



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Observatório do Valongo



Estudo de soluções não-triviais para Teorias $f(R)$ de
gravitação

Alexandre Sampaio da Cruz

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2021

Estudo de soluções não-triviais para Teorias $f(R)$ de gravitação

Alexandre Sampaio da Cruz

Trabalho de conclusão de curso/Projeto final submetido ao Curso de Graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Astrônomo.

Orientador: Sérgio E. Jorás

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2021

CIP - Catalogação na Publicação

d957e da Cruz, Alexandre Sampaio
Estudo de soluções não-triviais para Teorias $f(R)$
de gravitação / Alexandre Sampaio da Cruz. -- Rio de
Janeiro, 2021.
49 f.

Orientador: Sérgio E. Jorás.
Trabalho de conclusão de curso (graduação) -
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Observatório
do Valongo, Bacharel em Astronomia, 2021.

1. Cosmologia. 2. Teorias Modificadas de
Gravitação. 3. Teorias $f(R)$. 4. Energia Escura. I.
Jorás, Sérgio E., orient. II. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CCMN - OBSERVATÓRIO DO VALONGO
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA



PROJETO FINAL

RELATÓRIO DA COMISSÃO JULGADORA

ALUNA: Alexandre Sampaio da Cruz (DRE 116054181)

TÍTULO DO TRABALHO: “ESTUDO DE SOLUÇÕES NÃO-TRIVIAIS PARA TEORIAS $F(R)$ DE GRAVITAÇÃO”

DATA DA DEFESA: 09 de junho de 2021 às 15:00 h

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Alexandre Lyra de Oliveira – Presidente - (OV/UFRJ)

Prof. Sérgio Eduardo de Carvalho Eyer Jorás – Orientador - (IF/UFRJ)

Prof. Ioav Waga – (IF/UFRJ)

CANDIDATO:

Alexandre Sampaio da Cruz

Rio de Janeiro, 09 de junho de 2021.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que de alguma maneira colaboraram em minha jornada acadêmica até aqui. Agradeço aos meus familiares, pelo apoio incondicional. Em especial, agradeço ao meu tio José Egídio, que faleceu pouco antes do meu ingresso no curso. Agradeço à Aline, João, Rayssa, Larissa, Yuri, Ellen e tantos outros grandes amigos que fiz no Observatório do Valongo, no Instituto de Física e demais ambientes da UFRJ. Por fim, agradeço ao meu orientador, Sérgio, e à minha colega de iniciação científica, Cristiane.

Resumo

Estudo de soluções não-triviais para Teorias $f(R)$ de gravitação

Alexandre Sampaio da Cruz

Orientador: Sérgio E. Jorás

Resumo do Trabalho de conclusão de curso/Projeto final submetido ao Curso de Graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Astrônomo.

Apesar de estar em grande acordo com as observações, o modelo padrão da cosmologia (Λ CDM) sofre de dificuldades teóricas quanto à origem física da componente de Constante Cosmológica (Λ) introduzida para descrever a expansão acelerada tardia. Surge como alternativa, a busca por uma teoria modificada de gravitação, que reproduza a expansão acelerada observada sem a necessidade de acrescentar componentes físicas desconhecidas. Dentre as diferentes teorias de gravitação modificada existentes, as teorias $f(R)$ se apresentam como uma das mais simples modificações a serem feitas à Relatividade Geral (RG). Para cada teoria $f(R)$, a Lagrangeana da RG, dada pelo escalar de Ricci (R), é generalizada por uma função não-linear $f(R)$. Em geral, exige-se que tal função se comporte como $f(R) \rightarrow R$ nos regimes de alta curvatura para que seja recuperado o comportamento de Relatividade Geral no universo primordial. De fato, na RG, há um vínculo algébrico entre R e a densidade do universo, porém, em teorias $f(R)$, esse vínculo é substituído por uma equação diferencial para R , na qual a densidade aparece como um termo de fonte. Assim, no universo primordial, a densidade é alta, mas o mesmo não é necessário para R como em RG. Neste trabalho, procuramos soluções não-triviais para as equações de campo modificadas, para as quais R tenha comportamento distinto daquele previsto pela RG.

Palavras chave: Teorias modificadas de gravitação, cosmologia, energia escura, teorias $f(R)$.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2021

Abstract

Study of non-trivial solutions for $f(R)$ theories of gravity

Alexandre Sampaio da Cruz

Orientador: Sérgio E. Jorás

Abstract do Trabalho de conclusão de curso/Projeto final submetido ao Curso de Graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Astrônomo.

Although in good agreement with the observational data, the standard model of cosmology (Λ CDM) suffers from theoretical difficulties related to the physical origin of the Cosmological Constant (Λ). In this context, many attempts to modify General Relativity (GR) in order to describe the late accelerated expansion without the need to introduce a new physical component of unknown origin have been made. The $f(R)$ theories of gravity are one of the most simple modifications one can make to the equations of General Relativity. For each $f(R)$ theory, the lagrangian density of GR, given by the Ricci Scalar (R), is generalized by a non-linear function $f(R)$. In general, it is required that $f(R) \rightarrow R$ in the high curvature regime in order to recover the GR equations in the early universe. In GR, the trace of Einstein's Equations constrain R as being proportional to the density of the universe. However, in $f(R)$ the trace of the modified equations yield differential relation between R and the density. In this sense, it is not necessary to assume that R increases as the density increases to the past. In this work, we search for non-trivial solutions for the modified field equations, for which R behaves differently than predicted by GR.

Key-words: Modified gravity, cosmology, dark energy, $f(R)$ theories.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2021

Lista de Figuras

2.1	Evolução os Parâmetros de Densidade em Λ CDM com respeito ao logaritmo do fator de escala. Ω_m em azul com tracejado longo, Ω_r em laranja com linha contínua e espessa, Ω_Λ em lina preta e menos espessa e w_{eff} em roxo com tracejado curto.	21
2.2	Evolução de R, H com respeito a $\log a$ em unidades de H_0 em Λ CDM . . .	21
3.1	Solução da equação de movimento do oscilador harmônico perturbado com condição inicial $x(0) = 1$ para diferentes valores do parâmetro ϵ	28
4.1	Parte real de λ_- em função de m	33
4.2	Parte real de λ_+ em função de m	33
4.3	Gráfico esquemático de dois comportamentos distintos da função $r(R)$. O caso onde $r(R) \rightarrow -1$ para $R \rightarrow \infty$ (painel esquerdo) corresponde a um comportamento similar à RG. Isto é, a era de dominação da matéria corresponde ao regime de altas curvaturas (altos valores de R).	36
4.4	m e m' em função de n para $f(R) = R + \alpha R^{-n}$. Em fundo colorido, as diferentes regiões estáveis possíveis para existência de um ponto do tipo P_6 . Para esse modelo, P_{6b} pode existir em três regiões distintas dependendo do valor de n	39
4.5	O comportamento da função $r(R)$. Para $n < -1$, $r \rightarrow -1$ ocorre para $R \rightarrow 0$, enquanto para $n > -1$ ocorre para quando $R \rightarrow \pm\infty$. O comportamento das curvas depende do sinal de α . A escolha do módulo de α influencia apenas na escala no eixo horizontal. Por simplicidade, aqui $ \alpha = 1$. Na análise, não são considerados os casos que $R < 0$	40
4.6	Curva $m(r)$ para $n = -0.9$. Em vermelho, o ponto P_{5a} referente a era de dominação da matéria. Em preto o ponto P_1	40
4.7	Evolução das densidades cosmológicas para $n = -0.9$ com condições iniciais $R = 10^{20}\alpha^9, H = 5 \times 10^{11}\alpha^{4.5}$	40
4.8	Curva $m(r)$ para $n = 2$. Em vermelho, o ponto P_{5a} referente a era de dominação da matéria. Em preto, o ponto P_{6b} . Esses pontos não podem ser conectados continuamente pela curva $m(r)$	41
4.9	Evolução das densidades cosmológicas para $n = 2$ com condições iniciais $R = 10^{-3}\alpha^{1/3}, H = 4 \times 10^7\alpha^{1/6}$. O sistema passa por uma “falsa era de dominação da matéria” antes de ir para o atrator acelerado P_{6b}	41
4.10	Evolução de R em unidades de α^{-1} para $n = -2$. Percebe-se que R cresce durante a evolução cosmológica ao contrário do que se espera em RG. . .	41
4.11	Evolução das densidades cosmológicas para $n = -2$ com condições iniciais $R = 10^{-3}\alpha^{-1}, H = 6 \times 10^{10}\alpha^{-1/2}$	41
4.12	Gráfico da função $r(R)$ para $f(R) = \alpha R \exp R$. Esse modelo possui o comportamento $r(R = 0) = -1$	42

4.13	Curva $m(r)$ para o modelo $f(R) = \alpha R \exp R$. Em vermelho, o ponto P_{5a} referente a era de dominação da matéria.	42
4.14	Comportamento da função $r(R)$ para $f(R) = \alpha R e^{qR^n}$ com $n < 0$	44
4.15	Comportamento da função $r(R)$ para $f(R) = \alpha R e^{qR^n}$ com $n > 0$	44
4.16	Evolução cosmológica para $f(R) = R \exp(qR^n)$ com $n = -0.2$	45
4.17	Evolução cosmológica para $f(R) = R \exp(qR^n)$ com $n = -0.4$	45

Definições e Fórmulas

1. Velocidade da Luz no Vácuo: $c = 1$
2. Constante Gravitacional: G
3. $\kappa = 8\pi G$
4. Tensor Métrico: $g_{\mu\nu}$
5. Assinatura da métrica: $(-, +, +, +)$
6. Derivada Parcial: $\partial_\mu f = f_{,\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$
7. Símbolos de Christoffel: $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda})$
8. Derivada Covariante: $\nabla_\lambda T^\mu{}_\nu = \partial_\lambda T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} T^\kappa{}_\nu - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} T^\mu{}_\kappa$
9. Tensor de Riemann: $R^\lambda{}_{\mu\kappa\nu}$
10. Tensor de Ricci: $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$
11. Escalar de Ricci ou Escalar de Curvatura: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$
12. Parâmetro de Hubble: $H = \frac{\dot{a}}{a}$

Sumário

1	Introdução	12
2	O Modelo Padrão ΛCDM	14
2.1	Equações de Campo	14
2.2	Dinâmica Cosmológica	17
2.2.1	Tensor Energia-Momento	18
2.3	Limitações do Modelo Λ CDM	22
3	Teorias $f(R)$	23
3.1	Equações de Campo Generalizadas	23
3.2	Dinâmica Cosmológica em $f(R)$	25
3.3	Considerações sobre a escolha de $f(R)$	27
4	Sistema de Equações e Evolução Numérica	29
4.1	Análise de Pontos Fixos	30
4.1.1	Era de Dominação da Radiação	32
4.1.2	Era de Dominação da Matéria	32
4.1.3	Era de Expansão Acelerada	34
4.2	Mapeamento das Condições Iniciais	35
4.3	Estudo de Casos Específicos	36
4.3.1	Casos Anteriormente Conhecidos	37
4.3.1.1	$f(R) = R + \alpha R^{-n}$	37
4.3.1.2	$f(R) = \alpha R^p \exp(qR)$	42
4.3.2	Caso Proposto: $f(R) = \alpha R^p \exp qR^n$	43
5	Conclusões e Perspectivas Futuras	46
A	Cálculo da Variação do Tensor de Ricci	47
A.1	Variação dos Símbolos de Christoffel	47
A.2	Variação do Tensor de Ricci	48
	Referências Bibliográficas	49

Capítulo 1

Introdução

Com a descoberta da expansão acelerada tardia do universo [1], as equações da Relatividade Geral (RG) em sua forma mais pura se tornaram incapazes de descrever a cosmologia observada sem a adição de termos extras responsáveis por tal aceleração. Nesse contexto, diversos novos modelos foram e continuam sendo propostos a fim de descrever a nova fase acelerada no universo. De maneira geral, esses modelos podem ser agrupados em duas categorias abrangentes: (i) os que adicionam uma nova componente física ao conteúdo de matéria do universo e (ii) os que modificam a parte geométrica das equações da RG (isto é, modificam a gravitação em si).

