

# Teoria da Ruína: um estudo simulado da alta da sinistralidade no mercado segurador

Ana Clara Silva Andrade

Davi Machado de Almeida Alves



Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Instituto de Matemática  
Departamento de Métodos Estatísticos

2022

#### CIP - Catalogação na Publicação

A553t Andrade, Ana Clara Silva.

Teoria da Ruína: um estudo simulado da alta da sinistralidade no mercado segurador / Ana Clara Silva Andrade ; Davi Machado de Almeida Alves. – Rio de Janeiro, 2022.

45 f.

Orientadora: Viviana das Graças Ribeiro Lobo.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Bacharelado em Ciências Atuarias, 2022.

1. Ciências atuarias 2. Probabilidade. 3. Processos estocásticos. I. Alves, Davi Machado de Almeida II. Lobo, Viviana das Graças Ribeiro, orient. III. Título.

CDD 368.01

# Teoria da Ruína: um estudo simulado da alta da sinistralidade no mercado segurador

Ana Clara Silva Andrade

Davi Machado de Almeida Alves

Trabalho de conclusão de curso em Ciências Atuariais do Departamento de Métodos Estatísticos do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Ciências Atuariais.

Aprovada por:

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Viviana das Graças Ribeiro Lobo

IM - UFRJ - Orientadora.

---

Prof. PhD. Giulio Iacobelli

IM - UFRJ.

---

Prof. PhD. Thaís Cristina Oliveira da Fonseca

IM - UFRJ.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

2022

## Agradecimentos

Ana Clara Silva Andrade

Em primeiro lugar, agradeço aos meus pais Jacqueline e Maurício por todo apoio, colo e por acreditar em mim, muitas vezes mais do que eu mesma. Não existem palavras suficientes para descrever o quanto sou grata a tudo que fizeram e fazem por mim.

Agradeço aos professores da UFRJ que passaram pela minha trajetória e ajudaram no meu desenvolvimento. Em especial, agradeço a minha orientadora Viviana Lobo pela disponibilidade, ajuda e paciência no desenvolvimento do trabalho de conclusão de curso. Também tive a oportunidade de cursar diversas matérias com ela, que além das aulas maravilhosas, sempre se mostrou interessada no meu desenvolvimento, me dando diversos feedbacks e oportunidades para eu me aprimorar.

Agradeço ao meu chefe, Pier Ietto por todos os ensinamentos e pela oportunidade de aprender na prática sobre o mercado segurador. Agradeço por ser sempre compreensivo e estar sempre disposto a ajudar e ensinar.

Agradeço ao Pedro, que esteve do meu lado desde o meu primeiro dia na graduação, sempre me apoiando. Agradeço a Rayane por sempre me incentivar e aos meus amigos por torcerem por mim e por terem deixado meus dias mais leves.

Por fim, agradeço aos professores Giulio e Thaís que aceitaram participar da banca desse projeto.

Davi Machado de Almeida Alves

Queria agradecer, antes de tudo, aos meus pais e irmã, que sempre me deram suporte e apoio para perseguir os meus sonhos e buscar meu caminho profissional. Aos meus amigos que nunca me deixaram esquecer meu potencial e me deram forças para continuar.

Agradeço aos professores da UFRJ que me ajudaram a chegar até aqui e me ensinaram tanto.

A minha orientadora, Viviana Lobo, por tanta paciência e ajuda durante o processo de desenvolvimento do trabalho de conclusão de curso.

Um agradecimento aos professores Giulio e a Thaís, que concordaram em participar da banca do nosso projeto.

E a todos que fizeram parte dessa trajetória desafiadora, um enorme obrigado. Sem todos vocês tudo teria sido mais difícil.

## Resumo

Tendo em vista a necessidade do mercado segurador em avaliar o risco assumido, o estudo de teoria da ruína torna-se essencial. Com isso, o objetivo do trabalho é apresentar o embasamento teórico e prático da teoria de ruína. Será exposta uma revisão metodológica com os conceitos necessários para a definição do modelo clássico de ruína, como modelos probabilísticos, modelo de risco coletivo e processos estocásticos. Além disso, o trabalho desenvolve os principais conceitos do modelo clássico de ruína, mostrando a importância de cada variável do modelo, e descreve a análise do modelo considerando diferentes distribuições de probabilidade. Também é desenvolvido um estudo simulado considerando parâmetros realísticos, a fim de observar o impacto do aumento expressivo da sinistralidade. Nesse sentido, considera-se um cenário onde a alta da sinistralidade é ocasionada pela pandemia da Covid-19.

### **Palavras-chave:**

Teoria da Ruína, Processos Estocásticos, Cramer-Lundberg, Gestão de Risco e Sinistralidade.

# Abstract

In view of insurance corporations' urge to evaluate assumption of risk, the study of ruin theory becomes essential. With that in mind, the purpose of this paper is to introduce the theoretical basis of ruin theory and to understand how it works. We present a methodological review that includes the necessary concepts defining the classical risk process, such as probabilistic models, collective risk model and stochastic processes. Moreover, we examine such main concepts, highlighting the importance of each variable in the model, and describing the model analysis under different probability distributions. We also conduct a simulation study using realistic parameters to observe the impact of significant loss ratio increase. For that matter, we considered a scenario where the loss ratio increase is caused by the COVID-19 pandemic.

**Keywords:**

Ruin Theory, Stochastic Process, Camer-Lundberg, Risk Manegement and Loss Ratio

# Conteúdo

## Lista de Figuras

Lista de Tabelas	1
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2 Revisão metodológica</b>	<b>5</b>
2.1 Modelos Probabilísticos . . . . .	5
2.1.1 Modelos para dados de contagem . . . . .	5
2.1.2 Distribuições para valores de sinistro . . . . .	8
2.2 Modelo de Risco Coletivo . . . . .	11
2.3 Processos Estocásticos . . . . .	13
2.3.1 Processo de Poisson . . . . .	13
<b>3 Teoria da Ruína</b>	<b>17</b>
3.1 Modelo clássico de ruína . . . . .	17
3.2 Carregamento de Segurança . . . . .	20
3.3 Coeficiente de Ajuste e Cota Superior de Lundberg . . . . .	21
3.4 Probabilidade de Ruína . . . . .	25
<b>4 Aplicações</b>	<b>27</b>
4.1 Estudo Simulado . . . . .	27
4.2 Análise de dados referentes a seguro de morte . . . . .	32
<b>5 Conclusões</b>	<b>40</b>
<b>6 Apêndices</b>	<b>41</b>

## Lista de Figuras

2.1	Comportamento da distribuição de Poisson: (a) $\lambda = 1$ , (b) $\lambda = 5$ e (c) $\lambda = 10$ .	6
2.2	f.d.p $N \sim BN(t = 22; k = 7, \theta)$ . . . . .	8
2.3	Comportamento da distribuição Gama: (a) variando $\alpha$ e (b) variando $\beta$ . . . . .	9
2.4	Comportamento da função de densidade de probabilidade da distribuição log-normal, tal que $X \sim LogN(\mu = 1, \sigma)$ . . . . .	10
2.5	Ilustração da realização de um Processo de Poisson com parâmetro: $\lambda = 1/5$ e $\lambda = 1$ . . . . .	15
2.6	Ilustração da realização de um Processo de Risco. . . . .	16
3.1	Processo de Ruína considerando $u = 100$ , $c = 3.3$ com indenizações geradas a partir de uma distribuição Gama(10,0.1) e $\lambda = 0.3$ . . . . .	18
3.2	Probabilidade de ruína x Capital inicial. . . . .	19
3.3	Probabilidade de ruína x Carregamento de segurança . . . . .	20
3.4	Coefficiente de Ajustamento R (solução positiva para a Equação 3.6) . . . . .	22
4.1	Variação de capital da seguradora com o tempo . . . . .	28
4.2	Variação de capital da seguradora com o tempo. . . . .	30
4.3	Comportamento da distribuição Gama utilizando os dados empíricos . . . . .	33
4.4	Comportamento do Processo de Poisson: (a) 2019 (b) 2020 e (c) 2021. . . . .	34
4.5	Comportamento do Processo de Risco . . . . .	35
4.6	Comportamento do Processo de Risco (a) 2019 (b) 2020 e (c) 2021. . . . .	36
4.7	Comportamento do Processo de Risco: (a) 2019 (b) 2020 e (c) 2021. . . . .	37
4.8	Comportamento do Processo de Risco (a) 2019 (b) 2020 e (c) 2021. . . . .	38
6.1	Valores de sinistro: (a) 2019 (b) 2020 e (c) 2021. . . . .	41
6.2	Frequências dos valores de sinistro: (a) 2019 (b) 2020 e (c) 2021. . . . .	42

## Lista de Tabelas

4.1	Variação do capital inicial	28
4.2	Variação de $\alpha$ e capital inicial ( $\beta$ fixado em 0.01)	29
4.3	Variação de $\beta$ e capital inicial ( $\alpha$ fixado em 10)	29
4.4	Variação de $\theta$ e capital inicial ( $\alpha = 10$ e $\beta = 0.01$ )	29
4.5	Variação do capital inicial	30
4.6	Variação de $\mu_X$ e capital inicial ( $\sigma_X$ fixado em 0.31)	31
4.7	Variação de $\sigma_X$ e capital inicial ( $\mu_X$ fixado em 6.86)	31
4.8	Variação de $\theta$ e capital inicial ( $\mu_X = 6.86$ e $\sigma_X = 0.31$ )	31
4.9	Probabilidade de Ruína	35
4.10	Probabilidade de Ruína considerando o prêmio fixo	39

# 1 Introdução

O estudo da teoria da ruína tem como objetivo avaliar a performance de um capital em um determinado período de tempo de interesse de uma companhia, via modelos estocásticos que evoluem de acordo com o ganho de prêmios e ocorrência de sinistros. Neste sentido, o modelo descreve o comportamento de uma carteira ou apólice afim de ser capaz de mensurar a vulnerabilidade dado o risco conforme estudo por [Kaas \(2008\)](#).

A avaliação do risco é crucial para garantir a solvência da companhia seguradora. Usualmente as seguradoras avaliam de forma regular o risco associado a suas apólices utilizando conceitos de teoria do risco para auxiliar suas previsões e evitar a insolvência [Stéphane Loisel \(2012\)](#). Baseado nos modelos de ruína, duas variáveis são importantes, o prêmio e o carregamento de segurança, que são variáveis definidas pela seguradora, no processo de tarifação, e seus valores têm um papel fundamental no modelo onde o desafio consiste em estabelecer um valor que não traga riscos ruins para a carteira, que possua uma margem de lucro e que ao mesmo tempo seja suficiente para arcar com os custos envolvidos no processo e com sinistros, além da competitividade do mercado segurador.

Neste sentido, [Ramlau-Hansen \(1988\)](#) avaliou como o valor do capital inicial afeta a solvência da empresa assim como, qual seria o valor mínimo para que o risco de ruína fosse baixo considerando períodos de tempo menores e maiores. Eles consideraram como fatores o crescimento esperado da empresa, inflação e investimentos para determinar esses valores. Já [Dickson e Waters \(1996\)](#), utilizaram a proposta por [Ramlau-Hansen \(1988\)](#) para avaliar a solvência de uma empresa a partir do modelo clássico de ruína, com objetivo de avaliar a probabilidade de ruína em prazos maiores de tempo. Eles consideraram distribuições de probabilidade para modelar os valores das indenizações e além de prêmios constantes ao longo do tempo.

A teoria da ruína pode ser aplicada em diversos contextos. No Brasil, [dos Santos \(2020\)](#) avaliam a ruína aplicada em eventos de catástrofes aéreas via modelos de risco e misturas de distribuições e simulações de Monte Carlo para comparar os dados coletados com as distribuições Gama, Pareto, Log-Normal e Mistura de Normais, assim como para

validar a utilização da Poisson Composta para o valor total das indenizações. No trabalho de [França \(2017\)](#), a teoria da ruína é abordada com enfoque na saúde suplementar, onde também são utilizadas simulações de Monte Carlo para avaliar o impacto da ruína. Teoria da Ruína também foi aplicada pela [Piroutek \(2009\)](#) numa dissertação sobre a probabilidade de ruína com eventos espaciais, onde as suposições para utilização do modelo clássico são inválidas devido a correlação dos sinistros quando ocorre uma catástrofe natural. Com isso, é estudado o impacto do uso do modelo clássico nesse cenário.

Este projeto tem como objetivo estudar os modelos clássicos de ruína a partir de estudos simulados, com interesse em avaliar o comportamento da ruína em diversos cenários. Para isso, é crucial avaliar o comportamento das distribuições relacionadas aos valores gastos em indenizações e a quantidade de sinistros ocorridos no período de tempo de interesse. Além dos estudos simulados, é considerada uma base de dados de uma seguradora brasileira relacionada a dados de seguro de cobertura de morte nos anos de 2019, 2020 e 2021. Devido a confidencialidade da companhia foi adicionado um ruído na subamostra tomada destes dados.

Vale ressaltar que, os anos a serem considerados neste estudo são cruciais para garantir a solvência da companhia seguradora. Neste sentido, a pandemia da COVID-19 foi um evento catastrófico que marcou o mundo. Devido ao número de casos cada vez maior e a quantidade de países afetados, a [OMS \(2020\)](#) decretou que se tratava de uma pandemia em março de 2020. No Brasil, no início de março de 2020, foi registrado a primeira morte em decorrência do vírus. Apesar das medidas restritivas, em abril de 2020 foram contabilizadas mais de 4 mil mortes por dia, tendo uma queda expressiva somente em agosto de 2021, quando a maior parte da população foi vacinada com pelo menos uma dose. De acordo com [Data \(2022\)](#), desde o início da pandemia foram registradas 665 mil mortes pela Covid-19, impactando diversas áreas. Com isso, ao analisarmos os dados empíricos, poderemos ver o impacto da Covid-19 na seguradora.

