UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

UFRJ

INSTITUTO DE FÍSICA
LICENCIATURA EM FÍSICA

PROJETO DE INSTRUMENTAÇÃO PARA O ENSINO DE FÍSICA

UMA AULA ALTERNATIVA SOBRE A CINEMATICA DO PLANO INCLINADO

Luciana Sá Brito

Orientador: Prof. Vitorvani Soares

2008/1

Ficha catalográfica

Brito, Luciana Sá

Uma aula sobre a cinemática do plano inclinado, Luciana Sá Brito — Rio de Janeiro: Projeto de Instrumentação para o Ensino de Física — Instituto de Física/UFRJ, 2008.

1. Cinemática. 2. Ciência – Ensino Médio. 3. Teorema da velocidade média.

4. Oresme.

I. Título

Muito obrigada

Agradeço a Deus pela natureza sem a qual tudo isso não faria o menor sentido. Agradeço aos meus pais pelo estímulo e pelo esforço para que eu concretizasse os meus sonhos e também por terem sido meu maior exemplo na busca do conhecimento. Agradeço meu marido por ter sido meu fiel companheiro e amigo inseparável nesta experiência e porque ficou quase tão ansioso quanto eu esperando o resultado do trabalho. Agradeço ao meu querido orientador, o professor Vitorvani Soares, pelas lições não só de física como de vida, pela paciência e pelo ombro amigo nos momentos de dificuldade

Agradeço a Gustavo Martins e a Taís Pereira pelo empréstimo de livros e pela amizade. Agradeço a minha irmã Izabela Alzheimer por acreditar em mim incondicionalmente e mesmo estando no outro extremo do continente fazer toda a diferença em minha vida. Agradeço aos amigos Tarsila e Tarso Lima de Souza e Luisa Bauster por sua juventude e criatividade e também por que me ensinaram tantas lições práticas a respeito da necessidade de se buscar alternativas ao ensino convencional

Finalmente, agradeço aos professores Penha Maria Cardoso Dias, Alexandre Carlos Tort e Filadelfo Cardoso Santos, membros da banca examinadora, pela leitura do trabalho e por terem contribuído de forma exemplar para minha formação acadêmica: toda gratidão não bastaria para retribuir a dedicação que tiveram comigo durante toda a graduação.

Dedico esta monografia ao meu querido marido Wagner Azevedo, como presente pelo nosso primeiro ano de casamento.

"Oculi omnium in te respiciunt, Domine. Tu das escam illis tempore opportuno. Aperis manum tuam, et imples omne animal benedictione tua. Benedicas nobis, Deus, omnibus donis quae de tua beneficentia accepturi simus. Per Iesum Christum dominum nostrum, Amen". [1]

"Em Ti esperam os olhos de todos, e Tu, a seu tempo, lhes dás o alimento. Abres a mão e satisfazes de benevolência a todo vivente. Então, abençoa-nos, oh Senhor, com todas as graças que estamos por receber de Tuas tão bondosas mãos. Por Jesus Cristo nosso Senhor, amém". [2]

Resumo

Neste trabalho, desenvolvemos uma aula para o Ensino Médio sobre o movimento uniformemente acelerado, onde esperamos que o estudante compreenda o significado físico da equação horária da posição de um móvel em um movimento retilíneo uniformemente variado, através da introdução de aspectos históricos do desenvolvimento da cinemática relacionados ao trabalho de Nicole Oresme. Entre esses aspectos destacamos a aplicação de gráficos para examinar relações entre duas variáveis físicas e a criação do teorema da velocidade média.

Para tanto, utilizamos um conjunto de dados da posição com respeito ao tempo de um móvel que se desloca ao longo de um trilho de ar inclinado. Relacionamos esses dados com a física de Oresme, um dos principais responsáveis pelo estudo e avanço da cinemática da Idade Média, e a partir desse diálogo entre as necessidades educacionais de hoje e algumas contribuições do século XIV, propomos uma forma alternativa de abordagem da cinemática do movimento.

Nosso objetivo, além de desenvolvermos a habilidade do estudante em lidar com gráficos e sua interpretação, é encontrar a função horária da posição para o movimento do móvel. Queremos, com isto, esclarecer as propriedades cinemáticas dos corpos em movimento, através de um estudo que guarde em si o teor da demonstração do teorema da velocidade média e do que ele significou para o desenvolvimento da cinemática.

Fazendo um paralelo com a matemática, comparamos a função horária do movimento com a equação da parábola e descobrimos que a aceleração do móvel corresponde ao inverso do dobro do valor do foco da parábola que descreve o seu movimento. Para tal, abordamos o método de construção da parábola inventado na antiguidade grega, como também a demonstração da sua equação algébrica correspondente, só realizada vários séculos mais tarde.

ÍNDICE

1. Introdução

A partir de um conjunto de dados de posição em relação ao tempo fornecidos por uma experiência com um móvel que se desloca sobre um trilho de ar inclinado, resolvemos propor (para estudantes do Ensino Médio) uma forma diferente da tradicional para a abordagem do movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV).

Buscamos na história da física e da matemática os elementos motivadores para a nossa proposta, mais especificamente no trabalho de Nicole Oresme, que durante um período da Idade Média ofereceu grandes contribuições à ciência do movimento.

Como podemos demonstrar aos nossos alunos a função horária

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 , \tag{1}$$

que representa o movimento retilíneo uniformemente variado? Pode ser fácil oferecermos resposta a esse questionamento se nós e nossos alunos conhecemos as regras de derivação e integração. Entretanto se precisamos mostrar isso a um estudante que não possui formação em cálculo, necessitamos de um outro meio para explicação. É exatamente isto que buscamos com este trabalho.

A nossa proposta didática é relacionar as descobertas de Oresme no campo da cinemática aos dados do nosso experimento com um trilho de ar e, de uma forma lúdica, fornecer um método alternativo para a determinação da equação horária do movimento, livrando o estudante da imposição de uma equação sem a explicação do seu significado físico, e mostrando uma nova possibilidade de compreensão do movimento. Esta abordagem é sugerida nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino de Física.

O trabalho foi construído dentro das seguintes etapas:

1. Com o auxílio de um trilho de ar, tomada de dados da posição *s(cm)* de um móvel em função do tempo *t(s)*[1];
2. Transformação desses dados em gráficos;
3. Análise dos gráficos dentro da perspectiva histórica proposta;
4. Demonstração da equação da parábola;
5. Comparação dos resultados da análise gráfica da posição *s* em função do tempo *t* com a equação da parábola.

Um ponto que acreditamos ser de fundamental relevância para esta aula é a apresentação da demonstração geométrica da equação da parábola, porque ela resgata o valor histórico de sua criação e também porque é fundamental para a compreensão de grandezas físicas em geral

[1] Esta etapa não é fundamental para a realização do trabalho, uma vez que poderíamos utilizar dados coletados por um outro experimentador. Realizamos essa etapa com o objetivo de saber como os dados poderiam ser obtidos para a construção deste projeto.

que mantêm dependência quadrática entre si, como por exemplo: a posição com o tempo no movimento uniformemente acelerado e a velocidadecom a posição no lançamento de projéteis.

A construção geométrica da parábola foi feita por Apolônio, que viveu no século III antes de cristo e foi um dos seguidores da geometria euclidiana[2]. Esta construção também não é muito trabalhada no Ensino Médio, apesar da representação algébrica da equação quadrática, ser muito utilizada tanto na própria matemática, no estudo das funções polinomiais de segundo grau e no estudo das cônicas, quanto na física escolar, como já foi comentado anteriormente. Para nós, essa colaboração interdisciplinar pode oferecer um excelente resultado de compreensão da linguagem matemática, principal forma de expressão da natureza que nos cerca.

Para uma descrição detalhada do trabalho, organizamos o texto da seguinte maneira: Inicialmente, no Capítulo 2, descrevemos os aspectos didáticos que o motivaram. No Capítulo 3, sem a pretensão de fazer a história, apresentamos o conceito de movimento e da sua descrição. Em seguida, no Capítulo 4, determinamos a função horária do movimento de um móvel em movimento retilíneo uniformemente variado. Terminamos esta monografia com nossas conclusões nas considerações finais.

[2] Euclides viveu em Alexandria na primeira metade do século III a.C.

2. Aspectos didáticos

Como ensinar a física, a matemática e a tecnologia?

O primeiro questionamento que surge quando desenvolvemos um trabalho voltado para educação deve ser quanto à existência da necessidade do estudante de compreender o conteúdo abordado e qual é a utilidade real desse conhecimento para sua prática de vida. Sabemos que o ensino atual tem se voltado muito mais para os exames vestibulares que propriamente para o desenvolvimento das habilidades e competências necessárias para o indivíduo se tornar um ser atuante em sua comunidade e criterioso nas suas escolhas pessoais e em sociedade. Sabemos também que entre as conseqüências disso decorre a "matematização" da física sem o necessário diálogo com a realidade natural.

O reflexo do rumo inapropriado da educação nos níveis fundamental e médio no Brasil vê-se claramente na falta de interesse da grande maioria dos estudantes pela ciência e na incapacidade de resolução de questionamentos do cotidiano. Certamente há muitos profissionais da área educacional engajados na tarefa de promover um ensino que seja crítico, útil e que cumpra o papel de promover a cidadania. Porém, de fato, não trabalhamos dentro de uma conjuntura política que proporcione essa evolução no ensino, uma vez que as escolas públicas continuam funcionando com verbas muito inferiores às suas necessidades (quando não estão de portas fechadas) e a educação ainda não é, de fato, um direito de todos os cidadãos, como deveria ser constitucionalmente [3], e como consta do Estatuto da Criança e do Adolescente [4].

No Relatório da Associação Americana para o Avanço da Ciência[3], organizado por F. James Rutherford e Andrew Ahlgrem no livro "Ciência para Todos" [54], há o esboço do que a comunidade científica americana de 1989 acreditou que devia constituir a instrução em ciência, matemática e tecnologia naquele país:

> *A ciência, a matemática e a tecnologia não criam a curiosidade. Aceitam-na, estimulam-na, incorporam-na e disciplinam-na — e o mesmo deve fazer um bom ensino da ciência. Assim, os professores de ciência devem encorajar os estudantes a levantar questões acerca do material em estudo, sugerir-lhes modos produtivos de encontrar respostas e recompensar aqueles que levantam e depois tentam investigar questões fora do comum, mas relevantes. Numa aula de ciências o questionamento deveria ser tão valorizado quanto os conhecimentos. ([5], p. 228)*

Paulo Freire, em seu livro "Pedagogia do Oprimido" [6, 7], volta o olhar do educador[4] para a problemática de uma cultura tecida com a trama das classes dominantes, onde por mais generosos que sejam os propósitos de seus educadores, é barreira cerrada às possibilidades educacionais dos que se situam nas subculturas dos proletários e marginais. Nesse sentido, aponta como forma de aproximação cultural das camadas populares aos objetivos reais da

---

[3] 1333 H St. N. W., Washington, D.C. 20005.

[4] Paulo Freire chama de educador-educando, devido à relação dialógica entre professor e aluno necessária para uma educação eficaz dentro das dificuldades encontradas no ensino das sociedades periféricas. Ou seja, como ele mesmo explica em seu livro "Pedagogia da Autonomia" ([7], p. 25): "Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender".

educação, a busca de um conteúdo programático que reflita uma relação dialógica[5] com o educador-educando.

> *Para o educador-educando, dialógico, problematizador, o conteúdo programático da educação não é uma doação ou uma imposição — um conjunto de informes a ser depositado nos educandos — mas a devolução organizada, sistematizada e acrescentada ao povo daqueles elementos que este lhe entregou de forma desestruturada. ([6] p. 228)*

Podemos ver que essas duas visões, embora provenientes de distintos meios sociais no final da década de 80, continuam atuais no universo educacional contemporâneo e convergem muito no que diz respeito à adequação dos conteúdos programáticos às necessidades cotidianas e à linguagem cultural do estudante. Segundo Moacir Gadotti [8], a atualidade desse pensamento decorre não apenas de sua validade universal, mas do fato de que o contexto histórico de hoje não é radicalmente diferente daquele no qual Paulo Freire desenvolveu suas idéias.

Justificativa para apresentação deste trabalho

Uma forma de expressão das necessidades do nosso ensino contemporâneo culminou na elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) [9], definindo novas perspectivas para o ensino de física no nosso país. Os PCNEM definem competências e habilidades a serem desenvolvidas em física e, a partir desse documento de fundamental importância no cenário educacional do nosso tempo é que estaremos determinando as bases de apoio para a proposta de ensino apresentada neste trabalho.

Apresentamos nesta proposta um trabalho de integração entre a física experimental, a matemática e as histórias da física e da matemática. Esta fórmula interdisciplinar, já bastante utilizada no ensino de física, tem se mostrado um instrumento eficaz na busca de um melhor processo de ensino-aprendizado.[6]

A utilização de experiências mostra ao estudante o lado pragmático da ciência, através de sua interação direta com o objeto estudado que, no caso, é o movimento. Segundo os PCNEM, o estudante deve ser capaz de "utilizar e compreender tabelas, gráficos e relações matemáticas gráficas para expressão do saber físico e também ser capaz de discriminar e traduzir as linguagens matemática e discursiva entre si" [9]. Um dos desdobramentos da utilização do plano inclinado, na figura do trilho de ar, é a coleta de um conjunto de dados que devem ser explorados para a compreensão do seu significado. Além disso, em uma representação gráfica, o estudante necessariamente desenvolve habilidade em lidar com ordens de grandeza, unidades

---

[5] A relação dialógica a qual Paulo Freire se refere seria uma relação onde o aluno e o professor apontam quais as necessidades curriculares segundo seus pontos de vista, possivelmente distintos e, a partir daí, haja uma ponderação, feita democraticamente e por ambas as partes, a respeito do que deve ser abordado em sala de aula.

[6] Bons exemplos de textos de física para o Ensino Médio, que abordam o conteúdo segundo uma perspectiva interdisciplinar são os que foram elaborados pelo GREF (Grupo de Reelaboração do Ensino de Física) e pelo grupo que esteve à frente do Harvard Project Physics.

de medida e relações geométricas resultantes de correspondências entre os elementos de cada conjunto envolvido.

Ao descrever um evento físico através de um gráfico, podemos reconhecer padrões e comportamentos que, em uma tabela, são difíceis de visualizar. Os gráficos resumem uma quantidade de informações que podem ser mais facilmente percebidas. Talvez a razão mais importante para investirmos na habilidade dos estudantes em interpretar gráficos de cinemática seja o seu vasto uso como ferramenta de ensino; D. A Agrello e Reva Garg ressaltam a importância de que o estudante trabalhe confortavelmente com os gráficos de cinemática, uma vez que "os gráficos são um eficiente pacote de dados e um objeto que nos permite relacionar grandezas, eles são usados quase como uma segunda linguagem" [10].

A integração da física com a matemática nos permite levar à compreensão geométrica e algébrica da equação da parábola, resgatando o seu valor histórico e estético para a compreensão dos gráficos de posição em função do tempo, em um movimento uniformemente acelerado. Esse conhecimento permite que o estudante se "expresse corretamente utilizando a linguagem física adequada, [empregando os] elementos de sua representação simbólica e apresentando de forma clara e objetiva o conhecimento aprendido, através dessa linguagem" [9].

Finalmente, as histórias da física e da matemática nos trazem o arcabouço social e evolutivo do qual não se pode abrir mão no ato de ensinar: não somente por causa de sua importância para os fundamentos da ciência, mas porque apresentam formulações que continuam atuais para a física e o seu ensino, além de aguçarem o poder de crítica do estudante. "Reconhecer a física enquanto construção humana, aspectos de sua história e relações com o contexto cultural, social e econômico" [9], parece cada vez mais proporcionar uma visão de conjunto ao estudante, atuando como fator de promoção de cidadania, que se desenvolve no contexto escolar, mas ultrapassa seus muros e alcança a vida cotidiana. A história da física atua no ensino proporcionando também a introdução gradual do vocabulário científico correto, a partir da própria evolução do conhecimento que vai tomando forma na estrutura cognitiva do estudante.

Fazendo um paralelo do reconhecimento das nossas intenções no texto dos PCNEM com o estudo que Gerald Holton apresenta no primeiro capítulo de seu livro "A Imaginação Científica" [11], podemos resumir que a formação da imaginação científica no contexto escolar depende principalmente de três fatores: deve unir o processo de investigação, a linguagem científica e o ambiente de formação das teorias.

3. Um pouco sobre a evolução da cinemática.

A concepção Aristotélica do movimento

A cinemática teve seu ponto de partida no Merton College da Universidade de Oxford e na Universidade de Paris com a prova do teorema da velocidade média por alguns dos que vieram a ser os mais importantes acadêmicos dessas instituições[7]. Esse teorema veio a ser a chave para que Galileu chegasse à resolução do problema da queda dos corpos, resolução esta que também foi chave para a física newtoniana na elaboração da lei de ação gravitacional. Vendo desta forma, pode parecer que a física se desenvolveu de forma linear e concatenada, mas veremos a seguir que vários outros filósofos e cientistas participaram desse processo que se iniciou bem antes da chamada Revolução Científica, começando antes mesmo do início da era cristã. Vamos percorrer a teia contextual das principais contribuições para a compreensão do movimento dos corpos na natureza.

