,  $\{U_\alpha, \phi_\alpha, \alpha \in I \subset \mathbb{R}\}$  tal que:

- (i)  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \forall \alpha \in \beta$ ;
- (ii) A diferencial da mudança de coordenadas tem determinante positivo.  $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha$ .

O atlas cujos os mapas satisfazem a condição (i) são chamados de orientações de  $M$ . Duas ou mais orientações são a mesma orientação, quando a sua união é também uma orientação. A concepção de orientação auxiliará o estabelecimento das integrais em fibrados, mas para isso é preciso relacionar formalmente estes últimos a noção de campo vetorial.

*Definição 2.22.* Um campo vetorial  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é a atribuição de um vetor  $V \in T_p M$  a cada ponto  $p \in M$ . Na linguagem das aplicações,  $X$  é uma aplicação de  $M$  no fibrado  $TM$ .

Uma função  $f \in C^\infty(M)$ , de uma variedade diferenciável  $M$ , pode ser operada por mais de um campo vetorial. Ou seja, dados os campos  $X$  e  $Y$  de  $M$  é possível calcular  $X[Y[f]]$  e  $Y[X[f]]$ . Tais operações são de, no mínimo, segunda ordem e por definição não são campos vetoriais. Entretanto, com o devido tratamento a combinação das atuações de campos vetoriais pode levar a um novo campo vetorial.

*Lema 2.1.* Uma vez que o conjunto  $M$  seja uma variedade diferenciável, em um dado ponto  $p \in M$ , será sempre possível encontrar campos vetoriais  $X$  e  $Y$ , onde  $\forall f \in C^\infty(M), \exists Z$  tal que:

$$(XY - YX)[f] = [X, Y][f] = Z[f].$$

Sendo o mapa  $[ , ] : T_p(M) \otimes T_p(M) \rightarrow T_p(M)$  chamado de colchetes de Lie.

*Demonstração.* Primeiro devemos provar que se o campo vetorial  $Z$  existe ele é único. Assim sendo, dado  $p \in M$  e dada uma parametrização em  $p$   $\phi : p \mapsto (x^j)$  se  $Z$  existe

$$Z[f] = Z^i e_i[f] = \left( X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

já que  $X = X^k e_k$  e  $Y = Y^l e_l$ . Logo,  $Z$  só depende de derivadas de ordem 1, além disso, as coordenadas dos pontos são únicas, conseqüentemente as derivadas também o são. Isto garante a unicidade de  $Z$ .

A existência de  $Z$  segue diretamente do fato de  $X$  e  $Y$  serem campos vetoriais, já que, por definição, cada um atribui um único vetor a cada ponto dos abertos do atlas  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ . Como não há restrições sobre a atuação de  $X$  e  $Y$  sobre nenhum ponto de  $M$  então dada uma base  $e_i$  sempre será possível encontrar componentes de vetores de  $X$  e  $Y$  tais que  $Z^i = X^j e_j(Y^i) - Y^j e_j(X^i)$ .  $\square$

### 2.2.4 Derivadas de Lie

Campos vetoriais relacionam vetores definidos sobre espaços tangentes distintos. O que nos leva a crer ser possível comparar tais vetores. Geometricamente o colchete de lie  $[X, Y]$  fornece-nos uma pista de como fazer isso já que representa o transporte do campo vetorial  $Y$  ao longo da trajetória do campo vetorial  $X$ . Para melhor elaborar esta ideia é preciso definir antes o que são trajetórias sobre uma variedade diferenciável, para em seguida ampliar o conjunto das propriedades dos colchetes de Lie que tornará possível comparar não só vetores como os próprios campos vetoriais.

*Definição 2.23.* Seja  $M$  uma Variedade Diferenciável. A curva  $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  é dita ser uma trajetória do campo  $X : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$  se  $\forall \epsilon \in (-\delta, \delta)$

$$\frac{d\gamma(\epsilon)}{d\epsilon} = (X \circ \gamma)(\epsilon)$$

Em uma variedade diferenciável  $M$  sempre é possível encontrar um aberto  $V \subset M$  vizinho a um ponto  $p \in M$  qualquer, isto é, com  $p \notin V$ . Seja  $q$  um ponto do aberto  $U$  que pertença a trajetória  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  do campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(M)$ , nos termos da definição (2.23). Com isso, percebe-se que sobre pontos da vizinhança aberta  $U$  de  $p$  só é possível que passe uma única trajetória de  $X$ . Por seu turno, uma coordenatização

$\phi : U \subset M \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$  entre  $U$  e o aberto  $U'$  nos garante o difeomorfismo local entre  $M$  e  $\mathbb{R}^m$ . Haja vista, como já mencionado, é possível então estender localmente a  $M$  as noções do calculo diferencial de  $\mathbb{R}^4$ . Pode-se, desse modo, compreender a definição (2.23) como uma equação diferencial de quem o ponto  $\gamma(0) = r \in U$  é condição inicial. Sendo, portanto, uma representação do Teorema de Existência e Unicidade das Equações Diferenciais (TEU) do Carmo (1988); Nakahara (1990).

Por conveniência, sempre que necessário, adotaremos para a trajetória  $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  do campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(M)$  a representação

$$\sigma_t(q) = \sigma(t, q), \forall t \in I \tag{2.18}$$

onde  $\sigma(0, q) = q$  é a condição inicial.

*Definição 2.24.* Seja  $X$  um campo vetorial sobre a variedade diferenciável  $M$ .  $\sigma : (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é a trajetória de  $X$  ao longo de  $M$ . Chama-se de curva integral de  $X$  ou fluxo gerado por  $X$ , que passa por  $p \in M$ , o seguinte conjunto de pontos:

- (i)  $\sigma(0, p) = p$ ;
- (ii)  $\sigma_* \left( \frac{d}{dt} \right) = X_{\sigma(t,p)} \in T_{\sigma(t,p)}M, \forall t \in (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}$

A segunda condição da definição (2.24) é melhor compreendida com o auxílio da coordenatização  $\phi : U \subset M \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^4$ , cuja a definição é  $\phi^i(\sigma(t, p)) \equiv \sigma^i(t, p) = x^i(\sigma(t, p)), i \in \{1, \dots, m\}$ . De maneira que, dada a função  $f \in \mathcal{F}(M)$ ,

$$(d\sigma) \left( \frac{d}{dt} \right) [f] = \sigma_* \left( \frac{d}{dt} \right) [f] = \frac{dF(\sigma^i(t, p))}{dt} = \left( \frac{d\sigma^i}{dt} e_i \right) [f] \tag{2.19}$$

em que  $d\sigma = \sigma_*$  é o mapa diferencial induzido pela existência da curva integral. Porém,

$$X_{\sigma_t(p)}[f] = X^i(\sigma_t(p))e_i[f],$$

ou seja, as componentes de  $X_{\sigma_t(p)}$  coincidem com as componentes  $\sigma_*(d/dt)$ , então,

$$\frac{d}{dt}d\sigma_t^i(p) = X^i(\sigma_t(p)) = X^i(\sigma(t, p)) \tag{2.20}$$

Este resultado estará garantido sempre que houver uma coordenatização bem definida sobre um aberto  $U \subset M$ . O valor limite  $\delta$  na condição (ii) da definição (2.24) dese ser escolhido de modo a garantir que todos os os pontos de uma curva estejam dentro do aberto coordenatizado Nakahara (1990); do Carmo (1988); Isham (1999); Nash & Sen (1988). Ocorre que , a partir de  $\sigma(0, p) = p$ , os pontos de uma curva integral  $\sigma((-\delta, \delta), p)$  são obtidos na medida em que  $t$  assume valores permitidos pelo intervalo  $(-\delta, \delta)$ . Onde, como já mencionado, o par  $\sigma(0, p) = p$  e  $\sigma_*(d/dt)$  satisfaz localmente Teorema de Existência e Unicidade das Equações diferenciais e Ordinárias. No entanto, não há garantia de existirem soluções para valores  $t \in \mathbb{R}$  Isham (1999). Isto motiva a definição que segue

*Definição 2.25.* O campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(M)$  é classificado como campo vetorial completo de  $M$  se possuir uma curva integral  $\sigma : \mathbb{R} \otimes M \rightarrow M, \forall p \in M$  e  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Variando o ponto  $p$  obtém-se outras curvas integrais correspondendo aos valores que o campo vetorial assume nos novos pontos. Ou seja, para cada campo vetorial existe uma, e somente uma, família de curvas em que ele é o vetor tangente em cada ponto. É como se as condições iniciais  $\sigma(0, p) = p$  dessas curvas fossem seus índices, de maneira que,  $\{\sigma(t, p), \forall p \in M\}$  é, então, uma família de curvas associadas ao campo vetorial em questão. No entanto, conhecendo um ponto da curva conhecesse todos, pois um ponto é levado em outro continuamente. Logo, todo ponto de uma curva integral pode desempenhar o papel de condição inicial. Em outras palavras, curvas geradas por campos são invariantes por escolhas de condições iniciais. É simples verificar essa propriedade. Sejam  $s$  e  $t$  parâmetros, tais que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma^i(t + s, p) &= \frac{d}{d(t + s)}\sigma^i(t + s, p) \\ &= X^i(\sigma(t + s, p)) \end{aligned}$$

e também

$$\sigma(0 + s, p) = \sigma(s, p)$$

No entanto, a equação de trajetória do campo vetorial  $X$  em respeito ao parâmetro  $s$  resulta em:

$$\frac{d}{dt}\sigma^i(t, \sigma(0, p)) = X^i(t, \sigma(s, p))$$

, onde

$$\sigma(0, \sigma(s, p)) = \sigma(s, p).$$

Já que a curva integral é a mesma aparentemente existem duas equações diferenciáveis distintas com a mesma condição inicial. Contudo, o TEU garante serem as equações iguais, o que implica na condição  $\sigma(t, \sigma(s, p)) = \sigma(t + s, p)$ .

A propriedade de invariância das curvas integrais por escolha de condição inicial permiti-nos enxergá-las de outra maneira. Para ver como se dá a nova interpretação adotaremos por conveniência, deste ponto em diante, a notação  $\sigma(t, p) = \sigma_t(p)$ .

Ao fixar  $t$  e variar o ponto  $p$  o resultado obtido anteriormente,

$$\sigma_t(\sigma_s(p)) = \sigma_{t+s}(p) \tag{2.21}$$

que também é um difeomorfismo de  $M$  em  $M$ , revela-se como uma lei de composição. Assim obtemos uma estrutura de grupo comutativo a 1 parâmetro que representa transformações ao longo de  $M$ , sendo  $\sigma_0(p) = p$  a identidade e  $\sigma_{-t} = (\sigma_t)^{-1}$  a inversa do grupo. Para maiores detalhes sobre as condições que caracterizam um conjunto como sendo um grupo é útil consultar Nakahara (1990). Para  $\epsilon \in \mathbb{R}$  infinitesimal

$$\begin{aligned} \sigma_\epsilon^i(p) &= \sigma_0^i(p) + \epsilon \frac{d}{dt} \sigma^i \Big|_{t=0} \\ &= x^i + \epsilon X^i(\sigma(0, p)) \\ &= x^i + \epsilon X^i(x) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Nesse contexto o campo vetorial é chamado de gerador infinitesimal da transformação  $\sigma_t(p)$ . Generalizando para uma transformação finita:

$$\begin{aligned} \sigma_t(p) &= \sigma_0^i + t \frac{d}{ds} \sigma_s^i(p) \Big|_{s=0} + \frac{t^2}{2!} \left( \frac{d}{ds} \right)^2 \sigma_s^i(p) \Big|_{s=0} + \dots \\ &= \left[ 1 + t \frac{d}{ds} + \frac{t^2}{2!} \left( \frac{d}{ds} \right)^2 + \dots \right] \sigma_s^i(p) \Big|_{s=0} \\ &= \exp \left( t \frac{d}{ds} \right) \sigma_s^i(p) \Big|_{s=0} \\ &= \exp(tX) \sigma_s^i(p) \Big|_{s=0} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Nesta expressão estão preservadas todas as propriedades das trajetórias dos campos descritas acima, com a revelação de que são análogas as da exponencial. No âmbito da teoria de grupos  $\exp(tX)$  é elemento de um grupo de transformações,  $t$  é o parâmetro dessas transformações e os campos  $X$  são os geradores das transformações, também conhecidos como álgebra do grupo. Muitos autores chamam o conjunto de campos  $X$  de pequeno grupo.

Neste ponto já reunimos as condições para compararmos campos, mas antes de o fazermos, para não ser necessário o uso de nenhuma coordenatização precisaremos do seguinte lema do cálculo:

*Lema 2.2.* Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $U \subset M$  um de seus abertos. Dado o mapa diferenciável  $h : (-\delta, \delta) \otimes U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $h(0, q) = 0, \forall q \in U$ , existe um mapa  $g : (-\delta, \delta) \otimes U \rightarrow \mathbb{R}$  também diferenciável, tal que  $h(t, q) = tg(t, q)$

*Demonstração.* A forma integral de  $g(t, q)$  em respeito  $s$  é escrita como segue:

$$g(t, q) = \int_0^1 \frac{\partial h(ts, q)}{\partial (ts)} ds$$

logo, temos

$$\begin{aligned} tg(t, q) &= t \int_0^1 \frac{\partial h(ts, q)}{\partial (ts)} ds \\ &= \int_0^1 \frac{\partial h(ts, q)}{\partial (ts)} d(ts) \\ &= h(t1, q) - h(t0, q) \\ &= h(t, q) \end{aligned}$$

□

*Proposição 2.3.* Sejam  $X$  e  $Y$  dois campos vetoriais de uma variedade diferenciável  $M$ . Se nesta variedade existir o fluxo  $\sigma_\epsilon(p) : (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \otimes U \subset M \rightarrow M$  em  $p \in M$ , gerado por  $X$ , então,

$$[X, Y](p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ Y|_{\sigma_\epsilon(p)} - ((d\sigma_\epsilon)Y|_p)|_{\sigma_\epsilon(p)} \right]$$

*Demonstração.* Consideremos  $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{D}(M)$ . E também, levemos em conta o fluxo  $\sigma_t(p) : (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \otimes U \subset M \rightarrow M$  em  $p \in M$  gerado por  $X$  em uma

vizinhança aberta  $U$  de  $p \in M$ . De modo que possamos escrever

$$h(t, q) = f(\sigma_t(q)) - f(q).$$

Aplicando o lema (2.2),

$$f(\sigma_t(q)) = f(q) + tg(t, q)$$

impondo o limite  $t \rightarrow 0$  a definição de vetor (2.16) implicará em  $g(0, q) = X[f](q) = X(f(p))$ . Substituindo  $f$  por  $((d\sigma_\epsilon)Y|_p)[f]$  e  $q$  por  $p$ ,

$$((d\sigma_t)Y|_p)(f(\sigma_t(p))) = Y|_p(f(p)) + t(Y|_p(g(t, p))).$$

Porém,

$$((d\sigma_t)Y|_p)(f(\sigma_t(p))) = Y|_{\sigma_t(p)}(f(\sigma_t(p)))$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y|_{\sigma_t(p)} - ((d\sigma_t)Y|_p)] (f(\sigma_t(p))) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y|_{\sigma_t(p)}(f(\sigma_t(p))) - Y|_p(f(p))}{t} - Y|_p(g(0, p)) \\ &= XY|_p(f(p)) - YX|_p(f(p)) \\ &= (XY|_p - YX|_p)(f(p)) \\ &= [X, Y]|_p(f(p)) \end{aligned}$$

□

A figura 2.1 ilustra a motivação de representar a derivada de Lie em função do fluxo do campo Vetorial  $X$ , já que o mapa diferencial associado a esse fluxo possibilita-nos comparar o campo  $Y|_p$  com o campo  $Y|_{\sigma_\epsilon(p)}$ .

## 2.3 Variedades Riemannianas

As noções bem definidas e mensuráveis de distância entre elementos de um conjunto e a geometria intrínseca desse conjunto, essenciais em física, não são características comuns a todas as variedades. Na presente seção estabeleceremos, portanto, um critério formal, que permita-nos identificar dentro da classe das variedades aquelas capazes de

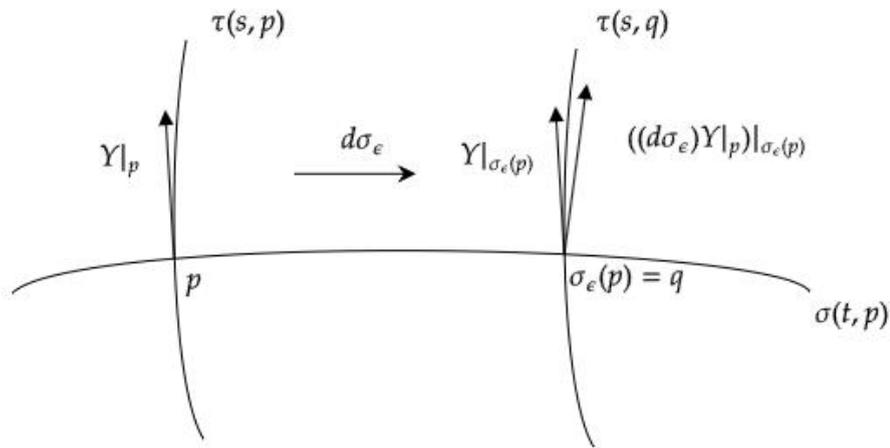


FIGURA 2.1. Comparando os vetores  $Y|_p$  e  $Y|_{\sigma_\epsilon(p)}$  por meio do mapa diferencial  $d\sigma_\epsilon$ .

abrigar tais noções. Estabelecido esse conceito seremos capazes de selecionar as variedades mais adequadas para representar sistemas físicos.

### 2.3.1 Métricas Riemanniana e Pseudo Riemanniana

*Definição 2.26.* A variedade diferenciável  $M$  é chamada de Variedade Riemanniana (VR) quando sobre ela, em cada ponto  $p \in M$ , pudermos definir a função  $g : T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , conhecida como métrica, que satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $\forall X, Y \in T_p M, g(X, Y) = g(Y, X)$ ;
- (ii)  $\forall X \in T_p M, g(X, X) \geq 0$ , onde a igualdade é válida apenas quando  $X = 0$ .

*Definição 2.27.* A variedade diferenciável  $M$  é chamada de Variedade pseudo-Riemanniana (VPR) quando sobre ela, em cada ponto  $p \in M$ , pudermos definir a função  $g : T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , conhecida como pseudo-métrica, que satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $\forall X, Y \in T_p M, g(X, Y) = g(Y, X)$ ;
- (ii)  $\forall X \in T_p M, g(X, Y) = 0$ , quando  $Y = 0$ .

Por um abuso de linguagem, que não ocasionará nenhum prejuízo, tanto a métrica como a pseudo-métrica serão chamadas apenas de métrica. Deixaremos claro quando

se fizer necessária eventuais distinções entre elas. A diferenciação entre variedades Riemanniana e variedades pseudo-Riemanniana só será trazida a discussão quando particularidades entre ambas forem pertinentes. Do contrário, consideraremos ambas como sendo apenas Variedades Riemannianas.

Somente um tensor de posto 2 é capaz de satisfazer as condições de ambas as definições (2.26) e (2.27), já que ele é quem leva elementos de  $T_p M \otimes T_p M$  em elementos de  $\mathbb{R}$ . Em outras palavras,  $g \in \mathcal{T}_0^2(M)$ . Com efeito, dada a carta  $(U, \phi)$ , indutora da base coordenada  $\{e_i\}_{i=1}^m$ , em uma VR  $M$ , em que as coordenadas de  $p \in U \subset M$  são  $\phi(p) = x = (x^1, \dots, x^m) \in U' \subset \mathbb{R}^m$ , a métrica terá como representação:

$$g_p \equiv g_{ij}(p) dx^i \otimes dx^j \quad (2.24)$$

Para não carregar a notação, quando necessário, o ponto  $p$  será omitido. Dados os vetores, portanto,  $X = X^k e_k$  e  $Y = Y^l e_l$ , tem-se:

$$\begin{aligned} g_p(X, Y) &= g_{ij}(X^k e_k, Y^l e_l) dx^i \otimes dx^j \\ &= g_{ij} X^k Y^l e_k dx^i \otimes e_l dx^j \\ &= g_{ij} X^k Y^l \delta_k^i \delta_l^j \\ &= g_{ij} X^i Y^j \end{aligned} \quad (2.25)$$

Vetores duais levam elementos de  $T_p M$  em elementos de  $\mathbb{R}$ , então considerando o vetor  $Y = Y^j e_j \in T_p M$  sempre é possível encontrar um vetor dual  $w = w_i dx^i = Y_i dx^i \in T_p^* M$ , tal que,

$$w = Y_i dx^i = g_{ij} Y^j dx^i \quad (2.26)$$

Pois, tomando o produto interno entre  $w$  e  $V = V^k e_k$

$$\begin{aligned} \langle g_{ij} Y^j dx^i, V^k e_k \rangle &= dx^i e_k g_{ij} Y^j V^k = \delta_k^i g_{ij} Y^j V^k = g_{kj} Y^j V^k \\ &= Y_k V^k \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

vê-se que de fato  $w = g_{ij} Y^j dx^i$  trata-se de um vetor dual.

Os mesmo raciocínio se estende aos vetores. Considerando o vetor dual  $v = v_j dx^j \in T_p^*M$  sempre é possível encontrar um vetor  $X = X^i e_i = v^i e_i \in T_pM$ , tal que,

$$X = v^i e_i = g^{ij} v_j e_i. \quad (2.28)$$

Pois, tomando o produto interno entre  $u = u_k dx^k$  e  $X$ ,

$$\begin{aligned} \langle u_k dx^k, v^i e_i \rangle &= \langle u_k dx^k, g^{ij} v_j e_i \rangle = u_k v_j dx^k e_i g^{ij} = u_k v_j \delta^k_i g^{ij} = v_k v_j g^{kj} \\ &= u_k v^k \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Percebe-se que a métrica também pode ser encarada como um mapa entre  $T_pM$  e  $T_p^*M$ , como mostram as operações (2.26) e (2.28). Em Física estas operações são chamadas, respectivamente, de chamada de abaixamento e levantamento de índices pela métrica Weinberg & Steven (1972); Misner et al. (1973); Nakahara (1990). A generalização para tensores é imediata e segue da definição (2.18),

$$\begin{aligned} g_{i_1 k_1} g_{i_2 k_2} \cdots g_{i_{r-1} k_{r-1}} g_{i_r k_r} g^{j_1 l_1} g^{j_2 l_2} \cdots g^{j_{s-1} l_{s-1}} g^{j_s l_s} T^{i_1 i_2 \cdots i_{r-1} i_r}{}_{j_1 j_2 \cdots j_{s-1} j_s} = \\ = T_{k_1 k_2 \cdots k_{r-1} k_r}{}^{l_1 l_2 \cdots l_{s-1} l_s} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por definição percebemos que a métrica em uma VPR é não degenerada, dado o fato de que pela condição (ii) da definição (2.27) vê-se que só, e somente só, um vetor de "norma" zero faz com que o resultado de atuação da métrica sobre este e qualquer outro vetor seja identicamente nula. Esta propriedade é importante para contornar eventuais ambiguidades em cálculos sobre as VPR.

*Definição 2.28.* Sejam  $M$  e  $N$  duas VR. O difeomorfismo local  $f : U \subset M \rightarrow \bar{U} \subset N$  é classificado como uma isometria local se o seu mapa diferencial associado  $df : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  satisfizer a igualdade:

$$g_p(X, Y) = g_{f(p)}(df(X), df(Y)) \quad (2.31)$$

É dito, portanto, que as VR  $M$  e  $N$  são localmente isométricas. Para o caso em que se possa afirmar a isometria dessas VR  $\forall p \in M$  e  $\forall f(p) \in N$ , então elas são isométricas entre si do Carmo (1988); Lima (1973).

*Definição 2.29.* Sejam  $M$  e  $N$  duas VR. O difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  é classificado como uma isometria se o seu mapa diferencial associado  $df : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  satisfizer a igualdade:

$$g_p(X, Y) = g_{f(p)}(df(X), df(Y)), \quad \forall p \in M \text{ e } \forall f(p) \in N. \quad (2.32)$$

Na definição (2.29) a relação entre os pontos  $p$  de  $M$  e  $f(p)$  de  $N$  é biunívoca, por definição. De maneira que, o mapa diferencial atribui a  $N$  as propriedades e objetos de  $M$  relacionados aos seus espaços tangentes, sendo a métrica um desses objetos. Em outras palavras, o mapa diferencial induz sobre  $N$  a métrica  $g_N$  por conta de em  $M$  estar definida a métrica  $g_M$ . Com efeito,

$$df(g_M) = g_N \quad (2.33)$$

Onde, na versão coordenatizada utiliza-se a transformação tensorial (2.10) por ser a métrica um tensor de posto 2,

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} g_{ij}(x) = g_{kl}(y). \quad (2.34)$$

onde  $\phi(p) = x \in \mathbb{R}^m$  e  $f(\phi(p)) = f(x) = y \in \mathbb{R}^n$  são as coordenadas atribuídas a  $p$  e  $f(p)$ , indutoras das bases coordenadas  $\{e_i\}_{i=1}^m$  e  $\{e_j\}_{j=1}^n$ , respectivamente.

O retrocesso associado ao mapa suave  $f : M \rightarrow N$ , por seu turno, induz a métrica  $g_M$  em uma VR  $M$  devido a existência da métrica  $g_N$  definida sobre  $N$ ,

$$g_M = (df)^{-1} g_N. \quad (2.35)$$

Onde, na versão coordenatizada,

$$g_{ij}(x) = g_{kl}(y) \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \quad (2.36)$$

pois  $\phi(p) = x \in \mathbb{R}^m$ ,  $f(\phi(p)) = f(x) = y \in \mathbb{R}^n$ .

A isometria entre uma VR  $M$  e  $\mathbb{R}^m$  permite estender até  $M$  a noção de volume. Porém antes é preciso entender o que é a orientação em uma VR.

Seja  $p \in M$  e seja  $\phi : U \subset U' \mathbb{R}^m$  uma coordenatização, em que  $p \in \phi^{-1}(U')$ . Vamos assumir que  $M$  satisfaz os requisitos da definição (2.21) e portanto orientável. O vetor  $X = X^i e_i \in T_p M$ , em respeito a base ortonormal positiva  $\{e_i\}_{i=1}^m$ , permite-nos calcular

$$g(X, X) = g_{ij}(X^i e_i, X^j e_j) \quad (2.37)$$

no entanto, sempre é possível encontrar um tensor  $T = T_i^j dx^i \otimes e_j \in \mathcal{T}_1^1(M)$  cuja imagem em  $T_p M$  (projeção) é um vetor  $X \in T_p M$ . Isto é,

$$T[dx^k] = T_i^j dx^i \otimes e_j[dx^k] = T_i^j \delta_j^k dx^i = T_i^k dx^i \quad (2.38)$$

logo,  $T \in \mathcal{T}_1^1(M)$  tal que  $X^j = T_i^j dx^i$ . Então,

$$g(X^i, X^j) = T_k^i T_l^j g(dx^k, dx^l) = T_k^i T_l^j \delta_k^l \quad (2.39)$$

O volume do paralelepípedo formado pelos vetores do conjunto  $\{X_1(p), \dots, X_m(p)\}$  é igual ao volume formado pelos vetores da base ortonormal  $\{e_i\}_{i=1}^m$  multiplicado pelo determinante de  $T_i^j$ , temos, portanto,

$$\text{vol}(X_1(p), \dots, X_m(p)) = \det(T_i^j) = \sqrt{\det(g_{ij})(p)} \quad (2.40)$$

Este resultado é invariante por mudança de coordenadas. Utilizando uma coordenatização definida como  $\psi(p) = y = (y^1, \dots, y^m)$  em que a métrica é representada da forma  $h = h_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , temos

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \sqrt{\det(h_{ij})} = J \sqrt{\det(h_{ij})} \quad (2.41)$$

em que  $J$  é determinante da mudança de coordenadas assim como mostrado na equação (2.13).

Seja  $V \subset M$  um subconjunto aberto e conexo da VR  $M$ , ou seja,  $V$  não possui buracos e quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um caminho inteiramente contido em  $V$ . Vamos assumir que a interseção de todos os subconjuntos fechados que contém  $V$  é compacta (fechada e limitada). Dados  $U \subset M$  e  $V \subset \phi^{-1}(U')$  e por fim impondo que a fronteira  $\phi(V) \subset U$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^m$ , o volume  $\text{Vol}(V)$  será

definido pela seguinte integral em  $\mathbb{R}^m$ :

$$Vol(V) = \int_{\phi(V)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^m. \quad (2.42)$$

A igualdade (2.41) imediatamente nos revela, como esperado, a invariância do volume por mudança de coordenadas,

$$Vol(V) = \int_{\phi(V)} \det \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \sqrt{\det(h_{ij})}, \quad (2.43)$$

uma vez que o determinante é um mapa definido no espaço das representações matriciais quadradas dos tensores, avaliado no espaço  $\mathbb{R}^m$ . Logo, o determinante é uma função, que por definição não depende do sistema de coordenadas adotado Carmo (1988); Nash & Sen (1988); Lima (1973).

A classificação de um multilinear em quanto vetor, vetor dual ou tensor é realizada mediante suas propriedades de transformação. Uma densidade tensorial é uma quantidade cuja lei de transformação sob mudança de base é igual a transformação tensorial multiplicada pelo determinante da matriz de transformação elevada por um expoente. Com efeito, a transformação de uma densidade tensorial entre os sistemas de coordenadas  $\{x^\mu\}_{\mu=1}^3$  e  $\{y^\nu\}_{\nu=1}^3$  se dá do seguinte modo:

$$\mathfrak{T}^{k_1 \dots k_q}_{l_1 \dots l_r} = \left( \det \left[ \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \right] \right)^W \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{k_q}}{\partial x^{i_q}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \dots \frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{l_r}} \mathfrak{T}^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_r}, \quad (2.44)$$

onde  $W$  é o peso da transformação. Esses são os objetos mais gerais em uma VPR. Tensores são um caso particular de densidade tensorial quando  $W = 0$  Weinberg & Steven (1972); Spivak (1999).

### 2.3.2 Conexão Afim

Como já discutido um vetor  $X \in T_pM$ ,  $p \in M$  é a derivada direcional de  $f \in \mathcal{F}M$ ,  $X : f \mapsto X[f]$ . Ou seja, a evolução de  $f$  na direção de um vetor é mensurada pela atuação desse vetor sobre  $f$ . Decorre deste fato a pergunta: Existem aplicações semelhantes que sejam capazes de atuar sobre os próprios vetores, sobre vetores duais e sobre tensores de posto arbitrário? De fato, em primeira análise, parece ser a derivada de Lie a resposta a essa pergunta como mostra a proposição (2.3). Porém, se olharmos atentamente veremos que a derivada de um vetor ao longo do fluxo gerado por outro não está projetada sobre a direção tangente a este fluxo, portanto não é intrínseca a nenhum dos espaços tangentes a curva em cada um dos seus pontos. Por definição, a projeção sobre a direção tangente a curva definida por um campo vetorial é condição essencial para reconhecer uma operação de derivação como sendo uma derivação direcional. Será necessário, portanto, o estabelecimento de uma nova entidade capaz de transportar um vetor ao longo da direção tangente a curva definida por um campo vetorial em cada um de seus pontos.

Ao longo dessa seção  $M$  representará uma VR, onde o conjunto de campos de vetores que admite infinitas diferenciações será denotado por  $\mathcal{X}(M)$ . Por seu turno, o conjunto de funções de classe  $\mathcal{C}^\infty(M)$ , será denotado como  $\mathcal{D}(M)$ .

*Definição 2.30.* o mapa  $\nabla : \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  é chamado de Conexão Afim se dados os campos  $X, Y$  e  $Z \in \mathcal{X}(M)$  sua atuação, representada como  $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ , satisfizer as seguintes propriedades:

- (i)  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ,  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ ;
- (ii)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ;
- (iii)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X[f]Y$ .