Além disso, ressalta-se que conforme estudo realizado pela Universidade de Oxford e a seguradora Zurich mostrou que o Brasil possui a menor taxa do mundo em se tratando de cobertura pessoal por meio de seguros, Ademais, o seguro tem como objetivo cobrir riscos previsíveis, por ser possível precificar, pandemias e catástrofes naturais são

coberturas geralmente excluídas de apólices, fazendo com que as seguradoras não tenham a obrigação de pagar as indenizações referentes a morte por COVID-19 segundo [CQCS \(2018\)](#). Entretanto, como o seguro já é um produto de difícil comercialização no Brasil e enfrenta barreiras culturais e econômicas, muitas seguradoras optaram por indenizar seus segurados, mesmo que a morte tenha sido por COVID-19, como uma forma de preservar a imagem do produto. Inclusive, segundo [CNSeg \(2021\)](#) no cenário pós pandemia, a demanda por seguro aumentou bastante se fazendo necessário constantes estudos para realizar uma boa precificação e ao mesmo tempo, garantir a solvência da empresa.

Já o trabalho de [d'Oliveira \(2005\)](#) traz um visão da importância e do impacto do seguro na economia assim como a necessidade de uma estrutura regulatória para o equilíbrio do mercado. Enquanto isso, [Paulo Pereira Ferreira \(2009\)](#) define como provisões técnicas o montante constituído pelas seguradoras para cumprir suas obrigações financeiras e demonstra a importância da precisão no cálculo das provisões, uma vez que elas impactam diretamente o resultado da empresa e sua capacidade em honrar compromissos futuros.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta uma revisão metodológica abordando fundamentos estatísticos que serão utilizados na construção do modelo de ruína. Já no Capítulo 3, foi abordada a definição de teoria de ruína, assim como o impacto de cada variável que compõe o modelo de risco. No Capítulo 4 foi apresentado um estudo simulado utilizando parâmetros teóricos e empíricos. Com os parâmetros teóricos, o objetivo é observarmos o comportamento do modelo, enquanto os parâmetros empíricos foram obtidos a partir de dados sobre a sinistralidade de uma seguradora no Brasil, para estudarmos o comportamento do modelo antes e durante a pandemia. Por fim, no Capítulo 5 serão apresentadas as conclusões deste estudo e possíveis trabalhos futuros.

## 2 Revisão metodológica

No contexto de uma companhia seguradora, é de interesse estudar o número de sinistros ocorridos para prever o comportamento no futuro. Para isso, é necessário considerar um modelo que reflita a quantidade de indenizações e seus valores no tempo. Neste contexto, podemos levar em conta o uso de modelos probabilísticos, tais como a distribuição Poisson e Binomial Negativa para o número de indenizações, a distribuição Gama, Log-Normal e Pareto para valores agregados em indenizações (ver Seção 2.1). A partir disto, conseguimos entender como será o comportamento no futuro.

Este capítulo apresenta conceitos fundamentais para o estudo da teoria da ruína onde são utilizados modelos probabilísticos. Esses modelos são utilizados para o cálculo de frequência e severidade. Além disso, são apresentados conceitos importantes, tais como, modelos de risco atuarial e processos estocásticos, uma vez que eles nos permitem prever como será o comportamento de determinado evento no futuro, e processo de Poisson, que é um caso particular do processo estocástico voltado para contagem de eventos.

### 2.1 Modelos Probabilísticos

#### 2.1.1 Modelos para dados de contagem

Na estatística, as distribuições mais utilizadas para modelar processos de contagem são a Poisson e Binomial Negativa. Dessa forma, nessa seção, iremos apresentar as duas distribuições e suas características. Para maiores detalhes sobre as distribuições de probabilidade, ver [DeGroot e Schervish \(2012\)](#).

Uma das características da distribuição Poisson é ter sua média e a variância iguais, tornando diversos cálculos mais fáceis. Entretanto, como esse cenário não é muito comum, uma distribuição que pode ser interessante para modelar dados de contagem é a distribuição Binomial Negativa. Essa distribuição permite modelar dados com sobredispersão e que apresentam heterogeneidade por permitir que média e variância não sejam

iguais.

Seja  $N$  uma variável aleatória que toma valores positivos e inteiros e representa o número de sinistros em um determinado período de vigência de uma apólice. Como já mencionado, é usual adotarmos a distribuição Poisson para a contagem de sinistros, onde  $N \sim Poi(\lambda)$ , onde  $\lambda$  representa a taxa média de sinistros e sua distribuição de probabilidade é dada por:

$$P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (2.1)$$

Além disso, a distribuição de probabilidade de uma Poisson, tem como característica a média e a variância serem iguais, e com isso temos:

$$\mathbb{E}(N) = Var(N) = \lambda \quad (2.2)$$

A Figura 2.1 ilustra o comportamento da distribuição da Poisson para diferentes valores de  $\lambda$ . Como podemos visualizar, a Figura 2.1(a), onde  $\lambda = 1$ , apresenta uma massa de probabilidade muito grande para valores baixos de  $t$ , e a curva é muito acentuada. Na 2.1 (b), onde  $\lambda = 5$ , a curva já mudou bastante, apesar de continuar bem assimétrica, tendo sua massa de probabilidade bem concentrada até  $t = 10$ . Por fim, na Figura 2.1 (c), com  $\lambda = 10$ , o valor de  $\lambda$  é muito maior do que o utilizado nas outras figuras e sua massa de distribuição de probabilidade é concentrada ao redor da média. Além disso, podemos ver que a curva apresenta simetria e se assemelha a curva da distribuição normal.

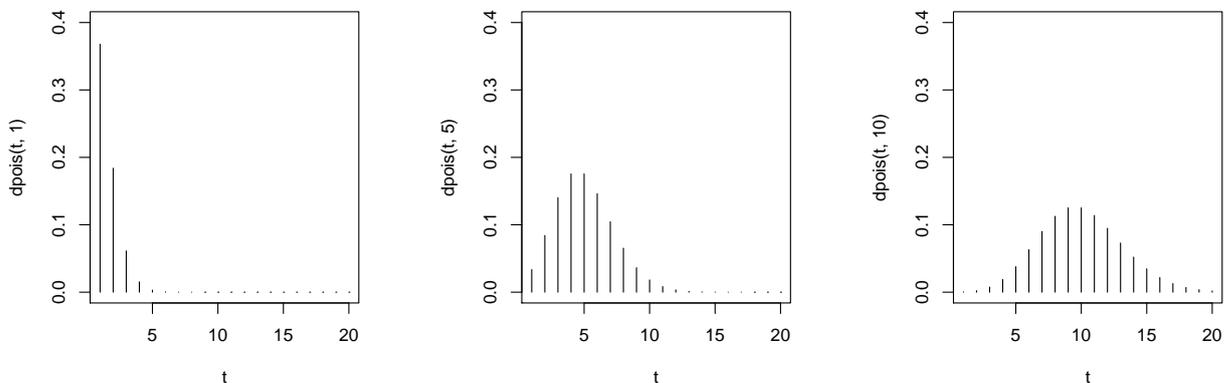


Figura 2.1: Comportamento da distribuição de Poisson: (a)  $\lambda = 1$ , (b)  $\lambda = 5$  e (c)  $\lambda = 10$ .

No contexto de contagem de sinistros, é usual termos valores menores de sinistros com uma maior concentração de probabilidade, fazendo com que a distribuição não seja simétrica. Dessa forma, considerar valores altos de  $\lambda$  talvez não seja o ideal, uma vez que aumentando o valor do parâmetro, a curva da distribuição fica cada vez mais simétrica. Além disso, quando os dados apresentam média e variância distintas, a distribuição da Poisson não é aderente para modelar os dados e quando isso ocorre é comum utilizarmos a distribuição Binomial Negativa.

A distribuição binomial negativa é uma distribuição de probabilidade discreta que indica o número de tentativas necessárias para obter  $k$  sucessos em  $t$  ensaios de Bernoulli independentes, com uma probabilidade de sucesso  $\theta$ .

Seja  $N \sim BN(t; k, \theta)$ , a função de probabilidade de  $N$  será dada por:

$$P(N = k) = \binom{t-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^{t-k} \quad (2.3)$$

Além disso, temos que a média e variância são dados por:

$$\mathbb{E}(N) = \frac{np}{1-p} \quad (2.4)$$

$$Var(N) = \frac{np}{(1-p)^2} \quad (2.5)$$

Conforme as equações acima, com a distribuição binomial negativa, conseguimos suprir a necessidade de modelar a quantidade de ocorrências quando a média e variância são diferentes.

Como em teoria da ruína o evento de interesse é a ocorrência de um sinistro, temos a probabilidade de ocorrer  $N = k$  sinistros será dada pela Equação 2.3 onde  $\theta$  é a probabilidade de ocorrência de sinistro e  $t$  é o tempo observado.

Ao fixar o tempo de observação, temos na Figura 2.2 abaixo, o comportamento da distribuição binomial negativa para diferentes probabilidades de ocorrência de sinistro. Podemos observar que para probabilidades altas a curva se assemelha a curva da distribuição exponencial, enquanto para probabilidades baixas, se assemelha a curva da

distribuição normal.

Seja a função de distribuição de probabilidade denota por f.d.p temos:

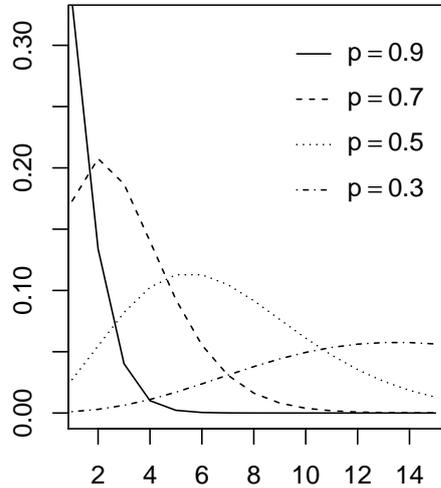


Figura 2.2: f.d.p  $N \sim BN(t = 22; k = 7, \theta)$

### 2.1.2 Distribuições para valores de sinistro

Para modelar o valor dos sinistros é usual considerar as distribuições de probabilidade Gama e Log-Normal, devido ao comportamento assimétrico e positivo.

A distribuição Gama é uma distribuição de probabilidade contínua que possui dois parâmetros,  $\alpha$  e  $\beta$ , onde o parâmetro  $\alpha$  influencia na forma da curva e o parâmetro  $\beta$  influencia na escala. Devido aos seus dois parâmetros, a distribuição Gama é uma distribuição flexível podendo ser utilizada para modelar diversos eventos. A distribuição Gama pode ser vista como uma família de distribuições que modela o tempo necessário para a ocorrência de um número de eventos. No estudo da Teoria da Ruína, utilizamos essa distribuição para modelar o tempo necessário para a ocorrência de um número de sinistros, denotado por  $X$ .

Seja  $X$  modelada por uma distribuição Gama, tal que  $X \sim Ga(\alpha; \beta)$ , onde  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}$ . A função de densidade de probabilidade de  $X$  será dada por:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad (2.6)$$

Além disso, uma forma de avaliarmos o comportamento da curva é variando a média e a variância ao alterarmos os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  nas equações abaixo:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad (2.7)$$

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (2.8)$$

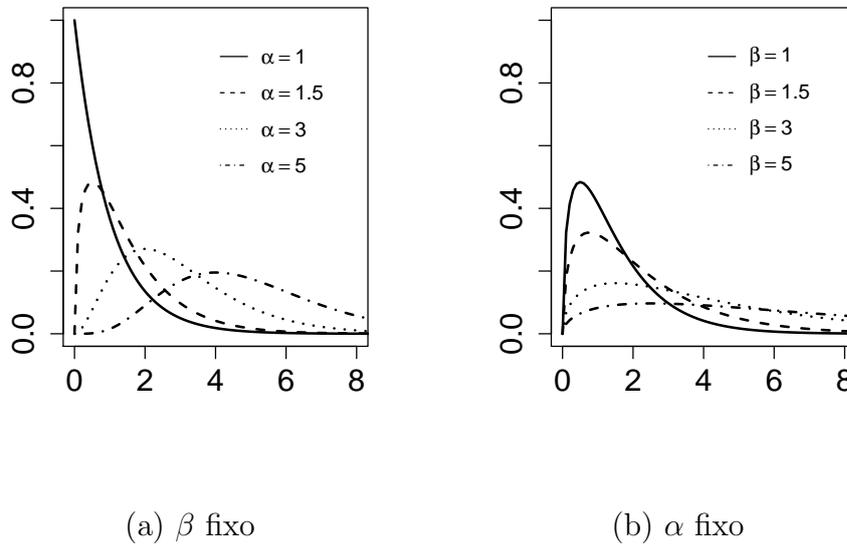


Figura 2.3: Comportamento da distribuição Gama: (a) variando  $\alpha$  e (b) variando  $\beta$

A Figura 2.3 apresenta o comportamento de uma distribuição Gama com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Como podemos ver, no painel (a) o parâmetro  $\beta$  está fixado em 1 enquanto o valor de  $\alpha$  varia. Podemos notar que quando  $\alpha = 1$ , a distribuição Gama fica igual a distribuição Exponencial e conforme aumentamos o valor de  $\alpha$ , a curva muda de formato, ficando cada vez mais suave enquanto no painel (b),  $\alpha$  está fixado em 1.5 enquanto  $\beta$  varia. Olhando as curvas, podemos observar o formato da curva é o mesmo modificando apenas a distribuição sobre o eixo.

