

Instituto de Física

Licenciatura Noturna de Física



PROJETO DE INSTRUMENTAÇÃO DE FINAL DE CURSO

**AULAS DE RELATIVIDADE NO
ENSINO MÉDIO**

Aluno: Daniel José de Lima Filipe

Orientador: Prof. Adir Moysés Luiz

OUTUBRO DE 2009

05/2009



AGRADECIMENTOS

**AGRADEÇO À MINHA FAMÍLIA, AOS PROFESSORES QUE ME
INCENTIVARAM E AOS MEUS AMIGOS.**

RESUMO

Este trabalho foi feito visando professores que estejam preparando aulas sobre Física Moderna para o Ensino Médio e desejam utilizar um guia rápido e resumido dos principais assuntos acerca desse tema. Alunos da Licenciatura Noturna em Física também podem se beneficiar da leitura desta monografia visto que existe uma disciplina de Física Moderna na grade curricular da Licenciatura em Física.

Este trabalho está dividido em três partes. A primeira contém a história da Física Moderna e a Relatividade Restrita que está bem detalhada. Na segunda parte apresento uma introdução para a Relatividade Geral com ênfase na descrição de um buraco negro em nível do Ensino Médio. Na terceira e última parte exemplifico experiências que podem ser feitas em sala de aula e problemas que por desafiar a razão são excelentes para serem usados como problemas motivadores.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Motivação para a monografia.....	1
1.2	Abordagem.....	3
1.3	Metodologia.....	3
2	CONCEITOS TEÓRICOS DA RELATIVIDADE RESTRITA.....	5
2.1	História da Física Moderna.....	5
2.2	Relatividade Restrita.....	6
2.3	Relatividade da Simultaneidade.....	7
2.4	Relatividade do tempo.....	8
2.5	Tempo próprio.....	12
2.6	Relatividade do comprimento.....	12
2.7	Transformações de Lorentz.....	16
2.8	Relatividade da velocidade.....	18
2.9	Momento linear.....	19
2.10	2ª Lei de Newton.....	21
2.11	Relatividade da massa.....	23
2.12	Energia cinética.....	23
2.13	$E = mc^2$ para o ensino médio.....	26
2.14	Efeito Doppler relativístico.....	29
3	CONCEITOS BÁSICOS DA RELATIVIDADE GERAL.....	33
3.1	Introdução.....	33
3.2	Desvio da luz.....	34
3.3	Desvio gravitacional para o vermelho.....	37
3.4	Buraco negro.....	40
4	APLICAÇÕES DE ALGUNS CONCEITOS DE RELATIVIDADE.....	46
4.1	Introdução.....	46

4.2 Aceleradores de partículas.....	46
4.3 Efeitos astronômicos como medida da expansão do universo.....	47
4.4 GPS.....	48
4.5 Usinas nucleares.....	50
4.6 Radares para estradas.....	51
5 EXPERIÊNCIAS E PROBLEMAS ICENTIVADORES.....	53
5.1 Introdução.....	53
5.2 Experiência imaginária do trem de Einstein.....	53
5.3 Expansão do universo.....	56
5.4 Paradoxo dos gêmeos.....	57
5.5 Paradoxo do comprimento.....	58
5.6 Um sinal pode ser recebido antes de ser enviado?.....	58
6 CONCLUSÕES.....	60
APÊNDICE.....	61
REFERÊNCIAS.....	62

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação para a monografia

Todos os dias, nas mais variadas situações, somos confrontados com eventos relevantes do cotidiano e que são meras aplicações dos conhecimentos reunidos pelo homem. Pela televisão os jovens podem observar em filmes o uso de tecnologias que se superam a cada dia. Porém eles são utilizadores desse produto sendo meros expectadores, sem que entendam ao menos como as coisas funcionam.

A escola não pode se limitar a formar futuros estudantes de Física ou outra área exata, mas sim preparar os alunos para o mundo que os espera. Discutir as tecnologias existentes para ajudá-los a compreender o porque elas são importantes.

Atualmente o currículo de Física nas escolas ainda é baseado nos conhecimentos desenvolvidos por Newton e outros de seu século, ou seja, defasado em relação às novas tecnologias. ?

O ensino deve ser estimulante, contemporâneo e contextualizado, por isso a importância do ensino da Física Moderna para alunos do Ensino Médio.

O século XX é um período de grandes mudanças na ciência e na vida das pessoas com um grande número de descobertas e criações de aparatos que viabilizam o uso dessas descobertas. Este século trouxe muito avanço tecnológico como rádios, celulares, GPS, computadores, aparelhos de ressonância magnética e outros que se utilizam de conceitos de uma Física nova. Mas apesar disso, o que é ministrado pelos professores de Ensino Médio ainda é a Física do século XIX, conhecida como Física Clássica. Que faz parte de equipamentos de baixa tecnologia e notoriedade, se comparada com IPOD, computadores e outros equipamentos familiares aos adolescentes. O que torna a Física, ministrada no colégio, cada dia mais distante do dia a dia do aluno.

O PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) [1] indica que a Física Moderna seja introduzida no Ensino Médio. Com base nisso, e após cursar a disciplina Física Moderna, fiz esta monografia motivado no desenvolvimento de conceitos da Física Moderna, enfatizando a Teoria da Relatividade.

Apesar de parecer complexa para ser tratada no Ensino Médio, trabalhei num método que facilita sua aplicação. O foco do trabalho está no professor e em como ele pode desenvolver esses temas em sala. O qual relato no corpo deste trabalho. Podendo até mesmo se utilizar para relembrar como algumas passagens, nas demonstrações, ou apenas revisando conceitos vistos na graduação.

A Matemática lecionada no Ensino Médio não é suficiente para embasar a aprendizagem completa de todos os cálculos relacionados às demonstrações das equações da Física Moderna. Por isso em cada capítulo abordei um tema específico, sempre com enfoque de tornar o tema de forma compreensível para os alunos.

Considero esse um trabalho importante porque observei vários livros do Ensino Médio que em apenas alguns o assunto é abordado em um ou outro tópico. Observo também que há uma tendência no aumento de publicações que abordam o assunto. E que este tem sido cobrado em alguns dos concursos de vestibular do país. Como por exemplo, já ocorre nos vestibulares da UECE (Universidade Estadual do Ceará) e UFC (Universidade Federal do Ceará).

Procurei neste trabalho desenvolver um método facilitador para que professores se utilizem dele ao ministrar suas aulas e até complementar os livros didáticos, que a meu ver ainda são insuficientes em seus conteúdos.

A Lei de Diretrizes e Bases preconiza que o importante é preparar os alunos de maneira que os conhecimentos adquiridos façam parte do cotidiano deles. E não somente com a obrigatoriedade de habilitá-los para o Ensino Superior em alguma Ciência Exata. O aluno apreende melhor aquilo que ele pode aplicar ou ver a sua volta.

1.2 Abordagem

O PCN subdivide a Física em seis temas, dentre estes destaco o tema cinco, “Matéria e Radiação (Unidades Temáticas: Matéria e suas propriedades, Radiações e suas interações, Energia Nuclear e Radioatividade, Eletrônica e Informática)” [1].

A compreensão desses temas por parte dos alunos os capacitará a dimensionar a importância de sua aplicabilidade, nas tecnologias de informação, obtenção de energia, e no conhecimento da natureza do mundo microscópico e macroscópico.

Um dos objetivos de se trabalhar os temas acima é ampliar a visão de mundo e a consciência individual do ser. A partir do enfoque CTS (Ciência, Tecnologia e Sociedade) proposto pelo PCN, trarei os conhecimentos da Física escolar para uma linha investigativa e questionadora, que é diferente da Ciência Física, embora ambas estejam relacionadas. Outro é ajudar alunos de Licenciatura em Física e professores de Física no preparo de aulas ou como guia rápido para consulta de soluções de equações ou métodos de trabalho.

A partir dos conhecimentos de Matemática e Física em nível do Ensino Médio, respeitando-se o tempo da relação ensino-aprendizagem de cada indivíduo, os alunos estarão aptos para o aprendizado de alguns conceitos de Relatividade Restrita e de Relatividade Geral.

1.3 Metodologia

No capítulo dois dou início ao estudo da Relatividade Restrita e como pode ser apresentada no Ensino Médio. Em todas as demonstrações deixei as equações com um número e uma letra. As equações com números e letras não precisam ser acompanhadas para entendimento do tema. Servem para que os professores possam ter um acesso rápido a como as equações foram deduzidas.

No capítulo três desenvolvo a Relatividade Geral e seus aspectos práticos. Nesse ponto a Matemática do Ensino Médio não é suficiente para o detalhamento do tema, mas ainda assim os deixo para ficar como uma revisão para o professor. Nele mostro maneiras alternativas que evitam o uso da Matemática e assim podem ser usados para explicar o tema. Para haver um interesse e entendimento de como surgiram as teorias, esses capítulos contam com um breve histórico que trabalhado em sala pode servir até como objeto motivador.

No capítulo quatro apresento algumas aplicações práticas na ciência e na tecnologia de alguns conceitos de Relatividade Restrita e de Relatividade Geral.

Como essa é uma monografia voltada para alunos da graduação em Licenciatura em Física e formandos, apresento no capítulo cinco problemas motivadores e experiências de baixo custo para facilitar o entendimento dos conteúdos. Eles podem ser utilizados para criar um clima de curiosidade na turma, afinal as suas respostas ou soluções vão contra o senso comum. É bem interessante observar nos alunos a surpresa diante dos problemas.

No apêndice apresento vídeos e programas de computador que são gratuitos, mas de excelente conteúdo.

Apesar de ser um tema com um enfoque histórico moderno - contemporâneo, o professor estando bem preparado e tendo o domínio dos conceitos, flexibilizando a linguagem científica de modo a facilitar a compreensão por parte dos alunos, trazendo exemplos práticos e de aplicabilidades desses mesmos conceitos, conseguirá passar o conteúdo sem muitas dificuldades.

Sabemos que tais dificuldades não serão superadas com facilidade, mas com criatividade e dedicação, tais problemas podem ser contornados.

2 CONCEITOS TEÓRICOS DA RELATIVIDADE RESTRITA

2.1 História da Física Moderna

O início do século XX inaugurou uma série de revoluções na Física. As teorias propostas por Newton não se mostravam suficientes para explicar todos os fenômenos observados. Entre eles explicar fenômenos elétricos e magnéticos, estudados por Maxwell, a incapacidade de descrever o espectro de radiação emitido por um corpo negro e os resultados contraditórios do experimento de Michelson - Morley. Também não era possível fazer uma modelagem do mundo macroscópico que fosse sustentável.

De acordo com a temperatura de um corpo, ele emite mais radiação em uma determinada frequência. O desvio do pico de intensidade da frequência foi proposta por uma fórmula empírica em 1896 por Wilhelm Wien que dava suporte para as radiações de baixa frequência. Em junho de 1900, Lord Rayleigh (John William Strutt, 1842-1919) mostrou a chamada lei de equipartição da energia e ela se aplicava bem para radiações de alta frequência. Em outubro de 1900, Planck encontrou uma fórmula que interpolava entre essas duas leis e fornecia um excelente ajuste a todos os dados experimentais conhecidos. Ele conseguiu isso introduzindo conceitos contraditórios a Física Clássica como a necessidade da energia ser sempre um múltiplo inteiro de uma constante. Constante essa chamada de constante de Planck. [2]

Em 1904 Thompson propôs o primeiro modelo atômico. Em 1905 um empregado de terceira classe do escritório de Patentes acabara de postar um manuscrito para a revista *Annalen der Physik*. Com ousadia e originalidade, Albert Einstein propusera uma hipótese física revolucionária: a energia de radiação eletromagnética estaria repartida em pacotes discretos. Nascia o conceito de fóton.[3] Einstein formulou a teoria da relatividade restrita que é implica numa mudança da concepção do espaço e do tempo. Seu trabalho alterou para sempre a maneira como vemos o mundo natural. "Newton, por favor, me perdoe" [3],

implorou Einstein quando sua teoria da relatividade alterou os absolutos de tempo e espaço. Em 1915 Einstein ampliou sua teoria, a relatividade geral, que demonstra a equivalência entre gravidade e aceleração além da curvatura do espaçotempo devido a corpos massivos.

