



# Análise da estimação de estados para sistemas lineares e não-lineares com o filtro de Kalman e seus derivados

Fernando Tancredo Pereira Borges

Projeto de Final de Curso

Orientadores

Prof. Argimiro Resende Secchi, D.Sc.

Guilherme Augusto de Almeida Gonçalves, M.Sc.

Março de 2014

# **Análise da estimação de estados para sistemas lineares e não-lineares com o filtro de Kalman e seus derivados**

*Fernando Tancredo Pereira Borges*

Projeto de Final de Curso submetido ao Corpo Docente da Escola de Química  
como parte dos requisitos necessários à obtenção do Grau de Engenheiro Químico.

Aprovado por:

---

Príamo Albuquerque Melo Junior, D.Sc.

---

Andrea Valdman, D.Sc.

---

Eng. Mário Gomes Neves Neto

Orientado por:

---

Argimiro Resende Secchi, D.Sc.

---

Guilherme Augusto de Almeida Gonçalves, M.Sc.

Rio de Janeiro, RJ – Brasil  
Março de 2014

Borges, Fernando Tancredo Pereira

Análise da estimação de estados para sistemas lineares e não-lineares com o filtro de Kalman e seus derivados/ Fernando Tancredo Pereira Borges. Rio de Janeiro: UFRJ/EQ, 2014. vi, 89 p.;il

(Projeto de Final de Curso) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola de Química, 2014.

Orientador: Argimiro Resende Secchi e Guilherme Augusto de Almeida Gonçalves.

1. Estimadores de Estados. 2. Filtro de Kalman. 3. Sistemas Dinâmicos. 4. Monografia de Final de Curso. (Graduação - UFRJ/EQ). 5. Argimiro Resende Secchi. I. Análise da estimação de estados para sistemas lineares e não-lineares com o filtro de Kalman e seus derivados.

## AGRADECIMENTOS

Inicialmente a Deus, por ter iluminado meu caminho durante os meus cinco anos de faculdade e por ter estado sempre junto comigo, principalmente quando eu mais precisei.

À minha família, em especial aos meus pais, que sempre me deram suporte e apoio durante os meus anos na graduação, estiveram presentes nos momentos mais difíceis com sugestões e conselhos e formaram a pessoa que sou hoje.

Aos meus orientadores, prof. Argimiro e Guilherme, que me ajudaram no desenvolvimento desse projeto e que foram muito solícitos sempre que precisei deles.

A todos os professores do curso de Engenharia Química da Escola de Química da UFRJ, pelos ensinamentos a mim passados e pela contribuição à minha formação acadêmica.

Ao prof. Príamo, pela ajuda em diferentes momentos da minha formação, inicialmente me dando a oportunidade de trabalhar como aluno de iniciação científica, mas especialmente por ter possibilitado a realização do meu intercâmbio acadêmico na University of Wisconsin.

Aos professores, funcionários e amigos da University of Wisconsin, que me acolheram de forma muito calorosa, e fizeram com que a experiência do intercâmbio fosse, sem dúvida, um grande diferencial na minha formação pessoal e acadêmica.

Aos meus amigos da UFRJ, companheiros de estudos, pela formação de um grupo tão unido, que foi de grande importância para o meu sucesso em diferentes momentos da minha trajetória acadêmica.

Resumo do Projeto de Final de Curso apresentado à Escola de Química como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Químico.

## **Análise da estimação de estados para sistemas lineares e não-lineares com o filtro de Kalman e seus derivados**

Fernando Tancredo Pereira Borges

Março de 2014

Orientador: Prof. Argimiro Resende Secchi, D.Sc e Guilherme Augusto de Almeida Gonçalves, M.Sc.

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de estudar diferentes estimadores de estados baseados no filtro de Kalman para sistemas lineares e não-lineares. Esses estudos visam esclarecer e comprovar premissas que se têm sobre o desempenho de diversos estimadores de estados.

Foram estudados o filtro de Kalman para sistemas lineares, o filtro de Kalman linearizado (LKF), o filtro de Kalman estendido (EKF) e o filtro de Kalman *Unscented* (UKF). Esses filtros foram utilizados para estimar os estados de dois estudos de caso, um para o sistema linear de um tanque encamisado, e um para o sistema não-linear de um CSTR com reação de Van de Vusse.

Estudou-se também as respostas desses diversos estimadores para casos em que as condições do sistema eram extremas e saíam do padrão. Para tanto, aumentou-se os ruídos de processo, as incertezas nas estimativas iniciais e os ruídos nas variáveis de entrada do processo. Comparou-se o desempenho desses filtros e obteve-se conclusões sobre a robustez desses diferentes filtros. Finalmente, concluiu-se com discussões sobre a utilização desses estimadores, e em que tipo de situação sugere-se usar certo estimador.

Esse trabalho tem caráter introdutório às técnicas de estimação de estados e é voltado para alunos de graduação que desejem saber mais sobre o assunto, ou alunos que estejam iniciando um mestrado na área.

Abstract of project presented to Escola de Química/UFRJ as a part of the requirements necessary for the degree of Chemical Engineer.

## **Analysis of linear and nonlinear state estimation based on the Kalman filter and its derivations**

Fernando Tancredo Pereira Borges

March, 2014

Advisor: Prof. Argimiro Resende Secchi, D.Sc and Guilherme Augusto de Almeida Gonçalves, M.Sc.

This Project was developed aiming to study the performance of different linear and nonlinear state estimators based on the Kalman filter. These studies look to clarify and verify some of the assumptions commonly made about the difference in quality of the response of those estimators.

For linear systems, the Kalman filter was studied, while for nonlinear systems, the Linearized Kalman Filter (LKF), the Extended Kalman Filter (EKF) and the Unscented Kalman Filter (UKF) were studied. Those filters were used to estimate the states in two case studies, a heated tank and a Van de Vusse reaction inside a CSTR reactor.

Studies were also made in order to evaluate how these different estimators react in situations where the systems conditions were extreme. To achieve that, the process noises and the incertitude in the initial values were raised, besides adding noise to the inlet variables of the process. The performance of these filters was compared and conclusions were made about the strength of the different estimators.

Finally, discussions were made about the utilization of these estimators, and in what case would it be better to use one or another.

This work is only an introduction to the techniques of state estimation and was developed for undergraduate students who wish to know more about the subject, or graduate students that just started their studies in a related area.

# Índice

<b>Capítulo I – Introdução</b> .....	1
I.1 – Estrutura do Projeto .....	4
I.2 – Aplicações Práticas .....	4
<b>Capítulo II – Revisão Teórica</b> .....	9
II.1 – Estimação de Mínimos Quadrados .....	9
II.2 – O Filtro de Kalman .....	13
II.3 – Filtro de Kalman Linearizado .....	18
II.4 – Filtro de Kalman Estendido .....	22
II.5 – Filtro de Kalman <i>Unscented</i> .....	25
<b>Capítulo III – Análises Propostas</b> .....	32
III.1 – Estudo de Caso: Modelo do Tanque Aquecido .....	32
III.2 – Estudo de Caso: Reator de Van de Vusse .....	34
III.3 – Análise da influência das matrizes de covariância e dos ruídos .....	38
III.4 – Análise de diferentes pontos de operação do reator de Van de Vusse ..	40
<b>Capítulo IV – Resultados e Discussões</b> .....	42
IV.1 – Estudo de Caso: Modelo do Tanque Aquecido .....	42
IV.2 – Estudo de Caso: Reator de Van de Vusse .....	47
IV.3 – Análise da influência das matrizes de covariância e dos ruídos .....	57
IV.4 – Análise de diferentes pontos de operação do reator de Van de Vusse ....	80
<b>Capítulo V – Conclusões</b> .....	85
<b>Capítulo VI – Bibliografia</b> .....	88

## Capítulo I – Introdução

Com o aumento da competitividade internacional e com a globalização do mercado mundial, as indústrias químicas cada vez mais prezam pela qualidade, flexibilidade operacional, produtividade e confiabilidade do seu produto. Aliado a isso, é necessário atender a uma série de condições e restrições de órgãos ambientais e governamentais na produção dos seus produtos (PAIM, 2009).

Por esses motivos, as empresas estão investindo cada vez mais em sistema de controle que deem resultados mais precisos e tenham ações de controle mais confiáveis, de forma a melhorar a produção de suas plantas. Entretanto, para que os sistemas de controle operem de forma satisfatória, é necessário que as informações que estão sendo alimentadas ao sistema sejam precisas e coerentes com o processo que está ocorrendo dentro do equipamento controlado. Como a medição de todas as variáveis de um sistema de grande porte é inviável economicamente e muitas variáveis não podem ser medidas diretamente, o uso de ferramenta matemática para a estimação dos estados não medidos e/ou filtragem dos ruídos dos estados medidos é uma solução possível e de baixo custo.

O estado de um sistema dinâmico é definido como o menor conjunto de variáveis, tal que o conhecimento dessas no tempo inicial e das entradas do sistema nos tempos posteriores determina completamente o comportamento do sistema para qualquer instante de tempo (OGATA, 2010).

De um modo geral, a função do estimador de estados é combinar as medições disponíveis com um modelo dinâmico que descreve o sistema para obter estimativas para os estados medidos e não medidos. Esse modelo dinâmico, na forma de um modelo matemático, pode ser obtido através de leis físicas resultando em equações diferenciais ou funções de transferência (no caso de um modelo linear), ou mesmo podem ser obtidos a partir de técnicas empíricas de identificação do sistema (FREITAS et al., 2004).

Dentre os estimadores de estado existentes, um dos que mais se destaca é o filtro de Kalman (KALMAN, 1960) por sua praticidade, eficiência e relevância histórica. Este faz uso de métodos matemáticos probabilísticos e de estimações de mínimos quadrados para obter uma solução ótima para o problema linear e com erros gaussianos.



Nos dias atuais, o filtro de Kalman é muito utilizado na estimação de estados desconhecidos e na filtragem de medições ruidosas para sistemas lineares.

Entretanto, o filtro de Kalman não é adequado para sistemas não lineares, pois a solução exata desses sistemas, no sentido probabilístico, é dimensionalmente infinita quando se utiliza este filtro (KUSHNER, 1964). Dessa forma, outros estimadores foram desenvolvidos, baseados no filtro de Kalman original, para sistemas não lineares.

Muitos desses novos estimadores se basearam em técnicas de linearização do sistema e posterior aplicação do filtro de Kalman, entre eles o *Linearized Kalman Filter* (LKF) e *Extended Kalman Filter* (EKF) (SIMON, 2006).

O LKF apresenta uma formulação mais simples, baseando-se na linearização do sistema através da expansão em série de Taylor com truncamento no termo de primeira ordem. Com isso, suas estimações nem sempre são satisfatórias e confiáveis, como será mostrado na Seção III.2. O seu mecanismo, entretanto, foi de grande importância histórica, sendo a ideia seminal para filtros mais complexos, como o EKF.

O EKF é a técnica de estimação de estados mais largamente utilizada nas últimas décadas (SIMON, 2006). Ele se destaca de outros estimadores não lineares devido à sua relativa simplicidade e demonstrada capacidade de lidar com sistemas não lineares e obter estimações satisfatórias.

Entretanto, pode-se demonstrar que a técnica de linearização do sistema com posterior aplicação do filtro de Kalman não é confiável para todos os casos (SIMON, 2006). De fato, para sistemas com não linearidades severas, a estimação através da linearização do sistema começa a falhar, obtendo resultados insatisfatórios.

Na tentativa de solucionar esse problema, novas formulações de estimadores foram propostas. Entre as novas formulações, destaca-se o *Unscented Kalman Filter* (UKF), desenvolvido por (JULIER et al., 2000). O UKF combina as técnicas das estimações *Unscented* com o filtro de Kalman. Dessa forma, não há a necessidade de se linearizar o sistema na etapa de correção e, com isso, tende-se a obter melhores estimações para os sistemas com não linearidades severas. De fato, o UKF é o único estimador aplicado neste trabalho que de fato opera com o sistema não linear diretamente.

Apesar do seu recente desenvolvimento, o UKF já está bem difundido no meio acadêmico e sua utilização em plantas industriais aumenta a cada dia devido às vantagens na qualidade da estimação que esse estimador traz (SALAU, 2009).

Entretanto, devido a sua complexidade matemática (mostrada na Seção II.5), o UKF apresenta um problema que muitas vezes acaba limitando a sua utilização: o seu custo computacional. A demanda computacional desse filtro é relativamente alta, fazendo com que em alguns casos ele demore a dar resposta impossibilitando a sua utilização. De fato, o tempo de resposta do estimador deve ser menor que o tempo de amostragem do processo, pois o controlador calcula as ações de controle necessárias com base na informação em tempo real das variáveis de estado em cada tempo de amostragem do sistema. Não é interessante obter uma estimativa muito precisa dos estados se esta informação não puder ser usada em linha para melhorar o desempenho do controlador (SALAU, 2009).

Esse trabalho visa mostrar, de forma didática, a diferença de desempenho de diferentes filtros baseados no filtro de Kalman. Estudou-se o desempenho do filtro de Kalman clássico para sistemas lineares, o qual foi comparado com filtros mais complexos para justificar a escolha de tal estimador para sistemas lineares. Da mesma forma, utilizou-se o LKF, o EKF e o UKF para a estimação de estados de um sistema não linear, de maneira a observar e entender a diferença no desempenho desses três estimadores. Adicionalmente, mostrou-se a importância da sintonização do estimador que foi utilizado com o sistema dinâmico e os ruídos do processo para obter respostas favoráveis e estimativas satisfatórias.

O trabalho também foi redigido para facilitar a leitura por alunos de graduação que cursem cursos de engenharia química, ou relacionados. É aconselhável um conhecimento prévio de métodos numéricos, probabilidade e dinâmica e controle de processos para o melhor entendimento do conteúdo aqui disposto.

## I.1 - Estrutura do Projeto

Este trabalho foi dividido em cinco capítulos, de forma a melhor organizar o conteúdo.

O Capítulo I traz uma discussão inicial sobre o que são estimadores de estado e sobre os estimadores que são abordados ao longo do trabalho, além de contar com uma seção onde são discutidas algumas aplicações dos estimadores de estado.

O Capítulo II traz os fundamentos dos estimadores estudados e mostra como foram formulados, além de trazer os seus métodos recursivos para aplicação e utilização em tempo real.

O Capítulo III expõe e discute as simulações feitas e as análises posteriores. Este capítulo traz também os modelos matemáticos dos sistemas usados nas simulações realizadas.

O Capítulo IV traz os resultados das simulações, com gráficos e tabelas que ilustram o desempenho de cada filtro. Nesse capítulo são discutidas as diferenças entre as repostas dos diferentes filtros, além de analisar o resultado das propostas mostradas no Capítulo III.

O Capítulo V mostra as conclusões finais do trabalho e discute a escolha dos diferentes estimadores para diferentes situações.

## I.2 - Aplicações Práticas

De forma geral, as aplicações dos estimadores de estado foram divididas em quatro grandes grupos, são eles: analisadores virtuais, reconciliação de dados e detecção de falhas (filtragem), atualização e correção de parâmetros do modelo (estimação de parâmetros) e retroalimentação de estados para sistemas de controle (estimação de estados). A Figura 1.1 resume as áreas de aplicação.

Uma das principais e mais extensivas utilizações dos estimadores de estado é como analisador virtual, auxiliando a conferir mais qualidade a produtos e subprodutos. O monitoramento e o controle de processos necessitam de informações precisas e com alto grau de confiabilidade e muitas vezes a variável chave para o controle do processo não está disponível ou não está na frequência necessária ao controle. Nesses casos, uma das saídas para a obtenção de dados confiáveis é a utilização de analisadores virtuais. Este é um algoritmo implementado em um sistema de controle que infere as propriedades de interesse realizando uma combinação entre informações frequentes, oriundas de um modelo

matemático ou do próprio sistema analisado, e informações infrequentes, oriundas de medições de laboratório (FERREIRA, 2002). Muitas vezes, esse algoritmo implementado é um estimador de estado, e muitas vezes é o filtro de Kalman ou algum de seus derivados.

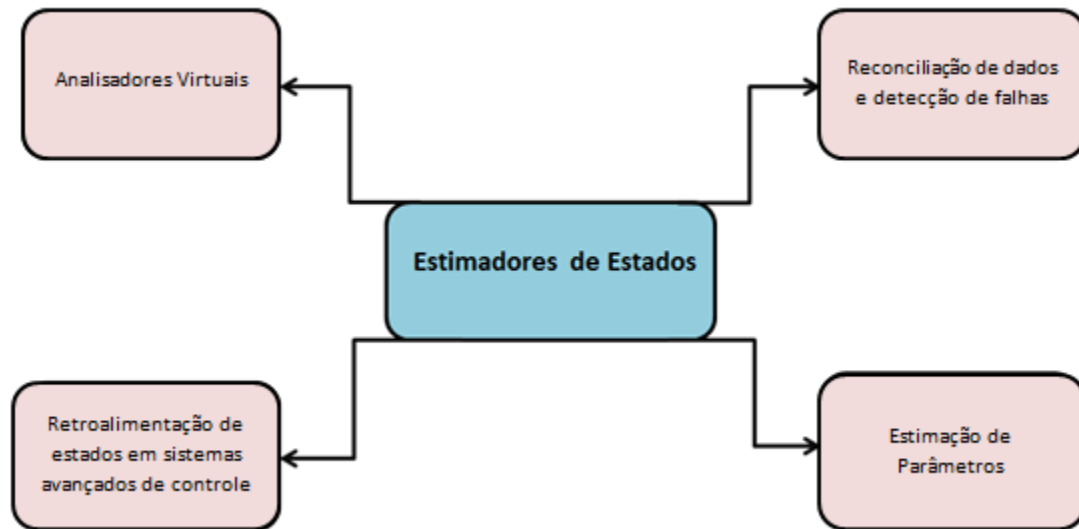


Figura 1.1 – Aplicações de estimadores de estado.

O modelo dinâmico é utilizado para estimar as variáveis chaves, que estão diretamente relacionadas com as propriedades e a qualidade desejadas. Como dificilmente têm-se um modelo que consiga descrever completamente o sistema analisado, faz-se necessária a utilização de medições esporádicas do processo como forma de corrigir e ajustar as previsões feitas pelo modelo matemático. Será demonstrado na seção de teoria que o filtro de Kalman e seus derivados têm a habilidade de juntar essas duas informações para gerar uma estimação precisa do estado real da variável desejada. Por isso, ele é largamente usado para esse tipo de aplicação.

A segunda aplicação discutida é a utilização de filtros de Kalman na retroalimentação de estados para sistemas de controle avançado.

O ideal para um sistema de controle seria se houvesse medidas em tempo real de todas as variáveis de processo. Entretanto, devido às limitações tanto tecnológicas quanto financeiras, nem todos os estados são medidos em aplicações práticas e, por isso, o estimador de estado é visto como uma peça fundamental no controle avançado de processo

(ENGELL, 2007). Normalmente, a retroalimentação de um controlador preditivo ocorre por *correção de bias*, isto é, as saídas previstas são corrigidas adicionando-se um valor proporcional à discrepância encontrada entre o valor medido atual e a sua respectiva predição (OGUNNAIKE e RAY, 1994). Entretanto, esses sistemas não funcionam tão bem para sistemas multivariáveis. A pouca quantidade de informação pode limitar o desempenho desejado ou produzir ações de controle equivocadas, podendo tornar o processo instável (ZHOU e LUECKE, 1995).

Uma possível alternativa a este mecanismo é utilizar a retroalimentação dos estados não medidos através de um estimador de estado. Com isso, passa-se a conhecer as condições iniciais dos estados do processo a cada instante de tempo, possibilitando calcular um valor predito mais próximo do real, para todo o horizonte de predição futuro. Assim, consegue-se fazer com que o controlador tenha ações de controle mais precisas e coerentes (FROISY, 2006). A Figura 1.2 mostra a ação de controle e distribuição de um sistema de controle preditivo com retroalimentação de estados:

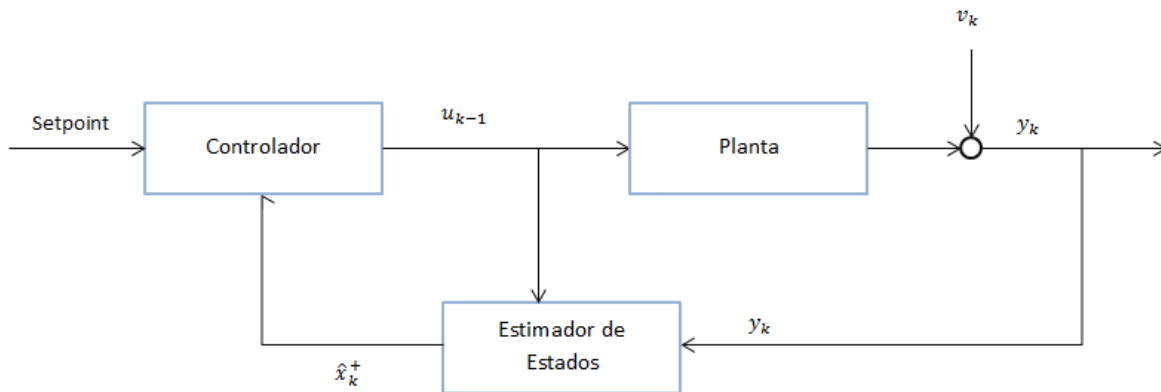


Figura 1.2 – Sistemas de controle preditivo com retroalimentação de estados.

Além disso, os filtros de Kalman têm outra característica que faz com que sua utilização nesse tipo de aplicação seja muito interessante, a filtragem de medições ruidosas. A utilização de medições ruidosas no sistema de controle pode acarretar grandes problemas na hora da aplicação de ações de controle pelo controlador, podendo levar até a ações inversas do ideal. Com a anexação de um estimador de estados do tipo filtro de Kalman, é possível evitar esse tipo de problema no controle de processo, podendo resultar em um controle mais seguro e correto.

É importante ressaltar, entretanto que, como é mostrado na sequência desse trabalho, para que se consiga uma resposta com poucas oscilações como se deseja para o caso da utilização em sistemas de controle, é imprescindível que se opere o estimador em condições ideais, ou seja, com o modelo mais próximo possível do real e com sintonia entre os ruídos do sistema e os ajustes do estimador.

Outra importante área de aplicação dos estimadores de estado é na reconciliação de dados e na detecção de falhas no processo. A reconciliação de dados consiste em uma técnica de ajuste de variáveis medidas em uma determinada planta industrial, de modo a satisfazer um modelo matemático que descreva o processo. A técnica reduz os erros de medição, agregando qualidade aos dados, os quais são usados nos mais diversos procedimentos decisórios (AFONSO *et al.*, 1998). Nesses casos, o estimador de estado é utilizado para detectar a localização e magnitude de erros grosseiros, a partir da diferença das medições e das estimações. Para maiores informações sobre técnicas de detecção, recomenda-se consultar Prata (2009), onde são descritas e comparadas algumas técnicas de detecção de múltiplos erros grosseiros.

Os estimadores de estado, em especial os filtros de Kalman, também funcionam como uma importante ferramenta na detecção e diagnóstico de falhas do processo ou de equipamentos. Tendo em vista a periculosidade de alguns processos químicos e as drásticas consequências que um acidente químico pode ter, utiliza-se cada vez mais esse tipo de mecanismo para detecção de falhas nas plantas industriais.

Entretanto, o sucesso de muitos métodos de detecção de falhas e de controladores baseados em modelo depende diretamente da acurácia do modelo do processo e das estimativas dos estados chaves (ROBERTSON *et al.*, 1995). Por isso, é de suma importância que o estimador esteja em sintonia com o sistema.

A última aplicação que é discutida é a estimação de parâmetros. Esta é um pouco diferente, pois como o nome já diz, ao invés de estimar-se apenas o estado do sistema, estima-se também parâmetros do modelo.

Os modelos matemáticos que descrevem o sistema dependem de parâmetros que muitas vezes não têm seu valor pré-definido, das condições do processo e dos valores dos estados do sistema. Por isso, esses parâmetros precisam ser constantemente atualizados com as novas estimações do estado, fazendo necessário com que se inclua a estimação

desse parâmetro junto às estimações dos estados. Além disso, como nunca se tem um modelo matemático que consiga descrever perfeitamente o sistema, muitas vezes alguns desses parâmetros são desconhecidos ou incertos, o que gera uma série de incertezas nos valores estimados. Para esse caso, também se justifica a utilização de estimadores de estado para estimar parâmetros do sistema.

Um método muito utilizado para a estimação de parâmetros consiste em aumentar o vetor dos estados com o vetor de parâmetros constantes e adicionar ao modelo equações diferenciais para os parâmetros estimados (SIMON, 2006). Assumindo que os parâmetros são constantes, o lado esquerdo das equações diferenciais fica igual à zero. Assim, ao rodar-se o mecanismo para a estimação dos estados, se estima também os parâmetros desejados.

## Capítulo II – Revisão Teórica

Os processos físico-químicos geralmente podem ser descritos por um sistema dinâmico, que nada mais é do que um modelo matemático que descreve como as variáveis desse processo variam com um tempo. Se as variáveis do sistema variam linearmente entre si, o sistema é chamado de linear. Se elas variam de forma não-linear entre si, o sistema é não-linear.

Os modelos matemáticos que descrevem o sistema geralmente são escritos na forma matricial, e são compostos de duas equações principais, uma que descreve como os estados do sistema, geralmente representado pelo vetor  $x$ , respondem às variações das outras variáveis do processo, e outra que descreve matematicamente quais as variáveis medidas no processo, geralmente representadas pelo vetor  $y$ .

O desenvolvimento teórico aqui apresentado foi baseado no desenvolvimento de (SIMON, 2006).

### II.1 - Estimação de Mínimos Quadrados

Para que se possa entender melhor o funcionamento de estimadores de estado e dos filtros utilizados nesse trabalho, precisa-se primeiro, entender o funcionamento de estimadores de mínimos quadrados. O desenvolvimento do filtro de Kalman e suas expansões são baseados na estimação através de mínimos quadrados e na propagação da média e covariância dos estados, tópicos que são discutidos nessa primeira seção.

Como dito no capítulo anterior, uma das intenções dos filtros é obter estimativas para variáveis de estado a partir de medições com ruídos. O estimador de mínimos quadrados parte do princípio de que o valor mais provável de uma variável desconhecida é aquele que minimiza a soma do quadrado das diferenças entre o valor observado e o valor estimado multiplicado por números que meçam o grau de precisão (GAUSS, 1857 *apud* SIMON, 2006).