Em outras palavras, em uma VR conexões são operadores derivadas que atuam sobre campos vetoriais. Compreenderemos melhor como se dá, de fato, essa atuação na medida em que as conexões forem utilizadas para explorarmos as propriedades geométricas de  $M$ . Porém, antes é preciso particularizar quais as conexões úteis a geometria Riemanniana.

*Proposição 2.4.* Seja  $X \in \mathcal{X}(M)$  um campo vetorial longo de uma curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , em uma VR  $M$ , dotada de conexão Afim  $\nabla$ . Existirá ao longo de  $\gamma$  uma, e somente uma, correspondência entre  $X$  e o campo vetorial  $D/dt(X) = D_t(X)$ , induzido pelo operador derivava  $D_t$ , chamado de derivada covariante de  $X$  ao longo da  $\gamma$ , tal que:

- (a)  $D_t(X + Y) = D_tX + D_tY$ ,  $X$  e  $Y \in \mathcal{X}(M)$ ;
- (b)  $D_t(fX) = \partial_t f X + f D_tX$ , onde  $f \in \mathcal{D}(M)$ ;
- (c)  $D_tX(\gamma(t)) = \nabla_{d\gamma/dt}W$ , se  $X(t) = W(\gamma(t))$ .

*Demonstração.* Sejam  $\phi : U \subset M \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$  e  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , respectivamente, um sistema de coordenadas locais e uma curva definidos sobre a VR  $M$ . Se  $\gamma(I) \cap \phi^{-1}(U') \neq \emptyset$ , então as coordenadas locais no ponto  $\gamma(t)$ , dado um  $t \in I$  qualquer, serão  $\phi(\gamma(t)) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ . Como consequência  $\forall t \exists \{e_i(t)\}_{i=1}^m$ . Portanto, o campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(M)$  ao longo de  $\gamma(I)$  é representado em  $U' \subset \mathbb{R}^m$  como  $X = X^i e_i(t)$ . Imponto a  $X$  a correspondência descrita na proposição (2.4), tem-se,

$$\frac{DX}{dt} = \frac{DX^i}{dt} e_i + X^i \frac{De_i}{dt}.$$

Da definição (2.30)

$$\frac{De_i}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} e_i = \nabla_X e_i = X^j \nabla_{e_j} e_i,$$

logo,

$$\frac{DX}{dt} = \frac{DX^i}{dt} e_i + X^i X^j \nabla_{e_j} e_i.$$

Pelo fato de vetores serem operações de derivação, como estabelece a definição (2.16), se existir uma correspondência ela será única para cada valor de  $t \in I \subset \mathbb{R}$ .

Seja  $W \subset M$  um aberto sobre o qual estejam definidas a coordenatização  $\bar{\phi} : W \subset M \rightarrow W' \subset \mathbb{R}^m$  e também  $D_t$ . Teremos em  $\bar{\phi}(W)$  o mesmo resultado da derivação  $D_tX$ , obtido em  $\phi(U)$  se  $\bar{\phi}(W) \cap \phi(U) \neq \emptyset$ . Pois qualquer ponto da curva pode representar uma condição inicial da equação, inclusive os que pertencem a interseção. De modo que, pela unicidade, as derivações em ambos os sistemas de coordenadas concordam por possuírem as mesmas condições iniciais. Nada impede serem  $U$  e  $W$  elementos da cobertura de  $M$ , logo, é imediato notar que  $D_t$  se estende para todo  $M$ .  $\square$

A atuação da conexão Afim sobre uma função  $f \in \mathcal{F}(M)$ , seja ela parametrizada ou não, é idêntica a que vimos em (2.4), ou seja, trata-se apenas do operador derivada parcial usual. Embora na proposição (2.4) fosse assumido implicitamente que a conexão afim é definida localmente, pode-se verificar esta suposição valendo-se do fato de uma coordenatização ser um difeomorfismo local entre  $M$  e  $\mathbb{R}^m$ . Com efeito, dado o sistema de coordenadas  $\phi(U \subset M) = (U' \subset \mathbb{R}^m)$  ao redor de  $p \in U$ , em que  $X = X^i e_i$  e  $Y = Y^j e_j$ , temos,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= X^i \nabla_{e_i} (Y^j e_j) \\
&= X^i (\nabla_{e_i} Y^j) e_j + X^i Y^j \nabla_{e_i} e_j \\
&= X^i (\nabla_{e_i} Y^j) e_j + \Gamma_{ij}^k e_k \\
&= (X^i (\nabla_{e_i} Y^j) e_j + \Gamma_{ij}^k) e_k \\
&= (X^i (\partial_{e_i} Y^j) e_j + \Gamma_{ij}^k) e_k.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Aqui a localidade da conexão se traduz por sua dependência das bases coordenadas, locais por definição. Neste resultado  $\Gamma_{ij}^k$  são os parâmetros de afinidade conhecidos como coeficientes da conexão. Eles representam o quão diferente é a derivação vetorial da derivada parcial das componentes, por conta das bases coordenadas serem possivelmente diferentes em espaços tangentes distintos. Sendo assim,  $\Gamma_{ij}^k$  é a medida da  $k$ -ésima componente da variação do vetor  $e_j$  ao longo da direção do vetor  $e_i$ .

Revela-se, com isso, como uma base coordenada em um ponto modifica-se ao ser levada a outro ponto por meio da atuação da conexão. Conhecida a base coordenada eventualmente estarão determinadas as componentes de um campo qualquer no ponto em respeito a esta base. Vê-se que  $\nabla_X Y$  também depende das componentes dos campos  $X$  e  $Y$ . Em resumo, ocorre que  $\nabla$  mapeia  $X$  e  $Y$  no vetor  $\nabla_X Y$ . Logo, a conexão afim não é única. Escolhendo novos vetores, via de regra, teremos um novo operador  $\nabla$ . O conjunto de conexões afim é, então, infinito Wald (1984); Nakahara (1990).

Uma vez que esteja bem definida uma nova entidade sobre uma VR, o passo seguinte é sua classificação por meio de suas propriedades de transformação. Embora saibamos que conexões são, em última análise, vetores, a classe ao qual pertencem os coeficientes  $\Gamma$  ainda não é conhecida.

Para melhor compreender a natureza dos coeficientes sejam  $(V, \psi)$  e  $(U, \phi)$  duas

cartas do mesmo atlas de uma VR  $M$ , tal que  $C = U \cap V \neq \emptyset$ . Um ponto  $p \in C$  é representado em função das duas coordenatizações como:  $\psi(p) = (y^1, \dots, y^m)$  e  $\phi(p) = (x^1, \dots, x^m)$ . As bases induzidas por essas coordenatizações são, respectivamente,  $\{\bar{e}\}_{j=1}^m$  e  $\{e\}_{i=1}^m$ .

A barra em cima dos símbolos na atuação da conexão em

$$\nabla_{\bar{e}_j} \bar{e}_k = \bar{\Gamma}_{jk}^l e_l \quad (2.46)$$

representa que o domínio no qual estão definidas as quantidades é  $\psi(V) = \bar{V} \subset \mathbb{R}^m$ .

Empregando a regra de transformação (2.10) entre as duas cartas, temos

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{e}_j} \bar{e}_k &= \nabla_{\bar{e}_j} \left( \frac{\partial x^n}{\partial y^k} e_n \right) \\ &= \frac{\partial^2 x^n}{\partial y^j \partial y^k} e_n + \frac{\partial x^m}{\partial y^j} \frac{\partial x^n}{\partial y^k} \nabla_{e_m} e_n \\ &= \left( \frac{\partial^2 x^n}{\partial y^j \partial y^k} + \frac{\partial x^m}{\partial y^j} \frac{\partial x^n}{\partial y^k} \Gamma_{mn}^l \right) e_l \end{aligned} \quad (2.47)$$

finalmente igualando a equação (2.46) obtemos

$$\bar{\Gamma}_{jk}^l = \frac{\partial^2 x^n}{\partial y^j \partial y^k} + \frac{\partial x^m}{\partial y^j} \frac{\partial x^n}{\partial y^k} \Gamma_{mn}^l \quad (2.48)$$

Se a transformação entre as componentes  $\bar{\Gamma}_{jk}^l$  e  $\Gamma_{mn}^l$  fosse completamente definida pelo segundo membro do lado direito da igualdade (2.48) significaria que ambos os coeficientes seriam componentes de um mesmo tensor, apenas representados em bases coordenadas diferentes. Ocorre que a mudança de coordenatização naturalmente corrigiu o que seria a transformação tensorial entre  $\bar{\Gamma}_{jk}^l$  e  $\Gamma_{mn}^l$  adicionando um termo ao primeiro membro do lado direito da igualdade. O que nos mostra que ambos os coeficientes são componentes de tensores diferentes dados em função de operadores derivadas parciais específicos de cada coordenatização. Daí o surgimento natural do termo de correção do Carmo (1988); Nakahara (1990); Weinberg & Steven (1972),

$$\bar{\partial}_{jk}^2 x^n = \frac{\partial^2 x^n}{\partial y^j \partial y^k} \quad (2.49)$$

Dada a equação (2.45) pode-se computar a conexão sobre um vetor dual  $w =$

$w_i dx^i \in T_p^* M$ . Lembrando que  $w : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  é um mapa que leva vetores  $V = V^j e_j \in T_p M$  em números reais, encararemos o resultado da operação de  $w$  sobre  $X$  como uma função

$$f \equiv w(X) = w_j X^j = X^j w_j \quad (2.50)$$

sobre a qual a conexão  $\nabla_{e_k} = \nabla_k$  pode agora atuar, de modo a produzir:

$$\nabla_k f = \frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (X^j w_j) = \frac{\partial X^j}{\partial x^k} w_j + X^j \frac{\partial w_j}{\partial x^k} \quad (2.51)$$

já que conexões (derivadas covariantes) atuando sobre funções escalares são idênticas as derivadas parciais dessas funções. Por outro lado

$$\begin{aligned} \nabla_k (X^j w_j) &= (\nabla_k X^j) w_j + X^j (\nabla_k w_j) \\ &= \left( \frac{\partial X^j}{\partial x^k} + \Gamma_{ki}^j X^i \right) w_j + X^j (\nabla_k w_j) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Igualando ambos os resultados vemos que os termos proporcionais as derivadas de  $X^j$  se cancelam. Renomeando os índices contraídos e fatorando a componente  $X^j$ , descobrimos que para a igualdade ser verdadeira dado qualquer  $X^j$  devemos ter

$$\nabla_k w_j = \frac{\partial w_j}{\partial x^k} - \Gamma_{kj}^i w_i \quad (2.53)$$

Já para um elemento da base dual induzida  $dx^l$ ,

$$\nabla_k dx^l = -\Gamma_{ki}^l dx^i. \quad (2.54)$$

Generalizando, a conexão sobre um tensor de posto  $(r, s)$  será igual a uma derivada parcial somada a  $r$  coeficientes de conexão referentes aos índices da base coordenada, subtraída de  $s$  coeficientes de conexão relacionados aos índices da base coordenada dual, dada independência dos elementos das bases. Com efeito,

$$\begin{aligned} \nabla_k T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} &= \partial_k T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \Gamma^{i_1}_{kl} T^{i_2 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \dots \\ &+ \Gamma^{i_r}_{kl} T^{i_1 \dots i_{r-1} l}_{j_1 \dots j_s} - \Gamma^l_{kj_1} T^{i_1 \dots i_r}_{lj_2 \dots j_s} - \dots \\ &- \Gamma^l_{kj_s} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{s-1} l}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

em que  $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$  representa as componentes do tensor  $T \in \otimes^s T_p^* M \otimes^r T_p M$ .

### 2.3.3 Transporte paralelo

*Definição 2.31.* Seja  $M$  uma VR dotada de conexão afim  $\nabla$ . Em  $M$   $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma curva diferenciável, ao longo da qual está definido o operador  $D_t$ ,  $t \in I$ . Um campo vetorial  $X$  é paralelo a  $\gamma$  se  $\nabla_{\gamma(t)} X = 0$ ,  $\forall t \in I$ .

Dado o vetor  $X_0 \in T_{\gamma(t_0)} M$ ,  $t_0 \in I$  do campo  $X = X|_{\gamma(t)}$ , definido pelo menos em cada ponto da curva, existe um único campo vetorial  $V = V|_{\gamma(t)} = D_t$ ,  $\forall t \in I$ , ao longo de  $\gamma(t)$  onde  $V(t_0) = X_0$ , tal que:

$$\nabla_V X = 0, \forall t \in I. \quad (2.56)$$

Esta equação expressa o fato da distância relativa entre os vetores dos campos  $X$  e  $V$  não mudar em nenhum ponto de  $\gamma(t)$ . Seria o equivalente na geometria Euclidiana quando o ângulo  $\theta$  entre os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{R}^n$  não muda ao longo de uma dada curva  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{x}\|} = cte \quad (2.57)$$

Esta condição poderia ser flexibilizada para casos em que  $\nabla_V X \propto X$ , uma vez que a equação (2.56) mede o quanto um campo vetorial deixa de ser paralelo à direção tangente a curva. Para isso, seria suficiente determinar se  $\nabla_V X$  e  $X$  são proporcionais.

No entanto, mostraremos na secção seguinte, quando tratarmos de transporte paralelo, que uma simples reparametrização recupera o resultado (2.56)

$V = V|_{\gamma(t)}$  é único em virtude do fato da a equação (2.56) ser uma equação diferencial, em que  $V(t_0) = X_0$  é a condição inicial.

Sob a óptica da Geometria Riemanniana, é dito, neste caso, que o vetor  $X_0$  foi paralelamente transportado ao longo da curva  $\gamma(t)$ .

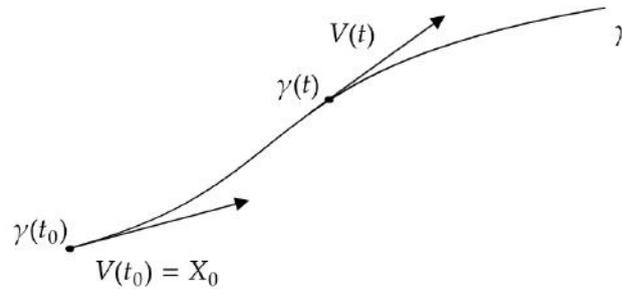


FIGURA 2.2. Transporte paralelo de  $V(t_0) = X_0$  ao longo da curva diferenciável  $\gamma$ .

Dadas a carta  $(U \subset M, \phi)$  e a base coordenada induzida  $\{e_j\}_{j=1}^m$ , a representação de suas componentes no ponto componentes  $p = \gamma(t)$  será:

$$V|_{\gamma(t)} = \frac{d}{dt} \Big|_{\gamma(t)} = \frac{dx^j(\gamma(t))}{dt} e_j \Big|_{\gamma(t)} \quad (2.58)$$

Em função da mesma coordenatização, e da mesma base coordenada, a equação (2.56) terá como componentes em  $(\gamma(t))$ :

$$\frac{dX^i(\gamma(t))}{dt} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j(\gamma(t))}{dt} X^k = 0 \quad (2.59)$$

### 2.3.4 Equação da Geodésica

No caso em particular onde um campo vetorial  $V = V|_{\gamma(t)}$  ao ser transportado, ao longo de uma curva  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  definida por ele próprio, modifica apenas seu comprimento, teremos como análoga a equação (2.56) a seguinte igualdade:

$$\nabla_V V \propto V, \forall t \in I. \quad (2.60)$$

Curvas em que se possa encontrar campos que satisfaçam essa equação são chamadas de geodésicas. Formalmente definidas como segue:

*Definição 2.32.* Uma curva diferenciável parametrizada  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , em que exista o operador derivada  $D_t$ ,  $t \in I$  (vetor tangente), é chamada de curva geodésica se  $\forall t \in I$ ,

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{D\gamma}{dt} \right) \propto \frac{D\gamma}{dt}.$$

A equação (2.60) e a definição (2.32) são consistentes, pois

$$V[\gamma] = \frac{D\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} \tag{2.61}$$

À vista disso, em resumo, por toda extensão da geodésica  $\gamma$  o vetor  $D_t$  se manterá na direção tangente.

A reparametrização  $t \mapsto l(t)$  nos permitirá simplificar a relação (2.60). Contudo, adotando o sistema de coordenadas  $\phi(U) = U' \subset \mathbb{R}^m = \{x^i\}_{i=1}^m$ , sobre o aberto  $U \subset M$  e a função teste  $f : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{R}$ , iremos impor que a reparametrização deve ser tal que não mude a maneira como atua o vetor tangente à curva. Com efeito,

$$\begin{aligned} V^i \nabla_{e_i} f &= V^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{dx^i(\gamma(t))}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ W^i \nabla_{e_i} f &= W^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{dx^i(\gamma(l))}{dl} \frac{\partial f}{\partial x^i}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

em que  $W \propto V$ .

É comum, por abuso de linguagem, nomearmos como geodésica a imagem  $\gamma(I)$  da geodésica  $\gamma$ . Por hora, sempre que necessário, omitiremos  $\gamma$  nas derivações subsequentes com o intuito de não carregar demais a notação.

Conhecida a função de proporcionalidade  $g(t)$  a relação (2.60) é levada à igualdade

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) &= g(t) \frac{d\gamma}{dt} \\ V^i \nabla_{e_i} V[\gamma] &= g(t) V[\gamma] \end{aligned} \tag{2.63}$$

Por conta do operador  $D_t$  esta é uma equação diferencial de primeira ordem. Expressando a conexão afim em termos de derivadas covariantes e de  $\Gamma$ , solucionar uma equação desse tipo é simples por meio do método dos fatores integrantes Boyce et al.

(2017). Fazendo  $V^i e_i \leftrightarrow \exp - \left( \int g(t) dt \right) V^i e_i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( e^{-\int g(t) dt} V^i \right) + \Gamma_{jk}^i \left( e^{-2\int g(t) dt} V^j V^k \right) &= g(t) e^{-\int g(t) dt} V^i \\ e^{-\int g(t) dt} \frac{d}{dt} (V^i) + \Gamma_{jk}^i \left( e^{-2\int g(t) dt} V^j V^k \right) &= 0 \\ e^{-2\int g(t) dt} V^a e_a (V^i) + \Gamma_{jk}^i \left( e^{-2\int g(t) dt} V^j V^k \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Definindo  $dl = \exp \left( \int g(t) dt \right) dt$  fica determinada a relação entre os vetores  $V$  e  $W$  em (2.62),

$$W = \frac{dx^a}{dl} \frac{\partial}{\partial x^a} = e^{-\int g(t) dt} \frac{dx^a}{dt} \frac{\partial}{\partial x^a} = e^{-\int g(t) dt} V^a e_a \quad (2.65)$$

Então, o que chamaremos de equação da geodésica, a partir de agora, será:

$$\begin{aligned} W^a e_a (W^i) + \Gamma_{jk}^i (W^j W^k) &= 0 \\ \nabla_W W^i &= 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Pois sempre é possível reparametrizar a equação  $\nabla_V V = g(t)V$ , reescalando o vetor tangente, de modo a satisfazer a igualdade (2.66). Os parâmetros capazes disso são chamados de parâmetros afim.

Dados os parâmetros afim  $t$  e  $\bar{t}$  da mesma geodésica,  $\exists a$  e  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $\bar{t} = at + b$ . A alternância entre parâmetros é, desse modo, simples de ser realizada Nakahara (1990).

### 2.3.5 Conexão Riemanniana

Como dissemos em princípio a quantidade de conexões que podem se definidas sobre uma VR é infinita. Do ponto de vista geométrico muitas conexões são equivalentes e não trazem informações adicionais ao serem comparadas a muitos de seus pares. Quando se deseja aplicar conceitos de Geometria Riemanniana que envolvam o uso de uma conexão, é razoável estabelecer algum critério que torne finito, e se possível não muito grande, o número de conexões.

Já que VR assim foram classificadas por abrigarem estruturas métricas, enunciadas nas definições (2.26) e (2.27), natural que busquemos conexões que, de algum modo, se relacionem com a métrica. Como faremos nesta seção.

Seja  $V \in \mathcal{X}M$  um campo vetorial tangente a imagem de uma curva  $\gamma$  qualquer na VR  $M$ . Imporemos que por toda extensão da curva o produto escalar  $g(X, Y)$  dado pela métrica  $g$  de quaisquer dois vetores  $X$  e  $Y$ , será invariante por atuação de  $\nabla$ . Dada a carta  $(U \subset M, \phi)$ , de coordenadas  $\phi(p) = (x^1, \dots, x^m)$ ,  $p \in M$ , temos

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_V[g(X, Y)] &= V^k[(\nabla_k g)(X, Y) + g(\nabla_k X, Y) + g(X, \nabla_k Y)] \\ &= V^k X^i Y^j (\nabla_k g)_{ij} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Já que  $X$  e  $Y$  solucionam a equação (2.56) então  $\nabla_k X = \nabla_k Y = 0$ . Desde que essa afirmação seja verdadeira para todas curvas e campos em  $M$ , então, necessariamente, a métrica é invariante sob esta operação

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \quad (2.68)$$

Na presença de torção, sobre a qual trataremos na seção de curvatura, o resultado da equação (2.68) não seria verdadeiro. Está implícito, portanto, que uma VR  $M$  deve ser livre de torção para que possa abrigar uma conexão que não modifique o produto interno entre vetores. Essa imposição é chamada de compatibilidade métrica. Veremos, mais adiante, que a simetria de uma conexão, definida na sequência, é dependente dessa condição.

*Definição 2.33.* Uma conexão afim é dita ser simétrica quando dada a carta  $(U \subset M, \phi)$ , de uma VR  $M$ , que induz a base coordenada  $\{e_i\}_{i=1}^m$ :

$$\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i = [e_i, e_j] = [e_j, e_i] = 0; \forall e_i, e_j \in \{e_i\}_{i=1}^m.$$

Traduz-se a simetria de uma conexão afim por meio dos seus coeficientes como:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}. \quad (2.69)$$

*Teorema 2.3.* Em uma VR  $M$  existirá uma, e somente uma, conexão afim capaz de satisfazer as seguintes condições:

- (i)  $\nabla$  é simétrica;
- (ii)  $\nabla$  é compatível com a métrica.

*Demonstração.* Inicialmente vamos assumir que exista  $\nabla$  em uma VR  $M$ . Dados os campos  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$

- (1)  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z)$
- (2)  $Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + (Z, \nabla_Y X)$
- (3)  $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y)$

Ao subtrairmos a expressão (3) do resultado da soma das expressões (1) e (2), obtemos:

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) &= g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) + \\ &+ g([X, Y], Z) + 2g(Z, \nabla_Y X) \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} g(Z, \nabla_Y X) &= \frac{1}{2} \{ Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - \\ &- g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z) \} \end{aligned}$$

No entanto, sempre é possível expressar os vetores em suas versões coordenatizadas, isto é,  $X = X^i e_i, Y = Y^j e_j, Z = Z^k e_k$ . O que torna simples evidenciar que as comutações

entre esses vetores são identicamente nulas, por conta da simetria. Logo,

$$g(Z, \nabla_Y X) = \frac{1}{2} \{Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y)\}$$

Esta expressão determina  $\nabla$  em função da métrica  $g$ , que é unívoca, existe e é bem definida. O que prova o teorema.  $\square$

São os coeficientes das conexões que, de fato, devem depender da métrica, em virtude de, como mencionado, representarem a diferença entre o operador derivada parcial e a conexão em uma dada carta. Com efeito, aplicando o teorema (2.3) para os vetores  $e_k, e_j$  e  $e_k$  da base coordenada  $\{e_a\}_{a=1}^m$ , induzida pelo sistema de coordenadas  $\phi$  da carta  $(U \subset M, \phi)$ , temos

$$\begin{aligned} g(e_k, \partial_j e_i) &= \frac{1}{2} \{ \partial_i g(e_j, e_k) + \partial_j g(e_k, e_i) - \partial_k g(e_i, e_j) \} \\ g(e_k, \Gamma_{ji}^l e_l) &= \frac{1}{2} \{ \partial_i g(e_j, e_k) + \partial_j g(e_k, e_i) - \partial_k g(e_i, e_j) \} \\ g(e_k, e_l) \Gamma_{ji}^l &= \frac{1}{2} \{ \partial_i g(e_j, e_k) + \partial_j g(e_k, e_i) - \partial_k g(e_i, e_j) \} \end{aligned} \quad (2.70)$$

porém  $g(e_m, e_n) = g_{mn}$ , logo,

$$g_{kl} \Gamma_{ji}^l = \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \} \quad (2.71)$$

O produto da métrica  $(g_{kl})$  por sua inversa  $(g^{kl})$  resulta em  $g_{kl} g^{kl} = \delta_k^k = 1$ . Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $g^{kl}$ ,

$$\Gamma_{ji}^l = \left\{ \begin{matrix} l \\ ji \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{kl} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \} \quad (2.72)$$

Esta expressão nos diz que os chamados Símbolos de Christoffel,

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ ji \end{matrix} \right\} = \Gamma_{ji}^l \quad (2.73)$$

(coeficientes das conexões), associados a imagem de  $\nabla$  em  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ , dependem apenas do conhecimento que temos da métrica neste aberto. Iremos impor que o aberto em questão pertença a cobertura da VR  $M$  na qual exista uma coordenatização equivalente em cada um de seus abertos. De modo que, esse resultado se estenda a toda variedade a

medos de uma transformação entre coordenadas. Deste ponto em diante empregaremos  $\Gamma$  para simbolizar o próprio símbolo de Christoffel, uma vez que estamos interessados em conexões compatíveis com a métrica.

### 2.3.6 Curvatura

Alguns espaços mais gerais se diferenciam do espaço euclidiano por possuírem curvatura, torção e contorção intrínsecos. O que leva a necessidade de mensurarmos a geometria na vizinhança de seus pontos, se sobre eles desejarmos realizar algum tipo de operação matemática. Logo, pela presença de Curvatura e/ou Torção devemos encontrar uma maneira de corrigir as operações matemáticas definidas sobre  $\mathbb{R}^m$ . Conhecendo e computando a Curvatura de um espaço, naturalmente emanam as condições para acrescentar termos as entidades análogas do espaço Euclidiano.

Uma coordenatização é atribuída a um ponto de uma VR por razões puramente técnicas. A noção de curvatura, portanto, não deve depender de nenhum sistema de coordenadas em especial. A mudança de geometria entre dois pontos de uma variedade pode ser representada, suavemente, pelos símbolos de Christoffel, porém esse depende das coordenadas adotadas, logo não é um bom candidato a computar a curvatura de um espaço. O que nos motiva a definir o que é curvatura em termos tensoriais, que por definição, não privilegiará nenhum sistema de coordenadas em detrimento dos demais.

*Definição 2.34.* A curvatura  $R$  de uma VR  $M$  é uma correspondência entre um trio de campos,  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  quaisquer, e um único campo,  $R : \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ , dada por:

$$R(X, Y, Z) \equiv \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Pelo modo como foi definida, a curvatura aparenta ser um operador derivada diferente de derivadas parciais, vetores e vetores duais. EM primeira análise, temos a impressão de que  $R$  não é um objeto intrínseco, portanto. Sua aparência é de uma combinação linear entre duas potências de conexões afim. Os elementos intrínsecos das VR que dão conta de representarem suas características localmente dependem de tensores, em especial do tensor métrico. Ou seja, desejamos uma noção de curvatura multilinear como são os tensores e seus derivados.

Sejam  $f, g, h \in \mathcal{D}(M)$ , implementando as substituições  $fX \leftrightarrow X$ ,  $gY \leftrightarrow Y$  e  $hZ \leftrightarrow Z$ , na expressão definida em (2.34), teremos

$$\begin{aligned}
 R(fX.gY)hZ &= f\nabla_X\{g\nabla_Y(hZ)\} - g\nabla_Y\{f\nabla_X(hZ)\} \\
 &\quad - fX[g]\nabla_Y(hZ) + gY[f]\nabla_X(hZ) - fg\nabla_{[X,Y]}(hZ) \\
 &= fg\nabla_X\{Y[h]Z + h\nabla_YZ\} - gf\nabla_Y\{X[h]Z + h\nabla_XZ\} \\
 &\quad - fg[X,Y][h]Z - fgh\nabla_{[X,Y]}Z \\
 &= fghR(X,Y)Z
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Logo, vemos que  $R$  apresenta propriedades tensoriais. É comum escrever  $R(X,Y)Z$  ao invés de  $R(X,Y,Z)$ , de modo a evidenciar que na definição (2.34) escolhidos os campos vetoriais  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  as propriedades de  $R$  estarão completamente determinadas. O que motiva a seguinte proposição:

*Proposição 2.5.* A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:

(i)  $R$  é bilinear em  $\mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M)$ , isto é,

$$\begin{aligned}
 R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1) \\
 R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

$$f, g \in \mathcal{D}(M), X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M).$$

(ii)  $R(X, Y)$  é linear  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , isto é,

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W \\
 R(X, Y)fZ &= fR(X, Y)Z,
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

$$f \in \mathcal{D}(M), Z, W \in \mathcal{X}(M)$$

*Demonstração.* Verificando a propriedade (i):

$$\begin{aligned}
 R(fX_1 + gX_2, Y_1)Z &= (\nabla_{fX_1} + \nabla_{gX_2})\nabla_{Y_1}Z - \nabla_{Y_1}(\nabla_{fX_1} + \nabla_{gX_2})Z \\
 &\quad - \nabla_{[fX_1, Y_1]}Z - \nabla_{[gX_2, Y_1]}Z \\
 &= \nabla_{fX_1}\nabla_{Y_1}Z - \nabla_{Y_1}\nabla_{fX_1}Z - \nabla_{[fX_1, Y_1]}Z \\
 &\quad + \nabla_{gX_2}\nabla_{Y_1}Z - \nabla_{Y_1}\nabla_{gX_2}Z - \nabla_{[gX_2, Y_1]}Z \\
 &= R(fX_1, Y_1)Z + R(gX_2, Y_1)Z \\
 &= fR(X_1, Y_1)Z + gR(X_2, Y_1)Z,
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

as funções foram fatoradas da mesma forma que no resultado (2.74). A primeira parte da propriedade (ii) é imediata e não requer demonstração. A segunda parte da propriedade (ii) é apenas um caso particular da equação (2.74), já demonstrada.  $\square$

Quando  $R$  atua sobre os elementos  $e_i$ ,  $e_j$  e  $e_k$  da base coordenada  $\{e_a\}_{a=1}^m$ , induzida pela coordenatização  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$  a partir de  $p \in U \subset M$ , sua expressão é simplificada, pois vetores da base coordenada comutam,

$$R(e_i, e_j)e_k = (\nabla_{e_j}\nabla_{e_i} - \nabla_{e_i}\nabla_{e_j})e_k \tag{2.78}$$

*Definição 2.35.* A torção de uma VR  $M$  é uma correspondência  $T : \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  definida por:

$$T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

A torção mede a diferença que surge pela mudança na ordenação da aplicação de duas conexões afim sobre um mesmo vetor, ou seja,  $T$  nos diz se conexões comutam ou não em uma dada região de uma VR  $M$ .