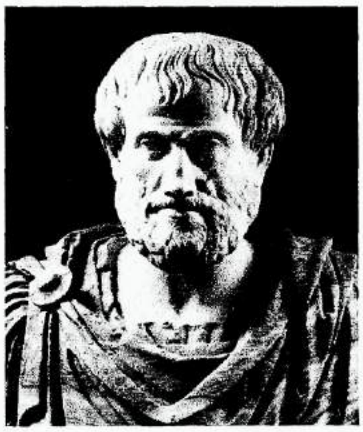

Figura 1. Aristóteles (384 a. C. – 322 a. C.), filósofo grego, discípulo de Platão e tutor de Alexandre, o Grande. Busto romano em mármore, do século II a. C., cópia de um original grego de cerca de 325 a. C. Este busto encontra-se no Museo Nazionale Romano, em Roma. [12]

O primeiro esforço para compreender o movimento foi feito na Grécia antiga pelo filósofo Aristóteles (384-322 a. C.), discípulo de Platão (428 ou 427 a. C. - 348 ou 347 a. C.). Até esse momento da história do pensamento científico ninguém havia elaborado um nome para as transformações, que foram chamadas de "movimento". Aristóteles criou categorias para o que denominou movimento local, sendo então o movimento chamado de natural ou movimento violento, ambos diferentes do movimento celeste [13].

Aristóteles afirmou que o movimento natural decorre da natureza de um objeto, dependendo de qual combinação dos quatro elementos, terra, água, ar e fogo, ele fosse feito. Para ele, cada objeto no universo tinha seu lugar apropriado, determinado pela sua natureza;

qualquer objeto que não estivesse em seu lugar apropriado "se esforçaria" para alcançá-lo. Por ser de terra, um pedaço de barro que não estivesse devidamente apoiado, cairia no chão; por ser de ar, uma baforada de fumaça subiria; sendo uma mistura de terra e ar, mas propriamente terra, uma pena cairia ao chão, mas não tão rápido quanto um pedaço de barro[8]. Ele afirmava que um objeto mais pesado deveria atuar com mais intensidade no seu movimento. Desta forma, Aristóteles argumentava que os objetos deveriam cair com rapidez proporcional a seus pesos: quanto mais pesado fosse o objeto, mais rápido ele deveria cair.

Figura 2. Representação do universo aristotélico. Abaixo da Lua, os movimentos deixam de ser circulares e acima da esfera das estrelas fixas se encontra a morada divina. Gravura da Cosmografia de Peter Apian (1524) [14].

O movimento natural poderia ser diretamente para cima ou para baixo, no caso de todas as coisas na Terra (região sublunar) ou poderia ser circular, no caso de objetos celestes (região supra-lunar). Ao contrário do movimento para cima e para baixo, o movimento circular não possuía começo ou fim, repetindo-se sem desvio de sua trajetória.

Aristóteles acreditava que leis diferentes das da Terra se aplicavam aos céus e afirmava que corpos celestes eram esferas perfeitas, formadas por uma substância perfeita e imutável que ele chamou de quintessência. O único objeto celeste com alguma alteração detectável em sua superfície era a Lua. Através dos ensinamentos da escolástica[9], principalmente pela introdução da filosofia aristotélica nos estudos eclesiásticos feita por São Tomás de Aquino, os

---

[7] A Universidade de Oxford foi fundada por volta do ano de 1260 e a Universidade de Paris entre 1150 e 1170 debaixo da autoridade episcopal e dedicada em especial ao estudo da lógica.
[8] Objetos compostos de misturas de elementos se comportariam a maneira do elemento predominante segundo a sua teoria do movimento.
[9] A escolástica foi o movimento iniciado por Tomás de Aquino de apropriação das concepções da filosofia aristotélica pelos estudiosos que pertenciam à igreja católica medieval.

cristãos medievais explicavam as crateras lunares, dizendo que a Lua era um pouco contaminada pela Terra, dada sua proximidade desta. Ioav Ben Dov [15] reflete acerca da apropriação medieval da separação entre o movimento celeste e o movimento terrestre como um reflexo da hierarquia social da época, onde a Igreja ocupava posição de destaque e autoridade inquestionável acima de qualquer outra instituição.

O movimento violento segundo Aristóteles, resultava de forças que puxavam ou empurravam. O movimento violento era o movimento imposto. Uma pessoa empurrando um carro de mão ou sustentando um objeto pesado impunha movimento, assim como faz alguém que atira uma pedra ou vence um cabo de guerra. O fato essencial sobre o movimento violento é que ele tinha uma causa externa e era comunicado aos objetos; eles se moviam não por si mesmos, nem por sua natureza, mas por causa de empurrões e puxões.

O conceito de movimento violento enfrentou muitas dificuldades para ser aceito, pois os empurrões e puxões responsáveis por ele nem sempre eram evidentes. Por exemplo, a corda de um arco move uma flecha até que esta tenha deixado o arco; depois disso, uma explicação adicional ao movimento posterior da flecha parecia necessitar de algum outro agente propulsor. Assim Aristóteles imaginou que o ar expulso do caminho da flecha em movimento originava um efeito de compressão sobre a parte traseira da flecha, quando o ar investisse para trás, a fim de evitar a formação de um vácuo. A flecha era propelida pelo ar devido a esse efeito, que foi chamado de "antiperistasis", que define a reação do meio, frente a um movimento local, de fazer o ar circular em torno do móvel com o objetivo de impedir a formação de um suposto vácuo.

Para resumir, Aristóteles pensava que todos os movimentos ocorressem devido à natureza do objeto movido ou devido aos empurrões e puxões mantidos. Uma vez que o objeto se encontrasse em seu lugar apropriado, ele não mais se moveria a não ser que fosse obrigado por uma ação de puxar ou empurrar. Com exceção dos corpos celestes, o estado normal era o do repouso. Allan Franklin [16] propõe uma forma de representação da Lei de Aristóteles para o movimento, a qual mostra claramente a sua dependência relativa ao motor que o causa:

$$velocidade = \frac{força(motor)}{resistência} \tag{2}$$

No século XIV surge um movimento no Merton College, em Oxford, onde as críticas ao pensamento aristotélico tomaram diversas formas, entre elas a definição do que seja movimento local e a caracterização do que seria o motor do movimento. O passo chave para que o desenvolvimento da cinemática ocorresse foi o entendimento — que superava a filosofia aristotélica — de que o movimento local podia adquirir uma definição independente da sua causa motora. A atividade de construção da cinemática no Merton durou aproximadamente de 1328 a 1350, contando com vários críticos ao trabalho de Aristóteles, entre eles Bradwardine, Heytesbury, Swineshead e Dumbleton, os quais firmaram a distinção entre dinâmica e cinemática, fixaram o conceito de velocidade instantânea, definiram aceleração e movimento uniformemente acelerado e formularam e provaram o teorema da velocidade média.

A afiada navalha de Occkham

William of Ockham (séc. XIV) foi quem propôs a primeira definição cinemática do movimento, através da criação do princípio epistemológico que ficou conhecido como a "navalha de Ockham", que significa abrir mão de todas as definições conceituais que se mostrem desnecessárias à explicação de um determinado fenômeno:

> *Movimento não é tal coisa inteiramente distinta, por ela mesma, do corpo permanente, porque é fútil usar mais entidades quando for possível usar menos... Que, sem tal coisa adicional nós podemos salvar o movimento, e qualquer coisa que é dita sobre o movimento, torna-se clara, considerando as partes separadas do movimento. Pois é claro que movimento local é para ser concebido como se segue: Afirmando que o corpo está em um lugar, depois em outro lugar, assim procedendo sem qualquer repouso ou qualquer coisa intermediária, além do próprio corpo e do agente que o move, nós temos movimento local, verdadeiramente. Portanto é fútil postular outras tais coisas ([16], p.537).*

As idéias de Ockham influenciaram seus contemporâneos em Oxford. Sua contribuição mais importante para o estudo do movimento foi a clara distinção dada entre a sua descrição e a sua causa, o que está marcado na diferença entre a concepção de movimento aristotélica e a concepção de Galileu e, posteriormente, de Newton. "Para Aristóteles, o movimento é uma mudança de lugar e exige sempre uma causa. Para Galileu e Newton, o movimento é um estado, e a única mudança real que exige uma causa é uma mudança de movimento (aceleração)" ([15], p.28). O princípio epistemológico da navalha de Ockham foi a mudança de paradigma que permitiu que os estudiosos da Idade Média reformulassem o estudo do movimento sem necessariamente ter que romper com a tradição aristotélica

Oresme e sua incrível visão gráfica do movimento

O trabalho dos mertonianos também foi o de descrever a variação do que chamavam de qualidade e criar um vocabulário adequado ao tratamento dessas variações, nisto classificando as grandezas como intensivas ou extensivas. Seus trabalhos mais importantes no que diz respeito à latitude das formas foram: "Liber de proportionibus", escrito por Thomas Bradwardine em 1328 e "Liber calculationum", escrito após 1328 por Richard Swineshead [17].

Esses trabalhos abriram caminho para o trabalho de Nicole Oresme (1320-1382) [18], na Universidade de Paris, de representação gráfica do movimento. Desta forma, a extensão da qualidade do movimento foi representada graficamente por uma horizontal e a intensidade da qualidade foi representada por uma vertical localizada perpendicularmente à extensão da qualidade. A intensidade da qualidade está relacionada à sua magnitude e a extensão da qualidade está relacionada à duração de sua manifestação.

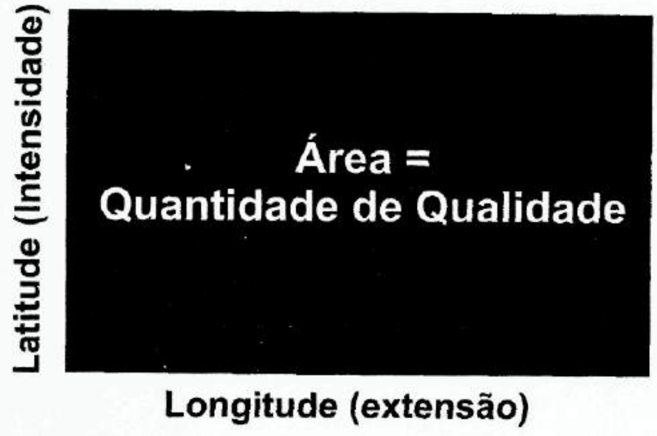

Figura 3. Gráfico de Qualidades, segundo a representação de Oresme.

É atribuída a Hiparco (Séc. II a. C.)[10] a criação de coordenadas de latitude e longitude para a definição da localização de pontos em mapas, mas foi Oresme[11] quem, vários séculos depois, aplicando essa ferramenta[12] ao problema da extensão e da intensidade das qualidades, beneficiou em muito a ciência do movimento, demonstrando geometricamente[13] o Teorema da velocidade média v_m para o movimento uniformemente diforme ou, em linguagem moderna, MRUV:

$$v_m = \frac{v_2 + v_1}{2}. \tag{3}$$

Isso significa dizer que um corpo em movimento uniformemente acelerado, com velocidadeinicial v_1 e velocidadefinal v_2, percorre a mesma distância D no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ se estivesse se movimentado com a velocidade v_m, a média aritmética entre v_1 e v_2 [19].

A prova que Oresme deu a esse teorema mostra-se de entendimento bastante fácil, porque ele utiliza apenas uma das proposições da geometria de Euclides (séc. III a.C.). Entretanto, a demonstração só faz sentido se houver a compreensão de que a área abaixo da reta que representa o aumento da velocidade é numericamente igual à distância percorrida pelo móvel em questão. Esta prova é o elemento de apoio com que Galileu contou — *três séculos mais tarde* — para a descoberta das propriedades do movimento dos corpos em queda livre ([13], p.21).

Galileu enuncia o teorema da velocidade média no se livro "Diálogo sobre duas novas ciências", no Terceiro Dia, no Teorema I, Proposição I ([20], p. 233, 234), desta forma:

---

[10] Astrônomo grego do século II a.C., um dos cientistas mais representativos da época alexandrina. Além de inaugurar o sistema de localização pelo cálculo de latitude e longitude, dividiu o mundo habitado conhecido em zonas climáticas.

[11] A esta época Oresme estava em Paris, no Collège de Navarre..

[12] É interessante saber que Oresme também aplicou ao seu modelo gráfico a variáveis físicas tais como temperatura, luz, peso e até mesmo variáveis não físicas, como caridade, amor e graça.

O tempo no qual qualquer espaço é percorrido por um corpo, partindo do repouso e acelerado uniformemente, é igual ao tempo no qual este mesmo espaço será percorrido pelo mesmo corpo, movendo-se a uma velocidade uniforme, cujo valor é a média da velocidade máxima, e a velocidade pouco antes da aceleração começar.

Segundo Carl Boyer [21, p.183], o progresso científico no campo da física e matemática da Idade Média não pode ser comparado ao progresso feito pelos filósofos da Grécia antiga. Além disso, progresso da ciência não foi continuamente ascendente em nenhuma parte do mundo. Não sendo surpresa a constatação de que após a morte de Bradwardine (1323 – 1382) houvesse certo declínio na produção científica das universidades de Paris e Oxford.

Figura 4. Miniatura do "Traité de l'espere" de Nicole Oresme, Biblioteca Nacional, Paris, França, MS 565. [22].

Bradwardine foi vítima fatal do surto epidêmico da peste negra, que dizimou um terço da população européia entre 1347 e 1350, e foi conseqüência da fome e péssimas condições sanitárias geradas pela guerra dos cem anos (relacionada à sucessão da coroa francesa, devido à morte do rei Carlos IV, no período de 1337 a 1453); segundo Cláudio Vicentino [23], a guerra dos cem anos, juntamente com a guerra das rosas (relacionada à sucessão da coroa inglesa disputada pelas famílias Lancaster e York no período de 1455 a 1485) foram os principais motivos do declínio na produção intelectual da França e Inglaterra e a conseqüente projeção das universidades italianas, alemãs e polonesas no cenário acadêmico europeu.

Galileu e a queda dos corpos

Não se sabe, hoje, como Galileu chegou à conclusão que para um corpo em queda livre, a velocidadeé proporcional à altura na qual o corpo se encontra, altura essa que, por sua vez é

[13] Por volta do ano de 1361.

proporcional ao quadrado do instante de tempo. Acredita-se que os experimentos que Galileu realizou não formam necessariamente o que os filósofos chamam de "caminho da descoberta"[14].

É pertinente dizer que, na primeira apresentação que foi feita a respeito das leis que governam o movimento dos corpos em queda livre, em seu livro "Diálogo sobre duas novas ciências" ([20], p. 235, 236), ele não chega às leis da cinemática da queda livre a partir dos dados experimentais, mas através do teorema da velocidade média. Contudo, todo crédito deve ser dado à sua brilhante aplicação da regra de Merton ao caso da queda dos corpos, lembrando que isso aconteceu por volta de trezentos anos após a elaboração da prova geométrica feita por Oresme.

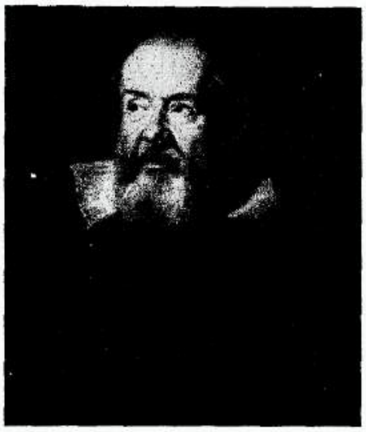

Figura 5. Galileu Galilei, em pintura à óleo de Justus Susterman, cerca de 1637, Galleria degli Uffizi, Florença. [24]

Galileu estava interessado na queda dos objetos e, como lhe faltavam instrumentos precisos para medir o tempo, usou planos inclinados para tornar efetivamente mais lentos os movimentos acelerados e assim poder investigá-los mais detalhadamente. Descobriu que uma esfera rolando para baixo de um plano inclinado se torna mais rápida na mesma quantidade em sucessivos segundos de duração; isto é, a esfera rolará com aceleração constante. Também descobriu que as acelerações eram maiores quanto mais inclinadas eram as rampas usadas e que a esfera possui uma aceleração máxima quando a rampa é vertical (nesse caso a aceleração torna-se igual àquela de um objeto em queda livre). Reproduzimos aqui o relato de Galileu acerca do seu procedimento experimental com o plano inclinado:

> *Consideremos uma ripa, ou melhor, viga de madeira de aproximadamente 12 cúbitos de comprimento, meio cúbito de largura, e três dedos de espessura. No seu lado mais estreito escavamos um canalete de pouco mais de um dedo de largura. Tendo escavado este sulco perfeitamente retilíneo, liso e polido, colamos no seu*

[14] Por "caminho da descoberta" entende-se a formulação de uma hipótese que se deseja comprovar, seguida pela realização de experimentos que possam levar a essa comprovação e pela análise dos dados coletados e então a retirada de conclusões que levam à aceitação da hipótese ou à sua refutação.

interior um pergaminho, também perfeitamente liso e polido, e fazemos descer por ele uma bola de bronze, perfeitamente redonda, dura e lisa. Uma vez inclinado este aparelho, levantando uma de suas extremidades por um ou dois cúbitos além da outra, fazemos descer a bola, como dizia antes, ao longo deste canalete, medindo, de uma maneira que descreveremos aqui, o tempo necessário para completar a descida. Repetimos este procedimento diversas vezes, de forma a medir o tempo com uma precisão tal que o desvio entre duas observações nunca excedeu a décima parte de uma batida de pulso. Tendo realizado esta operação e nos assegurado de sua confiabilidade, fazemos a bola descer apenas um quarto do comprimento do canalete. Ao medir o tempo de descida, encontramos exatamente metade do tempo anterior. Em seguida experimentamos outras distâncias, comparando o tempo para o comprimento inteiro com aquele para a metade, ou dois terços, ou três quartos, ou na verdade qualquer fração. Em tais experimentos, repetidos mais de cem vezes, sempre encontramos que os espaços percorridos estão um para o outro como os quadrados dos tempos, e isto é verdade para todas as inclinações do plano, isto é, do canalete ao longo do qual descia a bola.