Matematicamente, suponha que  $x$  é um vetor de  $n$  elementos desconhecidos, e  $y$  é o vetor de  $k$  elementos com as medições ruidosas. Assumindo que cada elemento de  $y$  é uma combinação linear dos elementos de  $x$  adicionados de um ruído de medida, e que a variância de cada ruído é independente das outras, têm-se:



$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad \text{ou} \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{k1} & \cdots & H_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$E(v_i^2) = \sigma_i^2, \quad \text{para } i = 1, \dots, k \quad (2.2)$$

em que  $E(x)$  é o valor esperado de  $x$ , definido, para uma variável discreta, pela soma da multiplicação dos valores de  $x$  por suas probabilidades e  $v_i$  é um ruído branco, com média zero e variância  $\sigma_i^2$ .

Pode-se então, definir a matriz  $R$  das covariâncias dos ruídos das medições. Essa matriz dá uma ideia do quão confiável são cada uma das medições e é muito importante para o desenvolvimento dos estimadores de mínimos quadrados.

$$\mathbf{R} = E(\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_k^2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Define-se  $\epsilon_y$  como a diferença entre o valor medido  $y$  e o produto  $H\hat{x}$ , onde  $\hat{x}$  é o estado estimado. Com os valores de  $\epsilon_{yi}$  e  $\sigma_i$  definidos, obtém-se  $J$ , que deve ser minimizado para que se possa obter a estimação ótima.

$$J = \frac{\epsilon_{y1}^2}{\sigma_1^2} + \cdots + \frac{\epsilon_{yk}^2}{\sigma_k^2} \quad (2.4)$$

$$\text{com } \epsilon_y = \mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} \quad (2.5)$$

Ou seja, ao minimizar-se  $J$ , minimiza-se a soma do quadrado dos erros, levando em consideração a confiabilidade de cada uma das medidas obtidas.

A função  $J$  também pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}
J &= \boldsymbol{\epsilon}_y^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_y \\
&= (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) \\
&= \mathbf{y}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{x}}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Minimizando  $J$  em relação à  $\hat{\mathbf{x}}$ , tem-se:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = -\mathbf{y}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} = 0 \tag{2.7}$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \tag{2.8}$$

Com a Equação (2.8), foi encontrada uma forma de calcular a estimativa para o vetor dos estados  $\mathbf{x}$  que minimiza a função  $J$ .

Entretanto, para que esse mecanismo possa ser utilizado nos filtros discutidos nesse trabalho, precisa-se fazer essa estimação de maneira recursiva, ou seja, a cada novo valor das variáveis medidas, obtém-se um novo valor para os estados estimados.

Pode-se escrever um estimador recursivo da forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x} + \mathbf{v}_k \\
\hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})
\end{aligned} \tag{2.9}$$

em que  $\hat{\mathbf{x}}_k$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  são as estimativas dos estados depois de  $k$  e  $k - 1$  medições;  $\mathbf{y}_k$  é o valor da  $k$ -ésima medição obtida; e  $\mathbf{K}_k$  é a matriz de ganho do estimador no tempo  $k$ , discutida adiante.

Antes de discutir-se como obter a matriz  $\mathbf{K}$ , é necessário introduzir uma nova matriz de covariância, a matriz  $\mathbf{P}$ , da covariância dos erros.

$$\mathbf{P}_k = E(\boldsymbol{\epsilon}_{x_k} \boldsymbol{\epsilon}_{x_k}^T) \tag{2.10}$$

Expandindo os valores de  $\epsilon_{x_k}$  e fazendo algumas manipulações matemáticas, chega-se a:

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (2.11)$$

em que  $\mathbf{R}_k$  é a matriz das covariâncias de  $\mathbf{v}_k$  e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

Com isso, consegue-se encontrar uma forma recursiva para calcular  $\mathbf{P}_k$ . Observa-se também que,  $\mathbf{P}_0$  é uma das grandezas que devem ser inicializadas no código do estimador.

Com o valor de  $\mathbf{P}_k$  definido em (2.11), pode-se então passar para o cálculo de  $\mathbf{K}_k$ . Para isso, deve-se minimizar a soma das variâncias dos erros do estimador. Em outras palavras:

$$\begin{aligned} J_k &= E(\epsilon_{x_{1k}}^2 + \dots + \epsilon_{x_{n_k}}^2) \\ J_k &= Tr(\mathbf{P}_k) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Minimizando em relação a  $\mathbf{K}_k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_k}{\partial \mathbf{K}_k} &= 2(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1} (-\mathbf{H}_k^T) + 2\mathbf{K}_k \mathbf{R}_k = 0 \\ \mathbf{K}_k (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T) &= \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Com isso, obtêm-se todas as variáveis necessárias para a implementação do estimador definidas. Para inicializar o estimador, precisa-se apenas de valores para  $\hat{\mathbf{x}}_0$  e  $\mathbf{P}_0$ .

Pode-se computar o estimador a partir das equações (2.9), (2.11) e (2.13), mostradas abaixo para facilidade de entendimento:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0 &= E(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{P}_0 &= E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x} + \mathbf{v}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (2.16)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.17)$$

Olhando agora para um sistema dinâmico, é necessário obter as expressões que indicam como a média e a variância desse sistema se propagam com o passar do tempo e com a inclusão de novas medições. Como nesse trabalho utilizaram-se apenas sistemas dinâmicos discretos, só são apresentadas as equações relativas a tais sistemas.

Considere o sistema dinâmico discreto:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_{k-1} \quad (2.18)$$

em que  $\mathbf{u}_k$  é o vetor das entradas do sistema e  $\boldsymbol{\omega}_k$  é um ruído branco com covariância  $\mathbf{Q}_k$  e média zero. Para obter-se o valor médio do estado  $\mathbf{x}_k$ , faz-se:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_k &= E(\mathbf{x}_k) \\ &= \mathbf{F}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Em (2.19) observa-se como a média do estado se propaga do instante  $k - 1$  para o instante  $k$ . Pode-se fazer procedimento similar para a matriz das covariâncias  $\mathbf{P}_k$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T] \\ &= \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

A equação (2.20), conhecida como equação de Stein (STEIN, 1952), descreve como a covariância do estado se propaga do instante  $k - 1$  para o instante  $k$ .

Agora se têm todas as ferramentas necessárias para o estudo do filtro de Kalman.

## II.2 - O Filtro de Kalman

O filtro de Kalman (KALMAN, 1960) se utiliza dos conceitos apresentados na seção anterior e os reúne em um único mecanismo, de forma a obter melhores resultados para as estimativas. O filtro de Kalman faz uso da média do estado como a própria estimativa do estado e da covariância do estado como a estimativa da covariância. Por isso, as equações para a propagação da média e da covariância do estado são tão importante para o desenvolvimento desse filtro.

Novamente, como apenas é utilizado o filtro de Kalman em tempo discreto, somente é apresentado o desenvolvimento para tal.

Suponha que se tenha o sistema linear em tempo discreto abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \tag{2.21}$$

com

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_k &\sim (0, \mathbf{Q}_k) \\ \mathbf{v}_k &\sim (0, \mathbf{R}_k) \end{aligned}$$

Deseja-se achar uma maneira de estimar  $\mathbf{x}_k$  a partir do modelo do processo e das medições ruidosas  $\mathbf{y}_k$ .

Para alcançar isso, dividem-se as estimações em dois tipos: *a priori* e *a posteriori*. No caso em que se têm todas as medições até o tempo  $k$  disponíveis, ou seja, tem-se o vetor das medições  $\mathbf{y}_k$  definido, e deseja-se estimar o valor de  $\mathbf{x}_k$ , então essa estimativa é chamada de estimativa *a posteriori*, que é representada por  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ . Em contrapartida, para o caso em que se tem apenas as medições até o tempo  $k - 1$ , ou seja, se não se tem o vetor medições  $\mathbf{y}_k$  definido, e o último vetor das medições disponível for

$\mathbf{y}_{k-1}$ , trata-se então de uma estimativa *a priori*, que é representada por  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ . Matematicamente, essas duas estimativas podem ser resumidas assim:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k] \quad (2.22)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}] \quad (2.23)$$

É importante ressaltar que ambos  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  e  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  são estimativas do mesmo estado,  $\mathbf{x}_k$ , a diferença é que  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  foi estimado antes de se obter o vetor das medições  $\mathbf{y}_k$  e  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  depois de se obter as medições  $\mathbf{y}_k$ . A matriz da covariância do erro do estimador,  $\mathbf{P}_k$ , segue o mesmo padrão, sendo  $\mathbf{P}_k^-$  a covariância relativa à  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ , e  $\mathbf{P}_k^+$  a covariância relativa à  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ .

Tendo em mente as equações (2.19) e (2.20), pode-se então começar a desenvolver o filtro. Como dito anteriormente, o estado estimado através do filtro de Kalman é a própria média do estado. Em outras palavras, para o tempo  $k$  antes de se obter a medição  $\mathbf{y}_k$ , tem-se:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = E(\mathbf{x}_k) = \bar{\mathbf{x}}_k \quad (2.24)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ = E(\mathbf{x}_{k-1}) = \bar{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (2.25)$$

Com isso, a partir da Equação (2.19), chega-se a:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \quad (2.26)$$

A Equação (2.26) é conhecida como equação de propagação (*time update equation*) para  $\hat{\mathbf{x}}$ .

Agora, precisa-se obter essa mesma equação de propagação, mas para a matriz  $\mathbf{P}$ . Uma vez que  $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \bar{\mathbf{x}}_k$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ = \bar{\mathbf{x}}_{k-1}$ , têm-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k-1}^+ &= E[(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+)(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+)^T] \\ &= E[(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^T] \\ &= \mathbf{P}_{k-1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_k^- &= E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T] \\
&= E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T] \\
&= \mathbf{P}_k
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Relembrando a Equação (2.20), chega-se a:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \tag{2.29}$$

A Equação (2.29) é conhecida como equação de propagação (*time update equation*) para  $P$ .

Precisa-se agora encontrar uma equação para passar de  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  a  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  e de  $\mathbf{P}_k^-$  a  $\mathbf{P}_k^+$ , com a inclusão das medições  $\mathbf{y}_k$ . O desenvolvimento dessas equações é baseado na estimação recursiva de mínimos quadrados, explicada na Seção II.1. Dela se retira as Equações (2.9), (2.11) e (2.13), expostas abaixo para facilitar o desenvolvimento:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \tag{2.30}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \tag{2.31}$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \tag{2.32}$$

em que  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  e  $\mathbf{P}_{k-1}$  são o estado estimado e a covariância antes da inclusão da medição  $\mathbf{y}_k$ , e  $\hat{\mathbf{x}}_k$  e  $\mathbf{P}_k$  são o estado estimado e a covariância depois da inclusão da medição  $\mathbf{y}_k$ . Para o filtro de Kalman, o estado estimado e covariância antes da medição  $\mathbf{y}_k$  são  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e  $\mathbf{P}_k^-$ , e o estado estimado e a covariância depois da medição  $\mathbf{y}_k$  são  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  e  $\mathbf{P}_k^+$ . Substituindo nas equações acima  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  e  $\mathbf{P}_{k-1}$  por  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e  $\mathbf{P}_k^-$ , e  $\hat{\mathbf{x}}_k$  e  $\mathbf{P}_k$  por  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  e  $\mathbf{P}_k^+$ , chega-se à:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \tag{2.33}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \tag{2.34}$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \tag{2.35}$$

Essas equações são conhecidas como equações de correção (*measurement-update equations*) para  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{P}$ , e a matriz  $\mathbf{K}_k$  é chamada de matriz do ganho do filtro de Kalman. Essas equações podem ser reescritas de muitas formas, dependendo do grau de robustez e desempenho computacional desejado. Algumas dessas formas seguem abaixo:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.36)$$

$$= \mathbf{P}_k^+ \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (2.38)$$

$$= [(\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k]^{-1} \quad (2.39)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (2.40)$$

Com essas equações pode-se então escrever o filtro de Kalman em tempo discreto.

Resumindo, para um sistema dinâmico discreto do tipo:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_{k-1} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

$$\boldsymbol{\omega}_k \sim (0, \mathbf{Q}_k)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}_k)$$

Inicializa-se o filtro com:

$$\mathbf{x}_0^+ = E(\mathbf{x}_0) \quad (2.42)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x}_0^+ - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_0^+ - \mathbf{x}_0)^T] \quad (2.43)$$

E então, do tempo 1 até o tempo  $k$ , propaga-se o filtro através das equações:



$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.45)$$

$$= \mathbf{P}_k^+ \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (2.46)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \quad (2.47)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.48)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (2.49)$$

$$= [(\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k]^{-1} \quad (2.50)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (2.51)$$

Finalmente, antes de prosseguir, é interessante notar como o filtro de Kalman faz uso da propagação da média e da covariância do estado para atualizar as estimativas no tempo, e da estimação recursiva por mínimos quadrados para atualizar as estimativas com a introdução de novas medições.

É importante ressaltar que para sistemas lineares em que  $\boldsymbol{\omega}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  provêm de distribuições gaussianas com média zero, não são correlacionados e são brancos, o filtro de Kalman dará sempre a estimação com o menor erro possível. Em outras palavras, para esse caso, o filtro de Kalman é ótimo.

### II.3 - Filtro de Kalman Linearizado (LKF)

Como dito na Seção I.1, o filtro de Kalman funciona muito bem para sistemas com dinâmicas lineares. Entretanto, como a maioria dos sistemas reais são não lineares ou apresentam algum tipo de não linearidade em certo ponto, é necessário utilizar outros filtros mais complexos para poder estimar com maior precisão os estados desejados. A partir dessa seção começa o estudo de estimadores de estado que são mais indicados para sistemas não lineares, apresentando resultados mais satisfatórios que o filtro de Kalman clássico.

O Filtro de Kalman linearizado (LKF, *Linearized Kalman Filter*) lineariza as dinâmicas do processo em torno de uma trajetória de referência no espaço de estados que

não dependa de dados de medida e depois aplica o filtro de Kalman clássico para medir a discrepância dessa trajetória em relação ao estado real. A Figura 2.1 (CRAIN II, 2002) resume o que foi dito.

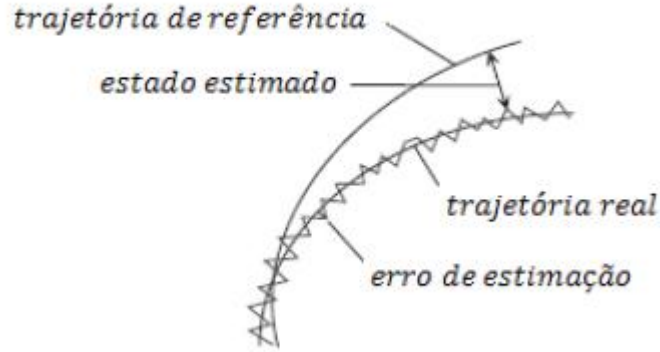


Figura 2.1 – Resumo da ideia do filtro de Kalman linearizado (CRAIN II, 2002).

Em termos matemáticos, considere o sistema não linear em tempo discreto abaixo:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \boldsymbol{\omega}_{k-1}) \quad (2.52)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (2.53)$$

$$\boldsymbol{\omega}_k \sim (0, \mathbf{Q}_k)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}_k)$$

em que tanto a equação do sistema,  $f$ , como a equação das medições,  $h$ , são funções não lineares. Expandindo essas duas funções através de séries de Taylor em torno dos valores nominais  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{y}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$ , e truncando a expansão no termo de primeira ordem, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= f(\mathbf{x}_{0,k-1}, \mathbf{u}_{0,k-1}, \boldsymbol{\omega}_{0,k-1}) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_0 (\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_{0,k-1}) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_0 (\mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{u}_{0,k-1}) \\ &\quad + \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right|_0 (\boldsymbol{\omega}_{k-1} - \boldsymbol{\omega}_{0,k-1}) \\ &= f(\mathbf{x}_{0,k-1}, \mathbf{u}_{0,k-1}, \boldsymbol{\omega}_{0,k-1}) + \mathbf{F}_{k-1} \Delta \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \Delta \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{L}_{k-1} \Delta \boldsymbol{\omega}_{k-1} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_k &= h(\mathbf{x}_{0,k}, \mathbf{v}_{0,k}) + \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_0 (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{0,k}) + \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}} \right|_0 (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{0,k}) \\
&= h(\mathbf{x}_{0,k}, \mathbf{v}_{0,k}) + \mathbf{H}_k \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{M}_k \Delta \mathbf{v}_k
\end{aligned} \tag{2.55}$$

As definições das derivadas parciais  $\mathbf{F}_{k-1}$ ,  $\mathbf{G}_{k-1}$ ,  $\mathbf{L}_{k-1}$ ,  $\mathbf{H}_k$  e  $\mathbf{M}_k$  e dos desvios  $\Delta \mathbf{x}_{k-1}$ ,  $\Delta \mathbf{u}_{k-1}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\omega}_{k-1}$ ,  $\Delta \mathbf{x}_k$  e  $\Delta \mathbf{v}_k$  podem ser facilmente obtidas comparando as equações acima.

Pode-se considerar que os valores nominais para os ruídos são sempre iguais à zero, ou seja,  $\boldsymbol{\omega}_0 = 0$  e  $\mathbf{v}_0 = 0$ , assim:

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_{k-1} = \boldsymbol{\omega}_{k-1} \tag{2.56}$$

$$\Delta \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k \tag{2.57}$$

Além disso, pode-se assumir que o controle  $\mathbf{u}_k$ , em qualquer tempo  $k$ , é completamente conhecido. Com isso, arbitra-se  $\mathbf{u}_{0,k} = \mathbf{u}_k$ , para qualquer tempo  $k$ , o que nos leva a  $\Delta \mathbf{u}_{k-1} = 0$ .

Agora, definindo a trajetória nominal como sendo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{0,k} &= f(\mathbf{x}_{0,k-1}, \mathbf{u}_{0,k-1}, \boldsymbol{\omega}_{0,k-1}) \\
\mathbf{y}_{0,k} &= h(\mathbf{x}_{0,k}, \mathbf{v}_{0,k})
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Definindo o desvio das medições:

$$\Delta \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{0,k} \tag{2.59}$$

Subtraindo as Equações (2.58) e (2.59) das Equações (2.54) e (2.55), chegase a:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_{k-1} \Delta \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{L}_{k-1} \boldsymbol{\omega}_{k-1} \\ &= \mathbf{F}_{k-1} \Delta \mathbf{x}_{k-1} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}\end{aligned}\quad (2.60)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} \sim (0, \tilde{\mathbf{Q}}_{k-1}), \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{k-1} = \mathbf{L}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{L}_{k-1}^T \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{y}_k &= \mathbf{H}_k \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{M}_k \mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{H}_k \Delta \mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{v}}_k\end{aligned}\quad (2.62)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_k \sim (0, \tilde{\mathbf{R}}_k), \quad \tilde{\mathbf{R}}_k = \mathbf{M}_k \mathbf{R}_k \mathbf{M}_k^T \quad (2.63)$$

O sistema acima é um sistema linear em tempo discreto com estados  $\Delta \mathbf{x}$  e medições  $\Delta \mathbf{y}$ . Pode-se então, aplicar o filtro de Kalman nesse sistema para estimar  $\Delta \mathbf{x}$ , a diferença entre o estado real  $\mathbf{x}$  e o estado nominal  $\mathbf{x}_0$ .

Inicializando o filtro:

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_0^+ = 0 \quad (2.64)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E[(\Delta \mathbf{x}_0 - \Delta \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\Delta \mathbf{x}_0 - \Delta \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T] \quad (2.65)$$

Propagando o filtro:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \tilde{\mathbf{Q}}_{k-1} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \tilde{\mathbf{R}}_k)^{-1} \quad (2.67)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \Delta \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \quad (2.68)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_k^+ = \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\Delta \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.69)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{K}_k^T \quad (2.70)$$

Finalizando o filtro:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \mathbf{x}_{0,k} - \Delta \hat{\mathbf{x}}_k^+ \quad (2.71)$$

Com isso, está definido o filtro de Kalman linearizado (LKF).

## II.4 - Filtro de Kalman Estendido (EKF)

Como visto anteriormente, o LKF lineariza um sistema não linear em torno de um trajetória nominal. Entretanto, a qualidade da estimação e a acurácia do filtro nesse caso ficam muito dependentes da escolha da trajetória. Se escolhida uma trajetória nominal que seja parecida com a trajetória real do sistema, então se tem uma boa estimação dos estados, em contrapartida, uma má escolha da trajetória nominal pode levar a valores para os estados muito diferentes dos valores reais. Por isso, fez-se necessário o desenvolvimento de um novo filtro, que não dependesse de escolha da trajetória nominal.

Como dito anteriormente, o filtro de Kalman estendido (EKF, *Extended Kalman Filter*), é o estimador de estado não linear mais utilizado nos dias de hoje, devido à boa precisão das suas estimações e do seu baixo custo computacional comparado com outros estimadores. O mecanismo proposto por Stanley Schmidt para o EKF se utiliza da ideia do LKF, mas ao invés de linearizar o sistema não linear em torno de uma trajetória nominal, ele lineariza em torno da própria estimativa de estado, e utiliza essa linearização para gerar o próximo estado estimado. Novamente, é apresentado somente o desenvolvimento para o EKF em tempo discreto.

Suponha que se tenha um sistema dinâmico discreto não linear similar ao usado no desenvolvimento do LKF:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \boldsymbol{\omega}_{k-1}) \quad (2.72)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (2.73)$$

$$\boldsymbol{\omega}_k \sim (0, \mathbf{Q}_k)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}_k)$$

Do mesmo modo que foi feito no LKF, faz-se uma expansão em série de Taylor em torno dos valores nominais e com as mesmas considerações feitas para o LKF. Só que dessa vez os valores nominais são os próprios estados estimados, ou seja, em torno de  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ ,  $\mathbf{u}_{k-1}$  e ruído nulo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) + \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} \boldsymbol{\omega}_{k-1} \\
&= f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, 0) + \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) + \mathbf{L}_{k-1} \boldsymbol{\omega}_{k-1} \\
&= \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + [f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, 0) - \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+] + \mathbf{L}_{k-1} \boldsymbol{\omega}_{k-1} \\
&= \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \tilde{\mathbf{u}}_{k-1} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}
\end{aligned} \tag{2.74}$$

na qual as definições de  $\mathbf{F}_{k-1}$  e  $\mathbf{L}_{k-1}$  são evidentes a partir das equações acima, e:

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = f(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, 0) - \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ \tag{2.75}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \sim (0, \mathbf{L}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{L}_k^T) \tag{2.76}$$

Agora, fazendo a expansão em série de Taylor para a equação das medições em torno  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e  $\mathbf{v}_k = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_k &= h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0) + \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} \mathbf{v}_k \\
&= h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0) + \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{M}_k \mathbf{v}_k \\
&= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{z}_k + \tilde{\mathbf{v}}_k
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Novamente,  $\mathbf{H}_k$  e  $\mathbf{M}_k$  são definidos na equação acima e:

$$\mathbf{z}_k = h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0) - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- \tag{2.78}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_k \sim (0, \mathbf{M}_k \mathbf{R}_k \mathbf{M}_k^T)$$

Com isso, agora se tem um sistema linear formado pelas Equações (2.74) e (2.77), e pode-se usar o filtro de Kalman clássico para a estimação de estados, resultando no seguinte bloco de Equações (2.44) a (2.51), repetido abaixo:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{L}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{L}_{k-1}^T \quad (2.79)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{R}_k \mathbf{M}_k^T)^{-1} \quad (2.80)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, 0) \quad (2.81)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0) - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (2.82)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0)] \quad (2.83)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (2.84)$$

O filtro de Kalman estendido (EKF) em tempo discreto pode então ser computado da seguinte maneira:

- Inicialize o filtro:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E(\mathbf{x}_0) \quad (2.85)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T] \quad (2.86)$$

- Para  $k = 1, 2, \dots$ , faça:

- a) Calcule as matrizes  $\mathbf{F}_{k-1}$  e  $\mathbf{L}_{k-1}$ :

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} \quad (2.87)$$

$$\mathbf{L}_{k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} \quad (2.88)$$

- b) Atualize no tempo as estimativas dos estados e a matriz da covariância do erro de estimação:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{L}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{L}_{k-1}^T \quad (2.89)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, 0) \quad (2.90)$$

c) Calcule as matrizes  $H_k$  e  $M_k$ :

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} \quad (2.91)$$

$$\mathbf{M}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} \quad (2.92)$$

d) Atualize as os valores *a posteriori* com a inclusão de uma nova medição:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{R}_k \mathbf{M}_k^T)^{-1} \quad (2.93)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0)] \quad (2.94)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (2.95)$$

É importante ressaltar que os outros formatos para as expressões de  $\mathbf{K}_k$  e  $\mathbf{P}_k$ , discutidos durante o desenvolvimento do filtro de Kalman clássico, podem ser utilizados aqui também.

## II.5 - Filtro de Kalman *Unscented*

O filtro de Kalman *Unscented*, ou UKF, foi desenvolvido para problemas não lineares nos quais o EKF não apresentava uma resposta tão satisfatória. Ele parte da ideia de que é mais fácil aproximar uma função densidade de probabilidade do que uma função ou transformação não linear qualquer (JULIER *et al.*, 2000), e nasce de uma união das transformações *Unscented*, que tem suas origens no método de Monte Carlo, com os filtros de Kalman.

Para começar a entender o filtro UKF, é necessário entender primeiro a transformação *Unscented*. Uma transformação *Unscented* se baseia em dois princípios



fundamentais: o fato de ser mais fácil fazer uma transformação não linear em um ponto do que uma função densidade de probabilidade inteira; e o fato de não ser muito difícil de achar um grupo de pontos no espaço de estados cujas funções densidade de probabilidade se assemelham à do vetor dos estados. A técnica consiste em obter a média e a covariância de certo vetor  $\mathbf{x}$  com um número significativamente menor de realizações do que em comparação com o número de realizações necessárias caso fosse utilizado funções estatísticas usuais. No caso das transformações *Unscented*, essas realizações do vetor  $\mathbf{x}$  seriam representativas, de maneira que as estatísticas calculadas não se distanciem das que utilizam um grande número de realizações (AGUIRRE, 2007).

Para conseguir isso, suponha que a média  $\bar{\mathbf{x}}$  e a covariância  $\mathbf{P}$  do vetor  $\mathbf{x}$  sejam conhecidas. Agora, precisa-se encontrar um grupo de vetores, chamados de pontos sigma, cuja média e covariância são iguais às do vetor  $\mathbf{x}$ . Depois, aplica-se a transformação não linear para cada um desses vetores. A média e a covariância do conjunto após a transformação é uma boa aproximação do valor real da média e da covariância de  $\mathbf{y}$ .