A distribuição Log-Normal é muito utilizada em estudos estatísticos voltado para diversas áreas por admitir apenas valores positivos para seus parâmetros e é usada em

diferentes contextos na literatura modelando tamanhos. Dizemos que uma variável  $X$  tem distribuição Log-Normal quando seu logaritmo tem distribuição Normal, ou seja,  $X = \log(N) \sim N(\mu; \sigma^2)$ . Sua função de densidade de probabilidade é escrita como:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (2.9)$$

Já seu valor esperado e variância serão dadas, respectivamente, por:

$$\mathbb{E}(X) = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} \quad (2.10)$$

$$\text{Var}(X) = (e^{\sigma^2} - 1) \exp\{2\mu + \sigma^2\} \quad (2.11)$$

Com isso, ao fixarmos  $\mu = 1$ , podemos ver na Figura 2.4 abaixo, o comportamento da distribuição para diferentes valores de  $\sigma^2$ . Além disso, podemos ver que ao diminuir o valor de  $\sigma^2$ , a massa de distribuição de probabilidade fica mais concentrada em valores próximos a  $\mu$ .

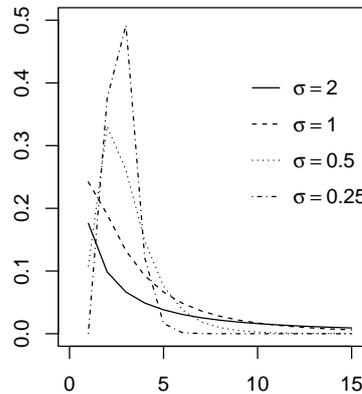


Figura 2.4: Comportamento da função de densidade de probabilidade da distribuição log-normal, tal que  $X \sim \text{Log}N(\mu = 1, \sigma)$

## 2.2 Modelo de Risco Coletivo

Para realizar o cálculo do prêmio a ser cobrado, a seguradora precisa observar o risco individual a ser segurado para calcular o risco atrelado a cada apólice. Porém, realizar esse cálculo de forma individualizada é muito trabalhoso. Dessa forma, [Kaas \(2008\)](#) apresenta os modelos de risco coletivo como uma ótima alternativa para aproximar o modelo de risco individual, permitindo a mensuração do risco de forma mais simples.

No modelo de risco individual, o sinistro agregado é modelado a partir da soma dos riscos em cada apólice, enquanto no modelo de risco coletivo, escreve-se o sinistro agregado como a soma dos sinistros de toda a carteira.

Para utilizar o modelo de risco coletivo, é necessário estudar a distribuição do valor de cada sinistro,  $X_i$ , e do número total de sinistros produzidos,  $N$ .

**Definição 2.2.1.** As suposições do modelo de risco coletivo.

- A variável  $N$  representa o número total de sinistros produzido na carteira (em período pré-fixado no contrato).
- A variável  $X_i$  representa o valor do  $i$ -ésimo sinistro na carteira.
- As variáveis  $X_1, X_2, \dots$  são independentes e identicamente distribuídas.
- A variável  $N$  é independente das variáveis  $X_1, X_2, \dots$ .

Tem-se que o valor total das indenizações é igual a soma aleatória de variáveis aleatórias, denotado por

$$S^{coll} = X_1 + X_2 + \dots + X_N = \sum_{i=1}^N X_i \quad (2.12)$$

Note que,  $X_i$  e  $N$  serem independentes, significa que o número de sinistros é independente do valor dos sinistros. Além disso,  $S^{coll}$  é uma soma de variáveis aleatórias  $X_i$  e  $N$  representa o número de sinistros em um período também é aleatório. Sendo assim, a distribuição de  $S^{coll}$  é chamada de distribuição composta entre  $X_i$  e a distribuição de  $N$ .

Considere interesse no total de indenizações pagas por uma seguradora. Podemos nos perguntar, qual o valor esperado do total pago em indenizações. Sabe-se que cada indenização tem média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Neste sentido, gostaríamos de obter

$$E(S^{coll}) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right). \quad (2.13)$$

Lembre-se que  $N$  e  $X_1, X_2, \dots, X_N$  são aleatórios. Além disso, podemos obter a variância do total pago,  $Var(S^{coll})$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S^{coll}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_i | N)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N X_i | N = n\right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{E}(X_i) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{E}(X_i) \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(N). \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} Var(S^{coll}) &= Var(\mathbb{E}(S^{coll} | N)) + \mathbb{E}(Var(S^{coll} | N)) \\ &= Var\left(\sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i | N)\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N Var(X_i | N)\right) \\ &= Var(N \mathbb{E}(X_i)) + \sum_{n=0}^{\infty} Var\left(\sum_{i=1}^N X_i | N = n\right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{E}(X_i)^2 Var(N) + \sum_{n \geq 0} Var\left(\sum_{i=0}^n X_i\right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{E}(X_i)^2 Var(N) + \sum_{n \geq 0} n Var(X_i) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{E}(X_i)^2 Var(N) + Var(X_i) \sum_{n \geq 0} n \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{E}(X_i)^2 Var(N) + Var(X_i) \mathbb{E}(N). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Note que se considerarmos o número de sinistros ocorridos entre um determinado período de tempo, digamos  $[0, t)$ , então a perda total no período  $[0, t)$  pode ser vista

como  $S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ , ou seja, uma soma de variáveis aleatórias relacionada ao valor das indenizações, indexado pela quantidade de sinistro, que também neste caso será uma variável aleatória, que depende de  $t$ , e podemos denotar por  $N(t)$ , caracterizando assim um processo estocástico.

## 2.3 Processos Estocásticos

Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias geralmente indexadas no tempo, que pode ser tratado de forma discreta ou contínua [Ross \(1996\)](#).

Uma das finalidades do processo estocástico é observarmos a trajetória de um conjunto de variáveis para prever sobre um tempo futuro. No contexto de seguros, podemos utilizar o valor total de indenizações pagas em um conjunto de apólices para prever o sinistro esperado. No caso em que consideramos o tempo como uma variável discreta, defina  $T$  uma variável aleatória enumerável, ou seja,  $X$  é um processo estocástico em tempo discreto se  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  e denotamos a sequência de variáveis aleatórias por  $X_n, n \geq 0$ .

Além disso, o processo estocástico, considerando tempo discreto, é dito ter incrementos independentes se  $X_i - X_{i-1}, X_{i-1} - X_{i-2}, \dots$  forem independentes. Seja  $s$  um número arbitrário positivo, esses incrementos são estacionários se  $X(t+s) - X(t)$  possuírem a mesma distribuição para todo  $t$ , podendo concluir que as variáveis possuem a mesma distribuição de probabilidade independente do tempo.

### 2.3.1 Processo de Poisson

Como o modelo mais utilizado na literatura é o modelo Poisson e temos comportamentos semelhantes entre as distribuições utilizadas, seguiremos com a distribuição Poisson.

Ao utilizar a distribuição Poisson, temos um processo de contagem que é um processo estocástico quando  $N(t)$  é o número de ocorrências no intervalo  $[0, t)$ , e para isso deve-se satisfazer alguns critérios tais como:

1.  $N(t) \geq 0$ ;
2.  $N(t) \in \mathbb{N}$ ;

3.  $N(t) \leq N(t + s)$ ;

4. Se  $s \leq t$ ,  $N(t) - N(s)$  é o número de eventos no intervalo  $(s, t]$ .

Esse processo é dito possuir incrementos independentes se os números de eventos que ocorrem em intervalos disjuntos de tempo são independentes.

Um processo de contagem é dito possuir incrementos estacionários se a distribuição do número de eventos que ocorrem em qualquer intervalo de tempo depende apenas do comprimento do intervalo, ou seja, o número de eventos no intervalo  $(s; s + t)$  tem a mesma distribuição para todo  $s$ .

Com isso, conseguimos determinar o Processo de Poisson onde o número de ocorrências em qualquer intervalo de duração  $t$  é uma distribuição de Poisson com média  $\lambda t$ , ou seja,  $N(t) \sim Poi(\lambda t)$ .

Determinado o processo de Poisson, conseguimos contar o número de eventos ocorridos  $N(t)$  no tempo  $t$ . Se quisermos avaliar o número de eventos entre dois tempos, digamos  $a$  e  $b$ , calculamos  $N(b) - N(a)$ . Construindo o processo, temos que o tempo entre duas ocorrências consecutivas segue uma exponencial  $t \sim Exp(1/\lambda)$ .

Suponha taxas  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 1/5$  num espaço de tempo de 20 dias. A Figura 2.5 ilustra o processo considerando essas taxas, em dois cenários: quando consideramos, em média, 1 sinistro a cada 5 dias, ou seja,  $\lambda = 1/5$ , o número observado de sinistros é 8 e quando aumentamos essa média para 5 sinistros a cada 5 dias, ou seja,  $\lambda = 1$ , aumentamos a quantidade observada de sinistros para 17. Com isso, fica evidente que ao alterar o valor de  $\lambda$ , a contagem tende a ser alterada da mesma forma, ou seja, quando aumentamos  $\lambda$ ,  $N(t)$  também aumenta.

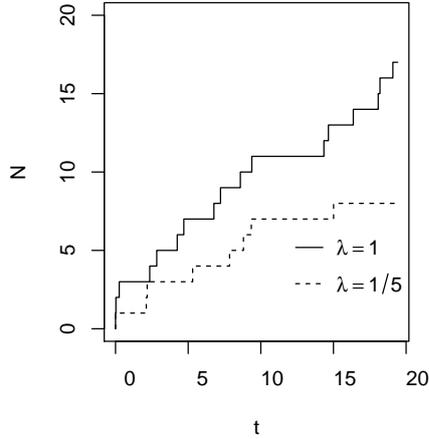


Figura 2.5: Ilustração da realização de um Processo de Poisson com parâmetro:  $\lambda = 1/5$  e  $\lambda = 1$ .

Dessa forma, estabelecida a variável  $N(t)$ , podemos definir o  $S(t)$  como a soma das indenizações, conforme Equação 2.16. Podemos perceber, pela equação, que o processo de Poisson é um processo estocástico, onde  $X_i$  é uma variável aleatória correspondente a  $i$ -jésima indenização e  $S(t)$  é o somatório dessas indenizações, começando na primeira indenização até a  $N$ -ésima indenização.

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad (2.16)$$

Uma vez tendo a distribuição da quantidade de sinistros,  $N(t)$ , para construirmos o processo de ruína, temos que estudar a distribuição do valor das indenizações,  $X_i$ .

Dessa forma, temos a  $S(t)$  sendo a soma de variáveis aleatórias indexadas por uma variável aleatória, que, no caso da teoria da ruína, podemos interpretar como a soma das indenizações que segue uma determinada distribuição, indexada por outra variável aleatória,  $N(t)$  que é descrita, nesse caso, pela distribuição Poisson.

Considerando uma taxa  $\lambda = 5$  num modelo onde observamos até  $t = 20$ , encontramos 4 indenizações e assumindo que essas indenizações são descritas por  $X_i \sim G(\alpha = 3, \beta = 1)$ , teremos:

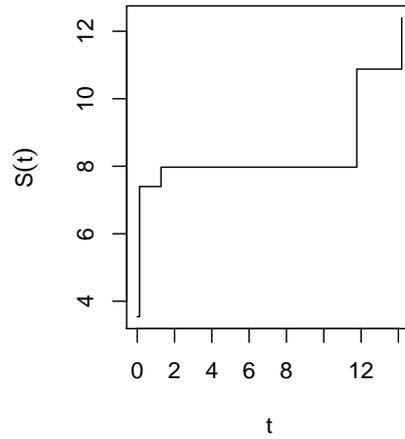


Figura 2.6: Ilustração da realização de um Processo de Risco.

Na Figura 2.6 podemos observar a trajetória do modelo onde cada saltos representa uma indenização, totalizando 4 indenizações, e o tamanho do salto representa o valor de cada indenização. Com isso, ao final do processo temos o valor das indenizações acumuladas,  $S(t)$ .

## 3 Teoria da Ruína

O estudo de teoria da ruína tem como objetivo prever se e quando uma empresa entrará em ruína de acordo com o capital inicial, prêmio e sinistro esperado. Com isso, é possível identificar um problema a longo prazo podendo aplicar carregamento de segurança, aumentar margens ou até reprecificar as apólices para evitar a entrada em ruína.

Vamos denotar por  $\Psi(u)$  a probabilidade da empresa entrar em ruína, podendo ser utilizada para análise de portfólios e grupo de apólices.

### 3.1 Modelo clássico de ruína

O modelo de ruína mais conhecido na literatura, chamado de modelo de Cràmer-Lundberg, considera o capital inicial  $U(0)$ , e para cada instante  $t$ , temos  $U(t)$  o capital da empresa no momento  $t$ . Nesse modelo são introduzidas algumas variáveis como o capital inicial, denotado por  $u$ , que é uma constante,  $S(t)$ , sendo o total das indenizações pagas até o momento  $t$  e o prêmio arrecadado,  $c$ , que também é uma constante. Para maiores detalhes ver [Kaas \(2008\)](#) e [Dickson \(2005\)](#).