Os desdobramentos de tais descobertas deram origem à Física Quântica. Na Física Clássica o determinismo imperava sobre as teorias, fazendo-as sempre terem certeza do local onde se encontra um objeto por exemplo. A Física Quântica tem por característica o uso de probabilidades. Mesmo os resultados experimentais comprovarem até hoje sua veracidade, não é possível determinar exatamente, a posição ou a velocidade de um elétron ou outro objeto microscópico.

Essas duas teorias violavam o senso comum que se tinha desde Newton: mostravam que o espaço e o tempo não são absolutos e a indicavam a impossibilidade da certeza absoluta, explicando fenômenos por meio de probabilidades. Em compensação elas forneceram respostas para os problemas que antes não tinham solução, além de poder ser usadas para modelagens do mundo microscópico ao macroscópico, que revolucionaram o mundo e a ciência. A cada dia são descobertos novos detalhes e são criadas novas dúvidas. Como hoje, a ligação entre a campo gravitacional e a mecânica quântica.

2.2 Relatividade Restrita

A teoria da relatividade foi apresentada em duas situações. A primeira, em 1905, se referia apenas a referenciais inerciais, isto é, que não são acelerados. Em 1915 é apresentada a teoria da relatividade geral que ao contrário da outra trata de referenciais acelerados.

Na introdução do seu trabalho de 1905 sobre a eletrodinâmica de corpos em movimento Einstein comenta a descrição aparentemente assimétrica dos efeitos de indução eletromagnética entre um fio condutor e um ímã, independente de qual deles esteja se movendo, apenas importando o movimento relativo entre eles.

Depois diz “Exemplos desse tipo, bem como as tentativas malogradas de detectar um movimento da Terra em relação a um éter, sugerem que fenômenos eletromecânicos, da mesma forma que os mecânicos, não têm quaisquer propriedades compatíveis com a idéia de repouso absoluto”.

A eletrodinâmica de Maxwell demonstrou que a velocidade de uma onda eletromagnética é uma constante, independente do observador e uniu a eletrodinâmica à óptica. Essa era uma idéia muito difícil de ser aceita, pois como a velocidade de uma onda poderia ser a mesma para todos os observadores se a mecânica clássica de Newton dizia o oposto?

Com base na informação acima, Einstein criou os fundamentos da Teoria da Relatividade Restrita através de dois postulados:

- (1) **PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE RESTRITA:** *As leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais.*
- (2) **PRINCÍPIO DE CONSTÂNCIA DA VELOCIDADE DA LUZ:** *A velocidade da luz no vácuo é a mesma em todas as direções e em todos os referenciais inerciais, e é independente do movimento da fonte.*

2.3 Relatividade da simultaneidade

A relatividade da simultaneidade foi uma conclusão difícil de ser aceita: dois observadores com movimento relativo entre eles, não devem concordar quanto à *simultaneidade* de dois eventos. Se um dos observadores considerar dois eventos simultâneos, o outro não necessariamente irá concordar com isso. Suponhamos dois referenciais inerciais diferentes colocados em duas naves. Uma em repouso e outra que se desloca em relação à primeira em movimento retilíneo uniforme, na mesma direção e em sentido oposto. Observe a figura 1. Em um instante coincidente nos dois referenciais, chamados por Maria e João, ocorrem dois eventos. Esses eventos são acendimentos de lâmpadas, uma vermelha e outra azul, acendidas nos extremos das naves. Figura1-a.

Do primeiro postulado, sabemos que a luz emitida, se propaga em todas as direções com velocidade constante e igual. João que está em uma das naves exatamente no meio do início da propagação da luz, percebe as duas frentes de onda ao mesmo tempo. Figura 1-b. Já que a distância percorrida é igual para ambas as frentes de onda. Vermelha e azul. Maria que está na outra nave com certa velocidade e conseqüente movimento em relação a João vai de encontro a frente de onda vermelha. Por isso ela percebe que a luz avermelha acendeu primeiro, Figura 1-c, recebendo depois a frente de onda azul. Figura 1-d. Afirmando que os eventos aconteceram em momentos distintos. Um evento, para referenciais diferentes, que se movem em relação um ao outro, serão percebidos em momentos diferentes dependendo das suas respectivas distâncias do evento. Simultaneidade é um conceito relativo, depende do observador.

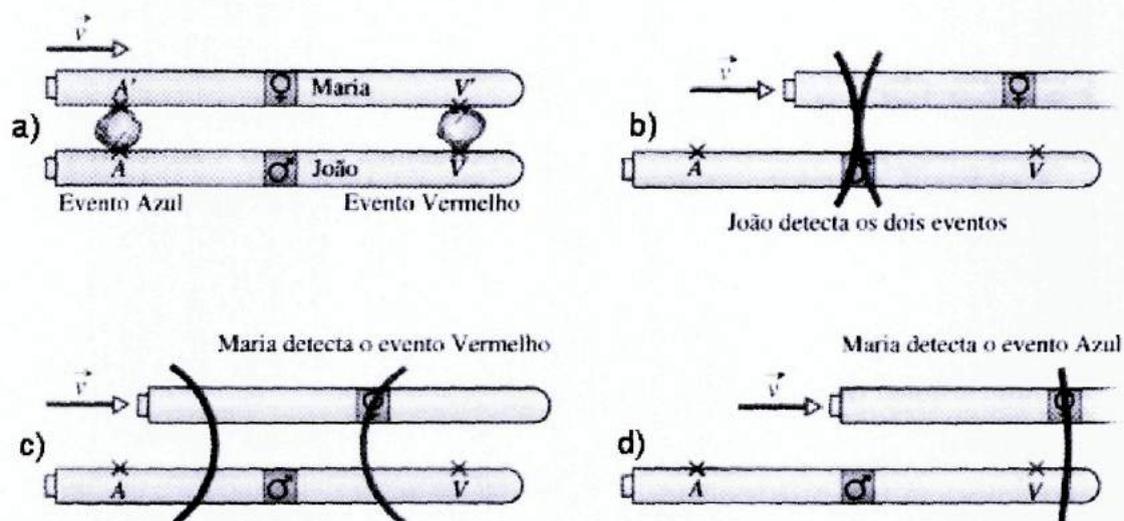


Figura 1 Relatividade da simultaneidade [4].

2.4 Relatividade do tempo

O tempo para Newton e no senso comum é chamado de *tempo absoluto*. Absoluto porque independente do observador e de sua localização; ele passa de

maneira igual párea todos. Para estudar a passagem do tempo é necessária, a comparação da medida do passar do tempo entre dois referenciais. Isso só pode ser feito se forem feitas medidas simultâneas. Como já foi dito o conceito de simultaneidade é relativo, então para deduzir uma relação quantitativa entre os diferentes intervalos de tempo medidos por referenciais diferentes, ver figura 2, imaginemos a situação:

Um feixe de luz sai de uma lâmpada no chão de um trem, em movimento retilíneo uniforme, com velocidade V , e é refletida por um espelho no teto. Maria que está dentro do trem mede o tempo que a luz leva para ser chegar ao chão ao ser refletida. Percurso que vai de **A** até **B**. João que se encontra do lado de fora do trem faz a mesma medida. Para João o percurso feito pela luz sai de **A** reflete em **B₁** e termina em **C**.

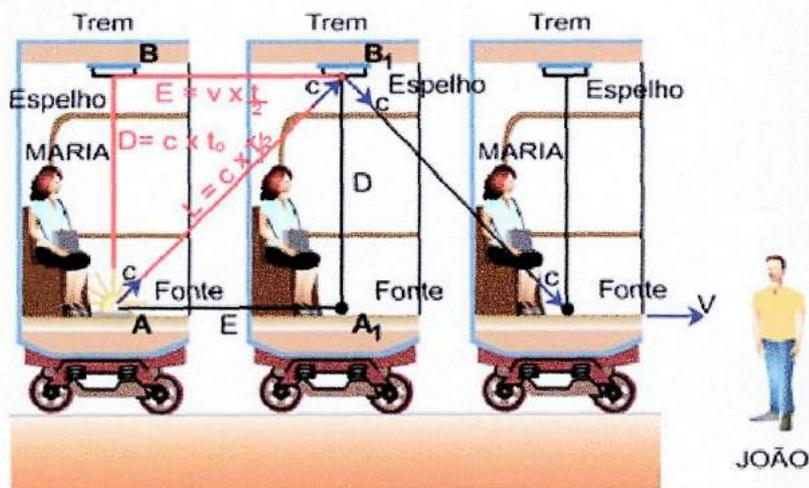


Figura 2. Como provar a dilatação do tempo [5].

Sabendo que a velocidade da luz é constante e vale c , Maria calcula o tempo gasto como:

$$\Delta t_0 = 2 \frac{D}{c}, \quad (1)$$

onde D é a altura do trem e c é a velocidade da luz.

João que está posicionado fora do trem observa que a luz percorre um caminho diferente. Para ele a luz faz dois caminhos que são como diagonais formando um triângulo retângulo.

Para ele a distância percorrida L , caminho de **A** até **B**₁, é igual a:

$$L = \sqrt{D^2 + \left(\frac{V \cdot \Delta t}{2}\right)^2} \quad (2)$$

Utilizando a definição de velocidade, para encontrar o tempo medido por João substitui-se (2) em (1), encontrando (3).

$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{D^2 + \left(\frac{V \Delta t}{2}\right)^2} \quad (3)$$

Para achar uma relação entre Δt e Δt_0 que não dependa da distância explicita-se D em (1) e o resultado substitui em (3).

Em etapas:

$$\Delta t_0 = 2 \frac{D}{c} \quad (3.a)$$

$$D = \frac{c \Delta t_0}{2} \quad (3.b)$$

Substituindo (3.b) em (3):

$$\Delta t = \frac{2}{c} \sqrt{\left(\frac{c \Delta t_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{V \Delta t}{2}\right)^2} \quad (3.c)$$

$$\left(\frac{c \Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c \Delta t_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{V \Delta t}{2}\right)^2 \quad (3.d)$$

$$(c \Delta t)^2 = (c \Delta t_0)^2 + (V \Delta t)^2 \quad (3.e)$$

$$(c\Delta t)^2 - (V\Delta t)^2 = (c\Delta t_0)^2 \quad (3.f)$$

$$(c^2 - V^2)\Delta t^2 = c^2(\Delta t_0)^2 \quad (3.g)$$

$$(\Delta t_0)^2 = \Delta t^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \quad (3.h)$$

$$\Delta t^2 = \frac{(\Delta t_0)^2}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)} \quad (3.i)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (4)$$

Essas etapas não são triviais para alunos, sozinhos, mas com o acompanhamento do professor podem ser entendidos. Afinal o cálculo é apenas trabalhoso. A partir da equação acima se verifica que é impossível para alguém se mover com velocidade superior a velocidade da luz. Se houvesse velocidade superior a $3 \cdot 10^8$ m/s o radical se tornaria negativo.

Como o denominador é sempre menor que um o que indica que Δt é sempre maior que Δt_0 . A isso chamamos de **dilatação do tempo**. Sempre que um observador *A* se move com certa velocidade em relação a outro, *B*, o tempo passa de forma mais lenta. Como se o tic-tac de seu relógio passasse mais lento do que o tic-tac do relógio de *B*. Esse ritmo mais lento do passar do tempo é não percebido pelas pessoas que se encontram nesse referencial, pois tudo, reações biológicas, químicas, etc, ficam mais lentas. Só se percebe essa diferença quando se compara dois intervalos ocorridos em sistemas diferentes.