Matematicamente, suponha que  $\mathbf{x}$  é um vetor de  $n$  elementos e que a função da transformação não linear é  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ . Nesse caso, são necessários  $2n$  pontos sigma, que podem ser calculados da seguinte maneira:

$$\mathbf{x}^{(i)} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (2.96)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = (\sqrt{n\mathbf{P}})_i^T, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.97)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = -(\sqrt{n\mathbf{P}})_i^T, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.98)$$

em que  $(\sqrt{n\mathbf{P}})_i^T$  é a transposta da  $i$ -ésima linha da matriz raiz quadrada de  $n\mathbf{P}$ , tal que  $(\sqrt{n\mathbf{P}})^T (\sqrt{n\mathbf{P}}) = n\mathbf{P}$ .

Transformar-se cada um desses vetores usando a função não linear  $h(\mathbf{x})$  e depois fazer uma média ponderada desses valores para obter uma aproximação do valor médio de  $\mathbf{y}$ . Assim, tem-se:

$$\mathbf{y}^{(i)} = h(\mathbf{x}^{(i)}), \quad i = 1, \dots, 2n \quad (2.99)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_u = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{y}^{(i)} \quad (2.100)$$

em que  $\bar{\mathbf{y}}_u$  é a média aproximada de  $\mathbf{y}$ , chamada de média *Unscented*.

Agora, necessita-se achar uma aproximação para a matriz das covariâncias de  $\mathbf{y}$ . Chama-se essa estimação de  $\mathbf{P}_u$ , que pode ser descrita pela equação abaixo:

$$\mathbf{P}_u = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\mathbf{y}^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}_u)(\mathbf{y}^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}_u)^T \quad (2.101)$$

Com as Equações (2.96) a (2.101) define-se a transformação *Unscented*, que é a base para o desenvolvimento do UKF.

No UKF, assim como no filtro de Kalman clássico, busca-se propagar a média e a covariância do estado com uma etapa de propagação e uma etapa de correção. A média estimada pelo filtro é a estimativa do estado do sistema. A diferença para o caso do UKF é que, diferentemente de como foi feito anteriormente quando se tratava de sistemas não lineares, o sistema não é linearizado antes de aplicar o filtro. Ao invés disso, são usadas as transformações *Unscented*, que foram descritas acima.

Assim, suponha que se tenha o sistema dinâmico discreto não linear com  $n$  estados, abaixo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \boldsymbol{\omega}_k \quad (2.102)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (2.103)$$

$$\boldsymbol{\omega}_k \sim (0, \mathbf{Q}_k)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}_k)$$

Primeiramente, deve-se inicializar o filtro com os valores  $\hat{\mathbf{x}}_0^+$  e  $\mathbf{P}_0^+$  da mesma forma que se fez para os estimadores anteriores:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E(\mathbf{x}_0) \quad (2.104)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T] \quad (2.105)$$

A partir de agora, as etapas seguintes devem ser repetidas nessa ordem para  $k = 1, 2, \dots$ .

Começa-se pela etapa de propagação, escolhendo pontos sigma  $\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}$ , lembrando que agora a melhor estimativa para a média e a covariância do estado  $\mathbf{x}_k$  são  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$  e  $\mathbf{P}_{k-1}^+$ . Com isso, tem-se:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (2.106)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = \left( \sqrt{n\mathbf{P}_{k-1}^+} \right)_i^T, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.107)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = - \left( \sqrt{n\mathbf{P}_{k-1}^+} \right)_i^T, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.108)$$

Depois, utiliza-se a equação do sistema para transformar os pontos sigma em vetores:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{u}_k) \quad (2.109)$$

Agora, pode-se obter a estimativa *a priori* fazendo a média ponderada dos vetores obtidos anteriormente:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} \quad (2.110)$$

A matriz da covariância do erro *a priori* pode ser calculada através da Equação (2.20), com as devidas alterações. Além disso, precisa-se incluir o ruído de processo  $\mathbf{Q}_{k-1}$ . Chega-se então a:

$$\mathbf{P}_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (2.111)$$

Com isso está completa a etapa de propagação, e passa-se para a etapa de correção.

Novamente, inicia-se computando os pontos sigma. Dessa vez as melhores estimativas disponíveis para a média e a covariância do estado  $\mathbf{x}_k$  são  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e  $\mathbf{P}_k^-$ , respectivamente. Logo, tem-se:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (2.112)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = (\sqrt{n\mathbf{P}_k^-})_i^T, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.113)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = -(\sqrt{n\mathbf{P}_k^-})_i^T, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.114)$$

Aqui, ao invés de calcular novos pontos sigma, pode-se também, para diminuir o custo computacional do estimador, utilizar os pontos sigma que haviam sido gerados na fase de propagação. Entretanto, caso o objetivo seja obter uma estimativa com alto grau de confiabilidade, recomenda-se calcular novos pontos sigma.

Usa-se então, a equação das medições  $h(\mathbf{x})$  para transformar os novos pontos sigma em vetores:

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} = h(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}) \quad (2.115)$$

Faz-se a média ponderada dos novos vetores obtidos para chegar ao valor estimado da medição  $y_k$ :

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} \quad (2.116)$$

Antes de prosseguir, é necessário calcular duas novas matrizes de covariâncias. Primeiro, calcula-se a matriz da covariância do erro da estimativa da medição, o que pode ser feito baseado na Equação (2.101). Entretanto, é necessário incluir  $\mathbf{R}_k$  à equação para levar-se em consideração os ruídos de medição. Com isso, tem-se que:

$$\mathbf{P}_y = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k) (\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k)^T + \mathbf{R}_k \quad (2.117)$$

Além de  $\mathbf{P}_y$ , é necessário calcular também a covariância cruzada entre  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e  $\hat{\mathbf{y}}_k$ . Isso pode ser feito utilizando a equação abaixo:

$$\mathbf{P}_{xy} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k)^T \quad (2.118)$$

Finalmente, pode-se atualizar as estimativas em relação às medições utilizando-se das equações do filtro de Kalman clássico adaptadas para o esse problema. Com isso, tem-se:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \quad (2.119)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \quad (2.120)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_y \mathbf{K}_k^T \quad (2.121)$$

Assim, o filtro de Kalman *Unscented* está definido.

Como dito anteriormente, e como pode ser visto pelas equações do filtro UKF, ele não faz uso de linearizações do sistema. Pode-se mostrar matematicamente que, ao se utilizar as transformações *Unscented* ao invés de linearizar o sistema, há um ganho na acurácia da estimação. Fazendo uma expansão em série de Taylor de  $\mathbf{y}_u$  em torno de  $\bar{\mathbf{x}}$ , observa-se que  $\mathbf{y}_u$  é igual ao valor real de  $\mathbf{y}$  até o termo de terceira ordem da expansão (SIMON, 2006). Entretanto, quando se faz o mesmo procedimento com  $h(\mathbf{x})$  linearizada, pode-se mostrar que a expansão só é igual ao valor real de  $\mathbf{y}$  até o termo de primeira ordem.

Ou seja, as transformações *Unscented* aproximam melhor o valor estimado em duas ordens da série de Taylor. Apesar de em muitos casos isso não significar grandes diferenças, para casos em que as não linearidades do problema são severas, a diferença entre as estimativas dos filtros linearizados e as estimativas dos filtros que se utilizam das transformações *Unscented* pode ser muito grande.

## Capítulo III – Análises Propostas

### III.1 - Estudo de caso: Modelo do Tanque Aquecido

Inicialmente, antes de partir para problemas mais complexos, iniciaram-se as análises discutindo um tanque agitado com uma camisa de aquecimento sem reação química. A temperatura na camisa é superior à temperatura dentro do tanque, fazendo com que o tanque seja aquecido.

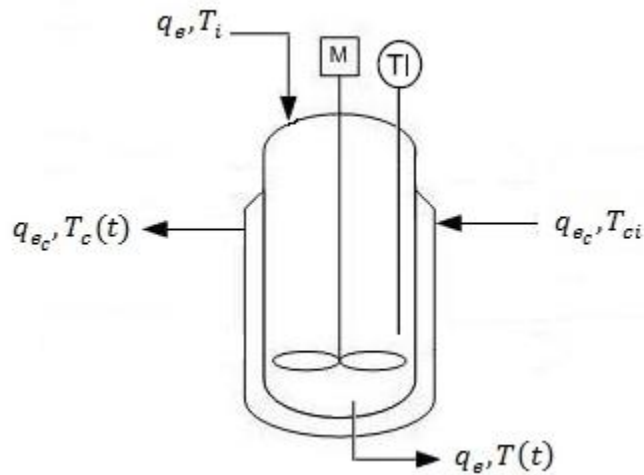


Figura 3.1 – Esquema do tanque aquecido.

Nesse problema, tem-se controle apenas sobre a vazão de entrada na camisa, e deseja-se controlar a temperatura dentro do tanque, e conseqüentemente a temperatura de saída do tanque.

Esse sistema pode ser descrito dinamicamente pelas equações que seguem abaixo:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{q_e}{V} [T_i - T(t)] - \frac{UA}{V\rho c_p} [T(t) - T_c(t)] \quad (3.1)$$

$$\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{q_{e_c}}{V_c} [T_{ci} - T_c(t)] + \frac{UA}{V_c\rho_c c_{pc}} [T(t) - T_c(t)] \quad (3.2)$$

em que  $q_e$  é a vazão volumétrica de entrada no tanque que, supondo que o volume de líquido dentro do tanque é constante, é igual a vazão de saída do tanque;  $T_i$  e  $T_{ci}$  são a temperatura de entrada no tanque e na camisa, respectivamente;  $q_{e_c}$  é a vazão de entrada na camisa  $T(t)$  e  $T_c(t)$  são a temperatura dentro do tanque e a temperatura da camisa, respectivamente;  $V$  e  $V_c$  são o volume de líquido dentro do tanque e o volume de líquido dentro da camisa, respectivamente;  $U$  e  $A$  são o coeficiente de troca térmica do sistema e a área de troca térmica, respectivamente; e  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\rho_c$  e  $c_{pc}$  são a densidade e a capacidade calorífica dos líquidos dentro do tanque e da camisa, respectivamente.

Os estados que definem o processo são  $T(t)$  e  $T_c(t)$ , e essas são as duas variáveis que se quer estimar a partir de medições da temperatura do tanque apenas. A vazão de entrada no tanque  $q_e$ , a vazão de entrada na camisa  $q_{e_c}$ , a temperatura de entrada no tanque  $T_i$  e a temperatura de entrada na camisa  $T_{ci}$  são variáveis que não se têm controle, e podem implicar em distúrbios no sistema.  $U$ ,  $A$ ,  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\rho_c$  e  $c_{pc}$  são consideradas constantes e estão especificadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Valores dos parâmetros utilizados nas simulações com o modelo do tanque aquecido

Variável	Valor	Unidade
$V$	0,3	$m^3$
$V_c$	0,03	$m^3$
$\rho c_p$	4157,67	$\frac{kJ}{Km^3}$
$\rho_c c_{pc}$	4157,68	$\frac{kJ}{Km^3}$
$UA$	349,24	$\frac{kJ}{K}$

Como se pode notar pelas equações dinâmicas do sistema, trata-se de um sistema linear. Com isso, pode-se aplicar o filtro de Kalman clássico e analisar o seu desempenho para esse tipo de sistema. Deseja-se também comprovar a ideia de que quando se trata de um sistema linear, o filtro de Kalman apresenta resultados tão bons quanto filtros mais complexos como o UKF, por exemplo.



Códigos para o filtro de Kalman clássico e o filtro de Kalman *Unscented* (UKF) foram desenvolvidos no MATLAB® e comparados com o suposto desempenho da planta, simulada pelo modelo matemático do sistema. Para tanto, foi necessário obter a matriz jacobiana do modelo, que depois de ser discretizada, foi incluída no cálculo das estimativas.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{q_e}{V} - \frac{UA}{V\rho c_v} & \frac{UA}{V\rho c_v} \\ \frac{UA}{V_c\rho_c c_{vc}} & -\frac{q_{ec}}{V_c} - \frac{UA}{V_c\rho_c c_{vc}} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Os resultados das simulações e as discussões a respeito encontram-se no próximo capítulo.

### III.2 - Estudo de Caso: Reator de Van de Vusse

O reator de Van de Vusse apresenta não linearidades severas e de diversas formas, o que o torna um bom sistema para analisar o desempenho de diferentes filtros.

Nesse caso, foi utilizado um reator tipo CSTR com uma camisa de aquecimento com temperatura constante, como ilustrado na Figura 3.2:

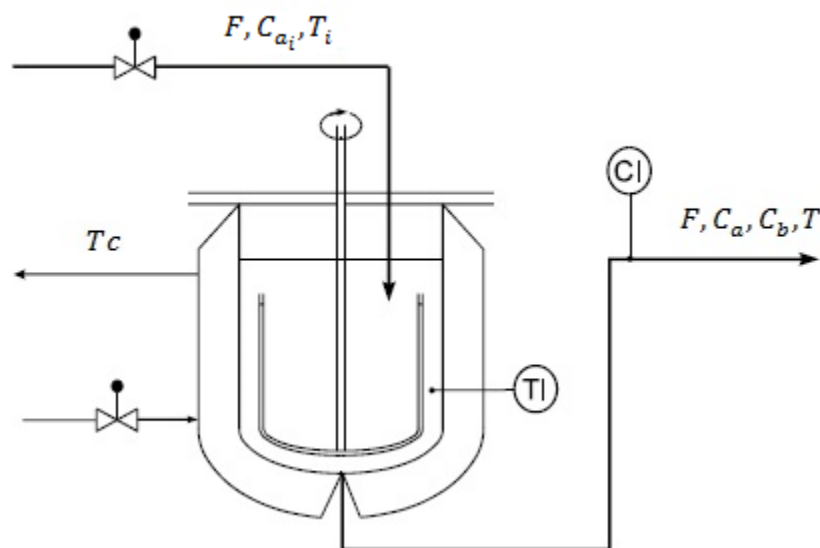
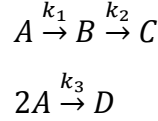


Figura 3.2 – Esquema do reator de Van de Vusse.

Dentro do reator acontece a chamada reação de Van de Vusse, que consiste em uma reação em série e uma em paralelo, segundo o seguinte esquema reacional:



O objetivo é maximizar a produção de  $B$  e minimizar a produção de  $C$  e  $D$ , que são subprodutos da reação. Para tanto, controlou-se a concentração de  $B$  na saída e a temperatura dentro do reator.

O modelo do sistema fica:

$$\frac{dC_a}{dt} = \frac{F}{V} [C_{ai} - C_a(t)] - k_1(T)C_a(t) - k_3(T)C_a^2(t) \quad (3.4)$$

$$\frac{dC_b}{dt} = -\frac{F}{V}C_b(t) + k_1(T)C_a(t) - k_2(T)C_b(t) \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho c_p} [ &k_1(T)C_a(t)(-\Delta H_{R_{ab}}) + k_2(T)C_b(t)(-\Delta H_{R_{bc}}) \\ &+ k_3(T)C_a^2(t)(-\Delta H_{R_{ad}})] + \frac{F}{V} [T_i - T(t)] + \frac{UA}{\rho c_p V} [T_c - T(t)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que  $C_a$  e  $C_b$  são as concentrações de  $A$  e  $B$  ao longo do tempo;  $C_{ai}$  é a concentração de entrada de  $A$ ;  $F$  é a vazão de entrada no sistema;  $V$  é o volume do reator;  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  são as constantes das reações;  $T$  é a temperatura dentro do tanque ao longo do tempo;  $T_i$  é a temperatura de entrada no reator;  $T_c$  é a temperatura da camisa, considerada fixa;  $\Delta H_{R_{ab}}$ ,  $\Delta H_{R_{bc}}$  e  $\Delta H_{R_{ad}}$  são as entalpias de reação para cada uma das reações especificadas acima;  $U$  e  $A$  são o coeficiente de troca térmica do sistema e a área de troca térmica, respectivamente; e  $\rho$  e  $c_p$  são a densidade e a capacidade calorífica do líquido dentro do tanque, respectivamente.

Os estados que definem o problema nesse caso são  $C_a$ ,  $C_b$  e  $T$ , que são estimados tendo apenas medições de  $C_b$  e  $T$ . As variáveis de entrada no tanque,  $F$ ,  $C_{a0}$  e  $T_0$ , são variáveis sobre as quais não se têm controle, e que podem vir a trazer distúrbios ao sistema.  $\Delta H_{R_{ab}}$ ,  $\Delta H_{R_{bc}}$  e  $\Delta H_{R_{ad}}$ ,  $U$ ,  $A$ ,  $\rho$  e  $c_p$  são consideradas constantes.

As constantes de reação,  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ , dependem da temperatura do meio, e seus valores podem ser obtidos através da equação de Arrhenius:

$$k_i(T) = k_{i0} \exp\left(-\frac{E_i/R}{T(^{\circ}C) + 273,15}\right) \quad (3.7)$$

Para as análises que foram feitas utilizaram-se os valores dos parâmetros retirados de Trierweiler (1997), que estão na Tabela 3.2:

Tabela 3.2 – Valores dos parâmetros utilizados nas simulações com o modelo do reator de Van de Vusse

Variável	Valor	Unidade
$k_{10}$	$1,287 \times 10^{12}$	$h^{-1}$
$k_{20}$	$1,287 \times 10^{12}$	$h^{-1}$
$k_{30}$	$9,043 \times 10^9$	$L/molA \cdot h$
$E_1/R$	9758,3	$K$
$E_2/R$	9758,3	$K$
$E_3/R$	8560,0	$K$
$\Delta H_{R_{ab}}$	4,20	$kJ/molA$
$\Delta H_{R_{bc}}$	11,00	$kJ/molB$
$\Delta H_{R_{ad}}$	41,85	$kJ/molA$
$\rho$	0,9342	$kg/L$
$c_p$	3,01	$kJ/kgK$
$U$	4032,0	$kJ/hK m^2$
$A$	0,215	$m^2$
$V$	10	$L$
$T_c$	128,95	$^{\circ}C$

Observa-se pelas equações dinâmicas do processo que agora se está lidando com um sistema não linear. De fato, a dinâmica de um reator desse tipo apresenta diferentes tipos de não linearidades dependendo dos valores atribuídos às variáveis de processo, ou seja, dependendo do ponto de operação que é escolhido. Essa propriedade é explorada mais tarde, quando é mudado o ponto de operação e analisada a resposta dos estimadores estudados. Por enquanto, entretanto, é usado um ponto de operação fixo.

Em se tratando de um modelo não linear, não se pode usar o filtro de Kalman clássico para estimar os estados desse sistema. Com isso, utiliza-se o LKF, o EKF e o UKF para tentar obter valores perto dos reais da planta. Nesse primeiro momento, deseja-se apenas analisar o desempenho destes três filtros em um determinado ponto de operação onde as não linearidades não sejam muito severas e compará-los para ver quem apresenta melhores resultados. Baseado na teoria dos filtros espera-se que o EKF e o UKF apresentem estimativas próximas dos valores da planta para regiões com não linearidades brandas, enquanto para o LKF espera-se obter boas estimativas na região perto da qual o sistema foi linearizado.

Códigos para o EKF, o UKF e o LKF foram feitos no MATLAB® e comparados com o desempenho da planta, simulada pelo modelo que descreve o sistema. Para tanto foi necessária a determinação da matriz jacobiana do sistema, que depois foi discretizada para fazer parte do modelo dinâmico em tempo discreto utilizado nas simulações:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{F}{V} - k_1 - 2k_3C_a & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{F}{V} - k_2 & 0 \\ \frac{k_1\Delta H_{R_{ab}}}{\rho c_p} + \frac{2C_a k_3 \Delta H_{R_{ad}}}{\rho c_p} & \frac{k_2 \Delta H_{R_{bc}}}{\rho c_p} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{F}{V} - \frac{UA}{\rho c_p \rho c_p} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\frac{dk_1}{dT} C_a \Delta H_{R_{ab}} + \frac{dk_2}{dT} C_b \Delta H_{R_{bc}} + \frac{dk_3}{dT} C_a^2 \Delta H_{R_{ad}}}{\rho c_p} \quad (3.9)$$

em que as derivadas das constantes de reação podem ser calculadas pela fórmula:

$$\frac{dk_i}{dT} = \frac{k_{i0}(E_i/R) \exp\left(-\frac{E_i/R}{T + 273,15}\right)}{(T + 273,15)^2}, \text{ para } i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (3.10)$$

Novamente, analisando a matriz jacobiana do sistema, pode-se ver que o sistema não é linear.

O resultado das simulações e as discussões a respeito encontram-se no próximo capítulo.

### III.3 - Análise da influência das matrizes de covariância e dos ruídos

Agora que foi feita a modelagem dinâmica dos dois sistemas e os dois estudos de caso, pode-se passar para análises mais complexas. A primeira discussão que se quer propor é sobre as matrizes de covariância do sistema:  $P$ ,  $Q$  e  $R$ .

Quando se começa a simular os sistemas, uma pergunta que sempre aparece é: Como determinar os valores das matrizes de covariância? Além disso, no capítulo da teoria comentou-se um pouco sobre essas matrizes, mas será que elas influenciam tanto assim na estimação dos estados? São essas perguntas que se tenta responder com essa análise.

A análise se inicia pela matriz de covariância do erro do estimador  $P$ . Apesar de o próprio método iterativo calcular estimativas *a priori* e *a posteriori* de  $P$ , ainda tem-se que iniciar o filtro com o valor de  $P_0^+$ . Lembrando-se da definição de  $P_0^+$ :

$$P_0^+ = E[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^T] \quad (3.11)$$

Em outras palavras  $P_0^+$  é a esperança do quadrado da diferença entre o valor para o qual a planta é iniciada e o valor para o qual o estimador é iniciado. Ele dá ao estimador uma ideia do quão confiável é a estimativa inicial que foi feita para os estados. Com base nisso, nossa estimativa inicial do estimador é alterada, mas não o valor inicial da

planta real. Desse modo, para continuar a trabalhar com a matriz sintonizada, foi-se necessário alterar o valor de  $P_0^+$  correspondentemente. É possível, então, analisar a influência das estimativas iniciais e de  $P_0^+$  para a simulação e a estimação dos estados.

Depois de fazer a análise sobre a matriz de covariância do erro do estimador, passa-se agora a análise da matriz de covariância das medições ( $R$ ). Essa análise é, possivelmente, a mais interessante das três que são feitas nesse capítulo, pois a matriz de covariância das medidas está diretamente relacionada ao ruído do sistema. Em outras palavras, é analisado o desempenho de cada filtro diante de diferentes níveis de ruído.

Esta análise é dividida em duas etapas. Primeiramente, é alterado o valor do ruído nas medidas, mas a matriz  $R$  estará sintonizada com o valor das covariâncias das medições. Com isso, apesar de se usar valores ruidosos, o estimador saberá que a confiabilidade desses valores é baixa. Assim, a influência que medições ruidosas fazem na estimação dos estados é verificada, e uma comparação entre a capacidade de estimação em diferentes níveis de ruído para cada estimador pode ser efetuada.

A segunda etapa consiste em uma análise de como a não sintonização da matriz  $R$  afeta a resposta do estimador. Dessa vez o ruído das medições é alterado, mas a matriz das covariâncias das medidas não será atualizada, levando a um sistema não sintonizado, mostrando a necessidade da manutenção do estimador.

A última matriz de covariância que é analisada é a matriz  $Q$ , a covariância do ruído do estado. Geralmente, esses ruídos têm suas origens nos ruídos que as variáveis de entrada no sistema carregam com elas, nos ruídos inerentes ao processo e nos ruídos das variáveis medidas, quando estas são realimentadas ao processo através de malhas de controle. Esses ruídos das variáveis de entrada no sistema se dissipam ao longo do tempo e se tornam o ruído do próprio estado.

Até esse ponto, trabalhou-se com variáveis de entrada sem ruído, e com valores de  $Q$  baixos conseqüentemente. Para fazer uma análise sobre a influência desses ruídos e da matriz de covariância do estado na estimação dos estados, são acrescentados ruídos às variáveis de entrada e a matriz  $Q$  é sintonizada em função desses ruídos. Depois, o valor desses ruídos é alterado para ver como os diferentes filtros reagem a essas alterações e ver qual filtro consegue filtrar melhor os ruídos de estado.

Todas as análises são feitas para os dois casos estudados anteriormente, tanto para o Tanque Aquecido quanto para o Reator de Van de Vusse, e para todos os estimadores utilizados nas análises anteriores de cada estudo de caso.

### III.4 - Análise de diferentes pontos de operação do reator de Van de Vusse

A última análise proposta nesse trabalho é relativa às respostas dos estimadores não lineares para o reator de Van de Vusse, mas em outros pontos de operação.

Como dito anteriormente, o sistema da reação de Van de Vusse apresenta diversas formas de não linearidades e, dependendo do ponto de operação, pode-se lidar com diferentes graus de não linearidade. É essa propriedade que se deseja explorar nessa análise. As variáveis de processo são variadas de modo que se consiga obter pontos de operação diferentes e obter respostas dinâmicas diferentes também. Com isso, espera-se obter respostas diferentes dos estimadores não lineares utilizados, de modo que para um ponto de operação a análise sobre o desempenho dos estimadores possa ser diferente da análise de desempenho dos mesmos estimadores em outro ponto de operação.

Depois de mudar o ponto de operação, são utilizados os mesmos estimadores não lineares utilizados anteriormente (são eles: LKF, EKF e UKF) para estimar os novos estados em cada um dos pontos de operação. Assim, pode-se ter uma ideia mais concreta das diferenças, vantagens e desvantagens de cada um desses estimadores, e pode-se fazer uma análise mais complexa e mais embasada sobre o desempenho e a qualidade desses diferentes filtros.

A escolha dos novos pontos de operação é feita com base no gráfico abaixo, retirado de Ogunnaike e Ray (1994), que mostra a variação do valor da concentração de B, em mol/L, no estado estacionário com a variação da fração  $F/V$ , em  $h^{-1}$ . Com isso, escolheram-se valores para a vazão de entrada de forma a obter valores de  $F/V$  coerentes

com a Figura 3.3 e que dariam respostas dinâmicas diferentes das que se tinha originalmente.