Dessa forma, podemos definir o modelo de ruína a tempo contínuo conforme Equação 3.1

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad (3.1)$$

Onde o capital no tempo  $t$ ,  $U(t)$ , vai ser o resultado do valor inicial,  $u$ , somado ao total de prêmios coletados até naquele instante,  $ct$ , e subtraído do total de indenizações pagas,  $S(t)$

De forma a ilustrar o comportamento do modelo em termos da avaliação da ruína, vamos considerar um cenário simulado. Definindo um capital inicial de  $u = 100$  u.m, o prêmio sendo  $c = 3.3$  u.m, as indenizações vindas da distribuição Gama ( $\alpha = 10, \beta = 0.1$ ), a média do número de indenizações num intervalo unitário sendo  $\lambda = 0.3$ , teremos o seguinte processo a tempo contínuo:

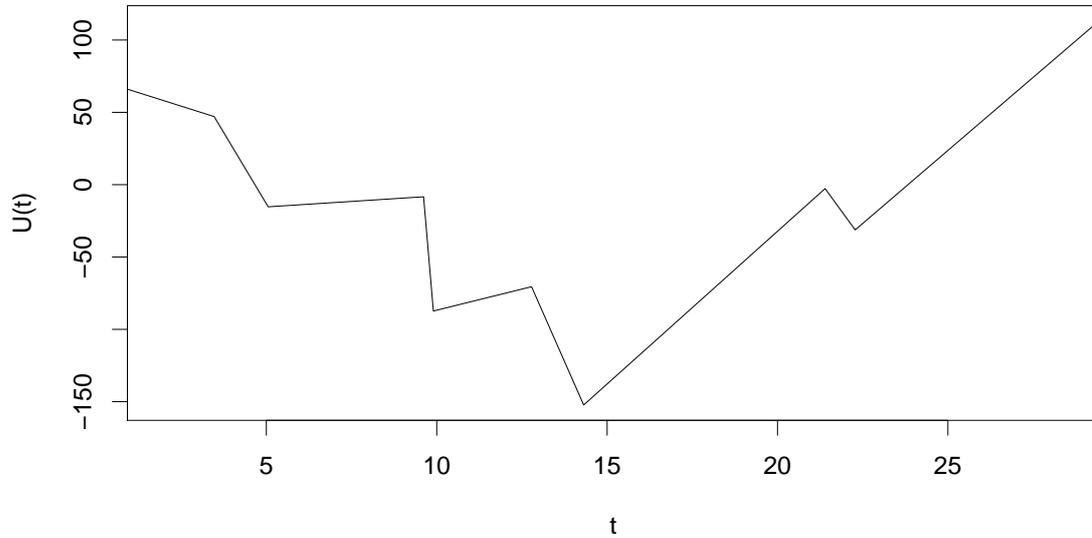


Figura 3.1: Processo de Ruína considerando  $u = 100$ ,  $c = 3.3$  com indenizações geradas a partir de uma distribuição Gama(10,0.1) e  $\lambda = 0.3$ .

Podemos ver na Figura 3.1 que o processo entra em ruína aproximadamente no tempo  $t = 5$ , quando  $U(t) < 0$  e se recupera aproximadamente  $t = 24$ , não entrando mais em ruína.

Sendo assim, o processo de ruína é avaliado ao considerar as variáveis aleatórias indexadas no tempo  $t$ , com o momento de ruína ocorrendo quando  $U(t) < 0$ . Defina a variável aleatória que descreve o momento que o processo alcança na ruína por  $T$  tal que:

$$T := \min \{t \mid t \geq 0 \text{ tal que } U(t) < 0\} \quad (3.2)$$

Seja o evento de ruína expresso por  $\{t \geq 0 \text{ tal que } U(t) < 0\}$ . Assim, temos que  $\{t \geq 0 \text{ tal que } U(t) < 0\} = \{T < \infty\}$ .

A probabilidade de  $T$  ser finito, ou seja, probabilidade da ruína ocorrer é escrito

por:

$$\begin{aligned}
 \Psi(u) &= P(T < \infty \mid U(0) = u) = P(U(t) < 0 \mid U(0) = u, t \geq 0) \\
 &= P(u + ct - S(t) < 0 \mid U(0) = u) = P(u + ct < S(t) \mid U(0) = u) \\
 &= P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i > u + ct \mid U(0) = u\right) \\
 &= \int_{u+ct}^{\infty} f_S(x) dx,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde  $f_S(x)$  representa a função de densidade de probabilidade dos valores das indenizações. Note que a probabilidade de ruína depende do capital inicial  $u = U(0)$ , como também depende de outros fatores relacionados aos prêmios recebidos. A Figura 3.2 apresenta a probabilidade de ruína variando de acordo com o capital inicial exclusivamente, como podemos ver quanto maior o capital inicial, menor será a probabilidade de ruína do modelo.

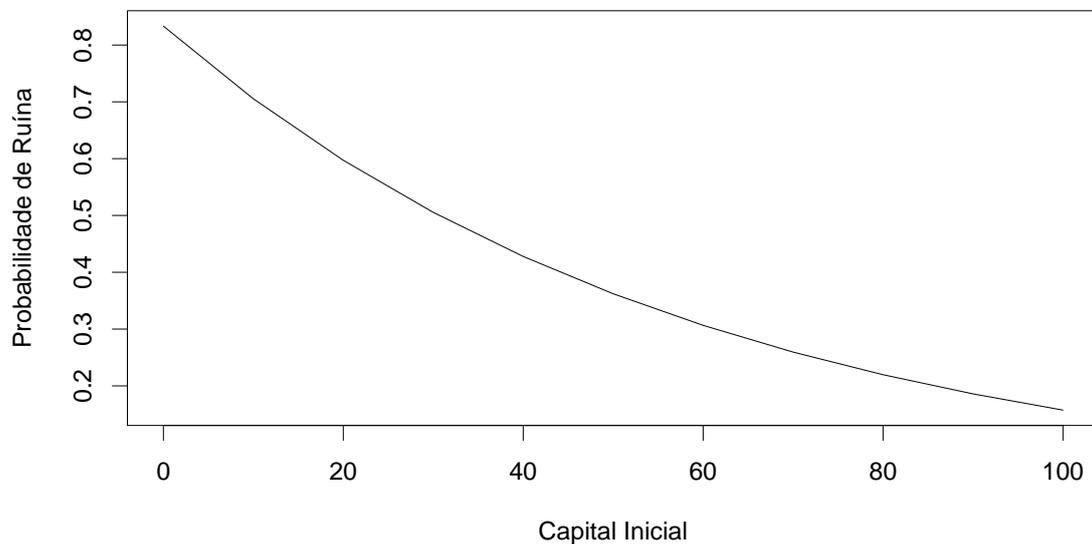


Figura 3.2: Probabilidade de ruína x Capital inicial.

De forma análoga, podemos definir a probabilidade de sobrevivência, que representa a probabilidade de não ocorrer a ruína como  $\delta(u) = 1 - \Psi(u)$ , ou seja,  $\delta(u) = \int_0^{u+ct} f_S(x) dx$ .

## 3.2 Carregamento de Segurança

Uma condição necessária para que o nível de reserva de uma seguradora seja positiva (em média) é que os prêmios pagos à seguradora sejam maiores que as indenizações esperadas, ou seja  $c > \lambda\mu$  (onde  $\mu$  é a média do valor das indenizações e  $\lambda$  é a quantidade de indenizações esperadas em um intervalo unitário de tempo), assim existe uma condição no modelo de Crámer-Lundberg que diz que, existe um coeficiente de segurança, tal que:

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu \quad (3.4)$$

Reescrevendo em função do carregamento de segurança,  $\theta$ :

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 \quad (3.5)$$

Esse carregamento existe para ter uma margem de segurança com o intuito de cobrir qualquer variação no risco e reduzir a probabilidade de ruína. Podemos ver na Figura 3.3 a importância do carregamento de segurança em relação a probabilidade de ruína.

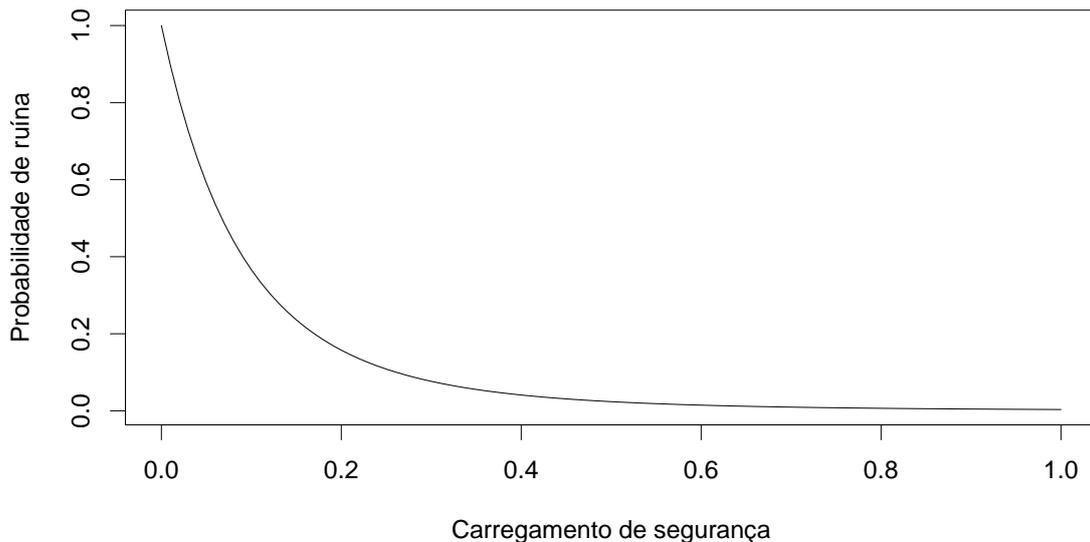


Figura 3.3: Probabilidade de ruína x Carregamento de segurança

### 3.3 Coeficiente de Ajuste e Cota Superior de Lundberg

Na maioria dos casos não conseguimos chegar a uma expressão fechada para a probabilidade de ruína, sendo assim Lundberg apresentou uma desigualdade, conhecida como Desigualdade de Lundberg, que nos fornece o limite superior para a probabilidade de ruína. Neste sentido, é necessário obtermos o coeficiente de ajuste.

**Definição 3.3.1.** Considere uma variável aleatória  $X$  positiva, com  $\mathbb{E}(X) > 0$  e função geradora de momentos  $M_X$ , podemos calcular o coeficiente de ajuste  $R$ , que será a solução positiva da Equação 3.6

$$1 + (1 + \theta)\mu r = M_X(r) \quad (3.6)$$

Multiplicando em ambos os lados por  $\lambda$  temos que:  $\lambda + (1 + \theta)\lambda\mu r = \lambda M_X(r)$ , também sabemos que  $(1 + \theta)\lambda\mu = c$ , então podemos reescrever como  $\lambda + cr = \lambda M_X(r)$ , que é uma função de  $r$ , onde  $\lambda$  é a média de sinistros.

$h(r) = \lambda + cr - \lambda M_X(r)$ , logo  $h(0) = 0$ , pois  $M_X(0) = E[e^{(0X)}] = 1$ . Sabemos que  $M'_X(r) = E[Xe^{rX}]$ , logo  $M'_X(0) = E[X] = \mu$ . Com isso conseguimos dizer que  $h'(r) = c - \lambda M'_X(r)$  e  $h'(0) = c - \lambda\mu > 0$  como dito em na Seção 3.2. Logo temos que  $h''(r) = -\lambda M''_X(r) = -\lambda E[X^2 e^{rX}] < 0$  (pois  $\lambda > 0$  e  $E[X^2 e^{rX}] > 0$ ). A função  $h(r)$  é côncava e seu limite é  $-\infty$ . Assim temos duas soluções para a equação, uma delas  $r = 0$  a outra um valor positivo chamaremos de  $R$ , como podemos ver na Figura 3.4.

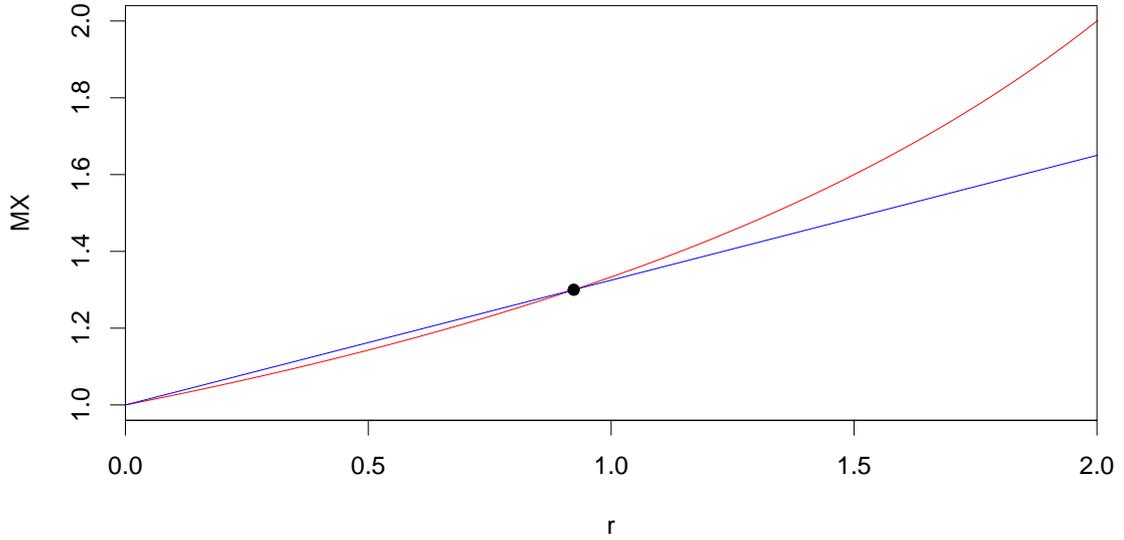


Figura 3.4: Coeficiente de Ajustamento R (solução positiva para a Equação 3.6)

Considerando o caso em que as indenizações individuais seguem a distribuição Exponencial de parâmetro  $\lambda$ , temos que  $M_X(r) = E[e^{rX}] = \int_0^\infty e^{rx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda-r}$ , para  $r < \lambda$ , logo fazendo as substituições temos  $1 + (1 + \theta)\mu r = M_X(r) = \frac{\lambda}{\lambda-r}$  como  $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ , então  $1 + (1 + \theta)\frac{r}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda-r}$  chegamos ao coeficiente de ajustamento R igual à:

$$R = \frac{\theta\lambda}{(1 + \theta)} \quad (3.7)$$

Com a desigualdade de Lundberg podemos ver o quanto o coeficiente de ajuste é útil para dar um limite superior à probabilidade de ruína.

**Teorema 3.3.1.** *Seja  $S(t)$  com distribuição Poisson Composta  $(\lambda t, P(x))$ ,  $P(X \leq 0) = 0$  a desigualdade de Lundberg é dada por*

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru} \quad (3.8)$$

Vamos provar esse teorema. Seja  $\psi_n(u)$  a probabilidade de ruína antes ou na  $n$ -ésima indenização com o capital inicial  $u$ . Como sabemos que  $\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u)$ , então precisamos provar que  $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ , para todo  $u \geq 0$ . Quando

$n = 0$  dado que a empresa possui capital inicial, não há chance de ocorrer ruína, logo  $\psi_0(u) = 0 \leq e^{-Ru}$ . Vamos aos casos mais gerais quando  $n > 0$ .