*Proposição 2.6.* A torção  $T$  de uma VR  $M$  é linear em cada um de seus argumentos:

$$\begin{aligned}
 T(fX_1 + gX_2, Y) &= fT(X_1, Y) + gT(X_2, Y) \\
 T(X, fY_1 + gY_2) &= T(X, Y_1)f + T(X, Y_2)g \\
 f, g &\in \mathcal{D}(M), \quad X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

*Demonstração.* Os argumentos de  $T$  são equivalentes. Logo se a linearidade for verificada em um argumento, automaticamente se estenderá ao outro argumento. Na primeira

parte da proposição basta calcularmos explicitamente a atuação de  $T$  sobre  $fX_1 + gX_2$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} T(fX_1 + gX_2, Y) &= \nabla_{fX_1 + gX_2} Y - \nabla_Y(fX_1 + gX_2) - [fX_1 + gX_2, Y] \\ &= \nabla_{fX_1} Y - \nabla_Y(fX_1) - [fX_1, Y] \\ &\quad + \nabla_{gX_2} Y - \nabla_Y(gX_2) - [gX_2, Y] \\ &= f\nabla_{X_1} Y - Y[f]X_1 - f\nabla_Y X_1 - fX_1 Y + Y[f]X_1 + f(YX_1)[f] \end{aligned}$$

utilizando uma função teste  $h \in \mathcal{D}(M)$

$$\begin{aligned} T(fX_1 + gX_2, Y)[h] &= (\nabla_{fX_1} Y)[h] - Y[f]X_1[h] - f(\nabla_Y X_1)[h] - [fX_1, Y][h] \\ &\quad + (\nabla_{gX_2} Y)[h] - Y[g]X_2[h] - g(\nabla_Y X_2)[h] - [gX_2, Y][h] \\ &= f(\nabla_{X_1} Y)[h] - Y[f]X_1[h] - f(\nabla_Y X_1)[h] - fX_1[Y][h] \\ &\quad + Y[f]X_1[h] + fY[X_1][h] \\ &\quad + g(\nabla_{X_2} Y)[h] - Y[g]X_2[h] - g(\nabla_Y X_2)[h] - gX_2[Y][h] \\ &\quad + Y[g]X_2[h] + gY[X_2][h] \\ &= f\{(\nabla_{x_1} Y)[h] - (\nabla_Y X_1)[h] - f[X_1, Y][h]\} \\ &\quad + g\{(\nabla_{x_2} Y)[h] - (\nabla_Y X_2)[h] - g[X_2, Y][h]\} \\ &= fT(X_1, Y)[h] + gT(X_2, Y)[h] \end{aligned}$$

logo

$$T(fX_1 + gX_2, Y) = fT(X_1, Y) + gT(X_2, Y),$$

o que conclui a demonstração □

Quando  $T$  atua sobre os elementos  $e_i$  e  $e_j$  da base  $\{e_q\}_{q=1}^m$ , induzida pela coordenatização  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$  a partir de  $p \in U \subset M$ , o resultado é simples já que vetores da base coordenada comutam,

$$T(e_i, e_j) = \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i \tag{2.80}$$

Já que  $R$  e  $T$  são tensores, o modo como atuam sobre funções e outros tensores é bem definido. O que nos fornece uma maneira de conhecermos as componentes de ambos. Dada a carta  $(U \subset M, \phi)$ , ao redor de  $p \in U \subset M$  o produto interno entre o resultado da equação (2.74) e  $dx^i \in \{dx^a\}_{a=1}^m$ , exprimem as componentes do tensor de curvatura

chamado de *Tensor de Riemann*,

$$\begin{aligned}
 R^l_{kij} &= \langle dx^l, (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i}) e_k \rangle \\
 &= \langle dx^l, \nabla_{e_i} (\Gamma^m_{jk} e_m) - \nabla_{e_j} (\Gamma^m_{ik} e_m) \rangle \\
 &= \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm}
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Já o produto entre a expressão (2.80) e  $dx^i \in \{dx^a\}_{a=1}^m$ , na mesma carta, resulta nas seguintes componentes do tensor de torção:

$$\begin{aligned}
 T^i_{jk} &= \langle dx^k, \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i \rangle \\
 &= \langle dx^k, \Gamma^l_{ij} e_l - \Gamma^l_{ji} e_l \rangle \\
 &= \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

Permutando os últimos índices de  $R^l_{kij}$ :

$$\begin{aligned}
 R^l_{kji} &= \partial_j \Gamma^l_{ik} - \partial_i \Gamma^l_{jk} + \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm} - \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} \\
 R^l_{kji} &= -(\partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm}) \\
 -R^l_{kji} &= \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm} \\
 \implies R^l_{kij} &= -R^l_{kji}
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

A permutação de  $ij$  em  $T^k_{ij}$  também atribui um sinal negativo componentes:

$$\begin{aligned}
 T^k_{ji} &= \Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij} \\
 T^k_{ji} &= -(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) \\
 -T^k_{ji} &= \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \\
 \implies T^k_{ij} &= -T^k_{ji}
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Dizemos que esses tensores são antissimétricos nesses índices.

Por serem tensores  $R$  e  $T$  também estão sujeitos a operação mostrada na igualdade (2.30):

$$\begin{aligned}
 g_{sl} R^l_{kij} &= R_{skij} \\
 g_{wk} T^k_{ij} &= T_{wij}
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

Não há distinção entre os índices de um tensor, quaisquer dois índices das componentes na expressão (2.30) estarão sujeitos a mesma simetria descrita na equação (2.83), portanto:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = R_{jkil} = -R_{jkli} = R_{kjli} = -R_{klji} = R_{klij} \quad (2.86)$$

### 2.3.7 Curvaturas Seccionais

Em geral variedades Riemannianas possuem um número arbitrário de dimensões, o que faz com que as componentes do tensor de curvatura  $R$  representem inúmeras equações diferenciais. Para contornar esse problema é conveniente derivar expressões para as curvaturas das subvariedades que constituem a VR em questão

Para obtermos as expressões dos tensores de curvatura das subvariedades, dados os vetores  $X, Y, Z$  e  $W \in T_pM$ , e a métrica  $g$  da VR  $M$ , sempre que necessário, se não houver prejuízos a compreensão, utilizaremos a notação  $g(X, R(Y, Z)W) = (X, Y, Z, W)$ .

*Definição 2.36.* Dado  $p \in M$ , um subespaço bi-dimensional  $\sigma \subset T_pM$  e uma base  $\{e_x, e_y\}$  de  $\sigma$  chamamos de curvatura seccional de  $\sigma$  em  $p$  o mapa:

$$k(\sigma) = K(e_x, e_y) = \frac{(e_x, e_y, e_x, e_y)}{\sqrt{|e_x|^2|e_y|^2 - g(e_x, e_y)}} \in \mathbb{R}$$

onde  $h$  é a métrica em  $M$ .

Curvatura é uma característica intrínseca, e como já mencionado, não deve depender do sistema de coordenadas escolhido. Com efeito, a independência de  $K(e_x, e_y)$  em respeito a base coordenada  $\{e_x, e_y\}$  é verificada quando notamos que sempre podemos passar para outra base, com as seguintes transformações:

- a)  $\{e_x, e_y\} \rightarrow \{e_y, e_x\}$
- b)  $\{e_x, e_y\} \rightarrow \{\lambda e_x, e_y\}, \lambda \in \mathbb{R}$
- c)  $\{e_x, e_y\} \rightarrow \{\lambda e_x + e_y, e_y\}, \lambda \in \mathbb{R}$

Algebricamente é possível decompor uma VR em subvariedades. Então é razoável assumirmos que a coleção de números reais  $\{K(\sigma)\}$ , indexada pelos subespaços tangentes de  $T_pM$ , em cada  $p \in M$ , leva-nos a conhecer a curvatura  $R$  de  $M$  completamente. Em do Carmo (1988) comprova-se a validade dessa hipótese.

*Lema 2.4.* Seja  $p \in M$  um ponto da VR  $M$ . É dito que  $M$  tem curvatura seccional constante igual a  $K_0$  se, e somente se, dado tensor de curvatura  $R$  de  $M$ , uma outra definição de curvatura  $R' : T_pM \otimes T_pM \otimes T_pM \rightarrow T_pM$ , satisfizer as igualdades:

(i)

$$(X, Y, Z, W)' = g(R'(X, Y)Z, W) = g(X, W)g(Y, Z) - g(Y, W)g(X, Z) \\ \forall X, Y, Z, W \in T_pM.$$

(ii)

$$R = K_0 R'$$

*Demonstração.* A demonstração é imediata, pois assumindo que  $\forall \sigma \subset T_pM$ , dado um par de vetores  $x, y \in \sigma$ ,  $K(x, y) = K_0$

$$g(R'(x, y)x, y) = g(x, x)g(y, y) - g(x, y)g(x, y) \\ = \sqrt{|x|^2|y|^2 - g(x, y)^2}$$

logo, da definição (2.36)

$$K(x, y) = K_0 = \frac{(x, y, x, y)}{(x, y, x, y)'} \\ \implies (x, y, x, y) = K_0(x, y, x, y)'$$

A métrica é um mapa linear nos seus argumentos, logo

$$(x, y, x, y) = K_0(x, y, x, y)' \\ g(R(x, y), x, y) = g(K_0 R'(x, y), x, y) \\ \implies R = k_0 R'$$

□

### 2.3.8 Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura

Algumas curvaturas seccionais são tão frequentes e importantes em campos de estudo da Matemática e da Física que motivam uma discussão mais detalhada, além de nomenclaturas particulares. É o caso do tensor de Ricci e do escalar de curvatura. Seja  $T_pM$  um espaço tangente em  $p \in M$ , e seja  $\{e_i\}_{i=1}^m$  a base coordenada induzida pela carta  $(U, \phi)$ , ao redor de  $p$ . O subconjunto  $\{e_j\}_{j=1}^n \subset \{e_i\}_{i=1}^m, n < m$  pode representar a base do subespaço tangente  $\sigma \subset T_pM$  em  $p$ . Um hiperplano ortogonal a  $e_m$ , por seu turno, é um subespaço tangente, cujo a base pode ser dada por  $\{e_k\}_{k=1}^{m-1}$ .

O tensor de curvatura em  $\sigma$  é o traço do tensor de Riemman  $R$ , ou seja, é o tensor que resulta da contração de índices. O traço das componentes como na igualdade (2.81),

$$\begin{aligned} R_{ij} &= R^k{}_{ikj} \\ &= \partial_k \Gamma^k{}_{ji} - \partial_j \Gamma^k{}_{ki} + \Gamma^m{}_{ji} \Gamma^k{}_{km} - \Gamma^m{}_{ki} \Gamma^k{}_{jm} \end{aligned} \tag{2.85}$$

resulta nas componentes da curvatura seccional do hiperplano  $\sigma$  chamada de tensor de Ricci do Carmo (1988); Wald (1984); Nakahara (1990); Weinberg & Steven (1972). Interessante notar que aqui o traço representa a soma de matrizes que compunham a diagonal principal de  $R$ .

A curvatura escalar  $\mathcal{R}$  é obtida contraindo-se os índices do tensor de Ricci, sendo assim, utilizando a mesma carta de quando obtivemos a expressão (2.85):

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= R_{ij} g^{ij} \\ &= (\partial_k \Gamma^k{}_{ji} - \partial_j \Gamma^k{}_{ki} + \Gamma^m{}_{ji} \Gamma^k{}_{km} - \Gamma^m{}_{ki} \Gamma^k{}_{jm}) g^{ij} \end{aligned} \tag{2.86}$$

A proposição a seguir nos revela importantes propriedades do tensor de curvatura chamadas de identidades de Bianchi. As equações de campo de Einstein devem seu formato a essas identidades, já que é a partir delas que se pode derivar o tensor de Einstein capaz de solucionar as equações.

*Proposição 2.7.* Seja  $M$  uma variedade diferenciável munida de uma conexão afim  $\nabla$ . Então as seguintes identidades são válidas  $\forall X, Y, Z \in T_pM$ :

i) Primeira identidade de Bianchi:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

ii) Segunda identidade de Bianchi:

$$(\nabla_X R)(Y, Z)V + (\nabla_Z R)(X, Y)V + (\nabla_Y R)(Z, X)V = 0;$$

$$V \in T_p M.$$

*Demonstração.* Para realizar a demonstração da primeira identidade proposta basta utilizar a **definição 2.34** e as simetrias da conexão afim, (2.45), logo:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Z, X]} Z + \\ &+ \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [Y, X] + \nabla_X [Z, Y] - \nabla_{[Z, X]} Y - \nabla_{[Z, X]} Z - \nabla_{[Y, Z]} X = \\ &= [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] \end{aligned}$$

Aplicando a identidade de Jacobi,

$$[Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] = 0$$

A demonstração da segunda propriedade é mais facilmente construída com o emprego da carta  $(U, \phi)$  de  $M$ , onde  $\forall p$  pertencente a VR  $M \ni T_p M$  nos quais os vetores de quaisquer uma de suas bases ortogonais satisfazem a igualdade  $\nabla_{e_i} e_j(p) = \nabla_i e_j(p) = 0$ .

Logo, temos que,

$$\begin{aligned}
 & (\nabla e_h R)(e_i, e_j)e_k + (\nabla e_i R)(e_j, e_h)e_k + (\nabla e_j R)(e_h, e_i)e_k = \\
 & \quad \nabla_h \nabla_i \nabla_j e_k - \nabla_h \nabla_j \nabla_i e_k - \nabla_h \nabla_{[j,h]} e_k + \\
 & \quad \nabla_i \nabla_j \nabla_h e_k - \nabla_i \nabla_h \nabla_j e_k - \nabla_i \nabla_{[j,h]} e_k + \\
 & \quad \nabla_j \nabla_h \nabla_i e_k - \nabla_j \nabla_i \nabla_h e_k - \nabla_j \nabla_{[h,i]} e_k = \\
 & \quad R_{hi} \nabla_j e_k + \nabla_{[h,i]} \nabla_j e_k - \nabla_j \nabla_{[h,i]} e_k + \\
 & \quad R_{ij} \nabla_h e_k + \nabla_{[i,j]} \nabla_h e_k - \nabla_h \nabla_{[i,j]} e_k + \\
 & \quad R_{jh} \nabla_i e_k + \nabla_{[j,h]} \nabla_i e_k - \nabla_i \nabla_{[j,h]} e_k = \\
 & \quad R_{[h,i],j} e_k + \nabla_{[[h,i],j]} e_k + \\
 & \quad R_{[i,j],h} e_k + \nabla_{[[i,j],h]} e_k + \\
 & \quad R_{[j,h],i} e_k + \nabla_{[[j,h],i]} e_k = 0
 \end{aligned}$$

Em particular considerou-se uma conexão com torção identicamente nula. A última igualdade segue da identidade de Jacobi.  $\square$

As componentes das identidades de Bianchi são:

$$\begin{aligned}
 & R^i{}_{jkl} + R^i{}_{klj} + R^i{}_{ljk} = 0 \\
 & (\nabla_h R)^i{}_{jkl} + (\nabla_k R)^i{}_{jlh} + (\nabla_l R)^i{}_{jkh} = 0
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

Pela contração de índices da segunda identidade de Bianchi chega-se a uma importante relação:

$$\begin{aligned}
 & (\nabla_h R)^i{}_{jil} + (\nabla_i R)^i{}_{jlh} + (\nabla_l R)^i{}_{jhi} = \\
 & (\nabla_h \mathcal{R})_{jl} + (\nabla_i R)^i{}_{jlh} - (\nabla_l \mathcal{R})_{jh} = 0
 \end{aligned}$$

”erguendo” o índice  $l$  com a métrica e ”contraíndo-o” com o índice  $j$ , temos

$$\nabla_i (R\delta - 2\mathcal{R})^i{}_h = 0 \tag{2.88}$$

ou

$$\nabla_i G^{ih} = 0 \tag{2.89}$$

onde  $G^{ih}$  são as componentes do tensor de Einstein definido como

$$G = G^{ij} e_i \otimes e_j = \left( \mathcal{R}^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} \mathcal{R} \right) e_i \otimes e_j. \quad (2.90)$$

### 2.3.9 Desvio Geodésico

A medida da posição relativa entre um feixe de geodésicas em uma VR é um modo alternativo de caracterização de curvatura. Portanto, deve haver alguma relação entre os desvios sofridos por uma geodésica ao longo de uma variedade que abriga o tensor  $R$ .

Seja  $\gamma(s, t) = \gamma_s(t)$  uma geodésica de uma família de geodésicas a 1-parâmetro sobre a VR  $M$ , onde  $\forall s \in \mathbb{R}$ , a curva  $\gamma_s$  é uma geodésica cujo o parâmetro afim é  $t \in \mathbb{R}$ . Logo, o vetor tangente a geodésica  $\gamma_s$  em  $\gamma_s(t), t \in \mathbb{R}$ , é dado por

$$T = \frac{d\gamma_s(t)}{dt} \quad (2.91)$$

sendo  $T \in T_p M$ , onde  $T_p M$  é o espaço tangente a  $M$  no ponto  $p \in M$ . O feixe de geodésicas é uma coleção. Pode-se levar, continuamente, uma geodésica  $\gamma_{\bar{s}}$  da coleção  $\{\gamma_s\}_{s=1}^P$  em outra impondo que o parâmetro que as indexa seja contínuo. Neste caso, fixado o valor do parâmetro  $t$ , o vetor de posição relativa entre duas geodésicas vizinhas em uma variedade é dado por

$$N = \frac{d\gamma_s(t)}{ds} = \frac{d\gamma(s, t)}{ds}, \quad (2.92)$$

para tal é preciso que  $N$  se estenda de  $p$  até  $\gamma(s, t)$ , portanto  $N$  também é vetor de  $T_p M$ . Sempre é possível escolher  $t$  e  $s$  tal que  $g(T, N) = 0$ , sendo  $g$  a métrica.

A quantidade  $v^a = T^b \nabla_{e_b(s)} N^a = T^b \nabla_b N^a(s) \equiv T^b \nabla_b N^a$  é a velocidade relativa entre geodésicas vizinhas. Conseqüentemente o fato da conexão ser um operador derivada faz com que a aceleração entre geodésicas seja da forma:

$$a^i = T^k \nabla_k v^i = T^k \nabla_k (T^j \nabla_j N^i). \quad (2.93)$$

Logo, temos,

$$\begin{aligned}
 a^i &= T^k \nabla_k (T^j \nabla_j N^i) = T^k \nabla_k (N^j \nabla_j T^i) \\
 &= (T^k \nabla_k N^j) (\nabla_j T^i) + N^j (T^k \nabla_k \nabla_j T^i) \\
 &= (N^k \nabla_k T^j) (\nabla_j T^i) + N^j (T^k \nabla_j \nabla_k T^i) - R_{klj}{}^i N^j T^k T^l \\
 &= N^k \nabla_k (T^j \nabla_j T^i) - R_{klj}{}^i N^j T^k T^l \\
 &= -R_{klj}{}^i N^j T^k T^l
 \end{aligned} \tag{2.94}$$

Esta equação é conhecida como equação de desvio da geodésica, que evidencia a equiparação entre as noções de aceleração e curvatura Nakahara (1990); Wald (1984). Um conjunto de geodésicas apresentará aceleração relativa entre si se, e somente se, o espaço em que residem possuir curvatura, ou seja, apenas se  $R_{klj}{}^i \neq 0$  na expressão (2.94).

Dada a equação (2.86) e em observância as propriedades da métrica e da conexão afim, Teorema 2.3, temos

$$\nabla_\alpha R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \nabla_\alpha \mathcal{R}. \tag{2.95}$$

Portanto, a conservação das componentes do tensor de Ricci só seria possível se o escalar de curvatura fosse identicamente nulo, ou seja,

$$\nabla_\alpha R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \nabla_\alpha \mathcal{R} = 0.$$

## Capítulo 3

# Teoria da Relatividade

Embora seja fácil enunciar as equações de campo de Einstein, é muito mais complicado combinar a Física e a matemática envolvidas na motivação dessa teoria. Assume-se, como hipótese inicial, que a Geometria Diferencial é suficiente para representar uma teoria da gravidade consistente e fisicamente significativa. Embora este pressuposto ainda seja objeto de muita pesquisa.

Inicialmente trataremos da relatividade especial, que trará consigo a noção de espaço-tempo, um espaço de quatro dimensões dotado de uma métrica  $\eta$  com assinatura  $(-, +, +, +)$ . Esta entidade nos permitirá alcançar uma descrição geométrica da gravitação onde esteja naturalmente computada a contribuição da curvatura para as leis físicas. Então para atingirmos este objetivo mostraremos como descrever o movimento ao longo de um espaço ambiente com estas características. Este formalismo Einstein nomeou de Relatividade Restrita. Em seguida generalizaremos esta descrição para espaços ambientes quadridimensionais com curvatura diferente de zero. Assim mostraremos o desenvolvimento da relatividade geral Einstein (1952).

### 3.1 Relatividade Especial

A física pré-Relativística assumia ser o espaço plano, tridimensional e munido de um relógio universal externo. A ideia chave da relatividade especial foi incorporar o tempo ao espaço 3D plano levando a concepção de um espaço-tempo 4D sobre o qual deveriam ser formuladas as teorias da Física.

A Teoria da Relatividade constrói-se então apoiada sobre dois postulados. O primeiro anuncia que as leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais, ou seja, não existe nenhum sistema de referência inercial preferencial. Já o segundo postulado diz que a luz possui o mesmo valor  $c$  para todos os referenciais inerciais.

Logo, se todos os referenciais inerciais são equivalentes entre si, então não há mudanças em algumas observações quando as coordenadas de um referencial são convertidas em coordenadas de outro referencial (invariância). Já outras observações apresentam transformações específicas bem definidas, de acordo com a mudança entre sistemas de coordenadas (Covariância). Historicamente a primeira pista da Relatividade Especial são as propriedades de invariância espacial e temporal das equações de Maxwell.

O espaço característico da Relatividade Especial é o espaço de Minkowski  $\mathcal{M}^4 = \mathbb{R}^{(1,3)}$ , onde um ponto, chamado de evento, possui coordenadas  $X^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{ct, x, y, z\}$ . De acordo com a definição 2.26 um elemento de linha quadrático do espaço de Minkowski pode ser representado como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dY^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.1)$$

O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  possui simetria sob rotações dos seus eixos e sob translações, por conta de sua planicidade. Analogamente, também por sua planicidade, a métrica  $\eta_{\mu\nu}$  possui simetrias espaciais e temporais que garantem sua invariância por rotações 4D e translações 4D. Significa dizer que existem matrizes  $L^\alpha_\beta$  tais que

$$\eta_{\alpha\beta} = L^\mu_\alpha L^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

Uma representação da matriz de transformação associada deve assegurar que  $\det(L^\alpha_\beta) = \pm 1$ , para que seja garantida a igualdade acima, assim sendo

$$(L^\nu_\mu)_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

onde  $\beta = v/c$  é a velocidade do corpo, observado de um referencial em  $\mathcal{M}^4$ , normalizada pelo valor da velocidade da luz  $c$ . A quantidade  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  é o fator de Lorentz, elemento central das transformações de Lorentz. Um giro no plano  $x - t$  (*boost*) resulta da aplicação direta da matriz (3.3) sobre eixos de um sistema de coordenadas Weinberg & Steven (1972); Wald (1984); Misner et al. (1973).

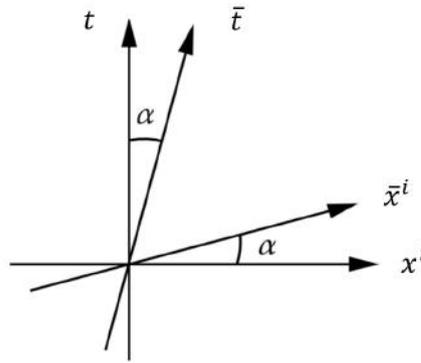


FIGURA 3.1. Representação da transformação de Lorentz no plano  $x - t$ . O ângulo de boost  $\alpha$  é determinado por  $\beta = v/c = \tan(\alpha)$ .

Neste plano dois eventos conectados por uma linha horizontal possuem o mesmo valor de coordenada vertical, ou seja, mesmo valor de tempo. Deslocar-se através de pontos que diferem apenas na componente espacial (horizontal) é descrever uma trajetória de simultaneidade. O conjunto eventos simultâneos para  $t = 0$  formam o eixo  $x^i$ . Como indica a razão  $\beta = v/c$ , no fator de Lorentz, essa a noção de simultaneidade irá depender da velocidade do observador.

Segundo a Relatividade Especial, somente corpos não massivos movem-se na velocidade da luz, portanto, o maior valor possível de  $\beta = v/c$  é  $\beta = 1$ . Uma trajetória com velocidade igual a  $c$  no plano da figura 3.1 se constituiria em uma linha com inclinação de  $\pi/4$  radianos em relação a direção horizontal, pois quando  $\beta \rightarrow 1$  temos que  $\tan(\alpha) = 1$ , assim  $\alpha = \pi/4$ .

Como abordaremos no capítulo 4, no espaço-tempo 1+3 o lugar geométrico dos eventos de mesma coordenada temporal e diferentes coordenadas espaciais é a chamada hiper-superfície de simultaneidade.

Seja  $x^i - x^j$  um hiper-plano que passa pela origem de um sistema de coordenadas (posição do observador) no espaço de Minkowski 1+2. Ao revolucionarmos em torno do eixo  $\mathcal{O}t$  a linha associada a trajetória de um raio de luz emitido pelo observador dividimos

sua percepção do espaço de Minkowski em duas regiões disjuntas, como mostra a figura 3.2

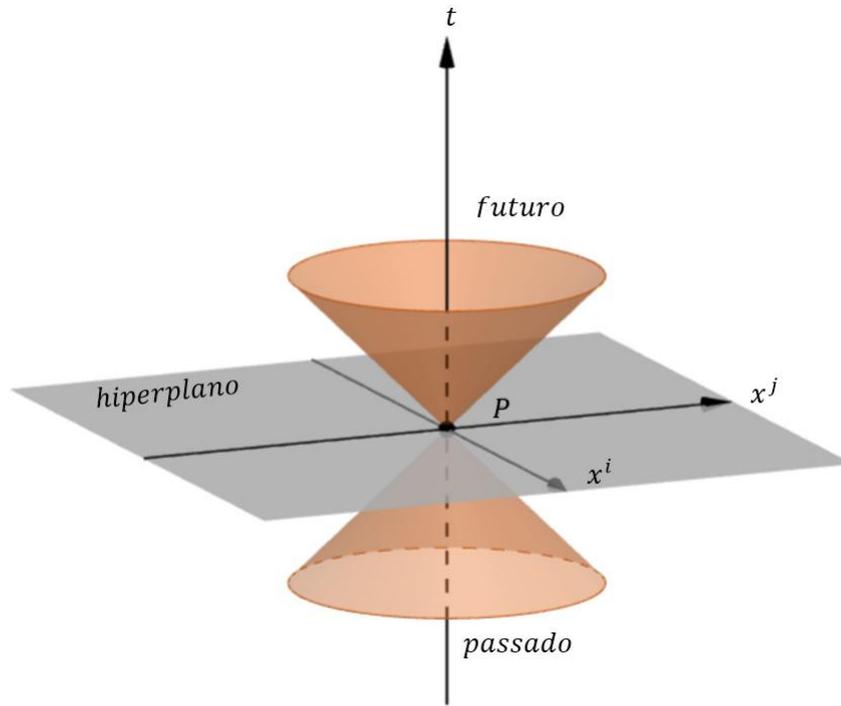


FIGURA 3.2. Cone de Luz no espaço 1+2.

Partículas que viajam com velocidades  $v < c$  descrevem trajetórias do tipo tempo onde  $ds^2 < 0$ .

Intervalos do tipo espaço  $ds^2 > 0$  só poderiam representar trajetórias de partículas de velocidades  $v > c$ , o que não é permitido pela Relatividade Especial. De modo que dois eventos conectados por este tipo de intervalo não possuem relação causal, já que sinais luminosos não conseguiram viajar entre eles.

Para que teorias físicas sejam consistentes com a relatividade especial todo o movimento de corpos massivos entre eventos no espaço de Minkowski deve ocorrer com o emprego de velocidades menores do que a velocidade da luz. Satisfazer essa condição é manter a teoria invariante por transformações de Lorentz como a da equação (3.3). Além disso, no limite  $v \ll c$  a teoria deverá ser capaz de recuperar a mecânica Newtoniana.

Em respeito ao seu próprio referencial um observador não se movimenta, sendo capaz de perceber apenas a passagem do tempo. O intervalo de tempo medido por um observador em seu referencial é chamado, então, de tempo próprio e denotado por

$d\tau^2 = -ds^2/c^2$ . De sorte que, dadas as coordenadas locais  $X^\mu$  de um observador, onde  $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dX^\mu dx^\nu$ , é possível escrever

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu}. \quad (3.4)$$

### 3.1.1 Dilatação Temporal

Fica claro que para um observador em repouso a componente espacial do elemento de linha é identicamente nula levando o tempo próprio e o tempo coordenada a coincidirem,  $d\tau = dt$ . A mudança de posição de um observador é ocasionada por uma velocidade não nula. Quando por meio da velocidade  $v_x$  o movimento de um observador realizasse apenas na direção do eixo  $OX$  tem-se

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - v_x^2 dt^2} = \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} dt = \frac{dt}{\gamma}. \quad (3.5)$$

O intervalo de tempo medido por um observador  $dt$ , isto é, o tempo coordenada Weinberg & Steven (1972); Wald (1984) será igual ao intervalo de tempo  $d\tau$  medido no referencial do objeto, ou seja, igual ao tempo próprio do objeto, multiplicado pelo fator de Lorentz,  $dt = \gamma d\tau$ . Assumindo que o objeto observado é massivo, necessariamente  $v_x < c$ , conseqüentemente  $\gamma > 1$ . Portanto, o intervalo percebido pelo observador será maior do que o intervalo de tempo próprio do objeto. A este fenômeno damos o nome de "dilatação temporal".

Velocidades cotidianas são muito inferiores a  $c$ , fazendo com que  $1 - v^2/c^2 \approx 1$ . Neste regime o efeito de dilatação temporal não é apreciável.

### 3.1.2 Contração Espacial

A matriz de transformação (3.3) representa uma "rotação espaço-temporal" chamada de boost. Da mesma forma como fazem as rotações em  $\mathbb{R}^3$  que relacionam pontos deste espaço, dois pontos do espaço de Minkowski  $x$  e  $x'$  associam-se por meio de um boost da seguinte maneira:  $x' = \gamma(x - \beta ct)$ .

A medida do comprimento de uma barra  $l' = \bar{x}' - x'$ , no referencial próprio  $S'$ , pode ser relacionada a medida  $l = \bar{x} - x$ , desta mesma barra, no referencial  $S$  de um

observador qualquer. Para obter a relação entre as medidas consideremos que ambas as medidas das extremidades das barras foram feitas no mesmo instante de cada referencial, isto é, em  $S'$  as extremidades  $x'$  e  $\bar{x}'$  foram medidas no instante  $t'$ , já no referencial  $S$  as extremidades  $x$  e  $\bar{x}$  foram mediadas no instante  $t$ . Tomemos  $v$  como sendo a velocidade relativa entre  $S$  e  $S'$  ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ , de maneira que, sem perda de generalidade, nada impede que  $t$  e  $t'$  estejam relacionados por uma transformação de Lorentz  $t' = t/\gamma$ , como na equação (3.5). O que leva as medidas de comprimento nesses referenciais a estarem correlacionadas por um boost,  $l' = \bar{x}' - x' = \gamma(\bar{x} - x) = \gamma l$ . Como já mencionado, uma vez que o corpo seja massivo a velocidade imprimida não poderá ser maior do que a velocidade da luz, de sorte que,  $\gamma > 1$ . Logo, o movimento da barra em relação ao observador  $S$  faz a medida de seu comprimento ser menor neste referencial, por conta do fator de Lorentz  $l = l'/\gamma$ . Este fenômeno é chamado de contração espacial.

### 3.1.3 Energia Relativística

Uma curva do tipo tempo  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  no espaço de Minkowski pode representar a trajetória de uma partícula massiva. Para isso basta que o intervalo sobre o qual a curva esteja avaliada seja o conjunto de valores possíveis de tempo próprio desta partícula, ou seja,  $\tau \in I \subset \mathcal{R}$ . Dessa maneira, a imagem da curva  $c(\tau)$ ,  $\forall \tau \in I$  é o que, no contexto da Relatividade Restrita, nomeia-se de "Linha de Universo" da partícula.