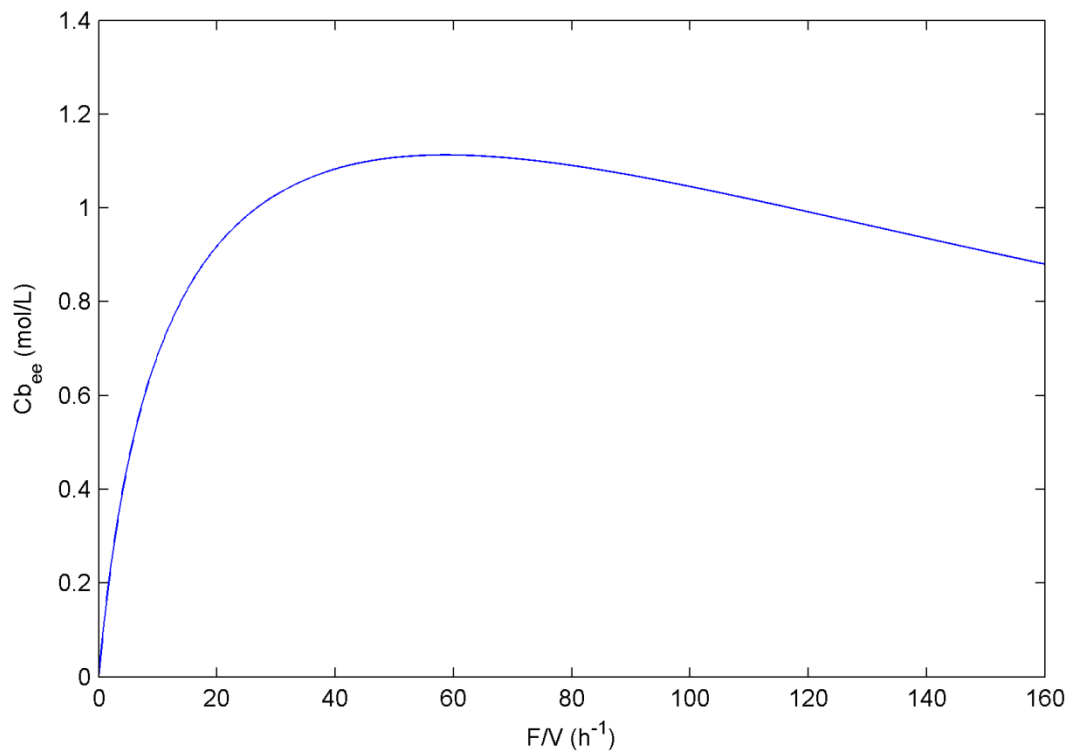


Figura 3.3 – Variação do estado estacionário da concentração de B com o aumento da razão  $F/V$  para a reação de Van de Vusse.



## Capítulo IV – Resultados e Discussões

### IV.1 - Estudo de caso: Modelo do Tanque Aquecido

Iniciaram-se as simulações estimando os valores de  $T$  e  $T_c$  de um tanque aquecido com medições de  $T$  através do filtro de Kalman clássico. Como esse sistema é linear, essa análise pode ser feita.

Para o cálculo da matriz  $A$  das derivadas parciais do sistema, utilizou-se  $q_e = 0.03 \text{ m}^3/\text{min}$  e  $q_{e_c} = 0,045 \text{ m}^3/\text{min}$ . Os valores iniciais de  $T$  e  $T_c$  foram fixados em  $10^\circ\text{C}$  e  $95^\circ\text{C}$ , respectivamente, iguais aos valores escolhidos para as temperaturas de entrada no tanque  $T_i$  e na camisa  $T_{c_i}$ . As estimativas iniciais para o estado,  $\hat{x}_0^+$ , foram iguais aos valores de  $T$  e  $T_c$  acrescidos de  $0,5^\circ\text{C}$ , de modo que a matriz  $P_0^+$  fosse:

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

O tempo de amostragem foi de  $0,5 \text{ min}$  e deixou-se a iteração correr por 50 ciclos até que as duas temperaturas chegassem próximas ao estado estacionário. As técnicas para determinação do tempo de amostragem e do número de iterações para esse caso, e para todos os outros casos descritos nesse trabalho, foram baseadas nas técnicas descritas em (AGUIRRE, 2007). As medições ruidosas foram simuladas a partir dos valores reais das variáveis com a adição de um ruído gaussiano com média zero e desvio padrão 0,5. Como se mediu apenas um dos estados, a matriz  $R$  reduziu-se a um escalar:

$$R = [0,25] \quad (4.2)$$

Como não se incluiu ruídos nas variáveis de entrada, e o modelo utilizado é idêntico ao da planta, estipulou-se um valor relativamente baixo para a matriz  $Q$ , uma vez que todos os ruídos do estado seriam oriundos dos ruídos das medições. Com isso:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

A Figura 4.1 é para a temperatura dentro do tanque, e compara o valor estimado pelo filtro de Kalman (símbolo de estrelas) com o valor esperado da simulação (linha contínua) e com as medições ruidosas (linha tracejada). No nosso caso, o valor esperado das simulações é o valor da planta, simulada através do modelo dinâmico do sistema.

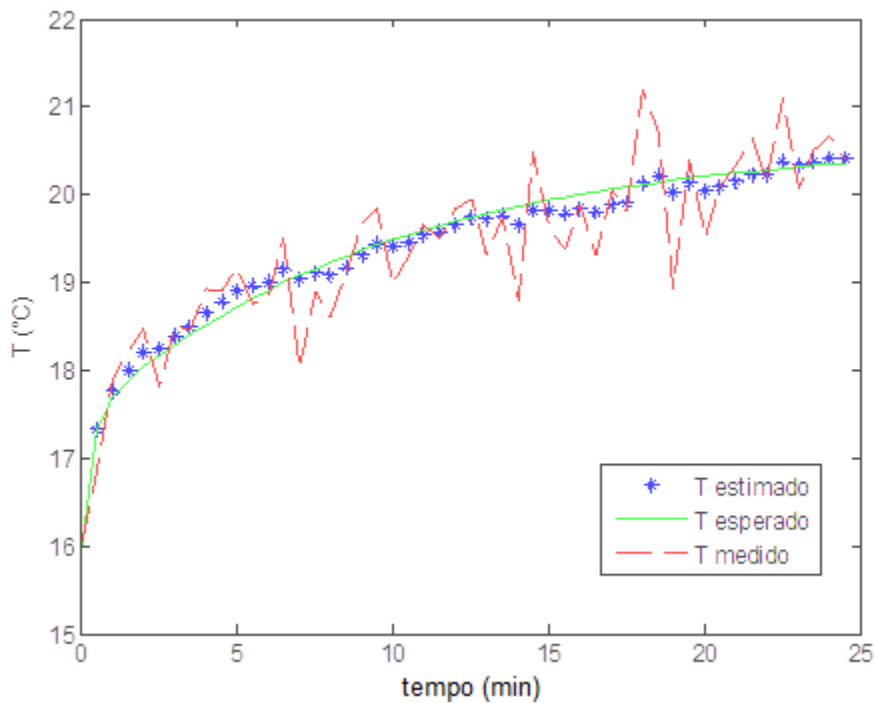


Figura 4.1 – Resposta do KF para a estimação de T no tanque aquecido.

Pode-se notar que, apesar das medições serem bastante ruidosas, o filtro de Kalman conseguiu estimar bem os valores de  $T$  ao longo do tempo.

O gráfico a seguir é para a temperatura da camisa, e compara os valores estimados pelo filtro de Kalman (símbolo de estrelas) com o valor real (linha contínua). Para o valor de  $T_c$  não há medições.

Mais uma vez observa-se que, apesar das medições ruidosas de  $T$ , o filtro de Kalman consegue estimar bem o valor de  $T_c$

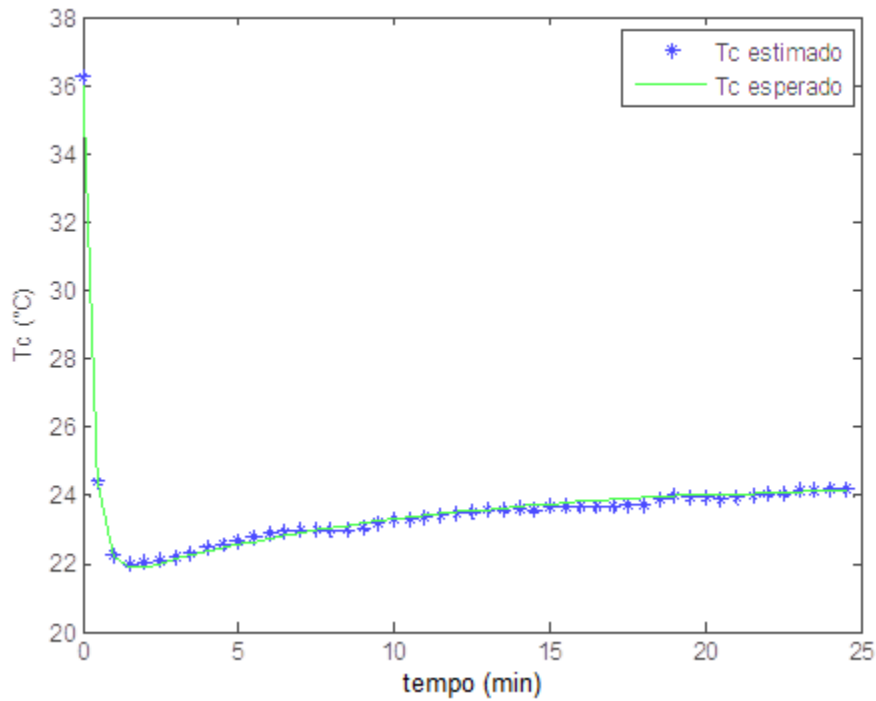


Figura 4.2 – Resposta do KF para a estimação de Tc no tanque aquecido.

Para obter um parâmetro de comparação mais palpável, computaram-se dois erros de estimação para cada estado, o MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) e o RMSE (*Root Mean Square Error*), que são definidos como segue:

$$MAPE(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{|x_k - \hat{x}_k|}{x_k} \quad (4.4)$$

$$RMSE(x) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x}_k)^2}{n}} \quad (4.5)$$

O valor dos erros de estimação para os dois estados podem ser encontrados na Tabela 4.1.

Apesar de não possuir nenhum outro valor para comparar e se ter uma ideia do quão bom são as estimações, pode-se ver que os valores são baixos, e observando os gráficos, pode-se afirmar que as estimações foram satisfatórias.

Tabela 4.1 – Erros de estimação de T e Tc com o uso do KF

Estado	MAPE	RMSE (°C)
$T$	0,0052	0,1177
$Tc$	0,0038	0,1062

Depois de estimar os estados do tanque com o filtro de Kalman clássico, usou-se o filtro de Kalman *Unscented* (UKF) para o mesmo propósito, de forma a poder comparar o desempenho dos dois para um sistema linear.

Os parâmetros utilizados na simulação com o UKF foram os mesmos utilizados no KF, assim como os valores para os ruídos e as matrizes de covariância.

A Figura 4.3 mostra a resposta para a temperatura do tanque  $T$ .

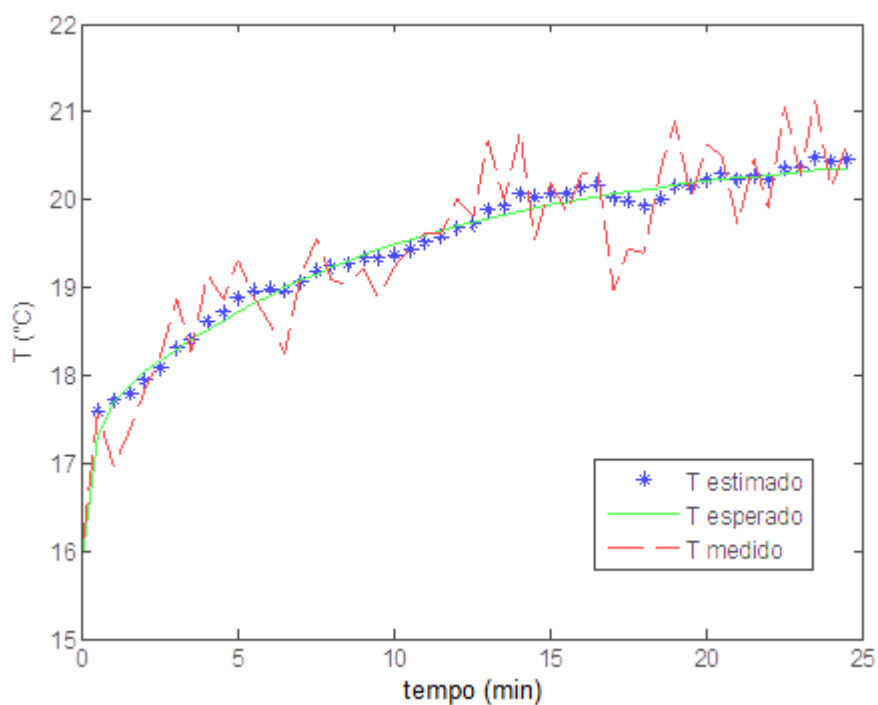


Figura 4.3 – Resposta do UKF para a estimação de T no tanque aquecido.

A Figura 4.4 mostra a resposta para a temperatura da camisa  $T_c$ .

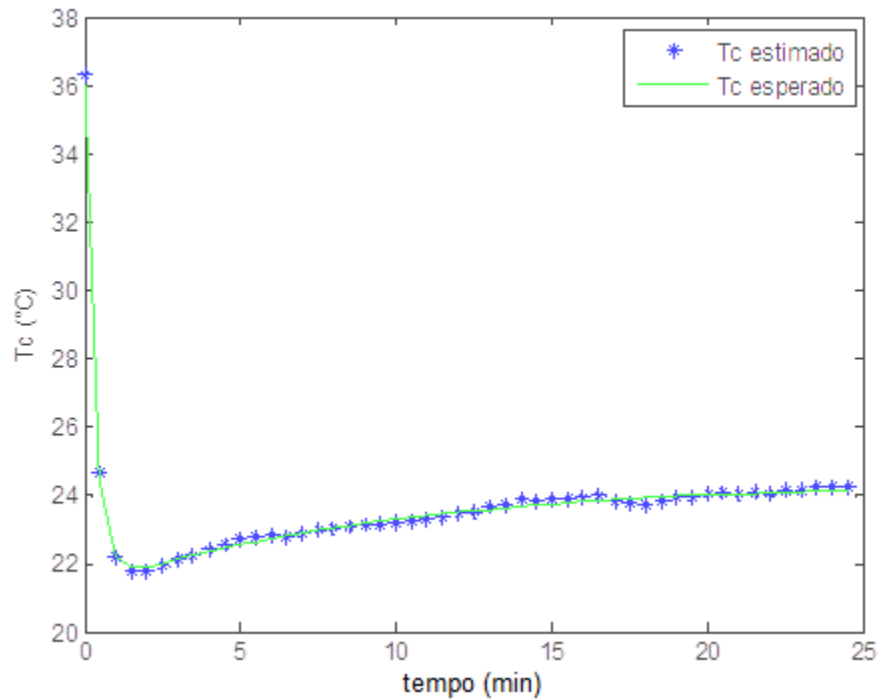


Figura 4.4 – Resposta do UKF para a estimação de  $T_c$  no tanque aquecido.

Observando as Figuras 4.3 e 4.4, pode-se ver que ambas as estimações ficaram muito próximas dos valores reais, e aparentemente parecem ter ficado melhores dos que as estimativas usando o filtro de Kalman clássico.

Para poder comparar melhor o desempenho dos dois filtros, segue abaixo a Tabela com os valores dos erros de estimação para as estimações feitas com o UKF.

Tabela 4.2 – Erros de estimação de  $T$  e  $T_c$  com o uso do UKF

<b>Estado</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSE (°C)</b>
$T$	0,0045	0,1085
$T_c$	0,0035	0,1053

Comparando os valores dos erros de estimação dos dois filtros observa-se que o valor do MAPE para ambos os estados é muito parecido para os dois filtros, com os valores diferentes apenas na terceira ou quarta casas decimais a favor do UKF. O valor do RMSE para  $T$  e  $T_c$  são bem próximos para ambos os filtros também, sendo novamente

melhor para o UKF. É importante lembrar que  $T_c$  é o estado do qual não se tem medições, tornando mais complicada a sua estimação.

Entretanto, tendo em vista o custo computacional de se operar com o UKF, principalmente em tempo real, o KF aparenta ser a melhor alternativa para esse caso, uma vez que as estimações feitas pelo KF, apesar do grande ruído nas medições, foram bem fiéis aos valores reais dos estados.

#### IV.2 - Estudo de Caso: Reator de Van de Vusse

Para o estudo de caso do reator de Van de Vusse, simulou-se os estados utilizando o LKF, o EKF e o UKF.

Para ajuste da matriz das derivadas parciais do sistema, estipulou-se, com base nos dados de Trierweiler (1997),  $C_{ai} = 5.1 \text{ molA/L}$ ,  $C_{bi} = 0.0 \text{ molB/L}$  e  $T_i = 130^\circ\text{C}$  para as variáveis de entrada, e vazão de entrada no reator, que é igual à vazão de saída, foi mantida constante em  $F = 160 \text{ L/h}$ . Os valores iniciais dos estados utilizados foram  $x_0 = [2 \ 0,5 \ 25]$ , onde  $x = [C_a \ C_b \ T]$ , e o valor inicial utilizado para a estimativa foi  $\hat{x}_0^+ = [2,1 \ 0,6 \ 25,5]$ , considerando um erro dos instrumentos de medição de concentração de  $0,05 \text{ mol/L}$  e dos instrumentos de medição de temperatura de  $0,5 \text{ }^\circ\text{C}$ , que foram considerados erros padrões para esses tipos de instrumentos de medição. Com isso a matriz da covariância inicial dos erros de estimação,  $P_0^+$ , ficou:

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} 0,0025 & 0,0025 & 0,025 \\ 0,0025 & 0,0025 & 0,025 \\ 0,025 & 0,025 & 0,25 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

O tempo de amostragem utilizado foi de  $0,01 \text{ h}$ , e deixou-se a simulação correr por 50 ciclos, até que os três estados chegassem perto de seus valores estacionários. Para a simulação das medidas da planta, utilizaram-se os valores das variáveis acrescidos de um ruído. Ruído esse que foi atribuído aos instrumentos de medição e por isso foi simulado com média zero e desvio padrão igual aos erros atribuídos aos valores iniciais da

estimação:  $0,05 \text{ mol/L}$  para o ruído de  $C_b$  e  $0,5 \text{ }^\circ\text{C}$  para o ruído de  $T$ . Com isso, o valor da matriz da covariância das medidas ficou:

$$R = \begin{bmatrix} 0,0025 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Novamente, como não foram incluídos ruídos nas variáveis de entrada do processo, e como o modelo utilizado é igual à planta, estipulou-se um valor de  $Q$  baixo para essa simulação. A maior influência nos ruídos do estado seria causada pelos ruídos de medição, e como estes assumem valores diferentes para a concentração e para a temperatura, os valores de  $Q$  foram diferentes para a concentração e para a temperatura. Para o ruído da temperatura, utilizou-se o mesmo valor que havia sido utilizado no estudo de caso do tanque aquecido. Para o ruído da concentração, utilizou-se um valor 10 vezes menor que o valor utilizado para a temperatura. Assim:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Iniciaram-se as simulações do reator de Van de Vusse pelo LKF. Para isso, linearizou-se a trajetória em torno do valor do estado estacionário. Fez-se esta escolha considerando que em uma planta real de processo seria mais simples descobrir o estado estacionário do projeto do que qualquer outro ponto da sua trajetória ou do que a própria dinâmica dentro do reator. Além disso, considerando a operação do reator por um tempo longo, espera-se que ele opere em torno do valor estacionário, com isto, é interessante ter o modelo linearizado em torno desse ponto.

Os gráficos para a simulação da concentração de A dentro do reator ao longo do tempo estão mostrados nas Figuras 4.5, sendo que  $C_a$  é o único estado não medido.

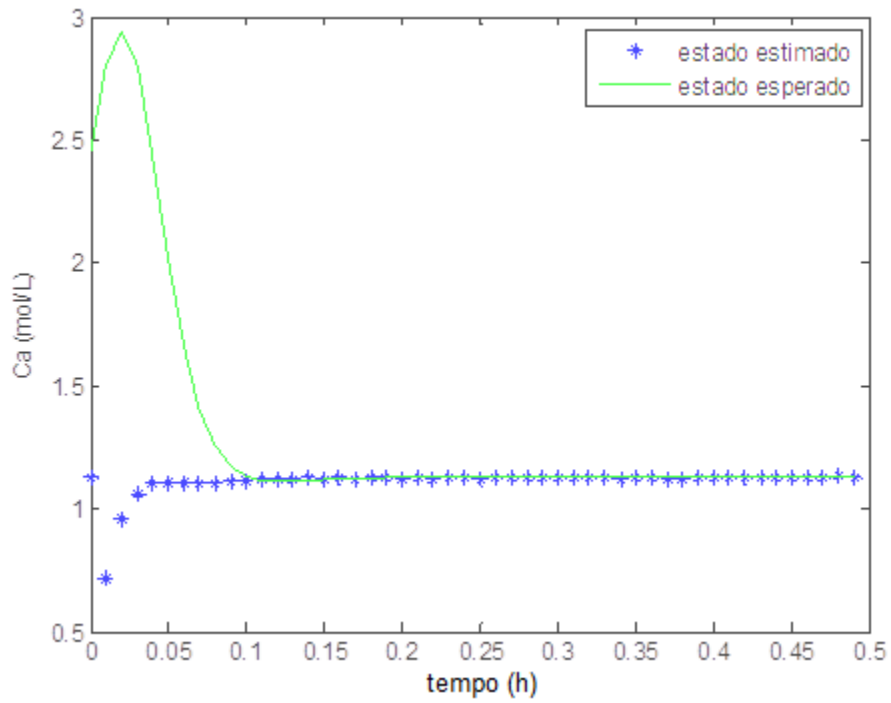


Figura 4.5 – Resposta do LKF para a estimação de Ca no reator de Van de Vusse.

Na Figura 4.6 tem-se o gráfico da simulação da concentração de B ao longo do tempo.

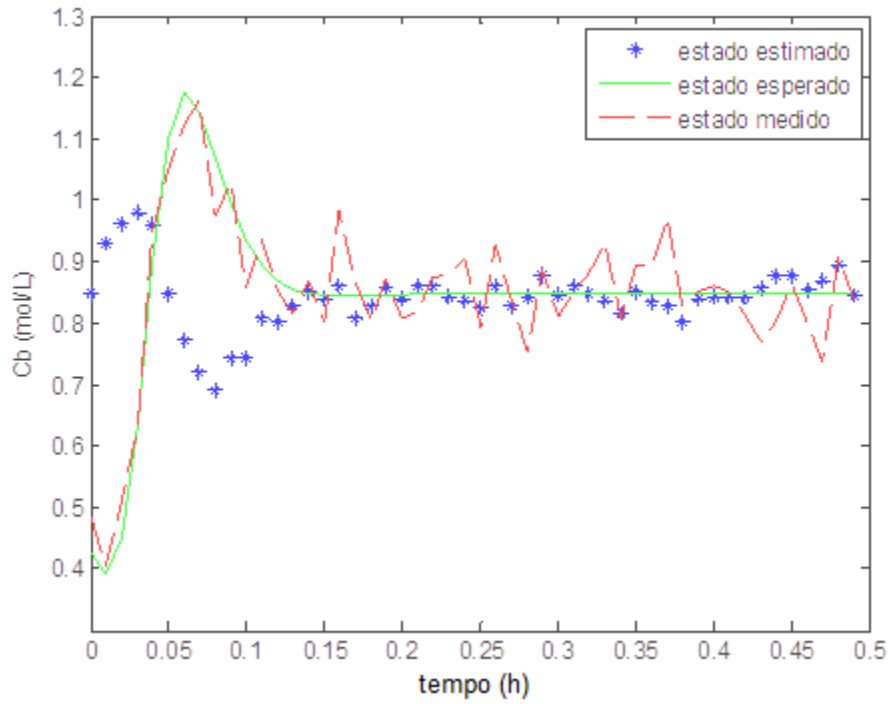


Figura 4.6 – Resposta do LKF para a estimação de Cb no reator de Van de Vusse.



A Figura 4.7 mostra o gráfico da simulação da temperatura dentro do reator.

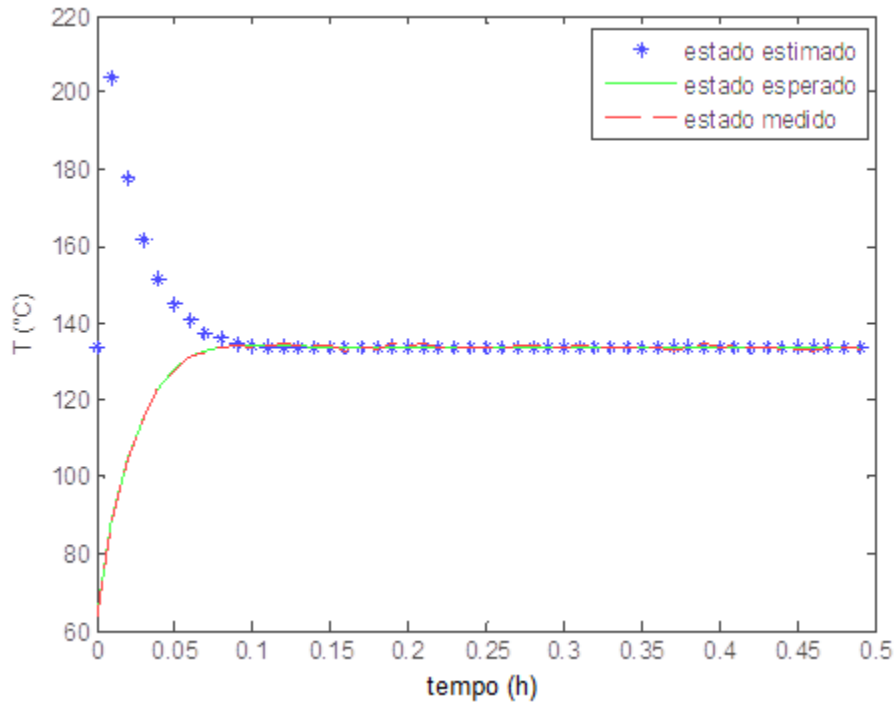


Figura 4.4 – Resposta do LKF para a estimativa de T no reator de Van de Vusse.

Como era esperada, a simulação do LKF somente deu bons resultados para pontos perto do estado estacionário, uma vez que esse foi usado para linearizar o sistema. Nota-se que em alguns pontos o valor estimado pelo LKF foi muito discrepante do real, principalmente na estimativa da temperatura.

Entretanto, de forma geral, pode-se ver que o filtro fez um bom trabalho filtrando os ruídos de medição. Mesmo com sinais ruidosos, as estimativas conseguiram se aproximar do valor estacionário dos três estados, apesar de não conseguirem simular com precisão o que veio antes desses valores.