2.5 Tempo próprio

É o intervalo de tempo entre dois eventos medidos pelo observador que está no sistema de referência no qual ocorre os eventos. Esse é considerado o referencial em repouso, em relação a outros, qualquer que seja o referencial inercial escolhido [6].

Grandezas **próprias** são aquelas relativas ao sistema de referência do observador em repouso dentro do seu *próprio* sistema. Ou seja, sempre que são medidas no próprio sistema são *grandezas próprias* daquele sistema.

Uma observação importante é que as fórmulas da relatividade são **recíprocas**. Por exemplo, se na equação (4), o intervalo de tempo Δt_0 for o intervalo de tempo *próprio* medido pelo observador (João) que está em repouso na plataforma e o intervalo de tempo Δt for o intervalo de tempo *relativo* medido por Maria dentro do trem que se desloca com velocidade V em relação ao primeiro, concluímos que, para Maria o tempo está **dilatado** em relação ao tempo medido por João. Por outro lado, se na equação (4), o intervalo de tempo Δt_0 for o intervalo de tempo *próprio* medido por Maria que está em repouso dentro do trem, e o intervalo de tempo Δt for o intervalo de tempo *relativo* medido por João na plataforma que se desloca com velocidade $-V$ em relação ao trem, concluímos que, para João o tempo está **dilatado** em relação ao tempo medido por Maria.

Essa observação da **relatividade** das fórmulas da Teoria da Relatividade dá origem a diversos paradoxos quando as fórmulas não são bem compreendidas. Um dos paradoxos mais curiosos é conhecido como “paradoxo dos gêmeos” que será discutido no capítulo 5.

2.6 Relatividade do comprimento

Não só o tempo depende do sistema de referência. O comprimento também. Afinal o comprimento é marcado a partir de duas medidas simultâneas e como foi visto no item anterior simultaneidade é um conceito relativo que leva a conclusão

que de que o espaço também o seja. Dependendo sempre do observador e do referencial.

Para se encontrar uma relação entre comprimentos observados por dois referenciais, um em movimento e outro em repouso, observemos a situação abaixo descrita.

Em um trem em movimento, figura 3, mede-se o tamanho de uma régua com o auxílio de um laser. Conhecendo a velocidade da luz e o tempo que a luz leva para ir de uma ponta até um espelho e voltar, pode-se determinar seu tamanho. O laser é posto na extremidade da régua e na outra extremidade é colocado um espelho. O observador dentro do trem, com velocidade u , será S' e o observador externo em repouso faz a mesma medida. Esse referencial chamaremos de S .

Para S' a régua está em repouso então o tempo que o pulso de luz leva para sair da fonte e retornar é:

$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c} \quad (5)$$

Para S , referencial do lado externo em repouso, o caminho percorrido pela luz ficou maior, pois o trem está em movimento. Para ele enquanto a o feixe de luz deixa o laser a extremidade como espelho fica cada vez mais distante devido à sua velocidade. Chamarei de Δt_1 o tempo de ida e Δt_2 o tempo de volta. A distância percorrida vista por S é:

$$d = l + u\Delta t_1 \quad (6)$$

O pulso de luz tem velocidade c logo é verdade que:

$$d = c\Delta t_1 \quad (7)$$

Substituindo e equação (7) na equação 6 para eliminar d obtém-se:

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c-u} \quad (8)$$

O tempo que o pulso leva para ir do espelho de volta a fonte, Δt_2 , é análogo. A distância agora é dada, pois agora como o pulso de luz está em sentido contrário a velocidade do trem o sinal no denominador se inverte:

$$d = l - u\Delta t_1 \quad (8.a)$$

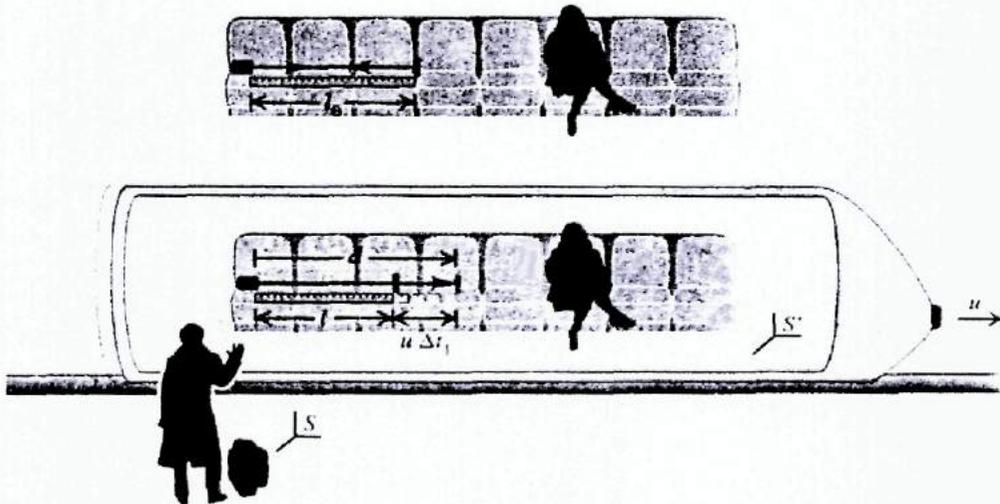


Figura 3 Medida de comprimento por dois referenciais diferentes. [6]

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c+u} \quad (9)$$

O tempo total é a soma dos tempos $\Delta t_1 + \Delta t_2$

$$\Delta t = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{2l}{c\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \quad (10)$$

Δt e Δt_0 estão relacionados pela equação (4). Utilizando essa informação para reescrever a equação (5) obtém-se:

$$\Delta t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2l_0}{c} \quad (11)$$

Combinando a equação (11) com a (10), substituindo Δt :

$$\frac{2l}{c \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2l_0}{c} \quad (11.a)$$

$$l \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = l_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \quad (11.b)$$

$$l = \frac{l_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (11.c)$$

$$l = \frac{l_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (11.c)$$

$$l = \frac{l_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (11.d)$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (12)$$

Essa equação mostra que o comprimento diminui conforme a velocidade aumenta. Observe que isso não é ilusão, o comprimento na direção paralela da velocidade realmente diminui com o aumento da velocidade, e essa velocidade novamente não pode ser maior que a velocidade da luz, c .

contrário da velocidade relativa u . Fazendo essa substituição em (13) e novamente explicitando x' :

$$x' = -ut' + x\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (15)$$

Com as equações obtidas, (14) e (15), é possível eliminar x' e se ter uma nova expressão:

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (16)$$

Reunindo as relações encontradas obtemos o seguinte conjunto de equações para transformações de coordenadas.

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t - ux/c^2) \end{aligned}} \quad (17)$$

As equações (17) são conhecidas como **transformações de Lorentz**. Nessas equações, para simplificar adotei a seguinte notação:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (18)$$

O fator γ indicado na equação (18) é chamado de **fator de Lorentz**.

Essas transformações mostram que o tempo e o espaço são interligados não existindo um sem o outro. O espaço e o tempo são interligados; não podendo-se

dizer que espaço e tempo possuem significados absolutos independente do sistema de referência. Por isso se costuma usar o termo “*espaçotempo*” para enfatizar a ligação entre o espaço e o tempo [4].

Quando u tende a zero encontra-se as transformações de Galileu o que mostra que as transformações de Lorentz são uma generalização das transformações de Galileu. Essas transformações só são utilizadas quando a velocidade é próxima à velocidade da luz, caso não sejam, os efeitos são tão pequenos que podem ser desprezados.

2.8 Relatividade da velocidade

Conhecendo as relações que constituem as *transformações de Lorentz* podemos determinar uma relação entre a velocidade de um objeto medida em um referencial e sua velocidade medida em outro. Usando o fator de Lorentz, a relação entre x e x' é dada por:

$$x' = \gamma(x - ut) \quad (19)$$

A relação entre t e t' é dada por:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \quad (20)$$

Em sala de aula enfatize que a notação dx ou dt são como Δs ou Δt , apenas significando uma variação muito pequena. Utilizando variações de tempo e espaços muito pequenos, dx e dt , dividimos cada membro da equação (19) e (20) por dt . Velocidade média é definida como $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, logo $\frac{dx}{dt}$ também é a velocidade instantânea. Chamarei-a de u . Fazendo por etapas:

O momento clássico é dado por:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t_0} \quad (24)$$

Δx é o deslocamento medido por um observador externo que e Δt_0 o tempo que medido por um observador que se desloca junto da partícula. Novamente, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ é a definição de velocidade, representada por v .

Multiplicando e dividindo (24) por Δt :

$$p \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t_0} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} \quad (24.a)$$

$$p = m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \quad (24.b)$$

$$p = mv \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \quad (24.c)$$

Das relações de Lorentz para o tempo verifica-se que $\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \gamma$, com isso a expressão generalizada do momento linear, para qualquer velocidade, é:

$$p = \gamma \cdot m \cdot v \quad (25)$$

A diferença entre o momento clássico e o momento relativístico é o fator γ . Esse fator já vem acompanhando várias equações e será uma constante nas equações que serão vistas.

As leis de Newton servem para a maioria dos referenciais aos quais estamos acostumados a trabalhar. Se for necessário trocar de referencial elas se mantêm

inalteradas e continuam válidas. Porém como foi visto no princípio da relatividade é necessário utilizar as transformações de Lorentz, para uma mudança de referenciais, de forma mais geral, abrangendo assim valores altos para a velocidade.

2.10 2ª Lei de Newton

A equação $\vec{F} = m\vec{a}$ pode ser escrita como $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, onde a força é a derivada temporal do momento linear. Para velocidades relativísticas é preciso usar uma expressão que use o momento linear relativístico. Nesse ponto não há como demonstrar para alunos do ensino médio já que eles não veem o conceito de derivada. Esse ponto é exclusivo para o professor e até para que relembre tais passagens. Traga informações adicionais para a aula e a torne mais completa.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (26)$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \frac{m}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} \vec{a} \quad (26.a)$$

$$F = \gamma^3 ma \quad (\vec{F} \text{ e } \vec{v} \text{ na mesma direção}) \quad (27)$$

A força não é mais diretamente proporcional à aceleração, por isso uma força constante não produz uma aceleração constante [6]. Observe que a medida que a velocidade aumenta a aceleração reduz continuamente para uma dada força.

Quando $v=c$ a aceleração é nula independente da força aplicada.

Em um uma força sendo aplicada na mesma direção da velocidade temos como aceleração usando a equação (27):

$$a = \frac{F}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} \quad (27.a)$$

Vemos que conforme a velocidade da partícula aumenta a aceleração produzida é cada vez menor, independente do valor da força. Por isso a velocidade da luz é tida como 'velocidade limite', já que quando v se torna igual a velocidade da luz a aceleração vai a zero independente da força aplicada, portanto a velocidade não pode mais aumentar.