Notemos a importância desse relato no que diz respeito à conjuntura política da ciência do século XVII: Galileu faz questão de citar todos os detalhes da experiência que, segundo ele mesmo comenta, é o alicerce de todo o conhecimento. Em seu livro "O Ensaiador", Galileu critica o procedimento aristotélico: "não posso me cansar de admirar que um homem, com tão grande nome e tão amante de experimentos, haja, com tanta eloqüência, afirmando coisas que com tanta facilidade podem ser contestadas através de experiências simples" ([25], p.241). Desta forma, destacamos a parte final do relato experimental onde Galileu descreve a maneira como mediu os intervalos de tempo no seu célebre experimento:

Para a medida do tempo empregamos um grande recipiente de água colocado em uma posição mais elevada. No fundo deste recipiente soldamos um tubo de pequeno diâmetro de largura, fornecendo um fino jato de água, que coletamos em um copo durante cada uma das descidas, tanto pelo canalete inteiro quanto por parte dele apenas. A água coletada desta forma foi pesada, após cada descida, em uma balança bastante precisa. As diferenças e razões obtidas destes pesos nos proporcionaram as diferenças e razões dos tempos, com precisão já que, mesmo após repetida diversas vezes, não havia discrepância significativa. ([16], p.236).

Galileu, por volta de 1634, em prisão domiciliar por ordem do Santo Ofício, escreveu esta obra (Diálogos sobre duas novas ciências), onde explanou sobre as leis que governam os corpos em queda livre, apresentando a regra da velocidade média como teorema fundamental a partir do qual deduziu as propriedades cinemáticas dos corpos em queda: proporcionalidade entre o espaço percorrido e o quadrado do tempo e entre os espaços em intervalos de tempo sucessivos.

Apolônio e a origem do estudo das cônicas

Foi Apolônio[15], quem deu a maior contribuição para o estudo das formas cônicas. Embora Apolônio fosse um astrônomo notável e também já tivesse escrito, na época, sobre múltiplos assuntos matemáticos, sua fama se deve principalmente a "Cônicas", uma obra extraordinária, graças a qual seus contemporâneos lhe deram o apelido de "O Grande Geômetra".

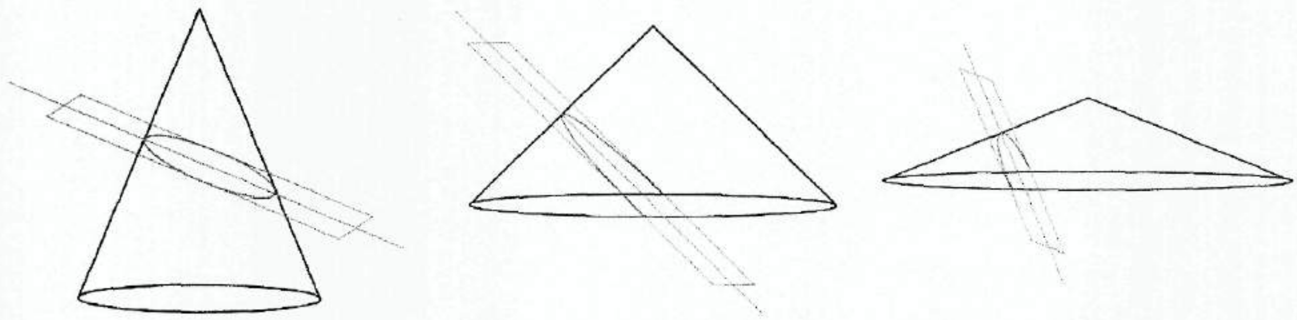

Figura 6. Cone com ângulo do vértice da secção mediana menor que 90°, geando uma elipse. cone com ângulo do vértice da secção mediana igual a 90°, gerando uma parábola. cone com ângulo do vértice da secção mediana maior que 90°, gerando uma hipérbole.

Howard Eves conta em seu livro [26] que, com cerca de 400 proposições e oito livros, "Cônicas" é um estudo exaustivo dessas curvas que supera completamente os trabalhos anteriores de Manaecmo, Aristeu e Euclides sobre o assunto. Apenas os primeiros sete dos oito livros chegaram até nós: os quatro primeiros em grego e os outros três numa tradução árabe do século IX. Os quatro primeiros livros supostamente se baseiam em trabalhos anteriores de Euclides, tratam da teoria elementar genérica das cônicas, ao passo que os outros entram em investigações mais especializadas. "Cônicas" é um tratado extenso e apurado. Devido à sua extensão, apenas mencionamos de forma breve a parte do seu conteúdo interessante ao ensino da cinemática no Ensino Médio.

Antes de Apolônio os gregos geravam as cônicas a partir de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da secção meridiana fosse menor que, igual a ou maior que um ângulo reto. Seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz resultam respectivamente uma elipse, uma parábola e uma hipérbole: só se considerava um ramo da hipérbole.

Apolônio, porém, no Livro I de seu tratado, obtinha todas as secções cônicas da maneira hoje familiar, ou seja, a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo, como representamos na figura abaixo:

[15] Nascido por volta de 262 a.C. em Perga, no sul da Ásia Menor.

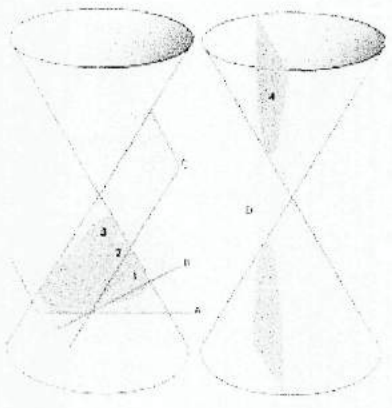

Figura 7. Esta figura representa um cone circular duplo com suas secções.

Na figura 7, a interseção do plano A com o cone duplo origina uma circunferência, que é um caso particular de elipse; a interseção do plano B com o cone duplo origina uma elipse; a interseção do plano C com o cone duplo origina uma parábola e a interseção do plano D com o cone duplo origina uma hipérbole.

Carl Boyer ([21], cap. 4) observa que "Cônicas" de Apolônio foi um livro pouco conhecido na Idade Média, sendo conhecidas apenas algumas poucas propriedades da parábola pelos estudiosos da óptica, assunto bem recorrente e em moda no meio dos escolásticos.

4. Encontrando a função horária do movimento

Objetivos

O objetivo deste trabalho é resgatar as origens da cinemática, através do desenvolvimento de uma aula voltada para estudantes do Ensino Médio, onde os conceitos relativos ao MRUV sejam trabalhados segundo a física de Nicole Oresme.

Material Experimental

Para a realização da etapa experimental do nosso estudo, utilizamos: um trilho de ar (Pasco SF-9216), um gerador de fluxo de ar (Pasco SF-9216), um móvel deslizante, um centelhador, fitas termo-sensíveis, três níveis para inclinação do trilho, dois adaptadores para parada e uma régua graduada em centímetros.

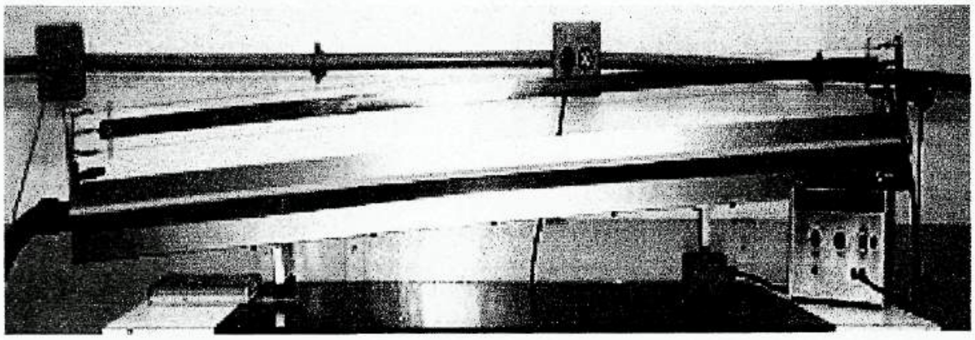

Figura 8. Trilho de ar inclinado, com cerca de tres metros de comprimento. O gerador de fluxo de ar está sob a mesa, à esquerda e o centelhador, à direita.

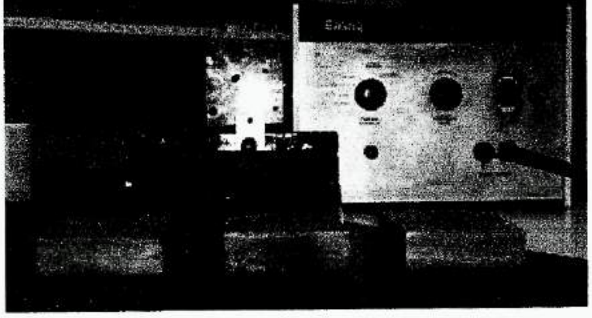

Figura 9. Fotografia que mostra o centelhador com freqüência de centelhamento de 10,00 Hz., os calços e o móvel utilizado.

Procedimento Experimental

Com este experimento, esperamos obter um conjunto de dados que nos permita analisar o movimento de um objeto que percorre uma trajetória em linha reta. Essa situação é obtida quando fazemos um móvel deslizante movimentar-se sobre um trilho de ar. Para o efeito da mudança de velocidade, introduzimos uma inclinação no trilho, de forma que, após ser liberado do repouso, o móvel tem a sua velocidade aumentada gradualmente.

Basicamente o que queremos obter é uma tabela que relacione as posições do móvel ao longo do seu percurso no trilho com os respectivos instantes de tempo em que foram medidas. Especificamente com relação à medida das posições do móvel, utilizamos um centelhador elétrico graduado para a freqüência de (10,00 ± 0,05) Hz; isto significa que a cada décimo de segundo o móvel marca, através de uma pequena fagulha, um ponto em uma fita termo-sensível que fica localizada em uma faixa condutora de eletricidade posicionada em paralelo a toda extensão do trilho onde o móvel desliza.

Pensamos que também seria interessante investigarmos a forma como se dá o aumento da velocidadedo móvel. Para isto, utilizamos três níveis de madeira que, quando dispostos abaixo de um dos pés do trilho de ar, conferem ao nosso experimento três inclinações diferentes: uma devida à colocação de um nível apenas, a segunda devida à colocação de dois níveis e a terceira devido à colocação de três níveis.

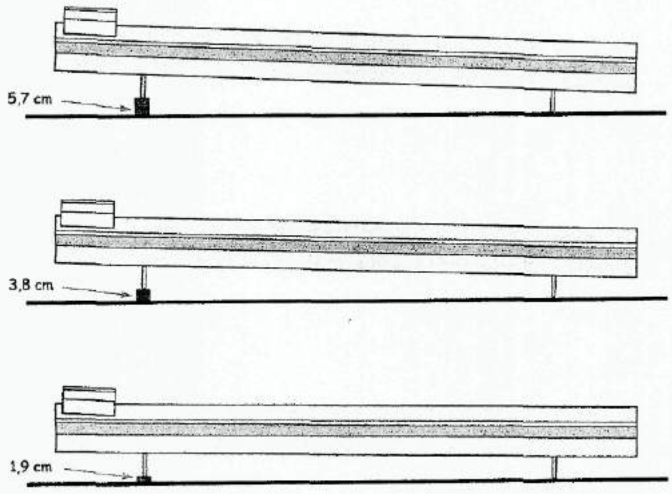

Figura 10. Representação esquemática da montagem para o experimento de variação de posição e velocidade em um trilho inclinado.

Resultados

Através do experimento com o trilho de ar, tendo obtido as medidas de posição do móvel ao longo do tempo como consta na Tabela 1, observamos o comportamento dessa relação através da construção dos gráficos de posição do móvel em função do instante de tempo, para as três elevações do trilho.

Tabela 1. Descrição da variação da posição do móvel com o tempo para o trilho de ar com diferentes inclinações: h_1 = 1,9 cm, h_2 = 3,8 cm e h_3 = 5,7 cm.

instante de tempo t(s) [± 0,05 s]	h_1 = (1,9 ± 0,1) cm	h_2 = (3,8 ± 0,1) cm	h_3 = (5,7 ± 0,1) cm
	posição s (cm) [± 0,1 cm]		
0	0,0	0,0	0,0
0,50	5,4	7,0	10,1
1,00	15,3	23,2	33,8
1,50	29,6	48,4	70,8
2,00	48,2	82,8	121,0
2,50	71,0		
3,00	97,9		

Para descrever o movimento, precisamos em primeiro lugar de um referencial que, no caso unidimensional, é uma reta orientada em que se escolhe a origem do movimento. Na nossa experiência, escolhemos como referencial o trilho de ar onde o móvel desliza e como origem do movimento o ponto marcado como 15 cm na graduação específica do trilho.

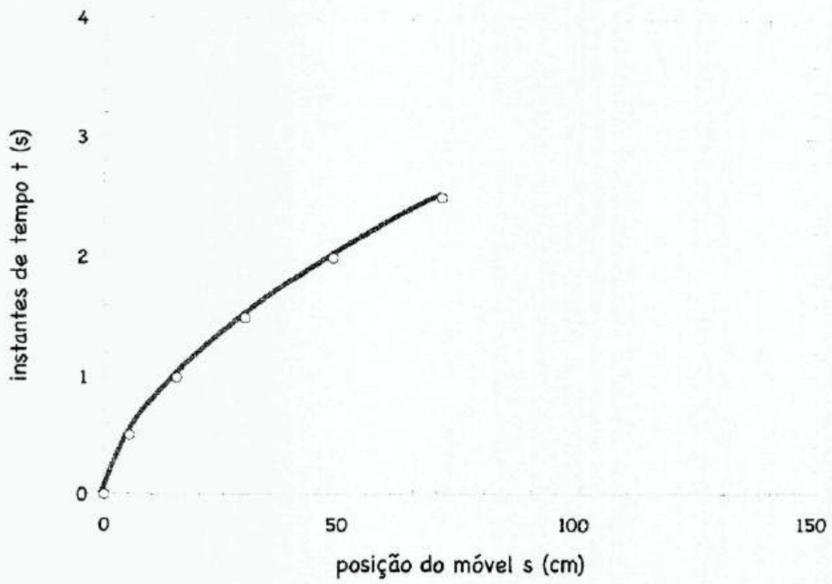

Figura 11. Variação da posição com o tempo para o movimento do móvel descrito para rampa com elevação de h_1 = 1,9 cm.

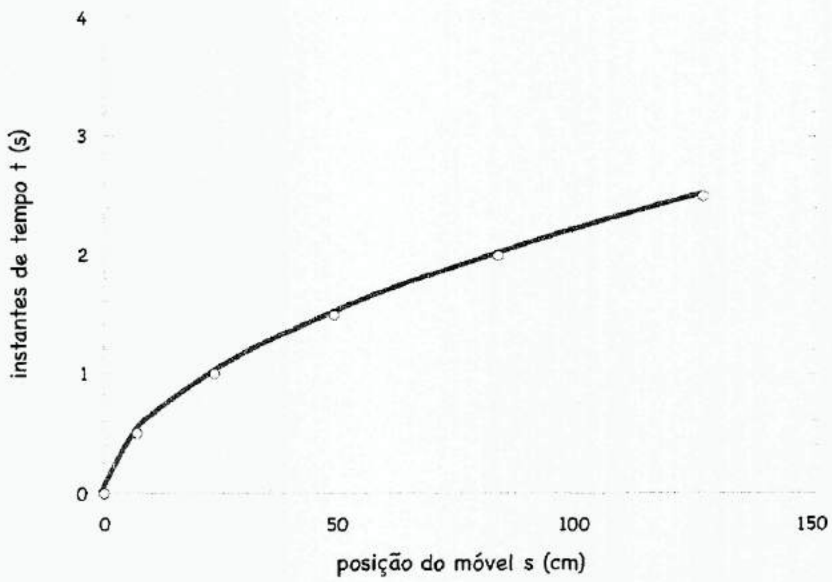

Figura 12. Variação da posição com o tempo para o movimento do móvel descrito para rampa com elevação de h_2 = 3,8 cm.