Como veremos mais adiante o espaço de Minkowski  $\mathcal{M}$  desempenhará o papel de espaço tangente do Universo, que matematicamente é uma variedade diferencial. Logo,  $\mathcal{M}$  abrigará sobre si vetores tangentes a variedade em um ponto  $p$ . Com auxílio de uma coordenatização de  $\mathcal{M}$ , pode-se derivar explicitamente  $c(\tau)$  em relação a  $\tau$

$$c'(\tau) = \frac{dc(\tau)}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dc(\tau)}{dx^\mu} = X^\mu e_\mu[c(\tau)]. \quad (3.6)$$

O conjunto de componentes  $u^\mu = X^\mu$ , segundo a base  $\{e_\mu\}_0^3$ , é o que chamamos de quadrivelocidade,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma = \begin{pmatrix} c \\ dx^1/dt \\ dx^2/dt \\ dx^3/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

A mudança entre as derivadas em relação a  $\tau$  e  $t$  é possível e imediata como atesta a igualdade (3.5).

A quadrivelocidade é o vetor tangente a linha universo da partícula, logo, representa a velocidade da partícula em um dado ponto de sua trajetória. Em perfeita analogia a mecânica Newtoniana o momento linear relativístico de uma partícula de massa  $m$ , nomeado de 4-momentum, é definido como  $p^\mu = mu^\mu$ .

Interpreta-se  $p^0 = E/c$  como sendo a energia de um móvel, de massa  $m$ . As componentes espaciais, por sua vez,  $\{p^1, p^2, p^3\}$  desempenham o papel de momento linear Newtoniano nas direções ortogonais.

$E = p^0 c = \gamma mc^2$  é a energia em função de  $p^0 = \gamma c$ . Expandindo essa relação em série de Taylor em torno de  $v^2/c^2$

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + \mathcal{O}\left(\frac{v^3}{c^3}\right). \quad (3.8)$$

O primeiro termo da expansão,  $\varepsilon = mc^2$ , conhecido como *energia de repouso* é o resultado da Relatividade Restrita onde equiparam-se massa e energia. Já o segundo membro do lado direito é a energia cinética não relativística de um corpo de massa  $m$  e velocidade de módulo  $v$ . Nesse contexto, a energia total de um corpo, aproximada, é soma de suas energias relativísticas e não relativísticas,

$$E = mc^2 + \frac{m}{2}v^2. \quad (3.9)$$

### 3.1.4 O Fluido Relativístico

Em mecânica do contínuo os sistemas físicos são ambientados em um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Portanto, as condições de tensão de um ponto em um meio material são definidas pelo tensor de Cauchy  $\sigma = \sigma_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , um tensor de posto 2, e nove componentes. Os elementos  $\sigma_i i$  da diagonal principal são chamados de tensões normais as superfícies  $x_i - x_j, i \neq j$ , em quanto que as componentes  $\sigma_{ij}, i \neq j$  são as tensões de cisalhamento paralelas as superfícies  $x_i - x_j, i \neq j$ .

Nesta abordagem um fluido em equilíbrio hidrostático é aquele em que não estão presentes tensões de cisalhamento, sendo o tensor de Cauchy, neste caso, proporcional a identidade, isto é,  $\sigma_{ij} = \pm p \delta_{ij}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

Um meio material relativístico terá como ambiente o espaço de Minkowski. O estado de tensão de seus pontos, portanto, será descrito por um tensor de posto 2, porém, com o acréscimo de uma dimensão representativa do tempo. Esta versão do tensor de Cauchy tem, em princípio, um total de 16 componentes, sendo uma delas a nova tensão na direção na direção da componente temporal, normal ao volume espacial. Além de 8 novas componentes de cisalhamento, do tipo espaço-tempo.

A tensão temporal então representa o fluxo de energia. De modo que, esta versão do tensor de Tensão é chamada de Tensor de Energia e Momento (TEM).

As componentes do TEM são frequentemente representadas por  $T^{\mu\nu}$ , em que  $\mu, \nu = u, i$ , sendo  $i = 1, 2, 3$  os índices da parte espacial do espaço de Minkowski.  $T^{\mu\nu}$  abriga as informações sobre densidade de energia e fluxo de matéria satisfazendo as quatro equações de conservação  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Podemos interpretar a equação quando  $\nu = 0$  como a conservação da energia. As equações em que  $\nu = 1, 2, 3$  assumem o papel de conservação do momento linear.

Dada a métrica  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , um 4 - *vetor*, de componentes  $u^\mu$ , é unitário se satisfizer a relação  $\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$ . Tal vetor pode representar um observador instantâneo. A coleção de observações instantâneas é a linha de universo (ou linha de mundo) de um observador.  $u^\mu$ , neste contexto chamado de *quadrivelocidade*, simbolizará um observador instantâneo se for tangente a linha de universo relativa ao observador, em um dado instante Nakahara (1990). Assim, a densidade de energia medida por esse observador, isto é, a massa por unidade de volume é então  $T_{\mu\mu} u^\nu u^\nu$ .

Se  $x = x^\mu e_\mu$  é ortogonal a *quadrivelocidade* do observador, então  $T_{\mu\nu} u^\mu x^\nu$  é tida como a densidade de matéria ao longo da direção  $x$  medida por este observador. Caso a *quadrivelocidade* representativa do observador também seja ortogonal a direção  $y = y^\nu e_\nu$ , e se  $x$  e  $y$  foram ortogonais entre si, então as projeções  $T_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$  representam as tensões de cisalhamento nos pontos do material contidos nos planos  $x^\mu - y^\nu$ . Fluidos em equilíbrio não apresentam tensões de cisalhamento, que em se tratando das componentes espaço-temporais seriam a perda de energia na forma de calor. Logo, o equilíbrio de um fluido, não confinado, no espaço de Minkowski é um equilíbrio termodinâmico. Desta forma seu TEM é dado por

$$T = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

onde  $\rho$  denota a densidade de energia e  $p$  a pressão normal do fluido. Deste ponto em diante adotando unidades naturais em que  $c = 1$ , com o emprego da *quadrivelocidade*  $u^\alpha$  o TEM é expresso da seguinte maneira,

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(\eta_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu). \quad (3.11)$$

No referencial do fluido sua *quadrivelocidade* possui apenas a componente  $u^0 = 1$ ,  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Neste referencial os dois termos do lado direito da expressão (3.11) são as componentes ortogonais de  $T$ . De sorte que, a equação de conservação  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  também pode ser separada em duas componentes.

Para auxiliar nessa tarefa vamos definir o tensor  $q^\mu{}_\nu = \eta^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu$ , de modo que satisfaça a seguintes relação

$$\begin{aligned} q^\mu{}_\nu q^\nu{}_\kappa &= (\delta^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu) (\delta^\nu{}_\kappa + u^\nu u_\kappa) \\ &= \delta^\mu{}_\kappa + u^\mu u_\kappa + u^\mu u_\kappa + u^\mu u_\nu u^\nu u_\kappa \\ &= \delta^\mu{}_\kappa + u^\mu u_\kappa = q^\mu{}_\kappa \end{aligned} \quad (3.12)$$

e também

$$q_\nu^\mu u^\nu = (\delta_\nu^\mu + u^\mu u_\nu) u^\nu = u^\mu + u^\mu u_\nu u^\nu = 0. \quad (3.13)$$

Chamaremos de projetor o tensor  $q_\nu^\mu$ , já que projeta vetores em uma superfície normal a  $u^\nu$ .

Escrevendo a equação de conservação do tensor de Energia e Momento (TEM),  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , em termos de  $\rho$ ,  $p$ ,  $u^\mu$  e projetando nas direções perpendicular e paralela a  $u^\mu$ , temos, respectivamente:

$$\begin{aligned} u^\mu \partial_\mu \rho + (p + \rho) \partial^\mu u_\mu &= 0 \\ (p + \rho) u^\mu \partial_\mu u_\nu + (h_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \partial^\mu p &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ainda que  $u^\mu$  representasse a quadrivelocidade de um observador externo, isto é,  $u^\mu$ , seria necessário o que o mesmo estivesse viajando com uma velocidade próxima a velocidade da luz, para que suas medições se distanciassem, apreciavelmente, da condição de fluido perfeito. Portanto, vamos impor que o observador apresente uma velocidade pequena quando comparada a velocidade da luz, logo,  $p \ll \rho$  e  $vd p/dt \ll |\vec{\nabla} p|$ . O que nos leva as equações

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.15)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \rho = -\vec{\nabla} p \quad (3.16)$$

A equação (3.15), chamada de Equação de Continuidade, é conhecida na mecânica de fluidos. Ela nos mostra que os fluxos de matéria para dentro do sistema e para fora dele se equivalem, isto é, o sistema físico aqui representado não possui nem fontes nem sorvedouros.

A equação (3.16) da mecânica dos fluidos chama-se equação de Euler e estabelece a conservação de momento linear, de modo análogo a conservação da matéria expressa na igualdade (3.15).

Se o Tensor de Energia e Momento possuísse elementos fora da diagonal principal (ou seja, os elementos com  $\mu \neq \nu$ ) esses representariam os fluxos de energia e momento entre diferentes direções. Por exemplo,  $T^{01}$  representaria o fluxo de energia na direção

$x^1 = x$ , e  $T^{12}$  representaria o fluxo de momento na direção  $x^2 = y$ , devido ao movimento na direção  $x$ . Já para  $T^{01} \neq 0$ , isso indicaria que haveria um fluxo de energia na direção  $x$ . Logo,  $\partial_\mu T^{\mu 1} \neq 0$  representaria a mudança com o passar do tempo da quantidade de energia fluindo na direção  $x$ , o que violaria a conservação local de energia e momento.

## 3.2 Relatividade Geral

### 3.2.1 A Teoria da Gravitação de Newton

Em sua versão vetorial a lei universal da atração gravitacional de Newton é geralmente descrita da forma

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (3.17)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional,  $m_1$  e  $m_2$  as massas de duas partículas pontuais em interação gravitacional e  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  é o vetor de posição da massa  $m_2$  em relação a massa  $m_1$  no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Para facilitar os passos seguintes e discussões futuras é útil estabelecer a posição de  $m_1$  como origem do sistema de coordenadas. Deste ponto em diante, objetivando simplificar a notação, será utilizada, sempre que necessário, a seguinte associação:  $m_1 = M$  e  $m_2 = m$ .

De acordo com a segunda Lei de Newton, para um corpo de massa  $m$  na próximo a superfície da Terra,  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ . Logo, a lei de gravitação pode ser reescrita como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -G \frac{Mm}{|\mathbf{r}|^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.18)$$

em que  $\mathbf{r}$  é a distância euclidiana em respeito a origem e  $M$  assumi o papel de massa da Terra. Assim sendo,

$$\mathbf{g} = -G \frac{M}{|\mathbf{r}|^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.19)$$

O rotacional do vetor força gravitacional é identicamente nulo, já que a mesma é conservativa. Em outras palavras, o trabalho da força gravitacional entre dois pontos é independente do caminho que os conecta. Consequentemente a aceleração da gravidade, de quem a força depende, pode ser expressa como o gradiente do potencial gravitacional  $\phi_N$ ,

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi_N, \quad (3.20)$$

A letra  $N$  em  $\phi_N$  faz referência de estarmos no contexto da gravitação Newtoniana.

Sem perda de generalidade a fonte do campo gravitacional, massa  $M$ , pode encerrar-se dentro de um volume  $V$ , de geometria esférica. Nesta situação a integral da equação (3.20) neste volume, de borda  $\partial V$ , é a lei de Gauss da gravidade

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM. \quad (3.21)$$

Usando a (3.20) e o teorema de Gauss (3.21) obtém-se a equação de Poisson para o campo gravitacional

$$\nabla^2 \phi_N = 4\pi G\rho \quad (3.22)$$

sendo  $\nabla^2$  o operador laplaciano e  $\rho$  a densidade de matéria em  $V$ .

Para um corpo de densidade constante, e simetria esférica, o potencial gravitacional em um ponto qualquer do espaço dependerá apenas da distância entre o centro do corpo e o ponto em questão, logo,  $\phi_N = \phi(r)$ . Assim teremos,

$$\nabla^2 \phi_N = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho_0. \quad (3.23)$$

Significa que o potencial gravitacional é dado por

$$\phi_N = -G \frac{M}{|\mathbf{r}|}. \quad (3.24)$$

Só foi possível igualar a segunda lei de Newton a força gravitacional na expressão (3.18) assumindo que as massas inercial e gravitacional de um corpo são idênticas, o que na literatura é chamado de princípio da equivalência Weinberg & Steven (1972), consistindo com o que se observa experimentalmente. Como consequência dessa equiparação percebe-se que a aceleração de um corpo e a gravidade são equivalentes, como enunciado por Einstein. Como era de se esperar vemos que a equação (3.24) mostra que a única

massa do qual depende o campo gravitacional é a massa  $M$  do corpo que o originou, pois se  $\phi_N$  é a própria aceleração da gravidade é construído como sendo força por unidade de massa.

### 3.2.2 Equação de Einstein

A relatividade geral propõe outra abordagem, partindo da ideia de que partículas que se movimentam na vizinhança de corpos massivos na realidade descrevem trajetórias localmente inerciais em espaços curvos. A gravidade é a impressão de curvatura intrínseca no espaço-tempo pela presença da massa, o que leva às trajetórias inerciais encurvadas como observamos.

Em outras palavras, a teoria da Relatividade Geral atesta que uma partícula movimentando-se nas vizinhanças de um corpo massivo, apenas sobre a influência do campo gravitacional desse corpo, descreverá no espaço-tempo uma curva geodésica, que é uma sequência de eventos representativa sua trajetória chamada de linha de Mundo.

Na teoria da Relatividade Especial, a trajetória de uma partícula livre (não sujeita a forças externas) também é uma linha de mundo que segue uma geodésica. No entanto, a diferença crucial é que, na Relatividade Especial, o espaço-tempo é plano, enquanto na Relatividade Geral, o espaço-tempo é curvo devido à presença de massa e energia.

Portanto, na Relatividade Especial, uma partícula em movimento retilíneo uniforme (sem forças externas atuando sobre ela) seguirá uma linha de mundo reta. Isso é uma consequência direta do primeiro postulado da Relatividade Especial, que afirma que as leis da física são as mesmas em todos os sistemas inerciais.

A Relatividade Geral é uma teoria geométrica da gravitação e deve concordar com a gravitação newtoniana nos regimes em que esta é bem testada, isso geralmente ocorre em situações com campo gravitacional fraco, velocidades baixas e distâncias pequenas em comparação com escalas cosmológicas. Um modo de construir tal teoria é mostrar como as aproximações levam a RG a coincidir com a Gravitação de Newton.

Para isso primeiro consideremos uma partícula de massa  $m$  com *quadrivelocidade*  $u = u^\alpha e_\alpha$ , que descreve uma trajetória no espaço-tempo. Nesta situação sua linha de

munho é uma geodésica cuja equação é

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = u^\alpha \left( \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu} u^\nu \right) = 0. \quad (3.25)$$

Utilizando a definição de vetor da geometria diferencial, equação (2.5), e de parâmetro afim, equação (2.45),

$$\frac{du^0}{d\tau} + \Gamma^0_{\alpha\nu} u^\alpha u^\nu = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{du^j}{d\tau} + \Gamma^j_{\alpha\nu} u^\alpha u^\nu = 0 \quad (3.27)$$

onde  $j = 1, 2, 3$  representa o índice da parte espacial do espaço-tempo. O espaço de Minkowski  $\mathcal{M}$  é um espaço plano que abriga uma métrica pseudo Riemanniana. Formalmente encurvar o espaço-tempo terá como contra partida a necessidade de corrigir a métrica, adicionando um termo responsável por medir o quanto o espaço-tempo deixa de ser plano. Dizendo de outro modo, matematicamente a massa perturba a métrica de Minkowski.

Em um ponto  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  do espaço-tempo, influenciado pela presença de massa, suficientemente distante da fonte de campo gravitacional, a métrica será o resultado da soma entre métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  e uma perturbação em primeira ordem de aproximação,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.28)$$

onde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ .

Em segundo lugar vamos impor que variações temporais dos campos tensoriais em uma teoria geométrica da gravitação sejam desprezíveis frente as variações espaciais, isto é,

$$|\partial_t h_{\mu\nu}| \ll |\partial_j h_{\mu\nu}|, \quad (3.29)$$

pois de acordo com a gravitação newtoniana variações no campo gravitacional seriam instantâneas em todos os pontos do espaço, ao mesmo tempo. Isto não é possível, segundo a relatividade restrita pois do contrário representaria o envio de informação com velocidade acima da velocidade da luz. Logo, devemos impor que os campos gravitacionais não variem muito rápido no tempo, limite no qual uma teoria geométrica da gravitação é consistente com a gravitação de Newton .

Por último, como já discutido na seção sobre a relatividade especial uma partícula teste será não relativística se, em unidade naturais em que  $c = 1$ ,

$$|v^j| \ll 1. \quad (3.30)$$

De modo que a condição de normalização de  $u = (u^0, v^1, v^2, v^3)$ , empregando a métrica perturbada, nos forneça:

$$\begin{aligned} -1 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu &= (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})u^\mu u^\nu = \eta_{00}(u^0)^2 + \mathcal{O}(h[v], v^2) \\ \implies u^0 &= 1 + \mathcal{O}(h[v], v^2) \approx 1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Feitas as considerações agora devemos mostrar explicitamente como estas aproximações quando impostas a equação da geodésica a fazem recair, necessariamente, na equação de Poisson aplicada a Gravitação Newtoniana (3.22).

A coincidência de ambas as teorias se dá por meio do emprego dos símbolos de Christoffel particularizados pelas aproximações  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  e pelo resultado da derivada parcial da componente do tipo tempo-tempo da métrica de Minkowski  $\partial_\mu \eta_{00} = 0$ , nas equações (3.26) e (3.27). Logo,

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu = \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} (\partial_\alpha h_{\beta\nu} + \partial_\beta h_{\nu\alpha} - \partial_\nu h_{\alpha\beta}) + \mathcal{O}(h^2).$$

Onde tomando apenas o termo dominante:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu \approx \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} (\partial_\alpha h_{\beta\nu} + \partial_\beta h_{\nu\alpha} - \partial_\nu h_{\alpha\beta}). \quad (3.32)$$

Aplicando esse resultado à equação (3.26)

$$0 = \frac{du^0}{d\tau} + \Gamma^0{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = \Gamma^0{}_{00}u^0 u^0 + \mathcal{O}(hv) \approx \frac{\eta^{00}}{2} (\partial_0 h_{00}). \quad (3.33)$$

Portanto, a componente temporal de  $h_{\mu\nu}$  é função apenas do espaço,  $h_{00} = h_{00}(x^j)$ .

Já quando substituimos o símbolo de Christoffel (3.32) na geodésica do tipo espaço (3.27) obtemos o resultado para o gradiente de  $h_{00}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dw^j}{d\tau} + \Gamma^j_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^0 \frac{dv^j}{dt} + \Gamma^j_{00} (u^0)^2 + \mathcal{O}(v, v^2) \approx \frac{dv^j}{dt} - \eta^{jk} \partial_j h_{00} \\ \implies \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

A derivada temporal do vetor velocidade de uma partícula teste  $d\vec{v}/dt$ , medida por um observador inercial, é a aceleração relativa entre ele próprio e a partícula observada. De maneira que a equação (3.34) nos revela que o gradiente da componente  $h_{00}$  é igual a aceleração medida por este observador. Pra que este resultado seja consistente com a mecânica Newtoniana é preciso que a relação entre  $h_{00}$  e o campo escalar seja

$$h_{00} = -2\phi. \quad (3.35)$$

consequentemente, dada a equação (3.22)

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi G\rho \quad (3.36)$$

A componente temporal da métrica de uma teoria geométrica da gravitação terá de respeitar essa aproximação. Nos resta saber qual equação satisfeita pela métrica completa pode ser particularizada para a igualdade (3.36).

Se a equação (3.34) estivesse associada a um sistema físico inicialmente de massa  $m = 1$  então  $\vec{\nabla} h_{00}/2$  seria a força externa atuando sobre esse sistema. O que é consistente com a aproximação de  $h_{00}$  como campo escalar.

A fonte da expressão (3.36) é igual a densidade de matéria, a menos do fator  $-8\pi G$ . Via de regra, quando se aplica uma força sobre um sistema físico troca-se energia com esse sistema. O que sob a ótica da relatividade é o mesmo que alterar a densidade de matéria do sistema, pois como é mostrado na equação  $\varepsilon = mc^2$ , massa e energia estão relacionadas. Matéria é energia, de modo que,  $\rho$  pode ser interpretado como a densidade de energia do sistema físico. Logo, o candidato ideal a fonte da equação gravitacional relativística proveniente de uma teoria geométrica é o Tensor de Energia e Momento (TE) (3.11).

Impondo que  $T_{00} = \rho$  levamos a projeção de  $T = [T_{\alpha\beta}]$  na direção da *quadrivelocidade* de um observador a satisfazer a equação (3.22) do seguinte modo:

$$-\nabla^2 h_{00} = -8\pi GT_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -8\pi GT_{00} u^0 u^0 = -8\pi G\rho. \quad (3.37)$$

Isto é, o regime Newtoniano coincide com a componente *tempo – tempo* de  $T = T^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta$ . Para que a nova equação de gravitação não dependa do sistema de coordenadas, como o TE não depende, é necessária que o lado esquerdo de uma equação do tipo (3.36), para toda a métrica, também não dependa do sistema de coordenadas. Em outras palavras, assim como o TE, o lado esquerdo dessa equação deve ser um tensor de posto 2 simétrico nos seus índices, levando toda a equação a ser tensorial. O caminho adotado para se chegar a equação (3.36) valeu-se de derivadas parciais de segunda ordem da métrica. É presumível que o tensor procurado seja definido em função dessas derivadas parciais de segunda ordem da métrica que resultarão, a menos de fatores multiplicativos, nas componentes de  $T = T^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta$ .

Adotando passos semelhantes aos que foram empregados na obtenção da expressão (3.34) percebemos que o tensor de Ricci recuperaria a gravitação Newtoniana no regime de campos fracos, isto é,

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}. \quad (3.38)$$

O que nos levaria a pensar ser o tensor de Ricci o candidato ideal a completar a equação dinâmica onde TE multiplicado por uma constante seria fonte. De fato, esta foi a primeira ideia tida por Einstein que o fez propor a equação:

$$R_{\alpha\beta} = 4\pi GT_{\alpha\beta} \quad (3.39)$$

Embora fosse matematicamente possível logo percebeu-se que esta equação sofria de alguns problemas que ocasionariam restrições físicas muito severas. O estudo da Geometria Diferencial não era comum entre os físicos da época em que Einstein propôs esta equação. De maneira que, Einstein desconhecia os importantes resultados das identidades de Bianchi (2.87), que só lhes foram apresentadas em Zuric, entre os anos de 1912 e 1913 pelo seu amigo e colaborador o matemático Marcel Grossmann Sauer (2014).

Dada a equação (2.87) e em observância as propriedades da métrica e da conexão de Levi Civita **teorema 2.3**, temos que:

$$\nabla_{\alpha} R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \mathcal{R} \quad (3.40)$$

Portanto, a a equação de conservação do tensor de curvatura só seria possível se o próprio escalar de curvatura fosse identicamente nulo, pois

$$\nabla_{\alpha} R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \mathcal{R} = 0 \quad (3.41)$$

apenas se  $\nabla_{\alpha} \mathcal{R} = 0$ . Fisicamente este resultado representaria um espaço-tempo plano já que sua curvatura escalar é nula em todos os pontos. De sorte que, o Universo não poderia ser como nós o conhecemos apresentando flutuações da matéria que levariam a flutuações na curvatura escalar.

Ainda que o resultado (3.41) tenha condenado a candidatura do tensor de Ricci a integrante da equação dinâmica da Relatividade Geral, ao mesmo tempo ele traz o seu substituto ideal, o tensor de Einstein (2.90), derivado da manipulação da equação (3.41). Assim propôs-se uma nova equação:

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \mathcal{R} = \kappa T_{\alpha\beta}. \quad (3.42)$$

no qual  $\kappa$  é uma constante a ser determinada novamente pelo regime de campos fracos. No entanto, a componente *tempo – tempo* (componente 0 – 0) desta equação parece não resultar no que se esperava

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R &= \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} - \frac{1}{2} \nabla^2 (\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j h^{ij} \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^2 (\eta^{ij} h_{ij}) + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j h^{ij}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Notemos, porém, que tomando o traço da expressão (3.42) chegamos à

$$R_{\alpha\beta} = \kappa \left( T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right) \quad (3.44)$$

onde  $T := g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ . Em regimes não relativísticos as componentes do tipo  $i - j$  de  $T$  são pequenas quando comparadas a  $\rho$ , logo a expressão (3.43) adquire a forma:

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = R_{00} = \kappa \left( T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right) \approx \kappa \left[ \rho + \frac{1}{2}(-\rho + \eta^{ij}T_{ij}) \right] = \frac{\kappa\rho}{2}. \quad (3.45)$$

De modo que, a consistência entre a equação (3.42) e a condição (3.28) só é possível por meio da expressão (3.38), verificando que  $\kappa = 8\pi G$ .

Por fim, estabelecida constante de proporcionalidade, chegamos a equação de Einstein da Relatividade Geral,

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\mathcal{R} = \kappa = 8\pi GT_{\alpha\beta}, \quad (3.46)$$

que é quem determina o modo como o conteúdo de matéria influencia a geometria do espaço-tempo, através de sua influência sobre a métrica. Esta equação é também a responsável por determinar como a energia movimenta-se ao longo do espaço-tempo, sendo, portanto, uma equação dinâmica da energia. Wald (1984); Weinberg & Steven (1972).

## Capítulo 4

# Soluções Cosmológicas da Equação de Einstein

A cosmologia enquanto ciência, do modo como a conhecemos hoje, foi desenvolvida de modo muito recente. No entanto, suas bases e muitos de seus elementos são datados de tempos imemoriais. A humanidade sempre se perguntou sobre a origem do Universo e o que faz ele ser da maneira como nós o percebemos.

Durante muito tempo a única fonte de dados do universo era as observações a olho nú. De modo que, só era possível conhecer estrelas astronomicamente próximas a Terra. A escassez de dados capazes de fornecer informações sobre o funcionamento da natureza e do Universo era compensada pelas explicações mitológicas. Mitos sobre a criação do mundo estão presentes em todas as culturas de que se tem notícia.

O desenvolvimento da Cosmologia Científica começa com o advento do telescópio óptico, aperfeiçoado por Galileo Singer (1941). Ele foi o primeiro a publicar resultados astronômicos usando um telescópio, nomeado de Telescópio de Gallileu. Mais tarde, Kepler propõe uma melhoria criando o chamado Telescópio Kepleriano. Melhorias como essas se sucederam até o final do século XX, quando chegamos a era da Astronomia de precisãode Souza Oliveira Filho & de Souza Oliveira Filho (2000).

Os telescópios espaciais permitiram contornar o problema de *visão astronômica*, se- eing atmosferico, e possibilitaram imagens com resoluções muito mais ajustadas quando

comparadas aos telescópios terrestres. Os radiotelescópios, por sua vez, através de sofisticadas técnicas de interferometria e preciso controle do tempo de exposição foram capazes de construir juntos imagens antes impossíveis para um único telescópio, dada a quantidade de informação do astro imageado. Esse conjunto de telescópios é um exemplo do chamado VLA, e foi por meio de um aparato dessa natureza que o buraco negro da galaxia M87 foi observado Medeiros et al. (2023).

Sob o aspecto teórico o formalismo que melhor explica, ou se ajusta, aos dados observacionais coletados é a Teoria da Relatividade Geral RG. Neste capítulo investigaremos algumas das soluções da equação de Einstein (3.46), originadoras dos chamados modelos cosmológicos, cujo a motivação se dá pelo interesse em compreender a origem evolução, forma, e o destino final do Universo. Mukhanov (2005)

## 4.1 Princípio Cosmológico.

Em 1912 Slipher observa que a maioria das linhas espectrais das galáxias tem seus comprimentos de onda deslocados para valores maiores, fenômeno conhecido como *redshift*. Sendo  $\lambda_0$  o comprimento de onda observado e  $\lambda_e$  o comprimento de onda da luz quando emitida, o redshift é calculado, em primeira ordem de aproximação, como:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \approx \frac{v}{c} \quad (4.1)$$

em que  $v$  é a velocidade relativa entre a galáxia emissora e a Terra, já  $c = 299.792.458$  m/s representa a velocidade da luz no vácuo. Tal relação é o efeito Doppler manifesto por ondas eletromagnéticas.

No ano de 1929 Hubble percebe que as medidas das velocidades das galáxias são proporcionais as medidas de suas distâncias, então, quanto maior a distância maior é o redshift. Esta famosa relação de proporcionalidade é chamada de Lei de Hubble-Lemaître observacional, que podemos considerar como uma lei cinemática,

$$v = Hd, \quad (4.2)$$

onde  $d$  é a distância entre a Terra e a galáxia observada.  $H$ , por seu turno, representa uma constante de proporcionalidade que à época foi chamada de *Constante de Hubble*. Atualmente sabe-se que  $H$  varia com o passar do tempo, de modo que, é mais prudente adotarmos o nome parâmetro de Hubble ao invés de constante de Hubble. Olhando a dimensão de  $H$  temos:

$$[H] = [v]/[d] = (m/s)/m = 1/s = s^{-1} \quad (4.3)$$

Já que o afastamento contínuo das galáxias é um fato observacional, então é razoável supormos que em um passado suficientemente remoto o Universo era mais denso e mais quente. A depender do modelo cosmológico empregado, e conteúdo do Universo previsto por esse modelo,  $H$  quem nos fornece a ordem de grandeza da idade do Universo, Como veremos mais adiante, Mukhanov (2005); Weinberg (1972).

O Universo visto em grande escala possui uma distribuição média de matéria e de Radiação Cósmica de Fundo (RCF) similares em todas as direções, salvo pequenas oscilações. Até então as variações medidas são da ordem de  $10^{-5}$ .

Tal característica é chamada de isotropia.

Uma vez obtida a evidência da expansão do Universo chegou-se a ideia de que em algum momento no passado este era menor e mais denso e, de acordo com a termodinâmica, mais quente. Nesta época, então, a quantidade de energia devia ser tal que prótons, elétrons e nêutrons não estavam organizados em átomos, pois tinham energia demais para isso. A radiação produzida imediatamente colidia com alguma dessas três partículas em seu caminho (espalhamento Thompson), isto é, possuía um livre caminho médio pequeno. Logo, os fótons não conseguiam se propagar livremente pelo Universo. Em algum momento a expansão do Universo resfriou as partículas a tal ponto que os elétrons puderam ser "capturados" por núcleos atômicos, dando origem aos primeiros elementos químicos neutros Mukhanov (2005); Weinberg & Steven (1972); Misner et al. (1973). Neste momento a radiação pôde propagar-se livremente em todas as direções do Universo logo após se espalhar por uma última vez. Alguns desses fótons dirigiram-se, e ainda se dirigem, a região onde mais tarde se formaria a Via Láctea. O conjunto de todos os pontos ao longo do intervalo de duração do último espalhamento da radiação primordial, ao redor da nossa posição de observação, forma uma casca esférica de último espalhamento. Ocorre que, para muitas aplicações, pode-se assumir um intervalo de tempo suficientemente pequeno, de maneira que, a casca tenha uma espessura desprezível e seja caracterizada como uma superfície de último espalhamento.

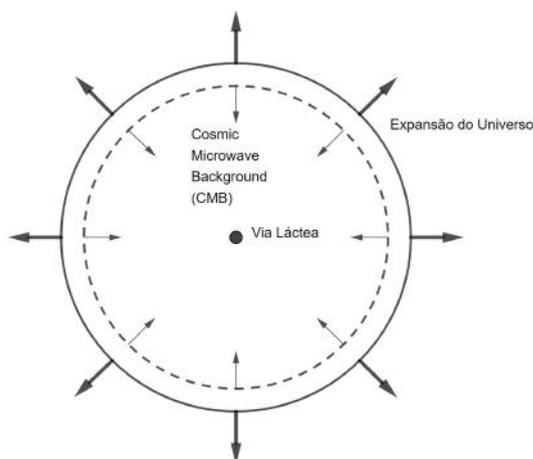


FIGURA 4.1. A Linha pontilhada representa a projeção no plano da superfície formada pela CMB, vista da via Láctea. A circunferência maior, de linha cheia, ilustra a expansão do Universo vista da Via Láctea.