Em aceleradores circulares de partículas a força e a velocidade são perpendiculares. Nesse caso a força não exerce trabalho e a velocidade é constante. Desse modo o denominador de (26) é constante, lembrando que a derivada do vetor velocidade é o vetor aceleração chega-se ao resultado:

$$\vec{F} = \gamma m \vec{a} \quad (\vec{F} \text{ e } \vec{v} \text{ perpendiculares}) \quad (28)$$

Quando o vetor força e o vetor velocidade possuem a mesma direção existe um fator de γ^3 em (27). Quando o vetor força e o vetor velocidade são perpendiculares o fator se torna γ visto em (28). Devido à diferença γ e γ^3 , em (27) e (28), as componentes da aceleração não são proporcionais as componentes da velocidade. A aceleração será diferente dependendo da direção da força aplicada e da direção da velocidade. Uma força que seja oblíqua, ou seja, nem perpendicular nem paralela, produz acelerações magnitudes diferentes na perpendicular e na direção paralela à velocidade. *"Exceto quando a força resultante sobre uma partícula relativística está na direção da velocidade ou é perpendicular a ela o vetor aceleração e força não são vetores paralelos"* [6]

2.11 Relatividade da massa

A massa relativística é a massa inercial ganha por um corpo quando este adquire velocidade. Note que quando um corpo ganha velocidade ele não ganha matéria, confusão muito comum quando esse tema é tratado em sala de aula tanto quanto com leigos. É sua inércia que aumenta. Inércia é a medida da oposição de um corpo a sua alteração de velocidade. Comparando a equação do momento linear com o momento linear relativístico, chamando a massa de repouso de m e a massa relativística de m_{rel} temos:

$$m_{rel} = \gamma m \text{ OU } m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (29)$$

Observe que quando v se torna igual a c a massa relativística (inércia) é infinita o que impede que sua massa seja acelerada até atingir a velocidade da luz.

2.12 Energia cinética

Esse tópico, como 2.11, não pode ser trabalhado integralmente, na parte matemática, na escola. Dessa vez pelo uso da integral. No tópico seguinte tratarei ? outra maneira de chegar na equação $E=mc^2$ utilizando meios que possam ser trabalhados no ensino médio. A justificativa desse capítulo é mostrar que é impossível atingir a velocidade da luz, pois a energia necessária para isso é infinita.

Para um corpo que não possui energia potencial a energia cinética é igual ao trabalho realizado sobre ele. O trabalho clássico é calculado por $W = \int F dx$. Essa expressão pode ser modificada de forma mudar a integral, tirando o espaço e utilizando a velocidade. Assim se pode ter uma expressão com os limites

possíveis da velocidade. Como: $v = \frac{dx}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$ e $p = mv$ a equação $W = \int Fdx$ ganha a forma:

$$W = \int_0^{x_2} Fdx = \int_0^{x_2} \frac{dp}{dt} dx = \int_0^v vdp \quad (30)$$

No entanto, o momento linear relativístico é dado por:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (30.a)$$

Como visto em (24).

Utilizando a relação $vdp = d(vp) - pdv$ em (30):

$$W = \int_0^v [d(vp) - pdv] \quad (30.b)$$

$$W = \left[\frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]_0^v - m \int_0^v \frac{v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} * \quad (30.c)$$

Nesse ponto é melhor dividir as soluções para não ficar confuso. Resolverei primeiro a integral com um asterisco e depois unirei as respostas.

*solução de**

$$u = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad (30.d)$$

$$du = -2v dv / c^2 \quad (30.e)$$

$$dv = -c^2/2v \quad (30.f)$$

$$\int_0^v \frac{-vc^2}{2v\sqrt{u}} = \frac{-c^2}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot u^{1/2} \Big|_0^v = -c^2 \cdot \sqrt{1-v^2/c^2} + c^2 \quad (31)$$

Unindo o resultado (31) com (30) e continuando a álgebra:

$$W = \left[\frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{m \cdot 0^2}{1-0^2/c^2} \right] + mc^2 \sqrt{\left(1-v^2/c^2\right)} - mc^2 \quad (31.a)$$

$$W = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{\left(1-v^2/c^2\right)} - mc^2 \quad (31.b)$$

$$W = \frac{mv^2 + mc^2 - mv^2 - mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (31.c)$$

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (32)$$

Simplificando (32) termina em:

$$W = \gamma mc^2 - mc^2 \quad (33)$$

Pode-se observar pelo gráfico, figura 4, que a energia cinética clássica e relativística são iguais para baixas velocidades, e que a energia vai a infinito quando $v=c$

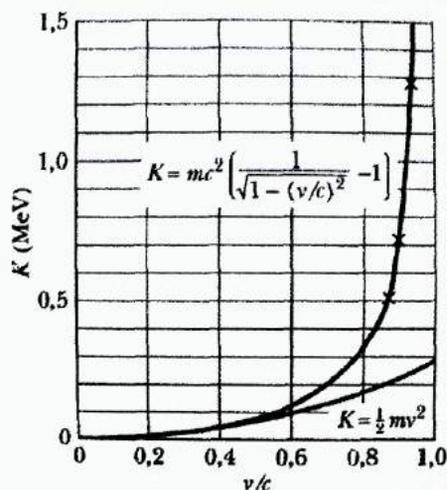


Figura 4, gráfico da energia cinética em função da fração v/c [4]

Para uma partícula em repouso sua energia é $E = mc^2$, essa é chamada energia de repouso da partícula. Assim chamada porque ela independe do valor da velocidade. Esse termo é a base teórica da produção de energia em processos de fusão ou fissão nuclear. Uma vez que ele mostra uma equivalência entre massa e energia. Em processos de fissão ou fusão nuclear a massa do átomo, produzido é menor que a massa dos átomos que o compuseram. Essa diferença na massa é liberada em forma de energia.

2.13 $E = mc^2$ para ensino médio

No tópico anterior fiz a demonstração que se encontra nos livros de graduação e que é vista pelos licenciados em Física. O problema da matemática utilizada é que foge do alcance dos alunos de ensino médio. Einstein em 1905 fez uma dedução mais elegante que depende apenas dos conhecimentos da conservação do momento linear e álgebra simples [7].

Nessa dedução deve-se considerar um cilindro oco, de massa M , que possui dois pontos A e B no eixo central do cilindro. Observe a figura 5. De onde um pulso de radiação é emitido de A e é absorvido em B. Esse cilindro se

encontra em repouso, isolado de forças externas, assim, o momento linear é conservado e o centro de massa permanece fixo.

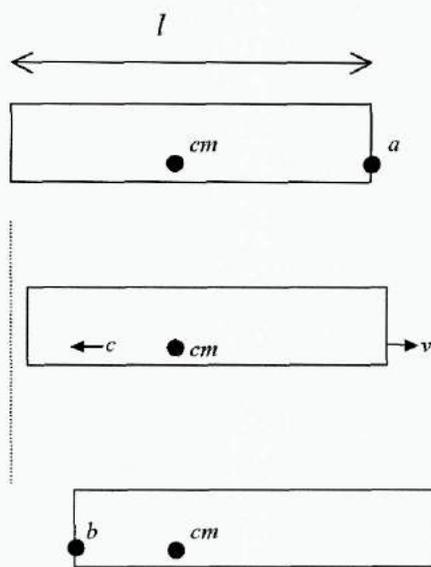


Figura 5, desenho do cilindro para demonstrar a equação $E = mc^2$ para o ensino médio.

Antes do pulso ser emitido o momento linear do sistema é nulo, então quando ele é emitido de forma conservar o momento o cilindro adquire velocidade em sentido oposto e se move até que o pulso eletromagnético seja absorvido em b .

Sabemos que o momento linear de um pulso eletromagnético é dado por

$p = \frac{E}{c}$, e com isso a equação da conservação do momento linear fica:

$$(M - m)d - \frac{E}{c} = 0 \quad (33.a)$$

$$E = cv(M - m) \quad (34)$$

O termo $(M-m)$ é consequência da perda de massa pelo cilindro. Quando o pulso é emitido de A ele leva certo tempo para chegar em b , tempo que pode ser calculado pela definição de velocidade média:

$$\frac{d}{v} = \frac{l-d}{c} \quad (34.a)$$

$$l-d = \frac{cd}{v} \quad (35)$$

Pelo cilindro estar isolado de forças externas o seu centro de massa fica fixo durante todo o processo. Considerando o centro de massa como o zero e sabendo que ele está no meio do cilindro irei calcular a coordenada x do centro de massa após o pulso ser emitido e ser absorvido no ponto b .

$$x_{cm} = 0 = \frac{(M-m)\left(\frac{d}{2}\right) - m\left(\frac{l}{2} - \frac{d}{2}\right)}{M} \quad (35.a)$$

$$(M-m)d = m(l-d) \quad (35.b)$$

Isolando o termo $(l-d)$:

$$(l-d) = \frac{d(M-m)}{m} \quad (36)$$

Com o valor de $(l-d)$ substitui-se em (35) de forma determinar v .

$$(M-m)\frac{d}{m} = \frac{cd}{v} \quad (36.a)$$

$$v = \frac{cm}{(M-m)} \quad (37)$$

Com o valor da velocidade do cilindro com a emissão do pulso, utiliza-se esse valor em (34). Já deixei a equação com E explicitado sendo mais rápido determinar seu valor, economizando tempo e contas.

$$E = \frac{c^2 m (M - m)}{(M - m)} \quad (37.a)$$

$$E = mc^2 \quad (38)$$

Esse método é muito bom para ser usado em sala de aula, pois é simples de demonstrar e leva os alunos a conhecerem uma das equações mais conhecidas e discutidas em todo mundo.

Einstein quando escreveu essa dedução escreveu ainda: [8] “A lei de conservação da massa é um caso especial da lei de conservação da energia.” Aos professores deve ser feita uma ressalva nesse modelo. Nessa modelagem o cilindro ganha velocidade assim que o pulso é emitido mas para isso todos os pontos do cilindro deveriam receber a informação de que ele foi emitido no exato instante da emissão. De acordo com a Relatividade Especial nenhuma informação pode ter a característica de informar todos os pontos do cilindro ao mesmo tempo e instantaneamente a emissão. Em modelagens mais rigorosas, [9] mostra-se que quando o cilindro não é um corpo rígido ainda é obtida equação (38).

2.14 Efeito Doppler relativístico

No estudo do movimento ondulatório quando o emissor de ondas se move em relação ao observador a frequência das ondas observadas é diferente da frequência das ondas emitidas. Isso se deve ao fato de que conforme as ondas são emitidas a fonte se move na direção de propagação da onda, tornando as frentes de ondas mais ou menos compactas.

O mesmo acontece com ondas eletromagnéticas. O comprimento de onda visto por um observador em que a fonte, de ondas eletromagnéticas, se aproxima é diferente do comprimento da onda emitida.

Como visto na figura 6, a fonte S' vai em direção a O, as frentes de onda ficam mais compactas com o movimento.

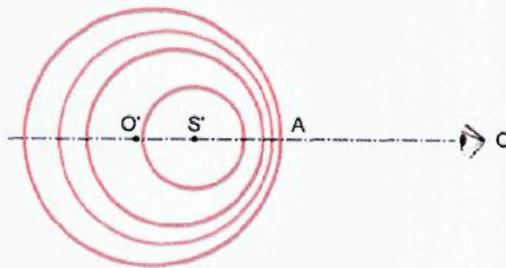


Figura 6, como um observador vê ondas de uma fonte se movendo em sua direção.

A velocidade do som é sempre relativa ao meio, mas a velocidade da luz não. Ela é constante independente do meio ou da existência de um meio. No vácuo ela tem sempre o valor c em todas as direções e todos os referenciais inerciais. Para o observador, da figura 7, durante um tempo T a crista de onda emitida percorre um percurso de cT . Antes desse deslocamento a fonte emite outra crista de onda que percorre um percurso uT . A diferença entre o ponto que se encontra a primeira crista de onda quando a segunda crista é emitida é o comprimento de onda λ detectado pelo observador.

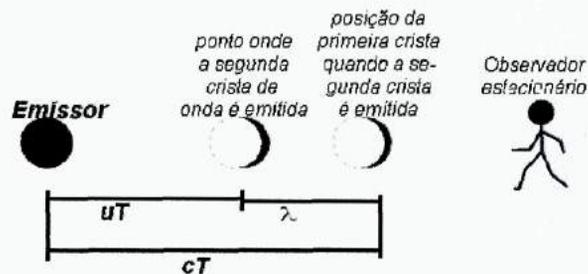


Figura 7. Observador estacionário.