O modelo padrão da cosmologia, Λ -*Cold Dark Matter* (Λ CDM) é o mais simples modelo capaz de descrever a cosmologia observada. Esse modelo consiste em adicionar um termo extra, denominado Constante Cosmológica (Λ), às equações da Relatividade Geral. A contribuição desse termo para a dinâmica cosmológica pode ser interpretada como proveniente de uma nova componente física com densidade de energia constante e pressão negativa que permearia o universo. Apesar de estar em grande concordância com os dados observacionais [2; 3], o modelo Λ CDM sofre da dificuldade em se determinar uma origem física para o valor observado de Λ , além do chamado *problema da coincidência cósmica*. Esses problemas serão discutidos ao fim do Capítulo 2.

Dentre os modelos que se propõem a modificar a gravitação, as chamadas teorias $f(R)$ se caracterizam como uma das mais simples modificações a serem feitas à Relatividade Geral. Apesar do nome, as teorias $f(R)$ são, na verdade, uma classe de teorias, onde cada uma delas é definida pela função não-linear $f(R)$ utilizada para generalizar a Lagrangiana da RG, dada pelo escalar de Ricci (R).

Neste trabalho, estudamos, no contexto das teorias $f(R)$, o comportamento do chamado *background* cosmológico, que consiste na evolução das densidades das diferentes

componentes que permeiam o universo e dos parâmetros que quantificam sua expansão. Particularmente, estamos interessados em investigar o comportamento de R ao longo da evolução cosmológica no período pós-inflacionário.

Capítulo 2

O Modelo Padrão Λ CDM

O modelo padrão da Cosmologia (Λ CDM) é construído a partir da Relatividade Geral (RG) com adição de uma constante cosmológica (Λ), responsável por gerar a expansão acelerada tardia observada hoje. Nesta seção, são obtidas as equações de campo para o modelo Λ CDM, bem como a evolução do *background* cosmológico descrita por esse modelo.

2.1 Equações de Campo

As equações de campo da Relatividade Geral podem ser obtidas a partir da ação de Einstein-Hilbert dada por:

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (2.1)$$

Onde $\kappa = 8\pi G$, G é constante gravitacional, g é o determinante do tensor métrico e R é o escalar de Ricci (ou escalar de curvatura), dado pelo traço do tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$).

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

O tensor de Ricci é definido em termos do tensor de Riemann pela seguinte contração: $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$. O tensor de Riemann, por sua vez é dado por:

$$R^\lambda_{\mu\kappa\nu} = R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\kappa\mu} + \Gamma^\eta_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\kappa\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\eta}, \quad (2.3)$$

onde $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ são os coeficientes da conexão de Levi-Civita:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}). \quad (2.4)$$

A ação do modelo padrão da cosmologia (Λ CDM) é obtida adicionando à S_{EH} o termo de constante cosmológica (Λ) e a ação relativa aos campos de matéria (S_m).

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g} d^4x + S_m \quad (2.5)$$

As equações de campo são obtidas a partir do princípio da mínima ação. Isto é, exigimos que a variação da ação com respeito ao tensor métrico seja nula ($\delta S = 0$). De maneira explícita:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int (R - 2\Lambda)\delta\sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{2\kappa} \int \delta(R - 2\Lambda)\sqrt{-g} d^4x + \delta S_m = 0 \quad (2.6)$$

Utilizando a fórmula de Jacobi, $\delta(\det M) = (\det M) \text{Tr}(M^{-1}\delta M)$, a variação $\delta\sqrt{-g}$ é facilmente reescrita como

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

O que permite reescrever o primeiro termo da equação (2.6) explicitamente:

$$\frac{1}{2\kappa} \int (R - 2\Lambda)\delta\sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{2\kappa} \int \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R - 2\Lambda)\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g} d^4x \quad (2.8)$$

Por definição, $\delta\Lambda = 0$. Portanto, $\delta(R - 2\Lambda) = \delta R$. A variação do escalar de Ricci é reescrita em termos da métrica, do tensor de Ricci e de suas variações:

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

A variação da métrica inversa ($g^{\mu\nu}$) é obtida variando sua definição, $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$:

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu}\delta g_{\alpha\beta}. \quad (2.10)$$

Neste trabalho, utilizamos o formalismo métrico, isto é, a variação dos símbolos de Christoffel é calculada em termos da variação de (2.4) com respeito à métrica. O cálculo da variação dos símbolos de Christoffel e do Tensor de Ricci é desenvolvido no Apêndice A. Obtém-se:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(\nabla_\lambda\nabla_\nu\delta g_{\kappa\mu} - \nabla_\nu\nabla_\lambda\delta g_{\kappa\mu} + \nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g_{\kappa\nu} - \nabla_\lambda\nabla_\kappa\delta g_{\mu\nu} - \nabla_\nu\nabla_\mu\delta g_{\kappa\lambda} + \nabla_\kappa\nabla_\nu\delta g_{\mu\lambda}), \quad (2.11)$$

de modo que:

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} (\nabla_\lambda \nabla_\mu \delta g_{\kappa\nu} - \nabla_\lambda \nabla_\kappa \delta g_{\mu\nu}) = \nabla_\lambda g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} (\nabla_\mu \delta g_{\kappa\nu} - \nabla_\kappa \delta g_{\mu\nu}) \quad (2.12)$$

Aqui, foi utilizada a simetria do tensor métrico para manipular os índices mudos.

A variação de escalar de Ricci é obtida substituindo os resultado das equações (2.10) e (2.12) em (2.9):

$$\delta R = -R_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} \delta g_{\alpha\beta} + \nabla_\lambda g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} (\nabla_\mu \delta g_{\kappa\nu} - \nabla_\kappa \delta g_{\mu\nu}) \quad (2.13)$$

Utilizando esse resultado, a segunda integral da equação (2.6) é reescrita como:

$$\frac{1}{2\kappa} \int -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} + \nabla_\lambda \sqrt{-g} \underbrace{g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} (\nabla_\mu \delta g_{\kappa\nu} - \nabla_\kappa \delta g_{\mu\nu})}_{\equiv V^\lambda} d^4x \quad (2.14)$$

O segundo termo tem a forma $\nabla_\lambda \sqrt{-g} V^\lambda$ e corresponde a uma derivada total. Isto é $\nabla_\lambda \sqrt{-g} V^\lambda = \partial_\lambda \sqrt{-g} V^\lambda$. Portanto, podemos reescrever a integral anterior como:

$$\frac{1}{2\kappa} \int -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} + \partial_\lambda \sqrt{-g} V^\lambda d^4x \quad (2.15)$$

A integral do termo de derivada parcial corresponde a um termo de superfície, que pode ser anulado ao fixar as variáveis de modo a anular suas variações sobre tal borda.

A variação da ação de matéria define o tensor energia-momento ($T_{\mu\nu}$)¹:

$$\delta S_m \equiv \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.16)$$

Por fim, a variação da ação pode ser escrita explicitamente em termos da variação da métrica:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R - 2\Lambda) - R^{\mu\nu} + \kappa T^{\mu\nu} \right\} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad (2.17)$$

Portanto, o termo entre colchetes deve ser nulo:

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R - 2\Lambda) - R^{\mu\nu} + \kappa T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.18)$$

Rearranjando os termos e descendo os índices, são obtidas as Equações de Campo de Einstein em sua forma covariante usual:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

¹Aqui expressamos em termos da forma contravariante do tensor energia momento $T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}$

2.2 Dinâmica Cosmológica

Para a descrição da dinâmica cosmológica, assume-se a validade do *Princípio Cosmológico*, que estabelece a homogeneidade e isotropia espacial do universo em largas escalas. Além disso, assume-se também a geometria espacial plana para o universo. Essa última hipótese é corroborada por limites observacionais recentes para a tri-curvatura do universo [2].

Sob essas hipóteses, temos como solução das equações de campo de Einstein, a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) plana:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.20)$$

Aqui, $a(t)$ é o fator de escala, que quantifica a expansão das dimensões espaciais. Essa quantidade é definida de maneira que $a(t_0) = 1$. Onde t_0 é o instante de tempo referente ao presente.

Os símbolos de Chirstoffel não-nulos da métrica FLRW plana são:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= a\dot{a} & \Gamma^0_{22} &= a\dot{a}r^2 & \Gamma^0_{33} &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma^1_{01} &= \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma^1_{22} &= -r & \Gamma^1_{33} &= -r \sin^2 \theta \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} & \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma^3_{23} &= \cot \theta \end{aligned} \quad (2.21)$$

Onde o ponto representa a derivada de uma quantidade com respeito ao tempo. Desses símbolos de Chirstoffel, obtém-se as componentes não-nulas do tensor de Ricci, bem como seu traço (o escalar de Ricci, R):

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} & R_{11} &= 2\dot{a}^2 + a\ddot{a} \\ R_{22} &= r^2(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) & R_{33} &= r^2(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$R = 6 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right] \quad (2.23)$$

A taxa de expansão é comumente expressa em termos do parâmetro de Hubble, definido por $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$. Da equação (2.23), temos a seguinte relação entre H e R :

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}) \quad (2.24)$$

A equação de Friedmann é obtida tomando a componente tempo-tempo (00) das Equações de Campo de Einstein (2.19):

$$3H^2 = \kappa T_{00} + \Lambda \quad (2.25)$$

Enquanto o traço das equações de campo de Einstein fornece a seguinte equação:

$$R = -\kappa T + 4\Lambda \quad (2.26)$$

Onde T é o traço do tensor energia-momento. Essa equação pode ser expressa também em termos de \dot{H} utilizando a equação (2.24):

$$2\dot{H} = \frac{\kappa}{3}(-T + 4T_{00}) \quad (2.27)$$

2.2.1 Tensor Energia-Momento

Modelando toda a matéria do universo como um fluido perfeito, o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ pode ser escrito em termo da densidade total (ρ) e da pressão total (p) medidas por um observador comóvel com quadri-velocidade:

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (2.28)$$

Sob a hipótese de homogeneidade e isotropia espacial, o tensor energia momento no referencial comóvel é dado por:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Dessa maneira, $T_{00} = \rho$ e $T = -\rho + 3p$.

Os fluidos que compõem a densidade total de energia ρ são, inicialmente, as densidades de energia em forma de matéria relativística e não-relativística. A pressão de cada uma dessas componentes satisfaz uma equação de estado do tipo:

$$p = w\rho \quad (2.30)$$

Onde w é um parâmetro diferente para cada uma das componentes. A matéria não-relativística (incluindo matéria bariônica e matéria escura fria) possui pressão desprezível

$w_m \approx 0$. Dessa maneira:

$$p_m = 0 \quad (2.31)$$

Enquanto a matéria relativística, composta principalmente de radiação eletromagnética é caracterizada por:

$$w_r = \frac{1}{3} \quad p_r = \frac{1}{3}\rho_r \quad (2.32)$$

É conveniente considerar o efeito da constante cosmológica como o efeito de um terceiro fluido de pressão negativa, denominado energia escura, com as seguintes propriedades:

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{\kappa} \quad p_\Lambda \equiv -\rho_\Lambda \quad (2.33)$$

Com essas definições, podemos incluir a contribuição da constante cosmológica em $T_{\mu\nu}$, removendo o termo Λ explícito nas equações (2.25) e (2.26). Essas equações são reescritas como:

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho = \frac{\kappa}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) \quad (2.34)$$

$$R = -\kappa T = \kappa(\rho - 3p) = \kappa(\rho_m + 4\rho_\Lambda) \quad (2.35)$$

De agora em diante, ρ e p incluem a contribuição do fluido de constante cosmológica (energia escura). A equação para R pode ser reescrita em termos de \dot{H} como em (2.27):

$$-2\dot{H} = \kappa(\rho + p) = \kappa\left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_r + \rho_{ee} + p_{ee}\right) = \kappa\left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_r\right) \quad (2.36)$$

A conservação da energia é expressa pela relação $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ com $\nu = 0$. Exigimos que cada uma das componentes se conserve de maneira independente das demais (isto é, não há conversão entre as componentes). Dessa maneira, cada uma das componentes satisfaz uma equação de conservação dada por:

$$\dot{\rho}_x + 3H(w_x + 1)\rho_x = 0 \quad (2.37)$$

Onde $x = m, r$ e Λ , representando matéria, radiação eletromagnética e constante cosmológica, respectivamente. A solução dessa equação para as diferentes componentes resulta nas seguintes evoluções com respeito ao fator de escala:

$$\rho_m = \rho_{m0}a^{-3} \quad \rho_r = \rho_{r0}a^{-4} \quad \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} \quad (2.38)$$

O subscrito 0 representa o valor da quantidade medido no presente.