Esta radiação é conhecida como radiação cósmica de fundo (Cosmic Microwave Background - CMB). Atualmente as observações de temperatura da CMB são de 2,73k, Aghanim et al. (2020), e concordam com a previsão do espectro de corpo negro Mukhanov (2005). Sendo esta mais uma evidência da isotropia do Universo, pois para onde se olha a radiação possui as mesmas características com precisão de 1 parte em 100.000.

Algumas regiões do Universo afastam-se de nós com uma velocidade considerável, mesmo quando comparadas a velocidade da luz. De acordo com a relação (4.2). Se em uma dada localidade do Universo uma fonte emissora tiver velocidade  $v < c$ , então sua luz já foi detectada ou um dia será. Do contrário, se  $v \geq c$  então nunca receberemos a informação desta região.

No capítulo anterior  $v$  expressava a velocidade relativa entre dois observadores. Agora  $v$  simboliza a velocidade de afastamento da fonte devido a expansão do Universo, e por isso não tem os limites estabelecidos na RG. Além disso, nada impede que essa velocidade de expansão seja variável, ou seja,  $v = v(t)$  em que  $t$  é o tempo cosmológico. De maneira que, a lei de Hubble-Lemaître exata seja

$$v(t) = H(t)d(t) \quad (4.4)$$

Dependendo de como ela varia, objetos podem entrar ou sair do nosso horizonte.

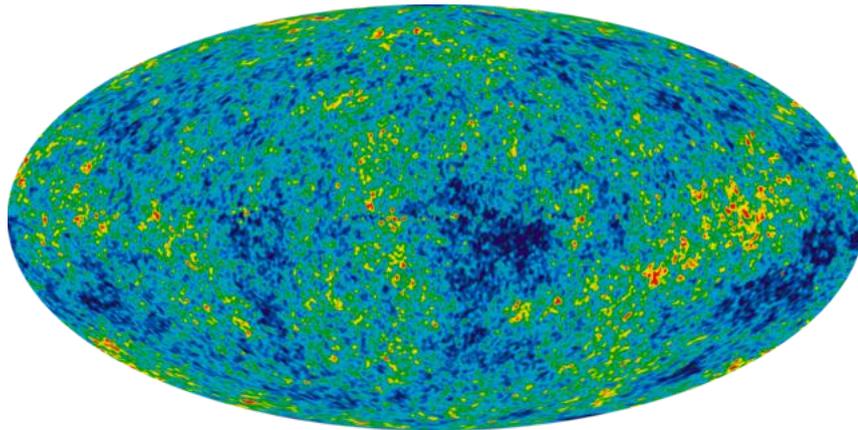


FIGURA 4.2. A imagem é uma projeção mollweide (projeção cilíndrica) das variações de temperatura sobre a esfera celeste. Estes dados foram coletados em todo o céu ao longo de 7 anos pelo projeto Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP). A temperatura média é de 2,725 k, e as cores representam as pequenas flutuações de temperatura, como em um mapa meteorológico. As regiões vermelhas são mais quentes e as regiões azuis são mais frias em cerca de 0,0002 k. Neste mapa as contribuições de outras fontes (galáxias, estrelas etc.) foram classificadas como ruído e subtraídas. **Fonte:** <https://wmap.gsfc.nasa.gov/media/101080/>

Só nos resta assumir que mesmo sem ser detectada a região do Universo desconectada causalmente de nós possui a mesma estrutura do Universo observado. Esta é a hipótese de partida dos modelos cosmológicos chamada de *Princípio Cosmológico*(PC), que estabelece:

1. Em um mesmo instante de tempo todas as direções espaciais do Universo apresentam as mesmas características físicas, isto é, o Universo é *isotrópico*.
2. Assumindo que todos os pontos do Universo confirmam a isotropia, então dizemos que o Universo é também *homogêneo*. Em outras palavras, a isotropia em todos os pontos implica homogeneidade, pois isso decorre da hipótese de que somos observadores típicos e, portanto, se o Universo parece isotrópico para nós deve parecer para qualquer outro observador em qualquer ponto do Universo.

Nas seções subsequentes construiremos o modelo cosmológico padrão e alguns outros modelos, para uma dada geometria espacial do Universo, a partir do PC. Confrontaremos as previsões desses modelos com os dados observacionais.

## 4.2 A Geometria Do Espaço-Tempo.

Do modo como os observadores são representados no espaço-tempo a direção temporal é privilegiada em detrimento das demais. Um observador físico irá, necessariamente, evoluir no tempo, independentemente do que faça. Ao redor de cada instante de sua evolução estendem-se as três direções espaciais. Antes de construirmos um modelo cosmológico é preciso checar as restrições trazidas por essa construção dos observadores inerciais.

Do ponto de vista da relatividade geral em um instante  $t$  uma família de observadores é uma convergência de linhas de mundo do tipo *tempo – tempo*. Observadores esses que movimentam-se com 4 – velocidade  $u = (u^0, u^1, u^2, u^3) = (t, 0, 0, 0)$  A seção espacial do universo medida por esses observadores  $\Sigma_0 = \Sigma_t$  é isotrópica e homogênea, por abuso de linguagem dizemos que o próprio Universo é isotrópico e homogêneo.

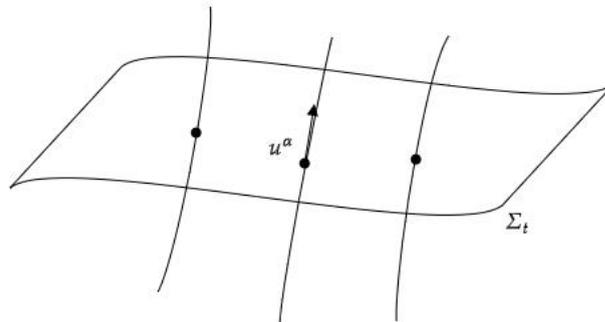


FIGURA 4.3. Feixe de geodésicas ortogonais a hiper-superfície do tipo espaço  $\Sigma_t$ , em um dado instante  $t$ .

$\Sigma_t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , é uma região de simultaneidade. Assumindo existir uma superfície dessas para cada instante de tempo  $t$ , o próprio Universo como um todo nada mais é do que a união de hiper-superfícies do tipo espaço, indexadas pelos instantes  $t$ . O ato de descrever conjuntos como união de subconjuntos, que são hiper-superfícies, indexados por uma variável contínua é chamado de folheação Wald (1984).

Duas hiper-superfícies  $\Sigma_t$  e  $\Sigma_{\bar{t}}$  associadas, respectivamente, aos instantes de tempo distintos  $t$  e  $\bar{t}$  não possuem pontos em comum, ou seja,  $\Sigma_t \cap \Sigma_{\bar{t}} = \emptyset$ . As folhas percebidas pelos observadores inerciais são, portanto, subconjuntos abertos e disjuntos do Universo. Então a união dessas hiper-superfícies é, em última análise, uma cobertura do Universo, como estabelece a definição 2.10. Ou seja, Universo é representado pelo conjunto

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \Sigma_t \tag{4.5}$$

e por abrigar uma métrica, é uma Variedade Riemanianna, nos termos da definição 2.26.

Um modelo cosmológico que esteja de acordo com a relatividade geral traduz-se em soluções para as equações de Einstein. Essas soluções são as componentes do campo dinâmico da teoria, que é a métrica, junto das componentes do tensor de energia e momento associadas. Assim sendo, após restringirmos as possibilidades de tensores de energia e momento com a aplicação do princípio cosmológico, nos resta como tarefa definirmos as métricas sobre as hiper-superfícies  $\Sigma_t$ .

As folhas são subespaços seccionais do Universo. Em outras palavras, hiper-superfícies  $\Sigma_t$  são secções espaciais do espaço-tempo, de maneira que, são elas próprias Variedades Riemannianas.

Encontrar uma métrica sobre uma Variedade Riemanniana, seja ela qual for, é um exercício puramente matemático Nakahara (1990); Nash & Sen (1988); do Carmo (1988). A homogeneidade e isotropia pretendidas, nas soluções que desejamos, já restringem significativamente a busca pelo tensor métrico, pois em um instante  $t$  a distribuição de matéria é uniforme, nos levando a um Universo de curvatura seccional contante, caso particular de curvatura seccional, 2.36. Com isso nos resta apenas três possibilidades de tensor métrico sobre as quais nos debruçamos agora, partindo do estabelecimento de referenciais sobre esses espaços.

#### 4.2.1 As Possíveis Geometrias Da Seção Espacial.

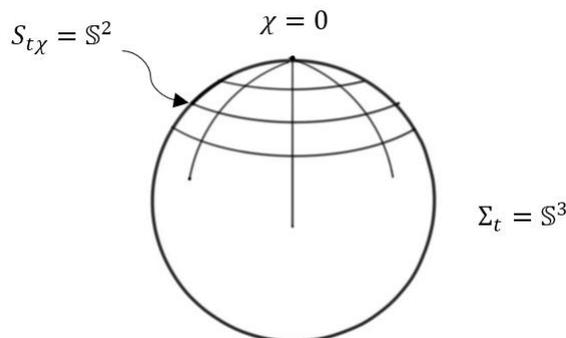


FIGURA 4.4. Hiper-superfície esférica, sobre a qual estendem-se as coordenadas ortogonais  $\chi$  e  $S$ .

A hiper-superfície de curvatura constante positiva é uma hiper-esfera,  $\Sigma_t = \mathbb{S}^3$ . Uma secção espacial dessa natureza é mostrada na figura 4.4, onde notamos que o subscrito  $t\chi$  de  $S_{t\chi}$  representa a medida da coordenada  $S$  do sistema de coordenadas  $S \times \chi$  quando  $\chi$  e  $t$  são fixados(são constantes). A quantidade originada dessa restrição é uma esfera,  $S_{t\chi} = \mathbb{S}^2$ , que também pode ser coberta com um sistema de coordenadas. Adotando um sistema de coordenadas polares sobre  $S_{t\chi} = \mathbb{S}^2$ , a tupla  $(\sigma, \theta)$  desempenha o papel de coordenadas azimutal e polar, respectivamente. Na hiper-superfície como um todo, portanto, o elemento de linha infinitesimal, de onde obtém-se a métrica é:

$$dl^2 = d\chi^2 + \sin(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2) \tag{4.6}$$

Imediato notar que para a esfera  $\Sigma_t = \mathbb{S}^3$  a quantidade  $\sin(\chi)$  é análoga a medida do raio na esfera  $\mathbb{S}^2$ .

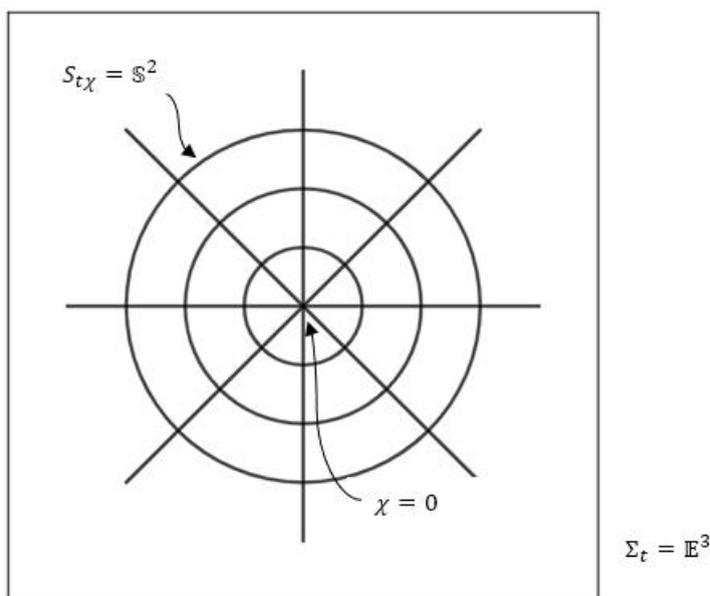
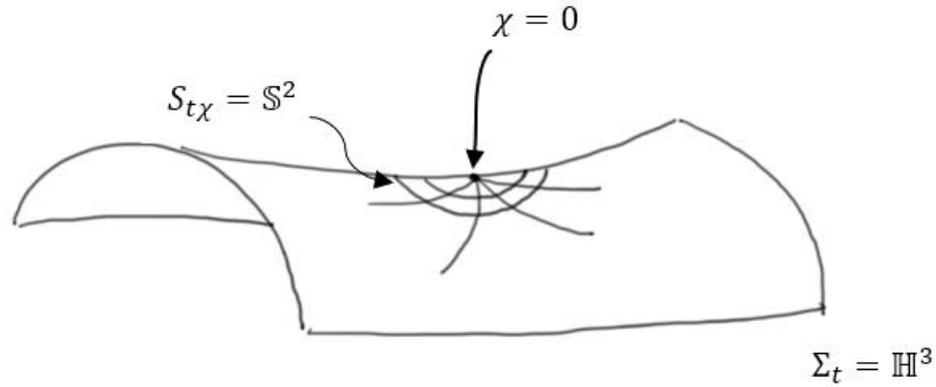


FIGURA 4.5. Hiper-superfície plana, sobre a qual estendem-se as coordenadas ortogonais  $\chi$  e  $S$ .

Um espaço qualquer de três dimensões que não apresente curvatura, ou seja, que possua curvatura nula é indistinguível do espaço Euclidiano  $\mathbb{E}^3 = \mathbb{R}^3$ , já que trata-se de um espaço plano. O sistema de coordenadas que adotaremos sobre esse espaço é tal que um ponto qualquer sobre uma das esferas  $S_{t\chi}$  têm como coordenadas, nessa esfera, o par  $(\phi, \theta)$  que são, respectivamente, as coordenadas azimutal e polar do mesmo. As linhas perpendiculares as esferas concêntricas  $S_{t\chi}$  são as coordenadas  $\chi$  de  $\Sigma_t = \mathbb{E}^3$ , de maneira

que um ponto nesse espaço está completamente caracterizado pela tupla  $(\phi, \theta, \chi)$ , como ilustra a figura 4.5. Com isso um elemento de linha sobre  $\Sigma_t$  é dado da seguinte maneira:

$$dl^2 = d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2) \quad (4.7)$$


 FIGURA 4.6. Hiper-superfície hiperbólica, sobre a qual estendem-se as coordenadas ortogonais  $\chi$  e  $S$ .

Definida a origem de um sistema de coordenadas para localizarmos um ponto sobre um espaço  $\Sigma_t = \mathbb{H}^3$  de três dimensões com curvatura negativa são necessárias três coordenadas. Na figura 4.6 as linhas que divergem a partir da origem representam a coordenada  $\chi$ . O lugar geométrico dos pontos com o mesmo valor de  $\chi$  é a esfera  $S_{t\chi} = \mathbb{S}^2$ , onde as coordenadas, assim como nos dois outros casos anteriores, são os ângulos azimutal  $\phi$  e polar  $\theta$ . Observado da origem, em que  $\chi = 0$ , um ponto é localizado por uma 3-upla do tipo  $(\phi, \theta, \chi)$ . O elemento de linha deste espaço pode ser escrito do seguinte modo:

$$dl^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)^2 d\phi^2) \quad (4.8)$$

#### 4.2.2 A Métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW).

As geometrias das hiper-superfícies tridimensionais (seções espaciais do espaço-tempo) do Universo foram estabelecidas para tempos fixos. Extrapolar esta noção para todos os instantes requer concordância com as observações de um Universo em expansão.

Na seção anterior vimos que as superfícies esféricas concêntricas, nos três casos, são idênticas a  $\mathbb{S}^2$ , cujo elemento de linha é

$$d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.9)$$

A partir de agora, para fins de simplicidade, levaremos em conta que os elementos de linha são as próprias métricas de seus espaços ambientes.

A métrica em  $\mathbb{S}^3$  é dada em função da métrica (4.9), já que  $\mathbb{S}^2$  é um espaço seccional de  $\mathbb{S}^3$ .

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j = \frac{dr^2 + r^2 d\Omega^2}{(1 + (k/4)r^2)^2} \quad (4.10)$$

Onde  $k$  é uma constante a determinar e  $r$  é a distância da origem. O motivo da utilização de  $k$  se deve ao fato de desejarmos que o traço do tensor de Ricci, associado a essa métrica, seja constante. Sendo justamente o escalar de curvatura  $\mathcal{R}$ , como definido em 2.36 e calculado na expressão (2.86).

A métrica (4.9) é simplificada apreciavelmente ao utilizarmos a nova coordenada radial

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{4}r^2\right)^{-1} \quad (4.11)$$

cujas justificativas de uso, que exporemos mais adiante, não limita-se apenas a questões operacionais.

No sistema de coordenadas  $x^i = \{\rho, \theta, \phi\}$  a métrica, assume a seguinte forma:

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j = \frac{d\rho^2}{1 - k\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2 \quad (4.12)$$

Esta é uma das possíveis métricas da seção espacial do espaço-tempo  $\Sigma_t$ , vista por um observador inercial em um instante  $t$  qualquer. A figura 4.3 ilustra a percepção de um observador nessas condições.

Impusemos que a direção temporal do espaço-tempo fosse ortogonal a seção espacial do mesmo. Portanto, a folheação do espaço-tempo é possível já que uma mudança no tempo, por menor que ela seja, fará o observador mudar de seção espacial. Isto é, para  $\bar{t} \neq t$  as folhas associadas necessariamente, serão diferentes,  $\Sigma_{\bar{t}} \neq \Sigma_t$ . A ortogonalidade é invariada por evolução temporal. Logo,  $\Sigma_{\bar{t}}$  e  $\Sigma_t$  são iguais a menos de um fator multiplicativo, ou seja,  $\Sigma_{\bar{t}} = a(t)\Sigma_t$ . O que nos permite intuir a seguinte métrica para todo o espaço-tempo, em unidades naturais ( $c = 1$ ),

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -dt + a^2(t) \left( \frac{d\rho^2}{1 - k\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2 \right) \quad (4.13)$$

onde o fator  $a(t)$  é a aplicação que leva um espaço seccional  $\Sigma_t$  em outro espaço seccional  $\Sigma_{\bar{t}}$ ,  $a(t) : \Sigma_t \mapsto \Sigma_{\bar{t}}$ .

A métrica é quem imprime o conceito de distância no espaço onde está ambientada. Ela é portanto a escala de medida desse espaço. O segundo termo do lado direito na expressão (4.13) é a métrica (4.12) multiplicada por  $a(t)$ . Por este fato chamamos  $a(t)$  de fator de escala, já que ao multiplicar a métrica espacial modifica-se a escala de medida nesse espaço seccional. A quantidade (4.13) é conhecida como a métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW).

O fato de utilizarmos a identidade (4.11) nos permite agora compararmos as métricas de FLRW para todas as três possíveis geometrias espaciais (4.6), (4.7) e (4.8) de acordo com o valor de  $k$ ,

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \begin{cases} d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2, & \text{se } k = 1 \\ d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2, & \text{se } k = 0 \\ d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2, & \text{se } k = -1 \end{cases} \quad (4.14)$$

onde bastou que impuséssemos as igualdades  $\rho = \sin(\chi)$ ,  $\rho = \chi$  e  $\rho = \sinh(\chi)$ , para os respectivos valores de  $k$  e sendo  $\chi$  a distância comóvel. Vemos que a dinâmica do Universo é dada pelo fator de escala  $a(t)$ , que por seu turno é função apenas do tempo cosmológico. Por conveniência imporemos que o valor do fator de escala hoje é igual a 1, isto é,  $a_0 = 1$ .

### 4.2.3 A Equação de Friedmann

Embora a métrica (4.14) nos pareça, em primeira análise, uma hipótese razoável, frente a dinâmica observada no Universo é necessário verificarmos se esta métrica satisfaz as equações de Einstein (3.46). De maneira que, o tensor de Energia e Momento associado seja tal que a solução procurada traga consigo significado físico, e não apenas seja possível matematicamente. Logo, a justificativa para o emprego de  $a(t)$  deve ser consistente com a necessidade de satisfazer as equações de Einstein (3.46). Isto só é possível quando são conhecidas as expressões das curvaturas seccionais tensor de Ricci (2.85) e escalar de curvatura (2.86). em função da métrica (4.14).

Antes de obtermos as curvaturas nos espaços seccionais substituiremos  $\rho$  por  $r$  na métrica (4.13). Logo, a métrica

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -cdt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (4.15)$$

tem como componentes temporal e espacial do tensor de Ricci, respectivamente,

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{ac^2} \quad (4.16)$$

$$R_{ij} = \left( \frac{\ddot{a}}{ac^2} + 2H^2 + 2\frac{k}{a^2} \right) g_{ij} \quad (4.17)$$

onde  $a = a(t)$ ,  $\ddot{a} = d^2a/dt^2$ . O termo

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} \quad (4.18)$$

é o parâmetro de Hubble teórico que mede a taxa de variação da seção espacial do Universo. O traço do tensor de Ricci é o escalar de curvatura

$$\mathcal{R} = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{ac^2} + \frac{H^2}{c^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (4.19)$$

Importante notarmos que mesmo para  $k = 0$  o espaço-tempo só será plano se  $a \rightarrow \infty$ .

Na equação (2.85) vemos que o tensor de Ricci para uma dada métrica é obtido por meio dos símbolos de Christoffel que são funcionais dessa métrica. Como mostrado em (2.72). O princípio cosmológico que motivou a escolha da métrica (4.15) nos fez obter um tensor de Ricci diagonal, como mostram os cálculos de suas componentes (2.85). Consequentemente o lado direito da equação de Einstein (3.46) deverá abrigar um tensor de energia-momento diagonal, em que a parte espacial seja proporcional a métrica tridimensional  $d\Omega^2$ .

Como vimos, um fluido perfeito relativístico tem um tensor de energia momento associado do tipo (3.11), que depende apenas da densidade  $\rho$  e da pressão  $p$ . Estes são termos diagonais desse tensor, já que não há perda de energia do fluido. Logo é um ótimo candidato a satisfazer as condições impostas pelas componentes do tensor de Ricci (2.85) e pelo escalar de curvatura (4.19). No entanto, é importante ressaltar que, assim como foi discutido ao final da subseção 3.1.4, um Tensor de Energia e Momento mais

geral com elementos não nulos fora da diagonal principal poderia indicar a existência de fluxos de energia ou momento em certas direções. O que poderia ser interpretado como a existência de “direções privilegiadas” no Universo.

Substituindo o tensor (3.11), as componentes do tensor de Ricci (4.16) e (4.17) e o escalar de curvatura (4.19) nas equações de Einstein (3.46) obtemos duas expressões provenientes das componentes  $0 - 0$  e  $i - i$  do espaço-tempo, respectivamente,

$$\begin{aligned} \left( H^2 + \frac{kc^2}{a^2} \right) &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho \\ -2\frac{\ddot{a}}{a} - H^2 - \frac{kc^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho \end{aligned}$$

a partir das quais chegamos as chamadas equações de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (4.20)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho + 3p) \quad (4.21)$$

A primeira equação de Friedmann (4.20) é quem nos dá a medida da taxa de expansão do Universo. Já a segunda equação (4.21) nos diz a taxa de variação da velocidade de expansão do Universo.

Desde o início quem se queria encontrar era o fator de escala  $a(t)$ , porém, agora as equações de Friedmann (4.20) e (4.21), de modo como as derivamos, no impuseram a determinação da pressão  $p$  e da densidade de energia  $\rho$ . Em princípio podemos assumir serem ambas as quantidades sensíveis a variação do tempo. Então, deste ponto em diante, o objetivo passará a ser obter as expressões de três funções do tempo, que são:  $a = a(t)$ ,  $p = p(t)$  e  $\rho = \rho(t)$ .

Multiplicando (4.20) por  $a$  e em seguida derivando em respeito ao tempo cosmológico  $t$ , obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(a^2) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^2 - kc^2 \right) \\ 2\dot{a}\ddot{a} &= \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{d}{dt}(\rho a^2)\end{aligned}\tag{4.22}$$

ao multiplicarmos (4.21) por  $2\dot{a}a$  e compararmos com a equação (4.22) temos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\rho \dot{a}^2) &= -a\dot{a}(\rho + 3p) \\ \frac{d\rho}{dt}a^2 + 2a\dot{a}\rho &= -a\dot{a}(\rho + 3p) \\ \frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) &= 0\end{aligned}\tag{4.23}$$

Este resultado mostra a taxa de variação da densidade de energia do Universo como função da própria densidade de energia, da pressão e do parâmetro de Hubble  $H$ . Além disso, vemos que esse resultado também sai da conservação do tensor energia momento, como comentado antes.

Para melhor visualizar a conservação trazida por (4.23) basta multiplica-la por  $a^3$  e aplicar a regra da derivada do produto obtendo:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}a^3 = 0,\tag{4.24}$$

integrando esta expressão em  $t$ ,

$$d(\rho a^3) + p da^3 = 0\tag{4.25}$$

O espaço seccional espacial da métrica (4.14), chamado de seção espacial, é quem carrega significado físico por conta do fator de escala. Sem este elemento a métrica seria apenas o resultado de operações diferenciais sobre os eixos do sistema de coordenadas escolhido, em outras palavras, seria apenas um resultado matemático. Pensando da mesma forma, um volume que seja, de fato físico, não é outro se não  $V(t) = a^3(t)$ . Consequentemente isto nos leva a uma medida de energia em um dado tempo  $t$  como sendo:  $\epsilon(t) = \rho(t)a^3(t)$ . Podemos então reescrever a equação (4.25) em função da energia e do volume do Universo

$$d(\epsilon) + pdV = 0. \quad (4.26)$$

Como suspeitávamos trata-se da primeira Lei da Termodinâmica para processos adiabáticos, pois o tensor de energia-momento  $T = T_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$  representa um fluido perfeito de um sistema sem fontes e sem sorvedouros de quantidade de calor, já que assumimos um Universo contido dentro apenas dele próprio. Portanto, o Universo não é capaz de trocar calor com agentes externos.

O sistema formado pelas equações de Friedmann (4.20) e (4.21) é capaz de nos fornecer inúmeros resultados importantes e evidenciar consequências interessantes sobre a adoção da métrica FLRW (4.14) e sobre o princípio cosmológico, enunciado na seção 4.1. Porém, o objetivo de encontrar expressões para  $a(t)$ ,  $p(t)$  e  $\rho(t)$  não pode se alcançado apenas com as equações de Friedmann. Para determinar 3 incógnitas são necessárias, pelo menos, 3 equações. Logo, é preciso alguma relação que junto das equações (4.20) e (4.21) irá fechar o sistema de 3 equações.

Dado o fato de, por motivos físicos, termos empregado o tensor de energia-momento de fluidos perfeitos (3.10), a aproximação mais comum em cosmologia é especificar o conteúdo de matéria e energia do Universo por meio de uma equação de estado linear, própria de fluidos perfeitos,

$$p = w\rho \quad (4.27)$$

onde fator de proporcionalidade  $w$  é o parâmetro da equação de estado ou, simplesmente, parâmetro de estado Weinberg & Steven (1972); Mukhanov (2005); Misner et al. (1973). Na mecânica clássica  $w$  corresponderia, por exemplo, a raiz quadrada da velocidade do som no fluido em questão.

Os valores de  $w$  determinam o tipo de conteúdo do Universo, em um dado instante  $t$ . Matéria despressurizada (não relativística), ou seja, com  $p = 0$  é classificada como poeira, sendo justamente  $p = 0$  a equação de estado de um Universo preenchido por poeira. Já o conteúdo dominante sendo a radiação implica em um parâmetro de estado  $w = 1/3$ , uma vez que, radiação carrega momento que resulta em pressão. Matéria

regular como a que está presente em galáxias, seres vivos e nas plantas possui parâmetro de estado na faixa de  $0 \geq w < 1$

Outros valores de  $w$  levam a Universos dominados por conteúdos menos comuns. Um Universo cujo parâmetro de estado fosse  $w = 1$  estaria preenchido por matéria rígida, onde a densidade e a pressão seriam iguais implicando em uma velocidade do som igual a velocidade da luz. Modelos cosmológicos que admitem parâmetros de estado  $-1 \geq w < -1/3$  abrigando, predominantemente, energia escura, assunto sobre o qual nos debruçaremos mais adiante.

Na literatura existem famílias de modelos cosmológicos em que  $w < -1$ . Esta faixa de valores do parâmetro de estado representa um fluido fantasma Farnes (2018).

Utilizando o parâmetro de estado  $w = p/\rho$  pode-se reescrever a equação (4.23) como

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H\rho(1+w). \quad (4.28)$$

Integrando do instante de tempo atual  $t = t_0$  até  $t \neq t_0$  obtemos a densidade em função do fator de escala  $a$  e do parâmetro de estado  $w$ ,

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}. \quad (4.29)$$

Alguns modelos admitem  $w$  variável no tempo, conseqüentemente, entre os instantes  $t_0$  e  $t$ , a densidade dependeria do tempo por conta de  $w = w(t)$ , ou seja

$$\rho(t) = \rho_0 \int_{t_0}^t dt a^{-3(1+w(t))}. \quad (4.30)$$

#### 4.2.4 A Adoção da Constante Cosmológica $\Lambda$ .

A previsão de um Universo em expansão desagradou Einstein, que viu-se obrigado a adotar um termo de correção à dinâmica dos fluidos perfeitos, dada pela equação (3.46), como segue:

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\mathcal{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\alpha\beta} \quad (4.31)$$

Segundo Einstein,  $\Lambda$  seria uma constante fundamental da natureza chamada de *Constante Cosmológica*. Assim ele consegue que seu novo termo se contraponha a aceleração do Universo levando suas equações a uma solução estática, que congelava o estado do cosmos.

Este novo termo não modificaria as equações sensivelmente, pois combinações lineares de  $G_{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu}$  conservavam a propriedade de divergência nula, discutida na seção 3.2.2. Além disso, a presença de  $\Lambda$  ainda resguardava o fato do lado esquerdo da equação de Einstein possuir apenas a métrica e aproximações de suas derivadas de segunda ordem.

Não havia, portanto, matematicamente maiores complicações, uma vez que  $\Lambda$  é apenas uma constante de integração. Os maiores empecilhos foram as restrições físicas implicadas pela adoção deste novo termo. O valor de  $\Lambda$  deveria ser pequeno o suficiente para que se pudesse recuperar a mecânica Newtoniana no limite de baixas velocidades, isto é, para uma velocidade  $v \ll c$ . Um outro aspecto era de que embora a solução fosse estática ela também era instável, ou seja, era muito sensível a pequenas perturbações.

Entretanto, com a descoberta da expansão do universo através de uma hipótese teórica do astrônomo neerlandês Willem de Sitter, utilizando das equações da Relatividade Geral em 1917, com as contribuições de Friedmann e Lemaître,  $\Lambda$  acabou sendo descartada. Ideia esta que fora depois reforçada em 1929 pelo astrônomo americano Edwin Hubble com a observação do afastamento de galáxias através do Desvio para o Vermelho "redshift" (que obedece à Lei de Hubble-Homason). Assim Einstein admitiu a falha e disse ter cometido "seu maior erro" Weinstein (2013).

Atualmente sabe-se que o Universo apresenta expansão acelerada Kamionkowski & Riess (2022); Riess et al. (2022). O que só é possível se o Universo for impulsionado por alguma fonte de energia desconhecida contida nele. Tal fonte de Energia é chamada de Energia escura. Para que sejam derivados modelos cosmológicos capazes de contabilizar os efeitos dessa nova energia é preciso que as equações de Einstein sejam novamente corrigidas. Portanto, um termo de aceleração positiva, que impulsiona a expansão do Universo, deve ser somado ao lado esquerdo da equação de Einstein (3.46).