Pela figura 7 o comprimento de onda λ detectado é igual a $\lambda = cT - uT$ ou seja $\lambda = (c - u)T$. A velocidade de uma onda é definida como o produto de sua velocidade pela sua frequência, logo a frequência por ele medida é:

$$f = \frac{c}{(c-u)T} \quad (39)$$

Frequência e período de onda são relacionados como um o inverso do outro. Devido aos efeitos da dilatação do tempo a altas velocidades, o tempo irá passar em um ritmo diferente e outra frequência será observada no referencial da onda, que é dado por:

$$f_0 = 1/T_0 \quad (39.a)$$

De acordo com (4) T e T_0 se relacionam de acordo com a equação:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdot \frac{c}{c} = \frac{cT_0}{\sqrt{c^2-u^2}} \quad (40)$$

Como visto $T_0 = 1/f_0$, logo

$$T = \frac{cT_0}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{c}{f_0\sqrt{c^2-u^2}} \quad (41)$$

É importante notar que $1/T$ não é igual a f , pois, se trata de um caso relativístico e o que se deseja encontrar é a expressão de f . Com o valor de T encontrado em (40) substituí-se diretamente em (39).

$$f = \frac{c \cdot f_0 \sqrt{c^2-u^2}}{c(c-u)} = \frac{f_0 \sqrt{c^2-u^2}}{(c-u)} \quad (41.a)$$

$$= \frac{f_0 \sqrt{(c-u)(c+u)}}{(c-u)} \cdot \frac{\sqrt{(c-u)}}{\sqrt{(c-u)}} \quad (41.b)$$

$$= \frac{f_0 (c-u) \sqrt{(c+u)}}{(c-u) \sqrt{(c-u)}} \quad (41.c)$$

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} \quad (42)$$

Esse resultado (42) mostra que quando uma fonte se aproxima de um observador a frequência observada é maior que a emitida. A diferença entre a frequência observada e a emitida é chamada de deslocamento Doppler.

No caso da fonte se afastar do observador, o sentido da velocidade é inverso, e com isso os sinais da velocidade em (42) se invertem, de acordo com o princípio da relatividade que afirma que trocar de observador as leis físicas tem de ser as mesmas corrigindo apenas o sinal da velocidade relativa.

$$f = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} f_0 \quad (43)$$

No cálculo do efeito Doppler para ondas sonoras, importa a velocidade da fonte e a velocidade do observador. Ao passo que no efeito Doppler para ondas eletromagnéticas só importa a velocidade relativa entre observador e fonte.

É comum observarmos o efeito Doppler com ondas sonoras, com ondas eletromagnéticas ele é comprovado observando-se a luz que vem de galáxias distantes. Quando elas se afastam, o comum, o comprimento de onda aumenta o que é conhecido como **desvio para o vermelho** ou **redshift**. No caso de galáxias que se aproximam o comprimento de onda fica menor e leva o nome de **desvio para o azul** ou **blueshift**. Esse conhecimento é importante para a astronomia e astrofísica. Edwin Hubble, astrônomo do século XX, se fundamentou nesse conhecimento para afirmar que o universo está em expansão.

3 CONCEITOS BÁSICOS DA RELATIVIDADE GERAL

3.1 Introdução

A relatividade Geral é uma das teorias da Física publicada em 1916. Nessa teoria Einstein explica o comportamento da matéria, energia e do espaço. A teoria descreve eventos estranhos conversão de massa em energia e vice-versa. Ela abrange o estudo dos referenciais acelerados que não foram vistos na Relatividade Restrita. Essa é uma teoria nova e completa a anterior, já que passa a considerar outros referenciais. O espaço e o tempo passam a estar interligados. Assim como o espaço, o tempo passa a ser uma coordenada, o universo passa ter quatro dimensões.

Distâncias entre dois pontos agora são dadas pela expressão:

$$D = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2 + (z_f - z_i)^2 + c^2(t_f - t_i)^2}$$

Com essa expressão mesmo que um objeto não mude de posição o simples passar do tempo faz com que ele esteja em um lugar diferente do espaçotempo, em relação à posição anterior.

Nesse espaçotempo é utilizada a geometria não-euclidiana. Com essa geometria pode-se explicar a curvatura do espaçotempo e provar que a "curva" que a luz faz ao passar perto de objetos massivos não é uma curva mas uma alteração do espaçotempo que no referencial do observador, se vê como uma curva, mas no referencial da luz é uma linha reta. Como os postulados de Einstein determinam. Para facilitar a visualização desse tema é interessante assistir e exibir os vídeos listados no apêndice.

O princípio da equivalência, proposto por Einstein em 1911, foi enunciado de forma que *as leis da natureza devem ser escritas de modo que seja impossível*

distinguir um campo gravitacional uniforme de um sistema de referência com aceleração constante. Esse é o conceito fundamental da Relatividade Geral.

A Relatividade Especial trouxe o fim do tempo absoluto e a Relatividade Geral trouxe uma teoria que poderia ser utilizada para explicar o campo gravitacional. A explicação do mundo microscópico trouxe a Teoria Quântica, que extingue o determinismo e passa a valer-se de equações cujo resultado são sempre probabilidades.

Uma consequência importante na relatividade geral é a equivalência entre massa inercial e massa gravitacional. Massa inercial é a medida da resistência de um corpo para mudar de estado, dada pela segunda lei de Newton. Já a força gravitacional é a força que uma massa é capaz de produzir em outra. Essa questão é crucial para validar a Relatividade Geral e por isso foi várias vezes testada. Nada diz que a *massa inercial* deva ser igual à *massa gravitacional*. Mas experiências extremamente precisas mostram que elas diferem no máximo em uma parte em 10^{12} [11]. Essa igualdade é uma outra consequência do *princípio da equivalência* mencionado anteriormente.

3.2 Desvio da luz

Um feixe de luz em movimento retilíneo, quando passa por um campo gravitacional é desviado de um ângulo θ como se estivesse caindo, sendo atraído pela força da gravidade. Um fóton de luz não tem massa e portanto não pode ser atraído pela força gravitacional, mas devido ao princípio da equivalência pode-se fazer essa analogia.

Na figura 8, vemos um feixe de luz deslocado de um ângulo θ . No desenho pode-se observar que ele cai de uma altura H , que é dada pela expressão

$H = \frac{gt^2}{2}$. Isso porque adotei o zero no ponto mais alto e a velocidade inicial do

feixe no eixo vertical é nulo. Na horizontal o feixe anda um espaço equivalente a velocidade produto com o tempo, por isso $S = ct$.

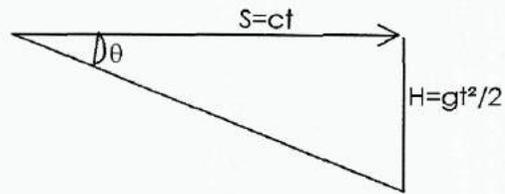


Figura 8 Desvio da luz em um campo gravitacional.

Pela figura 8 tem-se:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2(ct)}gt^2, \quad (44)$$

Fazendo-se $\operatorname{tg}\theta$ aproximadamente igual a θ :

$$\theta = \frac{gt}{2c} \quad (45)$$

No início desse modelo admiti que a velocidade inicial é nula. Usando a equação de Torricelli é possível encontrar uma expressão para v em seu ponto mais baixo.

$$V = \sqrt{2gH} \quad (46)$$

Em (45) gt é igual a velocidade e foi expressa em (46). Unindo as duas:

$$\theta = \frac{\sqrt{2gh}}{2c} \quad (47)$$

Esse resultado clássico é aproximado e serve para ilustrar o fenômeno em nível do Ensino Médio. Usando-se a Relatividade Geral, o valor correto, para uma simetria esférica é dado pela seguinte equação:

$$\Delta\alpha = \frac{4GM}{c^2 R} \quad (47.a)$$

Foge aos nossos objetivos a dedução da relação (47.a). Os alunos da Licenciatura interessados na dedução da equação (47.a) acompanhar as equações apresentadas na Referência [12].

Observa-se que o desvio gravitacional é muito pequeno e levou muito tempo até que ^{seu} fosse comprovado experimentalmente.

19) Uma das primeiras comprovações experimentais do desvio gravitacional da luz foi feita ao se observar um eclipse solar total em Sobral, no CE, ^{BRASIL} estando Einstein entre os cientistas que fizeram as observações. Durante o eclipse foi possível ver uma estrela que não seria vista se não houvesse desvio gravitacional.

Como a luz não sofre ação de forças gravitacionais esse desvio é devido a uma deformação do espaçotempo, observado de forma exagerada na figura 9, provocada por corpos massivos e proporcional a massa deles. Como se sobre um lençol esticado colocássemos um peso em seu centro.

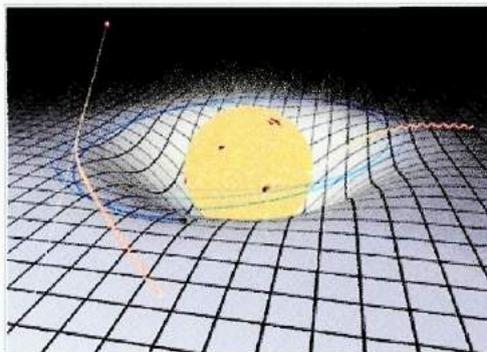


Figura 9 Como corpos com massas elevadas deformam o espaçotempo [11].

A teoria da Relatividade Geral tem sido testada experimentalmente sempre. Talvez nenhuma outra seja tão questionada quanto a sua veracidade mas nunca se achou nada que a invalidasse. Incluindo os três testes propostos por Einstein: (1) a previsão do avanço do periélio da órbita de Mercúrio, (2) a previsão do encurvamento da trajetória da luz em um campo gravitacional e (3) o desvio gravitacional para o vermelho.

3.3 Desvio gravitacional para o vermelho

Suponha que uma fonte, situada a uma altura H emita ondas de frequência f_0 para um receptor que se encontra no solo de acordo com a figura 10.

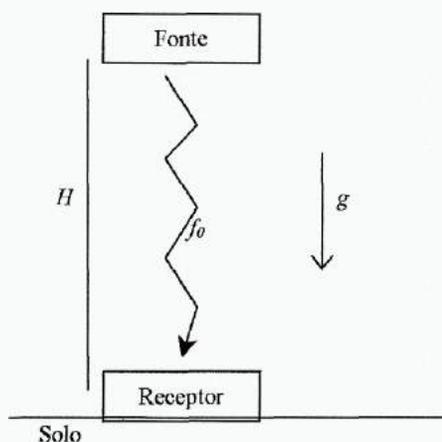


Figura 10, desvio para o vermelho produzido por campo gravitacional

O detector, no solo, medirá uma frequência de onda diferente da onda que foi emitida. Essa diferença se dá pela energia potencial associada ao campo gravitacional.

No momento da emissão o fóton possui energia potencial, mgh , e no detector, considerado potencial zero, ele deixa de ter energia potencial tendo energia associada a frequência $E = hf$. Deve-se considerar a aceleração da gravidade constante para utilizar a energia potencial como mgh .

Pelo teorema da conservação de energia pode-se escrever:

$$E = E_0 + E_p \quad (48)$$

Onde (48), é a energia da onda que deixa a fonte em direção ao receptor. A massa de uma partícula está associada a sua frequência por $m = hf_0/c^2$.