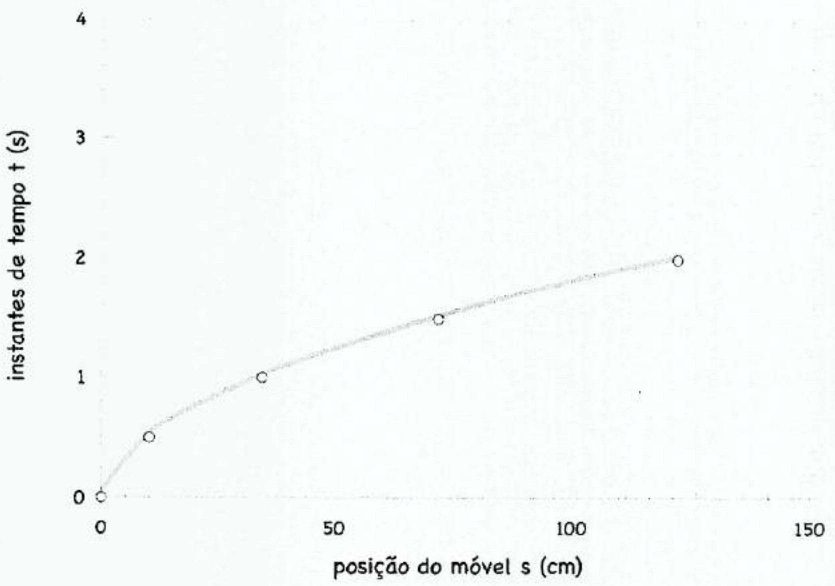

Figura 13. Variação da posição com o tempo para o movimento do móvel descrito para rampa com elevação de h_3 = 5,7 cm.

Optamos pelo formato gráfico do eixo *x* coincidente com a posição do móvel ao longo do trilho de ar, com o objetivo de facilitar o tratamento de dados e a própria visualização da dependência da posição do móvel com o instante de tempo tendo como referencial o eixo do trilho. Isto revela a importância da definição de referencial para o estudo da cinemática, assunto também discutido por Oresme para caracterizar o movimento.

A escolha pela representação gráfica da evolução da posição do móvel em relação ao tempo corresponde exatamente ao tipo de demonstração que nos propomos a realizar. Nicole Oresme foi o pioneiro na apresentação de gráficos para a análise do movimento. Podemos perceber que há uma enorme diferença entre analisar os dados da Tabela 1 e analisar os dados contidos nos gráficos da Figura 11, da Figura 12 e da Figura 13. Esse foi um grande progresso científico, sem o qual a pesquisa do nosso tempo e a evolução da cinemática poderiam ter sido bem diferentes.

Oresme aproveitou a representação em coordenadas de latitude e longitude, já inventada por Hiparco ([27], p. 5743), para representar coleções de dados a respeito do movimento de um corpo. Definiu no lugar do eixo de latitude (abscissas) o que chamou de intensidade da qualidade, já no lugar do eixo de longitude (ordenadas), definiu o que chamou de extensão da qualidade. A qualidade seria a grandeza que ele desejava analisar, como por exemplo: a velocidadede um corpo. A intensidade da velocidadedo corpo seria representada pelos valores que essa velocidadeassume. A extensão da qualidade não é um conceito bem determinado por Oresme, mas isso não diminui o seu significado, apenas evidencia que tal eixo poderia representar qualquer outro aspecto que se quisesse relacionar à qualidade considerada. Como, por exemplo, o correr do tempo.

Determinação da velocidadedo móvel.

A partir da definição de velocidade média, $v_m = \Delta s/\Delta t$, podemos construir um gráfico que relaciona as velocidades médias desenvolvidas pelo móvel descendo a rampa com a elevação h_1 = 1,9 cm, em relação aos intervalos de tempo em que foram desenvolvidas.

Tomando o primeiro intervalo de posição do gráfico da Figura 11,

$$\Delta s = (5,4 - 0)\ cm = 5,4\ cm$$

e o primeiro intervalo de tempo do gráfico,

$$\Delta t = (0,5 - 0)\ s = 0,5\ s\ ,$$

a razão $\Delta s/\Delta t$ é igual a 10,8 *cm/s* e representa a velocidade média entre os instantes inicial $t = 0\ s$ e $t = 0,5\ s$. Sabendo disso, podemos afirmar que se o móvel se movesse sempre com a mesma velocidadeentre os instantes inicial e t = 0,5 *s*, ele faria isso com a velocidadeigual a 10,8 *cm/s*.

Podemos repetir esse mesmo procedimento para os outros intervalos de posição e tempo dos gráficos da Figura 12 e da Figura 13 e, desta forma, obter a Tabela 2, a seguir:

Tabela 2. Velocidades médias atingidas pelo móvel durante o percurso para as três elevações h do trilho.

intervalo de tempo Δt (s)	h_1 = (1,9 ± 0,1) cm		h_2 = (3,8 ± 0,1) cm		h_3 = (5,7 ± 0,1) cm	
	Δs (cm)	v_m (cm/s)	Δs (cm)	v_m (cm/s)	Δs (cm)	v_m (cm/s)
0,50±0,004	5,4±0,2	10,8 ±0,4	7,0 ± 0,2	14 ,0 ± 0,4	10,1 ± 0,2	20,2 ± 0,4
0,50±0,006	9,9±0,2	19,8 ± 0,4	16,2±0,2	32,4 ± 0,4	23,4 ± 0,2	46,7 ± 0,4
0,50±0,01	14,3±0,2	28,6 ± 0,4	25,3±0,2	50,6 ± 0,4	37,4 ± 0,2	74,8 ± 0,4
0,50±0,01	18,6±0,2	37,2 ± 0,4	34,4±0,2	68,7 ± 0,4	50,1 ± 0,2	100,4 ± 0,4
0,50±0,02	22,8±0,2	45,6 ± 0,4	43,2±0,2	86,4 ± 0,4		
0,50±0,02	26,9±0,2	53,8 ± 0,4				

De posse dos dados da Tabela 2, temos a possibilidade de comparar o crescimento das velocidades médias do móvel para as três elevações propostas.

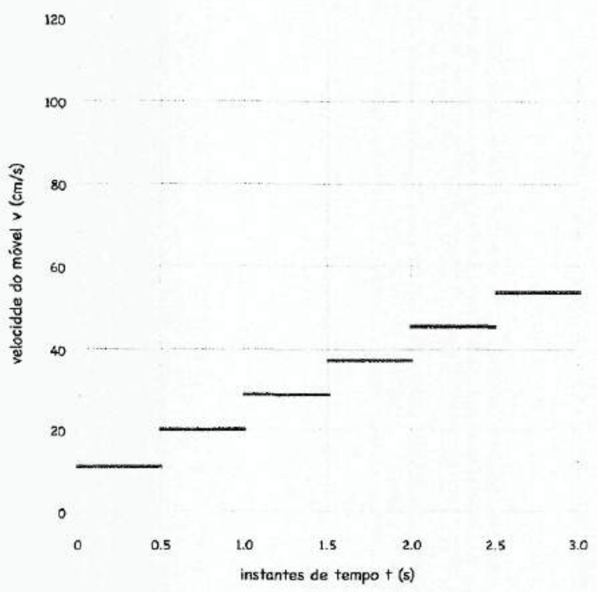

Figura 14. Velocidades médias assumidas pelo móvel durante o movimento com elevação de h_1 =1,9 cm.

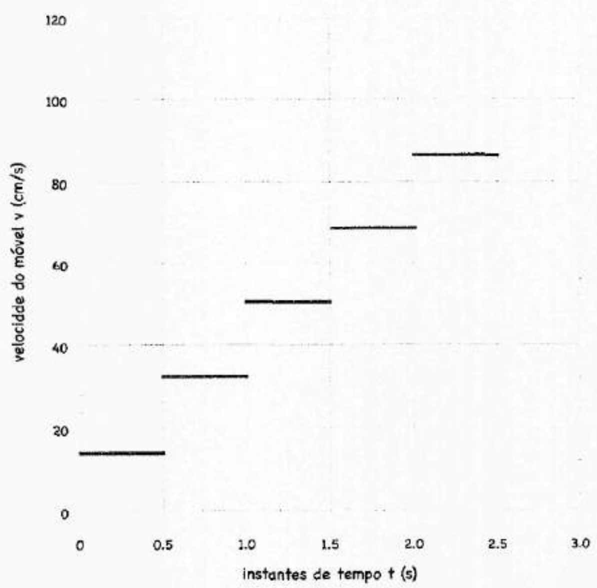

Figura 15. Velocidades médias assumidas pelo móvel durante o movimento com elevação de h_2 =3,8 cm.

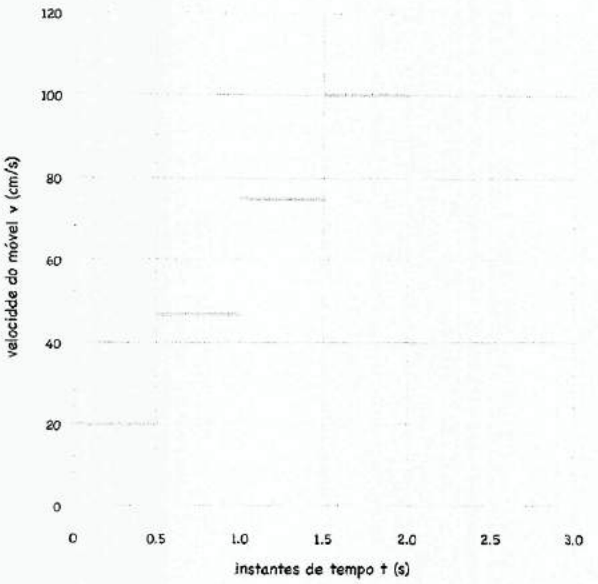

Figura 16. Velocidades médias assumidas pelo móvel durante o movimento com elevação de $h_3 = 5{,}7$ cm.

Podemos, hoje, reconhecer que, a elaboração de um sistema gráfico de representação foi um salto de qualidade que transformaria por completo a compreensão do movimento e traria um novo amadurecimento ao seu estudo. O teorema da velocidade média foi uma descoberta de importância fundamental feita pela ciência medieval e que se uniu de forma brilhante ao esforço de seus contemporâneos na definição do que seria o movimento e de como haveria de ser estudado. Oresme propôs uma demonstação geométricapara o teorema da velocidade média onde, no MRUV, essa velocidade média correspondia à média aritmética entre as velocidades em t_1 e t_2, que representam os instantes inicial e final utilizados no cálculo de Δt na fórmula da velocidade média.

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_2 + v_1}{2}. \tag{4}$$

A sua representação algébrica corresponde a dizer que: se temos um MRUV onde um móvel evolui de uma velocidadev_1 a outra velocidadev_2, esse movimento teria a mesma velocidade média que um outro onde o móvel permanecesse com a velocidade igual à média aritmética das velocidades do início e do final do movimento. Descrevendo de uma outra forma: a velocidade média do movimento acelerado seria a velocidade instantânea *no* instante médio aritmético entre o instante em que o móvel está com v_1 e o instante em que o móvel está com v_2, como descrito na Figura 17, abaixo. Desta forma, observamos que Oresme criou um método que antecipou a noção de velocidadeinstantânea, que veio surgir alguns séculos mais tarde, com a invenção do cálculo infinitesimal e integral.

Aplicamos tal definição ao nosso estudo do movimento do móvel. Para isso, tomamos como ponto de partida a interpretação geométrica de Oresme para o teorema da velocidade média.

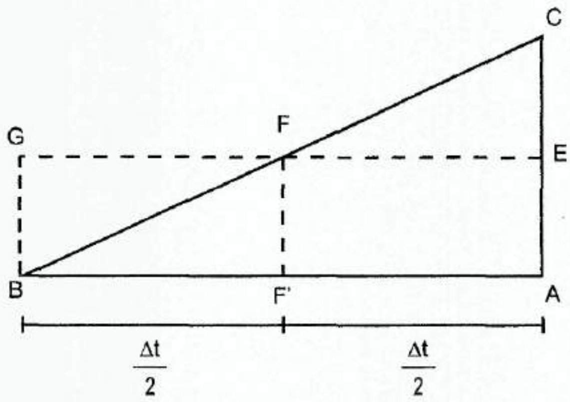

Figura 17. : Representação gráfica do teorema da velocidade média

Oresme introduziu a idéia de que o movimento uniformemente diforme, poderia ser representado por um triângulo orientado tal que seu ângulo da base direita seja reto (conforme descrito na Figura 17). O vértice esquerdo corresponde ao início da mudança de velocidade. O movimento da esquerda para a direita corresponde à passagem do tempo, enquanto a altura do triângulo em um ponto dado corresponde à velocidade de um objeto sob aceleração constante. Oresme utilizou uma representação equivalente ao retângulo pontilhado da figura para representar um movimento, onde a velocidade fosse constante.

Ocorre que a representação gráfica, na Figura 17, nada mais é do que o fruto de uma brilhante intuição de Oresme, e é exatamente esse o aspecto mais instigante e talvez também um tanto obscuro de sua ciência. Ele prova através da 26ª proposição do 1º livro[16] de geometria de Euclides que a área do triângulo EFC (Figura 17) é igual à área do triângulo GFB, conseqüentemente a área do triângulo ABC é igual à área do retângulo AEGB [19]. Isto significa afirmar que o deslocamento experimentado pelo objeto se movendo de forma acelerada, partindo com velocidade v_1 e finalizando o movimento com velocidade v_2, é igual ao deslocamento do objeto que se move com uma velocidadeigual à média aritmética entre as velocidades v_1 e v_2, durante o mesmo intervalo de tempo.

[16] Por Euclides, proposição I.26 de Elementos: "Omnium duorum triangulorum, quorum duo anguli unius duobus angulis alterius et eterque se respicienti aequales fuierint, latus quoque unius lateri alterius aequale, fueritque latus illud aut inter duos angulos aequales, aut uni eorum oppositum, erunt quoque duo unius reliqua latera duobus reliquis alterius trianguli lateribus, unumquodque se respicienti aequalia, angulusque reliquus unius angulo reliquo alterius aequalis". O que foi retirado da proposição para a prova do teorema é a conclusão de que quando os lados e os ângulos de dois triângulos são iguais, os triângulos são iguais entre si.

Sendo a velocidade no ponto B igual a v_1 e a velocidadeem C igual a v_2, e supondo que o movimento entre B e C é acelerado uniformemente, através da análise de Oresme mostra-se que a velocidade em F (ponto médio do seguimento que vai de C para B) é igual à média entre v_1 e v_2.

A área do triângulo ABC representa o deslocamento experimentado pelo objeto que se move partindo com velocidade v_1 do ponto B e termina seu movimento com a velocidade v_2 no ponto C. A área do retângulo AEGB representa o deslocamento experimentado pelo objeto que se move partindo com a velocidade do ponto F que, de acordo com o gráfico, é a média entre as velocidades v_1 e v_2, e continua seu movimento sempre com a mesma velocidade.

O movimento descrito pela curva que vai de B a C é acelerado, pois a velocidade do objeto aumenta; enquanto o movimento descrito pela curva que vai de G a E é constante, pois a velocidade permanece a mesma. Daí, concluímos o que Oresme quis mostrar através da sua representação gráfica das qualidades: que a velocidade no ponto médio de um percurso acelerado é igual à média aritmética das velocidades experimentadas nos pontos extremos do mesmo percurso feito dentro de um mesmo intervalo de tempo.

Nos gráficos da Figura 14, da Figura 15 e da Figura 16, temos as velocidades médias ao longo de alguns intervalos de tempo determinados pela experiência e, com isto, vamos descobrir, por hipótese, as velocidades instantâneas experimentadas pelo móvel durante o seu movimento.