Existem inúmeras tentativas de encontrar uma expressão para esse termo, dentre as quais está, mais uma vez,  $\Lambda$ , só que agora interpretada como energia escura. Logo, consideraremos a equação (4.31) como a mais geral que se pode ter, com base nos dados observacionais. É simples vermos como o emprego de  $\Lambda$  modifica as equações de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (4.32)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (4.33)$$

Ainda nos resta encontrar expressões independentes de  $a(t)$  e  $p(t)$  se possível, já que com a equação de estado obtivemos  $\rho(t)$  e  $p(t)$  em função de  $a(t)$ . As soluções buscadas farão uso de algumas hipóteses adicionais nos levando aos chamados modelos cosmológicos.

### 4.3 Modelos Cosmológicos.

As naturezas dos constituintes do Universo são quem determinam sua geometria e evolução, uma vez que alteram as equações de Einstein. Portanto, dada as equações de Friedmann (4.32) e (4.33) fixar valores para as constantes  $w$ ,  $k$  e  $\Lambda$  é, em última análise, estabelecer o tipo de Universo descrito. Este é o modo mais direto e simples de construção de modelos cosmológicos. Dizendo de outro modo, esta é a maneira mais simples de encontrarmos quem são, de fato,  $a(t)$  e  $\rho(t)$ , e atualizarmos as consequências que suas expressões trazem para o Universo que representam.

#### 4.3.1 Universo Dominado por Matéria

Já que em um Universo dominado por matéria  $w = 0$  a expressão (4.26) faz com que a densidade seja  $\rho = \rho_0 a^{-3}$ . Substituindo esta densidade na primeira equação de Friedmann (4.32) encontramos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3a^3 c^2} \rho_0 - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (4.34)$$

Resolvendo essa equação para  $\dot{a}(t)$  por meio da separação de variáveis e integrando em  $t$ ,

$$t - \bar{t} = \int \left[ \frac{8\pi G}{3ac^2} \rho_0 - kc^2 + \frac{\Lambda a^2 c^2}{3} \right]^{-1/2} da. \quad (4.35)$$

onde  $\bar{t}$  é uma constante de integração que representa o tempo inicial do Universo.

O objetivo de encontrar  $a(t)$  é agora um exercício puramente matemático. Contudo, a integral (4.35) é de difícil resolução, não sendo possível, portanto, encontrarmos uma solução explícita para  $a(t)$  em função de  $k$  e  $\Lambda$ . É preciso restringir e particularizar ainda mais o modelo.

Imaginemos um Universo constituído de matéria, só que sem constante cosmológica, isto é, um Universo em que  $\Lambda = 0$ . Suponhamos que esse mesmo Universo tenha seção espacial plana, ou seja, com  $k = 0$ . Neste cenário somos capazes de resolver a integral (4.35) e encontrar a expressão do fator de escala. Assumindo, para tal, que o volume do Universo em  $t = \bar{t}$  é zero,  $a(\bar{t} = 0)$ , encontramos,

$$\begin{aligned}
t - \bar{t} &= \int \left[ \frac{8\pi G}{3ac^2} \rho_0 \right]^{-1/2} da = \frac{2}{3\sqrt{8\pi G \rho_0 / 3c^2}} a^{3/2} \\
\implies a(t) &= \left( \frac{6\pi G}{c^2} \rho_0 \right)^{1/3} (t - \bar{t})^{2/3}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

O fato de  $a(t) \propto t^{2/3}$  implica na existência de um limite de até onde poderia estar um observador capaz de medir uma partícula emitida na origem do Universo. Esse limite é chamado de horizonte de partículas Mukhanov (2005); Weinberg & Steven (1972); Misner et al. (1973).

Substituindo o resultado (4.36) na expressão  $\rho = \rho_0 a^{-3}$  obtemos a relação  $\rho(t) \propto t^{-2}$ , que diverge quando avaliada em  $t = \bar{t}$ .

Um outro caso com solução conhecida para um Universo preenchido apenas por matéria é quando a curvatura da seção espacial é  $k = 1$ . Integrando a equação (4.34) para este Universo,

$$t - \bar{t} = \int \left[ \frac{8\pi G}{3ac^2} \rho_0 - c^2 \right] da = \int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{8\pi G \rho_0 / 3c^2 - a}} da \tag{4.37}$$

Essa integral pode ser calculada usando a substituição

$$a = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 \sin^2 \left( \frac{u}{2} \right) \tag{4.38}$$

em que  $u$  é desempenhará o papel de variável independente. Porém,  $a$  ficará na forma paramétrica, ou seja, não será possível explicitar  $a$  em função de  $t$ , ainda que este também termine como função do parâmetro  $u$ , assim sendo:

$$t - \bar{t} = \int \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 \sin^2 \left( \frac{u}{2} \right) du = \frac{4\pi G}{3c^2} \rho_0 \tag{4.39}$$

logo,

$$a = \frac{4\pi G}{3c^2} \rho_0 (1 - \cos(u)) \tag{4.40}$$

$$t = \frac{4\pi G}{3c^2} \rho_0 (u - \sin(u)) \tag{4.41}$$

$$\forall u \in [0, 2\pi], \cos(u) \text{ e } \sin(u) \in [-1, 1].$$

O Universo, segundo este fator de escala, portanto, expandirá até um tamanho limite imposto pelo intervalo de validade das funções  $\cos(u)$  e  $\sin(u)$ . Também como consequência do comportamento periódico dessas duas funções, deste ponto em diante ele diminuirá até o momento em que o fator de escala seja identicamente nulo, ou seja, quando  $t = 8\pi G\rho/3c^2$ . Esta etapa é conhecida como o grande colapso do universo (Big Crunch).

### 4.3.2 Universo Dominado Por Radiação.

Para que o Universo sem energia escura,  $\Lambda = 0$ , seja predominantemente preenchido por radiação, como discutido na sub-seção 4.2.3, é necessário que tenhamos o parâmetro de estado  $w = 1/3$ . Segundo a expressão de densidade (4.29) isto implica em  $\rho = \rho_0 a^{-4}$ . De modo similar ao que fizemos na seção 4.3.1, substituindo a expressão da densidade na primeira equação de Friedmann (4.32) e integrando

$$t - \bar{t} = \int \left[ \frac{8\pi G}{3a^2 c^2} \rho_0 - kc^2 \right]^{1/2} da = \int \frac{ada}{\sqrt{8\pi G \rho_0 / 3c^2 - kc^2 a^2}} \quad (4.42)$$

Caso o Universo tenha curvatura positiva ou curvatura negativa, isto é, para  $k = \pm 1$

$$t - \bar{t} = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 - kc^2 a^2}, \quad (4.43)$$

em quanto que para  $k = 0$  temos

$$t - \bar{t} = \left( \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 \right)^{-1/2} \frac{1}{2} a^2 \quad (4.44)$$

A depender do tipo de curvatura apresentada pelo espaço seccional espacial do Universo o fator de escala terá três formas explícitas como função do tempo cosmológico:

$$a(t) = \begin{cases} \sqrt{2} (8\pi G \rho_0 / 3c^2) t^{1/2} & \text{se } k = 0, \\ \sqrt{8\pi G \rho_0 / 3c^2 - (t - \bar{t})^2} & \text{se } k = 1, \\ \sqrt{(t - \bar{t})^2 - 8\pi G \rho_0 / 3c^2} & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (4.45)$$

Percebe-se que o Universo fechado com  $k = 1$  matematicamente pode apresentar um volume imaginário, pois, inevitavelmente, para além de algum determinado instante de tempo  $t$ , maior do que  $\bar{t}$ , teremos  $8\pi G \rho_0 / 3c^2 - (t - \bar{t})^2 < 0$ . Um volume desta espécie não tem sentido físico.

O caso hiperbólico em que  $k = -1$  só tem significado físico quando  $(t - \bar{t})^2 > 8\pi G\rho_0/3c^2$ . Assumindo que em  $\bar{t}$  o volume do Universo era muito menor quando comparado com o volume atual, em  $t$ , devemos ter uma densidade  $\rho_0$  muito grande quando comparada a densidade atual do Universo.

### 4.3.3 O Universo De de Sitter

Consideremos uma situação na qual as equações de campo de Einstein possuem  $\Lambda \neq 0$  e nenhuma fonte de matéria relevante, sendo  $\rho = p = 0$  seja uma boa aproximação. Este modelo é chamado de Universo de Sitter, e tem como única equação:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (4.46)$$

Resolvendo essa expressão por separação de variáveis,

$$\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}(t - \bar{t}) = \int \frac{da}{\sqrt{a^2 - 3k/\Lambda}}, \quad (4.47)$$

a solução geral dessa equação é dessa forma

$$a(t) = a_0 \cosh\left(\sqrt{\Lambda/3}t\right) + a_0 \sqrt{1 - \frac{3k}{\Lambda a_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\Lambda/3}t\right). \quad (4.48)$$

em que  $a(\bar{t}) = a_0$  é a constante de integração.

Um caso interessante seria é o de um Universo de de Sitter que seja plano, com  $k = 0$ , pois resulta imediatamente em

$$a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{\Lambda/3}t\right). \quad (4.49)$$

Assim, o elemento de linha, em coordenadas espaciais retangulares, também conhecidas como pseudo-cartesianas, torna-se

$$ds^2 = c^2 dt^2 + a_0^2 e^{2\sqrt{\Lambda/3}t} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.50)$$

Aparentemente a seção espacial do Universo é dinâmica, porém, se realizarmos uma translação temporal, isto é, se realizarmos a mudança de variáveis  $t \rightarrow \tilde{t} + T$ , onde  $T$  é uma constante arbitrária, temos:

$$\begin{aligned}
ds^2 &\rightarrow d\tilde{s}^2 = -c^2 d(\tilde{t} + T) + a_0^2 e^{2\sqrt{\Lambda/3}(\tilde{t}+T)} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\
&= -c^2 d(\tilde{t} + T) + a_0^2 e^{2\sqrt{\Lambda/3}\tilde{t}} e^{2\sqrt{\Lambda/3}T} (dx^2 + dy^2 + dz^2)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Multiplicar coordenadas de um sistema significa apenas reescalonar o sistema de coordenadas em questão. Isto é exatamente a situação que temos aqui, pois  $\exp \sqrt{\Lambda/3}T$  é uma constante multiplicativa da seção espacial do elemento de linha. Considerando que a seção espacial da métrica é independente da escolha do sistema de coordenadas ela também pode ser expressa em função das coordenadas espaciais  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \exp \sqrt{\Lambda/3}T(x, y, z)$ , ou seja,

$$ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 + a_0^2 e^{2\sqrt{\Lambda/3}\tilde{t}} (d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2). \tag{4.52}$$

Na seção 4.2 definimos observadores inerciais como aqueles que deslocam-se no espaço tempo ao longo de linhas de mundo ortogonais a seção espacial do espaço-tempo, em um dado instante  $t$ . Sem perda de generalidade, podemos classificar o espaço-tempo de seção espacial plana como uma variedade pseudo Riemanniana, segundo os requisitos da definição 2.27, em que a curvatura seccional da parte espacial é  $k = 0$ . Significa que para um dado instante  $t$  qualquer ponto da seção espacial  $\Sigma_t$  tem a medida de curvatura identicamente nula. Em outras palavras, as translações ao longo de uma hiper-superfície ortogonal a um observador inercial são percebidas por ele como operações de simetria. O comportamento da métrica (4.50) frente a translação temporal nos leva a concluir que deve haver uma dimensão a mais, ortogonal as outras quatro. De modo que, a evolução temporal percebida por um observador ortogonal a seção  $4D$  desse espaço enxergue essa translação como uma simples mudança de referencial, uma operação de simetria, como evidenciado pela métrica (4.52).

#### 4.4 Parâmetros Cosmológicos.

O tensor de energia-momento (3.10) dos fluidos relativísticos perfeitos e a métrica (4.15) foram capazes de satisfazer o princípio cosmológico 4.1. Consequentemente, junto

da correção exigida pela presença da energia escura, originaram-se as equações de Friedmann (4.32) e (4.33). Estas expressões foram acrescidas da equação de estado  $p = w\rho$  e formaram um sistema representativo da dinâmica do Universo. Portanto, esse sistema além de depender da densidade de Energia do Universo  $\rho(t)$  e do fator de escala  $a(t)$ , depende também dos parâmetros chamados de parâmetros cosmológicos  $w$ ,  $k$  e  $\Lambda$ , sobre os quais tratamos na seção 4.2.3.

O passo seguinte ao estabelecimento do modelo é a comparação entre suas previsões e os dados observacionais e/ou dados experimentais. No entanto, em se tratando de modelos cosmológicos, medir  $a(t)$  diretamente não é possível, já que por ser função do tempo cosmológico  $t$  o intervalo de tempo da observação também seria em escala de tempo cosmológico. Tempo do qual a humanidade não dispõe, por isso tal observação é impossível. Em vista disso, precisamos medir elementos dinâmicos do modelo, como  $a(t)$ , em função dos parâmetros cosmológicos a partir do tempo atual, chamado aqui de  $t_0$ . Este é um exercício puramente algébrico, pois expressaremos as equações de Friedmann em função desses parâmetros de modo a podermos medir estas quantidades dinâmicas.

#### 4.4.1 Os Parâmetros de Densidade do Universo.

Para facilitar as comparações entre as medidas e as previsões é conveniente, sempre que possível, tornar as equações adimensionais. Inspecionado a primeira equação de Friedmann, com energia escura,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (4.53)$$

percebe-se que ao dividi-la pelo quadrado da medida atual do parâmetro de Hubble  $H_0$  a tornamos adimensional,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{H_0^2 3c^2}\rho + \frac{\Lambda c^2}{H_0^2 3} - \frac{kc^2}{H_0^2 a^2} \quad (4.54)$$

Os termos contidos no lado direito da equação (4.54) são chamadas de *parâmetros cosmológicos de densidade* ou simplesmente *parâmetros de densidade*. É conveniente adotarmos notações que nos permitam simplificar esta equação ao ponto de enxergarmos com mais facilidade as consequências físicas provenientes das escolhas e imposições feitas, que nos fizeram chegar a essa equação dinâmica do Universo.

Tomando a medida atual do parâmetro de Hubble  $H_0$  definimos a constante conhecida como densidade crítica, responsável por escalonar as densidades dos constituintes do Universo:

$$\rho_c := \frac{H_0^2 3c^2}{8\pi G} \quad (4.55)$$

Uma vez definida a densidade crítica, para simplificar a equação (4.54) podemos reescrever o *parâmetro de densidade de energia* da seguinte maneira:

$$\Omega_\epsilon(t) := \frac{8\pi G}{H_0^2 3c^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (4.56)$$

Analogamente definimos, respectivamente, os parâmetros de densidade de energia escura  $\Lambda$  e de curvatura  $k$ , como seguem:

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda c^2}{H_0^2 3} \quad (4.57)$$

$$\Omega_k(t) \equiv \frac{kc^2}{H_0^2 a^2}. \quad (4.58)$$

Os registros da dependência temporal dos parâmetros das densidades  $\Omega_\epsilon(t)$  e  $\Omega_k(t)$  devem-se a densidade de energia  $\rho = \rho(t)$  e ao fator de escala  $a = a(t)$ , respectivamente, contidos em suas expressões. Por estar associado a constante cosmológica, o parâmetro de densidade de energia escura não varia com o tempo. No entanto, se considerarmos modelos mais gerais de energia escura onde sua densidade não é constante ao longo do tempo (por exemplo, modelos de quintessência), então  $\rho_\Lambda$  também será função do tempo, e a expressão de  $\Omega_\Lambda(t)$  será mais complicada. Equações dinâmicas específicas do modelo fariam-se necessárias para determinar o aspecto funcional do parâmetro de densidade de energia escura, nessa situação.

A equação (4.54) torna-se, portanto, muito mais simples quando expressa em função dos símbolos representativos dos parâmetros de densidade,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\epsilon(t) + \Omega_\Lambda + \Omega_k(t). \quad (4.59)$$

Este novo formato evidencia algumas informações relevantes. A título de exemplo percebe-se que, em um Universo sem a presença de constante cosmológica, a medida atual da curvatura da sua seção espacial é determinada apenas pelo valor do parâmetro de densidade crítica. Ou seja, dado  $\Lambda = 0$  teríamos:

$$\frac{H_0^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{H_0^2 3c^2} \rho(t) + \frac{kc^2}{H_0^2 a_0^2} \quad (4.60)$$

$$1 = \Omega_\epsilon(t_0) + \Omega_k(t_0) \implies \Omega_k(t_0) = 1 - \Omega_\epsilon(t_0). \quad (4.61)$$

onde  $t_0$  é o instante de tempo atual. Por conta da expressão (4.55), Se o valor de  $\rho_c$  fizer com que  $\Omega_\epsilon(t_0) > 1$ , então, de acordo com as possibilidades da métrica (4.14), a seção espacial é plana, pois para satisfazer essa condição  $k$  teria de ser igual a 1. Se ao invés disso tivermos  $\Omega_\epsilon(t_0) < 1$ , então consequentemente  $k = -1$ , o que representa um

Universo de seção espacial hiperbólica. Existe, ainda, a possibilidade de que  $\Omega_\epsilon(t_0)$  seja igual a 1, assim sendo,  $\Omega_\epsilon(t_0) - 1 = 0$ . Desta forma, teríamos um Universo espacialmente plano.

Generalizando para o caso em que  $\Lambda \neq 0$ ,

$$\Omega_k(t_0) = 1 - \Omega_\epsilon(t_0) - \Omega_\Lambda \quad (4.62)$$

a curvatura passa a depender de  $\Lambda$  e de  $k$ . Para simplificar a notação a partir daqui omitiremos a dependência temporal, isto é,  $\Omega(t) = \Omega$ .

A densidade de energia total do Universo é naturalmente resultado da contribuição de várias fontes, pois o Universo é formado por matéria, radiação etc. Portanto, dadas as  $n$  fontes de energia do Universo,

$$\rho = \sum_{j=1}^n \rho_j \quad (4.63)$$

$$\Omega = \sum_{j=1}^n \Omega_j \quad (4.64)$$

De maneira que, a conservação da energia total nos obriga a supor que os tensores energia-momento das componentes são separadamente conservados.

Lembrando das considerações feitas na sub-seção 4.2.3 sobre os valores que o parâmetro de estado  $w$  poderia apresentar, é razoável assumirmos que a  $j$ -ésima componente da densidade de energia deverá ter o seu próprio parâmetro de estado  $w_j$ . As hipóteses sobre os valores de  $w$  podem agora serem melhor justificadas. Notemos que o parâmetro de estado do Universo é a soma dos parâmetros de estado de todos os seus constituintes, ou seja,

$$w = \frac{\sum_j p_j}{\sum_j \rho_j} = \frac{\sum_j \rho_j w_j}{\sum_j \rho_j} = \frac{\sum_j \rho_j w_j}{\rho}. \quad (4.65)$$

O parâmetro de estado total é a média ponderada dos  $j$ -ésimos parâmetros de estado. Então, se a medida de uma dada componente  $l$  é dominante em detrimento das

demais, configura-se em uma boa aproximação a expressão

$$w \approx w_l = \frac{\rho_l w_l}{\rho_l}. \quad (4.66)$$

Deste modo, a densidade de energia é, por seu turno, aproximadamente igual a densidade de energia do constituinte dominante:

$$\rho \approx \rho_l = \rho_{0l} a^{-3(1+w_l)}. \quad (4.67)$$

Em que  $\rho_{0l}$  é a densidade inicial da  $l$ -ésima fonte de energia. Então, como já discutido na seção 4.3, em um Universo dominado por matéria com  $w = 0$  a densidade vale  $\rho \approx \rho_0 a^{-3}$ . Já um Universo dominado por radiação possui  $w = 1/3$ , ou seja,  $\rho = \rho_0 a_0^{-4}$ . Assumindo serem essas as duas fontes que contribuem para a densidade de energia total do Universo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{H_2}{H_0^2} &= \frac{8\pi G}{H_0^2 3c^2 a^3} \rho_{0M} + \frac{8\pi G}{H_0^2 3c^2 a^4} \rho_{0R} + \frac{\Lambda c^2}{H_0^2 3} + \frac{kc^2}{H_0^2 a^2} \\ \frac{H^2}{H_0^2} &= \left( \frac{\rho_{m,0}}{\rho_c} \right) a^{-3} + \left( \frac{\rho_{r,0}}{\rho_c} \right) a^{-4} + \frac{\Lambda c^2}{H_0^2 3} + \left( \frac{kc^2}{H_0^2} \right) a^{-2} \\ \frac{H^2}{H_0^2} &= \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \Omega_\Lambda, \end{aligned} \quad (4.68)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} &= \left( \frac{\rho_{r,0}}{\rho_c} \right) a^{-4} \\ \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} &= \left( \frac{\rho_{m,0}}{\rho_c} \right) a^{-3} \\ \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} &= \frac{kc^2}{H_0^2} a^{-2} \end{aligned}$$

Lembrando que  $H = \dot{a}/a$ , se conhecermos (ou medirmos) os valores dos parâmetros  $\Omega$  para cada componente do Universo, podemos determinar a forma de  $a(t)$ .

$$\frac{\dot{a}}{H_0} = \sqrt{\frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{k,0} + \Omega_\Lambda a^2} \quad (4.69)$$

A forma mais geral da equação de Friedmann paramétrica, sem que particularizemos as componentes, é dada em respeito ao somatório dos parâmetros de densidade das várias fontes de energia do Universo. Com efeito,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_{j=1}^n \Omega_j + \Omega_\Lambda + \Omega_k \quad (4.70)$$

A escolha de tornar ou não explícitos os termos que compõe  $\Omega$  irá depender da riqueza de detalhes desejada para o modelo cosmológico e do objetivo da investigação.

#### 4.4.2 Parâmetro de Desaceleração do Universo.

Embora tenhamos derivado alguns modelos cosmológicos com base em justificativas físicas na seção 4.3, uma expressão para  $a(t)$  pode ser obtida através de motivações puramente matemáticas. Em razão do fator de escala ser uma função do tempo podemos expandi-lo em série de Taylor, ao longo de um intervalo  $\delta t = t - t_0$  pequeno o suficiente para que os primeiros termos sejam uma boa aproximação:

$$\begin{aligned} a(t) &\approx a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2 \\ a(t) &\approx a(t_0) \left[ 1 + \frac{1}{a(t_0)} \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{a(t_0)2!} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.71)$$

No lado direito da igualdade o fator multiplicativo que compõe o termo linear em  $t$  é a medida atual do parâmetro de Hubble  $H_0 = \dot{a}(t_0)/a(t_0)$ . Definimos o chamado *parâmetro de desaceleração do Universo* com base no terceiro membro dessa expansão:

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \quad (4.72)$$

Então, quem surge naturalmente na expansão 4.71 é o valor atual do parâmetro de desaceleração  $q(t_0) = q_0 = q|_{t_0}$ . O fator de escalar também é dependente desta medida, ou seja,

$$a(t) \approx a_0 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2. \quad (4.73)$$

onde  $a(t_0) = a_0$

A expansão em série de Taylor acima não se baseia em nenhum modelo de Universo específico.  $H_0$  e  $q_0$  somente modelam a expansão do Universo em  $t_0$ , sem nenhuma hipótese sobre seus componentes e sua dinâmica.

Embora o tenhamos definido somente agora, o parâmetro de desaceleração não é completamente desconhecido. Dividindo a segunda equação de Friedmann por  $H^2$  temos:

$$\frac{\ddot{a}}{H^2 a} = -\frac{1}{2} \frac{8\pi G}{H^2 3c^2} \sum_i \rho_i (1 + 3w_i) = -\frac{1}{2} \sum_i \Omega_i (1 + 3w_i). \quad (4.74)$$

Logo,

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}}{H^2 a} \Big|_{t=t_0} = \frac{1}{2} \sum_i \Omega_{i,0} (1 + 3w_i) \quad (4.75)$$

Como mencionado na sub-seção anterior a predominância de um constituinte do Universo, em detrimento dos demais, conduz o parâmetro de desaceleração a depender com mais relevância do elemento dominante. O somatório pode incluir a densidade de energia escura pois há uma equação de estado para ela, um Universo com predominância dessa componente tem desaceleração negativa, logo, tem expansão acelerada! Misner et al. (1973)

#### 4.4.3 A cinemática dos Raios de Luz: O *Redshift*.

Do ponto de vista observacional, como já mencionado, o tempo cosmológico não é uma escala de medida de tempo conveniente. De sorte, é necessário alguma grandeza observável adimensional, capaz de caracterizar a passagem do tempo. Esta nova quantidade deve evoluir monotonicamente com o tempo a partir do instante  $t = 0$  para não ocorrerem medidas ambíguas ou fisicamente inviáveis. Devemos utilizar o movimento da luz para encontrar essa nova grandeza, dada a sua relação com a passagem do tempo, como vimos na seção 3.1 que trata da relatividade especial.

Ao moverem-se pela extensão do espaço-tempo raios de luz imprimem linhas de mundo que são curvas geodésicas do tipo Luz ou nulas. O intervalo relativístico característico da luz é identicamente nulo,  $ds^2 = 0$ . Vamos imaginar um feixe luminoso cujo a propagação é um caso particular da métrica (4.14) com  $d\phi = d\theta = 0$ :

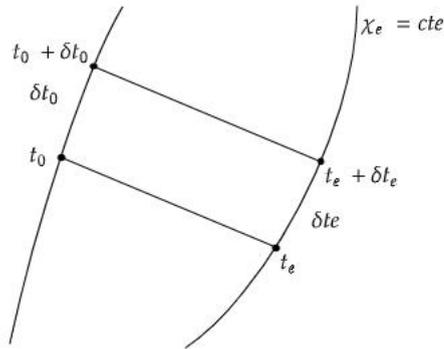
$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + a(t)d\chi^2 \\ 0 &= -c^2 dt^2 + a(t)d\chi^2 \\ \implies d\chi &= \pm c \frac{dt}{a(t)}, \end{aligned} \tag{4.76}$$

onde  $dt$  é o tempo transcorrido entre o instante de emissão  $t = t_e$  e o instante de detecção  $t = t_0$  do feixe luminoso. O sinal negativo constituiria uma emissão hoje, em  $t = t_0$ , detectada em um instante  $t_d > t_0$ .

Impondo  $d\chi > 0$  e lembrando que  $\chi(t_0) = 0$ , já que esta é a origem do nosso referencial, podemos integrar ambos os lados de  $t_e$  até  $t_0$ :

$$\begin{aligned} \chi(t_0) - \chi(t_e) &= -c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \\ \chi_e = \chi(t_e) &= c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \end{aligned} \tag{4.77}$$

Importante notarmos que  $\chi_e$  é apenas o valor da coordenada da fonte emissora no instante da emissão, portanto, não representa uma distância física. Então precisamos comparar essa medida com outra similar. Para tal, suponhamos que a partir da posição  $\chi_e$ , duas frentes onda foram emitidas respectivamente nos instantes  $t_e$  e  $t_e + \delta t_e$ , onde  $\delta t_e$  e  $\delta t_0$  são as medidas dos períodos da frente nos instantes  $t_e$  e  $t_0$ . Posteriormente essas frentes de onda foram detectadas respectivamente nos instantes  $t_0$  e  $\delta t_0$ . A figura a seguir ajuda a ilustrar essa situação.


 FIGURA 4.7. Frentes de onda emitidas em  $t_e$  e  $t_e + \delta t_e$ , detectadas em  $t_0$  e  $t_0 + \delta t_0$  respectivamente.

Dada a frequência da onda emitida  $\nu_e$ , queremos descobrir com qual frequência  $\nu_0$  essa luz será observada. Usando o fato do valor da coordenada de emissão ser constante:

$$\chi_e = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\chi_e = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)},$$

temos,

$$= \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

$$0 = \left[ \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} - \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} - \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0} \right] \frac{dt}{a(t)}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)}.$$

Já que o período  $\delta t$  de uma onda é uma escala de tempo estreita comparada a escala de tempo cosmológica,  $a(t)$  não muda significativamente entre os instantes  $t$  e  $t + \delta t$ . Logo as integrais podem ser aproximadas por:

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)}, \quad (4.79)$$

os períodos associados são dados como  $\nu_e = 1/\delta t_e$  e  $\nu_0 = 1/\delta t_0$ . Então a razão entre o fator de escala no instante da emissão e o fator de escala no instante da detecção é dada

em função das frequências nesses instantes,

$$\frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{\delta t_e}{\delta t_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}. \quad (4.80)$$

O que permite obter um modo de identificar a expansão ou contração do Universo. Se  $\nu_0 > \nu_e$ , então  $a(t_0) < a(t_e)$  e o Universo está se contraindo. Do contrário se  $\nu_0 < \nu_e$ , implica em  $a(t_0) > a(t_e)$  que é resultado de um Universo em expansão.

Levando-se em conta que a velocidade da luz é constante, e de posse das frequências, define-se o parâmetro adimensional chamado de *redshift*, como função do comprimento de onda:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 = \frac{\nu}{\nu_0} - 1 = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 \quad (4.81)$$

onde  $\lambda_0$  é a medida do comprimento de onda no instante da detecção  $t_0$ . Já  $\lambda$  é a medida do comprimento de onda da luz em um instante de emissão  $t$  qualquer.

O redshift  $z$  não pode ser menor do que zero. Uma fonte vizinha a nós possui valor de redshift  $z = 0$ , então  $z < 0$  implicaria em distâncias negativas, o que não faz sentido fisicamente.

De agora em diante estimar o valor do fator de escala no instante  $t$  é uma tarefa simples,

$$a(t) = \frac{a(t_0)}{1+z}. \quad (4.82)$$

Além de ter uma relação simples com  $a(t)$ , por conta da adoção da métrica (4.14), vemos que o redshift é uma variável muito mais conveniente do que o fator de escala, já que nós a observamos diretamente. Podemos inclusive reescrever as equações de Friedmann para que não mais dependam do fator de escala, basta que para isso utilizemos o resultado (4.82). Assim sendo, a nova versão da equação (4.67) é da forma:

$$\rho_l(z) = \rho_{l,0} \left( \frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^{3(1+w_l)} = \rho_{l,0} \left( \frac{a(t_0)(1+z)}{a(t_0)} \right)^{3(1+w_l)} = \rho_{l,0} (1+z)^{3(1+w_l)}, \quad (4.83)$$

Substituindo na equação (4.68) obtemos a equação de Friedmann em função apenas dos parâmetros cosmológicos, isto é,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_\Lambda \quad (4.84)$$

Esse resultado é a primeira equação de Friedmann observacional. Uma vez medido o parâmetro de Hubble  $H_0$ , a partir dessa igualdade recuperar a equação de Friedmann teórica (4.53), e aferir os valores de  $t$ ,  $a(t)$  e  $\rho(t)$ , torna-se um exercício puramente algébrico.

O cálculo de  $H_0$  requer o estabelecimento da noção de distância no Universo. No entanto, este conceito já se faz presente, pois a dinâmica do Universo é dada pelas equações de Einstein (4.31), que são equações diferenciais relativas a métrica do Universo (4.14). Em vista disso, para obtermos meios de calcular distâncias, nossa tarefa é lançar mão de particularizações físicas convenientes para adquirirmos expressões, bem definidas, da medida de distância no Universo. Wald (1984); Weinberg & Steven (1972); Misner et al. (1973); Weinberg (1972)

## Capítulo 5

# Medidas de Distância no Universo

Em 1929, Edwin Hubble apresenta a lei observacional que leva seu nome, a lei de Hubble (4.2). Com a qual, nos é mostrado que a velocidade média  $v$  de afastamento das galáxias é proporcional a distância  $d$  entre elas e nós.

A verificação da lei de Hubble necessita de métodos independentes de medida de velocidade, como o redshift da luz emitida pelas galáxias observadas. E claramente foi preciso utilizar um outro modo de medir distâncias. *Velas Padrão* são fenômenos em respeito aos quais somos capazes de conhecer ou estimar a potência intrínseca em seus referenciais inerciais locais. Além disso, emitem uma quantidade massiva de radiação em um curto período de tempo, e por isso são bons marcadores de distância, alternativos a lei de Hubble.