Os valores dos erros de estimativa são uma forma melhor de comparação entre os filtros. A Tabela 4.3 resume os erros de estimativa para o LKF:

Os valores dos erros corroboram o que foi dito baseado nos gráficos. Os valores, de maneira geral, não foram de todo ruins. Exceção feita ao valor do RMSE para  $T$ , o qual atingiu um valor elevado, em função da ordem de grandeza relativa entre as variáveis. Entretanto, observando para o gráfico da temperatura contra o tempo, pode-se

notar que, apesar de a estimação da temperatura ser muito ruim nos momentos iniciais da simulação, depois o estimador começa a se aproximar do valor real até chegar ao valor estacionário.

Tabela 4.3 – Erros de estimação de Ca, Cb e T com o uso do LKF

<b>Estado</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSE (mol/L ou °C)</b>
<i>Ca</i>	0,0884	0,5668
<i>Cb</i>	0,1347	0,1751
<i>T</i>	0,0801	23,1762

A seguir os mesmos estados foram estimados utilizando o EKF. Os valores das variáveis de entrada e de início, dos ruídos e das matrizes de covariância foram os mesmo utilizados na simulação com o LKF. O tempo de amostragem foi estipulado em 0,01 h e 50 ciclos foram simulados.

O gráfico da simulação de *Ca*, para o qual não se tem medições, é mostrado na Figura 4.8.

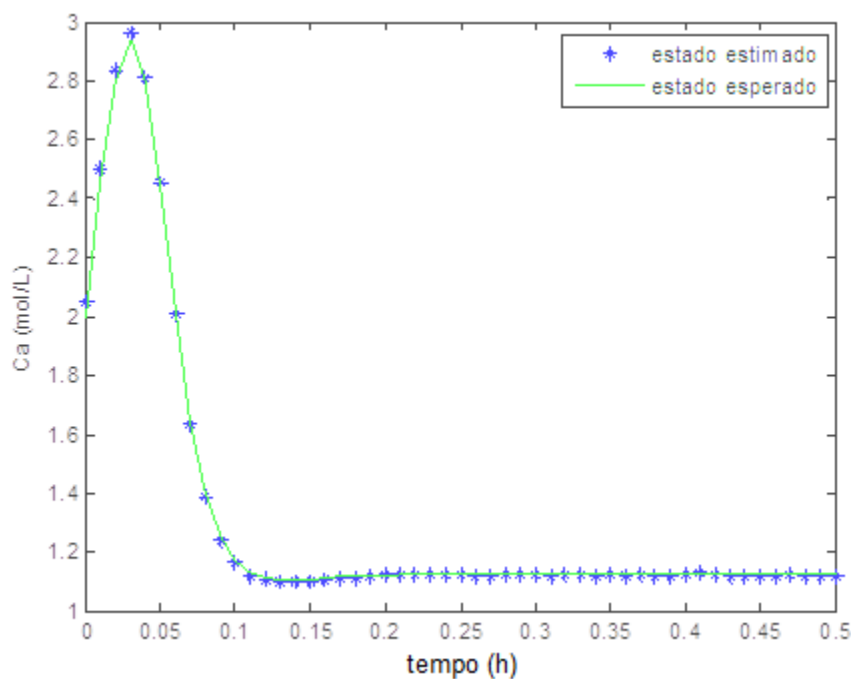


Figura 4.8 – Resposta do EKF para a estimação de T no reator de Van de Vusse.

As Figuras 4.9 e 4.10 mostram os gráficos para a simulação de  $C_b$  e  $T$ , respectivamente.

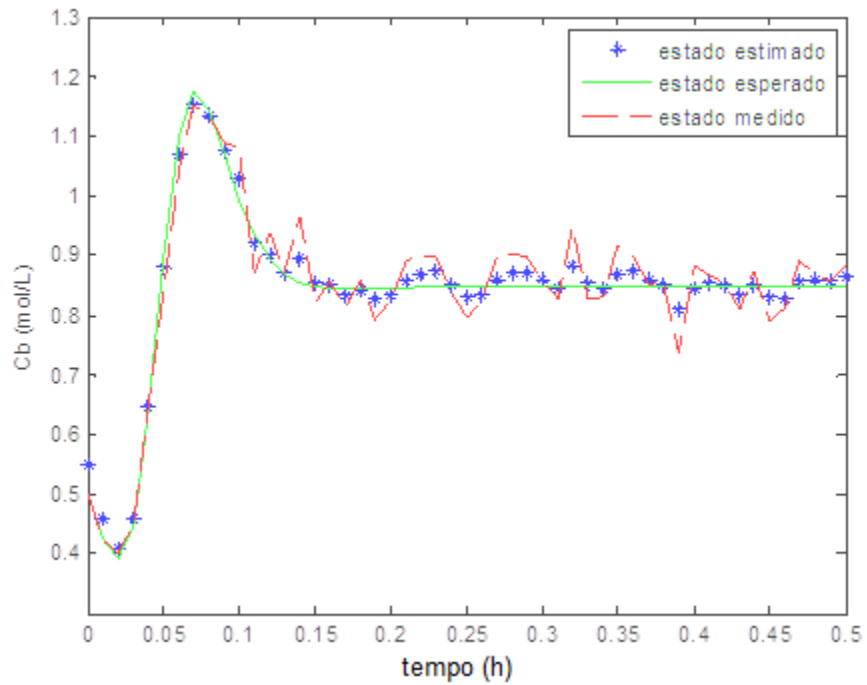


Figura 4.9 – Resposta do EKF para a estimação de  $C_b$  no reator de Van de Vusse.

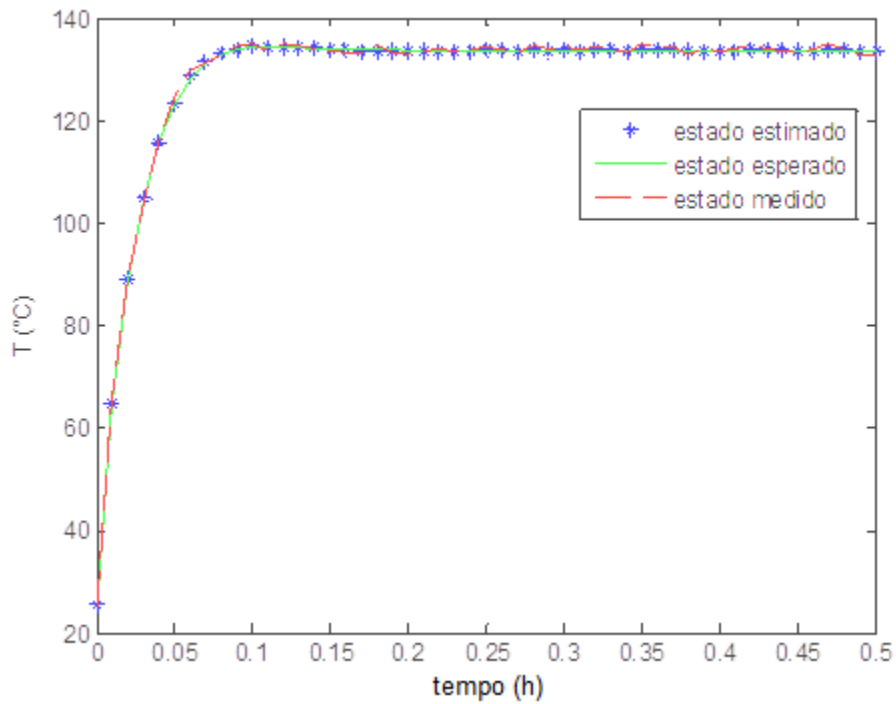


Figura 4.10 – Resposta do EKF para a estimação de  $T$  no reator de Van de Vusse.

Observa-se pelos gráficos que o EKF consegue estimar com precisão os três estados. Diferentemente do que aconteceu na simulação com o LKF, o filtro de Kalman estendido consegue prever a trajetória dos estados, fazendo com que a estimação seja fiel ao valor real durante toda a operação da planta.

Além disso, observa-se também que o estimador faz um bom trabalho filtrando os ruídos. No gráfico de  $C_b$ , por exemplo, em que os ruídos das medidas são mais aparentes, consegue-se ver que a estimação do EKF não erra por mais de aproximadamente  $0,05 \text{ mol/L}$  em nenhum momento da trajetória. E, mesmo com essa medição ruidosa de  $C_b$  e sem ter medições da concentração de A, a estimação de  $C_a$  é satisfatória durante todo o trajeto.

Observando os valores dos erros de estimação na Tabela 4.4, pode-se ter uma noção melhor do trabalho feito pelo EKF.

Tabela 4.4 – Erros de estimação de  $C_a$ ,  $C_b$  e  $T$  com o uso do EKF

<b>Estado</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSE(<math>\text{mol/L}</math> ou <math>^{\circ}\text{C}</math>)</b>
$C_a$	0,0043	0,0127
$C_b$	0,0221	0,0217
$T$	0,0014	0,1863

Comparando os valores da Tabela acima com os valores da Tabela 4.3 pode-se ver o quão melhor foi a estimação do EKF em comparação com a do LKF. De modo geral, a estimação do EKF foi satisfatória e a comprovação disso está nos valores dos erros de estimação, que são baixos, comparados ao LKF.

Por último, analisou-se o desempenho do UKF para esse mesmo sistema. Viu-se anteriormente que, para sistemas lineares, o UKF não apresentou grandes melhorias em relação ao filtro de Kalman clássico, não compensando a sua utilização, tendo em vista o seu maior custo computacional. Agora o seu desempenho é avaliado diante de um sistema não linear.

Os valores das variáveis de entrada e de início, dos ruídos e das matrizes de covariância foram os mesmo utilizados nas duas simulações anteriores. O tempo de amostragem e de simulação foi o mesmo dos estudos anteriores.

O gráfico da variável não medida,  $C_a$ , é mostrada na Figura 4.11.

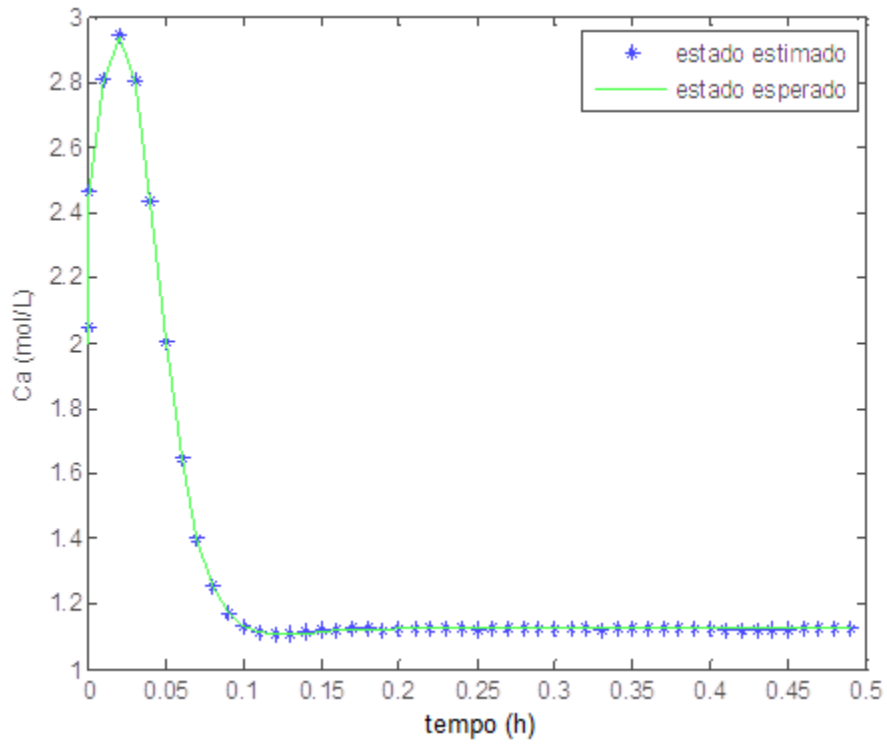


Figura 4.11 – Resposta do UKF para a estimação de  $C_a$  no reator de Van de Vusse.

O gráfico para a estimação de  $C_b$  com o UKF é mostrado na Figura 4.12.

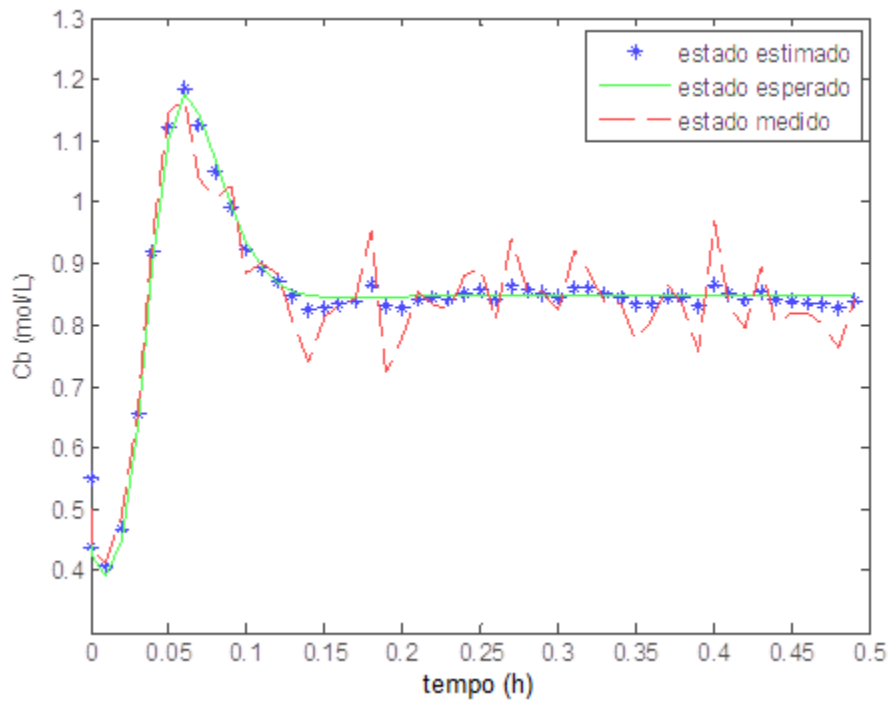


Figura 4.12 – Resposta do UKF para a estimação de  $C_b$  no reator de Van de Vusse.

Por último, tem-se o gráfico da estimação de T na Figura 4.13.

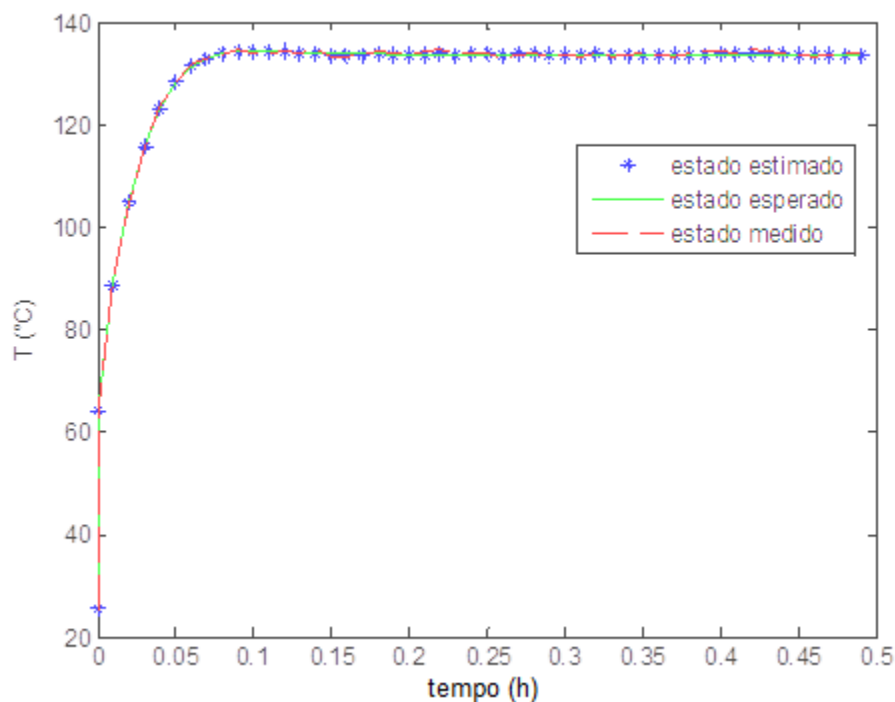


Figura 4.13 – Resposta do UKF para a estimação de T no reator de Van de Vusse.

Observando apenas para os gráficos das simulações com o UKF, parece que as estimações foram levemente melhores do que as do EKF, mas é difícil avaliar apenas pelos gráficos, uma vez que ambas as estimações foram boas. Observa-se que assim como o EKF, o UKF também consegue prever a trajetória dos três estados com acurácia durante todo o percurso, e consegue filtrar satisfatoriamente os ruídos de medição.

Mais uma vez, consegue-se ver pelos gráficos, a grande diferença com a estimação do LKF. Entretanto, para ter mais bases de comparação, principalmente com o EKF, os valores dos erros de estimação para o UKF estão resumidos na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Erros de estimação de Ca, Cb e T com o uso do UKF

<b>Estado</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSE(mol/L ou °C)</b>
<i>Ca</i>	0,0029	0,0118
<i>Cb</i>	0,0170	0,0157
<i>T</i>	0,0009	0,1147

Com base nos dados da Tabela 4.5 acima, pode-se ver que o UKF apresentou valores menores para todos os erros de estimação quando comparados aos valores do EKF, e principalmente ao do LKF.

De imediato, pode-se afirmar a vantagem, em termos de estimação, na utilização do UKF em relação ao LKF, fazendo com que o UKF, apesar do seu maior custo computacional, seja recomendado, na maioria dos casos, sobre o LKF.

Em relação à vantagem comparativa ao EKF, a análise é um pouco mais complicada. Observa-se, por este exemplo, que não houve grandes diferenças entre os valores dos erros, sendo os dois muito baixos e próximos, o que indica que ambos os estimadores conseguiram fornecer estimativas bem satisfatórias. Para esse caso, talvez o EKF fosse mais recomendado então, visto que o seu custo computacional é menor. Entretanto, para comparar melhor os dois filtros precisa-se analisar uma dinâmica com não linearidades mais severas. Isto é feito na Seção IV.4, quando são analisados outros pontos de operação do reator de Van de Vusse, com isso, espera-se obter dados melhores para poder comparar os desempenhos do EKF e do UKF.

### IV.3 - Análise da influência das matrizes de covariância e dos ruídos

Inicia-se agora a análise sobre as diferentes respostas dos filtros para os diferentes valores das matrizes de covariância e dos ruídos. Analisou-se a resposta de todos os filtros utilizados nos dois estudos de casos feitos anteriormente, e pretende-se obter uma resposta geral para cada filtro estudado.

A análise foi dividida nas diferentes matrizes de covariância, e os resultados dos dois estudos de caso são apresentados juntos para cada nova mudança feita nos dados da simulação. Os novos valores para os ruídos e para as matrizes de covariância foram alterados a partir dos dados utilizados nas análises anteriores, que foram os valores que se consideraram fisicamente mais aceitáveis e compatíveis com os instrumentos de medida utilizados.

A primeira alteração que feita foi na matriz  $P_0^+$ . Como  $P_0^+$  é uma medida apenas do erro da estimativa inicial, o estimador deve ser capaz de perceber que a

estimativa inicial foi ruim e mesmo assim conseguir obter uma boa estimativa dos estados. Pensando nisso, fizeram-se grandes alterações no valor da estimativa do valor inicial, de modo que o erro fosse grande, e as alterações causadas pela variação do valor de  $P_0^+$  fossem mais significativas.

Para o caso do tanque aquecido, usaram-se estimativas iniciais que eram 100 °C mais altas que os valores iniciais reais. Com isso,  $P_0^+$  ficou:

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} 10000 & 10000 \\ 10000 & 10000 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Com os novos valores das estimativas iniciais e da matriz da covariância inicial do erro do estimador, simularam-se os dois filtros que haviam sido estudados no caso do tanque aquecido.

A melhor forma de analisar a influência dessa alteração na estimação dos estados é através dos erros de estimação padrões, uma vez que os gráficos somente apresentam uma pequena variação no início da simulação, mas depois são bem similares aos observados anteriormente. A Tabela 4.6 contém os dados dos erros de estimação.

Tabela 4.6 – Erros de estimação de T e Tc com o KF e UKF para os novos valores de P

<b>Estimador</b>	<b>Estado</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSE (°C)</b>
KF	<i>T</i>	0,0063	0,1593
	<i>Tc</i>	0,0072	0,7819
UKF	<i>T</i>	0,0053	0,1309
	<i>Tc</i>	0,0041	0,1270

Comparando com os valores dos erros para o mesmo sistema no estudo de caso (Tabelas 4.1 e 4.2), pode-se ver a diferença que a estimativa inicial faz para a estimação dos estados. Entretanto, observa-se que apesar da nova estimativa inicial ser muito discrepante do valor real dos estados, ambos os estimadores conseguem consertar o erro na estimativa inicial e obter boas estimativas para os estados. A diferença de desempenho de ambos os estimadores quando se aumenta o valor de  $P_0^+$  fica ainda mais



clara quando se observam os gráficos comparativos a seguir para os dois casos, o caso inicial, onde o valor de  $P_0^+$  era pequeno, e o novo caso, onde o valor de  $P_0^+$  é elevado.

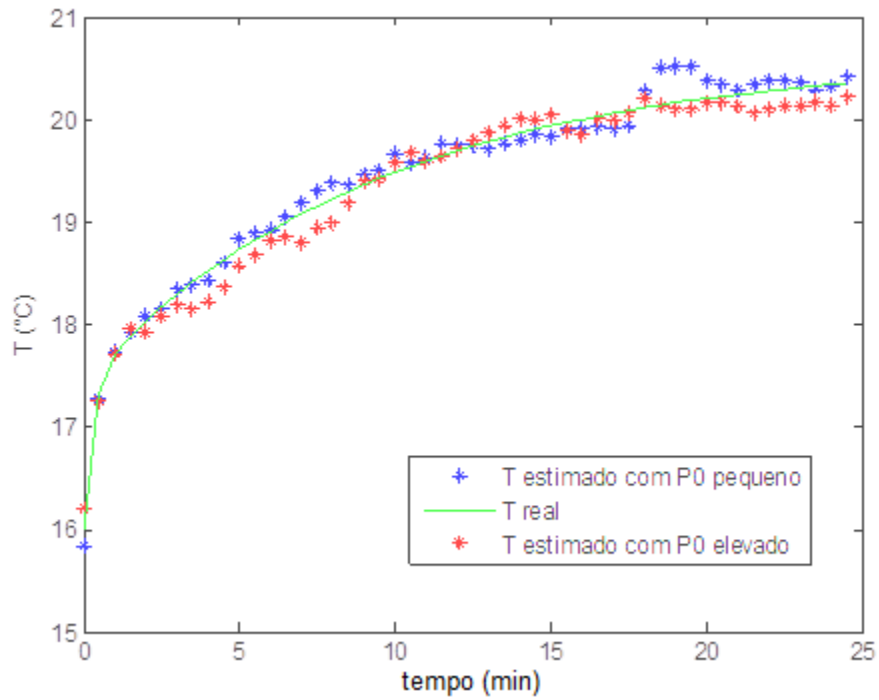


Figura 4.14 – Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de  $T$  com o KF.

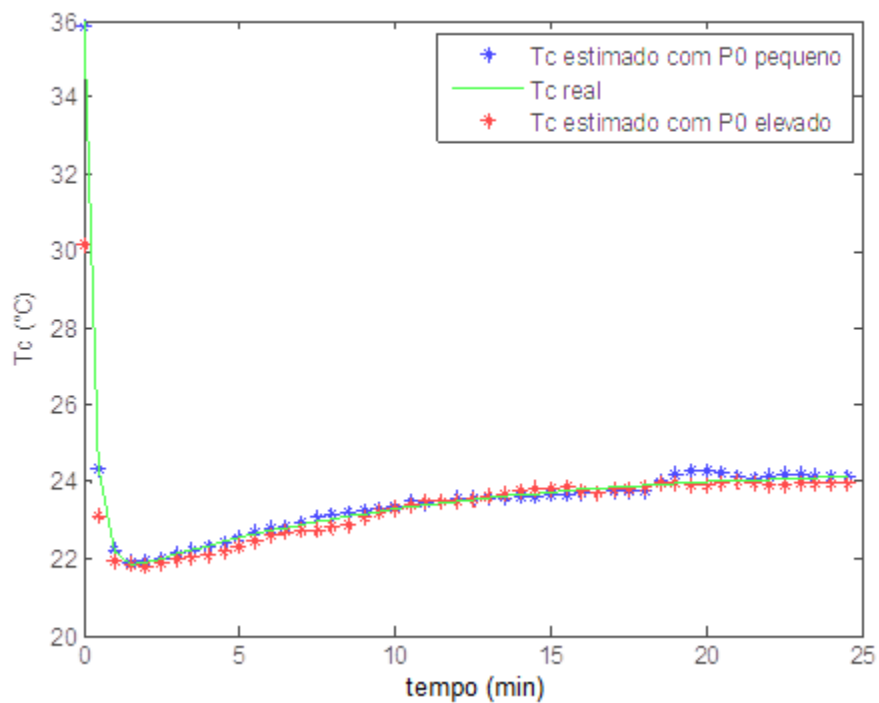


Figura 4.15 – Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de Tc com o KF.

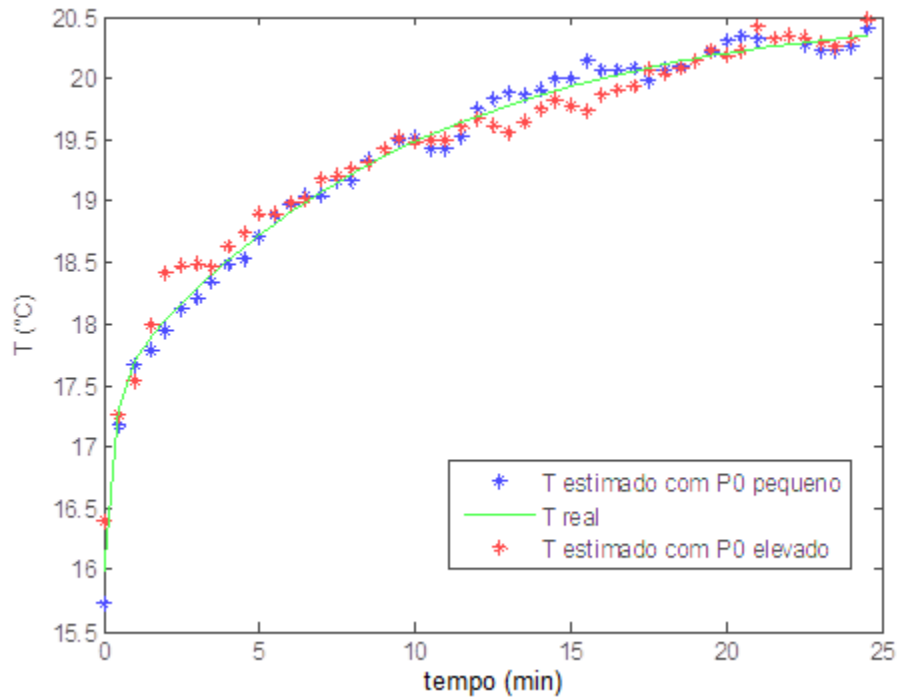


Figura 4.16 – Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de T com o UKF.