É conveniente definir quantidades adimensionais para medir as densidades de energia relativas das componentes. Para isso, é preciso definir a densidade crítica ρ_c , a densidade para qual o universo possui geometria espacial plana. Como tomamos como hipótese a curvatura nula do universo, a densidade crítica é igual a densidade total:

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{\kappa} = \rho \quad (2.39)$$

Os parâmetros adimensionais de densidade para as diferentes componentes são definidos como:

$$\Omega_x \equiv \frac{\rho_x}{\rho_c} \quad x = m, r, \Lambda \quad (2.40)$$

A evolução dessas quantidades pode ser expressa em termos de seu valor hoje e do fator de escala:

$$\Omega_x = \frac{\kappa \rho_x}{3H^2} = \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_{x0} a^{-3(w_x+1)} \quad (2.41)$$

Por definição, temos que $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1$. As equações de Friedmann (2.34) e do traço (2.35), podem ser então expressas como:

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_{r0} a^{-4} + \Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda0}) \quad (2.42)$$

$$R = 3H_0^2 (\Omega_{m0} a^{-3} + 4\Omega_{\Lambda0}) \quad (2.43)$$

Os valores observacionais dessas quantidades no presente de acordo com os dados da colaboração Planck [3] são:

$$H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad \Omega_{m0} = 0.315 \pm 0.007 \quad \Omega_{r0} = (5.38 \pm 0.15) \times 10^{-5} \quad (2.44)$$

Por fim, define-se o parâmetro de estado efetivo, w_{eff} , correspondente à equação de estado efetiva do universo. O valor desse parâmetro ao longo da evolução cosmológica indica qual componente rege a dinâmica cosmológica:

$$w_{\text{eff}} \equiv \frac{p}{\rho} = \frac{1}{3} \Omega_r - \Omega_\Lambda \quad (2.45)$$

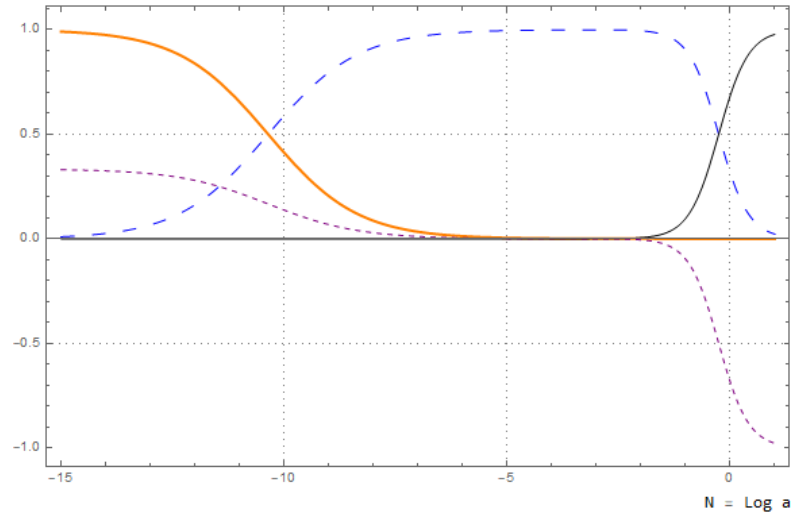


FIGURA 2.1: Evolução dos Parâmetros de Densidade em Λ CDM com respeito ao logaritmo do fator de escala. Ω_m em azul com tracejado longo, Ω_r em laranja com linha contínua e espessa, Ω_Λ em linha preta e menos espessa e w_{eff} em roxo com tracejado curto.

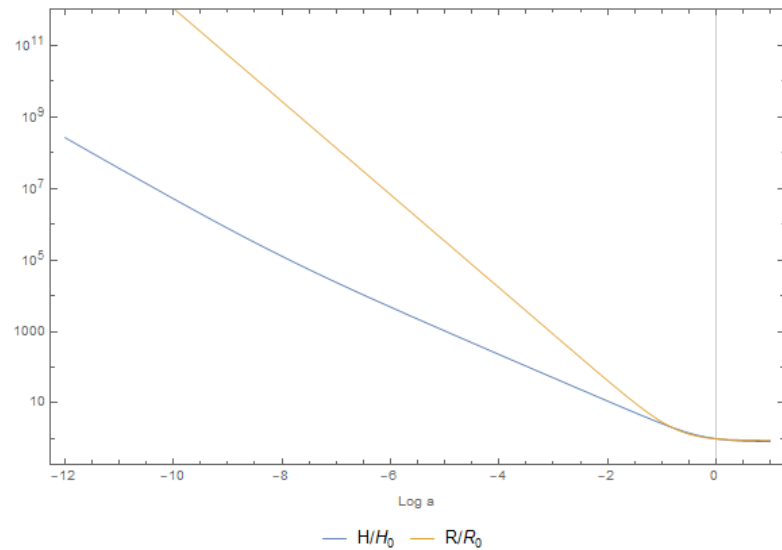


FIGURA 2.2: Evolução de R, H com respeito a $\log a$ em unidades de H_0 em Λ CDM

Como ilustrado na Figura 2.1, a evolução cosmológica passa por três fases distintas caracterizadas pela dominação sucessiva de cada uma das componentes sobre a dinâmica cosmológica. Essas três eras seguem a ordem cronológica: (i) Dominação da Radiação, (ii) Dominação da Matéria e (iii) Dominação da Energia Escura ou Constante Cosmológica.

Essa particular sucessão de eras cosmológicas é fundamental para a descrição de certos observáveis físicos. Em particular, a era de dominação da radiação está associada a observáveis de universo primordial como a Radiação Cósmica de Fundo, a era de dominação da matéria é necessária para a formação de estruturas em larga escala e a

era dominação da energia escura é responsável pela expansão acelerada observada hoje. Dessa maneira, qualquer modelo alternativo à Λ CDM deve produzir uma trajetória similar do *background* cosmológico para ser considerado viável.

2.3 Limitações do Modelo Λ CDM

A maior limitação do modelo Λ CDM está na ausência de concordância entre previsões teóricas para o valor de Λ e seu valor observado. O principal candidato para origem física da densidade de energia ρ_Λ é a densidade de energia de ponto-zero do vácuo ρ_0 . Porém, a previsão da Teoria Quântica de Campos para o valor dessa quantidade possui uma discrepância de cerca de 40 ordens de grandezas com o valor observado [4].

Outro problema acerca do valor de ρ_Λ é o chamado *problema da coincidência cósmica*, que consiste na coincidência entre as ordens de grandeza de $\rho_{\Lambda 0}$ e $\rho_{m 0}$. Caso a razão $\rho_{\Lambda 0}/\rho_{m 0}$ fosse uma ordem de grandeza menor, a aceleração não seria observada, caso fosse poucas ordens de grandezas maior, a coincidência aconteceria em altos *redshifts* (isto é, no passado distante) [4].

Recentemente, um terceiro problema do modelo tem tomado destaque na literatura: o problema da tensão da medida de H_0 . Os valores obtidos para esse parâmetro através de diferentes observáveis astrofísicos e cosmológicos resultam em valores discrepantes [3; 5].

Capítulo 3

Teorias $f(R)$

Diante das dificuldades teóricas do modelo Λ CDM. Surge como abordagem alternativa a ideia de se modificar as equações da Relatividade Geral, as ditas teorias modificadas de gravitação. Dentre essas teorias, a família de teorias $f(R)$ de gravitação se apresentam como uma das mais simples modificações a serem feitas à Relatividade Geral.

As teorias $f(R)$ aparecem pela primeira vez na literatura com o intuito de explicar a era inflacionária [6]. Com a descoberta da expansão acelerada tardia, o interesse nesse tipo de teoria foi renovado, agora com o objetivo de descrever esse novo observável.

3.1 Equações de Campo Generalizadas

Consideramos a seguinte generalização da ação de Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad \longrightarrow \quad S = \frac{1}{2\kappa} \int f(R) \sqrt{-g} d^4x \quad (3.1)$$

Onde $f(R)$ é uma função não-linear do escalar de Ricci. As equações de campo são, novamente, obtidas a pelo princípio da mínima ação. Novamente, é utilizado o formalismo métrico.

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int \delta f(R) \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{2\kappa} \int f(R) \delta \sqrt{-g} d^4x + \delta S_m = 0 \quad (3.2)$$

Por simplicidade de notação, de agora em diante deixa-se implícito argumento R de f e suas derivadas. Denotamos $f_R \equiv df/dR$ e utilizamos definição de $T^{\mu\nu}$ como dada

pela equação (2.16). A variação da ação toma a forma:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int \{ f_R \delta R \sqrt{-g} + f \delta \sqrt{-g} + \kappa T^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \} d^4x = 0 \quad (3.3)$$

Utilizando a variação do escalar de Ricci da equação (2.13), o primeiro termo da variação da ação pode ser escrito como:

$$\int \{ -\sqrt{-g} f_R R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + f_R \nabla_\lambda \sqrt{-g} \underbrace{g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} (\nabla_\mu \delta g_{\kappa\nu} - \nabla_\kappa \delta g_{\mu\nu})}_{V^\lambda} \} d^4x \quad (3.4)$$

O segundo termo desse integrando tem a forma $f_R \nabla_\lambda V^\lambda$. Realizando uma integração por partes e desprezando o termo de superfície ($f_R \int \partial_\lambda V^\lambda$), obtém-se:

$$\int \{ -\sqrt{-g} f_R R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\lambda \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} (\nabla_\mu \delta g_{\kappa\nu} - \nabla_\kappa \delta g_{\mu\nu}) \nabla_\lambda f_R \} d^4x \quad (3.5)$$

Renomeando os índices de modo a evidenciar a derivada covariante:

$$\int \{ -\sqrt{-g} f_R R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\kappa \underbrace{\sqrt{-g} (g^{\kappa\nu} g^{\mu\lambda} \delta g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \delta g_{\mu\nu})}_{\equiv W^\kappa} \nabla_\lambda f_R \} d^4x \quad (3.6)$$

Novamente, realiza-se uma integração por partes e despreza-se o termo de superfície ($\nabla_\lambda f_R \int \partial_\kappa W^\kappa$). Obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int \{ -\sqrt{-g} f_R R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \sqrt{-g} (g^{\kappa\nu} g^{\mu\lambda} \delta g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \delta g_{\mu\nu}) \nabla_\kappa \nabla_\lambda f_R \} d^4x \\ & = \int \{ -f_R R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + (\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \square) f_R \delta g_{\mu\nu} \} \sqrt{-g} d^4x \end{aligned} \quad (3.7)$$

Onde \square é o operador de D'Alembert ($\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$).

Utilizando o resultado obtido na seção anterior para a variação de $\sqrt{-g}$, a equação para δS (3.3) pode ser, por fim, escrita evidenciando $\delta g_{\mu\nu}$

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int \left\{ -f_R R^{\mu\nu} + (\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \square) f_R + \frac{1}{2} f g^{\mu\nu} + \kappa T^{\mu\nu} \right\} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (3.8)$$

As equações de campo generalizadas são obtidas em sua forma covariante como:

$$f_R(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f_R(R) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

3.2 Dinâmica Cosmológica em $f(R)$

Assim como no capítulo anterior, a dinâmica cosmológica é descrita sob as hipóteses de homogeneidade, isotropia e de universo plano. Novamente, temos como solução das equações de campo a métrica FLRW.