Embora a lei de Hubble tenha surgido em um contexto diferente do modo como concebemos as Equações de Friedmann (4.32) e (4.33), dadas através das equações de Einstein (4.31), ambas nos conferem meios para medirmos o parâmetro de Hubble atual  $H_0$ . Então, devemos agora nos perguntar se há compatibilidade entre as duas expressões. Devemos verificar se, e como, a Lei de Hubble observacional se encaixa no contexto da cosmologia homogênea e isotrópica. Ou seja, a mensuração de distância é influenciada pelo Universo onde ela foi imprimida.

## 5.1 A Lei de Hubble Geométrica.

A versão geométrica da lei de Hubble (4.2) é expressão da expansão do Universo, fato este ilustrado pela imagem que segue:

FIGURA 5.1. Dinâmica de expansão do Universo.

Aqui utilizamos as mesmas suposições que motivaram as hipóteses de homogeneidade e isotropia do Universo, sobre as quais tratamos na seção 4.1. Os pontos de interseção entre as folhas  $\Sigma_t \forall t \in \mathbb{R}^+$  e as linhas de mundo, indexadas pelos valores da coordenada  $\chi$ , representam as galáxias. Impondo que as galáxias sejam comóveis, suas linhas de mundo são geodésicas do tipo tempo-tempo. Assumiremos que em qualquer instante  $t$ , a folha  $\Sigma_t$  associada será homogênea e isotrópica.

Assim como na seção 4.2 sobre geometria do espaço-tempo, a coordenada  $\chi$  é quem indexa as geodésicas de um mesmo feixe. Na figura 5.1 o ponto com  $\chi = \chi_0 = 0$  é a nossa galáxia. A distância coordenada da galáxia em  $\chi = cte$  até a nossa, medida ao longo da hiper-superfície  $\Sigma_t$  no instante  $t$ , é dada então por:

$$\Delta\chi = \chi - \chi_0 = \chi. \quad (5.1)$$

Seria preciso calcular  $\chi_0$  e  $\chi$  instantaneamente, isto é, esses cálculos seriam simultâneos, do ponto de vista do espaço-tempo, o que não é permitido de acordo com a Teoria da Relatividade especial, seção 3.1. A distância própria é definida sobre uma hipersuperfície de tempo constante. O fator de escala indexa a superfície em questão e fixa os eventos ao longo das linhas de mundo dos observadores envolvidos. Consequentemente a distância real observada é função da distância coordenada e do fator de escala,

$$\mathcal{D}(t) = a(t)\chi. \quad (5.2)$$

Em Física costumamos chamar  $\mathcal{D}(t)$  de distância própria,  $\chi$ , por seu turno, é frequentemente nomeada de distância comóvel.

A velocidade de recessão das galáxias é a derivada da distância física em função do tempo cosmológico,

$$v_r := \frac{d\mathcal{D}}{dt} = \frac{da}{dt}\chi = \dot{a}\chi = \frac{\dot{a}}{a}a\chi = Ha\chi, \quad (5.3)$$

onde utilizamos a definição de parâmetro de Hubble  $H(t) := \dot{a}/a$ . Vemos que em cada instante  $t$  a velocidade é proporcional à distância entre elas

$$v_r = H(t)a(t)\chi = H(t)\mathcal{D}(t). \quad (5.4)$$

Essa é a velocidade de recessão das galáxias obtida através da lei de Hubble geométrica. Sempre que uma quantidade cosmológica é obtida em função do fator de escala é preciso encontrar meios de substituir essa dependência. Como vimos na seção 4.4,  $a(t)$  é uma grandeza impossível de ser medida diretamente.

## 5.2 A Lei de Hubble Observável.

A expressão (5.2) não oferece meios viáveis de medição. Por isso em 1929 Hubble infere a distância das galáxias por meio do das luzes emitidas por variáveis cefeidas ao longo do nosso cone de luz passado, como mostra a figura

FIGURA 5.2. Cone de Luz passado de uma Galáxia vizinha.

Na qual  $\chi$  representa a medida da distância coordenada entre os instantes  $t$  e  $t_0$ . A distância percorrida pela luz, também chamada de distância de luminosidade, é, neste caso, calculada a partir da métrica de FLRW, fazendo o intervalo relativístico igual a zero e fixando as coordenadas celestes (angulares) levando à relação:

$$d_{luz} = ca(t) \int_t^{t_0} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})}. \quad (5.5)$$

Usar a relação entre o fator de escala e o redshift  $a = a_0/(1+z)$  permiti-nos reparametrizar esta integral, logo,

$$da = -\frac{a_0}{(1+z)^2} dz, \quad (5.6)$$

assim sendo, supondo que todos os observadores são comóveis e, portanto, o redshift é devido apenas à expansão do Universo, no instante  $t_0$  o redshift é identicamente nulo, assim temos

$$d_{luz} = \frac{c}{(1+z)} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}. \quad (5.7)$$

$H(z)$  é o parâmetro de Hubble em função do redshift, ou seja,

$$H(z) = \left. \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right|_{t=t_z} \quad (5.8)$$

Ao contrário do que ocorreu na lei de Hubble geométrica (5.4), a relação entre  $d_{luz}$  e  $z$  depende da história de evolução do Universo contada pelo parâmetro de Hubble, e não somente de seu valor em um dado instante. Se por um lado seja justamente o que possibilita investigarmos a solução do Universo, por meio da relação entre distância e redshift, por outro a solução da integral (5.7), em geral, não é exata e depende da aparência funcional de  $H(z)$ . Como por exemplo na sub-seção 4.4.3 do capítulo 4 onde

derivamos uma expressão para  $H(z)$  em função dos parâmetros de densidade de energia  $\Omega_\rho$ , densidade de energia escura  $\Omega_\Lambda$ , densidade de curvatura  $\Omega_k$  e do redshift cosmológico  $z$ . Um outro problema é o fato de  $d_{luz}$  não ser diretamente mensurável em escalas cosmológicas. Por isso surge a necessidade de definições mais convenientes de distância, do ponto de vista observacional, uma vez que  $H(z)$  já tem garantida sua versão mensurável, e não somente estimável.

### 5.2.1 Distância de Luminosidade.

Suponhamos que, por alguma razão, conheçamos a quantidade de energia luminosa por unidade de tempo emitida isotropicamente por uma fonte luminosa qualquer, em seu referencial local. Essa quantidade é chamada de luminosidade. Essa energia por unidade de tempo é distribuída pela frente de onda ao se afastar do objeto que a emitiu Jackson (1999); Zangwill (2013). Para melhor entendermos esse efeito vamos assumir que a fonte luminosa é pontual, de modo que o lugar geométrico dos fótons emitidos em um mesmo instante  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  é a superfície esférica imaginária  $\mathbb{S}^2$ .

lembrando do conceito de distância física, expressão (5.2), em um dado instante  $\tilde{t} \in \mathbb{R}^+$  a distância física e a distância coordenada são iguais a menos de uma constante multiplicativa que é o fator de escala avaliado nesse instante, ou seja

$$D(\tilde{t}) = a(\tilde{t})\chi. \quad (5.9)$$

Logo, em um dado instante a distância física coincide com a distância coordenada formada pelo produto entre  $a(\tilde{t})$  e a distância coordenada  $\chi$ . Para tal é preciso que o fator de escala seja igual a 1. Tipicamente escolhemos o fator de escala em  $\tilde{t} = t_0$ , portanto hoje, como sendo  $a_0 = 1$ . Nesse caso, essas distâncias coincidem hoje, ou seja,

$$D(t_0) = D = a_0\chi = \chi \quad (5.10)$$

A distância coordenada (ou comóvel)  $D = \chi$  entre a fonte pontual e a posição dos fótons, emitidos em  $t_0$ , no instante  $t > t_0$  qualquer é justamente o raio da esfera  $\mathbb{S}^2$ . De modo que em um dado instante, no referencial próprio da fonte emissora, o lugar

geométrico das frentes de onda emitidas isotropicamente é justamente a esfera de área  $4\pi D^2$ . Vemos que a medida em que a energia se afasta da fonte emissora o fluxo  $F$ , energia por unidade de tempo e área, diminui. Em outras palavras, se o espaço onde se dá a propagação dessa energia fosse plano, e a fonte estivesse parada, a relação entre distância comóvel  $D$ , o fluxo de energia  $F$  e a luminosidade  $L$  seria simplesmente

$$F = \frac{L}{4\pi D^2} \quad (5.11)$$

Caso a seção espacial do Universo apresente outras geometrias a relação entre  $F$ ,  $L$  e  $D$  não será tão simples. De fato, não existe lei fundamental independente da evolução do Universo que relacione essas grandezas.

A luz percorre distância  $d_L$  que não é exatamente a distância coordenada  $D$  entre a fonte e a detecção,  $d_l \neq D$ . No entanto, luzes emitidas por fontes que não estejam tão distantes de nós a eventual curvatura do Universo pode ser desprezada ao longo do seu caminho. Aliado a esse fato, se o intervalo de tempo cosmológico entre a emissão e a detecção for suficientemente pequeno a evolução também pode ser desconsiderada.

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} \implies d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (5.12)$$

Num espaço-tempo genérico, essa equação é a definição de *distância de luminosidade*. Aplicar essa expressão para o cálculo da distância luminosa  $d_L$  exige conhecimento da luminosidade  $L$ . Como mencionado no início deste capítulo fontes cujas características de emissão são bem conhecidas são chamadas de velas-padrão.

A distância de luminosidade é uma grandeza ideal para a relacionarmos com o redshift  $z$  em uma lei de Hubble observacional. Contudo, isso irá requerer que contabilizemos os efeitos produzidos pela geometria do Universo. Para melhor compreendermos esse fato na figura que segue, por conveniência, a linha de mundo de uma vela-padrão, está posicionada em  $\chi = \chi_e = 0$  e nossa linha de mundo encontra-se na posição  $\chi = cte$ , como mostra figura 5.3.

FIGURA 5.3. Emissão e detecção de feixe de fótons no Universo.

Onde, sem perda de generalidade, vamos supor que os fótons emitidos da posição  $\chi = 0$  nos instantes  $t_{e,2}$  e  $t_{e,1}$  possuam a mesma frequência  $\nu_e$ . De modo que, a energia

de um único fóton emitido é da forma  $\epsilon = h\nu_e$ , onde  $h$  é a constante de Plank Cohen-Tannoudji et al. (2019); Sakurai & Napolitano (2011). A energia total resultante da soma das energias individuais de um conjunto de  $N$  fótons emitidos do mesmo ponto entre os instantes  $t_{e,2}$  e  $t_{e,1}$  é, portanto,  $N\epsilon = Nh\nu_e$ .

A luminosidade é a razão entre o total de energia emitida e o intervalo de tempo no qual durou a emissão. Para o conjunto de  $N$  fótons emitidos ao longo do intervalo de tempo  $t_{e,2} - t_{e,1} = \delta t_e$ , a partir de  $\chi = 0$ , a medida de luminosidade é calculada como:

$$L = \frac{Nh\nu_e}{\delta t_e}. \quad (5.13)$$

Logo o número de fótons emitidos em um intervalo de tempo  $\delta t_e$ , na posição  $\chi = 0$  é

$$N = \frac{L\delta t_e}{h\nu_e}. \quad (5.14)$$

Após a emissão, o percurso até o momento da detecção desses fótons em  $\chi = cte$  irá modificar suas frequências, por conta do redshift cosmológico. Os fótons que antes possuíam frequência  $\nu_e$  foram detectados entre os instantes  $t_{0,1}$  e  $t_{0,2}$  com frequência  $\nu_0$ . De maneira que, a medida de luminosidade nesse ponto seja

$$L = \frac{Nh\nu_0}{t_{0,2} - t_{0,1}} = \frac{Nh\nu_0}{\delta t_0}. \quad (5.15)$$

O lugar geométrico da detecção é a hiper-superfície do tipo espaço  $\Sigma_{t_0}$ . Ainda que superfícies de simultaneidade diferentes sejam indexadas por instantes diferentes o intervalo  $t_{0,2} - t_{0,1} = \delta t_0$  é pequeno quando comparado a escala de tempo do Universo, logo  $\Sigma_{t_{0,1}} \approx \Sigma_{t_{0,2}} \approx \Sigma_{t_0}$

O fluxo  $F$  detectado é a razão entre a luminosidade  $L$  e a medida da área  $A$  através da qual a energia emitida  $Nh\nu_0$  fluiu durante o intervalo de tempo  $t_{0,2} - t_{0,1} = \delta t_0$ , isto é

$$F = \frac{L}{A} = \frac{Nh\nu_0}{\delta t_0 A}. \quad (5.16)$$

Esta definição quando aplicada ao nosso problema tem a área  $A$  representando um subconjunto da superfície de simultaneidade (hiper-superfície)  $\Sigma_{t_0}$ . Em outras palavras,

$A$  é a medida da área da esfera  $\mathbb{S}^2$  ambientada em  $\Sigma_{t_0}$ . A forma explícita dessa área requer o conhecimento do raio de  $\mathbb{S}^2$ . Como já tratado na seção 4.2 sobre a geometria do espaço-tempo, a depender do tipo de curvatura, as três possíveis expressões de  $A$  são:

$$A = A(\chi) = \begin{cases} 4\pi(\sin \chi)^2 a_0^2 & , \Sigma_t = \mathbb{S}^3 \\ 4\pi\chi^2 a_0^2 & , \Sigma_t = \mathbb{E}^3 \\ 4\pi(\sinh \chi)^2 a_0^2 & , \Sigma_t = \mathbb{H}^3 \end{cases} \quad (5.17)$$

Onde a quantidade  $\chi - \chi_0 = \chi$  é a distância comóvel entre a galáxia emissora e o ponto de detecção. Agora podemos obter uma expressão observável para distância de luminosidade em função do redshift  $z$ . Com efeito, supondo serem os intervalos de tempo  $\delta t_e$  e  $\delta t_0$  os períodos dos fótons durante a emissão e a detecção, respectivamente, a definição (4.80) aplica-se a medida do fluxo detectado do seguinte modo:

$$F = \frac{N h \nu_0}{\delta t_0 A} = \frac{L \delta t_e h \nu_0}{h \nu_e \delta t_0 A} = \frac{L \delta t_e \nu_0}{\delta t_0 \nu_e A} = \left( \frac{\nu_0}{\nu_e} \right)^2 \frac{L}{A} = \frac{L}{A(1+z)^2}, \quad (5.18)$$

onde utilizamos o número de fótons dado pela função (5.14). Substituindo esse resultado na expressão da distância de luminosidade somos levados a três possíveis resultados por conta das três possíveis áreas, mostradas em (5.17),

$$d_L = \sqrt{\frac{A(1+z)^2}{4\pi}} = \begin{cases} (1+z)a_0 \sin(\chi) & , \Sigma_t = \mathbb{S}^3; \\ (1+z)a_0(\chi) & , \Sigma_t = \mathbb{E}^3; \\ (1+z)a_0 \sinh(\chi) & , \Sigma_t = \mathbb{H}^3; \end{cases} \quad (5.19)$$

onde, assim como na seção 5.2,

$$\chi = c \int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}.$$

### 5.2.2 Distância de Diâmetro Angular.

Tomar a medida de uma fonte extensa de luz contida em um espaço curvo, em princípio requer o conhecimento sobre a curvatura intrínseca desse espaço ambiente, como vimos na seção sobre Variedades Riemannianas 2.3, do capítulo 2. No entanto, se princípio cosmológico que assegura isotropia e homogeneidade do Universo estiver

correto, então a métrica (4.15) é válida. Dada a simplicidade desta métrica, e independência dos eixos coordenados dos quais foi derivada, podemos fazer aproximações que tornam fácil a tarefa de tomar medidas de fontes extensas distantes de nós.

Imaginemos uma fonte extensa distante de nós, em outra galáxia, por exemplo. Estamos interessados em saber o valor  $d_A$  do percurso dos raios de luz que saem das extremidades dessa fonte e chegam até nós, já que esta é uma medida de distância do Universo.

Seja  $D$  o valor do diâmetro da fonte extensa em seu próprio referencial. A métrica com respeito a esta observação é simplesmente dada como:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = ds^2 = D^2 \quad (5.20)$$

Uma vez que  $D$  é um comprimento próprio, um seguimento de geodésica que se estende ao longo de uma superfície de simultaneidade em que  $dt = 0$ .

Sem perda de generalidade vamos rotacionar o sistema de coordenadas  $\{ct, r, \theta, \phi\}$  de modo que para nós seu diâmetro seja perpendicular a direção radial  $r$  e a coordenada azimutal  $\phi$ . Consideremos que os raios de luz das extremidades da fonte foram emitidos em um instante  $t_1$ , e que nós os detectamos no instante  $t_0 > t_1$ . O valor da coordenada radial no momento da emissão era  $r_1$ , já a detecção deu-se em  $r = r_0 = 0$ . A rotação dos eixos coordenados faz com que a linha de visada também seja perpendicular ao diâmetro da fonte. Além disso, convenientemente, o ângulo entre a linha de visada e os raios de luz das extremidades passa a ser a medida  $\theta$  da coordenada polar, como mostra a figura 5.4

FIGURA 5.4. Relação entre as quantidades usadas no cálculo do diâmetro angular e do diâmetro próprio da fonte extensa.

O valor  $\delta = 2\theta$  é a medida do ângulo entre os raios de luz detectados em  $r_0$  no instante  $t_0$ , que partiram das extremidades da fonte. No nosso referencial o diâmetro é observado da seguinte maneira:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = ds^2 = a(t_1)^2 (r_1^2 d\theta^2). \quad (5.21)$$

lembrando que para nós que a medida do diâmetro se estende apenas ao longo da coordenada polar, logo  $d\phi = 0$ . Como mostra a figura 5.4 as extremidades tem distâncias iguais em relação ao ponto de detecção, já que estão sobre a mesma superfície perpendicular a linha de visada, logo não há razão para supor que os raios de luz cheguem em instantes diferentes, exatamente por isso que  $dt = 0$  em (5.21). Igualando as medidas nos dois referenciais

$$D = a(t_1)r_1d\theta = a(t_1)r_1\delta \quad (5.22)$$

O *diâmetro angular* percebido por nós é, portanto,

$$\delta = \frac{D}{a(t_1)r_1} \quad (5.23)$$

A medida  $d_A$ , que desejamos, poderia perfeitamente representar o tamanho do raio de uma circunferência no espaço euclidiano. De modo que, o perímetro  $D$  de um arco que limita o setor circular de ângulo  $\delta$  nesta circunferência nos permite definir a seguinte expressão para  $d_A$ :

$$d_A\delta = D \implies d_A \equiv \frac{D}{\delta} \quad (5.24)$$

Chamamos  $d_A$  de distância angular que é calculada em função de objetos com diâmetro conhecido chamados de *régua padrão*. Usando o resultado (5.23),

$$d_A = a(t_1)r_1. \quad (5.25)$$

Então, no espaço-tempo completo o esquema dos raios de luz mostrado na figura 5.4 se dá de acordo com a figura que segue:

FIGURA 5.5. Relação entre as quantidades usadas no cálculo do diâmetro angular e do diâmetro próprio da fonte extensa no espaço-tempo completo.

As extremidades da fonte são as interseções das linhas de mundo em  $\chi_a$  e  $\chi_b$  com a hiper-superfície  $\Sigma_t$ . Nós estamos posicionados em  $\chi = 0$ . Como consequência existem três possibilidades para o aspecto funcional explícito do diâmetro próprio, de acordo com a noção de curvatura intrínseca constante. Com efeito

$$D = \begin{cases} a(t)(\sin \chi(t))\theta, & \Sigma_t = \mathbb{S}^3 \\ a(t)\chi(t)\theta, & \Sigma_t = \mathbb{E}^3 \\ a(t)(\sinh \chi(t))\theta, & \Sigma_t = \mathbb{H}^3. \end{cases} \quad (5.26)$$

Conhecida a relação entre o fator de escala e o redshift (4.82)

$$D = \begin{cases} a(t_0)(\sin \chi(t))\theta/(1+z), & \Sigma_t = \mathbb{S}^3 \\ a(t_0)\chi(t)\theta/(1+z), & \Sigma_t = \mathbb{E}^3 \\ a(t_0)(\sinh \chi(t))\theta/(1+z), & \Sigma_t = \mathbb{H}^3. \end{cases} \quad (5.27)$$

Sendo assim, temos:

$$d_A = \begin{cases} a_0 \sin(\chi)/(1+z) & , \Sigma_t = \mathbb{S}^3; \\ a_0(\chi)/(1+z) & , \Sigma_t = \mathbb{E}^3; \\ a_0 \sinh(\chi)/(1+z) & , \Sigma_t = \mathbb{H}^3; \end{cases} \quad (5.28)$$

onde, assim como na seção 5.2,

$$\chi = c \int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}.$$

A dificuldade de se utilizar essa medida reside no fato de não conhecermos com precisão as medidas das réguas padrão Ryden (1970); Harrison (2000).

### 5.3 Cosmologia Observacional.

Nos capítulos anteriores discutimos os observáveis em cosmologia, como os diferentes tipos de distância, tais como: co-móvel, diâmetro angular e as distâncias de luminosidade. Além disso, definimos os volumes físico e matemático, bem como, a coordenada de tempo cosmológico. Todas essas quantidades foram derivadas a partir da métrica (4.14). O parâmetro de Hubble e todos esses observáveis, em um primeiro momento, foram representados como funções do fator de escala, mas como em qualquer instante diferente de  $t_0$  não conhecemos  $a(t)$ , reescrevemos as expressões em função do redshift  $z$  por meio da derivação de  $a = a(z)$ , (4.82).

Ao contrário do fator de escala o redshift de diferentes épocas pode ser medido. A partir desses dados pode-se conhecer o diâmetro, luminosidade e tempo de uma fonte de alto redshift do tamanho angular observado, fluxo e redshift.

Se somos capazes de obter o diâmetro, luminosidade etc. independentemente, então podemos usar esses números para restringir o espaço de parâmetros do modelo cosmológico como base em observações em que redshifts são medidos. Chamamos esses procedimentos de *testes cosmológicos* Mukhanov (2005).

Neste capítulo trataremos brevemente sobre observações mais utilizadas para vincular e restringir o espaço de parâmetros cosmológicos: Supernova do tipo Ia (SN Ia), Radiação Cósmica de Fundo (RCF) e Oscilações Acústicas de Bárions (BAO - baryon acoustic oscillations).

#### 5.3.1 Supernovas do Tipo Ia.

Em Astronomia "velas padrão" são objetos com perfil de brilho bem conhecido, usados para medir distâncias no Universo. Uma supernova do Tipo Ia é uma supernova, Branch & Wheeler (2017), que ocorre em sistemas binários (duas estrelas orbitando uma à outra) em que uma das estrelas é uma anã branca que explode após acretar matéria da outra estrela, que pode ser desde uma estrela gigante até uma anã branca ainda menor. As SN Ia são consideradas velas padrão confiáveis porque têm um brilho de pico consistente, podem ser vistas a grandes distâncias, têm características espectrais

distintas e desempenharam um papel fundamental na descoberta da expansão acelerada do universo Goldhaber & Perlmutter (1998).

Em última análise os dados observacionais produzidos pelas SIA constituem-se de ondas eletromagnéticas do qual o espectro visível, a luz, faz parte. A medida da intensidade da luz observada é obtida da quantidade chamada de magnitude. Em astronomia, tal grandeza é uma medida do brilho (fluxo que atinge a Terra) de um objeto, geralmente no espectro visível ou infravermelho. A escala é logarítmica e definida de tal forma que uma estrela de magnitude 1 é exatamente 100 vezes mais brilhante que uma estrela de magnitude 6. Assim, cada passo de uma magnitude é aproximadamente 2,52 vezes mais brilhante que a magnitude 1 maior. Quanto mais brilhante um objeto aparece, menor o valor de sua magnitude, com os objetos mais brilhantes atingindo valores negativos.

A magnitude possui duas definições diferentes: magnitude aparente e magnitude absoluta.

A magnitude aparente ( $m$ ) é o brilho de um objeto conforme ele aparece no céu noturno da Terra. A magnitude aparente depende da luminosidade intrínseca de um objeto, sua distância e a da absorção da radiação emitida ao longo do meio interestelar, extinção, que reduz seu brilho.

A magnitude absoluta ( $M$ ) descreve a luminosidade intrínseca emitida por um objeto e é definida como sendo igual à magnitude aparente que o objeto teria se fosse colocado a uma certa distância da Terra, 10 parsecs para estrelas.

As expressões matemáticas para a magnitude aparente e absoluta são:

Magnitude aparente:

$$m = -2.5 \log_{10}(F) + C$$

onde  $F$  é o fluxo de luz do objeto e  $C$  é uma constante.

Magnitude absoluta:

$$M = m - 5 \log_{10}(d) + 5$$

onde  $d$  é a distância ao objeto em parsecs. Então, meio das magnitudes absoluta  $M$  e da imposição de que  $d = d_L$

$$\mu = m - M = 5 (\log_{10} (d_L)) + 5. \quad (5.29)$$

Notemos que  $\mu$  depende da distância de luminosidade que, por seu turno, depende do modelo cosmológico empregado. As distâncias de luminosidades para  $K < 0$ ,  $K = 0$  e  $K > 0$  são dadas respectivamente pelas expressões que particularizam a métrica (4.14).

Para supernovas do Tipo Ia, a magnitude aparente  $m$  é observada, e a magnitude absoluta  $M$  é aproximadamente constante ( $M \approx -19.3$ ). A relação entre  $d_L$  e o redshift  $z$  é dada por:

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$$

onde  $c$  é a velocidade da luz,  $H_0$  é a constante de Hubble e  $E(z)$  é a função de densidade de energia, definida como:

$$E(z) = \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2}$$

A observação de supernovas do Tipo Ia permite determinar o parâmetro de Hubble  $H_0$ . Usando dados de supernovas, podemos ajustar a curva de  $d_L(z)$  e obter  $H_0$ . Por exemplo, observações do programa SH0ES (Supernovae and H0 for the Equation of State) indicam um valor de  $H_0 \approx 74$  km/s/Mpc, enquanto dados da CMB do satélite Planck sugerem  $H_0 \approx 67$  km/s/Mpc.

Para aumentar a precisão das medições de distância, várias correções são aplicadas:

1. **Correção K:** Ajusta a magnitude observada para compensar o efeito do redshift na distribuição espectral da luz da supernova Hogg et al. (2002).
2. **Correção de Extinção:** Compensa a absorção de luz pela poeira interestelar Holwerda et al. (2015).
3. **Correção de Estiramento:** Ajusta a magnitude absoluta da supernova com base na largura da curva de luz, uma vez que supernovas mais brilhantes tendem a ter curvas de luz mais largas Goldhaber et al. (2001).

A correção de estiramento é dada por:

$$M_{\text{corr}} = M - \alpha(s - 1)$$

onde  $s$  é o fator de estiramento e  $\alpha$  é um parâmetro ajustável.

Vamos considerar algumas supernovas do Tipo Ia observadas:

1. **SN1997ff**: Observada pelo Hubble Space Telescope com  $z = 1.7$  Riess et al. (2004). Calculando a distância de luminosidade:

$$d_L = 10^{\frac{26.4 - (-19.3)}{5} + 1} \approx 14 \text{ Gpc}$$

2. **SN2006gz**: Observada com  $z = 0.23$ ,  $m = 15.8$  Hicken et al. (2007). Calculando a distância de luminosidade:

$$d_L = 10^{\frac{15.8 - (-19.3)}{5} + 1} \approx 780 \text{ Mpc}$$

Supernovas do Tipo Ia são observadas por diversos surveys, como:

- **Sloan Digital Sky Survey (SDSS)**: Fornece um grande número de supernovas observadas em diferentes redshifts, permitindo o estudo da expansão do universo Lampeitl et al. (2010). - **Dark Energy Survey (DES)**: Foca na medição da aceleração da expansão do universo, utilizando supernovas como uma das principais ferramentas Vincenzi et al. (2024). - **Pan-STARRS1**: Realiza observações profundas e largas de supernovas, contribuindo para a precisão das medições de  $H_0$  Jones et al. (2018).

As medições de supernovas do Tipo Ia são usadas para validar e ajustar modelos cosmológicos. Comparando as distâncias de luminosidade observadas com as previsões teóricas, podemos ajustar parâmetros como  $H_0$ ,  $\Omega_m$ , e  $\Omega_\Lambda$ . Esses dados são cruciais para testar a consistência do modelo padrão  $\Lambda$ CDM e investigar possíveis discrepâncias, como a tensão de Hubble.

Podemos dizer que Supernovas do Tipo Ia são ferramentas essenciais na cosmologia observacional. As técnicas modernas de observação e correções permitem medir distâncias cosmológicas com alta precisão, fornecendo insights valiosos sobre a expansão do universo e ajudando a validar modelos teóricos. As discrepâncias observadas entre

diferentes métodos de medição destacam a importância contínua de refinamentos e novas observações para entender melhor a natureza do cosmos.

### 5.3.2 Radiação Cósmica de Fundo (CMB)

A radiação cósmica de fundo é uma radiação eletromagnética de espectro de corpo negro com temperatura de 2,725 K que preenche todo o Universo. É uma radiação isotrópica até uma parte em  $10^5$  e as variações de seu valor efetivo são somente  $18\mu K$ . Prevista inicialmente por G. Gamow em 1946, foi detectada pela primeira vez na década de 60 por A. Penzias e R. W. Wilson Gamow (1948). Dado o fato da RCF ter sido observada inúmeras vezes desde então, qualquer modelo cosmológico proposto deve ser capaz de prever tal quantidade, como o corre com um dos modelos mais empregados, o  $\Lambda$ CDM Weinberg & Steven (1972).

Segundo esse modelo, até um período chamado de *recombinação*, o Universo era composto de um plasma de fótons, elétrons e bárions, de alta temperatura. Durante esse período, essas partículas estavam em constante interação umas com as outras, o que significa que os fótons tinham um caminho livre médio muito curto - eles estavam constantemente sendo espalhados pelos elétrons via Efeito Compton. À medida que o Universo se expandia, ele também esfriava. Isso levou a uma diminuição na densidade do plasma, o que por sua vez aumentou o caminho livre médio dos fótons. No entanto, os fótons ainda estavam fortemente acoplados aos elétrons e não podiam se propagar livremente.

A situação mudou drasticamente na época da recombinação. Quando o universo tinha uma temperatura aproximada de  $3000K$  e 380000 anos de idade ( $z \sim 1088$ ), os elétrons e os bárions puderam se combinar para formar átomos neutros. Isso efetivamente removeu os elétrons livres, assim a ocorrência de espalhamentos Compton diminuiu drasticamente, o que permitiu a propagação livre pelo Universo de uma quantidade importante de fótons. Esta é a radiação cósmica de fundo que observamos hoje. Portanto, embora possa parecer que não houve muita mudança até a recombinação, a recombinação marcou uma transição fundamental na história do Universo.

Com relação à Terra, o local geométrico dos fótons que foram espalhados momentos antes do desacoplamento forma uma casca esférica conhecida como superfície de

último espalhamento. Em uma primeira aproximação, a espessura dessa casca pode ser considerada insignificante, fazendo com que ela se assemelhe a uma superfície esférica, conforme ilustrado na figura 4.1.

Desde então o processo de esfriamento dos fótons continua. Atualmente a temperatura da RCF é de 2,725 K com variações da ordem de  $10^{-5}$  k. Descontando essas minúsculas variações a proveniente de todas as direções é uniforme. As anisotropias são originadas devido a variações de densidade, velocidade e potencial gravitacional.

Se existiram pequenas variações no potencial gravitacional na última superfície de espalhamento, os fótons podem ter sido emitidos a partir de diferentes níveis de potencial e, conseqüentemente, sofrido diferentes perdas de energia de acordo com o local da emissão, processo conhecido como anisotropia primária.

Após propagar-se livremente, até a detecção por nós, a radiação sofre inúmeros outros processos físicos, que se reúnem sobre o nome de anisotropias secundárias.

As anisotropias contêm informações sobre a distribuição de matéria no Universo jovem. Logo, estão relacionadas as sementes das estruturas cosmológicas vistas no céu atual. Em outras palavras, a percepção que temos dessas estruturas é fruto de anisotropias na ordem de  $10^{-5}k$ .