Sendo  $T$  a variável aleatória que descreve o momento da ruína e  $T_1$  o tempo da primeira indenização. Assim  $\psi_{n+1}(u)$  representa a probabilidade de ruína no tempo  $t$  ou após a primeira indenização, dado um capital inicial igual a  $u$ , pela lei da probabilidade total, temos que:

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty P(T = t, T_1 = t | U(0) = u) + P(t < T < \infty, T_1 = t | U(0) = u) dF_T(t)$$

Sabendo que não houve ruína na primeira indenização podemos começar um novo processo no instante do pagamento da primeira indenização, como se a novo capital inicial fosse de  $u + ct - X_1$ , onde  $X_1$  é o valor da primeira indenização. Como estamos trabalhando com tempos exponenciais temos que,  $F'_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ , então:

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty P(T = t, T_1 = t) \lambda e^{-\lambda t} dt + \int_0^\infty \int_0^{u+ct} \psi_n(u + ct - x) \lambda e^{-\lambda t} dF(x) dt$$

Note que dizer  $P(T = t, T_1 = t)$  é equivalente a  $P(X_1 > u + ct) = 1 - F(u + ct)$ , com isso:

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &= \int_0^\infty (1 - F(u + ct)) \lambda e^{-\lambda t} dt + \int_0^\infty \int_0^{u+ct} \psi_n(u + ct - x) \lambda e^{-\lambda t} dF(x) dt \\ &= \int_0^\infty \int_{u+ct}^\infty dF(x) \lambda e^{-\lambda t} dt + \int_0^\infty \int_0^{u+ct} \psi_n(u + ct - x) \lambda e^{-\lambda t} dF(x) dt \end{aligned}$$

Como sabemos que  $R > 0$  e para haver ruína  $x \geq u + ct$ , logo  $-R(u + ct - x) \geq 0$ , então  $1 = e^0 \leq e^{-R(u+ct-x)}$ , portanto  $\psi_n(u + ct - x) \leq 1 \leq e^{-R(u+ct-x)}$ .

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &\leq \int_0^\infty \left[ \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} dF(x) + \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} dF(x) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} dF(x) \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda e^{-Ru} \int_0^\infty e^{-Rct} \int_0^\infty e^{Rx} dF(x) e^{-\lambda t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda e^{-Ru} \int_0^\infty e^{-t(\lambda+cr)} M_X(R) dt \\
&= \lambda e^{-Ru} M_X(R) \int_0^\infty e^{-t(\lambda+cr)} dt \\
&= \lambda e^{-Ru} M_X(R) \frac{1}{\lambda+cr} \\
&= e^{-Ru} \lambda M_X(R) \frac{1}{\lambda+cr}
\end{aligned}$$

Como sabemos que  $\lambda M_X(R) = \lambda + cr$ , então:

$$\psi_{n+1}(u) \leq e^{-ru}. \tag{3.9}$$

### 3.4 Probabilidade de Ruína

Vamos enunciar o teorema da ruína, porém não vamos prová-lo de maneira geral, apresentaremos o cálculo do valor exato quando as indenizações seguem distribuição exponencial

**Teorema 3.4.1.** *Teorema Fundamental do Risco Kaas (2008)*

Com o modelo de risco apresentado anteriormente, onde  $S(t)$  é um processo de Poisson Composto, com  $c > \lambda u$  e  $u \geq 0$ , temos:

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\mathbb{E}[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]} \quad (3.10)$$

Como dito anteriormente na Seção 3.3, não é sempre que conseguimos chegar a uma expressão fechada para a probabilidade de ruína, pois o cálculo de  $\mathbb{E}[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]$  nem sempre é exato, por isso utilizamos a cota superior de Lundberg 3.8 como o limite para a probabilidade de ruína. No caso em que as indenizações seguem distribuição exponencial esse cálculo tem solução analítica e pode ser verificado.

Considerando um processo de ruína clássico, ou seja,  $U(t) = u + ct - S(t)$ , nesse processo as indenizações seguem uma distribuição exponencial de parâmetro  $\beta > 0$ . Já vimos que o coeficiente de ajustamento  $R$  fica sendo  $R = \frac{\beta\theta}{1+\theta}$ . Lembrando que denominamos  $T$  o momento da ruína, chamaremos de  $U^*$  o momento imediatamente antes de  $T$ , também vamos denotar  $y > 0$  um certo montante.  $-U(T)$  também terá distribuição exponencial com parâmetro  $\beta$  e os acontecimentos  $-U(T) > y$  e  $X > (U^* + y) \mid X$  são equivalentes, ou seja, a indenização que deu origem à ruína é superior ao capital imediatamente antes da ruína, ou seja,  $X > U^*$ . Assim temos:

$$\begin{aligned} P(-U(T) > y \mid T < \infty) &= P(X > U^* + y \mid X > U^*) \\ &= \frac{P(X > U^* + y, X > U^*)}{P(X > U^*)} \\ &= \frac{P(X > U^* + y)}{P(X > U^*)} = \frac{e^{-\beta(U^* + y)}}{e^{-\beta U^*}} \\ &= e^{-\beta y} = P(X > y). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Logo, condicionando a  $\{T < \infty\}$ ,  $-U(T)$  terá distribuição Exponencial de parâmetro  $\beta$  e

a sua função geradora de momentos é dada por  $E[e^{-rU(T)}|T < \infty] = \frac{\beta}{\beta-r}$ ,  $r < \beta$ . Então:

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}|T < \infty]} = \frac{e^{(-\beta\theta\mu/(1+\theta))}}{\frac{\beta}{\beta-R}} = \frac{1}{1+\theta}e^{(-\beta\theta\mu/(1+\theta))} \quad (3.12)$$

Logo temos a fórmula da probabilidade de ruína quando as indenizações seguem distribuição exponencial, igual à:

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{(-\beta\theta\mu/(1+\theta))}. \quad (3.13)$$

Assim temos todo conhecimento teórico e podemos dar início às simulações, as quais veremos no próximo capítulo.

## 4 Aplicações

Neste capítulo iremos apresentar um estudo simulado considerando vários cenários afim de compreender o comportamento da ruína, considerando o modelo clássico de ruína visto na Seção 3.1. Além disso, simulamos dados de seguro de vida a partir do comportamento de uma seguradora baseada no Brasil, com intuito de avaliar a probabilidade de ruína ao longo de 3 anos e verificar o impacto nos anos atuais que ocorreram a pandemia. Dessa forma, com base na análise dos dados, foram definidos distribuições e valores para os parâmetros, para simular um cenário análogo ao ocorrido na seguradora. Todas as análises foram realizadas no software R [Core Team \(2019\)](#).

### 4.1 Estudo Simulado

Nesta seção apresentamos o estudo de cenários simulados para avaliar o cálculo da probabilidade de ruína de uma determinada seguradora. Neste estudo vamos apresentar os resultados obtidos através de simulações feitas em R, que nos retornam a contagem de vezes que a simulação chegou à ruína, com isso dividiremos pelo número de simulações e teremos uma aproximação à probabilidade de ruína, denotada por  $\Psi(u)$ . Para isso, considere os seguintes cenários:

**Cenário 1:** Seja a variável aleatória  $X$  que representa os valores gastos em indenizações. Assumiremos que  $X$  segue uma distribuição Gama de parâmetros  $\alpha = 10$  e  $\beta = 0.01$ , ou seja,  $X \sim Ga(10, 0.01)$ . Além disso, a taxa média de sinistros é dada por  $\lambda = 0.4$  oriunda da distribuição de Poisson, fixando um capital inicial  $u = 800$  e carregamento de segurança  $\theta = 0.3$ . O estudo é replicado 10 mil vezes.

Note que vamos obter  $c = 520$  que é maior que  $\mu\lambda = 400$ , ou seja, o prêmio recebido pela seguradora é maior que o valor esperado do total de indenizações, caso contrário teríamos certeza da ruína. Para este caso específico a simulação resultou em ruína 5760 vezes, ou seja, a probabilidade de ruína  $\Psi(800) = 0.5760$  aproximadamente,

em média a ruína se deu após a 6ª indenização, como podemos ver na Figura 4.1.

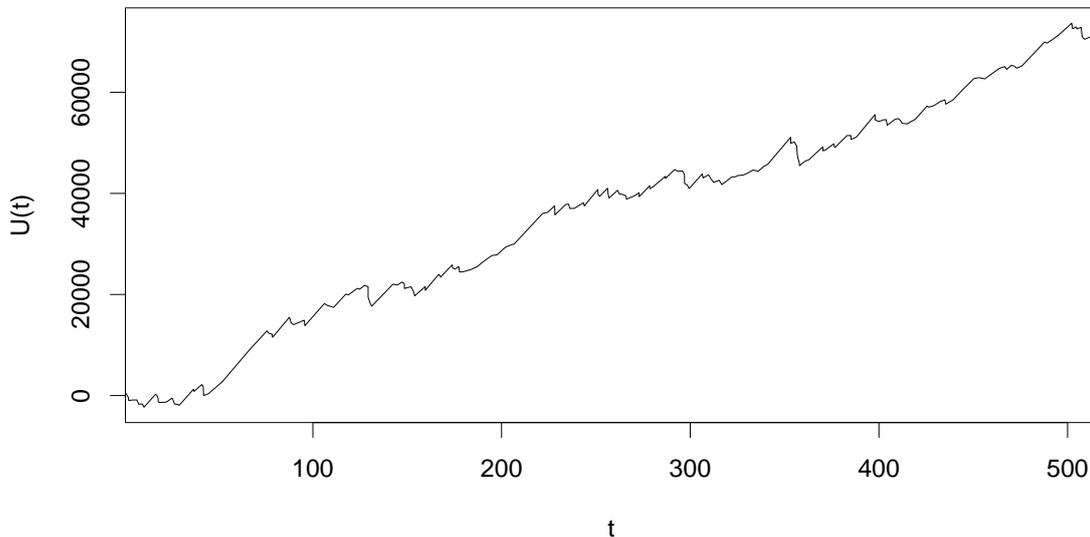


Figura 4.1: Variação de capital da seguradora com o tempo

Considerando ainda o Cenário 1, supondo distribuição Gama para o valor total gasto em indenizações em um período determinado, vamos variar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e a mudança do capital inicial, visando entender na prática como a probabilidade de ruína é afetada. A Tabela 4.1 mostra a probabilidade de ruína em função da mudança do valor do capital no instante inicial. Como podemos ver quanto maior for o capital inicial menor será a probabilidade de chegar à ruína, o que é intuitivo, se temos uma margem maior para operarmos um período no prejuízo sem entrar em falência, menor será a probabilidade de falir.

Tabela 4.1: Variação do capital inicial

$\Psi(100)$	$\Psi(800)$	$\Psi(1500)$
0.746	0.576	0.423

A Tabela 4.2 apresenta a probabilidade de ruína, ao considerar a variação do capital inicial  $u$  e o parâmetro  $\alpha$ . Note que a esperança de uma distribuição Gama é diretamente proporcional ao valor de  $\alpha$ , pois  $E[X] = \frac{\alpha}{\beta}$ . Sendo assim, ao aumentarmos  $\alpha$ , aumentamos o valor das indenizações em média, com indenizações mais caras também é intuitivo pensar que a probabilidade de ruína aumente.

Tabela 4.2: Variação de  $\alpha$  e capital inicial ( $\beta$  fixado em 0.01)

$\alpha \setminus \Psi(u)$	$\Psi(100)$	$\Psi(800)$	$\Psi(1500)$
1	0.617	0.123	0.024
10	0.746	0.576	0.423
100	0.766	0.756	0.736

De forma análoga, considere a variação do parâmetro  $\beta$ , este que influencia a escala da distribuição do valor total gasto em indenizações. Note que  $\beta$  tem uma relação inversa com a esperança da distribuição Gama, esperamos que quanto menor o beta, maior a probabilidade de ruína, mas não só isso a variância do valor das indenizações depende inversamente de  $\beta^2$ , ou seja, quando beta for muito pequeno, a relevância do capital inicial vai reduzindo no cálculo da probabilidade de ruína. A Tabela 4.3 nos mostra esta relação.

Tabela 4.3: Variação de  $\beta$  e capital inicial ( $\alpha$  fixado em 10)

$\beta \setminus \Psi(u)$	$\Psi(100)$	$\Psi(800)$	$\Psi(1500)$
0.1	0.537	0.022	0.001
0.01	0.746	0.576	0.423
0.001	0.769	0.754	0.738

A Tabela 4.4 apresenta o comportamento do carregamento de segurança, que esta diretamente relacionado ao valor do prêmio estipulado pela seguradora. Como já visto na Seção 3.2, quanto maior o carregamento, menor é a probabilidade de ruína, ou seja, aumentando o carregamento de segurança, aumenta o valor do prêmio, tendo um prêmio mais alto entrando para a seguradora, a diferença do valor gasto por ela com as indenizações tende a ser positivo, assim se afastando da ruína.

Tabela 4.4: Variação de  $\theta$  e capital inicial ( $\alpha = 10$  e  $\beta = 0.01$ )

$\theta \setminus \Psi(u)$	$\Psi(100)$	$\Psi(800)$	$\Psi(1500)$
0.0	0.966	0.939	0.900
0.1	0.900	0.807	0.714
0.3	0.746	0.576	0.423
0.6	0.602	0.392	0.227

**Cenário 2:** Seja a variável aleatória  $X$  que representa os valores gastos em indenizações. Assumiremos que  $X$  segue uma distribuição Log-Normal de parâmetros  $\mu_X = 6.86$  e  $\sigma_X = 0.31$ , ou seja,  $X \sim \text{Log} - \text{Normal}(6.86, 0.31)$  (esses valores foram escolhidos para mantermos a mesma média e variância do cenário 1). A taxa média de sinistros continua

oriunda da distribuição de Poisson com  $\lambda = 0.4$ , o capital inicial  $u = 800$  e carregamento de segurança  $\theta = 0.3$ . O estudo é replicado 10 mil vezes.