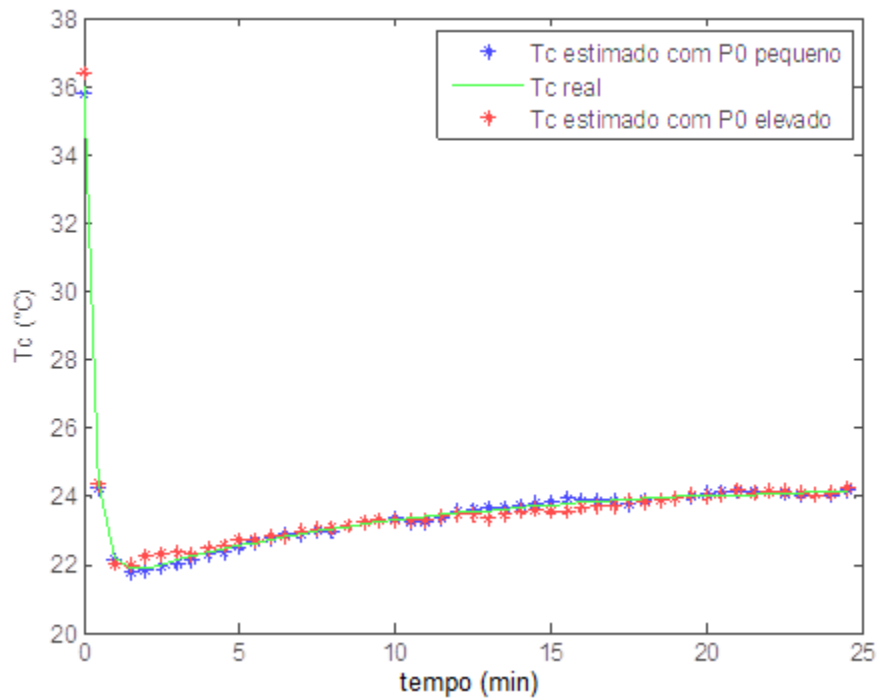


Figura 4.17 – Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de Tc com o UKF.

É interessante notar a diferença de desempenho entre os dois estimadores nessa situação. Viu-se que no caso anterior, onde as estimativas iniciais eram próximas do valor real, que os dois estimadores estudados davam resultados bem próximos um do outro, com valores de erro bem similares. Agora, entretanto, os valores são um pouco mais discrepantes, principalmente para o estado não medido,  $T_c$ . Isso ajuda a justificar a possível escolha pela utilização do UKF, que é um filtro mais robusto a possíveis erros de sintonia.

O mesmo procedimento foi realizado para o caso do reator de Van de Vusse. A estimativa inicial da temperatura foi aumentada em  $75\text{ }^\circ\text{C}$  em relação ao valor utilizado para iniciar a planta, e as estimativas iniciais para as concentrações foram aumentadas em  $2\text{ mol/L}$  em relação aos valores reais. Com isso, a matriz  $P_0^+$  ficou:

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 150 \\ 4 & 4 & 150 \\ 150 & 150 & 5625 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Novamente, a melhor forma de comparar a diferença entre os desempenhos dos estimadores é através da Tabela 4.7 dos erros de estimação.

Tabela 4.7 – Erros de estimação de  $C_a$ ,  $C_b$  e  $T$  com o LKF, EKF e UKF para os novos valores de  $P$

<b>Estimador</b>	<b>Estado</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSE(mol/L ou <math>^\circ\text{C}</math>)</b>
LKF	$C_a$	0,1109	0,7937
	$C_b$	0,1809	0,2490
	$T$	0,0910	25,6316
EKF	$C_a$	0,0444	0,3445
	$C_b$	0,1769	0,3204
	$T$	0,0614	10,6115
UKF	$C_a$	0,0273	0,2915
	$C_b$	0,1376	0,2999
	$T$	0,0610	10,6087

Pode-se agora comparar os resultados da Tabela 4.7 com as Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5. Essa comparação fica ainda mais clara a partir dos gráficos comparativos para os dois casos: com valores baixos de  $P_0^+$  baixos e com valores de  $P_0^+$  altos:

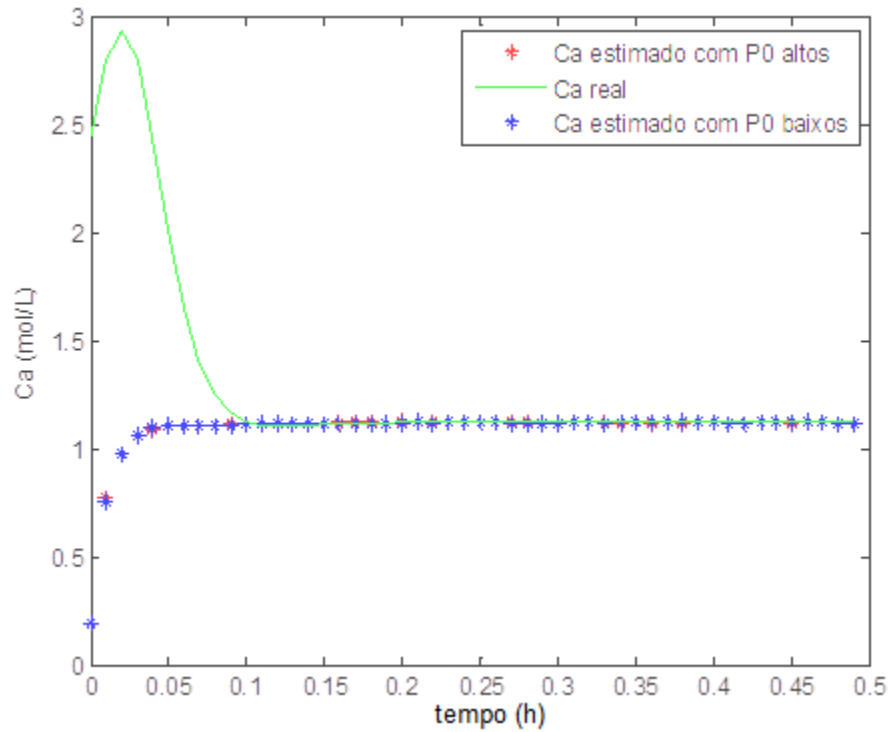


Figura 4.18 – Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de Ca com o LKF.

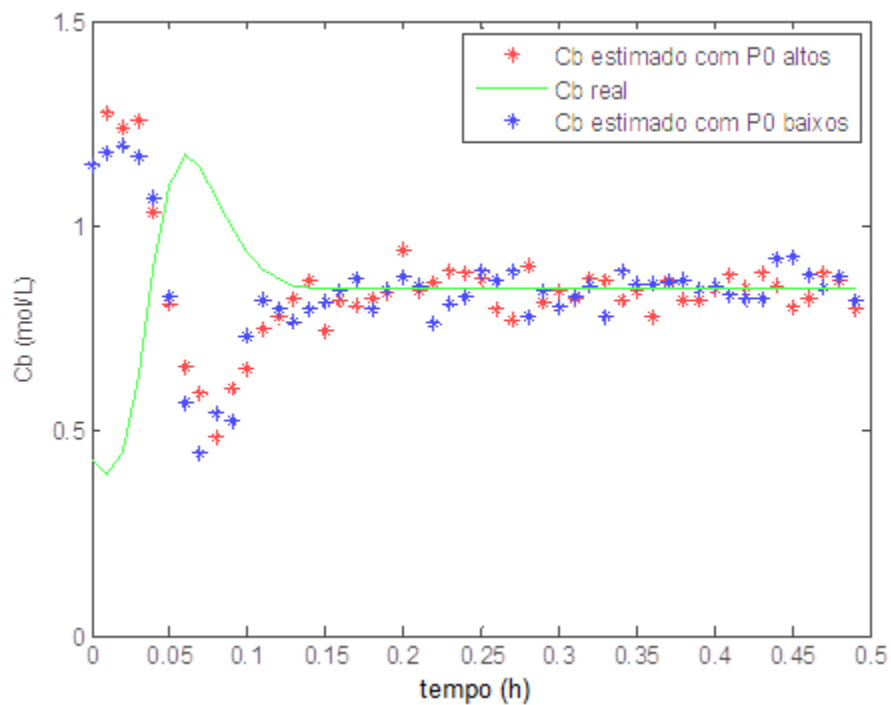


Figura 4.19– Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de Cb com o LKF.

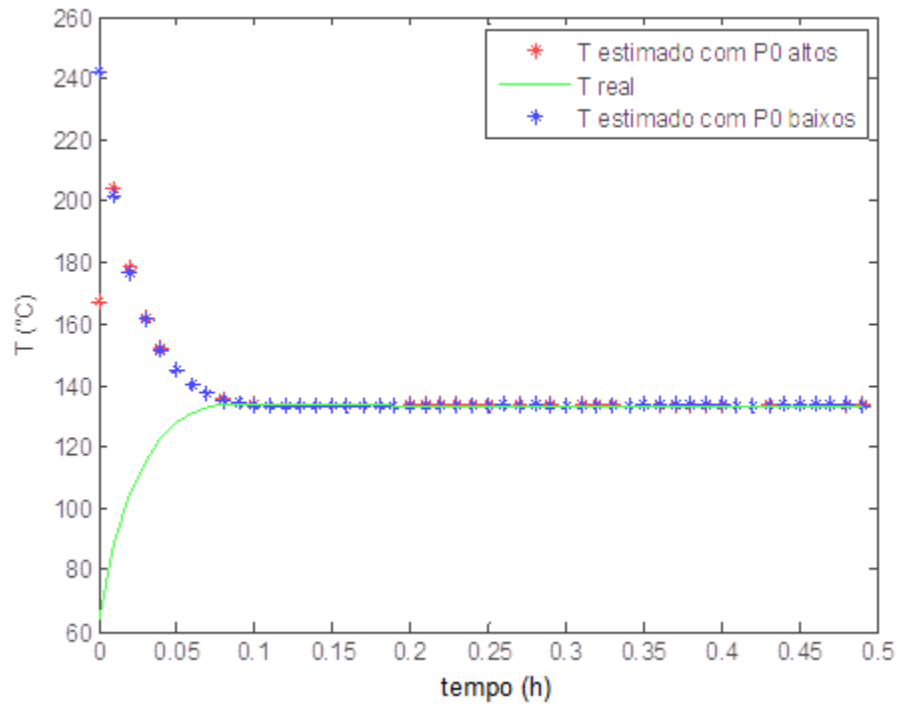


Figura 4.20 – Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de T com o LKF.

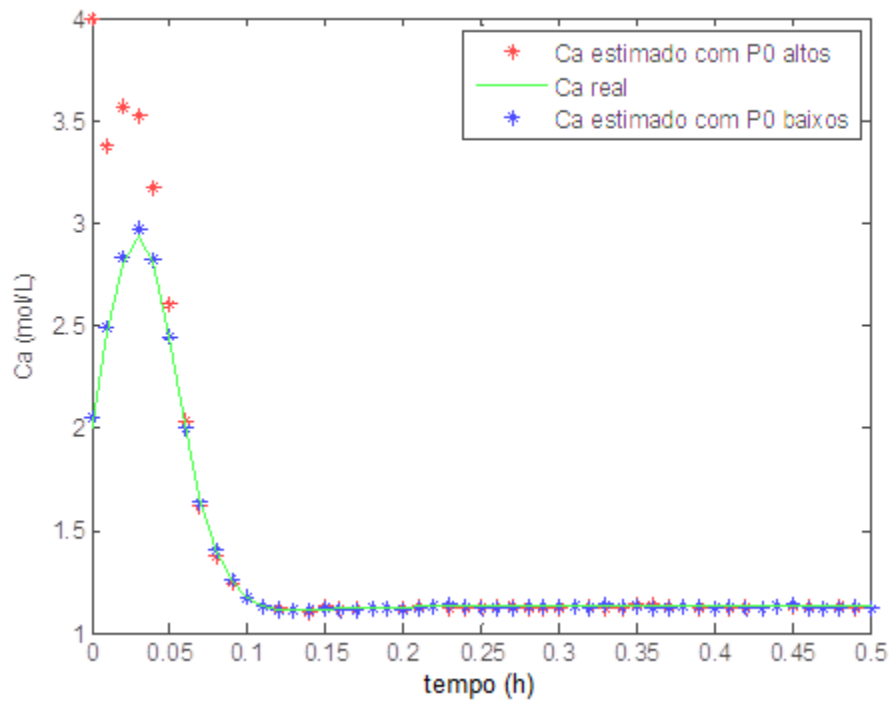


Figura 4.21 – Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de Ca com o EKF.

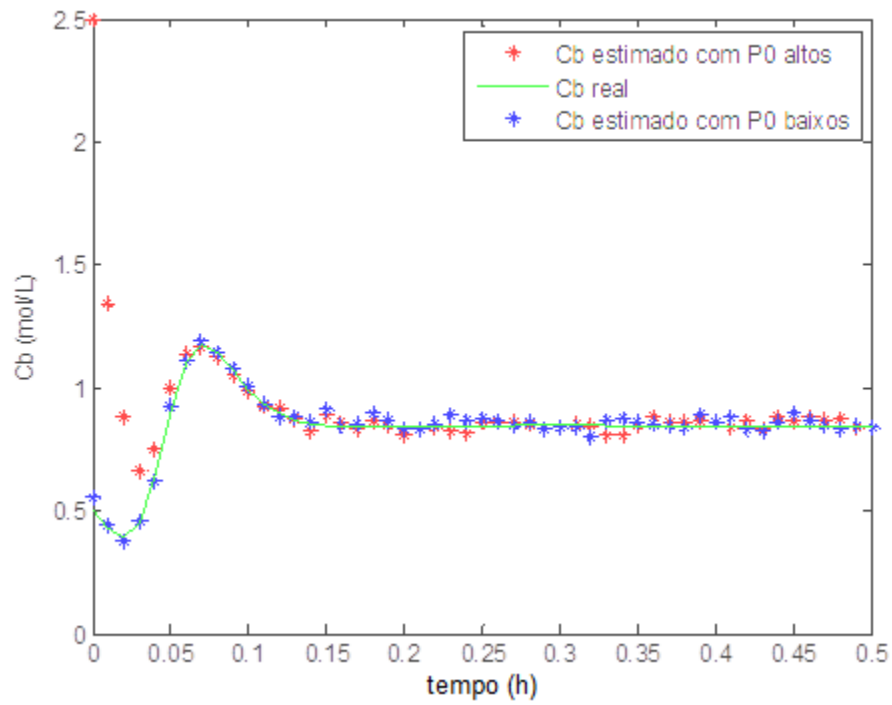


Figura 4.22 – Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de Cb com o EKF.

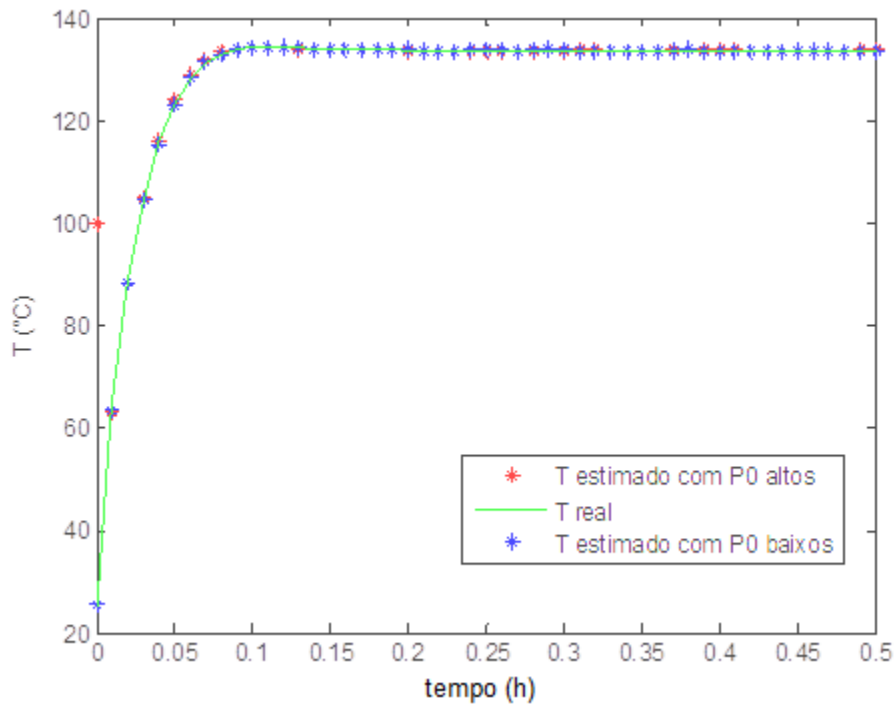


Figura 4.23 – Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de T com o EKF.

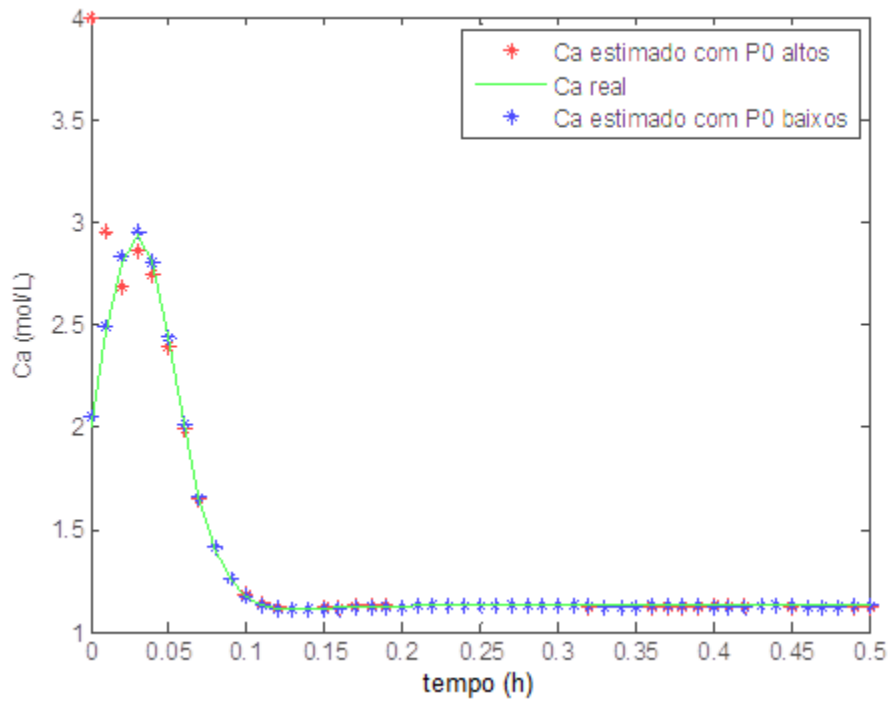


Figura 4.24 – Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de Ca com o UKF.

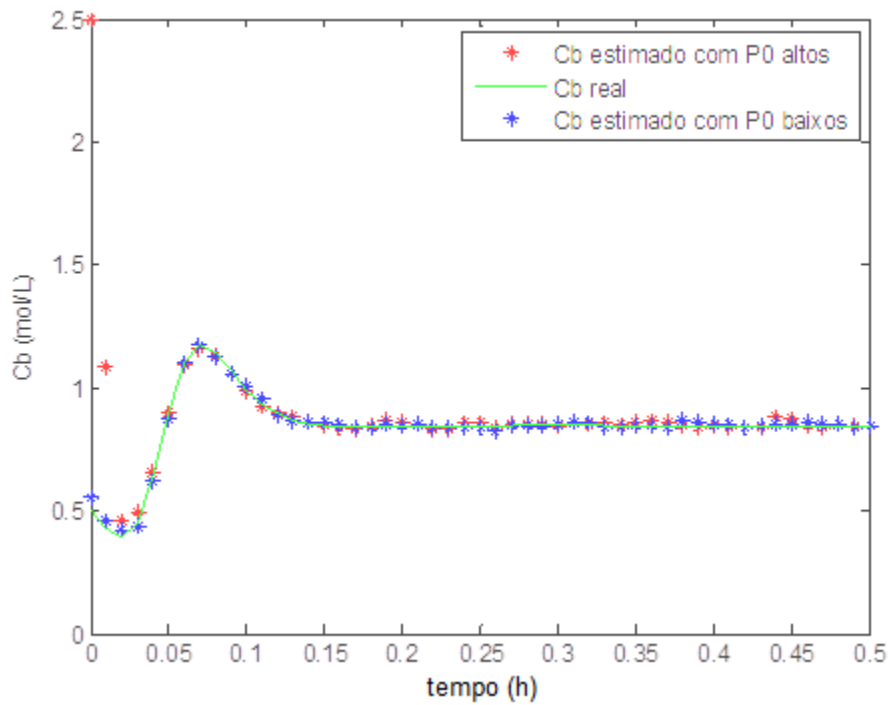


Figura 4.25 – Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de Cb com o UKF.

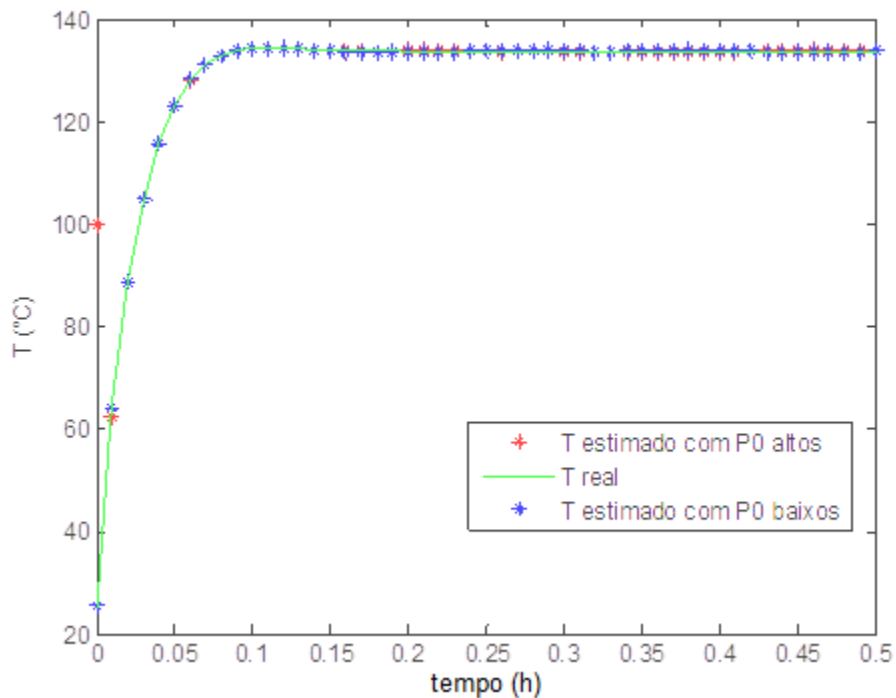


Figura 4.26 – Comparação entre as respostas com  $P_0^+$  alto e baixo para a simulação de T com o UKF.

Pode-se ver que os valores dos erros para o LKF não se alteraram muito, uma vez que, pela própria configuração do filtro, os valores das primeiras iterações da estimação não eram muito fieis aos valores reais, fazendo com que uma alteração no valor de  $P_0^+$  não afetasse tanto assim o valor dos erros de estimação, que já eram grandes.

Para o EKF, entretanto, esta mudança foi mais sentida. Todos os valores dos erros de estimação aumentaram em pelo menos uma ordem de grandeza, e com isto alguns valores se tornaram altos e não tão satisfatórios como anteriormente. O mesmo ocorreu com o UKF, em que os valores dos erros, de modo geral, subiram consideravelmente. Entretanto, os valores do UKF não aumentaram tanto quanto os do EKF.

Os gráficos deixam mais claro que o desempenho do UKF foi muito superior ao do EKF. Seguindo a mesma argumentação utilizada para o caso do tanque aquecido, o UKF parece estar mais preparado do que o EKF para dados não sintonizados, e consegue ajustar mais rapidamente a estimativa ao valor real. Isso pode ser mais facilmente visto através dos gráficos das Figuras 4.27 e 4.28 que compara para a estimação das concentrações de A e B com o EKF e com o UKF.



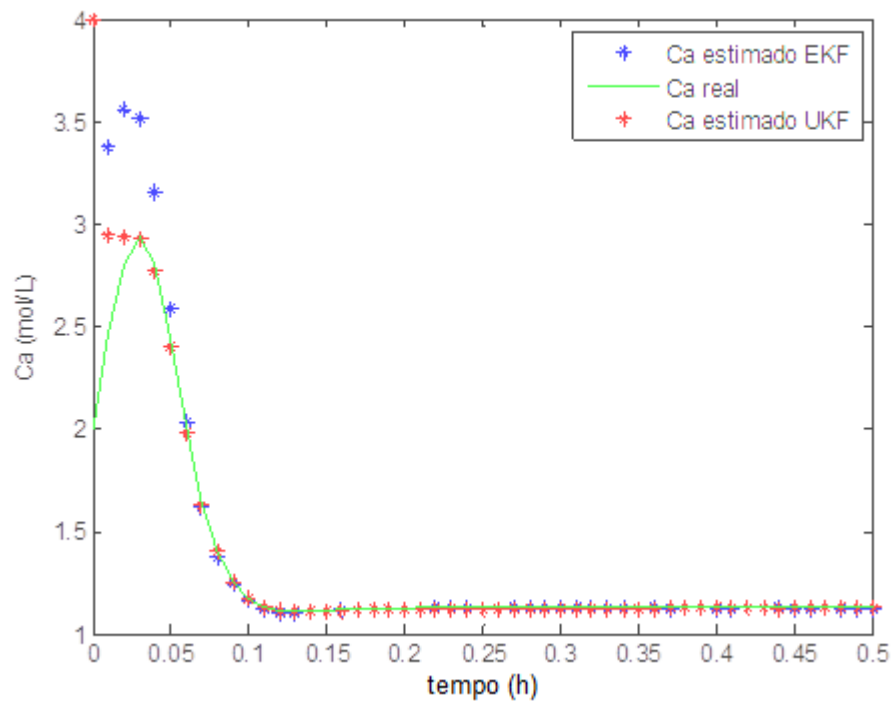


Figura 4.274 – Resposta do EKF e do UKF para a estimação de Ca no reator de Van de Vusse com os novos valores de P.