A componente tempo-tempo das Equações de Campo Generalizada (3.9) dá origem a equação de Friedmann generalizada:

$$3f_R H^2 = k(\rho_r + \rho_m) + \frac{1}{2}(f_R R - f) - 3H\dot{f}_R \quad (3.10)$$

O traço das equações modificadas não fornece mais uma relação algébrica entre o escalar de Ricci e as densidades de energia como expresso pela equação (2.26) da Relatividade Geral. Esse vínculo é substituído pela seguinte relação diferencial:

$$f_R(R)R - 2f(R) + 3\Box f_R(R) = \kappa T, \quad (3.11)$$

o que evidencia um grau de liberdade extra na teoria. É esperado portanto, que as equações das teorias $f(R)$ admitam uma quantidade maior de possíveis soluções que as teoria de Einstein.

Sob a hipótese de isotropia e homogeneidade, temos que $\Box f_R = -\ddot{f}_R$. Utilizando esse resultado e a relação entre R e H dada por (2.24), a equação do traço (3.11) pode ser expressa como:

$$-2f_R \dot{H} = \kappa \left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_r \right) + \ddot{F} - H\dot{F} \quad (3.12)$$

Os parâmetros adimensionais de densidade para matéria e radiação são definidos de maneira similar à Relatividade Geral a partir da equação (3.10), como:

$$\Omega_m \equiv \frac{\kappa \rho_m}{3f_R H^2} \quad \Omega_r \equiv \frac{\kappa \rho_r}{3f_R H^2} \quad (3.13)$$

Assim como feito para a contribuição da constante cosmológica em Λ CDM, pode-se interpretar a contribuição dos termos extras que surgem na equação de Friedmann generalizada (3.10) como o efeito de um fluido de energia escura. Define-se a densidade adimensional de energia escura como:

$$\Omega_{ee} \equiv \frac{R}{6H^2} - \frac{f}{6f_R H^2} - \frac{\dot{f}_R}{f_R H} \quad (3.14)$$

Toma-se o cuidado de utilizar o novo subíndice ee para denotar as quantidades relativas a energia escura e não Λ , uma vez que essas quantidades não mais se comportam como constante cosmológica. Diante dessas definições, a equação de Friedmann generalizada (3.10) pode ser expressa como:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_{ee} = 1 \quad (3.15)$$

Novamente, é exigida a equação de conservação (2.37) sobre o conteúdo do universo. Para obter a equação de estado do novo fluido de energia escura, é necessário escrever sua densidade de energia e a pressão em função dos termos extras de curvatura. Devemos obter ρ_{ee} de modo a equação de Friedmann Generalizada tenha a forma análoga à Λ CDM:

$$3f_{R0}H^2 = \kappa(\rho_m + \rho_r + \rho_{ee}) \quad (3.16)$$

Onde f_{R0} é f_R calculada hoje. A equação da RG é obtida quando f é uma função linear de R . Isolando $\kappa\rho_{ee}$ e substituindo as demais densidades utilizando equação de Friedmann Generalizada (3.10), obtém-se:

$$\kappa\rho_{ee} = -3H^2(f_R - f_{R0}) + \frac{1}{2}(f_R R - f) - 3H\dot{f}_R \quad (3.17)$$

Para obter a pressão p_{ee} do fluido de energia escura, é necessário reescrever a equação (3.12) de maneira que possua a mesma forma que sua contraparte da Relatividade Geral (2.36), isto é:

$$-2f_{R0}\dot{H} = \kappa\left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_r + \rho_{ee} + p_{ee}\right) \quad (3.18)$$

Diferente do que acontece para a constante cosmológica, em geral, $\rho_{ee} \neq -p_{ee}$. Analogamente ao feito para a densidade, isola-se p_{ee} e reescreve-se os termos extras utilizando as equações da dinâmica generalizada (3.10) e (3.12). Obtém-se:

$$\kappa p_{ee} = 2H\dot{f}_R + \ddot{f}_R - \frac{1}{2}(f_R R - f) + (2\dot{H} + 3H^2)(f_R - f_{R0}) \quad (3.19)$$

Da razão das equações (3.19) e (3.17), obtém-se o parâmetro de estado da energia escura w_{ee} :

$$w_{ee} = -1 + \frac{2\ddot{f}_R - 2H\dot{f}_R + 4\dot{H}(f_R - f_{R0})}{(f_R R - f) - 6H\dot{f}_R - 6H^2(f_R - f_{R0})} \quad (3.20)$$

O parâmetro w_{eff} da equação de estado efetiva do universo é obtido isolando a densidade total de energia e a pressão total das equações (3.16) e (3.18) e calculando sua razão.

$$w_{\text{eff}} \equiv \frac{p}{\rho} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} \quad (3.21)$$

3.3 Considerações sobre a escolha de $f(R)$

A princípio, pode-se escolher $f(R)$ como qualquer função não-linear do escalar de Ricci. Porém, algumas condições foram já estabelecidas na literatura para que as equações de campo sejam condizentes com certos observáveis físicos [7]. Destaca-se aqui, a seguinte condição:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) = R \quad (3.22)$$

Em Relatividade Geral, tem-se que R é proporcional às densidades de energia pela equação do traço (2.35). Portanto, essa condição se resume em exigir que a Lagrangeana tenda à RG no passado, onde os observáveis físicos são bem descritos pelas equações de Einstein.

É importante notar que o fato da Lagrangeana modificada se aproximar da Lagrangeana de Einstein-Hilbert no passado não garante que as soluções se comportem como as soluções da RG. A generalização das equações de campo as levam de equações diferenciais de segunda ordem à quarta ordem na métrica. Como será mostrado a seguir, uma mudança de ordem das equações diferenciais, mesma que acoplada por um parâmetro pequeno, pode fazer com que as soluções se tornem muito diferentes das originais.

Exemplo: Oscilador Harmônico Perturbado

Como feito em Jorás (2011) [8], consideramos a seguinte equação diferencial dada pela equação do oscilador harmônico acrescida de uma pequena perturbação proporcional à derivada terceira da variável dependente (\dot{x}):

$$\lambda \dot{\dot{x}} + \ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (3.23)$$

Onde λ é uma constante real. Essa equação diferencial pode ser resolvida exatamente. No limite em que o termo de perturbação é muito pequeno, isto é $\epsilon \equiv \lambda\omega \ll 1$, esperaria-se ingenuamente que a solução tendesse à solução do oscilador harmônico.

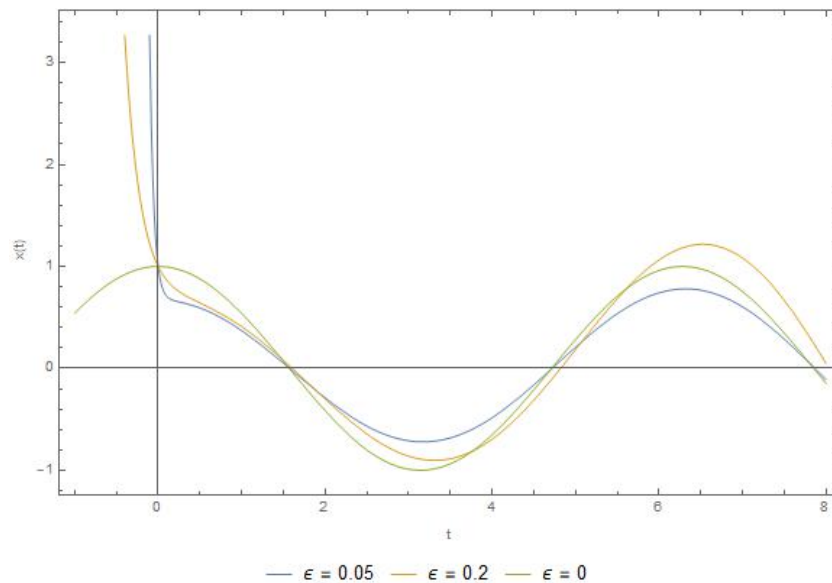


FIGURA 3.1: Solução da equação de movimento do oscilador harmônico perturbado com condição inicial $x(0) = 1$ para diferentes valores do parâmetro ϵ .

Como visto na Figura 3.1, o comportamento esperado não é obtido. A solução cresce exponencialmente para $t < 0$. Tal crescimento é mais acentuado quanto menor for a perturbação introduzida (quanto menor for ϵ).

A generalização da equação do traço transforma a relação algébrica de R com as densidades cosmológicas em uma equação diferencial.

$$R = -\kappa T \quad \longrightarrow \quad f_R(R)R - 2f(R) + 3\Box f_R(R) = \kappa T \quad (3.24)$$

Portanto, não é mais necessário (nem suficiente) que $R \rightarrow \infty$ conforme $\rho \rightarrow \infty$ no passado para que o comportamento da Relatividade Geral seja recuperado. Dessa maneira, o esforço nesse trabalho se concentra em investigar a viabilidade de soluções para teorias $f(R)$ para as quais o comportamento $R \rightarrow \infty$ no passado não seja satisfeito.

Capítulo 4

Sistema de Equações e Evolução Numérica

As equações generalizadas da dinâmica em $f(R)$ não podem ser resolvidas diretamente. Neste trabalho foi utilizado o sistema de equações e as ferramentas de análise desenvolvidas em Amendola et al. 2007 [9]. São definidas as seguintes variáveis adimensionais:

$$x_1 = -\frac{\dot{f}_R}{H f_R} \quad (4.1)$$

$$x_2 = -\frac{f}{6f_R H^2} \quad (4.2)$$

$$x_3 = \frac{R}{6H^2} = \frac{\dot{H}}{H^2} + 2 \quad (4.3)$$

$$x_4 = \frac{\kappa^2 \rho_r}{3f_R H^2} \quad (4.4)$$

A evolução dessas quantidades é obtida através de sua derivada com respeito a $N \equiv \log a$:

$$\frac{dx_1}{dN} = -1 - x_3 - 3x_2 + x_1^2 - x_1 x_3 + x_4 \quad (4.5)$$

$$\frac{dx_2}{dN} = \frac{x_1 x_3}{m} - x_2 (2x_3 - 4 - x_1) \quad (4.6)$$

$$\frac{dx_3}{dN} = -\frac{x_1 x_3}{m} - 2x_3 (x_3 - 2) \quad (4.7)$$

$$\frac{dx_4}{dN} = -2x_3 x_4 + x_1 x_4 \quad (4.8)$$

Onde:

$$m \equiv \frac{d \ln f_R}{d \ln R} = \frac{R f_{RR}}{f_R} \quad (4.9)$$

$$r \equiv -\frac{d \ln f}{d \ln R} = -\frac{R f_R}{f} = \frac{x_3}{x_2} \quad (4.10)$$

Em Relatividade Geral (Λ CDM), $m = 0$, uma vez que $f_{RR} = 0$. Dessa maneira, o parâmetro m quantifica o afastamento da dinâmica generalizada daquela da Relatividade Geral.

Para realizar a evolução das equações é necessário expressar m em termos das variáveis do sistema, particularmente, expressa-se explicitamente¹ $m = m(r)$. Como será apresentado a diante, o comportamento da curva $m(r)$ é fundamental para o estudo analítico da dinâmica cosmológica de cada teoria $f(R)$.

As quantidades físicas podem ser expressas em termo das variáveis adimensionais da seguinte maneira:

$$\Omega_m = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \quad (4.11)$$

$$\Omega_r = x_4 \quad (4.12)$$

$$\Omega_{ee} = x_1 + x_2 + x_3 \quad (4.13)$$

$$w_{\text{eff}} = \frac{1}{3}(1 - 2x_3). \quad (4.14)$$

R e H podem ser escritos a partir de r e x_3 ; para isso, é necessário inverter a definição (4.10).