Tomando como exemplo o gráfico da Figura 14, sabemos que as velocidades médias entre os instantes 0 s e 0,5 s; 0,5 s e 1,0 s; 1,0 s e 1,5 s, 1,5 s e 2,0 s; 2,0 s e 2,5 s e, finalmente, entre 2,5 s e 3,0 s, correspondem as velocidades instantâneas nos instantes 0,25 s; 0,75 s; 1,25 s; 1,75 s, 2,25 s e 2,75 s, respectivamente. Podemos mostrar mais claramente através da construção da Tabela 3:

Tabela 3. Velocidades instantâneas v_1, v_2 e v_3 calculadas através do teorema da velocidade média para o trilho de ar para as três elevações h do trilho.

instante de tempo t (s)	$h_1 = (1,9 \pm 0,1)$ cm	$h_2 = (3,8 \pm 0,1)$ cm	$h_3 = (5,7 \pm 0,1)$ cm
	v_1 (cm/s)	v_2 (cm/s)	v_3 (cm/s)
0,25	10,8 ± 0,4	13,9 ± 0,4	20,2 ± 0,4
0,75	19,8 ± 0,4	32,4 ± 0,4	46,7 ± 0,4
1,25	28,6 ± 0,4	50,6 ± 0,4	74,8 ± 0,4
1,75	37,2 ± 0,4	68,7 ± 0,4	100,2 ± 0,4
2,25	45,6 ± 0,4	86,4 ± 0,4	
2,75	53,8 ± 0,4		

Podemos também mostrar uma representação gráfica destes resultados:

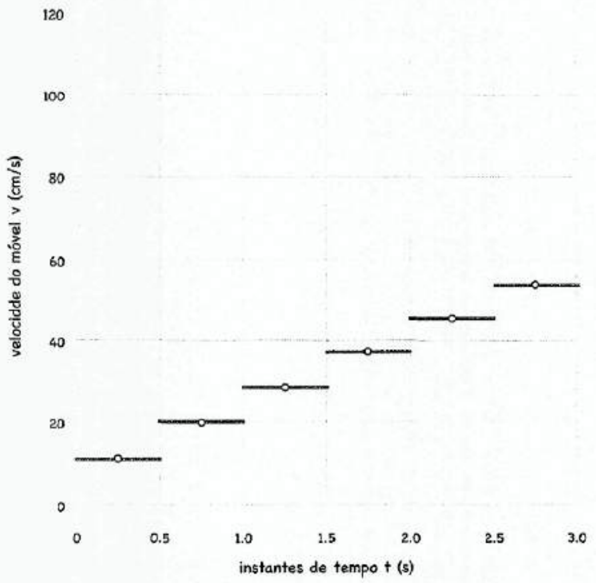

Figura 18. Velocidades instantâneas do móvel para a elevação h_1 = 1,9 cm

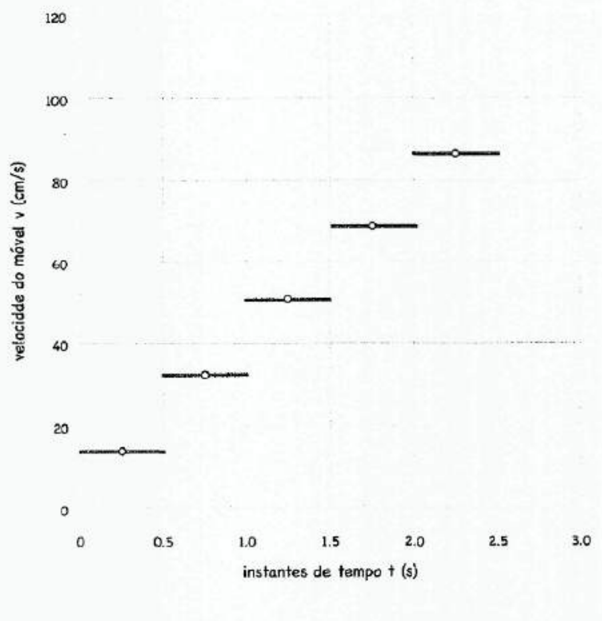

Figura 19. Velocidades instantâneas do móvel para a elevação h_2 = 3,8 cm

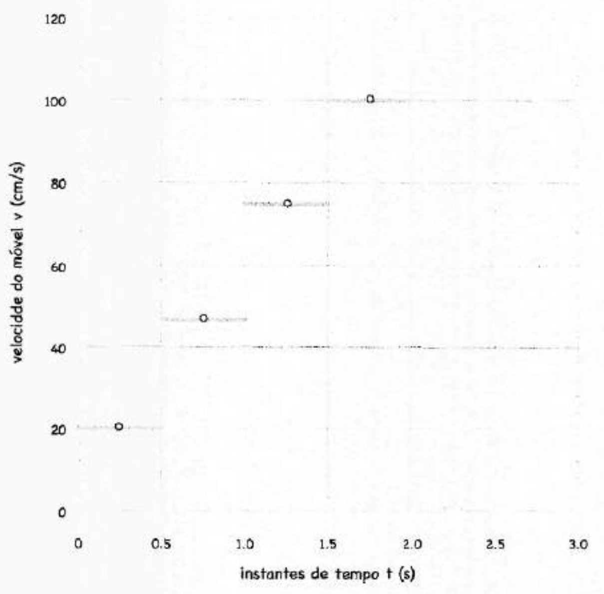

Figura 20. Velocidades instantâneas do móvel para a elevação h_3 = 5,7 cm

Agora, se adicionarmos uma linha de tendência linear aos pontos obtidos para as velocidades instantâneas, teremos uma representação similar à que Nicole Oresme utilizou para a demonstração do seu teorema. Vejamos:

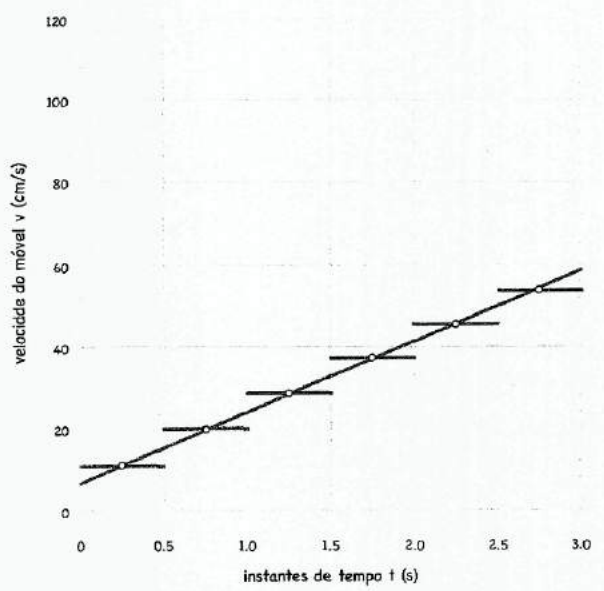

Figura 21. Representação de Oresme associada ao experimento com elevação h_1 = 1,9 cm.

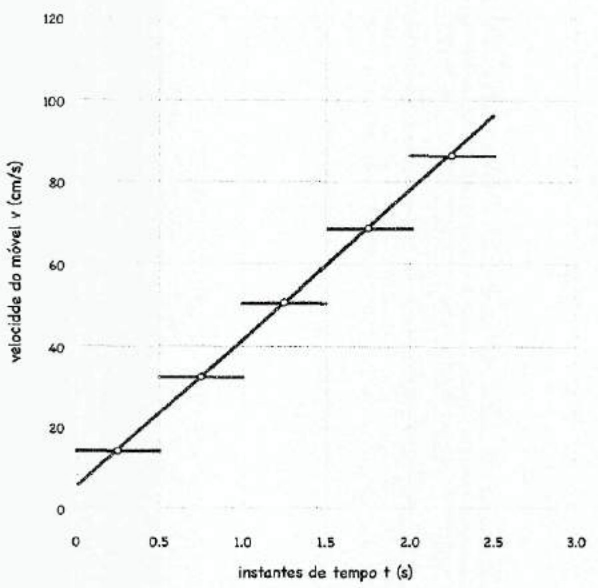

Figura 22. Representação de Oresme associada ao experimento com elevação h_2 = 3,8 cm.

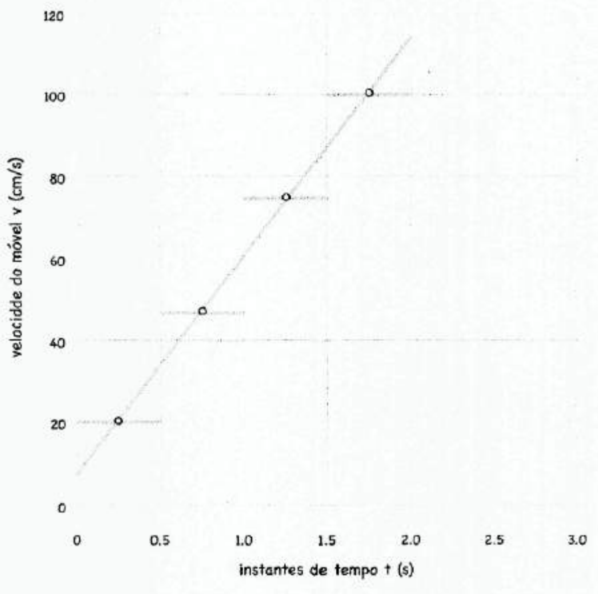

Figura 23. Representação de Oresme associada ao experimento com elevação h_3 = 5,7 cm

A despeito do fato de Oresme ter somente imaginado tal representação, pois não dispunha de aparelhos para medir velocidades e muito menos para medir o tempo com a acurácia dos cronômetros da era moderna, é inegável a semelhança de sua representação com os dados que a realidade nos fornece.

Igualmente interessante é podermos despertar os nossos alunos para o fato de que a área abaixo dos patamares de velocidade média nos dá o deslocamento do móvel, se fixamos o instante em que queremos determiná-la como a linha delimitadora da superfície a ser calculada. Por exemplo, se queremos calcular o deslocamento do móvel entre os instantes t= 0 s e t=1,25 s para a elevação h_1= 1,9 cm, podemos calcular a área em verde da Figura 24:

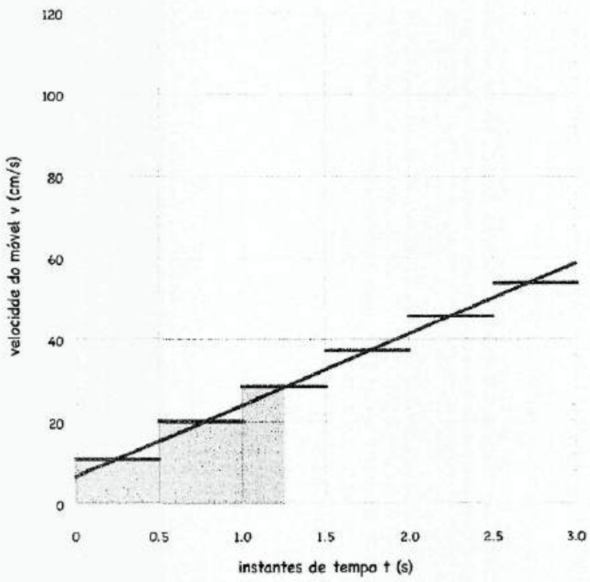

Figura 24. Cálculo do deslocamento do móvel entre t=0 s e t=1,25s, utilizando o gráfico de velocidade média..

Aqui calculamos a área através da soma das áreas dos cinco retângulos em violeta, na Figura 24. O resultado é Δs = 22,45 cm.

Da mesma forma, por conseqüência do teorema da velocidade média, podemos encontrar o mesmo deslocamento do móvel entre os instantes t= 0 s e t=1,25 s utilizado no exemplo anterior para a respectiva elevação. Observe que a área abaixo da linha de tendência da velocidadeinstantânea é igual à área abaixo dos patamares que representam as velocidades médias. Conferimos esse resultado calculando a área do trapézio em destaque violeta na Figura 25.

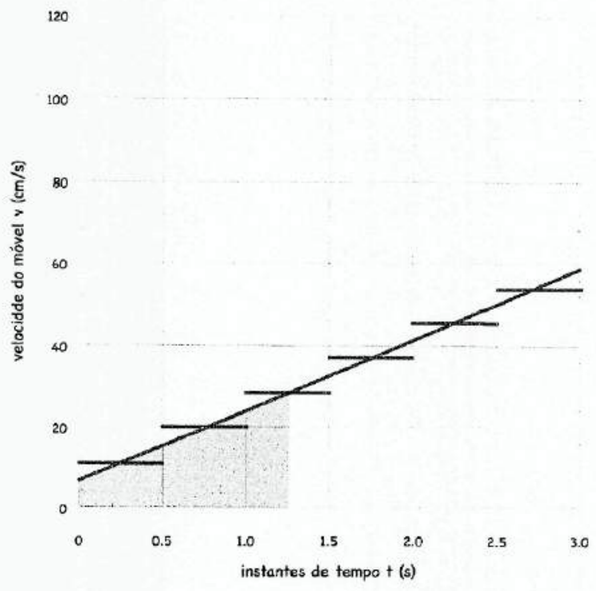

Figura 25. Cálculo do deslocamento do móvel entre t = 0 s e t = 1,25 s, utilizando o gráfico de velocidade média.

O resultado, como esperado, é que Δs = 22,4 cm, considerando a margem de incerteza proporcionada pelos dados experimentais e pelo ajuste da linha de tendência.

Seguindo o mesmo padrão de interpretação e análise, propomos a descoberta das acelerações dos movimentos experimentados pelo móvel como forma de sedimentar a utilização que fizemos do teorema. Faremos isto a partir dos gráficos de velocidades instantâneas oriundos da análise anterior, iniciando pela elevação de 1,9 cm.

Determinação da aceleração do móvel.

A partir da definição de aceleração média, $a_m = \Delta v / \Delta t$, podemos construir um gráfico que relaciona as acelerações médias desenvolvidas pelo móvel descendo a rampa com relação aos intervalos de tempo em que foram desenvolvidas nas suas três elevações.

É intuitivo, ao observarmos os gráficos, que nos casos que estamos estudando, a velocidadeaumenta com o passar do tempo e que esse aumento se dá com certa regularidade. Assim, podemos, por exemplo, calcular a aceleração média entre os instantes t = 0,25 s e t = 0,75 s para a elevação h_1 = 1,9 cm sabendo que Δv = (19,8-10,8) cm/s e Δt = 0,5 s; isto nos dá que a_m = 18 cm/s^2. Faremos isto para as demais elevações e seus respectivos intervalos de tempo e representaremos os resultados na Tabela 4.

Tabela 4. Acelerações médias atingidas pelo móvel durante o percurso para as três elevações h do trilho.

intervalo de tempo Δt (s)	$h_1 = (1,9 \pm 0,1)$ cm		$h_2 = (3,8 \pm 0,1)$ cm		$h_3 = (5,7 \pm 0,1)$ cm	
	Δv (cm/s)	a_m (cm/s²)	Δv (cm/s)	a_m (cm/s²)	Δv (cm/s)	a_m (cm/s²)
0,5	9,0 ± 0,8	18 ± 2	18,4 ± 0,8	37 ± 2	26,5 ± 0,8	53 ± 2
0,5	8,8 ± 0,8	17 ± 2	18,2 ± 0,8	36 ± 2	28,1 ± 0,8	56 ± 2
0,5	8,6 ± 0,8	17 ± 2	18,1± 0,8	36 ± 2	25,6 ± 0,8	51 ± 2
0,5	8,4 ± 0,8	17 ± 2	17,7 ± 0,8	36 ± 2		

Se assumirmos a aceleração média como sendo a aceleração no instante médio entre t_i e t_f, poderemos traçar os gráficos que se seguem:

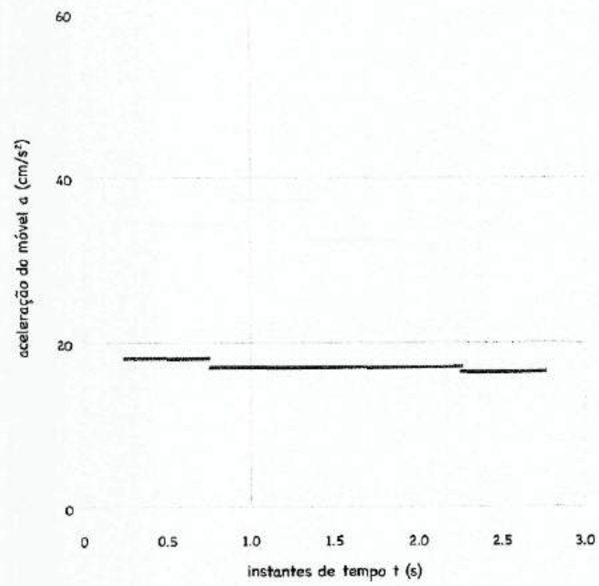

Figura 26. Acelerações médias assumidas pelo móvel durante o movimento com elevação h_1 = 1,9 cm.

Desta forma, utilizaremos um procedimento análogo ao da descoberta das velocidades instantâneas pelos gráficos das velocidades médias, emprestando o método de Oresme para prova do teorema da velocidade média, à análise dos gráficos de velocidade média em função do tempo.

Tabela 5. Acelerações instantâneas a_1, a_2 e a_3 calculadas através da extensão do teorema da velocidade média para as três elevações h do trilho.

instante de tempo t (s)	$h_1 = (1,9 \pm 0,1)$ cm	$h_2 = (3,8 \pm 0,1)$ cm	$h_3 = (5,7 \pm 0,1)$ cm
	a_1 (cm/s²)	a_2 (cm/s²)	a_3 (cm/s²)
0,5	18,0 ± 0,4	37,0± 0,4	53 ± 0,4
1,0	17,6 ± 0,4	36,4 ± 0,4	56,2 ± 0,4
1,5	17,2 ± 0,4	36,2 ± 0,4	50,8 ± 0,4
2,0	16,8 ± 0,4	35,4 ± 0,4	
2,5	16,4 ± 0,4		
3,0	14,8 ± 0,4		

A Tabela 5 representa a relação entre as acelerações instantâneas aos instantes de tempo, partindo da hipótese de que a aceleração instantânea no ponto médio aritmético entre t_0 e t é igual à aceleração média que o carrinho assume entre o mesmo intervalo de tempo entre t_i e t_f. Como exemplo, se tomamos a aceleração média entre os instantes $t = 0,25$ s e $t = 0,75$ s, $a_m = (18,0 \pm 0,4)$ cm/s², esta seria a aceleração instantânea em $t = 0,5$ s.

Dada esta explicação, fazemos a representação gráfica destes resultados e otemos:

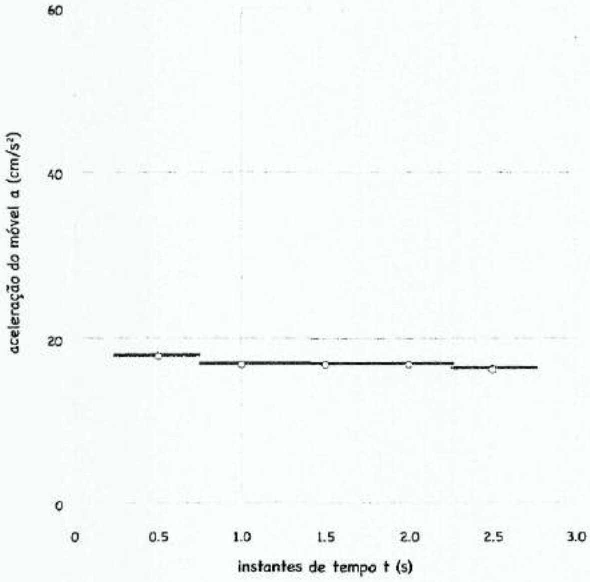

Figura 29. Acelerações instantâneas do móvel para a elevação h_1 = 1,9 cm.