Como escolhemos manter a média na distribuição referente às indenizações, a taxa de sinistros e o carregamento de segurança, temos que  $c = 520$  e  $\mu\lambda = 400$  igual no cenário anterior. Aqui o resultado da simulação resultou em ruína 5890 vezes, tendo então  $\Psi(800) = 0.5890$ , valor muito próximo ao primeiro cenário, como podemos ver na Figura 4.2.

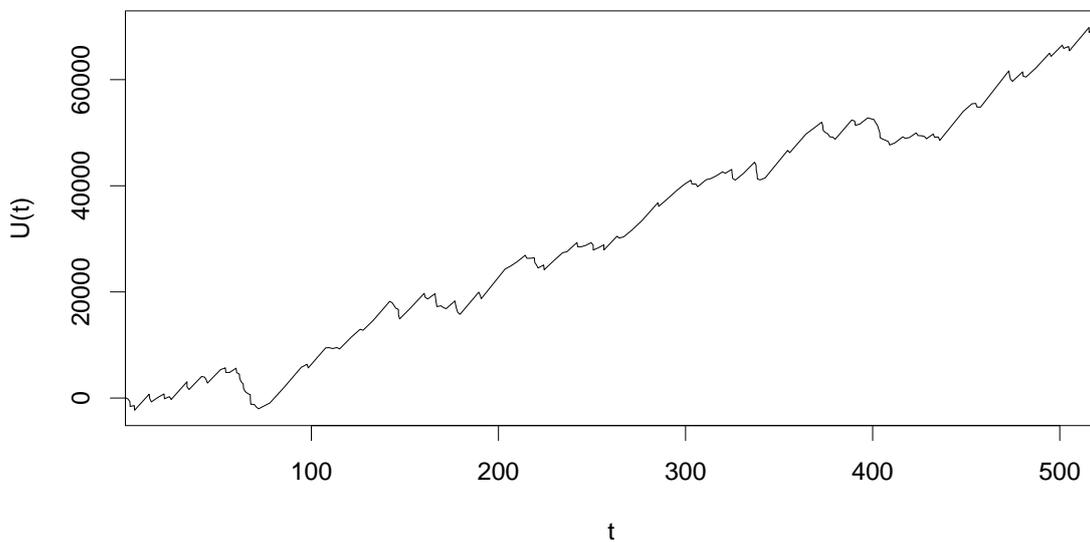


Figura 4.2: Variação de capital da seguradora com o tempo.

Seguindo com a distribuição Log-Normal, iremos variar também os parâmetros da distribuição e o capital inicial. Começando com a variação de capital inicial podemos ver na Tabela 4.5 que quanto maior o capital inicial, menor será a probabilidade de ruína.

Tabela 4.5: Variação do capital inicial

$\Psi(100)$	$\Psi(800)$	$\Psi(1500)$
0.752	0.589	0.422

Veremos a variação de  $\mu_X$  juntamente com a variação de capital inicial, como sabemos que  $\mu_X$  interfere na média das indenizações ( $E[X] = \exp(\mu_X + 0.5\sigma^2)$ ) de forma direta, é esperado que a probabilidade de ruína aumente junto com  $\mu_X$  a Tabela 4.6 nos mostra exatamente o esperado.

Tabela 4.6: Variação de  $\mu_X$  e capital inicial ( $\sigma_X$  fixado em 0.31)

$\mu_X \setminus \Psi(u)$	$\Psi(100)$	$\Psi(800)$	$\Psi(1500)$
4	0.618	0.084	0.009
6.86	0.744	0.589	0.437
10	0.763	0.763	0.765

Podemos também simular a diferença da probabilidade de ruína quando  $\sigma$  é alterado, a Tabela 4.7 nos mostra que o sigma tem uma menor influência sobre probabilidade de ruína em comparação com  $\mu_X$ .

Tabela 4.7: Variação de  $\sigma_X$  e capital inicial ( $\mu_X$  fixado em 6.86)

$\sigma_X \setminus \Psi(u)$	$\Psi(100)$	$\Psi(800)$	$\Psi(1500)$
0.1	0.751	0.559	0.391
0.31	0.752	0.589	0.422
0.6	0.754	0.619	0.507

O carregamento de segurança,  $\theta$ , vai afetar diretamente o prêmio então assim como no Cenário 1 é esperado que quanto maior o carregamento de segurança menor será a probabilidade de ruína, conseguimos observar na Tabela 4.8 exatamente esse efeito.

Tabela 4.8: Variação de  $\theta$  e capital inicial ( $\mu_X = 6.86$  e  $\sigma_X = 0.31$ )

$\theta \setminus \Psi(u)$	$\Psi(100)$	$\Psi(800)$	$\Psi(1500)$
0.0	0.966	0.933	0.903
0.1	0.902	0.806	0.716
0.3	0.747	0.584	0.421
0.6	0.605	0.395	0.231

Comparando os dois cenários quando as distribuições tinham a mesma média e variância conseguimos ver que as probabilidades de ruína ficaram muito próximas para diferentes capitais iniciais e também para diferentes valores de  $\theta$ , o que era esperado devido a comportamentos parecidos de ambas as distribuições. Podemos notar que quando a média das indenizações aumentava, a probabilidade de ruína acompanhava o movimento, no caso da distribuição Gama (cenário 1) ambos os parâmetros tinham uma interferência forte sobre a probabilidade de ruína, pois ambos os parâmetros mudam fortemente a média. No segundo cenário onde temos a distribuição Log-Normal  $\mu_X$  tem um peso maior sobre a média da distribuição quando comparado ao  $\sigma$ .

## 4.2 Análise de dados referentes a seguro de morte

Para este estudo, foi considerado um conjunto de dados com comportamento realístico referente a uma companhia seguradora baseada no Brasil, com objetivo de entender a probabilidade de ruína nos anos 2019, 2020 e 2021, respectivamente. Vale ressaltar que, o ano de 2021 é um ano atípico, visto que a pandemia da COVID-19 deixou mais de 665 mil mortes no Brasil, segundo [Data \(2022\)](#).

Dessa forma, foi tomada uma amostra de dados sobre os sinistros do tipo morte de uma seguradora dos anos de 2019 a 2021 afim de estudarmos o impacto do aumento expressivo da sinistralidade, devido a pandemia na empresa, adicionando um ruído para descaracterização dos dados reais. Embora pudéssemos explorar os dados de 2015 a 2021, foram estudados apenas de 2019 a 2021 pois o comportamento dos anos 2015, 2016, 2017, 2018 e 2019 eram muito parecidos, tendo um aumento mínimo na quantidade de óbitos de 2015 a 2019, que pode ser explicada pelo aumento da quantidade de segurados. Os dados passaram por uma análise para entender seu comportamento e foram utilizadas a quantidade de sinistros em cada período, assim como o valor das indenizações para estruturar o modelo. A análise dos dados está no Apêndice 6.

Dessa forma, os valores pagos em sinistros foram simulados a partir da distribuição de probabilidade Gama, conforme a Figura 4.3 e para quantidade de sinistros, simulamos a partir da distribuição de Poisson.

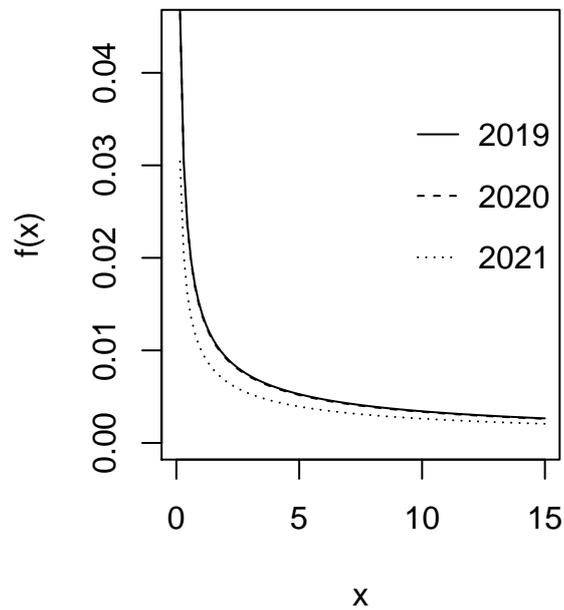


Figura 4.3: Comportamento da distribuição Gama utilizando os dados empíricos

A Figura 4.3 apresenta a distribuição dos valores das indenizações pagas em cada ano e podemos ver que o valor das indenizações não muda muito em 2019 e 2020. Note que, a cauda da distribuição das indenizações pagas em 2021 é mais pesada que pode ser explicada pelo aumento expressivo da quantidade de mortes pela COVID-19 e com isso, temos um cenário para cada ano.

Neste sentido, ao considerar o modelo clássico de ruína, iremos considerar um processo de Poisson para o número de sinistros em cada período avaliado (anos). Para visualização gráfica, mostramos apenas as 125 primeiras observações onde podemos ver uma diferença muito grande na Figura 4.4(c) explicada pelo aumento no valor de  $\lambda$ .

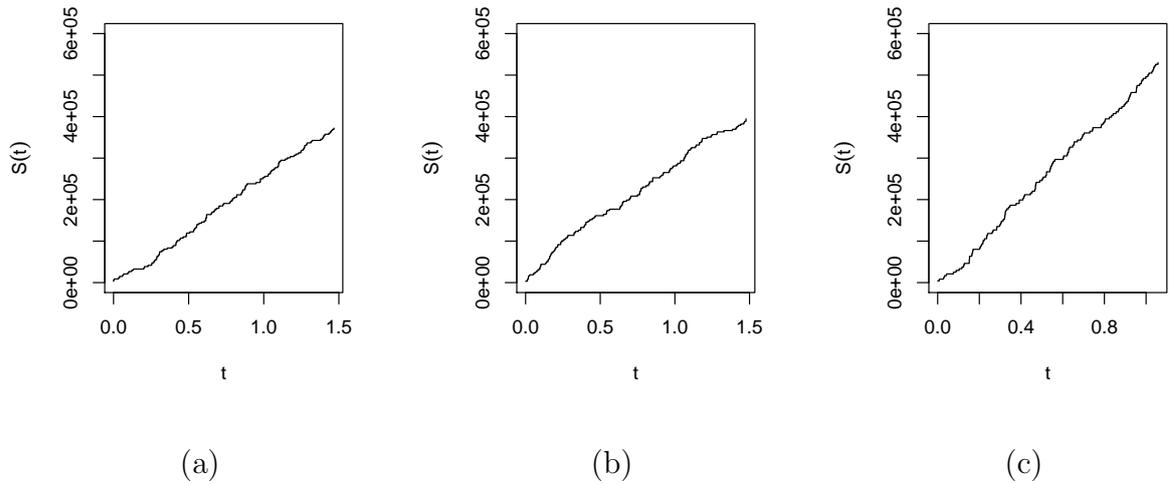


Figura 4.4: Comportamento do Processo de Poisson: (a) 2019 (b) 2020 e (c) 2021.

De acordo com os dados empíricos, no ano de 2019, o valor das indenizações teve  $\mu = 20892$  e  $\sigma^2 = 55344$ . Considerando que as indenizações seguem uma Gama, teremos que  $X_i \sim Ga(7886.75, 0.3775)$ . Além disso, a quantidade de indenizações foi modelada a partir da distribuição Poisson onde  $\lambda \sim Poi(71.22)$  resultando em 25.980 sinistros.

De forma análoga, no ano de 2020 o valor das variáveis encontradas foram  $\mu = 22429$ ,  $\sigma^2 = 59761$ ,  $\lambda \sim Poi(81.30)$  resultando em 29.646 sinistros e  $X_i \sim Ga(8417.77, 0.3753)$ .

No ano de 2021, o valor das variáveis encontradas foram  $\mu = 24417$ ,  $\sigma^2 = 58606$ ,  $\lambda \sim Poi(106.48)$  resultando em 38.678 sinistros e  $X_i \sim Ga(10172.82, 0.4166)$ .

Além disso, para avaliar o impacto da ruína ao longo desses três anos, consideramos um capital inicial  $u = 100000$ . Sendo assim, temos que  $c = \lambda\mu$ , resultando em diferentes prêmios para 2019, 2020 e 2021 que foram  $c = 212.061,55$ ,  $c = 256.849,34$  e  $c = 451.271,34$ , respectivamente.

Definidas as distribuições e valores dos parâmetros, podemos avaliar alguns cenários de acordo com o carregamento de segurança, que é crucial para solvência de uma empresa.