Substituindo E_0 e E_p :

$$E = hf_0 + \left(\frac{hf_0}{c^2}\right)gH \quad (49)$$

Ao chegar ao receptor só existirá a energia associada a onda $E=hf$, unindo à (49):

$$hf = hf_0 + \left(\frac{hf_0}{c^2}\right)gH \quad (49.a)$$

$$f - f_0 = \frac{f_0 gH}{c^2} \quad (49.b)$$

$$\Delta f = f_0 \frac{gH}{c^2} \quad (49.c)$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Phi}{c^2} \quad (50)$$

Esse resultado mostra que a frequência registrada pelo receptor é diferente a da frequência da onda emitida pela fonte.

Para o caso mais geral de um corpo celeste esférico e estacionário a variação de energia potencial gravitacional entre um ponto a uma distância R do centro e outro no infinito é dada por:

$$\Phi = GM/R \quad (51)$$

Substituindo (51) em (50):

$$\frac{f - f_0}{f_0} = \frac{GM}{Rc^2} \quad (51.a)$$

$$fRc^2 - f_0Rc^2 = GM \quad (51.b)$$

$$f = \frac{GM}{Rc^2} f_0 + f_0 \quad (51.c)$$

$$f = f_0 \left(\frac{GM}{Rc^2} + 1 \right) \quad (51.d)$$

$$(f_0 - f)f_0 = \frac{GM}{c^2 R} \quad (52)$$

$$\frac{f}{f_0} = \left(1 + \frac{GM}{Rc^2} \right) \quad \text{Desvio gravitacional para o azul}$$

Essa mesma equação pode ser reescrita utilizando (51) de forma obter a frequência recebida em função da frequência emitida.

$$\gamma' = \gamma \left(1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2} \right) \quad (52.a)$$

Quando um fóton é emitido no sentido do campo gravitacional a frequência diminui, chamado **Desvio gravitacional para o vermelho** ou redshift, quando o fóton se move em sentido inverso a frequência aumenta, chamado **Desvio gravitacional para o azul**.

A equação para o desvio gravitacional para o vermelho tem a mesma forma, devido ao princípio da equivalência. Isso pode ser comprovado recalculando (52) com o termo $(f - f_0)$, invertendo assim o sentido de propagação da onda.

$$\frac{f}{f_0} = \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right) \quad \text{Desvio gravitacional para o vermelho (53)}$$

Essa mesma equação pode ser reescrita utilizando (51) de forma obter a frequência recebida em função da frequência emitida.

$$\gamma' = \gamma \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} \right) \quad (52.b)$$

Os efeitos do desvio gravitacional são muito pequenos se comparado com o efeito Doppler. O primeiro tem no denominador c^2 enquanto o segundo c .

Há muita reflexão e discussão sobre experiências do desvio gravitacional para o vermelho e sua importância para a Relatividade Geral. Um experimento preciso sobre o desvio para o vermelho foi realizado por Pound e Rebka (1960 e Pound e Snider (1965). Para a experiência utilizaram o efeito Mossbauer dos raios gama produzidos por átomos de Fe^{57} que percorreram uma distância vertical de 75 ft (22,86 metros). Confirmando com elegância as previsões sobre a variação da frequência da luz com o campo gravitacional [12].

3.4 Buraco negro

“Buraco negro é uma região do espaço onde a força da gravidade é tão forte que nada pode escapar dele, nem mesmo a luz” [13].

Existem inúmeros corpos como esses no universo, sua previsão é antiga mas apenas recentemente se conseguiu métodos que pudessem encontrá-los no universo e estudá-los.

Estrelas não possuem estoque infinito de combustível para queimar. Conforme ela queima passa por vários estágios. Esses estágios não são acessados por todas as estrelas isso depende da massa que ela possui. Tratarei apenas das que alcançam todos os estágios, que são **anã branca**, **estrela de nêutrons** e finalmente o **buraco negro**.

Em estrelas que possuam massa muito grande a força gravitacional só pode ser balanceada com a força elétrica dos átomos. Nesse ponto a temperatura da estrela é extremamente alta. A incrível pressão no núcleo quebra os átomos e os sucessivos processos de fusão nuclear se encerram na formação de uma estrela formada por nêutrons. Havendo massa suficiente para continuar comprimindo o núcleo, ele acaba por sucumbir e nem as forças de interações atômicas resistem. Nesse ponto há o colapso em um ponto de pequeno volume e massa extremamente grande, criando assim um **buraco negro**. Em 1916, Schwarzschild descobriu, matematicamente, que se uma estrela encolher além de determinado tamanho, o tempo desaparece e o espaço se torna infinito. Esse ponto onde está concentrada a massa é chamado de *singularidade*.

A força gravitacional nas proximidades do buraco negro é extremamente forte e por isso nada, nem mesmo a luz consegue escapar dele. Como nada pode ser mais rápido que a luz, visto no capítulo 2, qualquer coisa que caia em um buraco negro não pode ser mais recuperada. Nenhum tipo de informação consegue sair. Esse objeto foi denominado como **buraco negro**, nome proposto por John A. Wheeler em 1969.

Essa condição é facilmente observada vendo como se comporta a velocidade de escape para diferentes corpos de raio igual ao da Terra. A velocidade de escape é obtida quando a energia cinética dada do objeto é igual a sua energia potencial. Conforme o objeto se afasta da Terra ele perde energia potencial, pois o referencial é colocado no infinito, assim quando ela perder toda sua energia potencial e conseqüentemente cinética ele estará no infinito.

Acompanhe os passos abaixo:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{R} \quad (53.a)$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (53.b)$$

Resultando em:

$$R_{\text{crítico}} = \frac{2GM}{c^2} \quad (54.b)$$

O curioso é que utilizando o método clássico ou as equações da Relatividade Geral, a resposta é exatamente a mesma. Esse procedimento fornece uma resposta correta por dois erros que se compensam. A energia cinética da luz não é $mc^2/2$ e sua energia potencial não é dada pela mecânica clássica. Porém esses dois erros se anulam produzindo uma resposta idêntica se o cálculo fosse feito usando-se as expressões corretas fornecidas pela Relatividade Geral.

A dedução da equação (54.b) foi proposta independentemente por J. Mitchell em 1784 [12] e por P. S. Laplace [6] muito antes da formulação da teoria da Relatividade Geral. Para uma estrela se tornar um buraco negro apenas pela ação de sua própria gravidade, ela deve ter massa mínima da ordem de 1,4 massas solares. O valor de 1,4 massas solares é o valor calculado para que a força gravitacional supere a força elétrica entre elétrons e prótons nos átomos. Nesse ponto é criada uma estrela de nêutrons. O processo de criação dos buracos negros é muito complexo e o valor mínimo de massa ainda é controvertido. O raio de Schwarzschild é muito menor do que o raio de objetos astronômicos comuns. Existem buracos negros com massas bastante elevadas (ver a figura 11).

A estrela que alcançou tamanha força gravitacional não permite a fuga de nenhuma partícula, nem mesmo a luz. Essa estrela escura tem uma superfície concêntrica ao buraco negro é chamada horizonte de eventos ou ponto de não retorno. Esse limite é o que os astrônomos usam para indicar o tamanho de um buraco negro. Um objeto ou informação que passa esse limite, cai eternamente em direção ao centro. Esse tempo é infinito devido à gravidade dilatando o tempo. O objeto não cairá por inteiro pois os efeitos de maré serão tão intensos que destruirão o que que caia. Toda matéria (informação) que atravessa esse ponto estará totalmente perdido e não terá retorno [11]

Um buraco negro não pode ser visto, mas pode ser detectado por seu efeito gravitacional em objetos massivos em sua volta, por sua carga elétrica, por seu

momento angular (ele arrasta o espaçotempo enquanto gira) e pelas suas emissões de raio X. No centro da Galáxia M87 o telescópio Hubble encontrou um buraco negro que possui massa 3×10^9 vezes massas solares.

Na figura 11, vemos uma espetacular vista do novo buraco negro com massa extremamente elevada em Centauro A. Jatos produzidos pelo centro do buraco negro central e vizinhanças da galáxia são mostrados. Vários dados obtidos por equipamentos diferentes foram reunidos nessa imagem para composição da foto. A cor laranja, foi obtida a partir do Atacama Pathfinder Experiment (APEX) no Chile. No telescópio de raios X, do Observatório de raios X Chandra, os dados de cor azul. São utilizados também dados do telescópio Max-Planck/ESO, também localizada no Chile que mostra faixas de poeira na galáxia e estrelas adjacentes. O jato de raios-X no canto superior esquerdo estende por cerca de 13.000 anos-luz de distância do buraco negro. Os dados da APEX mostram que o material está viajando a cerca de metade da velocidade da luz.

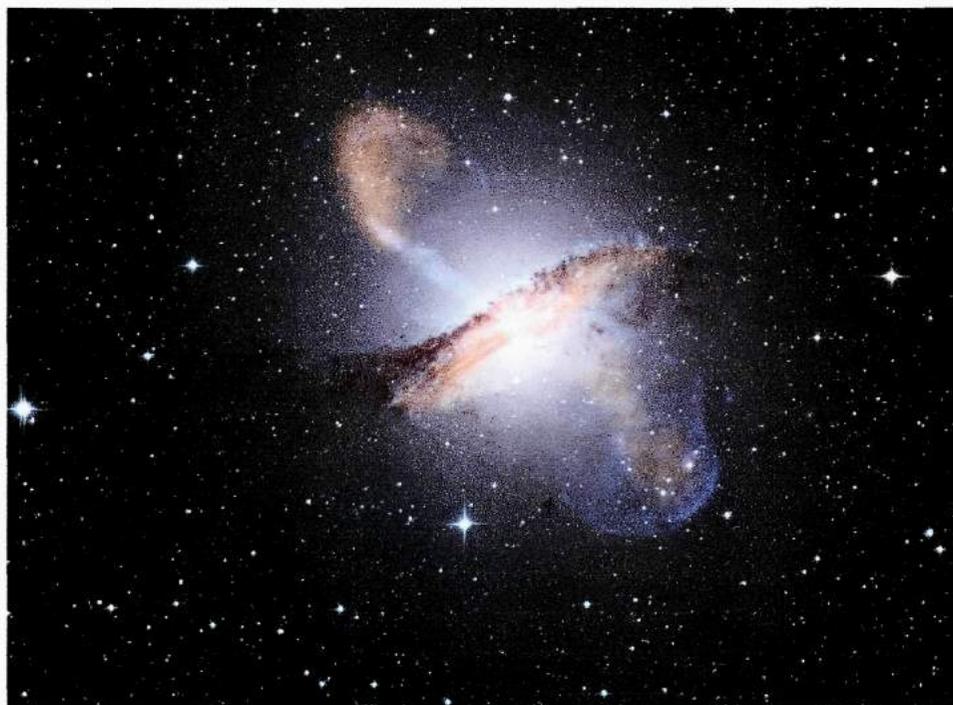


Figura 11, buraco negro em Centauro A. Foto obtida pela reunião de dados de vários telescópios. [14]

O disco de acreção é um anel externo ao horizonte de eventos que não colapsa devido a sua velocidade angular. Ele possui gases e partículas que enquanto giram perdem energia, com o atrito, e chegam cada vez mais próximos do horizonte de eventos, sendo comprimidos, fig. 16, como um gás na bomba de encher bicicleta. Temperaturas da ordem de 10^6 K podem ocorrer e materiais com estas temperaturas emitem raios X que podem ser detectados. “Ondas que escapam do buraco negro sofrem um desvio para o vermelho aumentando seu comprimento de onda” [15].

Os cientistas acreditam que no centro de cada galáxia exista um buraco negro com massa extremamente elevada, tal como o buraco negro mencionado na figura 11 (massa maior do que 10^9 vezes a massa do Sol).