Dada a dependência angular das anisotropias podemos separá-las em respeito as escalas angulares pequena ( $\theta < 10'$ ), intermediária ( $10' < \theta < 2^\circ$ ) e grande ( $\theta > 2^\circ$ ). Em cada uma dessas escalas há a predominância de diferentes processos físicos Weinberg (1972).

Para os primeiros picos do espectro de potência dessa radiação, oriundas da última superfície de espalhamento  $z_{ls} \approx 1090$ , temos que, o horizonte sonoro desses picos de radiação  $r_s(z_{ls})$  é dado por

$$r_s(z_{ls}) = \int_{1090}^{\infty} \frac{c_s}{H(z)} dz \quad (5.30)$$

onde  $c_s$  é a velocidade do som e  $H(z)$  o parâmetro de Hubble usual.

O horizonte sonoro, em termos simples, é a distância máxima que uma perturbação (como uma onda sonora) pode percorrer em um determinado período de tempo. No contexto da cosmologia, o horizonte sonoro é a distância máxima que uma onda sonora poderia ter viajado desde o início do universo até a época da última superfície de espalhamento.

Conhecendo o horizonte sonoro, e dadas as equações (5.23) e (5.24), pode-se definir a seguinte característica angular

$$\theta_A \equiv \frac{r_s(z_{ls})}{d_A^c(z_{ls})} \quad (5.31)$$

onde  $r_s(z_{ls})$  é a escala do horizonte sonoro na última superfície de espalhamento e  $d_A^c(z_{ls})$  é a distância angular comóvel dada por

$$d_A^c(z) = \frac{d_A(z)}{a} = (1+z)d_A(z) \quad (5.32)$$

A posição do primeiro pico do espectro de potência da radiação cósmica de fundo, representa a escala angular do horizonte sonoro no período da última superfície de espalhamento, pois quanto menor é a distância entre os pontos de emissão e detecção da radiação, menor é a anisotropia sofrida. Este pico é dado por

$$l_A = \frac{\pi}{\theta_A} = \pi \frac{d_A^{comov}(z_{ls})}{r_s(z_{ls})} \quad (5.33)$$

Os principais satélites e surveys que contribuíram para o estudo da CMB são:

- **COBE (Cosmic Background Explorer)**: Lançado em 1989, foi o primeiro satélite a detectar as anisotropias na CMB Mather et al. (1994).
- **WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)**: Lançado em 2001, forneceu um mapa detalhado da CMB, permitindo a determinação de parâmetros cosmológicos com maior precisão Bennett et al. (2013).

- **Planck:** Lançado pela Agência Espacial Europeia (ESA) em 2009, mediu a CMB com uma resolução e sensibilidade sem precedentes, fornecendo o mapa mais detalhado da CMB até hoje Collaboration (2020a).

Os dados da CMB são obtidos através de medições da intensidade e polarização da radiação em diferentes direções do céu. As principais técnicas incluem:

- **Mapeamento de Temperatura:** Medição das variações de temperatura da CMB, que fornecem informações sobre a densidade de matéria e as flutuações de densidade no universo primordial.
- **Polarização:** Medição dos modos E e B da polarização da CMB, que fornecem informações sobre a reionização e a física do universo primordial.

Os dados do satélite Planck forneceram valores precisos para os principais parâmetros cosmológicos. Alguns resultados importantes incluem:

- Idade do universo:  $13.8 \pm 0.02$  bilhões de anos
- Constante de Hubble:  $H_0 = 67.4 \pm 0.5$  km/s/Mpc
- Densidade de matéria:  $\Omega_m = 0.315 \pm 0.007$
- Densidade de energia escura:  $\Omega_\Lambda = 0.685 \pm 0.007$
- Índice espectral das perturbações primordiais:  $n_s = 0.965 \pm 0.004$

Os dados da CMB são usados para testar e ajustar modelos cosmológicos. Comparando as observações com as previsões teóricas, podemos ajustar parâmetros como  $H_0$ ,  $\Omega_m$ , e  $\Omega_\Lambda$ . O ajuste é feito minimizando a diferença entre os dados observacionais e as previsões do modelo  $\Lambda$ CDM.

Os picos no espectro de potência da CMB fornecem informações sobre a densidade de matéria bariônica ( $\Omega_b$ ) e a densidade de matéria escura ( $\Omega_c$ ):

$$\Omega_b h^2 = 0.0224 \pm 0.0001, \quad \Omega_c h^2 = 0.120 \pm 0.001$$

A constante de Hubble  $H_0$  é derivada das medições de anisotropias da CMB. A discrepância entre os valores obtidos pelo Planck ( $H_0 = 67.4 \text{ km/s/Mpc}$ ) e os obtidos por métodos baseados em supernovas ( $H_0 \approx 74 \text{ km/s/Mpc}$ ) é conhecida como a "tensão de Hubble."

O índice espectral das perturbações primordiais  $n_s$  fornece informações sobre as condições iniciais do universo e é consistentemente medido em  $n_s = 0.965 \pm 0.004$ , apoiando a teoria da inflação.

A Radiação Cósmica de Fundo (CMB) é uma ferramenta crucial para a cosmologia. As medições de satélites como o Planck fornecem dados precisos que permitem testar e refinar modelos cosmológicos. A comparação entre observações e previsões teóricas ajuda a ajustar parâmetros cosmológicos chave e a investigar possíveis novas físicas além do modelo padrão  $\Lambda$ CDM.

### 5.3.3 Oscilações Acústicas de Bárions (BAO)

Assim como a radiação cósmica de fundo, as Oscilações Acústicas de Bárions (BAO) são perturbações que originaram ondas sonoras no plasma relativístico do Universo primordial. Como discutido na seção anterior, em uma determinada fase de sua evolução, o Universo entrou no estágio de recombinação. Este estágio resultou em uma queda repentina na velocidade do som e interrompeu a propagação das ondas sonoras Mukhanov (2005); Weinberg (1972). Devido ao fato de que as frentes de ondas congeladas eram regiões de maior densidade de matéria, elas tinham uma maior probabilidade de formação de galáxias.

A matéria bariônica observada no Universo é proveniente do plasma primordial, de modo que, o espectro de potências representativo das flutuações de matéria (anisotropias) é a impressão das BAO. De acordo com o modelo cosmológico padrão, o período compreendido entre o início das perturbações e o fim das BAO, que marca a fase de recombinação, abriga uma série de máximos e mínimos dessas oscilações. Nesse ponto o estado de equilíbrio da matéria bariônica é instável, pois encontra-se em um pico de potencial. A matéria bariônica, quando apresenta uma dada escala de perturbações acaba sendo "arrastada" e acumulada nesses poços de potenciais de matéria escura, ocorrendo, assim, o término da propagação da onda. Esse fenômeno não ocorre imediatamente,

sendo realizado em um intervalo de aproximadamente  $\delta z \approx 70$  depois do período da última superfície da casca de espalhamento, ou seja, quando  $z_d \approx 1020$ . Este período é chamado de época de arraste.

A medida da variação da escala do horizonte sonoro co-móvel na época de arraste  $r_s(z_d)$  é um dado observacional proveniente das BAO, onde  $z_d$  é obtido por meio de ajuste numérico.

$$r_s(z_d) = \frac{c}{\sqrt{3}} \int_0^{1/(1+z_d)} \frac{da}{a^2 H(a) \sqrt{1 + (3\Omega_b/4\Omega_\gamma)a}} \approx 153,3 \pm 2,0 \text{ Mpc} \quad (5.34)$$

com a distância efetiva de cada pico de BAO, através de uma escala de dilatação

$$D_V(z) \equiv \left[ (1+z)^2 d_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3} \quad (5.35)$$

onde  $d_A$  é a distância diâmetro angular própria,  $c$  a velocidade da luz no vácuo e  $H(z)$  o parâmetro de Hubble usual, medido em função do redshift  $z$ . Notemos, que quando  $z$  tende a zero, a escala de dilatação (5.35) se reduz a Lei de Hubble. Ou seja, a menos que estejamos observando fenômenos cosmológicos com redshifts significativamente maiores do que 0 não notaremos os efeitos característicos desses fenômenos. As BAO são diretamente relacionadas às anisotropias observadas na CMB. As ondas sonoras que criaram os picos acústicos na CMB também criaram um padrão de agrupamento nas galáxias, visível em grandes levantamentos galácticos. O horizonte sonoro, a distância que uma onda sonora pode percorrer antes da recombinação, é uma medida crucial tanto para a CMB quanto para as BAO.

$$r_s(z_*) = \int_{z_*}^{\infty} \frac{c_s dz}{H(z)}$$

onde  $c_s$  é a velocidade do som no plasma primordial e  $z_*$  é o redshift de recombinação ( $z_* \approx 1090$ ).

Os principais surveys que contribuíram para a detecção das BAO incluem:

- **Sloan Digital Sky Survey (SDSS):** Forneceu dados detalhados sobre a distribuição de galáxias, permitindo a detecção das BAO.
- **Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS):** Parte do SDSS, mediu as BAO em um volume maior e com maior precisão Anderson et al. (2012).
- **Dark Energy Survey (DES):** Observou a distribuição de galáxias para mapear as BAO e estudar a energia escura Rosell et al. (2021).

As técnicas para detectar e medir as BAO incluem:

- **Mapeamento de Galáxias:** Observação da distribuição espacial de milhões de galáxias para identificar padrões de BAO.
- **Lentes Gravitacionais:** Medição da distribuição de matéria escura através do efeito de lente gravitacional, que também revela padrões de BAO.

Com os atuais resultados das oscilações as mediadas de distâncias estão mais precisas, e os valores dos parâmetros cosmológicos possíveis mais restritos. Alguns resultados importantes incluem:

- Distância até o redshift  $z = 0.35$ :  $D_V(0.35) = 1370 \pm 14$  Mpc
- Distância até o redshift  $z = 0.57$ :  $D_V(0.57) = 2056 \pm 20$  Mpc

Tais observações são usadas para testar e ajustar modelos cosmológicos. Comparando as observações com as previsões teóricas, podemos ajustar parâmetros como  $H_0$ ,  $\Omega_m$ , e  $\Omega_\Lambda$ . O ajuste é feito minimizando a diferença entre os dados observacionais e as previsões do modelo  $\Lambda$ CDM.

A medida da escala de dilatação fornece informações sobre a expansão do universo:

$$D_V(z) = \left[ (1+z)^2 d_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}$$

As medições de  $D_V(z)$  em diferentes redshifts permitem traçar a história da expansão do universo.

As medições das BAO ajudam a determinar a densidade de matéria ( $\Omega_m$ ) e a densidade de energia escura ( $\Omega_\Lambda$ ). Por exemplo, os dados do BOSS indicam:

$$\Omega_m = 0.31 \pm 0.01, \quad \Omega_\Lambda = 0.69 \pm 0.01.$$

Também são usadas para determinar a constante de Hubble  $H_0$ . Comparando os dados de BAO com os obtidos pela CMB, podemos verificar a consistência dos modelos cosmológicos e investigar a "tensão de Hubble."

$$H_0 = 67.6 \pm 0.5 \text{ km/s/Mpc (Planck + BAO)}$$

As Oscilações Acústicas de Bárions (BAO) fornecem uma régua cósmica que é essencial para medir a expansão do universo. As técnicas modernas de observação, como o mapeamento de galáxias, permitem detectar as BAO com alta precisão. A relação das BAO com a Radiação Cósmica de Fundo (CMB) fortalece a consistência do modelo padrão  $\Lambda$ CDM e ajuda a ajustar parâmetros cosmológicos chave. Comparações entre os dados das BAO e da CMB são fundamentais para investigar possíveis novas físicas além do modelo padrão.

#### 5.3.4 Dados Cosmológicos Atuais e Futuros.

A determinação precisa dos parâmetros cosmológicos é essencial para a compreensão da evolução do universo. As observações da radiação cósmica de fundo (CMB), particularmente as medições de alta precisão da anisotropia, têm desempenhado um papel crucial nesse processo. O satélite Planck, por exemplo, é uma das principais fontes de dados, oferecendo medições detalhadas da temperatura e polarização da CMB, superando seus predecessores, como o WMAP Collaboration (2020a,b); Bennett et al. (2013); Hinshaw et al. (2013). Essas observações permitiram determinar muitos dos parâmetros cosmológicos com uma precisão sem precedentes.

Para descrever a dinâmica do universo, utilizam-se diversas equações fundamentais. A Equação de Friedmann (4.70), por exemplo, integra os parâmetros de densidade das diferentes constituintes do Universo, como bárions, fótons, neutrinos, matéria escura e a constante cosmológica Kolb & Turner (1990). Pois, como mostrado, relaciona esses

parâmetros de densidade ( $\Omega_i$  para cada espécie e  $\Omega_\Lambda$  para a constante cosmológica) com a curvatura espacial  $k$ , o fator de escala  $a$  e o parâmetro de Hubble  $H$ .

O parâmetro de Hubble hoje,  $H_0$ , é frequentemente normalizada na forma  $h$ , onde  $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Esta normalização é útil porque  $h$  é uma quantidade adimensional que facilita comparações entre diferentes estudos e modelos cosmológicos (Hubble (1929)). A utilização de  $h$  também ajuda a separar a medição da constante de Hubble das incertezas associadas às unidades de medida astronômicas, permitindo uma análise mais clara e direta dos dados cosmológicos.

Outro aspecto crucial é a caracterização das perturbações da curvatura, expressa pela fórmula

$$\Delta_R^2(k) = \Delta_R^2(k_*) \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1}$$

onde  $\Delta_R^2(k)$  representa o espectro de potência adimensional dessas perturbações, com  $k$  sendo o número de onda e  $n_s$  o índice espectral Liddle & Lyth (1992). Para descrever a evolução do campo inflaton, durante a inflação, utilizam-se os parâmetros de slow-roll  $\epsilon$  e  $\eta$ , definidos como

$$\epsilon = \frac{m_{\text{Pl}}^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2$$

e

$$\eta = \frac{m_{\text{Pl}}^2}{8\pi} \frac{V''}{V}$$

onde  $V$  é o potencial do campo inflaton Lyth & Liddle (2009).

O parâmetro de densidade dos neutrinos, dado por

$$\Omega_\nu h^2 = \frac{\sum m_\nu}{93.12 \text{ eV}}$$

é essencial para entender a influência dessas partículas na formação de estruturas no universo. O valor 93.12 eV provém da relação entre a densidade de energia dos neutrinos e suas massas Lesgourgues & Pastor (2006). Este valor é derivado considerando que os neutrinos são partículas relativísticas no universo primitivo e que sua densidade de energia depende diretamente da soma de suas massas. Assim, a constante 93.12 eV é uma conversão padrão que permite relacionar a soma das massas dos neutrinos à densidade de energia crítica do universo.

Essas fórmulas e parâmetros são fundamentais para a compreensão teórica das perturbações que levam à formação das estruturas no universo. As ferramentas computacionais, como o CAMB (Code for Anisotropies in the Microwave Background) e o CLASS (Cosmic Linear Anisotropy Solving System), são amplamente utilizadas para calcular o espectro de potência das anisotropias da CMB Lewis (????); Lesgourgues (2011); Lewis et al. (2000); Blas et al. (2011). Essas ferramentas, juntamente com pacotes de análise estatística como o CosmoMC, permitem a modelagem precisa das perturbações cosmológicas Lewis & Bridle (2002).

O futuro das observações da CMB promete avanços ainda mais significativos. A próxima fronteira é o estudo detalhado da polarização, especialmente a detecção das anisotropias do modo B primordial, que são assinaturas de ondas gravitacionais geradas durante a inflação. Projetos como o Simons Observatory e o LiteBIRD estão na vanguarda dessa pesquisa, buscando melhorar nossa compreensão do universo primordial Collaboration (2019b,a).

Além das medições da radiação cósmica de fundo (CMB), a exploração da linha de 21 cm do hidrogênio redshiftado emergiu como uma técnica promissora para sondar o universo primitivo e a estrutura em larga escala. A linha de 21 cm refere-se à emissão de rádio de átomos de hidrogênio neutro, e sua observação permite estudar o período da reionização, quando as primeiras estrelas e galáxias ionizaram o hidrogênio neutro no universo Pritchard & Loeb (2012).

Atualmente, instrumentos como o Low-Frequency Array (LOFAR) e o Canadian Hydrogen Intensity Mapping Experiment (CHIME) estão na vanguarda da exploração da linha de 21 cm. O LOFAR, uma rede de radiotelescópios de baixa frequência na Europa, e o CHIME, um radiotelescópio no Canadá, focam em mapear a distribuição de hidrogênio neutro em grande escala ao longo do tempo cósmico van Haarlem et al. (2013); Bandura et al. (2014).

Esses instrumentos permitem estudar o universo em diferentes épocas, desde o período da reionização até épocas mais recentes. A técnica de mapeamento de intensidade do hidrogênio usa a emissão da linha de 21 cm para medir a distribuição em larga escala do hidrogênio neutro, proporcionando um traçador direto da matéria e da estrutura do universo. Isso é particularmente útil para estudar oscilações acústicas bariônicas (BAOs) e a estrutura da rede cósmica.

As oscilações acústicas bariônicas (BAOs) são oscilações na distribuição da matéria causadas por ondas sonoras no plasma quente do universo primordial. Essas oscilações fornecem uma "régua cósmica" para medir a expansão do universo.

No futuro, o Square Kilometre Array (SKA) promete levar esses estudos a um novo patamar. O SKA será o maior radiotelescópio do mundo, com uma área coletora de um quilômetro quadrado, permitindo uma sensibilidade e resolução sem precedentes. Com o SKA, será possível mapear a linha de 21 cm com uma precisão extremamente alta, desde a época da reionização até a formação das primeiras estruturas galácticas Braun et al. (2015).

O SKA permitirá estudos detalhados das BAOs, e a precisão nas medições das BAOs com o SKA ajudará a melhorar significativamente as estimativas dos parâmetros cosmológicos, como a densidade de matéria escura e a constante de Hubble.

Os dados coletados por esses instrumentos são fundamentais para a estimativa precisa dos parâmetros cosmológicos. As medições da linha de 21 cm complementam os dados da CMB, proporcionando uma visão mais abrangente do universo. Enquanto a CMB nos dá uma imagem do universo quando ele tinha cerca de 380.000 anos, a linha de 21 cm nos permite estudar períodos posteriores, especialmente durante a reionização e a formação das primeiras estruturas.

Essas observações ajudam a entender melhor a distribuição de matéria escura, a formação de galáxias e a evolução da estrutura cósmica. Além disso, a combinação dos dados da linha de 21 cm com outros observáveis, como as BAOs e o efeito de lente gravitacional fraca, permite restringir o espaço de parâmetros dos modelos cosmológicos de forma mais robusta et al. (Particle Data Group).

As fontes de dados que fundamentam essas pesquisas incluem não apenas o satélite Planck, mas também uma variedade de observatórios terrestres e espaciais. Para CMB, temos observatórios como o COBE (Cosmic Background Explorer), WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), Planck satellite e o ACT (Atacama Cosmology Telescope) Collaboration (2020a,b); Bennett et al. (2013); Hinshaw et al. (2013); Collaboration (2019b,a); Group (2023). Para supernovas, podemos mencionar SDSS (Sloan Digital Sky Survey), SNLS (SuperNova Legacy Survey), DES (Dark Energy Survey), PanSTARRS (Panoramic Survey Telescope and Rapid Response System) e o futuro Vera

Rubin Observatory Group (2023). Para BAO, temos BOSS (Baryon Oscillation Spectroscopic Survey), eBOSS (Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey), DESI (Dark Energy Spectroscopic Instrument), LSST e Euclid Eisenstein et al. (2005); Group (2023).

Essa confluência de observações permitirá um avanço contínuo na precisão dos parâmetros cosmológicos, proporcionando uma visão mais clara e detalhada da evolução do universo. A complementaridade entre diferentes tipos de dados observacionais é crucial para resolver questões sobre a composição, estrutura e evolução cosmológica.

## Capítulo 6

# Conclusão

Após explorar alguns dos principais conceitos da geometria diferencial e da cosmologia, pudemos ver como forma-se uma clara percepção da profunda interconexão entre os fundamentos matemáticos e as teorias físicas que dão forma à nossa compreensão do universo.

Mostramos, inicialmente, a geometria diferencial, como disciplina matemática, desempenhando um papel fundamental na descrição da estrutura do espaço-tempo. Desde as variedades diferenciais até o cálculo sobre essas estruturas, incluindo vetores, formas diferenciais e tensores, e como cada um desses conceitos contribuem para examinar as leis que regem a realidade física.

Vimos que a relatividade especial, com sua dilatação temporal e contração espacial, redefiniu nossa percepção do tempo e do espaço em contextos de altas velocidades e campos gravitacionais intensos. Já a relatividade geral transcendeu os limites da relatividade especial, apresentando a gravidade não como uma força, mas sim como uma curvatura do espaço-tempo. As equações de Einstein e os modelos cosmológicos baseados na métrica pseudo-Riemanniana de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) nos levaram a uma exploração profunda das origens e do destino do universo, por meio de extrapolações na escala de tempo.

Os modelos cosmológicos não apenas teorizam sobre o cosmos, mas também nos ajudam a compreender a natureza e a distribuição da matéria e da energia em escalas cósmicas. A inclusão da constante cosmológica  $\Lambda$  e a compreensão dos parâmetros

cosmológicos, como densidade e desaceleração do universo, são cruciais para entender a dinâmica evolutiva do cosmos.

Em paralelo, a cosmologia observacional nos conecta diretamente às estrelas e galáxias, fornecendo evidências tangíveis para nossos modelos teóricos. Ferramentas como supernovas do Tipo Ia, radiação cósmica de fundo e oscilações acústicas de bárions permitem-nos mapear o universo em suas escalas mais vastas e compreender sua estrutura em larga escala.

É importante ressaltar que a compreensão da distância no universo varia dependendo do contexto. A distância de luminosidade é crucial para estimar as distâncias de objetos astronômicos distantes, enquanto a distância de diâmetro angular fornece informações sobre o tamanho angular de objetos celestes. A lei de Hubble, tanto a geométrica quanto a observável, nos oferece insights valiosos sobre a expansão do universo e a relação entre distância e redshift.

Em última análise, a jornada desde a geometria diferencial até a cosmologia observacional nos permite apreciar não apenas a complexidade dos temas abordados, mas também a beleza intrínseca e a elegância das teorias que permeiam nossa compreensão do cosmos. Esta interdisciplinaridade entre matemática pura e física aplicada nos oferece uma visão mais profunda e abrangente do cosmos, destacando a harmonia entre os princípios abstratos e as observações concretas do Universo.

# Referências Bibliográficas

- Aghanim, N., et al. 2020, *Astron. Astrophys.*, 641, A6, doi: 10.1051/0004-6361/201833910
- Anderson, L., Aubourg, E., Bailey, S., et al. 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427, 3435, doi: 10.1111/j.1365-2966.2012.22066.x
- Bandura, K., et al. 2014, *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, 9145, 22, doi: 10.1117/12.2054950
- Bennett, C. L., Larson, D., Weiland, J. L., et al. 2013, *ApJS*, 208, 20, doi: 10.1088/0067-0049/208/2/20
- Bennett, C. L., et al. 2013, *Astrophysical Journal Supplement Series*, 208, 20, doi: 10.1088/0067-0049/208/2/20
- Blas, D., Lesgourgues, J., & Tram, T. 2011, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011, 034, doi: 10.1088/1475-7516/2011/07/034
- Boyce, W., DiPrima, R., & Meade, D. 2017, *Boyce's Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (Wiley)*. <https://books.google.com.br/books?id=pi1EDwAAQBAJ>
- Branch, D., & Wheeler, J. C. 2017, *Supernova Explosions*, doi: 10.1007/978-3-662-55054-0
- Braun, R., et al. 2015, *Square Kilometre Array Organisation*, 1. [https://www.skatelescope.org/wp-content/uploads/2014/03/SKA-TEL-SKO-DD-001-1\\_BaselineDesign1.pdf](https://www.skatelescope.org/wp-content/uploads/2014/03/SKA-TEL-SKO-DD-001-1_BaselineDesign1.pdf)

- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., & Laloë, F. 2019, *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications* (Wiley). [https://books.google.com.br/books?id=tVI\\_EAAAQBAJ](https://books.google.com.br/books?id=tVI_EAAAQBAJ)
- Collaboration, L. 2019a, *Journal of Low Temperature Physics*, 194, 443, doi: 10.1007/s10909-019-02150-5
- Collaboration, P. 2020a, *Astronomy & Astrophysics*, 641, A1, doi: 10.1051/0004-6361/201833880
- Collaboration, P. 2020b, *Astronomy & Astrophysics*, 641, A6, doi: 10.1051/0004-6361/201833910
- Collaboration, T. S. O. 2019b, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019, 056, doi: 10.1088/1475-7516/2019/02/056
- de Souza Oliveira Filho, K., & de Souza Oliveira Filho, K. 2000, *Astronomia e astrofísica* (Ed. Universidade/UFRGS). <https://books.google.com.br/books?id=1fVwPwAACAAJ>
- do Carmo, M. 1988, *Geometria riemanniana, Projeto Euclides* (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). <https://books.google.com.br/books?id=J3wDSAAACAAJ>
- Einstein, A. 1916
- Einstein, A. 1952, *Relativity: The Special and General Theory* (Routledge)
- Eisenstein, D. J., et al. 2005, *Astrophysical Journal*, 633, 560, doi: 10.1086/466512
- et al. (Particle Data Group), S. N. 2024, *Phys. Rev. D*, 110. <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.110.030001>
- Farnes, J. S. 2018, *Astronomy & Astrophysics*, 620, A92, doi: 10.1051/0004-6361/201832898
- Gamow, G. 1948, *Physical Review*, 74, 505, doi: 10.1103/PhysRev.74.505.2
- Goldhaber, G., & Perlmutter, S. 1998, *Phys. Rep.*, 307, 325, doi: 10.1016/S0370-1573(98)00091-X
- Goldhaber, G., Groom, D. E., Kim, A., et al. 2001, *ApJ*, 558, 359, doi: 10.1086/322460

- Group, P. D. 2023, Review of Particle Physics. <https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/rpp2023-rev-cosmic-microwave-background.pdf>
- Harrison, E. 2000, *Cosmology: The Science of the Universe* (Cambridge University Press). <https://books.google.com.br/books?id=wzpKc3bZqDoC>
- Hicken, M., Garnavich, P. M., Prieto, J. L., et al. 2007, *ApJ*, 669, L17, doi: 10.1086/523301
- Hinshaw, G., et al. 2013, *Astrophysical Journal Supplement Series*, 208, 19, doi: 10.1088/0067-0049/208/2/19
- Hogg, D. W., Baldry, I. K., Blanton, M. R., & Eisenstein, D. J. 2002, arXiv e-prints, astro, doi: 10.48550/arXiv.astro-ph/0210394
- Holwerda, B. W., Reynolds, A., Smith, M., & Kraan-Korteweg, R. C. 2015, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446, 3768, doi: 10.1093/mnras/stu2345
- Hubble, E. 1929, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15, 168, doi: 10.1073/pnas.15.3.168
- Isham, C. 1999, *Modern Differential Geometry for Physicists*, World Scientific lecture notes in physics (World Scientific). <https://books.google.com.br/books?id=W31srjUZen8C>
- Jackson, J. D. 1999, *Classical electrodynamics*, 3rd edn. (New York, NY: Wiley). <http://cdsweb.cern.ch/record/490457>
- Jones, D. O., Scolnic, D. M., Riess, A. G., et al. 2018, *ApJ*, 857, 51, doi: 10.3847/1538-4357/aab6b1
- Kamionkowski, M., & Riess, A. G. 2022, 1. <https://arxiv.org/abs/2211.04492>
- Kolb, E. W., & Turner, M. S. 1990, *The Early Universe* (Redwood City: Addison-Wesley)
- Lampeitl, H., Nichol, R. C., Seo, H.-J., et al. 2010, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 401, 2331, doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15851.x
- Lesgourgues, J. 2011, arXiv e-prints, arXiv:1104.2932, doi: 10.48550/arXiv.1104.2932

- Lesgourgues, J., & Pastor, S. 2006, *Physics Reports*, 429, 307, doi: 10.1016/j.physrep.2006.04.001
- Lewis, A. ????
- Lewis, A., & Bridle, S. 2002, *Physical Review D*, 66, 103511, doi: 10.1103/PhysRevD.66.103511
- Lewis, A., Challinor, A., & Lasenby, A. 2000, *Astrophysical Journal*, 538, 473, doi: 10.1086/309179
- Liddle, A. R., & Lyth, D. H. 1992, *Physics Letters B*, 291, 391, doi: 10.1016/0370-2693(92)91393-G
- Lima, E. 1973, *Variedades diferenciáveis*, Monografias de matemática (Impa). <https://books.google.com.br/books?id=yi7vAAAAAMAAJ>
- Lyth, D. H., & Liddle, A. R. 2009, *The Primordial Density Perturbation* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Mather, J. C., Cheng, E. S., Cottingham, D. A., et al. 1994, *ApJ*, 420, 439, doi: 10.1086/173574
- Medeiros, L., Psaltis, D., Lauer, T. R., & Özel, F. 2023, *The Astrophysical Journal Letters*, 947, L7, doi: 10.3847/2041-8213/acc32d
- Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. 1973, *Gravitation*, ed. Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A.
- Mukhanov, V. 2005, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press), doi: 10.1017/CB09780511790553
- Nakahara, M. 1990, *Geometry, topology and physics*, Graduate student series in physics (Bristol: Hilger). <https://cds.cern.ch/record/206619>
- Nash, C., & Sen, S. 1988, *Topology and Geometry for Physicists* (Elsevier Science). <https://books.google.bi/books?id=nnnNCgAAQBAJ>
- Pritchard, J., & Loeb, A. 2012, *Reports on Progress in Physics*, 75, 086901, doi: 10.1088/0034-4885/75/8/086901
- Riess, A. G., Strolger, L.-G., Tonry, J., et al. 2004, *ApJ*, 607, 665, doi: 10.1086/383612

- Riess, A. G., Yuan, W., Macri, L. M., et al. 2022, *The Astrophysical Journal Letters*, 934, L7, doi: 10.3847/2041-8213/ac5c5b
- Rosell, A. C., Rodriguez-Monroy, M., Croce, M., et al. 2021, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 509, 778, doi: 10.1093/mnras/stab2995
- Ryden, B. 1970, *Introduction to cosmology* (Cambridge University Press), doi: 10.1017/9781316651087
- Sakurai, J., & Napolitano, J. 2011, *Modern Quantum Mechanics*, 3rd ed. (Addison-Wesley). <https://books.google.com.br/books?id=N4I-AQAACAAJ>
- Sauer, T. 2014, *Marcel Grossmann and his contribution to the general theory of relativity*. <https://arxiv.org/abs/1312.4068>
- Singer, C. 1941, *A Short History of Science to the Nineteenth Century* (Clarendon Press). <https://books.google.com.br/books?id=mPIgAAAAMAAJ>
- Spivak, M. 1999, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry No. v. 1 (Publish or Perish, Incorporated). <https://books.google.com.br/books?id=ahSWQgAACAAJ>
- van Haarlem, M. P., et al. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 556, A2, doi: 10.1051/0004-6361/201220873
- Vincenzi, M., Brout, D., Armstrong, P., et al. 2024, arXiv e-prints, arXiv:2401.02945, doi: 10.48550/arXiv.2401.02945
- Wald, R. M. 1984, *General Relativity* (The University of Chicago Press)
- Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (New York, NY: Wiley). <https://cds.cern.ch/record/100595>
- Weinberg, S., & Steven, W. 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. <https://books.google.com.br/books?id=XLbvAAAAMAAJ>
- Weinstein, G. 2013, *George Gamow and Albert Einstein: Did Einstein say the cosmological constant was the "biggest blunder" he ever made in his life?* <https://arxiv.org/abs/1310.1033>

Zangwill, A. 2013, *Modern electrodynamics* (Cambridge: Cambridge University Press)