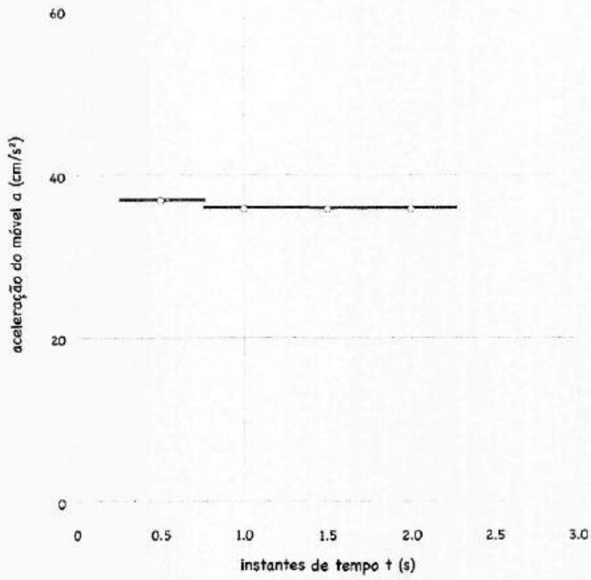

Figura 30. Acelerações instantâneas do móvel para a elevação h_2 = 3,8 cm..

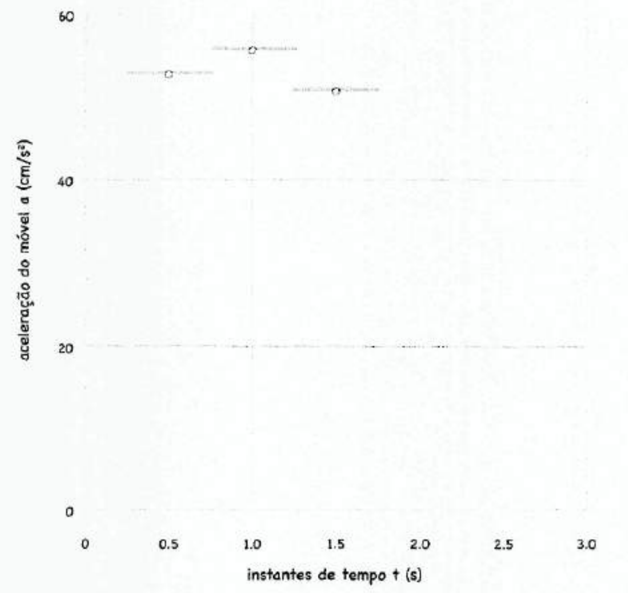

Figura 31. Acelerações instantâneas do móvel para a elevação $h_3 = 5,7$ cm.

Agora, se adicionarmos uma linha de tendência aos pontos obtidos para as acelerações instantâneas, teremos uma representação similar à que Oresme utilizou para a demonstração do teorema da velocidade média, só que ao invés de velocidades médias, desta vez, utilizamos as acelerações médias do móvel. Vejamos:

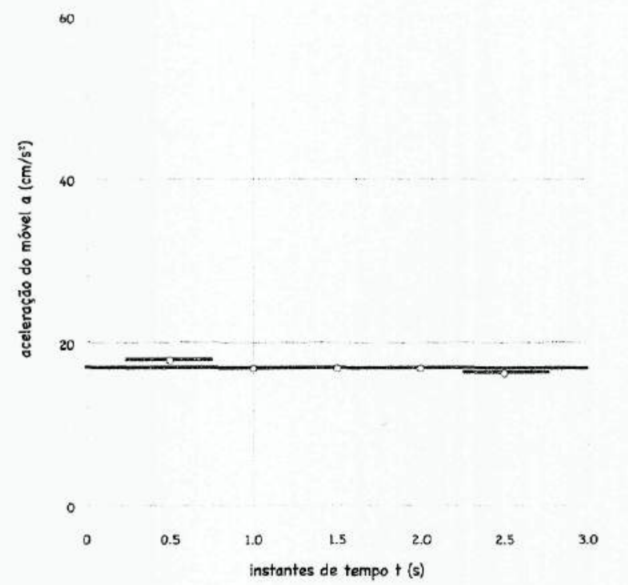

Figura 32. Representação similar a de Oresme para a aceleração, com $h_1 = 1,9$ cm.

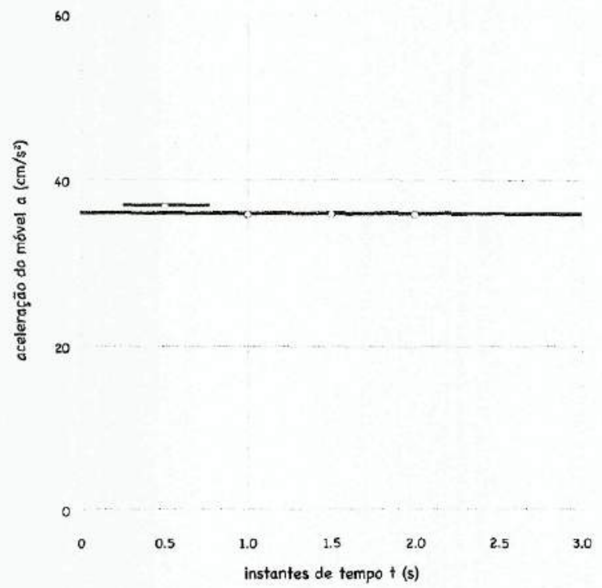

Figura 33. Representação similar a de Oresme para a aceleração, com h_2=3,8 cm.

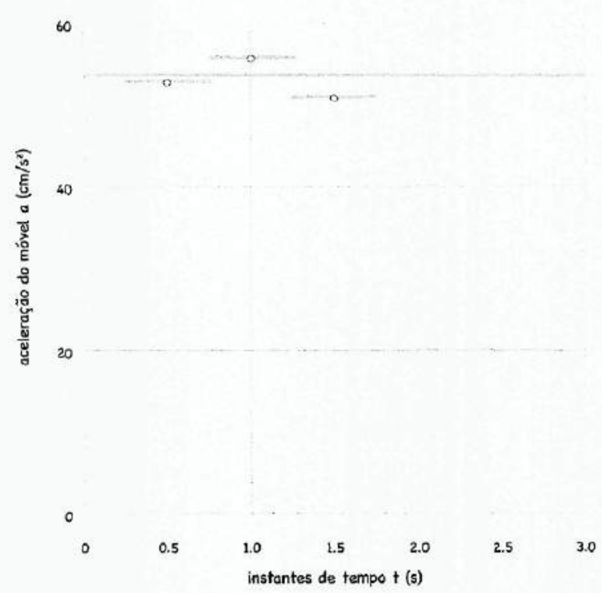

Figura 34. Representação similar a de Oresme para a aceleração, com h_3=5,7 cm.

Notamos que os gráficos de aceleração em função do tempo apontam para uma constância da aceleração durante os primeiros segundos de movimento. O que significa que a aceleração com a qual estamos lidando é uma aceleração praticamente constante no início do movimento e que diminui depois, devido à resistência do ar.

Imaginamos que através do mesmo método utilizado anteriormente — para calcular a posição do móvel em um determinado instante através do cálculo da área abaixo da curva de velocidade vs. tempo — podemos também calcular a velocidade do móvel em um determinado instante de tempo utilizando os gráficos de aceleração versus tempo de que agora dispomos. A área abaixo dos patamares de aceleração média nos fornece a variação da velocidade Δv do móvel entre dois instantes de tempo escolhidos.

Para começar, vamos calcular a velocidade do móvel no instante t = 1,25 s para o trilho inclinado pela elevação h_1 =1,9 cm. Para isso teremos que calcular a variação de velocidadeentre os instantes t= 0,25 s e t= 1,25 s e depois somar essa variação à velocidadedo móvel no instante t= 0,25 s — essa velocidade consta na Tabela 3. A área que precisamos calcular para encontrarmos Δv, entre t = 0,25 s e t = 1,25 s, está representada em violeta na figura abaixo:

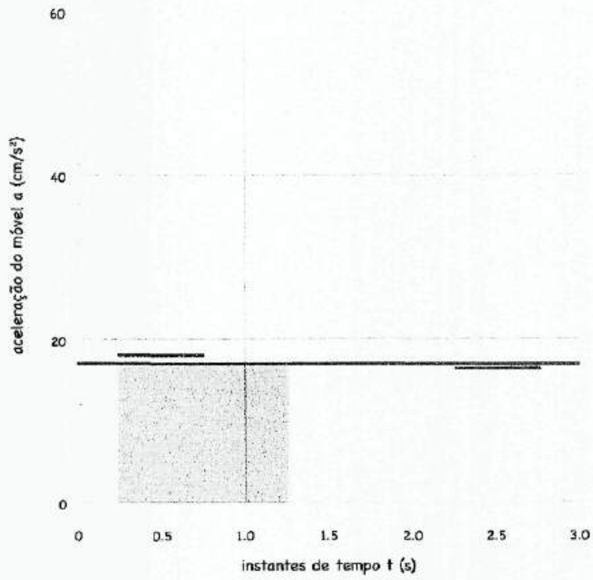

Figura 35. : Cálculo da variação da velocidade do móvel entre os instantes t = 0,25 s e t = 1,25 s, para h_1, utilizando o gráfico de aceleração média.

Calculando a área dos dois retângulos, encontramos:

$$\Delta v = (0{,}5 \times 18) + (0{,}5 \times 17{,}6)\ \text{cm/s} = \left(9{,}0 + 8{,}8\right)\ \text{cm/s} = 17{,}8\ \text{cm/s}. \quad (5)$$

Como a velocidade $v\ (t = 1{,}25\ \text{s})$ é dada por

$$v\,(t = 1{,}25\ s) = v\,(t = 0{,}25\ s) + \Delta v\,, \tag{6}$$

obtemos então

$$v\,(t = 1{,}25\ s) = 10{,}8 + 17{,}8 = 28{,}6\ cm/s. \tag{7}$$

Alberto Oliva ([28], p.23) comenta que um dos critérios de cientificidade de uma pesquisa, para considerarmos uma hipótese como teoria (segundo o critério positivista), é a exigência que a primeira permita a sua aprovação constante pela experiência. É resultado de nossa análise dos dados experimentais colhidos para o móvel em MRUV, que podemos utilizar o formato do teorema da velocidade média para obtermos uma fórmula para o cálculo da aceleração média em um instante t= (ti+tf) /2, a partir da média aritmética entre as acelerações localizadas em ti e tf e mais ainda: que a área sob a linha de tendência no gráfico de aceleração vs. tempo, ou sob os patamares de aceleração média no gráfico de aceleração média em função do tempo, nos fornece a variação da velocidade entre os instantes que delimitam a área de cálculo.

Então, a título de verificação dos resultados, iremos calcular as velocidades no instante t = 1,25 s para os movimentos relativos às elevações h_2 e h_3. Para h_2, calculando a área em verde abaixo dos patamares de aceleração que cobrem o intervalo de tempo que vai de t = 0,25 s a t = 1,25 s, temos a seguinte ilustração representativa:

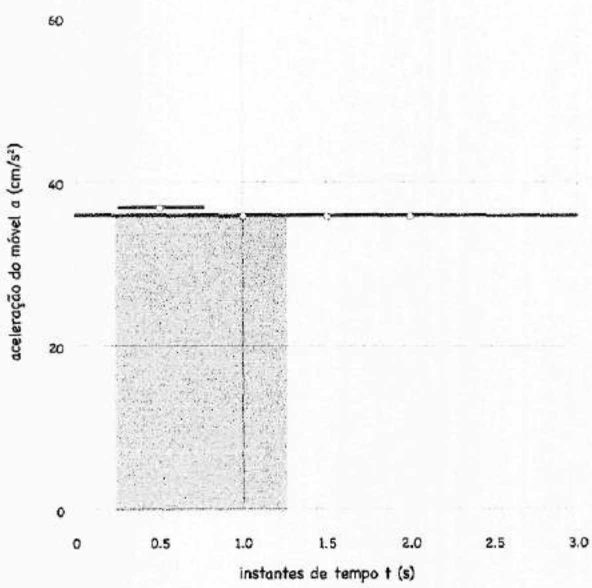

Figura 36. : Cálculo da variação da velocidade do móvel entre os instantes t=0,25 s e t=1,25 s, para h2, utilizando o gráfico de aceleração média

O patamar de aceleração média que vai de t = 0,25 s a t = 0,75 s, tem v_m = 37,0 cm/s (Tabela 4) e o segundo patamar, que vai de t = 0,75 s a t = 1,25 s, tem v_m = 36,4 cm/s (Tabela 4). A área dos retângulos, que representa Δv, é igual a 36,7 cm/s. Somando Δv a v (t = 0,25 s) da Tabela 3, temos v (t = 1,25 s) = (36,7+ 13,9) cm/s = 50,6 cm/s.

Finalmente, passamos ao cálculo da velocidadedo móvel no instante t=1,25 s para o trilho com a elevação h3. Na Figura 37 temos a representação, em laranja, da área que deve ser calculada para que tenhamos Δv entre os instantes t= 0,25 s e t=1,25 s, através dos patamares de aceleração média.

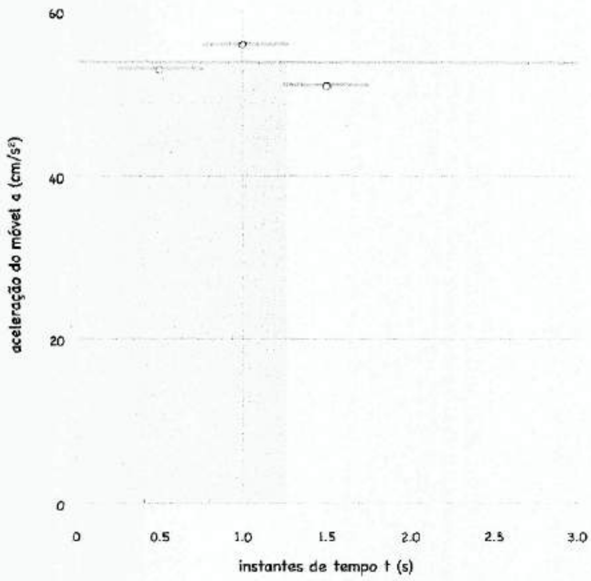

Figura 37. Cálculo da variação da velocidadedo móvel entre os instantes t = 0,25 s e t=1,25 s, para h_3, utilizando o gráfico de aceleração média

Mais uma vez, temos que calcular a área de dois retângulos com base 0,5 s cada um e com alturas iguais: a aceleração média (a_m = 53 cm/s²) para Δt que vai de 0,25 s a 0,75 s e a aceleração média (a_m = 56 cm/s²) para Δt que vai de 0,75 s a 1,25 s. Para estes valores, encontramos o valor Δv = 54,5 cm/s para a área, valor este que, somado ao valor da velocidade do carrinho no instante t = 0,25 s, nos dá v = 74,7 cm/s, calculado com base na Eq. (4).

Como mostra a ilustração acima, os três pontos do gráfico não se localizam sobre a sua linha de tendência. Então, ao invés de procurarmos os dados na tabela de acelerações instantâneas, utilizaremos como recurso a própria linha de tendência, que nos fornece os valores de aceleração instantânea dentro de qualquer instante de tempo que a elas esteja relacionado.

Da ilustração, podemos retirar que a (t=0,25 s) = 54,5 cm/s² e a (t=1,25 s)= 52,2 cm/s². Então, nos resta calcular a área abaixo dos patamares da aceleração média, representados na Figura 37, onde:

$$a(t=0,25s) \approx (50\ cm/s^2) \times (1s) \approx 50 cm/s. \tag{8}$$

Da Eq. (1), resulta:

$$v(t = 1{,}25s) \approx 51 cm/s\,. \tag{9}$$

Então, sabendo que v (t=0,25 s)= 20,2 cm/s, podemos calcular v (t=1,25 s) para h_1 assim:

$$v(t = 1{,}25s) = 27{,}5 + 23{,}1 = 50{,}6 cm/s \tag{10}$$

ou seja

$$v(t = 1{,}25s) = 27{,}5 + 23{,}1 = 50{,}6 cm/s\,, \tag{11}$$

concordando com o resultado calculado através das acelerações médias, com uma discrepância de aproximadamente 2%, que representa muito pouco, se comparada com a incerteza experimental para o cálculo da velocidade, que é aproximadamente 2 cm/s. Além do que, se diminuíssemos o intervalo de tempo utilizado para a coleta de dados de posição no trilho de ar, encontraríamos valores constantes para as acelerações do móvel nas três inclinações propostas.

Com esses cálculos mostramos as relações gráficas que podem ser estabelecidas entre posição, velocidadee aceleração no movimento do móvel, através da interação com o teorema da velocidade média. Passaremos agora às relações algébricas.