4.1 Análise de Pontos Fixos

O estudo analítico da dinâmica do sistema autônomo pode ser feito a partir do comportamento na vizinhança dos pontos fixos (pontos onde $dx_i/dN = 0$). Perto desses pontos, a evolução do sistema é aproximadamente linear e pode ser descrita pelas ferramentas da álgebra linear.

¹Para funções $f(R)$ complicadas, isso pode ser muito complicado ou impossível. No último caso, é pode-se tentar obter uma expressão aproximada ou paramétrica para $m(r)$.

Os pontos fixos do sistema para $x_4 = 0$ são obtidos em [9] como:

$$P_1 : (x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2) \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = -1 \quad (4.15)$$

$$P_2 : (x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 0) \quad \Omega_m = 2, \quad w_{\text{eff}} = 1/3 \quad (4.16)$$

$$P_3 : (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0) \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3 \quad (4.17)$$

$$P_4 : (x_1, x_2, x_3) = (-4, 5, 0) \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3 \quad (4.18)$$

$$P_5 : (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)} \right) \quad (4.19)$$

$$\Omega_m = 1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2}, \quad w_{\text{eff}} = -\frac{m}{1+m}$$

$$P_6 : (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2(1-m)}{1+2m}, \frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)} \right) \quad (4.20)$$

$$\Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = \frac{2-5m-6m^2}{3m(1+2m)}$$

Em geral $m(r)$ não é necessariamente constante. Dessa maneira, P_5 e P_6 são, na verdade, uma família de pontos fixos para cada valor de m . O cálculo de $r = x_3/x_2$ para P_5 e P_6 mostra que ambos satisfazem a equação:

$$m = -r - 1 \quad (4.21)$$

Portanto, existe um ponto fixo P_5 e um ponto fixo P_6 para cada raiz da expressão acima com m dado pela expressão $m(r)$ particular a cada modelo.

Das definições do sistema dinâmico, pode-se obter a evolução de $r = x_3/x_2$ como:

$$\frac{dr}{dN} = r(1+m+r) \frac{\dot{R}}{HR} \quad (4.22)$$

Quando m intercepta a reta crítica $-r - 1$, a derivada $dr/dN = 0$ e, portanto, r permanece constante. Dessa maneira, a evolução do sistema estará sempre confinada à região entre duas raízes da equação (4.21).

Para obter a evolução do sistema na vizinhança desses pontos, é necessário realizar a linearização do sistema de forma a obter sua matriz Jacobiana (J). Isso significa realizar uma expansão de primeira ordem em série de Taylor no lado direito das expressões (4.5–4.8) em torno dos pontos fixos do sistema (4.15–4.25) e escrever o resultado na

forma matricial $(dx_i^{(1)}/dN = J\vec{x})$.

$$J = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 & -3 & -1 - x_1 & 1 \\ \frac{x_3}{m} + x_2 & \frac{x_1 x_3^2}{x_2^2} \frac{m'}{m^2} - 2x_3 + 4 + x_1 & \frac{x_1}{m} - \frac{x_1 x_3}{x_2} \frac{m'}{m^2} - 2x_2 & 0 \\ -\frac{x_3}{m} & -\frac{x_1 x_3^2}{x_2^2} \frac{m'}{m^2} & -\frac{x_1}{m} + \frac{x_1 x_3}{x_2} \frac{m'}{m^2} + 4 - 4x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & -2x_4 & x_1 - 2x_3 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Aqui x_i são os valores das variáveis adimensionais do sistema autônomo calculados nos pontos fixos do sistema e $'$ é a derivada como respeito a r .

Os autovalores da matriz J para cada ponto fixo definem o comportamento do sistema em torno desses pontos. Autovalores de parte real negativa representam uma atração no sentido do autovalor associado, enquanto os de parte real positiva, repulsão. Dessa maneira, pontos fixos que possuem apenas autovalores negativos ou positivos são atratores ou repulsores respectivamente, enquanto pontos fixos que possuam pelo menos um autovalor de cada sinal são pontos de sela.[10]

4.1.1 Era de Dominação da Radiação

Considerando $x_4 \neq 0$, são obtidos 2 pontos fixos extras associados às possíveis eras de dominação da radiação:

$$P_7 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3 \quad (4.24)$$

$$P_8 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{4m}{1+m}, -\frac{2m}{(1+m)^2}, \frac{2m}{1+m}, \frac{1-2m-5m^2}{(1+m)^2} \right) \quad (4.25)$$

$$\Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = \frac{1-3m}{3+3m}$$

O ponto P_7 corresponde a uma era de dominação da radiação exata, enquanto P_8 é uma era de dominação da radiação aproximada para $m \rightarrow 0$.

4.1.2 Era de Dominação da Matéria

Numa análise superficial, os pontos fixos P_2 e P_5 são identificados como possíveis candidatos a pontos fixos de dominação da matéria. No entanto, em P_2 , apesar de Ω_m ser a componente de maior densidade adimensional, a equação de estado efetiva do universo permanece como aquela da radiação ($w_{\text{eff}} = 1/3$). Portanto, P_2 representa uma “falsa era de dominação da matéria”. Veremos a diante que essa era é comum em

modelos $f(R)$ para os quais uma “legítima” era de dominação matéria é inexistente ou inacessível dadas as condições iniciais.

Como discutido anteriormente, P_5 se trata de uma família de pontos dada pelas raízes de (4.21). Os valores de Ω_m e w_{eff} nos pontos P_5 dependem do valor de $m_5 \equiv m|_{P_5}$. Uma era “exata” de dominação da matéria ($\Omega_m = 1$, $w_{\text{eff}} = 0$) é obtida para $m_5 = 0$. Portanto, no limite $m \rightarrow 0$, P_5 pode representar uma era da matéria viável e mais próxima de Λ CDM, quanto menor for m neste ponto. Dada a reta crítica (4.21), temos que $m \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow -1$.

Para que o sistema passe por P_5 após a era de dominação da radiação e deixe-o para uma posterior era acelerada, é necessário que P_5 seja um ponto de sela. Para isso, é necessário analisar os três autovalores de P_5 . Esses são dados por:

$$\lambda_1 = 3(1 + m'_5) \quad \lambda_{\pm} = \frac{-3m_5 \pm \sqrt{m_5 (256m_5^3 + 160m_5^2 - 31m_5 - 16)}}{4m_5 (m_5 + 1)} \quad (4.26)$$

Aqui m' é a derivada com respeito a r .

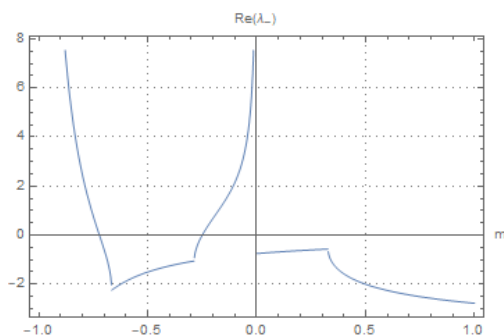


FIGURA 4.1: Parte real de λ_- em função de m .

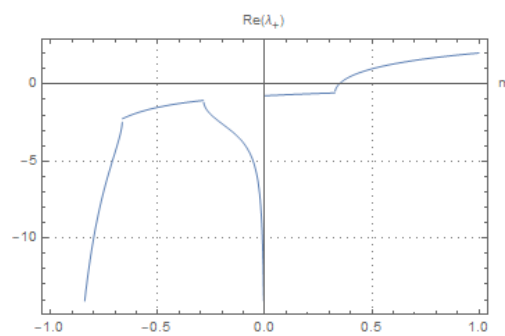


FIGURA 4.2: Parte real de λ_+ em função de m .

O comportamento da parte real dos autovalores λ_{\pm} é divergente quando m se aproxima de zero pela esquerda. Nesse caso, o autovalor de parte real positiva é muito grande² e o sistema é fortemente repelido por P_5 . Dessa maneira, torna-se difícil encontrar condições iniciais para as quais a evolução do sistema possua uma era de dominação da matéria com duração considerável.

Por outro lado, se m se aproxima de zero por valores positivos, temos que os autovalores λ_{\pm} possuem parte real negativa. Portanto, para que P_5 seja um ponto de sela, deve-se exigir que o autovalor restante (λ_1) seja positivo, o que implica em

²Aqui, considera-se grande $|\text{Re}(\lambda)| \gtrsim 1$.

$m' > -1$. Dessa maneira, modelos com $m \rightarrow +0$ são menos dependentes do ajuste fino das condições iniciais (i.e. mais “robustos”). Neste trabalho, estamos interessados apenas em modelos desse tipo.

Resumo das condições para que P_5 seja uma era viável de dominação da matéria:

- **Existência:** $m(r \rightarrow -1) \approx 0$
- **Ser Ponto de Sela:** $m'(r \rightarrow -1) > -1$
- **Ser “robusto”:** $m(r \rightarrow -1) \approx +0$

4.1.3 Era de Expansão Acelerada

Os pontos relevantes para uma era de expansão acelerada são P_1 e P_6 . Para que a evolução cosmológica não dependa de um ajuste fino das condições iniciais, é necessário que esses pontos sejam atratores. Nesta subseção são brevemente resumidas as condições para a existência desses pontos como era de expansão acelerada.

P_1 : Corresponde a uma solução do tipo de Sitter, compatível exatamente com o comportamento de constante cosmológica. Da razão x_3/x_2 , tem-se que o P_1 está localizado em $r = -2$. Os autovalores de P_1 são:

$$\left\{ -3, \quad -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{25 - 16/m_1}}{2} \right\} \quad (4.27)$$

P_1 é um atrator para $0 < m_1 \leq 1$. Caso contrário, um dos autovalores será positivo e, portanto, P_1 se torna um ponto de sela.

P_6 : É uma família de pontos para cada raiz de $m(r) = -r - 1$. Possui comportamento dependente do valor de m e m' no ponto fixo. Seus autovalores são:

$$\left\{ -4 + \frac{1}{m_6}, \quad \frac{2 - 3m_6 - 8m_6^2}{m_6(1 + 2m_6)}, \quad -\frac{2(m_6^2 - 1)(1 + m_6')}{m_6(1 + 2m_6)} \right\} \quad (4.28)$$

P_6 é um ponto de aceleração estável nos seguintes regimes:

- $m_6' > -1$:
 - (A) $m_6 < -(1 + \sqrt{3})/2$ com $w_{\text{eff}} > -1$
 - (B) $-1/2 < m_6 < 0$ com $w_{\text{eff}} < -7.6$
 - (C) $m_6 \geq 1$ com $-1.07 < w_{\text{eff}} \leq -1$

- $m'_6 < -1$:

$$(D) (\sqrt{3} - 1)/2 < m_6 < 1 \text{ com } -1.07 < w_{\text{eff}} \geq -1$$

Além disso, a era de dominação da energia escura deve ser acessível a partir da era de dominação da matéria. Isto é, a curva $m(r)$ deve conectar continuamente P_5 e P_1 ou P_6 . É importante notar que as condições $m'_5 > -1$ e $m'_6 > -1$ não podem ser simultaneamente satisfeitas por uma função $m(r)$ contínua para P_5 e P_6 consecutivos (i.e. se a curva intercepta a reta no primeiro ponto com derivada maior que a da reta, deve passar por uma inflexão e adquirir uma derivada menor que a da reta para que possa interceptá-la novamente). Portanto, P_5 só pode se conectar a P_6 na região (D).

Por fim, as únicas trajetórias cosmológicas viáveis para o sistema após a era da radiação são $P_5 \rightarrow P_1$ ou $P_5 \rightarrow P_6$ na região (D). Utilizando a equação da reta crítica, é possível reescrever a desigualdade que define a região (D) como:

$$-2 < r < -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) \approx -1.37. \quad (4.29)$$

Portanto, temos que r necessariamente diminui entre a era de dominação da matéria (P_5 com $r \rightarrow -1$) e a era acelerada acelerada (P_1 ou P_6 ; com $2 \leq r \lesssim -1.37$).