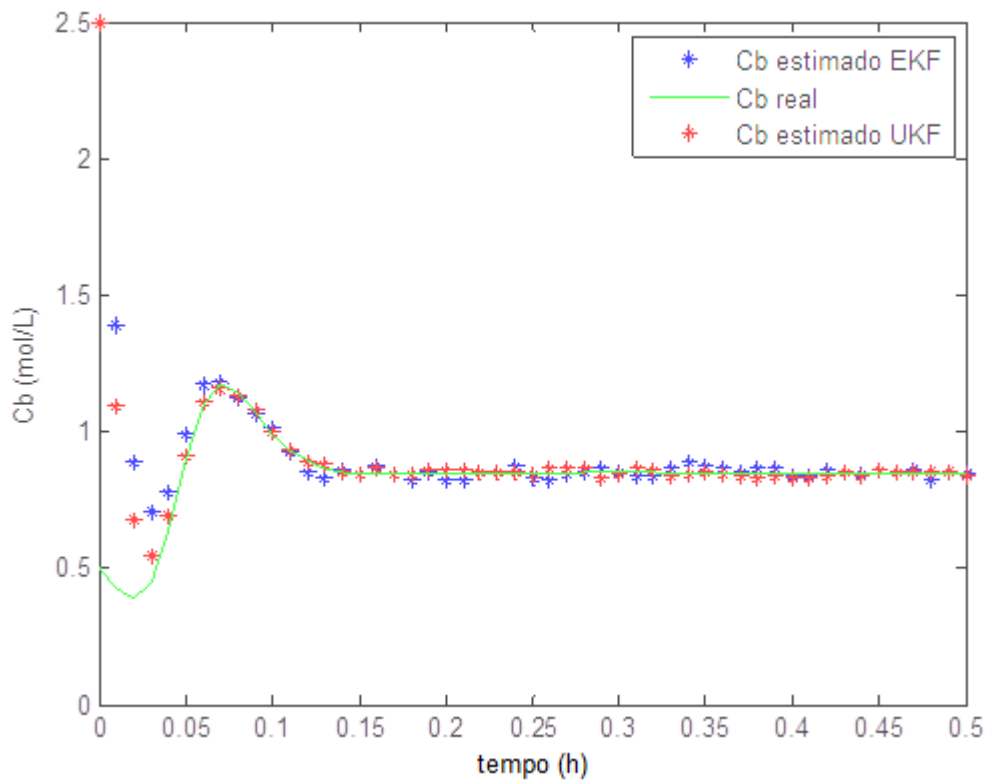


Figura 4.28 – Resposta do EKF e do UKF para a estimação de Cb no reator de Van de Vusse com os novos valores de P.

Novamente, esses gráficos ajudam a justificar a possível escolha do UKF sobre o EKF.

A próxima análise que foi feita é sobre a influência do ruído de medida e da matriz  $R$ . As alterações nos valores dos ruídos de medida foram feitas imaginando-se possíveis defeitos ou má calibração dos instrumentos de medida, ou ainda instrumentos antigos em que os ruídos sejam maiores. Para isso, aumentou-se o desvio padrão dos ruídos de medida, mantendo-se a média em zero. A matriz  $R$  foi calculada a partir desses novos valores dos ruídos.

Primeiramente, alterou-se a covariância dos ruídos no sistema linear do tanque aquecido. O desvio padrão do ruído da variável medida  $T$ , que antes era de  $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ , foi agora fixada em  $2,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Com isso, a matriz  $R$  ficou:

$$R = [4,0] \quad (4.9)$$

O novo valor do desvio padrão foi escolhido de modo a simular um possível erro no medidor de temperaturas da planta em questão, por isso foram utilizados valores elevados.

Com os novos valores para os ruídos e a nova matriz de covariância  $R$ , simulou-se mais uma vez o tanque aquecido com o filtro de Kalman e o UKF.

Novamente, nossa primeira análise é sobre os erros de estimação, que estão resumidos na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Erros de estimação de  $T$  e  $T_c$  com o KF e UKF para os novos valores do ruído e com a matriz  $R$  sintonizada

<b>Estimador</b>	<b>Estado</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSE (<math>^{\circ}\text{C}</math>)</b>
KF	$T$	0,0105	0,2264
	$T_c$	0,0083	0,2209
UKF	$T$	0,0057	0,1379
	$T_c$	0,0044	0,1356

Pode-se notar que os valores do MAPE e do RMSE tanto para KF quanto para o UKF pouco se alteraram dos valores que se tinham antes (Tabelas 4.1 e 4.2). Mesmo assim, pode-se notar que os valores para o KF sofreram um incremento maior do que os valores para o UKF. De modo geral, pode-se afirmar que os dois filtros fazem um excelente trabalho filtrando sinais ruidosos. Mesmo com um ruído 4 vezes maior do que se tinha antes, a estimação continua sendo muito próxima do valor real, e satisfatória.

Isso pode ser visto de maneira mais acentuada ao olhar os gráficos nas figuras 4.29 e 4.30 para a estimação de  $T$  pelos dois filtros. Note que mesmo com sinais muito ruidosos, as estimativas estão sempre muito próximas dos valores reais do estado.

Pelos gráficos consegue-se ver também uma pequena diferença de desempenho entre os dois filtros, com o UKF apresentando uma resposta melhor do que o KF.

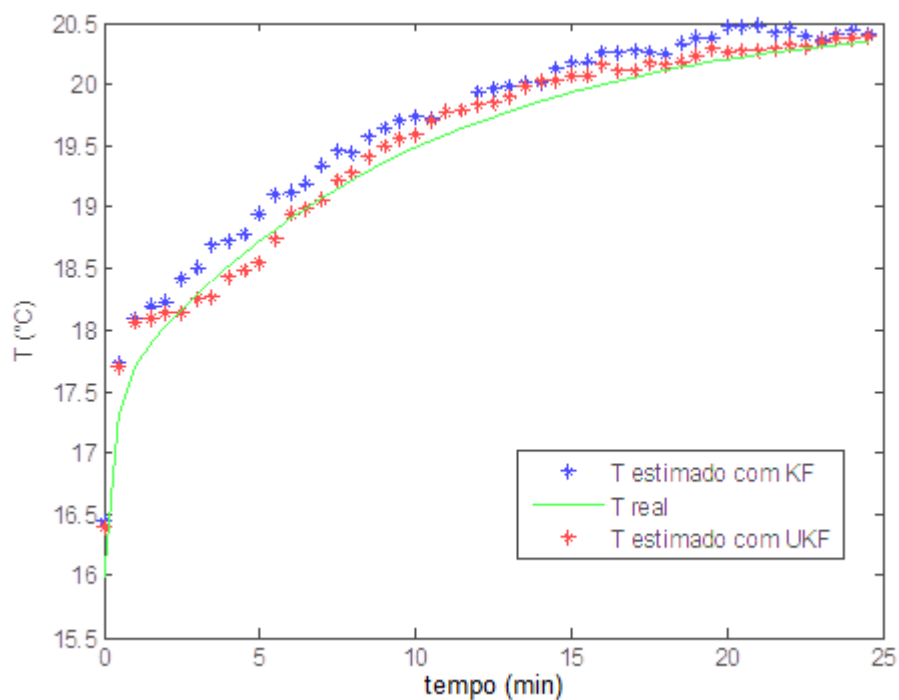


Figura 4.29 – Resposta do KF e do UKF para a estimação de  $T$  no tanque aquecido com os novos valores dos ruídos de medida e com a matriz  $R$  sintonizada.

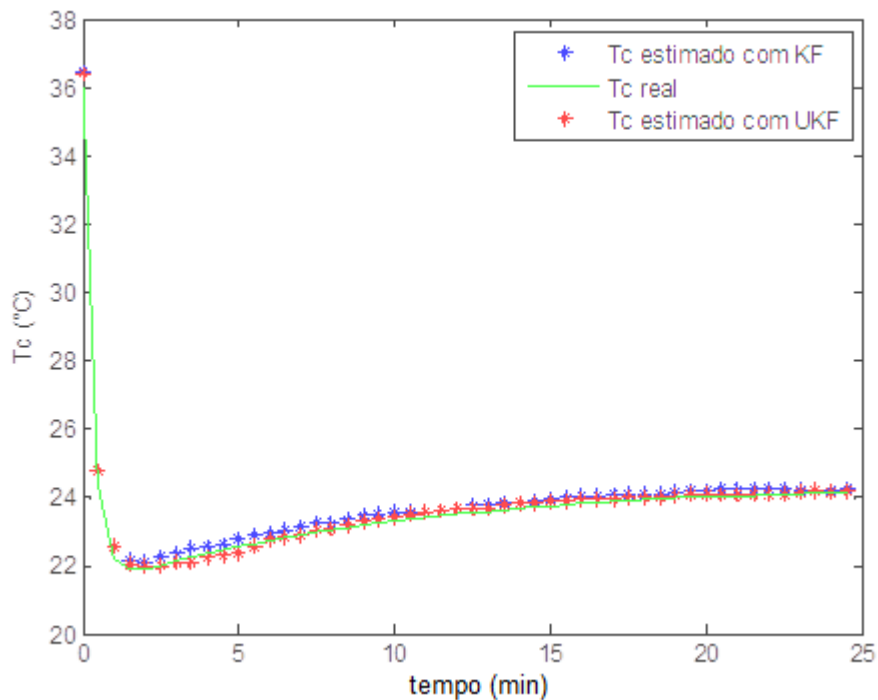


Figura 4.30 – Resposta do KF e do UKF para a estimação de  $T_c$  no tanque aquecido com os novos valores dos ruídos de medida e com a matriz  $R$  sintonizada.

É importante ressaltar que essas simulações foram feitas com a matriz  $R$  sintonizada com a covariância das medidas. Para o caso de se ter um sistema em que um dos instrumentos de medição deu problema, ou mesmo está mal calibrado, pode-se ter um ruído na medida do qual não se tem conhecimento. Nesses casos, a matriz da covariância  $R$  pode não estar sintonizada com os ruídos da medida, fazendo com que a qualidade da estimação caia muito.

A Tabela 4.9 resume o valor dos erros de estimação quando a matriz  $R$  está configurada para ruídos de  $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ , mas o ruído real é de  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Tabela 4.9 – Erros de estimação de  $T$  e  $T_c$  com o KF e UKF para os novos valores do ruído e com a matriz  $R$  não sintonizada

<b>Estimador</b>	<b>Estado</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSE (<math>^{\circ}\text{C}</math>)</b>
KF	$T$	0,0211	0,4985
	$T_c$	0,0141	0,4202
UKF	$T$	0,0161	0,4072
	$T_c$	0,0121	0,3947

Pode-se ver pela Tabela 4.9 que os valores dos erros para os dois estimadores aumentam significativamente no caso em que a matriz  $R$  não está sintonizada. Isto fica mais claro olhando o gráfico das duas estimações de  $T$  com a matriz  $R$  não sintonizada e comparando-os com o caso em que  $R$  está sintonizada (Figuras 4.29 e 4.30).

Observando as Figuras 4.31 e 4.32 e os valores dos erros de estimação, consegue-se notar a importância de se ter um sistema sintonizado. Muitas vezes, é mais interessante sintonizar o estimador do que tentar evitar ruídos nos instrumentos de medição.

A mesma análise foi feita para o reator de Van de Vusse. O ruído de medição da temperatura foi aumentado da mesma forma que foi feito para o tanque aquecido, ficando em  $2,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . O ruído de medição da concentração de B foi elevado de  $0,05\text{ mol/L}$  para  $0,5\text{ mol/L}$ . Novamente, os novos valores dos desvios padrões foram escolhidos de modo a simular possíveis erros nos medidores da planta em questão, por isso foram utilizados valores elevados.

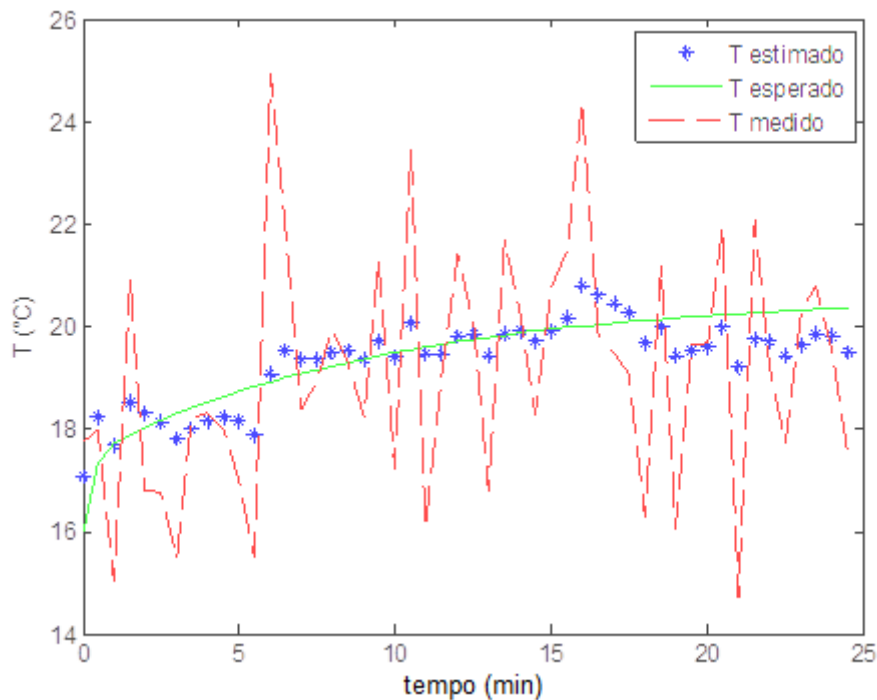


Figura 4.31 – Resposta do KF para a estimação de  $T$  no tanque aquecido com os novos valores dos ruídos de medida e com a matriz  $R$  não sintonizada.

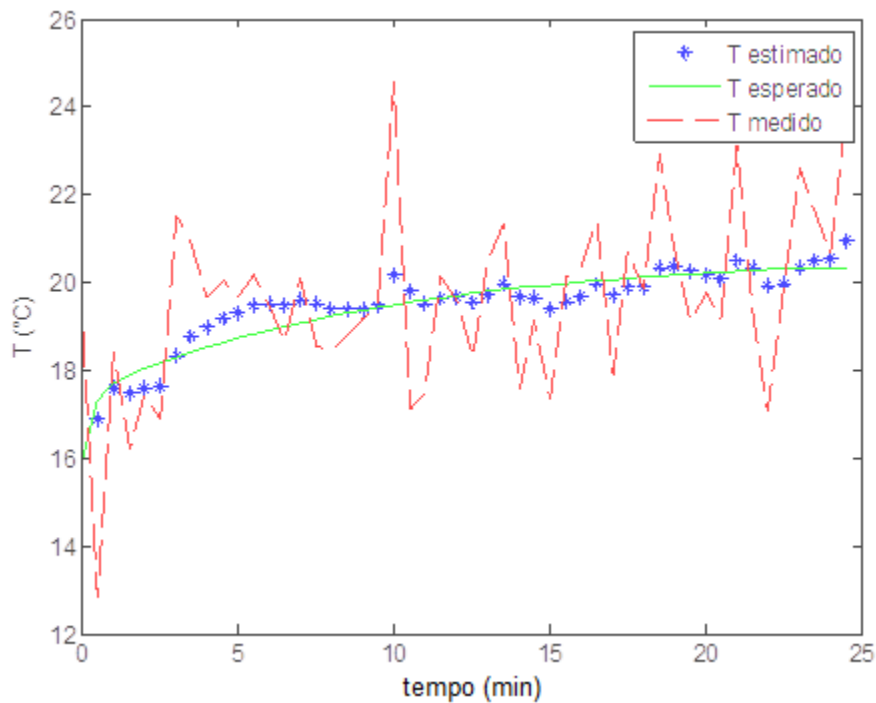


Figura 4.32 – Resposta do UKF para a estimação de T no tanque aquecido com os novos valores dos ruídos de medida e com a matriz R não sintonizada.

A matriz  $R$  foi sintonizada com esses valores:

$$R = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Com os novos valores dos ruídos e da matriz das covariâncias,  $R$ , simulou-se novamente o reator de Van de Vusse com os estimadores LKF, EKF e UKF. Os resultados dos erros de estimação para essas três simulações encontram-se resumidos na Tabela 4.10.

Pode-se ver pela Tabela 4.10 que os três filtros fazem um trabalho satisfatório na filtragem de sinais ruidosos.

O LKF, apesar de ainda apresentar discordância com o valor real no início da simulação (antes do sistema entrar em estado estacionário), consegue filtrar muito bem o sinal ruidoso em torno dos valores para o qual está sendo linearizado. Isso fica claro quando se compara os valores dos erros para esse filtro nas Tabelas 4.3 e 4.10, e observa-se que os valores são próximos um do outro.

Tabela 4.10 – Erros de estimação de Ca, Cb e T com o LKF, EKF e UKF para os novos valores do ruído e com a matriz R sintonizada

<b>Estimador</b>	<b>Estado</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSE(mol/L ou °C)</b>
LKF	<i>Ca</i>	0,0946	0,6246
	<i>Cb</i>	0,1048	0,1550
	<i>T</i>	0,1117	32,3495
EKF	<i>Ca</i>	0,0024	0,0109
	<i>Cb</i>	0,0086	0,0100
	<i>T</i>	0,0008	0,1049
UKF	<i>Ca</i>	0,0024	0,0133
	<i>Cb</i>	0,0123	0,0164
	<i>T</i>	0,0008	0,1194

Para o EKF e o UKF, os novos valores dos erros com foram muito próximos aos valores dos erros que haviam sido encontrados antes (Tabelas 4.4 e 4.5), muitas vezes sendo até menores do que se tinha antes, e com uma leve vantagem para o EKF. Isso pode ser explicado pela sintonia da matriz  $R$ . Aumentando-se o valor de  $R$ , diminui-se a confiança nas medições feitas e a estimação começa a depender mais no modelo usado para simular a planta. Como no caso simulado nesse trabalho o modelo dinâmico descreve perfeitamente a planta, uma baixa confiabilidade nas medidas acaba sendo uma vantagem para o estimador. Na prática, isso pode não ser uma vantagem, uma vez que muitas vezes o modelo não descreve bem as dinâmicas da planta.

Ainda para ilustrar a necessidade de uma boa sintonia da matriz de covariância dos ruídos de medida, simulou-se novamente o reator de Van de Vusse, mas agora com a matriz  $R$  sintonizada para os ruídos originais do estudo de caso e com os ruídos assumindo os novos valores utilizados nas simulações acima. Dessa vez, a matriz  $R$  é:

$$R = \begin{bmatrix} 0,0025 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Os erros de estimação para os três estimadores estão resumidos na Tabela 4.11.

Tabela 4.11 – Erros de estimação de  $Ca$ ,  $Cb$  e  $T$  com o LKF, EKF e UKF para os novos valores do ruído e com a matriz  $R$  não sintonizada

<b>Estimador</b>	<b>Estado</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSE(mol/L ou °C)</b>
LKF	$Ca$	0,1059	0,6174
	$Cb$	0,2593	0,2532
	$T$	0,1146	32,4873
EKF	$Ca$	0,0190	0,0284
	$Cb$	0,1801	0,1764
	$T$	0,0034	0,4734
UKF	$Ca$	0,0143	0,0279
	$Cb$	0,1083	0,1131
	$T$	0,0040	0,5672

Analisando a Tabela 4.11 e comparando-a com a Tabela 4.10, quando a matriz  $R$  estava sintonizada, pode-se ver que os valores de todos os erros, para os três estimadores, aumentaram consideravelmente. Pode-se analisar melhor o efeito dessa não sintonização olhando os gráficos a seguir, que mostram as estimações de  $Cb$  com os três estimadores.

Comparando o gráfico para o LKF com a Figura 4.6, o gráfico para o EKF com a Figura 4.9 e o gráfico para o UKF com a Figura 4.12, percebe-se que a sintonia ruim degrada o desempenho do estimador.

De modo geral, pode-se ver que as três estimações ficam ruins, mas pode-se ver que a estimação com o UKF é superior às outras duas. Tanto o LKF quanto o EKF foram sensíveis ao aumento do ruído e a não sintonização da matriz  $R$ , fazendo com que as suas estimativas não fossem confiáveis. Por outro lado, o UKF, por ser um filtro, nos casos estudados, menos sensível a sintonia, conseguiu estimativas melhores.



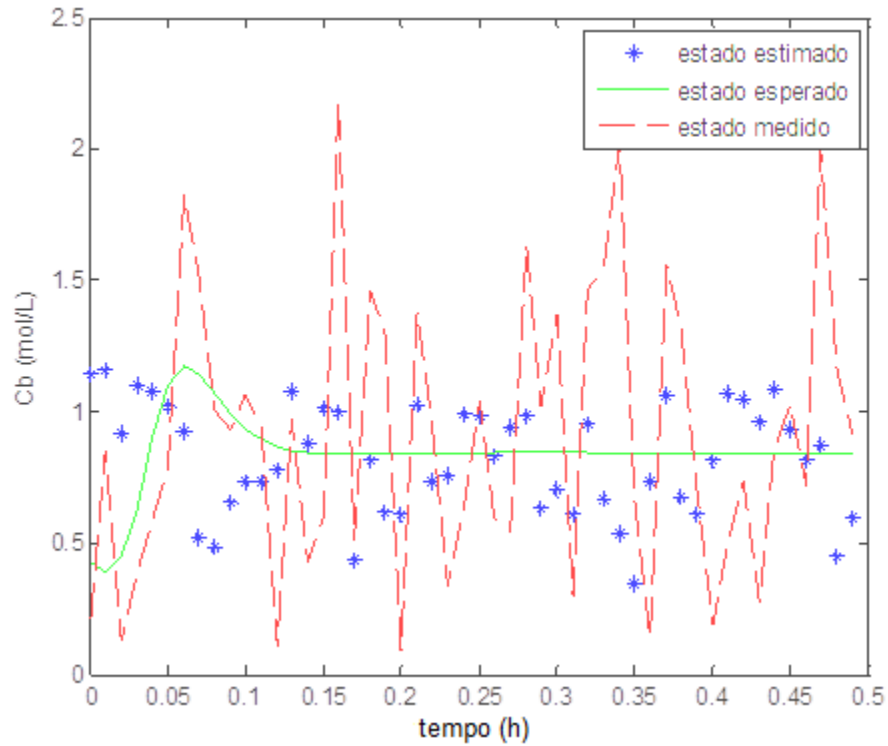


Figura 4.33 – Resposta do LKF para a estimação de  $C_b$  no reator de Van de Vusse com os novos valores dos ruídos de medida e com a matriz  $R$  não sintonizada.

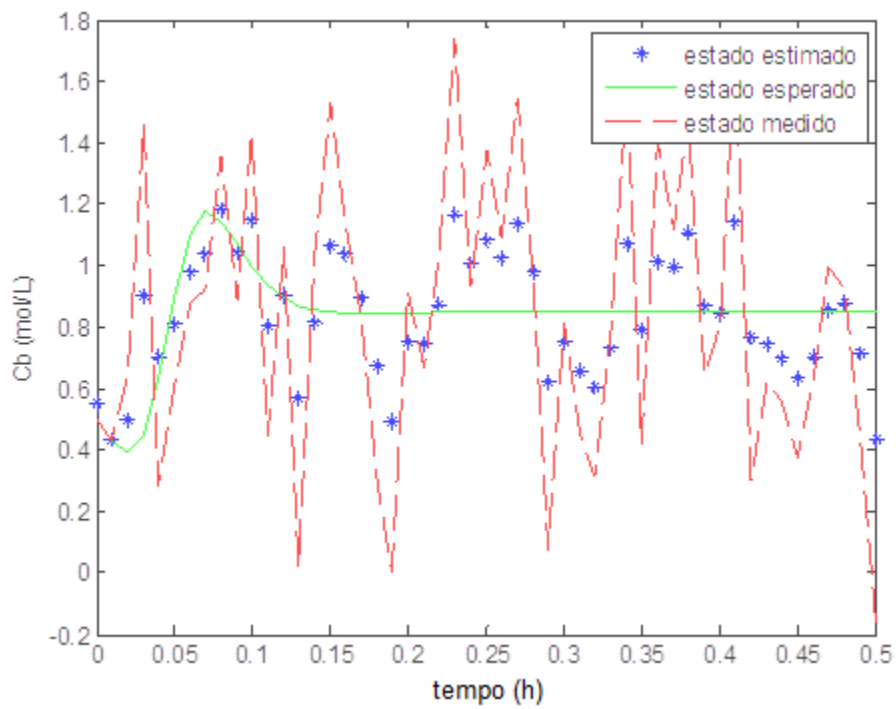


Figura 4.34 – Resposta do EKF para a estimação de  $C_b$  no reator de Van de Vusse com os novos valores dos ruídos de medida e com a matriz  $R$  não sintonizada.

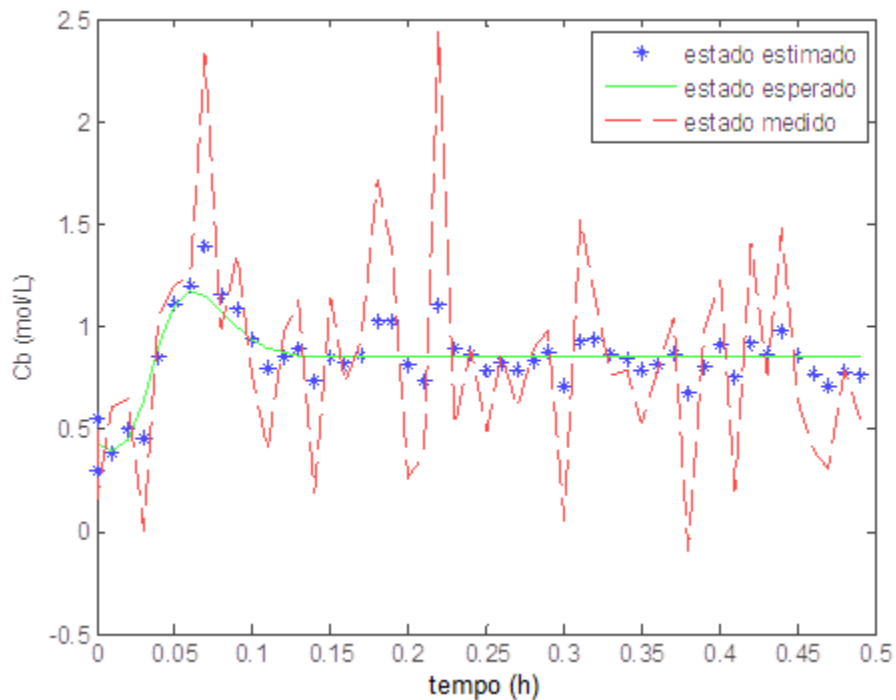


Figura 4.35 – Resposta do UKF para a estimação de  $C_b$  no reator de Van de Vusse com os novos valores dos ruídos de medida e com a matriz  $R$  não sintonizada.