Determinação da função horária da velocidade para o MRUV

Na construção dos gráficos 11, 12 e 13, calculamos a velocidade média de forma conveniente através de sua definição, uma vez que possuíamos os valores de posição e de instante de tempo para tal; porém, vimos que há uma outra forma de fazermos o cálculo da velocidade média do móvel que é através do teorema da velocidade média:

$$v_m = \frac{v + v_0}{2}\,. \tag{12}$$

Este teorema é utilizado para cálculos em movimentos uniformemente acelerados e através dele podemos obter uma igualdade importante[17] para fins práticos de estabelecimento da função horária da posição em movimentos uniformemente variados.

Em muitos casos, os movimentos possuem certa "regularidade", ou seja, certa relação entre a posição e o tempo, de tal modo que é possível representá-los através de uma função matemática. Essa função, conhecida como função horária do movimento, nos dará a posição do corpo a cada instante da sua trajetória.

Partindo da equação da aceleração média, vejamos como chegar à função horária da posição para o movimento do móvel.

[17] Ver Eq. (6) à frente.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}. \tag{13}$$

Assumindo que a aceleração é constante no movimento: $a_m = a$, e que o instante inicial do movimento é to= 0, logo:

$$a_m = \frac{v - v_0}{t} \tag{14}$$

ou

$$v = v_0 + at. \tag{15}$$

Esta equação representa o que chamamos de função horária da velocidadedo móvel, ela nos mostra a forma da variação da sua velocidadecom o passar do tempo. Admitindo a = 17,4 cm/s2, a aceleração média dos dois primeiros segundos de movimento, para o movimento do móvel no trilho com elevação h1, podemos escrever a função horária da velocidadepara este caso. Sabendo que vo é a velocidadedo móvel no instante to = 0, podemos encontrar o valor de vo através do teorema da velocidade média, se soubermos os valores de v(t=0,25 s) e v(t=0,5 s) para utilizarmos a seguinte fórmula:

$$v(t = 0{,}25s) = \frac{v(t = 5{,}0s) + v(t = 0s)}{2} \tag{16}$$

Na Tabela 3 encontramos v(t=0,25 s) e, a despeito de não encontrarmos v(t = 0,5 s), podemos calculá-lo também pelo teorema da velocidade média, utilizando v(t = 0,25 s) e v(t = 0,75 s) — perceba que o ultimo também consta na Tabela 3. Desta forma:

$$v(t = 0{,}50s) = \frac{v(t = 75{,}0s) + v(t = 0{,}25s)}{2} \tag{17}$$

substituindo os valores, temos como resultado:

$$v(t = 0{,}50s) = \frac{19{,}8 + 10{,}8}{2} = 15{,}3cm/s \tag{18}$$

o que nos permite calcular v(t=0 s), ou seja, vo, através da Eq. (8), encontrando:

$$\frac{v(t = 0s) + 15{,}3}{2} = 10{,}8\ cm/s\text{, ou } v(t = 0s) = v_0 = 6{,}3\ cm/s \tag{19}$$

Então, de acordo com a Eq. (7), escrevemos a função horária da velocidadepara o móvel em MRUV na rampa com elevação h1, como:

$$v = (6{,}3 + 17{,}4\ t)\ cm/s \tag{20}$$

e, como essa equação descreve o comportamento da velocidadedo móvel com respeito à evolução do tempo, se construirmos uma nova tabela de velocidadeem função do tempo e a partir da mesma traçarmos um gráfico v x t, esperamos obter uma curva idêntica à do Gráfico 21.

Tabela 6. Valores de velocidadee de tempo, relacionados a partir da Eq. (10).

t (s)	0,0	0,7	1,4	2,1
v (cm/s)	6,3	18,5	30,7	42,8

Traçando o gráfico *v* em função de *t,* e comparando com a linha de tendência do Gráfico 21, temos duas curvas idênticas:

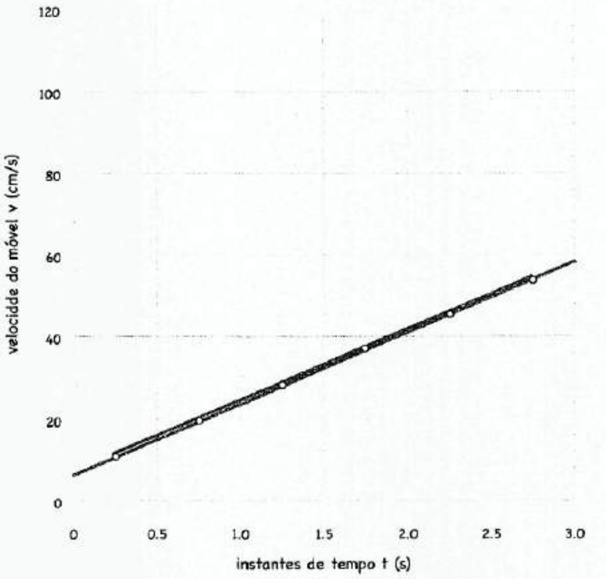

Figura 38. : Comparação dos dados experimentais com os dados obtidos pela função horária da velocidade para h_1.

Podemos proceder da mesma forma para obter as funções horárias da velocidadedo móvel descendo o trilho sob as elevações h_2 e h_3. Para h_2, deriva da Eq. (9) que:

$$v(t = 0,50s) = \frac{32,4 + 13,9}{2} = 23,1 cm / s \tag{21}$$

sabendo que v(t = 0,25 s) = 13,9 cm/s e v(t = 0,75) = 32,4 cm/s (Tabela 3). Da Eq. (8), resulta:

$$v(t = 0,50s) = \frac{32,4 + 13,9}{2} = 23,1 cm/s . \quad (22)$$

Se considerarmos a aceleração do móvel como sendo a= 36,3 cm/s2, a média das acelerações nos dois primeiros segundos de movimento, podemos escrever a sua função horária da velocidade:

$$v = (46,5 + 36,3t) cm/s \quad (23)$$

e seguir o para o procedimento de verificação de equivalência ente as linhas de tendência dos dados da Tabela 3 e dos dados fornecidos pela função horária.

Tabela 7. valores de velocidade e de tempo, relacionados a partir da Eq. (11).

t (s)	0,0	0,7	1,4	2,1
v (cm/s)	4,65	30,1	55,5	80,9

Fazendo a comparação gráfica, temos novamente duas curvas de coeficientes angular e linear idênticos:

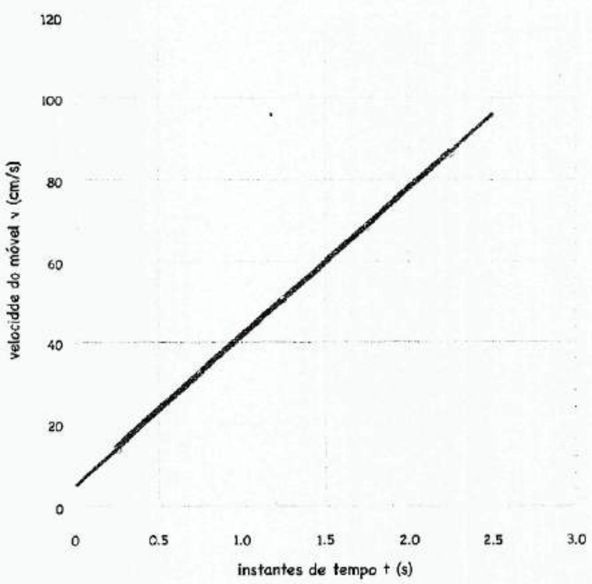

Figura 39. Comparação entre as curvas oriundas dos dados experimentais e da função horária da velocidade para h_3

Para h_3, através da Eq. (9), escrevemos que:

$$v(t=0,50s)=\frac{32,4+13,9}{2}=23,1cm/s \tag{24}$$

sabendo que v(t = 0,25 s) = 20,2 cm/s e v(t = 0,75 s) = 46,7 cm/s. Então podemos, pela Eq. (8), obtemos o valor de v_0.

$$v(t=0,50s)=\frac{32,4+13,9}{2}=23,1cm/s \tag{25}$$

Se considerarmos a aceleração do móvel como sendo a = 53,3 cm/s², a média das acelerações nos dois primeiros segundos de movimento, podemos escrever a sua função horária da velocidade:

$$v=(7,0+53,3t)cm/s \tag{26}$$

e seguir o para o procedimento de verificação de equivalência ente as linhas de tendência dos dados da Tabela 3 e dos dados fornecidos pela função horária.

Tabela 8. valores de velocidadee de tempo, relacionados a partir da Eq. (12).

t (s)	0,0	0,7	1,4	2,1
v (cm/s)	7,0	44,3	81,6	118,9

Como esperávamos, no gráfico abaixo as curvas são coincidentes.

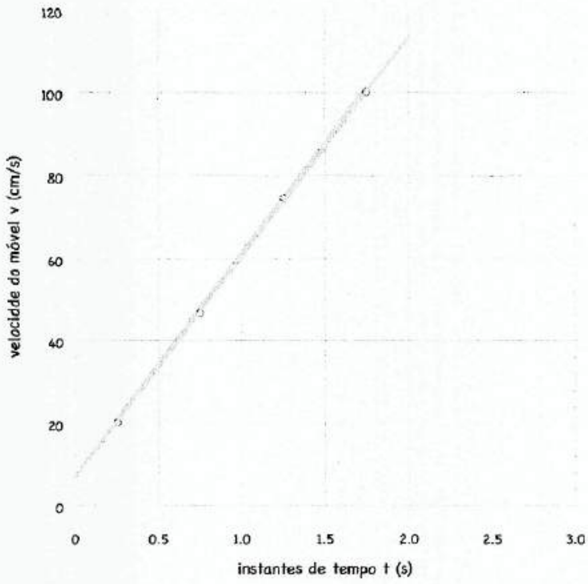

Figura 40. : Comparação entre as curvas oriundas dos dados experimentais e da função horária da velocidade para h_3

Determinação da função horária da posição para o MRUV

Do Teorema da Velocidade média e da definição de Velocidade média, podemos escrever:

$$v_m = \frac{v + v_0}{2} = \frac{s - s}{t - t_0}. \tag{27}$$

Se $t_0 = 0$, logo:

$$\frac{v + v_0}{2} = \frac{s - s}{t}, \tag{28}$$

Substituindo na igualdade (9) o valor de v obtido na relação (7), temos:

$$\frac{v_0 + at + v_0}{2} = \frac{s - s}{t} \tag{29}$$

ou

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \tag{30}$$

que é a função horária da posição para o movimento uniformemente variado. Para encontrarmos esta função para os três movimentos da experiência, com os seus coeficientes s_0, v_0 e a, vamos precisar saber como esta forma algébrica se comporta graficamente.

Comparação estética da função horária da posição com a equação da parábola

Durante o nosso estudo gráfico nós vimos que a variação da posição com o tempo se comporta de uma maneira específica. Essa forma chamada de parabólica foi estudada pelos gregos Manæcmo e Apolônio, que descobriram suas propriedades e deixaram caminho aberto para que Descartes muito tempo depois, associasse equações a seu formato gráfico.

Para fazer a construção geométrica da parábola, precisamos primeiramente traçar eixos vertical e horizontal de referência e então fixar um ponto no eixo horizontal, que chamaremos de foco da parábola (F), conforme a figura abaixo.

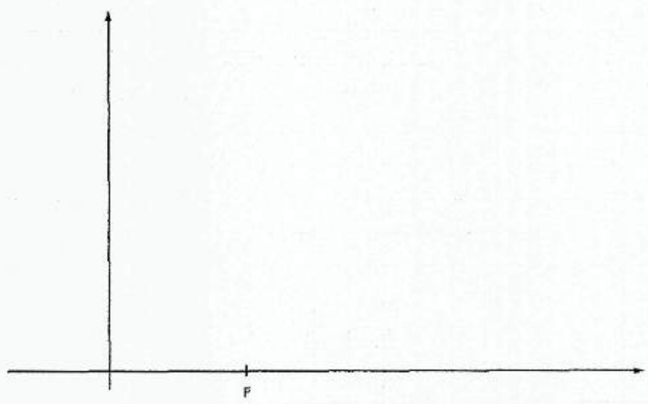

Figura 41. Eixos vertical e horizontal de referência para a construção da parábola de focal F.

Tracemos uma reta que, partindo de F, encontre o eixo x, e então tracemos a partir do ponto de encontro com o eixo x uma reta perpendicular a anterior.

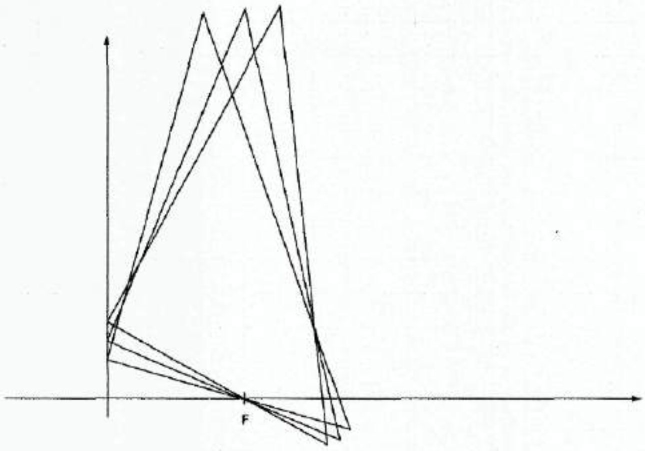

Figura 42. Construção geométrica da parábola.

Agora, façamos isso muitas vezes, fazendo a reta que parte de F, encontrar o eixo y em diversos pontos diferentes.

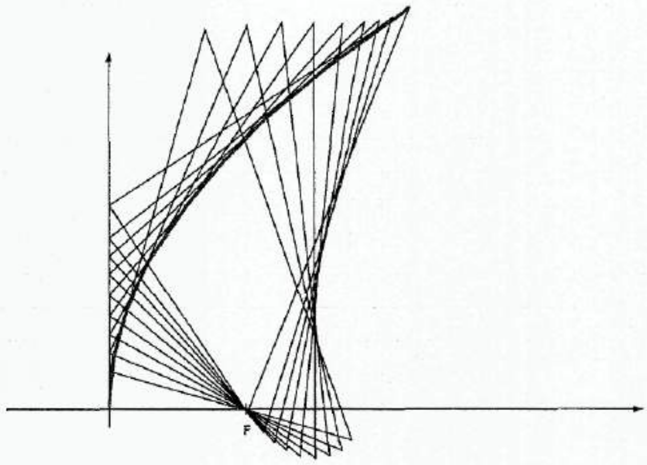

Figura 43. Parábola envelopada, representada pela curva em violeta.

Como podemos ver, a parábola é a curva representada pelo envelope das semi-retas que partem de F [29] e encontram o eixo x, e pelas semi-retas que partem do eixo x, resultantes do ponto de encontro das semi-retas que partem de F, fazendo um ângulo reto em relação às semi-retas que partem de F. Agora vamos passar à dedução geométrica da função relacionada à curva obtida na Ilustração 26. Para isso iremos utilizar ilustração abaixo como apoio.

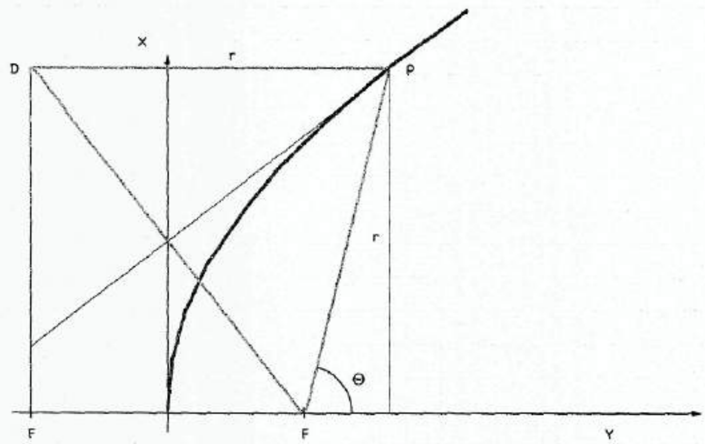

Figura 44. Parábola com vértice na origem, onde D é a reta diretriz, F é o foco e r é igual à distância do ponto D ao ponto P ou do ponto P ao ponto F.

A condição de existência da curva acima é que o ponto P tenha a mesma distância em relação ao ponto F e ao ponto D. O ponto D localiza-se em uma reta paralela ao eixo x a uma distância f da mesma.

$$PD = PF \tag{31}$$

Chamemos as distâncias e de . Pela figura, podemos ver que:

$$\begin{aligned} x &= rsen\theta \\ y &= F + r\cos\theta \end{aligned} \tag{32}$$

sendo $r = F + y$, deriva que:

$$\begin{aligned} y &= (r - y) + r\cos\theta \\ 2y &= r + r\cos\theta \end{aligned} \tag{33}$$

Utilizando a Eq. (32) ao quadrado e manipulando-a até chegarmos à forma:

$$x^2 = r^2 sen^2\theta$$
$$x^2 = r^2\left(1-\cos^2\theta\right)$$
$$x^2 = r^2\left(1+\cos\theta\right)\left(1-\cos\theta\right) \tag{34}$$
$$x^2 = \left[r\left(1+\cos\theta\right)\right]\left[r\left(1-\cos\theta\right)\right]$$

combinando (33) e (34), encontramos:

$$x^2 = 4Fy \tag{35}$$

ou, finalmente

$$y = \frac{1}{2F}x^2. \tag{36}$$

Esta é chamada de "primeira equação geral da parábola" devido à localização de seu vértice na origem do sistema de coordenadas. A chamada "segunda equação geral da parábola" é a representação algébrica de uma parábola onde o vértice está deslocado da origem do sistema de coordenadas e, por isso, encontra-se mais apta para fazermos a comparação da função horária que obtivemos nos Gráficos 11, 12 e 13, uma vez que em nenhuma dessas representações gráficas a parábola tem o vértice na origem do plano cartesiano. Iniciamos com uma ilustração representativa de uma parábola cujo vértice está no ponto (h, k) e cujo eixo é paralelo ao eixo x.