4.2 Mapeamento das Condições Iniciais

As condições iniciais para as variáveis adimensionais devem ser dadas durante a era de dominação da radiação. É interessante mapear as condições iniciais para as variáveis adimensionais em termos de quantidades físicas.

$$R_i, H_i, \Omega_{mi}, \Omega_{ri} \implies \begin{cases} x_1(N_i) = 1 - \Omega_{mi} - x_2(N_i) - x_3(N_i) - x_4(N_i) \\ x_2(N_i) = x_3(N_i)/r(R_i) \\ x_3(N_i) = R_i/(6H_i^2) \\ x_4(N_i) = \Omega_{ri}, \end{cases} \quad (4.30)$$

onde o subíndice i se refere ao valor da quantidade no instante inicial. Para a era da radiação, $\Omega_{ri} \approx 1$ e $\Omega_{mi} \ll 1$. As demais condições iniciais são definidas pelos valores de R_i, H_i e comportamento da função $r(R)$.

4.3 Estudo de Casos Específicos

Nesta seção é estudada a viabilidade cosmológica de diferentes funções $f(R)$. Inicialmente, são revisitados modelos já discutidos em Amendola et al. (2007) [9]. Ao fim da seção é feita análise de um modelo proposto pelo autor.

Para os casos estudados nesse trabalho, veremos que a função $r(R)$ possui dois comportamentos distintos dependendo da função $f(R)$. Esses dois comportamentos são ilustrados na Figura 4.3. Os casos para quais $r(R \rightarrow \infty) \rightarrow -1$ correspondem a evoluções cosmológicas similares à RG. Isto é, a era de dominação da matéria ocorre no regime de altas curvaturas (altos valores de R). Enquanto os casos em que $r(R = 0) \rightarrow -1$ correspondem a evoluções no qual a evolução de R é distinta da cosmologia padrão. Isto é, o valor de R cresce da era de dominação da matéria para a era acelerada.

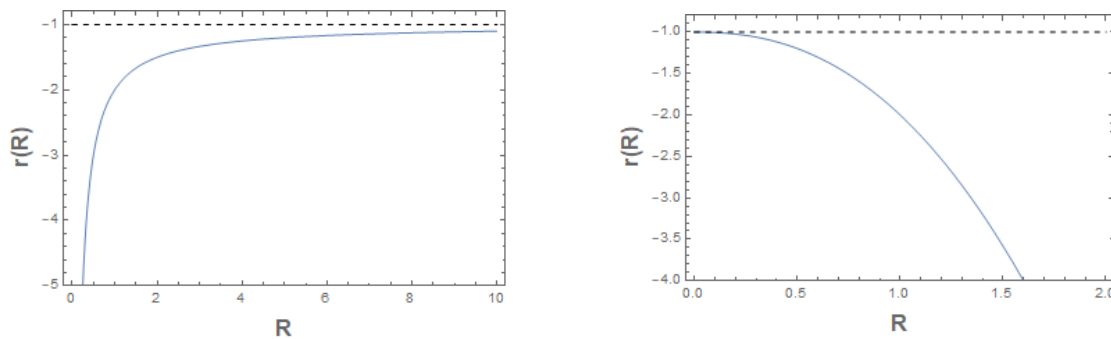


FIGURA 4.3: Gráfico esquemático de dois comportamentos distintos da função $r(R)$. O caso onde $r(R) \rightarrow -1$ para $R \rightarrow \infty$ (painel esquerdo) corresponde a um comportamento similar à RG. Isto é, a era de dominação da matéria corresponde ao regime de altas curvaturas (altos valores de R).

É importante notar que para que R seja crescente entre essas eras, é necessário que $a(t)$ se comporte de maneira distinta do previsto em Λ CDM nessa época. Uma simples lei de potência $a \propto t^x$ não pode resultar em R positivo crescente pela equação (2.23). Porém, é possível obter $a(t)$ e $R(t)$ crescentes para dependências mais complicadas do fator de escala³. A viabilidade física de tais possíveis dependências não é abordada neste trabalho. A análise aqui desenvolvida é restrita as condições de viabilidade provenientes do sistema autônomo de equações.

³No universo primordial, por exemplo, pode-se obter $a(t)$ e $R(t)$ crescentes desde que $a(t)$ cresça mais rápido que e^t .

4.3.1 Casos Anteriormente Conhecidos

4.3.1.1 $f(R) = R + \alpha R^{-n}$

Começamos a análise pela classe funções $f(R) = R + \alpha R^{-n}$, que já foi discutida na referência [9]. Antes de tudo, é preciso escrever $m(r)$. As expressões para $m(R)$ e $r(R)$ são obtidas como:

$$m(R) = n \frac{\alpha (n+1)}{R^{n+1} - n\alpha} = n \frac{\alpha (n+1)}{(R^{n+1} + \alpha) - \alpha(n+1)} \quad (4.31)$$

$$r(R) = -1 + \frac{\alpha (n+1)}{R^{n+1} + \alpha} \quad (4.32)$$

A expressão para $m(r)$ pode ser obtida calculando $\frac{r(R)+1}{m(R)}$:

$$\frac{r+1}{m} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\alpha (1+n)}{\underbrace{R^{n+1} + \alpha}_{r+1}} \right) \implies m(r) = -n \frac{1+r}{r} \quad (4.33)$$

Observa-se que $m(r)$ não depende do valor escolhido para a constante α .

Igualando $m(r)$ à reta crítica $m = -r - 1$, obtém-se as seguintes raízes para r :

$$r_a = -1 \qquad r_b = n \quad (4.34)$$

Que correspondem aos seguintes valores de m e m' :

$$m_a = 0 \qquad m_b = -(n+1) \quad (4.35)$$

$$m'_a = n \qquad m'_b = \frac{n}{(n+1)^2} \quad (4.36)$$

Era de Dominação da Matéria

Os pontos P_{5a} e P_{5b} respectivos as duas soluções m_a, m_b são caracterizados por:

$$P_{5a}(x_1, x_2, x_3) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \qquad \Omega_{ma} = 1, \quad w_{\text{eff}a} = 0 \quad (4.37)$$

$$P_{5b}(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{3(n+1)}{n}, \frac{4n+3}{2n^2}, \frac{4n+3}{2n} \right), \quad (4.38)$$

$$\Omega_{mb} = -\frac{8n^2 + 13n + 3}{2n^2}, \quad w_{\text{eff}b} = -1 - \frac{1}{n}$$

O ponto P_{5a} corresponde a uma era de dominação da matéria exata. Dada a expressão para a derivada nesse ponto ($m'_a = n$), temos que P_{5a} satisfaz a condição para ser um ponto de sela para $n > -1$.

P_{5b} pode representar uma era da matéria aproximada para $n \approx -1$. Porém, temos que a derivada nesse ponto só satisfaz a condição $m'_b > -1$ para $n < -2.61$ ou $n > -0.38$. Portanto P_{5b} não pode ser ao mesmo tempo uma era de dominação da matéria e um ponto de sela.

Era de Expansão Acelerada

Os possíveis pontos para uma era de expansão acelerada são P_1, P_{6a} e P_{6b} . Pelo cálculo de m no ponto P_1 ,

$$m_1(r = -2) = -\frac{n}{2} \quad (4.39)$$

temos que P_1 existe como atrator para $-2 \leq n < 0$.

Das coordenadas do ponto P_6 (4.20), temos que o mesmo existe no infinito para $m = 0$. Portanto, P_{6a} é inalcançável pelo sistema e pode ser imediatamente descartado⁴. O ponto P_{6b} é caracterizado por:

$$P_{6b} : (x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{2(n+2)}{2n+1}, \frac{4n+5}{(n+1)(2n+1)}, \frac{n(4n+5)}{(n+1)(2n+1)} \right) \quad (4.40)$$

$$\Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = -\frac{6n^2 + 7n - 1}{3(n+1)(2n+1)}$$

⁴Note que esse comportamento independe da $f(R)$.

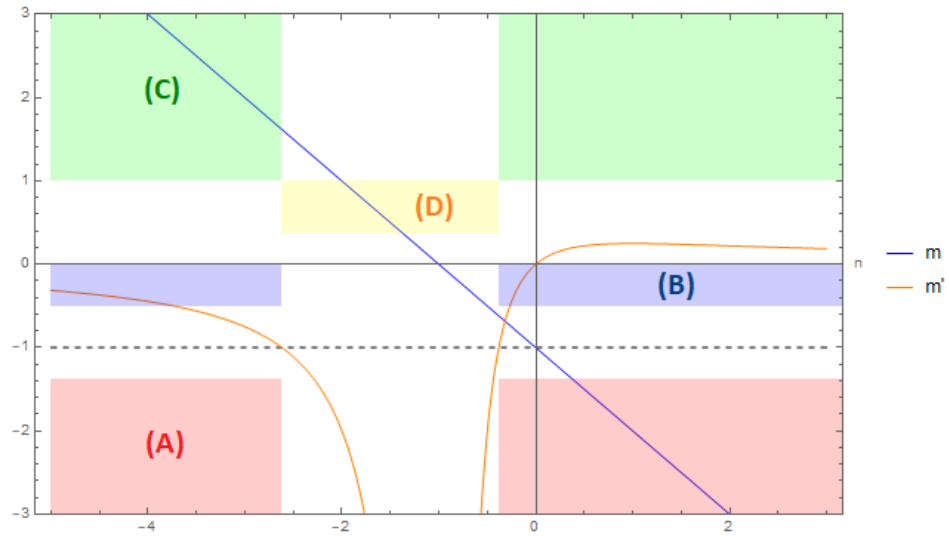


FIGURA 4.4: m e m' em função de n para $f(R) = R + \alpha R^{-n}$. Em fundo colorido, as diferentes regiões estáveis possíveis para existência de um ponto do tipo P_6 . Para esse modelo, P_{6b} pode existir em três regiões distintas dependendo do valor de n .

O ponto P_{6b} pode existir em três das quatro regiões possíveis de acordo com o valor do expoente n . Como ilustrado na Figura 4.4, P_{6b} pode ser um atrator nas regiões:

- **(A)** para $n > (1 + \sqrt{3})/2 \approx 0.37$
- **(C)** para $n \leq (-3 - \sqrt{5})/2 \approx -2.62$
- **(D)** para $-2 \leq n < -(1 + \sqrt{3})/2 \approx -1.37$

Como discutido na subseção 4.1.3, apenas a região (D) pode ser conectada à era de dominação da matéria.

Evolução Cosmológica

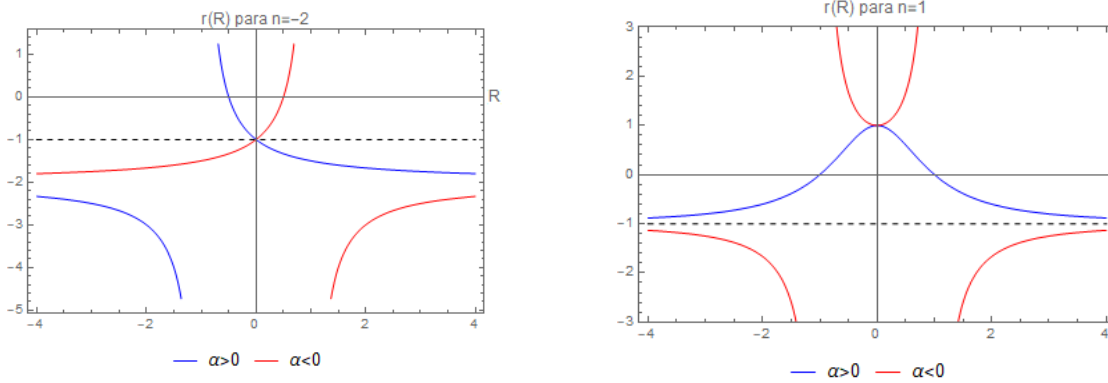


FIGURA 4.5: O comportamento da função $r(R)$. Para $n < -1$, $r \rightarrow -1$ ocorre para $R \rightarrow 0$, enquanto para $n > -1$ ocorre para quando $R \rightarrow \pm\infty$. O comportamento das curvas depende do sinal de α . A escolha do módulo de α influencia apenas na escala no eixo horizontal. Por simplicidade, aqui $|\alpha| = 1$. Na análise, não são considerados os casos que $R < 0$.