Por último, deseja-se analisar a influência dos ruídos nas variáveis de entrada do processo e da matriz  $Q$ . Para essa análise supôs-se que as variáveis de entrada da planta eram ruidosas, alterando os valores reais dos estados. Entretanto, o modelo dos estimadores não previa ruídos nas variáveis de entrada, e essas variações dos valores da planta seria sentida apenas através das medições feitas na saída do processo.

Começou-se pelo caso do tanque aquecido, para os estimadores KF e UKF. Para tanto, adicionou-se ruídos nas vazões de entrada no tanque e na camisa,  $q_e$  e  $q_{e_c}$ , e nas temperaturas de entrada no tanque e na camisa,  $T_i$  e  $T_{c_i}$ . O ruído das vazões foi simulado por uma variável aleatória com média zero e desvio padrão  $0,0045 \text{ m}^3/\text{min}$ , enquanto que os ruídos das temperaturas foram simulados por uma variável aleatória com média zero e desvio padrão  $5,0 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Para ambos os estimadores, foi avaliado quatro valores diferentes para a matriz  $Q$ , de acordo com os valores das covariâncias das variáveis de entrada e das medições. Ambos os estados são temperaturas e estão sujeitos aos mesmos valores de ruído. Os valores utilizados para a matriz  $Q$  seguem abaixo:

$$Q^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$Q^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$Q^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$Q^{(4)} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Os valores de  $Q$  foram escolhidos partindo do valor que foi usado para a simulação sem ruídos nas variáveis de entrada. Cada novo valor de  $Q$  foi escolhido multiplicando-se o anterior por 10.

Devido aos altos valores dos diversos ruídos, tanto de medida quanto nas variáveis de entrada, presentes no processo, as simulações variaram muito para as mesmas configurações. Por isso, ficou mais difícil comparar os desempenhos de cada filtro com apenas uma simulação de cada uma das configurações estudadas. Por isso, realizou-se a mesma simulação, com as mesmas configurações, cinco vezes para cada um dos filtros e calculou-se a média dos valores dos erros de estimação de todas as simulações.

Os resultados das médias dos erros de estimação para as simulações realizadas para o tanque aquecido encontram-se na Tabela 4.12.

Tabela 4.12 – Erros de estimação de  $T$  e  $T_c$  com o KF e UKF para os novos valores da matriz  $Q$

		$Q^{(1)}$		$Q^{(2)}$		$Q^{(3)}$		$Q^{(4)}$	
		KF	UKF	KF	UKF	KF	UKF	KF	UKF
$T$	MAPE	0,0350	0,0175	0,0170	0,0141	0,0178	0,0159	0,0188	0,0161
	RMSE	0,8332	0,4278	0,4441	0,3551	0,4371	0,4179	0,4610	0,3962
$T_c$	MAPE	0,0640	0,0385	0,0540	0,0419	0,0634	0,0995	0,0721	0,0459
	RMSE	2,2739	1,1254	1,8654	1,2757	2,5898	2,4043	2,3625	1,5698

Olhando para os resultados da Tabela 4.12 e comparando com os resultados das Tabelas 4.1 e 4.2 pode-se notar a diferença que os ruídos nas variáveis de processo fazem na estimação dos estados. Se fosse utilizado o mesmo valor de  $Q$  que foi utilizado anteriormente, a estimação dos dois estados seria pior para ambos os estimadores.

Para esse caso, com esses valores de ruído nas variáveis de entrada, o valor da matriz  $Q$  que parece ajustar melhor as estimativas é 0,1. Observa-se que dependendo de qual estado tenha-se mais interesse, pode-se até utilizar outro valor para  $Q$ , mas de modo geral,  $Q^{(2)}$  parece ser o valor que apresenta a melhor sintonia com para o sistema.

Pode-se notar também que o UKF reagiu pior aos ruídos de processo do que o KF, uma vez que para todos os valores de  $Q$ , quase todos os valores dos erros de estimação do UKF são maiores do que os do KF. Resultado inverso ao que foi observado para as variações da matriz  $R$ , onde o UKF reagiu melhor que o KF aos incrementos nos ruídos de medida.

O mesmo procedimento foi realizado para o caso do reator de Van de Vusse. Adicionaram-se ruídos com média zero e desvio padrão 2,0 L/h para a vazão de entrada, ruídos com média zero e desvio padrão 5,0 °C para a temperatura de entrada e ruídos com média zero e desvio padrão 0,5 mol/L para a concentração de A na entrada.

Do mesmo modo que foi feito para o tanque aquecido, foram avaliados quatro valores para  $Q$  para os três estimadores estudados para esse caso. Partindo do valor que se tinha antes e fazendo cada novo valor 10 vezes maior que o anterior. São eles:

$$Q^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$Q^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$Q^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$Q^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Novamente, devido aos vários ruídos no processo, foi difícil conseguir uma boa reprodutividade das simulações realizadas. Com isso, para obter maior confiança nos dados obtidos, realizou-se cada simulação 5 vezes e calculou-se a média dos valores dos erros para cada configuração.

Os valores médios dos erros de simulação para cada simulação encontram-se resumidos na Tabela 4.13.

Tabela 4.13 – Erros de estimação de Ca, Cb e T com o LKF, EKF e UKF para os novos valores da matriz Q

		$Q^{(1)}$		$Q^{(2)}$		$Q^{(3)}$		$Q^{(4)}$	
		MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE
<i>Ca</i>	LKF	0,1370	0,6329	0,1441	0,6406	0,1681	0,6310	0,1621	0,6229
	EKF	0,0741	0,1208	0,0892	0,1356	0,1156	0,1753	0,1298	0,2022
	UKF	0,0823	0,1434	0,0734	0,1283	0,0755	0,1205	0,0917	0,1439
<i>Cb</i>	LKF	0,2721	0,2812	0,6221	0,5886	0,5689	0,5377	0,5334	0,5381
	EKF	0,1979	0,1945	0,4059	0,4080	0,4808	0,4875	0,5344	0,5230
	UKF	0,1455	0,1373	0,2517	0,2248	0,2394	0,2382	0,2559	0,2569
<i>T</i>	LKF	0,0999	30,1765	0,0995	29,6805	0,1049	29,6925	0,1048	29,4264
	EKF	0,0111	1,8495	0,0087	1,3418	0,0109	1,7221	0,0122	1,9962
	UKF	0,0142	2,3532	0,0116	1,8798	0,0112	1,7682	0,0122	1,9362

Novamente, os resultados na Tabela 4.13 mostram como o desempenho dos estimadores EKF e UKF é muito superior ao desempenho do LKF. E ainda, analisando a mesma tabela, pode-se ver que para quase todos os valores de  $Q$  o UKF apresenta melhores estimativas para as duas concentrações estimadas, enquanto o EKF apresenta melhores resultados para as estimativas da temperatura.

Ainda observando a Tabela 4.13, pode-se ver que cada estimador parece reagir melhor para um valor de  $Q$ . Enquanto que o LKF apresenta melhores resultados para

$Q^{(4)}$ , o EKF apresenta melhores resultados para  $Q^{(2)}$  e o UKF para  $Q^{(3)}$ , sendo a estimação com o UKF e os valores de  $Q^{(3)}$  aquela que apresentou os menores valores de erro.

Apesar das discussões anteriores terem suposto um mesmo valor para todos os estimadores, essa nova situação também faz sentido, uma vez que cada estimador tem sua própria dinâmica e forma de estimar os valores dos estados. Entretanto, para um valor geral para usar com os três estimadores, provavelmente a melhor opção seria utilizar  $Q^{(2)}$ , pois para esse valor de  $Q$ , o EKF apresenta seus melhores resultados e, apesar de tanto o LKF quanto o UKF não terem neste valor os seus respectivos valores ótimos dentre os estudados, eles não são muito piores dos que os melhores valores com esses filtros.

#### IV.4 - Análise de diferentes pontos de operação do reator de Van de Vusse

A última análise realizada nesse trabalho foi a de comparação entre diferentes pontos de operação do reator de Van de Vusse e da comparação da qualidade das estimações do EKF e do UKF nesses diferentes pontos. O intuito dessa análise, como dito anteriormente é conseguir obter pontos de operação em que as não linearidades do sistema sejam mais severas, e com isso conseguir obter mais dados para discutir a utilização do EKF ou do UKF para esse tipo de sistema. Como o LKF não apresentou resultados muito bons para as simulações feitas anteriormente, e como se conseguiu provar a diferença de rendimento nas estimações entre o LKF e os dois outros filtros, para esses novos pontos de operação não se utilizou o LKF como um dos estimadores de estado, limitando as estimações ao EKF e ao UKF.

De acordo com a Figura 3.3, o primeiro ponto de operação escolhido foi para  $F = 50 L/h$ , com isso tem-se  $F/V = 5,0 h^{-1}$ . Nesse ponto espera-se ter uma queda mais drástica da concentração de B no início. A Tabela 4.14 reúne os erros de estimação para as simulações feitas com os dois estimadores. Observa-se que, mais uma vez, o UKF apresenta um desempenho melhor do que o EKF. De fato, nesse novo ponto de operação, o melhor desempenho do UKF se torna ainda mais aparente. Pode-se ver isso mais claramente, ao olhar os gráficos a seguir para as simulações com os dois estimadores.

Tabela 4.14 – Erros de estimação de Ca, Cb e T com o LKF, EKF e UKF para o primeiro novo ponto de operação escolhido

<b>Estado</b>	<b>Estimador</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSE</b>
<i>Ca</i>	EKF	0,0078	0,0144
	UKF	0,0039	0,0087
<i>Cb</i>	EKF	0,0352	0,0236
	UKF	0,0271	0,0185
<i>T</i>	EKF	0,0012	0,1505
	UKF	0,0008	0,0995

Observa-se que para esse novo ponto de operação, a concentração de B, que anteriormente atingia valores estacionários maiores que o valores iniciais, agora não atinge mais, tendo um valor estacionário menor que o inicial. Pela forma do gráfico pode-se ver que a concentração de B começa com derivada negativa, decaindo, depois sobe até um pico bem elevado e volta cair para valores menores que os valores iniciais.

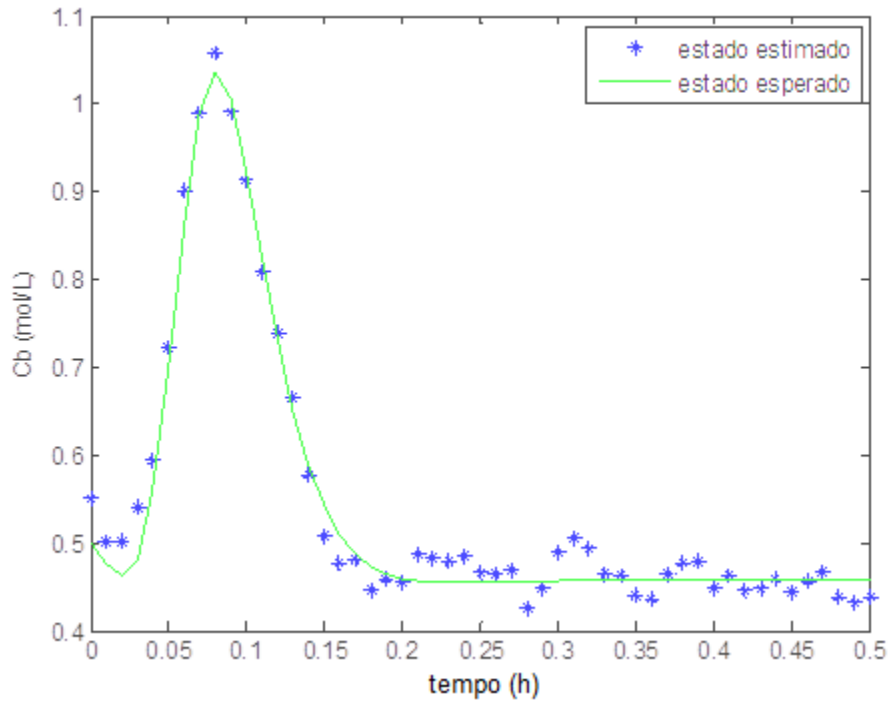


Figura 4.36 – Resposta do EKF para a estimação de Cb no reator de Van de Vusse no primeiro novo ponto de operação escolhido.

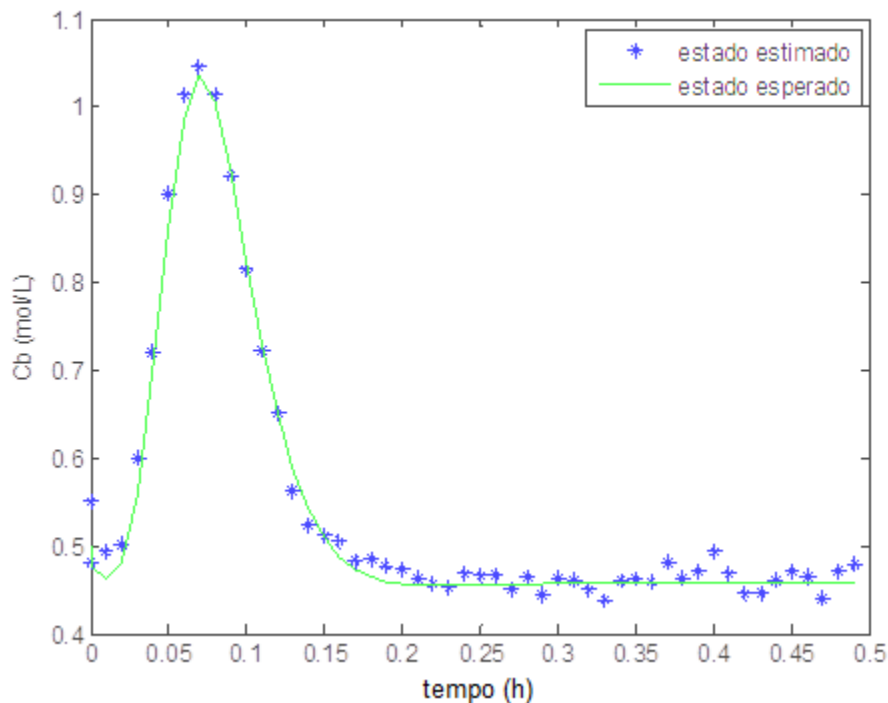


Figura 4.37 – Resposta do UKF para a estimação de  $C_b$  no reator de Van de Vusse no primeiro novo ponto de operação escolhido.

Apesar de a diferença ser sutil no gráfico, pode-se ver como o EKF tem mais dificuldade para estimar as mudanças mais bruscas de direção do gráfico da concentração de B. O UKF parece conseguir prever melhor essas não linearidades mais severas.

O segundo ponto de operação escolhido foi  $F = 1400 \text{ L/h}$ , o que nos dá  $F/V = 140 \text{ h}^{-1}$ . Como esse novo ponto de operação entra em estado estacionário mais rápido do que os pontos de operação estudados anteriormente reduziu-se o tempo de amostragem para  $0,002 \text{ h}$  e rodou-se a simulação por 50 ciclos.

A Tabela 4.15 abaixo reúne os erros de estimação para as simulações feitas com os dois estimadores.

Observa-se que, de forma geral, os valores dos erros de estimação para ambos os estimadores diminuíram em relação ao ponto de operação anterior. Isso pode ser justificado, uma vez que as não linearidades eram intensas no ponto de operação anterior, fazendo com que a estimação fosse mais complicada.

Mesmo assim, pode-se ver que os valores do UKF continuam a ser melhores do que os do EKF, principalmente quando se analisa os erros quadráticos, que levam em consideração grandes desvios do valor real. De novo, consegue-se dar fundamentos à



argumentação de que o UKF consegue melhores estimativas para sistemas que apresentem grandes não linearidades.

Tabela 4.15 – Erros de estimação de  $C_a$ ,  $C_b$  e  $T$  com o LKF, EKF e UKF para o segundo novo ponto de operação escolhido

<b>Estado</b>	<b>Estimador</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSE</b>
$C_a$	EKF	0,0032	0,0138
	UKF	0,0013	0,0081
$C_b$	EKF	0,0324	0,0253
	UKF	0,0188	0,0154
$T$	EKF	0.0014	0,1774
	UKF	0.0008	0.0962

Entretanto, é importante ressaltar que as estimações do EKF para ambos os pontos de operação estudados são muito boas também. Apesar de não serem tão precisas quanto as do UKF, elas apresentam baixos valores de erro, fazendo com que se deva considerar escolher EKF a depender da aplicação, em função do maior custo computacional do UKF.

Por último, como foi falado durante todo o trabalho, investigou-se a diferença no tempo de processamento entres os filtros utilizados para ambos os casos analisados. Para tanto, utilizou-se a função *cputime* do MATLAB®, que retorna o tempo de processamento gasto para a realização de determinada ação, no nosso caso, a estimação dos estados utilizando os filtros estudados. Os resultados estão resumidos na Tabela 4.16. Essa função foi utilizada ao final do código, de modo que os valores na Tabela 4.16 são para a simulação não só do estimador, mas também da planta e das medições. É importante ressaltar também que os valores dependem do processador utilizado para a simulação.

Pode-se ver que mesmo para exemplos simples como os estudados aqui, a diferença no tempo de processamento do UKF é levemente superior ao do KF, e ao do EKF, aproximadamente 5 s em ambos os casos, o que pode justificar a escolha desses filtros ao invés do UKF.

Tabela 4.16 – Tempo de processamento para a estimação dos estados do Tanque Aquecido e do Reator de Van de Vusse para os filtros estudados

<b>Estimador</b>	<b>Tanque Aquecido</b>	<b>Reator de Van de Vusse</b>
KF	312,59 s	–
UKF	317,13 s	301,16 s
EKF	–	295,33 s
LKF	–	304,51 s

É interessante ressaltar também o alto tempo de processamento do LKF. Além de não apresentar estimações satisfatórias, o LKF apresenta-se também como um filtro computacionalmente pesado, fazendo com que seja difícil justificar a sua utilização no lugar do EKF, ou até do UKF.

## Capítulo V – Conclusões

Com o estudo de caso de um sistema linear para o tanque aquecido, conseguiu-se observar o desempenho do filtro de Kalman clássico e compará-lo com o desempenho do filtro de Kalman *Unscented*. Observou-se que a diferença da estimação desses dois filtros para um sistema linear é muito pequena, o que vai ao encontro das expectativas de que o filtro de Kalman, apesar de ser um estimador matematicamente mais simples, apresenta a solução ótima para sistemas lineares e gaussianos. Observou-se ainda, ao variar os valores da matriz  $Q$ , que o filtro de Kalman apresentou melhores respostas para sistemas com ruídos nas variáveis de entrada, mesmo quando ambos os filtros estão sintonizados com bons valores.

Por outro lado, quando se aumentou o valor dos ruídos de medida e da incerteza dos valores iniciais, percebeu-se que o UKF responde melhor a essas variações, principalmente para o caso de não sintonia das matrizes de covariância. Isso pode ser um fato que justifique a utilização do UKF mesmo para sistemas lineares. Caso não se tenha muitas informações, ou mesmo confiança, nas medições do sistema com que se esteja trabalhando, talvez seja mais prudente usar o UKF, uma vez que ele estaria mais apto a situações de não sintonia do filtro.

De um modo geral, entretanto, para o caso de ter-se o sistema linear bem determinado, e que um modelo dinâmico que consiga descrever bem o sistema da planta esteja disponível, justifica-se a utilização do filtro de Kalman clássico. Além de apresentar boas estimativas em condições normais de operação, ele também mostrou boas respostas às variações nos ruídos do processo. Comparativamente com o UKF, ele apresenta outra grande vantagem, o filtro de Kalman clássico necessita de um esforço computacional menor para realizar suas estimações. Isso pode fazer muita diferença, principalmente quando se opera o estimador em tempo real.

O segundo caso estudado, o sistema não linear do reator de Van de Vusse, deixou claro a diferença de desempenho do LKF em relação ao EKF e ao UKF. Devido à sua concepção matemática, o LKF deixa a desejar nas suas estimações, como se pôde ver com esse trabalho. Sua utilização fica muito restrita e difícil de ser justificada. Na verdade, a estimação do LKF depende muito da trajetória nominal que se está utilizando para linearizar o estimador, e para obter boas estimações seria necessária uma trajetória nominal

o mais perto possível da real. Praticamente falando, é difícil imaginar que se consiga saber, e escrever matematicamente, com certa precisão, a trajetória de um sistema real, com isso, levando a estimacões precárias.

O EKF, por outro lado, apresentou estimacões muito boas para os valores dos estados nos três pontos de operação estudados para o reator de Van de Vusse, reagindo muito bem ao incremento no valor dos ruídos de medida e nas variáveis de entrada e às incertezas dos valores iniciais, provando ser um filtro confiável. De fato, caso o sistema não apresente não linearidades muito grandes ou esteja sujeito a grandes dessintonias das matrizes de covariância, o EKF parece ser a melhor escolha dentre os estimadores estudados para sistemas não lineares.

O UKF, por final, foi aquele que apresentou os melhores resultados dentre todos os estimadores estudados para o sistema não linear. Além de apresentar estimativas excelentes para os três pontos de operação estudados do reator de Van de Vusse, o UKF foi aquele que obteve melhores respostas às diferentes análises de ruídos feitas nesse trabalho, sendo aquele que mais rapidamente percebeu as incertezas nas estimativas iniciais, aquele que conseguiu filtrar melhor as medições ruidosas, até para o caso da não sintonia da matriz  $R$ , e aquele que respondeu melhor à inclusão de ruídos nas variáveis de entrada.

Em termos de desempenho, conseguiu-se provar que o UKF é quase sempre superior ao EKF, principalmente quando esses estimadores são expostos a algum tipo de não sintonia das matrizes de covariância. Entretanto, o custo computacional do UKF é algo que acaba pesando contra ele e, muitas vezes, acaba justificando o uso do EKF. O uso do UKF justifica-se para sistemas com não linearidades severas ou onde se tenha muita incerteza em relação à sintonia das matrizes de covariância. Em outros casos, entretanto, o EKF ainda acaba sendo o estimador mais recomendável.

Esse trabalho, entretanto, cobriu apenas alguns estimadores de estado existentes. Para uma análise mais completa de qual estimador utilizar na hora de simular uma planta, recomenda-se procurar trabalhos que lidem com outros estimadores mais complexos, como por exemplo, estimadores de horizonte móvel. Entretanto, deve-se lembrar que quão mais complexo o estimador, maior o seu custo computacional, sendo por vezes favorável obter uma boa estimativa em pouco tempo do que uma excelente em muito tempo.

## Bibliografia

- (1) AFONSO, P. A. F. N. A., FERREIRA, J. M. L., CASTRO, J. A. A. M., *Sensor fault detection and identification in a pilot plant under process control*. Trans IChemE, v.76, part A, 1998
- (2) AGUIRRE, L. A., *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. 3ª ed. Editora UFMG, Belo Horizonte, 2007
- (3) CRAIN II, T. P., *Kalman filter as dynamic system state observers*. In: S. ISA - The Instrumentation and Automation Society (Ed.). The Mechatronics Handbook, CRC Press, 2002
- (4) ENGELL, S., *Feedback Control for optimal process operation*. Journal of Process Control, v.17, n.3, p.203-219, 2007
- (5) FREITAS, A. A., BORGES G. A., BAUCHSPEISS, A., *Avaliação do filtro de Kalman estendido para estimação de parâmetros de processo de nível de líquidos*. LAVSI – UNB, Brasília, 2004
- (6) FROISY, J. B., *Model predictive control – building a bridge between theory and practice*. Computers and Chemical Engineering, v.30, p.1426-1435, 2006
- (7) GAUSS, C., *Theory of motion of the heavenly bodies moving around the sun in conic sections: A translation of theoria motus*. Little, Brown and Company, Boston, 1857
- (8) GONÇALVES, G. A. A., *Estratégias não lineares para o monitoramento e controle preditivo de colunas de destilação utilizando modelos de ordem reduzida*. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, 2013
- (9) JULIER, S., UHLMANN, J., DURRANT-WHYTE, H. F., *A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators*. IEEE Transactions on Automatic Control, v.45, n.3, p.477-482, 2000
- (10) KALMAN, R., *A new approach to linear filtering and prediction problems*. ASME Journal of Basic Engineering, v.82, p.35-45, 1960
- (11) KUSHNER, H. J., *On the differential equations satisfied by conditional densities of Markov processes*. SIAM Journal on Control and Optimization, v.2, p.106, 1964
- (12) OGATA, K., *Engenharia de Controle Moderno*. 5ª ed., Pearson, São Paulo, 2010

- (13) OGUNNAIKE, B. A., RAY, W. H., *Process Dynamics, Modeling and Control*. Oxford University Press Inc., New York, 1994
- (14) PAIM, A., *Controle preditivo retroalimentado por estados estimados aplicado a uma planta laboratorial*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009
- (15) PRATA, D. M., LIMA, E. L., PINTO, J. C., *Simultaneous data reconciliation and parameter estimation in bulk polypropylene polymerizations in real time*. Macromolecular Symposia, v.243, n.1, p.91-103, 2006
- (16) PRATA, D. M., *Reconciliação robusta de dados para monitoramento em tempo real*. Tese de Doutorado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009
- (17) ROBERTSON, D. G., Lee, J. H., *A least squares formulation of the state estimation*. Journal of Process Control, v.5, n.4, p.291-299, 1995
- (18) SALAU, N. P. G., *Abordagem sistemática para construção e sintonia de estimadores de estado não-lineares*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009
- (19) SIMON, D. J., *Optimal state estimation*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2006
- (20) TONEL, G., *Avaliação dos estimadores EKF, CEKF e MHE para aplicações em linha de processos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008
- (21) TRIERWEILER, J. O., *A systematic approach to control structure design*. Tese de Doutorado, Universidade de Dortmund, 1997
- (22) ZHOU, J., LUECKE, R. H., *Estimation of the covariances of the process and measurement noise for a linear discrete dynamic system*. Computers Chemical Engineering, v.19, n.2, p.187-195, 1995