4 APLICAÇÕES DE ALGUNS CONCEITOS DE RELATIVIDADE

4.1 Introdução

As aplicações da relatividade estão muito próximas da realidade dos alunos. O número de aparelhos que utilizam seus conceitos são vastos. Reuni os mais comuns e próximos do cotidiano. É possível também construir pequenos experimentos e citar exemplos práticos. Isso faz com que o assunto seja mais interessante para eles.

4.2 Aceleradores de partículas

São equipamentos que *aceleram até velocidades* fornecem feixes de partículas sub-atômicas eletricamente carregadas com um elevado valor de energia cinética. Existem aceleradores lineares e circulares, cíclotron ou síncrotron. Nos aceleradores de partículas fica muito evidente a contração do espaço e a dilatação do tempo, que são aplicações diretas da Relatividade Restrita. Por exemplo, em um acelerador de 200 m de comprimento um elétron carregado pode percorrer 20 m ou menos, dependendo da velocidade do elétron. E o desvio na vertical, devido à gravidade pode ser desprezado no percurso.

Exemplos comuns de aceleradores de partículas existem nas televisões e geradores de raios X, na produção de isótopos radioativos, na radioterapia do câncer, na radiografia de alta potência para uso industrial e na polimerização de plásticos.

Nos aceleradores de alto desempenho como na figura 12, podem ser estudados os constituintes atômicos e suas interações.

Em aceleradores lineares há no interior um quase vácuo para impedir a interação do feixe com moléculas gasosas. A energia adquirida é proporcional à diferença de potencial utilizada na aceleração das partículas. Seu uso é limitado pelo comprimento do tubo utilizado.

Em aceleradores circulares, as energias alcançadas são maiores. Um campo elétrico oscilante acelera a partícula e um campo magnético perpendicular ao vetor velocidade e ao campo elétrico, produz a força centrípeta necessária para manter a partícula em movimento circular. Essa deflexão faz com que ele perca energia na faixa dos raios X. Nesses aceleradores a energia dos feixes de partículas depende exclusivamente do campo elétrico. No acelerador linear não ocorre esta perda de energia.



Figura 12. Fotografia aérea do acelerador linear de Stanford [16].

4.3 Efeitos astronômicos como media da expansão do universo

Quando estrelas se afastam da Terra a velocidades próximas a da luz a luminosidade emitida por elas é alterada pelo efeito Doppler e dilatação do tempo, aplicações da Relatividade Restrita. Na figura 13 vê-se uma supernova, classe de estrela formada após uma explosão. Nessa explosão 90% de sua matéria pode ser expelida para o espaço. Em seu lugar pode restar uma pequena estrela densa composta principalmente de nêutrons. Em alguns casos na explosão toda matéria é expelida. Ela se afasta da Terra, pela expansão do universo além de velocidade própria, a uma velocidade próxima da luz e por isso seu brilho diminuído a uma taxa cada vez menor, além de ter seu brilho mais azulado do que ele realmente é.



Figura 13. Foto de uma galáxia. O círculo indica uma supernova [17].

Em 1054, os astrônomos chineses registraram uma supernova tão brilhante que foi visível durante o dia. A explosão deixou um pulsar e uma enorme nuvem de gás e poeira conhecida como a Nebulosa do Caranguejo, que ainda pode ser visto hoje.

Em 1987, uma supernova Tipo II tornou-se visível na Grande Nuvem de Magalhães, a galáxia mais próxima da Via Láctea. Foi a primeira supernova a ser visível a olho nu em quase 400 anos. Poderia ser visto apenas do hemisfério sul [18].

O efeito Doppler foi usado por Hubble para formular a hipótese da expansão do universo. O *redshift* ou o *blueshift* servem para determinar a velocidade de aproximação (*blueshift*) ou de afastamento de uma estrela (*redshift*).

4.4 GPS

Aparelhos de GPS (Global Position System, Sistema de Posicionamento Global), figura 14, usam os sinais de rádio enviados por vários satélites em órbita para determinar sua posição. Como foi visto em (54) para que um satélite entre

em órbita é preciso certa velocidade. Essa velocidade deve ser menor que a velocidade de escape para que possa ficar em órbita e essa velocidade indicará a altitude da órbita. Para uma altitude igual ao raio da Terra foi calculado antes. Será de 11,18 km/s. Utilizando (52.a) vê-se que um sinal transmitido pelo satélite sofre um desvio gravitacional. O GPS é um exemplo onde são utilizadas ao mesmo tempo conceitos da Relatividade Restrita, pois os satélites têm velocidade considerável para permanecerem em órbita alterando o passar do tempo visto em (4), e Relatividade Geral no desvio gravitacional. Esse sistema foi implantado pelos Estados Unidos mas concorrentes estão sendo montados como o Glonass russo; o Galileo europeu e o Compass chinês. Isso porque ele foi criado para o setor militar americano e nada garante que será livre para todos para sempre.

Todos funcionam da mesma maneira. O equipamento, figura 18, se conecta aos satélites, no mínimo três deles. A partir da triangulação das ondas pode-se determinar sua posição. Esses aparelhos para ter a precisão requerida devem levar em conta efeitos da relatividade como o desvio gravitacional. O receptor e emissor se encontram e locais de potenciais diferentes. Por isso o receptor precisa estar sintonizado em uma frequência pouco mais alta (10,23 MHz) do que a frequência emitida pelos satélites. (10,22666666543 MHz) [6].



Figura 14. Aparelho de GPS utilizado para determinar as coordenadas de um ponto onde o observador se encontra [19].

4.5 Usinas nucleares

Usinas nucleares, como a de Angra 2 na figura 15, usam a fissão nuclear para produzir energia. Núcleos de Urânio são atingidos por nêutrons que o dividem em um átomo de Bário e Criptônio. Esse processo é auto suficiente. Quando o urânio se quebra ele libera outros nêutrons que atingem outros átomos.

A massa dos átomos de Ba e Kr somados é inferior a massa do Urânio, isso porque parte da massa do Urânio é convertida em energia. Esse processo libera uma quantidade enorme de energia. A transformação de massa em energia foi vista na Relatividade Restrita e se relaciona por $E = m_0 c^2$. Essa energia é utilizada para aquecer tanques de água que move geradores elétricos.

O problema desse processo é o rejeito radioativo. Só é utilizado o U e o elemento formado a partir da fissão tem de ser descartado. Um grande risco pois a radioatividade é um processo de milhões de anos. Por enquanto os rejeitos são armazenados em tanques de chumbo lacrados com concreto especial.



Figura 15. Sala de controle de Angra 2 [20].

Está em estudo a *fusão nuclear*. Neste processo dois átomos de hidrogênio são fundidos em um átomo de hélio. Neste caso também a transformação de massa em energia é uma aplicação da Relatividade Restrita Este processo produz muito mais energia e tem a vantagem de não produzir rejeitos. A

dificuldade é que para ele ser iniciado, seria necessário uma quantidade de energia muito grande e ainda não se conseguiu uma reação apropriada.

4.6 Radares para estradas

Uma aplicação do efeito Doppler ocorre nas estradas. Um equipamento envia um sinal de microonda em direção ao carro, esse sinal é refletido pelas partes metálicas do carro, e pela alteração na frequência do retorno, é medida a sua velocidade. Para calcular a alteração de frequência devemos usar duas vezes a equação (42):

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} \quad (55)$$

Na equação (55) f é a frequência recebida, c a velocidade da onda emitida, u a velocidade do carro e f_0 a frequência da onda emitida. Observe que para o cálculo da velocidade do carro ou para se determinar o efeito Doppler em uma onda eletromagnética é necessário apenas conhecer a velocidade relativa entre a fonte e o detector. O método clássico exige que seja conhecida a velocidade da fonte e a velocidade do receptor. Como exemplo, suponha um detector que emita ondas de 3 GHz. Um carro que esteja a uma velocidade $u = 144$ km/h, se aproximando do detector, faria com que ele recebesse esse sinal com frequência f . Utilizando a primeira aproximação de (55) obtemos:

$$f = f_0 \left(1 + \frac{u}{c} \right) \quad (56)$$

Como o carro reflete a onda de radar, ele se torna um emissor com frequência f . Logo, o aparelho receptor de radar detecta uma onda com frequência f' dada por:

$$f' = f \left(1 + \frac{u}{c} \right) \quad (57)$$

Portanto, pelas equações (56) e (57), obtemos

$$f' = f_0 \left(1 + \frac{u}{c} \right)^2 \cong f_0 [1 + 2(u/c)] \quad (58)$$

Substituindo valores na (58) obtemos a correção $f/f_0 = 1,000000267$. Este resultado seria o mesmo resultado se houvésssemos utilizado a equação (55) devido a baixa velocidade do carro.

5 EXPERIÊNCIAS E PROBLEMAS ICENTIVADORES

5.1 Introdução

As experiências constituem a parte mais interessante para os alunos. Através delas eles podem ver com seus olhos tudo que foi visto antes, ou como forma de instigar a curiosidade. Neste capítulo tomei o cuidado para sugerir o máximo de experiências, com o mínimo de recursos. É muito difícil encontrar colégios que possuam salas específicas para experimentos. As experiências aqui escritas podem ser feitas todas em sala de aula, facilitando o professor. Os problemas incentivadores constituem uma alternativa à impossibilidade de executar algumas experiências. Eles são interessantes por trazer situações que entram em contradição com o senso comum. Tais paradoxos instigam a curiosidade sobre as possíveis soluções desses 'mistérios'. É importante ressaltar que muitos paradoxos são sofismas e decorrem de uma falsa interpretação das fórmulas da Relatividade Restrita e da Relatividade Geral.

5.2 Experiência imaginária do trem de Einstein

Essa experiência é melhor visualizada utilizando um vídeo mas pode ser feita em quadro negro também. No uso do quadro faz-se apenas um diagrama, ela deve ser imaginada.

Material:

- Quadro
- Lápis
- Um pouco de imaginação. Pode ser utilizado um computador também.

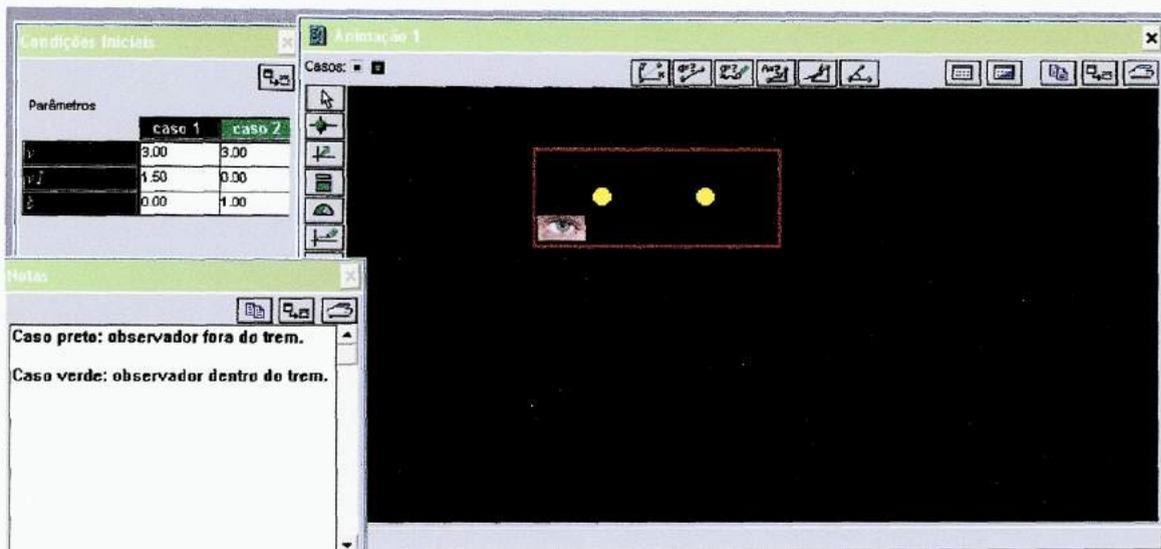


Figura 16. Tela da animação criada no programa *Modellus*, para o referencial dentro do trem.