Como ilustrado na Figura 4.5, para essa classe de funções podemos ter os dois comportamentos distintos de $r(R)$. Para $n > -1$, temos as evoluções de comportamento usual (era da matéria para $R \rightarrow \infty$, $R(\log a)$ decrescente), enquanto para $n < -1$, temos os casos não-triviais. A seguir, será analisada a viabilidade dos dois casos distintos.

$n > -1$

Para $n > -1$, P_{5a} é um ponto de sela e pode representar uma era de dominação da matéria viável. Se $n < 0$, o ponto P_1 existe como atrator acelerado. Portanto, uma trajetória cosmológica viável pode existir para $-1 < n < 0$. A curva $m(r)$ e evolução do *background* para uma trajetória desse tipo podem ser vistas nas Figuras 4.6 e 4.7.

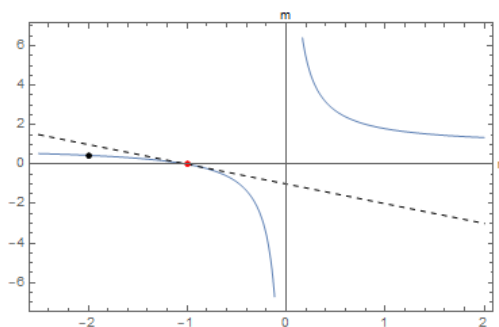


FIGURA 4.6: Curva $m(r)$ para $n = -0.9$. Em vermelho, o ponto P_{5a} referente a era de dominação da matéria. Em preto o ponto P_1 .

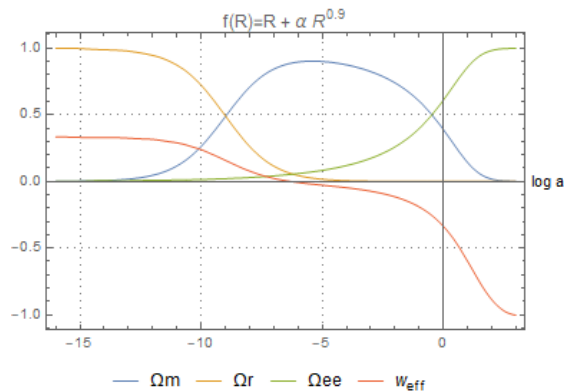


FIGURA 4.7: Evolução das densidades cosmológicas para $n = -0.9$ com condições iniciais $R = 10^{20}\alpha^9$, $H = 5 \times 10^{11}\alpha^{4.5}$.

Ainda para essa subclasse do modelo ($n > -1$), é possível obter uma era acelerada na região inviável (A) para $n > 0.37$. Como não há era da matéria viável a ser conectada com esse ponto (Figura 4.8), a era acelerada é precedida de uma falsa era de dominação da matéria em torno do ponto P_2 , como ilustrado na Figura 4.9.

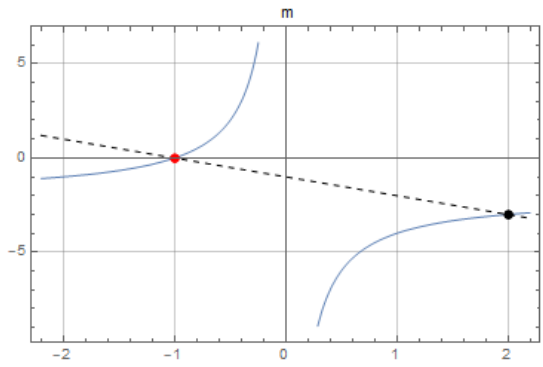


FIGURA 4.8: Curva $m(r)$ para $n = 2$. Em vermelho, o ponto P_{5a} referente a era de dominação da matéria. Em preto, o ponto P_{6b} . Esses pontos não podem ser conectados continuamente pela curva $m(r)$.

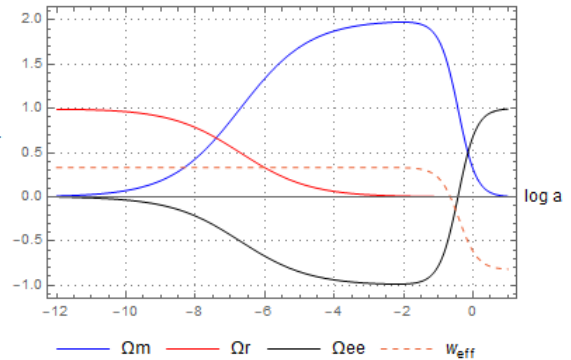


FIGURA 4.9: Evolução das densidades cosmológicas para $n = 2$ com condições iniciais $R = 10^{-3}\alpha^{1/3}$, $H = 4 \times 10^7 \alpha^{1/6}$. O sistema passa por uma “falsa era de dominação da matéria” antes de ir para o atrator acelerado P_{6b}

$n < -1$

Para $n < -1$, a condição $m'_5 > -1$ não é satisfeita. Portanto, o ponto P_{5a} , referente a uma possível era de dominação da matéria, é um atrator. Dessa maneira, caso o sistema passe por P_5 , a evolução cosmológica termina nesse ponto, tornando o modelo inviável. Um atrator acelerado pode existir em torno dos pontos P_1 ou P_6 , nas regiões (C) ou (D). Dessa maneira, existem soluções similares à Figura 4.9, na qual uma era acelerada é precedida por uma falsa era de dominação da matéria.

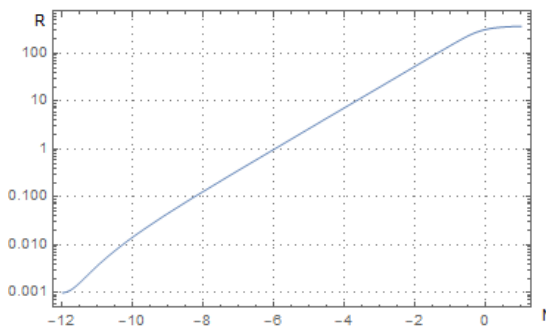


FIGURA 4.10: Evolução de R em unidades de α^{-1} para $n = -2$. Percebe-se que R cresce durante a evolução cosmológica ao contrário do que se espera em RG.

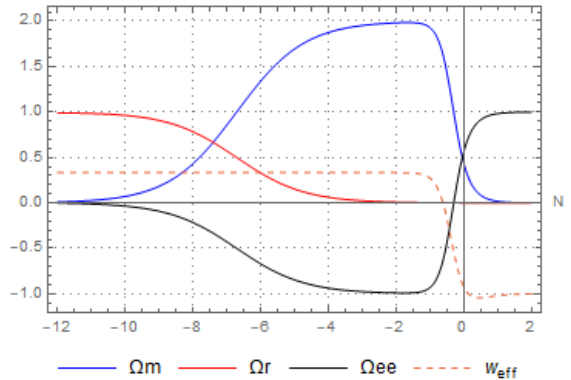


FIGURA 4.11: Evolução das densidades cosmológicas para $n = -2$ com condições iniciais $R = 10^{-3}\alpha^{-1}$, $H = 6 \times 10^{10}\alpha^{-1/2}$.

Nas Figuras 4.10 e 4.11, temos a evolução cosmológica para $n = -2$, que corresponde a $f(R)$ proposta por Starobinsky [6]. Para esse modelo, a era acelerada acontece em P_1 após uma falsa era de dominação da matéria. Nesse caso, R é uma função crescente de a ao longo de toda evolução cosmológica ao contrário do que acontece para $n > -1$ ou em Relatividade Geral.

4.3.1.2 $f(R) = \alpha R^p \exp(qR)$

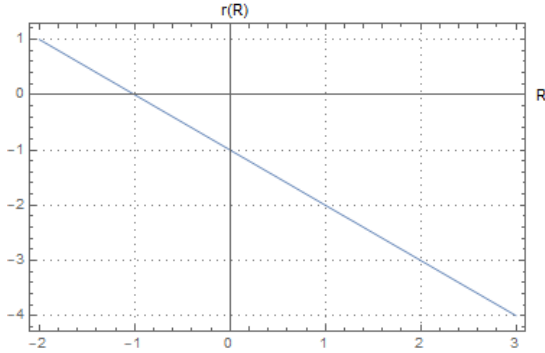


FIGURA 4.12: Gráfico da função $r(R)$ para $f(R) = \alpha R \exp R$. Esse modelo possui o comportamento $r(R = 0) = -1$.

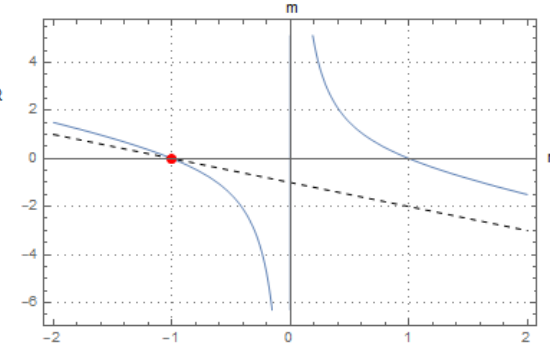


FIGURA 4.13: Curva $m(r)$ para o modelo $f(R) = \alpha R \exp R$. Em vermelho, o ponto P_{5a} referente a era de dominação da matéria.

Assim como o caso anterior, essa $f(R)$ já foi analisada na referência [9]⁵. As funções $m(R)$ e $r(R)$ para esse modelo são dadas por:

$$r(R) = -p - qR \quad m(R) = p + qR - \frac{p}{p + qR} \quad (4.41)$$

Dessa maneira, a função $m(r)$ é facilmente expressa como:

$$m(r) = -r + \frac{p}{r} \quad (4.42)$$

A evolução do sistema independe do valor de q . Obtém-se apenas uma solução para a interseção de $m(r)$ com a reta crítica:

$$r = -p \quad m = p - 1 \quad m' = -1 - \frac{1}{p} \quad (4.43)$$

Uma possível era da matéria existe para $p \rightarrow 1$. Porém, a derivada m' só satisfaz a condição $m' > -1$ para $p < 0$. Portanto, para esse modelo, o ponto de era de dominação da matéria é um atrator, tornando o modelo inviável. É importante notar que essa condição é a mesma que descarta o modelo $f(R) = R + \alpha R^{-n}$ para $n < -1$.

⁵A definição de $f(R)$ utilizada neste trabalho difere por uma constante α , adicionada para que $f(R)$ preserve a dimensão de R .

4.3.2 Caso Proposto: $f(R) = \alpha R^p \exp qR^n$

Foi considerada a seguinte generalização do modelo da subseção anterior

$$f(R) = \alpha R^p \exp(qR^n) \quad (4.44)$$

Para $n = 1$, obtém-se o modelo discutido anteriormente. Além disso, para $n = -1$, obtém-se o modelo $f(R) = R^p \exp q/R$ também abordado em Amendola et al. (2007) [9].

A função $m(r)$ para o modelo proposto é dada por:

$$m(r) = -1 + n - r + \frac{np}{r} \quad (4.45)$$

Era de Dominação da Matéria

A curva $m(r)$ intercepta a reta crítica em $r = -p$, nesse ponto $m = -1 + p$. Portanto, uma era de dominação da matéria pode existir para $p = 1$. A derivada em P_5 é calculada como:

$$m'_5 = -1 - \frac{np}{r^2} \quad (4.46)$$

Portanto, P_5 é ao mesmo tempo uma era de dominação da matéria e um ponto de sela para $p = 1$ e $n < 0$.