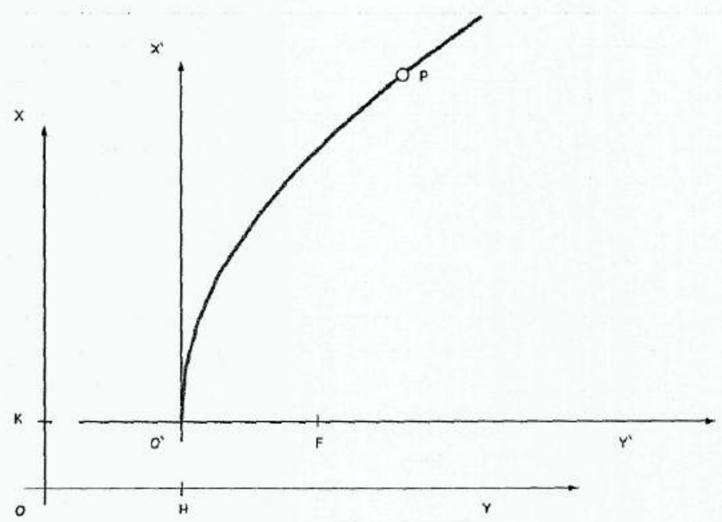

Figura 45. Parábola com vértice fora da origem O dos eixos coordenados.

Se os eixos coordenados são transladados de maneira que a nova origem o' é coincidente com o vértice (h, k), segue-se que a equação da parábola referente aos novos eixos x' e y' é dada por:

$$x'^2 = 4Fy' \tag{37}$$

com base na translação dos eixos x e y, são válidas as transformações:

$$x = K + x' \tag{38}$$

e

$$y = H + y' \tag{39}$$

que podem ser substituídas na Eq. (23) e, desta forma encontramos:

$$y^2 = 4fx\ y^2 = 4fx \tag{40}$$

ou, se desenvolvermos as operações indicadas:

$$y = H + \frac{K^2}{4F} - \frac{K}{2F}x + \frac{1}{4F}x^2 \tag{41}$$

encontramos a equação estendida da parábola cujo vértice se encontra no ponto (h,k).

Podemos fazer as substituições: $x = s$ e $y = t$, de acordo com a necessidade que se apresenta que é comparar a equação da parábola com a equação do movimento do móvel, que é a função horária da posição para o MRUV. Assim, a equação toma a seguinte forma:

$$s = s_0 + v_o t + \frac{1}{2}at^2 \tag{42}$$

onde fizemos

$$s_0 = H + \frac{K^2}{4F},\ v_0 = -\frac{K}{2F}\ \text{e}\ a = \frac{1}{2F} \tag{43}$$

É interessante notar que a aceleração no movimento uniformemente variado corresponde ao inverso do dobro do foco da parábola que representa o movimento. A partir dessas regras de correspondência, podemos encontrar os pontos (h,k) de localização dos vértices das parábolas que representam as curvas s x t para o movimento do móvel nas três elevações h_1, h_2 e h_3.

Para os movimentos com h_1, h_2 e h_3, temos os valores de so (Tabela 1), vo (encontrados no tópico anterior) e da aceleração, que no tópico anterior admitimos como sendo a média das acelerações nos dois primeiros segundos de movimento. Desta forma através de simples substituição de s_0, v_0 e a, no conjunto de Eqs. (24), formamos Tabela 9 com os valores encontrados para o foco e para o ponto de localização do vértice da parábola em relação à origem das coordenadas cartesianas:

Tabela 9. valores de H, K e F para as parábolas representativas de s vs. t para o movimento do móvel nas três inclinações do trilho.

	H	K	F
h_1	-1,2	-0,38	0,03
h_2	-0,06	-0,05	0,01
h_3	-0,12	-0,07	0,01

Deve-se observar que H, K e F estão relacionados: H ao eixo x, que representa a posição do móvel; K ao eixo y, que representa o instante de tempo do movimento; e F ao eixo x, porque a parábola tem seu eixo paralelo ao eixo x. Desta forma, descobrimos os principais elementos geométricos que caracterizam as parábolas em questão, através dos coeficientes das suas respectivas funções horárias de posição.

5. Considerações finais

Através de um método relativamente simples como fazer uma experiência e através de seus dados discutir uma idéia física, podemos reconstruir de um jeito lúdico, porém não desapegado ao formalismo científico, o conteúdo da cinemática do MUV em sala de aula de forma a abranger diversas áreas interdisciplinares para que conteúdo seja abordado de forma ampla. A Este tipo de abordagem é positiva no sentido de usarmos uma linguagem simples para que o aluno possa compreender conceitos e também no sentido de introduzirmos gradualmente o vocabulário e a linguagem corretos para o estudo da cinemática. Neste trabalho aparecem como resultados significativos:

1. A validade da utilização do teorema da velocidade média para a descoberta algébrica da função horária da posição no movimento uniformemente acelerado.
2. A utilidade da demonstração de Oresme do teorema da velocidade média para a análise de gráficos de movimento uniformemente acelerado.
3. A comprovação geométrica do perfil parabólico da curva de posição com respeito ao tempo para o movimento uniformemente acelerado.
4. A relação onde a aceleração é igual ao inverso do dobro do foco da parábola que representa o MUV em estudo.

Um resultado importante da nossa breve pesquisa em história da física é que podemos transferir aos alunos o conhecimento de que algumas das principais propriedades cinemáticas do movimento uniformemente variado, que ainda são atribuídas a Galileu por alguns textos de física, foram descobertas e provadas pelos acadêmicos do século 14 [30]. Galileu apresentou a regra de Merton no seu "Diálogo sobre Duas Novas Ciências" ([20], p.231), em 1638, sob o título de Teorema I, Proposição I, no terceiro capítulo de seu livro, na seção intitulada Movimento Acelerado, aplicando-a a queda livre dos corpos.

Apêndice A

Biografia Simplificada de Nicole Oresme

Nicole Oresme foi de origem normanda. O lugar exato e ano do seu nascimento não são conhecidos, assim como pouco de sabe a respeito dos primeiros anos da sua educação. Em 1348 seu nome aparece em uma lista de graduados bolsistas em teologia pela faculdade de Navarra da Universidade de Paris. Oresme tornou-se diretor da faculdade de Navarra em 1356. Oresme foi nomeado cônego (1362) e deão (1364) da Catedral de Rouen e também cônego da Sainte Chappele em Paris (1363). Por volta de 1370, sob as ordens do rei Carlos V da França, Oresme traduziu alguns dos livros de Aristóteles do latim para o francês. Sua influência na língua francesa pode ser destacada através da criação de equivalentes franceses para muitos termos científicos e filosóficos latinos. Oresme foi eleito bispo de Lisieux, na França, em 1377 e consagrado em 1378 [31].

Nicole Oresme também foi filósofo escolástico, economista, e matemático cujo trabalho proveu algumas das bases para o desenvolvimento da matemática moderna e da ciência e da prosa francesa, particularmente no que diz respeito ao vocabulário científico.

Por volta de 1360, Oresme apresentou suas idéias e comentários sobre economia em "Ética, Política e Economia", assim como em um tratado anterior, "De origine, natura, jure et mutationibus monetarum" ("Sobre a origem, natureza e status jurídico da cunhagem de moedas"). Oresme argumentou que a cunhagem pertencia à esfera pública, não ao príncipe, que não teria nenhum direito a variar arbitrariamente o seu conteúdo ou peso. Sua repugnância com os efeitos da falsificação da moeda influenciou a política monetária de Carlos V. Oresme geralmente é considerado como o maior economista medieval.

Oresme é também considerado um dos mais eminentes filósofos da escolástica, destacado por seu pensamento independente e sua crítica a vários dogmas aristotélicos. Ele rejeitou a definição aristotélica de tempo como medida do movimento, argumentando a favor de uma definição de tempo como a sucessiva duração das coisas, independentemente do movimento. Em "Livre du ciel et du monde" (1377; Livro sobre o céu e o mundo), Oresme questionou a falta de provas da teoria aristotélica da Terra estacionária e da rotação da esfera das estrelas fixas. Apesar de Oresme ter demonstrado a possibilidade de uma rotação axial diária da Terra, ele terminou por afirmar sua crença em uma Terra estacionária. Como muitos outros filósofos escolásticos, Oresme sustentou a existência de um vazio infinito ao redor do mundo, o qual ele identificou com Deus, que também era relacionado com a eternidade na sabedoria escolástica.

Oresme foi um oponente da astrologia, que ele atacou com base em aspectos religiosos e científicos. Como com a astrologia, ele lutou contra a fé nos fenômenos ocultos e "maravilhosos" pela explicação dos mesmos em termos de causas naturais em seu "Livre de divinacions" (Livro das adivinhações).

Os trabalhos mais importantes do filósofo foram: "De proportionibus proportionum", "Ad pouca respicientes", "Le livre du ciel et du monde", "Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum". "Algorismus proportionum", "Questiones super geometriam Euclidis" e "Questiones de Cielo".

Segundo o comentário de Stefan Kirschner, a contribuição mais importante de Oresme à matemática, se encontra em seu "Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum" (Tratado sobre as configurações das qualidades e movimentos). Nesse trabalho Oresme concebeu a idéia de utilizar coordenadas retangulares (latitude e longitude) e suas figuras geométricas resultantes para distinguir entre distribuições uniformes e não uniformes de várias quantidades, depois estendendo essa definição à inclusão de figuras tridimensionais. Desta maneira, Oresme ajudou a introduzir os fundamentos do que permitiria a René Descartes o desenvolvimento da geometria analítica. Além disso, ele usou suas figuras para dar a primeira prova do teorema de Merton, como foi explicado durante esta monografia.

Quando provou o teorema de Merton era acadêmico da Universidade de Paris. Isto aconteceu logo depois que William Heytesbury, da Universidade de Oxford, Reino Unido, a apresentou com uma prova de sua autoria. Oresme também provou que a distância percorrida por um objeto em movimento uniformemente acelerado é proporcional ao quadrado do tempo. Estas duas provas anteciparam aspectos da física galileana do século XVII.

Apêndice B

Uma Outra Demonstração da Equação da Parábola

Charles H. Lehmann [32] sugere uma outra demonstração da equação da parábola com vértice na origem.

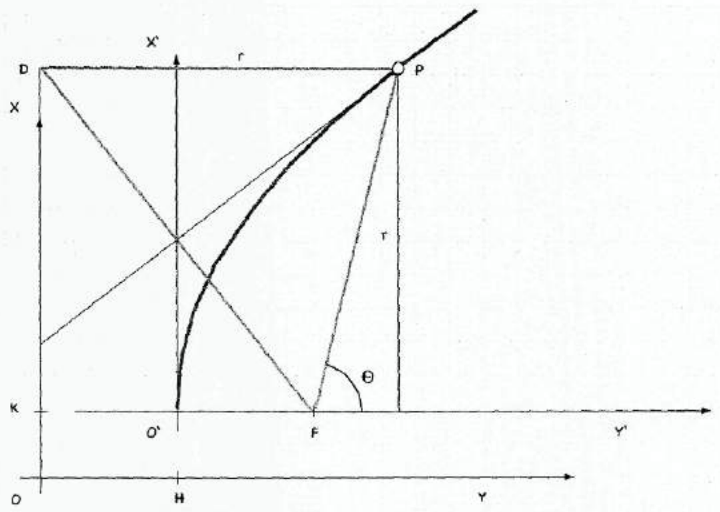

Figura 46. Parábola com vértice na origem do sistema de coordenadas

Nesta, partimos da definição de parábola: $FP = PD$ e, pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$\overline{FP} = [(y-F)^2 + x^2]^{1/2} \tag{44}$$

sabendo que

$$PD = y + F \tag{45}$$

podemos escrever a igualdade

$$[(y-F)^2 + x^2]^{1/2} = y + F \tag{46}$$

Daí resulta a equação da parábola com eixo em y.

$$x^2 = 4Fy. \tag{47}$$

Apêndice C

Um pouco sobre médias

Oresme utilizou a média aritmética em seu raciocínio a respeito do movimento acelerado para a construção de sua prova para o teorema da velocidade média. Se perguntarmos à história da ciência o motivo de sua escolha tão certeira, talvez não encontremos logo a princípio respostas que esclareçam o porquê do uso que fez da média aritmética e apenas fiquemos com uma leve impressão de que o filósofo escolástico tinha uma ótima intuição.

O fato é que as médias foram definidas com a teoria das proporções (540 a.C.) a partir do trabalho que Pitágoras desenvolveu quando visitou a Mesopotâmia. Howard Eves [26] conta que o Sumário Eudemiano afirma ter existido três médias à época de Pitágoras: a aritmética, a geométrica e a subcontrária, que mais tarde passou a se chamar harmônica. Giuseppe Milone [33] define média como sendo o centro de massa (ponto de equilíbrio) do conjunto de dados estudado. Aqui, fazemos um apanhado das médias mais conhecidas com o objetivo de enriquecer o nosso conhecimento desse tipo de cálculo.

Média aritmética:

Sejam os três seguimentos de comprimentos a, A e b, representados abaixo, tais que a diferença entre os comprimentos A e a é igual à diferença entre os comprimentos A e b.

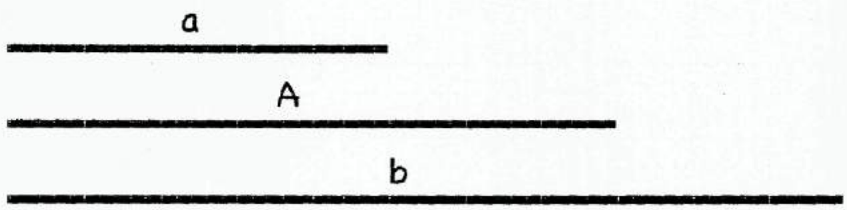

Figura 47 Representação geométrica da média aritmética.

Podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{A-a}{b-A}=1. \qquad (48)$$

Chamamos então de A, a média aritmética de *a* e *b*, o valor

$$A = \frac{a+b}{2}. \tag{49}$$

Média geométrica:

Sejam os três seguimentos de comprimentos *a*, *G* e *b*, representados abaixo, tais que a razão entre os comprimentos *G* e *a* é igual à razão entre os comprimentos *b* e *G*.

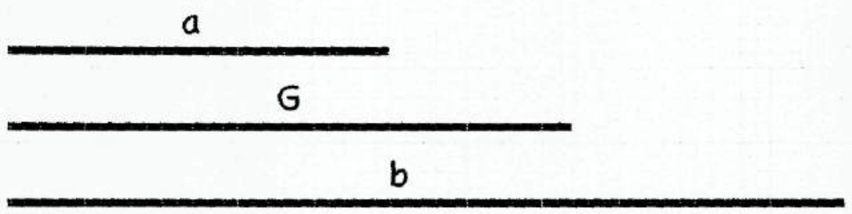

Figura 48. Representação geométrica da média geométrica.

Podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{G/a}{b/G} = 1. \tag{50}$$

Chamamos então de G, a média geométrica de *a* e *b*, o valor

$$G = \sqrt{ab}. \tag{51}$$

Média harmônica ou subcontrária

Sejam os três seguimentos de comprimentos a, H e b, representados abaixo, tais que a razão entre a diferença (H - a) e a é igual à razão entre a diferença (b – H) e b.

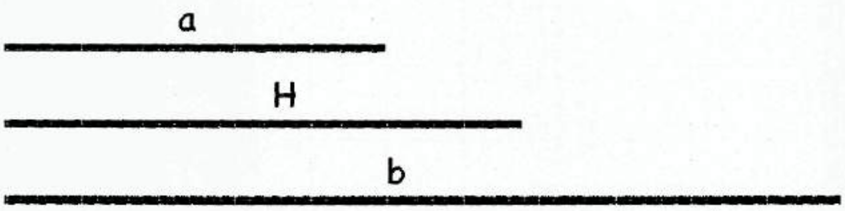

Figura 49. Representação geométrica da média harmônica.

Podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{(H-a)/a}{(b-H)/b}=1. \qquad (52)$$

Chamamos então de H, a média harmônica de *a* e *b*, o valor

$$H=\frac{2ab}{b+a} \text{ ou } \frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}. \qquad (53)$$

Algumas outras médias

Algumas outras médias são mencionadas no livro de Howard Eves, são elas:

Média heroniana

$$h=a+\sqrt{ab}+b \qquad (54)$$

Média contra-harmônica

$$C = \frac{a^2 + b^2}{a + b} \tag{55}$$

Média centroidal

$$g = \frac{2}{3}\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}\right) \tag{56}$$

Raiz média dos quadrados

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \tag{57}$$