Na figura 17 mostro como fica a animação quando é utilizado outro referencial, quando o observador está fora do trem.



Figura 17. Tela do programa *Modellus* quando o referencial está fora do trem.

Na figura 18 mostro as equações que foram utilizadas. Repare que não é importante um tratamento relativístico ou equações complexas. O importante é

mostrar a animação de que o observador dentro do ter (retângulo vermelho) faz uma observação diferente do mesmo fenômeno.

```
x = v * t + 20
x2 = -v * t + 20
x3 = v * t
x4 = v * t + 40
andando = x3 + 0.5
parado = -20
a = b

if (x2 < x3 + 1.8) then (x2 = x3 + 1.8)
if (x > x4 - 1.5) then (x = x4 - 1.5)
if (a == 0) then (x5 = parado)
if (a == 1) then (x5 = andando)
```

Figura 18. Equações utilizadas na animação.

5.3 Expansão do universo

Como foi visto com a relatividade provou-se que o espaço e o tempo são inseparáveis e conforme o tempo passa o espaço aumenta, aumento a distância entre os objetos contidos nele.

Material

- Caneta *hidrocolor*;
- Régua;
- Balão de aniversário.

Objetivo: Mostrar que tudo no espaço independente de estar se deslocando ou não está se afastando.

Procedimento: Com o uso da régua marcam-se dois pontos no balão vazio. Depois enche-se ele vagorosamente mostrando que conforme o universo aumenta os pontos estão se afastando cada vez mais. Como visto o espaço e o tempo estão ligados e não podem ter conceituação absoluta. Por isso só existe espaço se existir tempo e vice-versa. Conforme o tempo passa o espaço aumenta cada vez mais.

5.4 Paradoxo dos gêmeos

Suponha dois irmãos gêmeos, sendo um (Pablo) enviado a uma viagem intergaláctica, com velocidade muito alta. Seu irmão Caio, permanece na Terra à sua espera. Para Caio se passam 20 anos, quando Pablo retorna a Terra e se colocando ao lado do irmão verifica-se que Pablo deveria estar mais jovem que Caio. Como você explica isso?

Justificativa: Para Pablo, devido ao efeito da dilatação do tempo ele “observa um ritmo mais lento para o batimento cardíaco e demais processos biológicos” [10] e por isso apesar de ter nascido simultaneamente com Caio, Pablo agora é mais jovem que seu irmão que não teve seu relógio biológico reduzido. Note que esse efeito é tanto maior quanto maior for a velocidade dessa viagem, como provado em (4).

O paradoxo consiste no caso de invertermos o referencial. Se considerarmos o referencial junto a Pablo, de acordo com a equação (4) Caio é que está em movimento, logo, Caio é que fica mais jovem. Portanto, quando ambos os gêmeos usam a equação (4) não podemos dizer qual dois deveria ficar mais jovem. Onde se conclui que estamos diante de um *paradoxo*.

Uma solução do *paradoxo dos gêmeos* foge ao âmbito da Relatividade Restrita e não entraremos em detalhes sobre este paradoxo curioso. Considerando que a nave tem de acelerar para iniciar seu movimento, sair da órbita da Terra, parar no final da viagem e depois voltar, concluímos que essas acelerações vão interferir no resultado e, de um modo geral, verifica-se que Pablo

retornaria realmente *mais jovem* do que Caio, visto que é Pablo e não Caio quem sofreu *aceleração* (ou seja, alteração de campo gravitacional). Portanto, a solução do paradoxo só pode ser feita usando-se conceitos de Relatividade Geral. Contudo, independente da análise aprofundada da Relatividade Geral, esse paradoxo introduz uma motivação importante para entender a equação (4).

5.5 Paradoxo do comprimento

É possível observar uma nave de 100 m de comprimento entrar e sair por inteira em uma garagem, ou pequeno túnel, que possui 30 m de extensão? [11]

Justificativa: Com velocidades próximas à velocidade da luz ocorre a contração do comprimento e um observador que esteja em repouso verá a nave entrar completamente antes de sair. Para a nave, quanto mais rápida ela estiver, menor ficará. Ela não poderá ficar parada nessa situação, pois ao reduzir a velocidade seu comprimento aumentará. A nave possui um comprimento próprio de 100 m, porém para o observador que está vendo ela passar, seu comprimento será tanto menor quanto for maior for sua velocidade.

Trocando o referencial e considerando a nave em repouso, com a garagem vindo na direção da nave chegamos ao paradoxo. Nessa situação quem sofreria um encolhimento seria a garagem (vista por quem está na nave) o que é contraditório com o que é visto com quem está em repouso junto à garagem.

Esse paradoxo, assim como outros tem uma justificativa parecida. Um fenômeno é visto de formas distintas por observadores em referenciais diferentes. Como provado quando analisamos o princípio da simultaneidade no capítulo 2.3.

5.6 Um sinal pode ser recebido antes de ser enviado?

Tendo vencido uma competição interestelar, Mavis pilota sua espaçonave e atravessa a linha de chegada a $0,6c$. Um sinal de vitória é enviado da parte traseira de sua nave de 300 m no instante em que a parte dianteira cruza a linha

de chegada. Stanley se encontra em repouso na linha de chegada, ele afirma que o sinal de vitória foi produzido antes de Mavis cruzar a linha de chegada [11].

Justificativa: Apesar de ter visto o sinal de vitória antes do evento da chegada, isso não quer dizer que o sinal foi mandado antes dela ter chegado. O mais rápido que mavis pode enviar um sinal do comprimento de sua espaçonave é $1\mu\text{s}$. Ela não pode enviar um sinal da parte dianteira no instante em que ela cruza a linha de chegada que seja enviado a partir da traseira ao mesmo tempo. Ela teria de enviar o sinal da frente no mínimo $1\mu\text{s}$ antes disso, teria de prever que seria vencedora.

A relatividade é consistente com isso, no sistema de referência de Stanley a nave tem comprimento igual a 240 m ; quando o sinal de 'vitória' foi enviado, a parte traseira da espaçonave estava no ponto -375 m no instante $0,75\mu\text{s}$ e a parte dianteira no ponto $(375 - 240)\text{m} = 135\text{ m}$ antes da linha final. Como $0,6c \times 0,75\mu\text{s} = 135\text{ m}$ a espaçonave cruzará a linha final no instante $t = 0$.

6 CONCLUSÕES

existir
Mesmo sendo um tema novo para se lecionar no Ensino Médio e por isso não ter uma literatura tão abrangente, a Física Moderna pode ser adaptada à realidade das escolas e ser ensinada ao longo do Ensino Médio de forma independente. Por exemplo, ao lecionar gravitação, podemos mencionar o cálculo clássico do raio do buraco negro, ao lecionar velocidade relativa, podemos escrever a fórmula relativística da velocidade relativa.

Nesse trabalho tentei mostrar dois aspectos importantes, o aspecto conceitual e o aspecto matemático. Na Relatividade Geral exploramos o aspecto conceitual que pode ser lecionado sem deduções sofisticadas, como, por exemplo, na explicação do buraco negro. Na Relatividade Especial, o uso de métodos matemáticos mais simples está ao alcance de alunos do Ensino Médio. Para o estudante de Ensino Médio é muito recompensador descobrir que contas simples podem provar que a velocidade da luz é o limite ou conseguir reproduzir a demonstração da tão famosa equação $E = mc^2$. Também é fácil mostrar para um aluno do Ensino Médio como calcular classicamente o raio de um buraco negro e como obter uma fórmula, aproximada, do desvio da luz pelo campo gravitacional.

Espero que todas as demonstrações tenham ficado claras para meus futuros colegas professores e assim fique mais fácil produzir material para aulas.

No apêndice indico vídeos, programas e outros materiais gratuitos conseguidos na Internet. Sei que eles não poderão ser usados por todos pela necessidade de computadores e *data show*, mas para os que puderem usar será um grande diferencial nas aulas. *?*

Como no apêndice há sugestões que não poderão ser usadas por todos nas experiências só utilizei material de baixo custo e de fácil aquisição, uma maneira de conseguir que todas as turmas, independentemente da classe social ou poder aquisitivo, tenha a chance de conhecer e aprender a parte que considero mais interessante e bonita na Física. *✓*

APÊNDICE

São indicados

Aqui indicarei um programa e alguns vídeos que, nas escolas que possuírem televisão ou computador, serão de grande auxílio. Um programa gratuito e que pode ser usado é o aplicativo Modellus que pode ser conseguido na internet no site omnis.if.ufrj.br/~carlos/infoenci/modellus.html ou em modellus.fct.unl.pt. Esse programa pode inclusive ser utilizado para diversos tipos de demonstrações.

Alguns vídeos no *youtube* são muito bons, estão em inglês, mas são simples e facilmente acompanhados.

- <http://br.youtube.com/watch?v=wteiuxyqtoM&feature=related>
(Simultaneidade)
- <http://br.youtube.com/watch?v=KHjpBjglMVk&feature=related> (Dilatação temporal)
- <http://www.pbs.org/wgbh/nova/einstein/rela-car-w-220.html> (contração do espaço)
- <http://br.youtube.com/watch?v=JQnHTKZBTI4> (Efeitos ópticos da alta velocidade)

REFERÊNCIAS

- [1] Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio, MEC, 1998.
- [2] Nussenzveig, H. Moysés, *Ciência Hoje*, dezembro de 2000.
- [3] *Scientific American Brasil*, Ano 3 - número 29/outubro de 2004.
- [4] Halliday, D., Resnick, R., *Fundamentos de Física*, vol. 4– LTC, 1995.
- [5] <http://www.deducoeslogicas.com/intro/restrita1.jpg> 1/12/2008.
- [6] Tipler, P. A., Llewellyn, R. A., *Física Moderna*, LTC Editora, 2001.
- [7] Villani, A., O Confronto Einstein-Lorentz e suas Interpretações. III. A heurística de Einstein, *Rev. Ens. Fis.*, vol. 3, 23 (1981).
- [8] Einstein, A., *Annalen der Physik*, v. 20, 627 (1906) extraído de *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 26, n. 2, p. 93 - 98, (2004).
- [9] Born, M., *Einstein's Theory of Relativity*, Dover, Nova York, 1965.
- [10] French, A. P., *Special Relativity*, Norton, Nova York, 1968.
- [11] Young, D., Freedman, A., *Sears & Zemansky, Física*, obra em 4 volumes), 10^a Edição, tradução e revisão técnica de Adir Moysés Luiz – Addison Wesley, 2008.
- [12] Alonso, M. Finn, E. J., *Física*, Addison – Wesley, Madri, 1999.
- [13] http://www.nasa.gov/worldbook/blackhole_worldbook.html (16/05/2009).
- [14] NASA, http://www.nasa.gov/mission_pages/chandra/multimedia/centaurusA_2009.html (16/05/2009).
- [15] Pinheiro, C. J. G., *Tópicos de Física Moderna no Ensino Médio*, Monografia, IF, UFRJ, 2003.
- [16] <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Stanford-linear-accelerator-usgs-orthokaminski-5900.jpg> (16/05/2009).
- [17] http://www.astronomy-pictures.net/supernova_3.jpg (16/05/2009).
- [18] Kenneth B., Professor of Astronomy and Physics, Boston University. http://www.nasa.gov/worldbook/supernova_worldbook.html (16/05/2009).
- [19] http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Confluencia_23_S_x_49_W_-_GPS.jpg (16/05/2009).
- [20] http://www.deutsche-welle.de/popups/popup_lupe/0,,1391269_ind_1,00.html (16/05/2009).