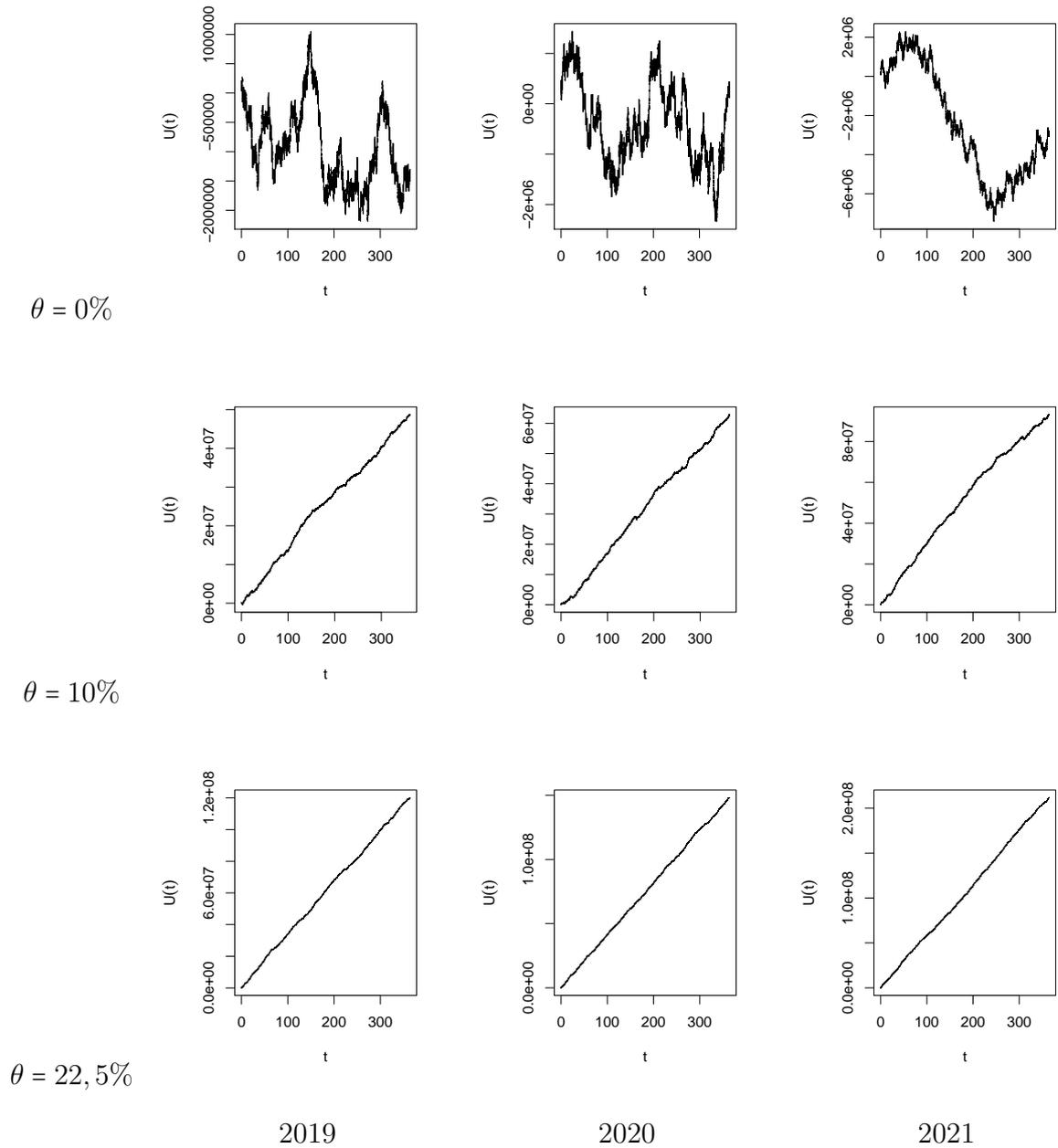


Figura 4.5: Comportamento do Processo de Risco

Conforme Figura 4.5, podemos ver que sem carregamento de segurança, ou seja,  $\theta = 0\%$ , o processo sempre entra em ruína e, inclusive, em 2020 e 2021 a seguradora não se recuperaria. Além disso, temos que com  $\theta = 10\%$ , apesar de termos indenizações ao longo do ano, o processo não entra em ruína em nenhum momento.

Tabela 4.9: Probabilidade de Ruína

$\theta \setminus$ Ano	2019	2020	2021
0%	0,969	0,975	0,976
10%	0,395	0,396	0,414
22.5%	0,139	0,143	0,187

A Tabela 4.9 mostra a probabilidade de ruína de acordo com as suposições do modelo de cada ano e do valor do carregamento de segurança  $\theta$ . Apesar de termos um aumento na quantidade e nos valores das indenizações em 2020 e 2021, podemos ver pela Tabela 4.9 que as probabilidades de ruína para o mesmo valor de carregamento são semelhantes e isso ocorreu devido a mudança do valor do prêmio para cada ano dos anos observados.

Como a SUSEP (2006) define no artigo 8º da circular nº317 que qualquer modificação da apólice que implique ônus ou dever para os segurados deverá ter anuência de pelo menos 3/4 do grupo segurado, alterar o valor do prêmio anualmente, de acordo com a experiência da seguradora, não é algo factível.

Dessa forma, vamos apresentar 3 cenários do processo de risco considerando um valor fixo de prêmio para os anos de 2019, 2020 e 2021.

**Cenário 1:** Considerando o prêmio igual a R\$210.000 e  $\theta = (0\%, 22.5\%)$

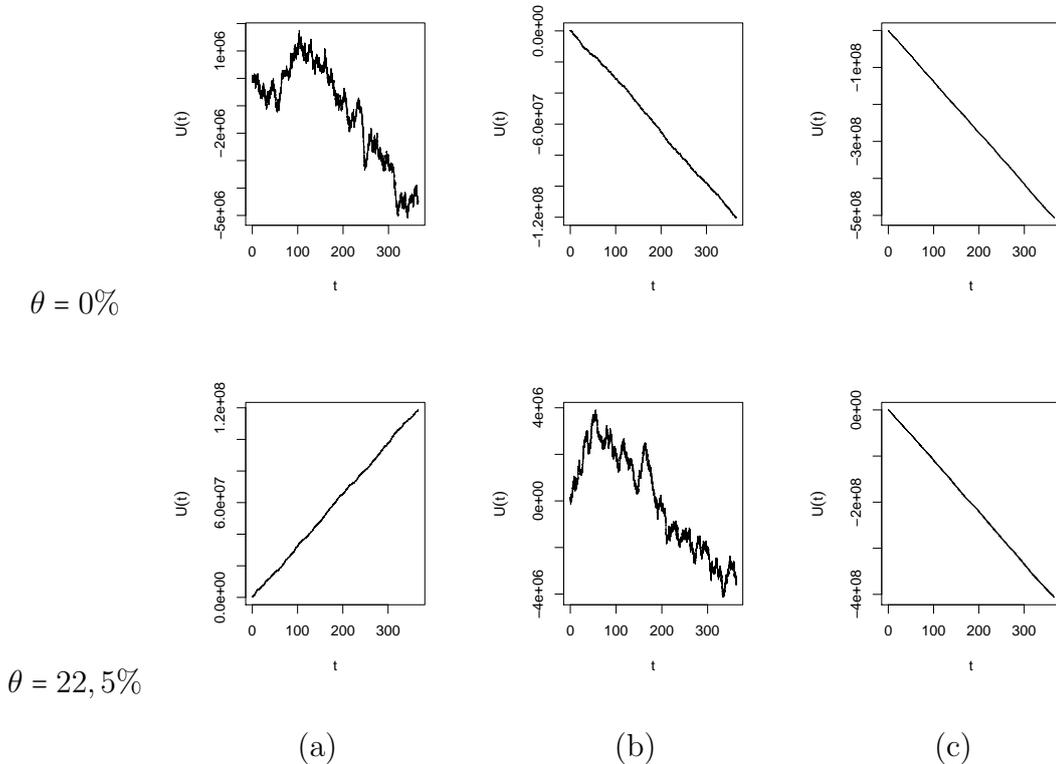


Figura 4.6: Comportamento do Processo de Risco (a) 2019 (b) 2020 e (c) 2021.

De acordo com a Figura 4.6 podemos ver na primeira linha, onde o carregamento de segurança é igual a 0% que, mesmo sem o agravante da COVID-19, o processo vai à

ruína em 2019, mostrando a importância do mesmo.

O valor de prêmio considerado é bem próximo do calculado a partir de  $\lambda\mu$  em 2019 e podemos ver que utilizando esse mesmo prêmio para os outros anos, o cenário muda bastante. Em 2020 podemos ver que apenas com um carregamento de segurança mais alto o processo não vai a ruína e em 2021, onde tivemos um aumento mais expressivo, esse valor de prêmio não suporta as indenizações nem considerando  $\theta = 22,5\%$ .

**Cenário 2:** Considerando o prêmio igual a R\$390.000 e  $\theta = (10\%, 22,5\%)$

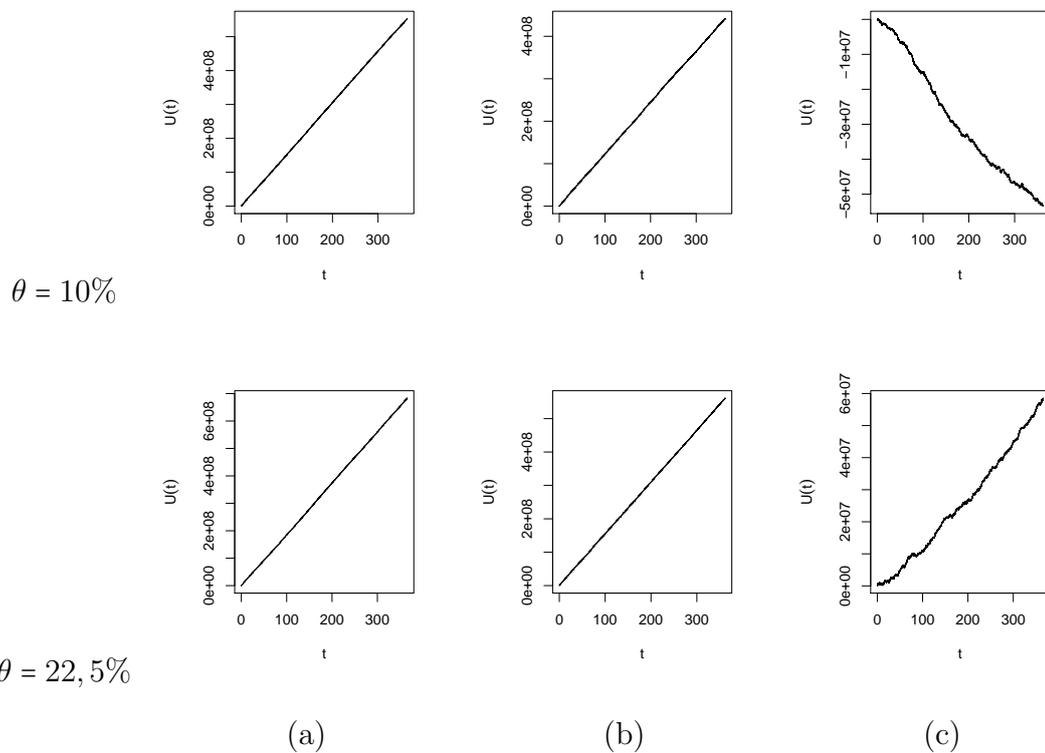


Figura 4.7: Comportamento do Processo de Risco: (a) 2019 (b) 2020 e (c) 2021.

Podemos ver na Figura 4.7 que, esse aumento significativo no valor do prêmio, fez com que a seguradora conseguisse ter um bom resultado até em 2020, quando começou a pandemia o Brasil. Porém, mesmo aumentando o prêmio, ainda é necessário considerarmos  $\theta = 22,5\%$  para conseguir minimizar o impacto do aumento da sinistralidade em 2021 e mesmo assim, ele ainda termina em ruína. Para  $\theta = 10\%$  o cenário era análogo ao de  $\theta = 0\%$  porém, em menor proporção. Entretanto, ao utilizar esse valor de prêmio, em 2019 e 2020, temos uma arrecadação muito superior ao valor das indenizações nos outros anos, mesmo sem carregamento de segurança.

**Cenário 3:** Considerando o prêmio igual a R\$410.000 e  $\theta = (0\%, 10\%)$

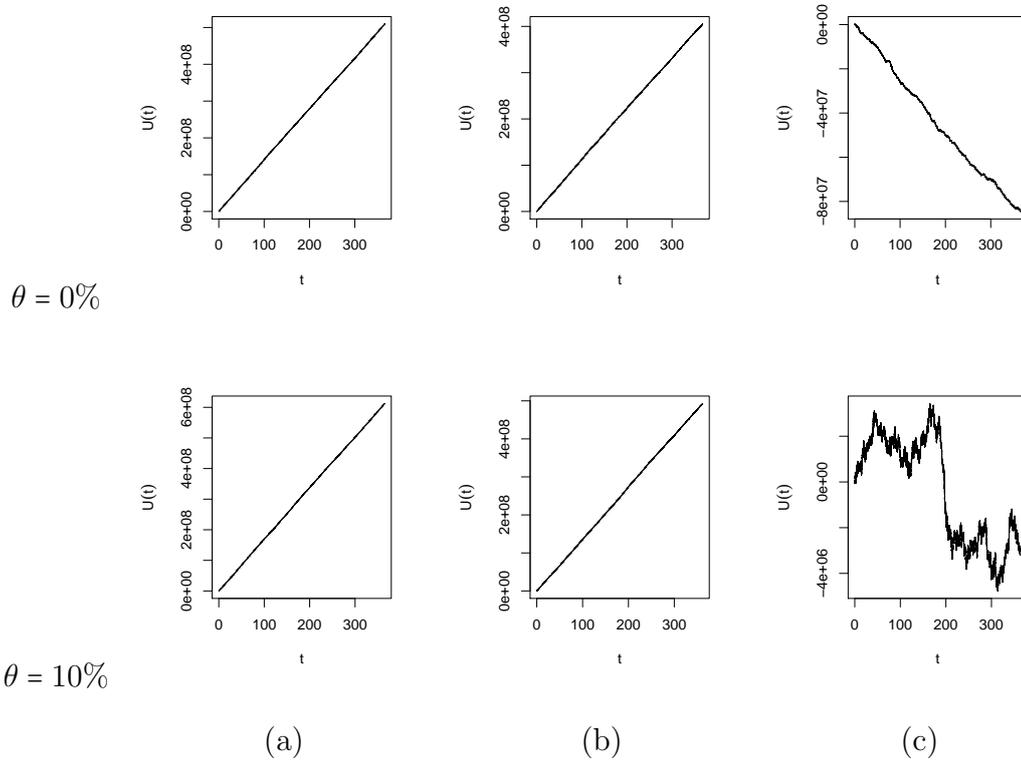


Figura 4.8: Comportamento do Processo de Risco (a) 2019 (b) 2020 e (c) 2021.