Era Acelerada

Para $p = 1$, a função $m(r)$ em P_1 é dada por:

$$m_1(r = -2) = 1 + \frac{n}{2}. \quad (4.47)$$

Portanto, P_1 é um atrator acelerado para $-2 < n \leq 0$.

Evolução Cosmológica

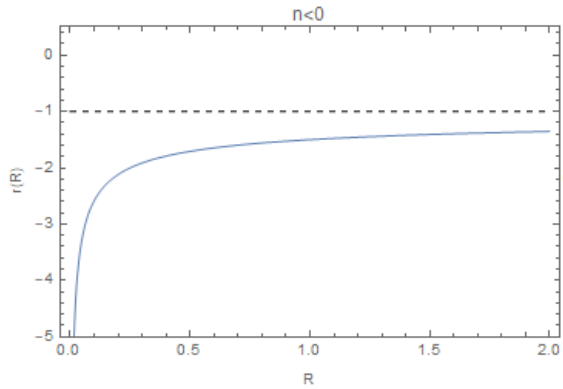


FIGURA 4.14: Comportamento da função $r(R)$ para $f(R) = \alpha R e^{qR^n}$ com $n < 0$.

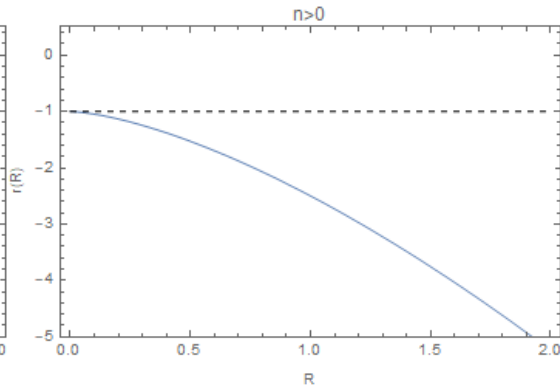


FIGURA 4.15: Comportamento da função $r(R)$ para $f(R) = \alpha R e^{qR^n}$ com $n > 0$.

Como ilustrado nas Figuras 4.14 e 4.15, a função $r(R)$ possui dois comportamentos distintos dependendo do sinal do expoente n . A condição para que P_5 seja um ponto de sela é satisfeita apenas para $n < 0$, isto é, para os casos onde R se comporta como em Relatividade Geral (decrece com o tempo). Caso o expoente seja positivo (casos onde $r(R=0) = -1$), o ponto P_5 se torna um atrator.

Exigindo simultaneamente as condições para a existência da era de dominação da matéria e da era acelerada, temos que uma trajetória cosmológica viável pode existir para $-2 < n < 0$. O cálculo do autovalor positivo de P_5 , dado por

$$\lambda_1 = 3(1 + m'_5) = 3(1 - 1 - n) = -3n, \quad (4.48)$$

fornece mais uma restrição para o valor de n . O expoente n deve ser escolhido de modo que $\lambda_1 \lesssim 1$ para que a evolução sistema passe suficientemente próximo ao ponto P_5 . Caso contrário, as soluções são repelidas de P_5 antes de chegarem consideravelmente perto desse ponto. Esse resultado é coerente com a discussão feita para o modelo $f(R) = R \exp q/R$ na referência [9], onde o modelo é descartado pois $\lambda_1 = 3$.

Portanto, ainda que não possua o comportamento de R que se desejava investigar inicialmente, o modelo proposto pode produzir uma evolução cosmológica aceitável. A evolução do *background* cosmológico para dois valores diferentes do expoente n pode ser vista nas Figuras 4.16 e 4.17.

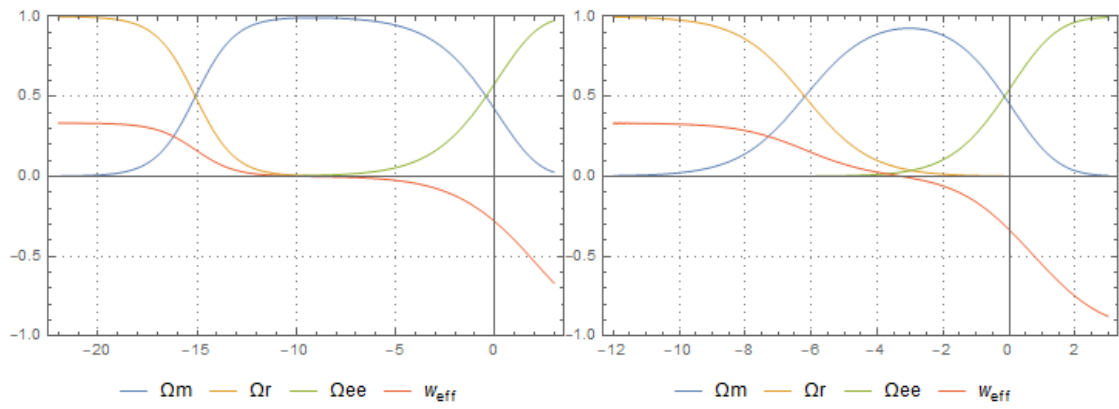


FIGURA 4.16: Evolução cosmológica para $f(R) = R \exp(qR^n)$ com $n = -0.2$

FIGURA 4.17: Evolução cosmológica para $f(R) = R \exp(qR^n)$ com $n = -0.4$

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

Observa-se que, para os modelos investigados, uma trajetória cosmológica com R crescente é descartada, uma vez que para as $f(R)$ s das quais se espera esse comportamento, o ponto fixo de dominação da matéria não é um ponto de sela. Mais especificamente, para esses modelos, a derivada $m'(r = -1)$ não satisfaz $m'_5 > -1$ e, portanto, a era de dominação da matéria se torna um atrator. O passo seguinte é verificar se essa condição é geral para qualquer $f(R)$ com o comportamento desejado. Isso pode ser feito escrevendo a derivada $m'(r)$ em termos de derivadas com respeito a R .

$$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{(dm/dR)}{(dr/dR)} > -1 \quad (5.1)$$

Para $r(R = 0) = -1$ e $m(R = 0) = 0$.

Durante análise desenvolvida, foi proposto o modelo $f(R) = \alpha R^p \exp(qR^n)$ como uma generalização para dois outros modelos abordados anteriormente em [9]. Apesar de não satisfazer as características que procurávamos, esse modelo pode reproduzir uma trajetória cosmológica viável. É necessário um estudo posterior para verificar a viabilidade desse modelo quanto observáveis locais, perturbações e soluções de estrela.

Apêndice A

Cálculo da Variação do Tensor de Ricci

A.1 Variação dos Símbolos de Christoffel

Calculamos a variação dos símbolos de Christoffel:

$$\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\delta g_{\lambda\mu,\nu} + \delta g_{\lambda\nu,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\lambda}) + \frac{1}{2}\delta g^{\rho\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \quad (\text{A.1})$$

Da definição da derivada covariante para um tensor de posto (0,2):

$$\nabla_\alpha\omega_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\kappa_{\alpha\nu}\omega_{\mu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}\omega_{\kappa\nu} \quad (\text{A.2})$$

$$\omega_{\mu\nu,\alpha} = \nabla_\alpha\omega_{\mu\nu} + \Gamma^\kappa_{\alpha\nu}\omega_{\mu\kappa} + \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}\omega_{\kappa\nu} \quad (\text{A.3})$$

Dessa maneira, o primeiro termo da equação A.1 é reescrito como:

$$\frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\delta g_{\lambda\mu,\nu} + \delta g_{\lambda\nu,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\lambda}) = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\nabla_\nu\delta g_{\lambda\mu} + \nabla_\mu\delta g_{\lambda\nu} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu} + 2\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\kappa}) \quad (\text{A.4})$$

Quando $\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, a equação A.3 se reduz à:

$$g_{\mu\nu,\alpha} = \Gamma^\kappa_{\alpha\nu}g_{\mu\kappa} + \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}g_{\kappa\nu} \quad (\text{A.5})$$

Temos, então, o segundo termo de A.1 como:

$$\frac{1}{2}\delta g^{\rho\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) = -g^{\rho\sigma}g_{\lambda\kappa}g^{\alpha\lambda}\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\delta g_{\sigma\alpha} = -g^{\rho\lambda}\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\kappa} \quad (\text{A.6})$$

Esse termo cancela com o último termo da equação (A.4). Aqui, foi utilizada a variação da métrica inversa dada pela equação ???. Dessa maneira obtemos a variação dos símbolos de Christoffel:

$$\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\nabla_\nu\delta g_{\lambda\mu} + \nabla_\mu\delta g_{\lambda\nu} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.7})$$

A.2 Variação do Tensor de Ricci

A variação de $R_{\mu\nu}$ com respeito a métrica resulta em:

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \delta\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \delta\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\kappa} \quad (\text{A.8})$$

Utilizando a definição da derivada covariante para um tensor de posto (1,3),

$$\nabla_\alpha\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \partial_\alpha\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\delta\Gamma^\rho_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\beta} \quad (\text{A.9})$$

$$\partial_\alpha\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \nabla_\alpha\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu} + \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\delta\Gamma^\rho_{\beta\nu} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\beta} \quad (\text{A.10})$$

Calculando os termos de derivada parcial da equação A.8

$$\partial_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\lambda\kappa}\delta\Gamma^\kappa_{\mu\nu} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\kappa\nu} + \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\kappa} \quad (\text{A.11})$$

$$\partial_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \nabla_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\nu\kappa}\delta\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda} + \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\kappa} \quad (\text{A.12})$$

Temos que todos os termos exceto os de derivada covariante se cancelam ou com os demais termos da equação A.8 ou entre si. Portanto:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \quad (\text{A.13})$$

Utilizando a expressão obtida para a variação dos símbolos de Christoffel:

$$\nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(\nabla_\lambda\nabla_\nu\delta g_{\kappa\mu} + \nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g_{\kappa\nu} - \nabla_\lambda\nabla_\kappa\delta g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(\nabla_\nu\nabla_\lambda\delta g_{\kappa\mu} + \nabla_\nu\nabla_\mu\delta g_{\kappa\lambda} - \nabla_\kappa\nabla_\nu\delta g_{\mu\lambda}) \quad (\text{A.15})$$

Portanto a variação do Tensor de Ricci é:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(\nabla_\lambda\nabla_\nu\delta g_{\kappa\mu} - \nabla_\nu\nabla_\lambda\delta g_{\kappa\mu} + \nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g_{\kappa\nu} - \nabla_\lambda\nabla_\kappa\delta g_{\mu\nu} - \nabla_\nu\nabla_\mu\delta g_{\kappa\lambda} + \nabla_\kappa\nabla_\nu\delta g_{\mu\lambda}) \quad (\text{A.16})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, and et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009–1038, Sep 1998.
- [2] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. N. Spergel, C. L. Bennett, J. Dunkley, M. R. Nolta, M. Halpern, R. S. Hill, N. Odegard, and et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological parameter results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):19, Sep 2013.
- [3] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, and et al. Planck 2018 results. *Astronomy Astrophysics*, 641:A6, Sep 2020.
- [4] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge University Press, 2010.
- [5] Adam G. Riess, Lucas Macri, Stefano Casertano, Hubert Lampeitl, Henry C. Ferguson, Alexei V. Filippenko, Saurabh W. Jha, Weidong Li, and Ryan Chornock. A 3% Solution: Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3. *ApJ*, 730(2):119, April 2011.
- [6] A.A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, 91(1):99–102, 1980.
- [7] Levon Pogosian and Alessandra Silvestri. Pattern of growth in viable $f(r)$ cosmologies. *Phys. Rev. D*, 77:023503, Jan 2008.
- [8] SERGIO E. JORÁS. Some remarks on $f(r)$ theories of gravity. *International Journal of Modern Physics A*, 26(22):3730–3741, 2011.
- [9] Luca Amendola, Radouane Gannouji, David Polarski, and Shinji Tsujikawa. Conditions for the cosmological viability of $f(r)$ dark energy models. *Phys. Rev. D*, 75:083504, Apr 2007.

- [10] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Westview Press, 2000.