Agora, devido o valor alto de prêmio, com  $\theta = 10\%$  o processo não entra em ruína em 2019 e nem 2020. Em 2021 o processo entra em ruína, porém de forma mais controlada.

Analisando sobre os cenários apresentados com os 3 valores de prêmio propostos, podemos ver que definindo um prêmio mais alto e considerando o carregamento de segurança, dificilmente o processo entra em ruína. Porém, ao elevar muito o prêmio, a seguradora não fica competitiva com o mercado. Dessa forma, talvez seja interessante considerar um prêmio um pouco mais agressivo, aplicando um carregamento de segurança razoável, de forma a minimizar o impacto de eventualidades.

Tabela 4.10: Probabilidade de Ruína considerando o prêmio fixo

Prêmio	Ano	0%	10%	22,5%
210,000	2019	1	0.394	0.152
	2020	1	1	0.951
	2021	1	1	1
390,000	2019	0	0	0
	2020	0.046	0.029	0.207
	2021	1	1	0.625
410,000	2019	0	0	0
	2020	0.030	0.023	0.011
	2021	1	0.978	0.402

Para conseguirmos uma melhor visualização, o modelo foi rodado 100 vezes, e obtivemos as probabilidades de ruína na Tabela 4.10, que reforçam as interpretações já mencionadas.

## 5 Conclusões

Neste trabalho foi apresentado o embasamento teórico da probabilidade de ruína. Utilizando o modelo de Cramer-Lundberg pudemos ver que o capital da seguradora no tempo  $t$  depende de fatores como o capital inicial, o prêmio recebido e as indenizações pagas. Quando esse capital é menor que zero dizemos que o processo entrou em ruína. Foi inserido o conceito de carregamento de segurança, cuja função é aumentar o valor do prêmio recebido para mitigar a probabilidade de ida à ruína do processo. Apresentamos e provamos a cota superior da probabilidade de ruína do modelo, enunciamos a probabilidade de ruína e a calculamos para o caso específico onde as indenizações seguem uma distribuição exponencial.

Além disso, foi apresentado um estudo simulado com o objetivo de estudar o comportamento da modelo de ruína considerando diferentes valores para os parâmetros. Depois, foi desenvolvido um estudo de caso utilizando dados de seguro de vida de uma seguradora brasileira para definir os parâmetros e calcular a probabilidade de ruína em diferentes anos. Nesse estudo foram apresentados cenários com diferentes carregamentos de segurança para avaliar a probabilidade de ruína nos anos 2019, 2020 e 2021. Vale ressaltar que nos anos de 2020 e 2021 tivemos um aumento expressivo da sinistralidade devido ao Covid-19. Também foram estudados cenários onde fixamos o valor do prêmio para verificar o comportamento do modelo.

Nesse sentido, outras abordagens podem ser feitas como utilizar a distribuição log-normal para modelar os dados. Ainda estudando a modelagem dos dados, uma alternativa seria segregare os dados de acordo com um valor  $s$  e atribuir diferentes distribuições para os subconjuntos de dados, como estudado por [Charpentier \(2015\)](#).

## 6 Apêndices

As Figuras 6.1 e 6.2 apresentam o comportamento dos dados em termos de indenizações e sinistros. Vale ressaltar que, devido a cauda longa da distribuição dos dados, foram consideradas apenas as indenizações com valor abaixo de 50 mil para melhor visualização gráfica.

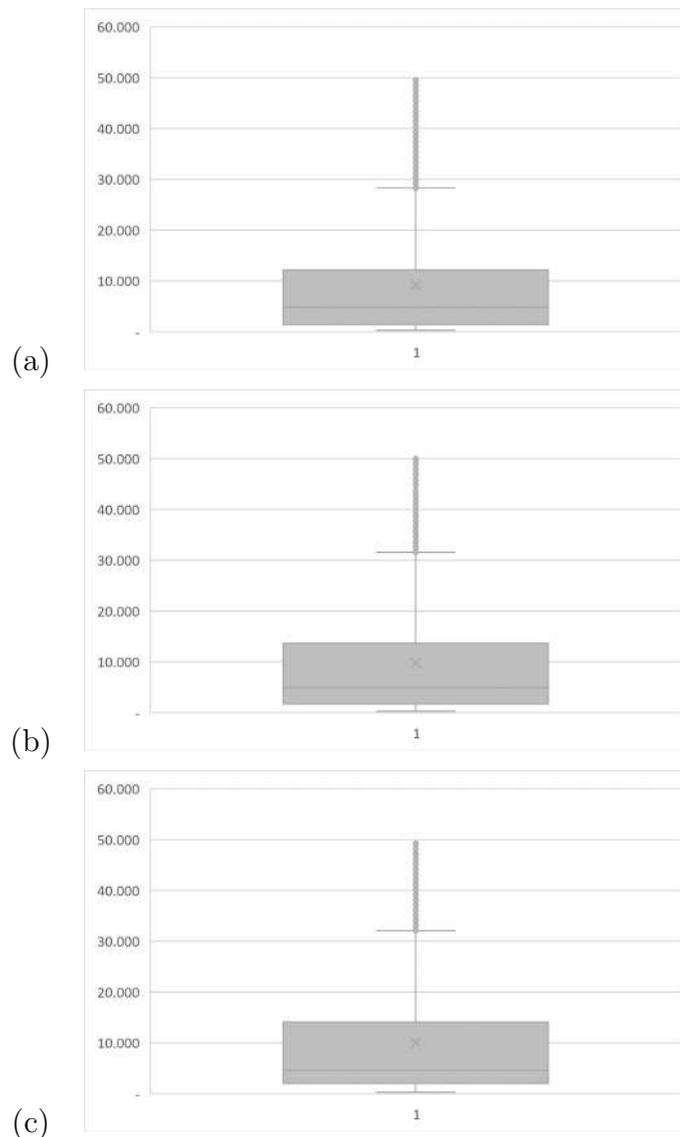


Figura 6.1: Valores de sinistro: (a) 2019 (b) 2020 e (c) 2021.

Na Figura 6.1 acima, temos os box-plot dos dados referentes as indenizações dos anos 2019, 2020 e 2021, respectivamente. Pode-se esperar que ao gerarmos a Gama de cada ano, tenhamos uma cauda mais pesada em 2020 e 2021 devido ao aumento da

quantidade de outliers no gráfico.

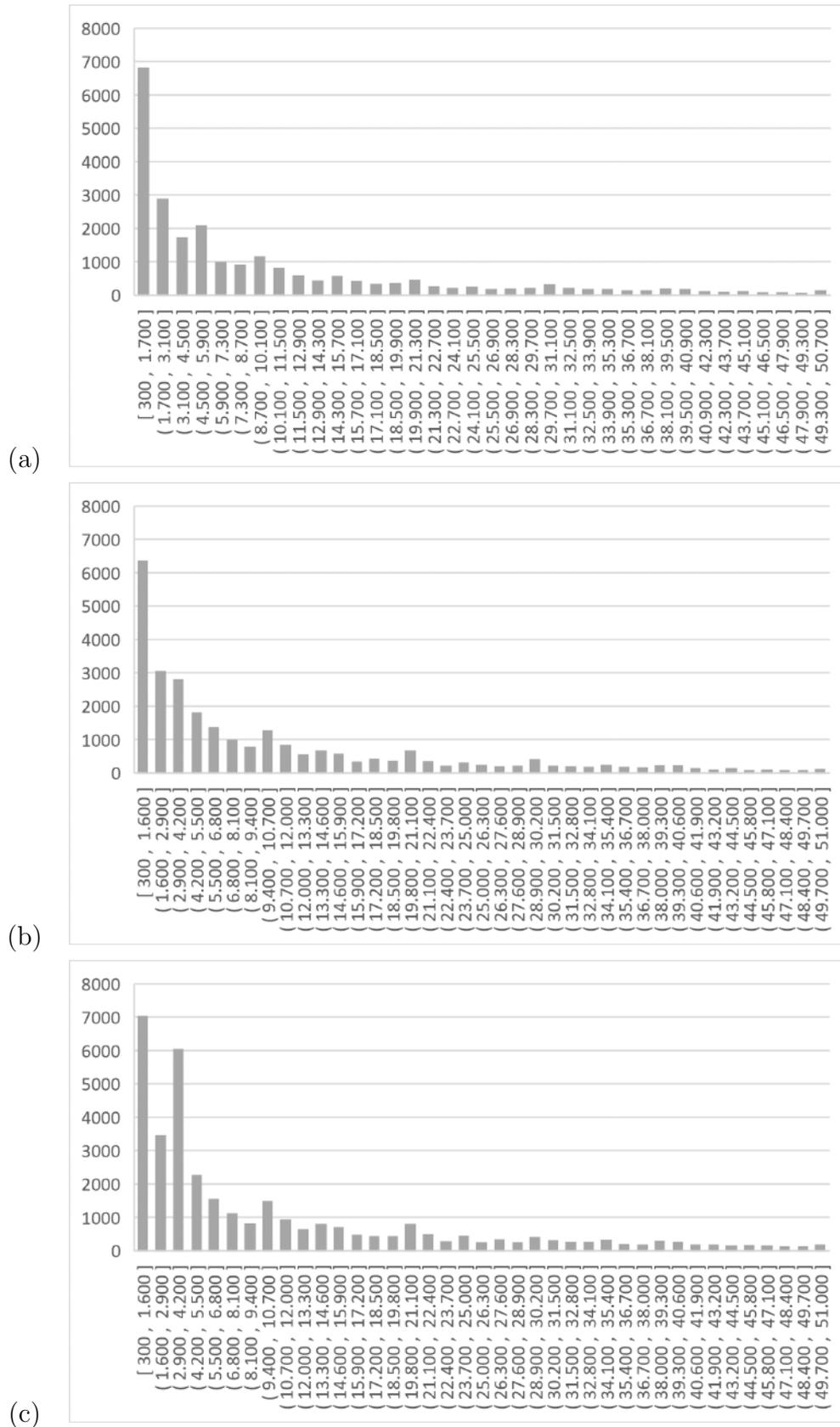


Figura 6.2: Frequências dos valores de sinistro: (a) 2019 (b) 2020 e (c) 2021.

A Figura 6.2 acima mostra a frequência das indenizações de cada grupo de valores

e podemos ver novamente, que a cauda fica mais pesada em 2020 e 2021, tendo uma quantidade maior de indenizações de valores mais altos. Dessa forma, para avaliar a probabilidade de ruína ao longo dos anos de interesse, considerou-se gerar dados a partir da média e desvio padrão empírico dos dados da empresa seguradora, referentes ao total de sinistro pago e a quantidade de sinistros ocorridos nos anos de estudo.

## Bibliografia

- Charpentier, A. (2015) *Computational Actuarial Science with R*. R. Chapman Hall/CRC.
- CNSeg (2021) matéria da cnseg. URL <https://cnseg.org.br/noticias/consumidor-pos-covid-impoe-desafios-ao-mercado-segurador.html>. Acesso em 12/06/2022.
- Core Team, R. (2019) *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- CQCS (2018) matéria da cqcs. URL <https://www.cqcs.com.br/noticia/pesquisa-revela-falta-de-cultura-do-seguro-no-pais/>. Acesso em 21/11/2021.
- Data, J. C. C.-. (2022) Estatística coronavírus (covid-19). URL [https://www.google.com/search?q=morte+covid+brasil&rlz=1C1GCEB\\_enBR888BR888&oq=morte+covid+brasil&aqs=chrome..69i57j0i512l3j0i10i131i433j0i512j0i10i433j0i10i131i433j0i10i12.4512j0j7&/sourceid=chrome&ie=UTF-8](https://www.google.com/search?q=morte+covid+brasil&rlz=1C1GCEB_enBR888BR888&oq=morte+covid+brasil&aqs=chrome..69i57j0i512l3j0i10i131i433j0i512j0i10i433j0i10i131i433j0i10i12.4512j0j7&/sourceid=chrome&ie=UTF-8). Acesso em 05/02/2022.
- DeGroot, M. H. e Schervish, M. J. (2012) *Probability and Statistics*. Pearson Education.
- Dickson, D. C. M. (2005) *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge University Press.
- Dickson, D. C. M. e Waters, H. R. (1996) Ruin problems: Simulation or calculation? *Cambridge University Press on behalf of Institute and Faculty of Actuaries*, 727–740.
- d’Oliveira, N. V. L. C. (2005) *Mercados de Seguros: Solvência, Riscos e Eficácia Regulatória*. Tese de Doutorado, Economia, UFRJ.
- França, F. M. (2017) *Teoria da ruína: Um estudo de caso na saúde suplementar de Sergipe*.
- Kaas, Marc Goovaerts, J. D. M. D. (2008) *Modern Actuarial Risk Theory*. Springer.
- OMS (2020) Who director-general’s opening remarks at the media briefing on covid-19. URL <https://www.who.int/director-general/speeches/detail/who-director-general-s-opening-remarks-at-the-media-briefing-on-covid-19---11-ma>. Acesso em 29/10/2021.
- Paulo Pereira Ferreira, C. M. C. A. M. (2009) *Aspectos atuariais e contábeis das provisões técnicas*. Escola Nacional de Seguros.
- Piroutek, A. M. (2009) *Probabilidade de Ruína com eventos espaciais*.
- Ramlau-Hansen, H. (1988) Hattendorff’s theorem: A markov chain and counting process approach. *Scandinavian Actuarial Journal*, 143–156.
- Ross, S. M. (1996) *Stochastic Processes*. John Wiley Sons, Inc.

dos Santos, P. H. G. H. (2020) *Precificação de seguro para catástrofes aéreas via simulação de Monte Carlo*.

Stéphane Loisel, H.-U. G. (2012) why ruin theory should be of interest for insurance practitioners and risk managers nowadays. *Actuarial and Financial Mathematics*, 17–21.

SUSEP (2006) Circular susep 317/2006. URL <http://www.susep.gov.br/menu/textos/circ317.pdf>. Acesso em 18/01/2022.