UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE ECONOMIA
MONOGRAFIA DE BACHARELADO

Elementos para a leitura de produção de mercadorias por meio de mercadorias

CONRADO FREITAS PAULO DA COSTA
matrícula n^o: 105025496

ORIENTADOR: Prof. Dr. Fabio Neves Perácio de Freitas

SETEMBRO 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE ECONOMIA
MONOGRAFIA DE BACHARELADO

Elementos para a leitura de produção de mercadorias por meio de mercadorias

CONRADO FREITAS PAULO DA COSTA
matrícula n^{o}: 105025496

ORIENTADOR: Prof. Dr. Fabio Neves Perácio de Freitas

SETEMBRO 2010

As opiniões expressas nesse trabalho são de exclusiva responsabilidade do autor

Dedicatória

aos meus interlocutores mestres e amigos.

e armas alheias, ainda que sejam as de Aquiles, a ninguém deram vitória.
[Padre Antônio Vieira — Sermão da Sexagésima]

"Ich wäre gerne auch weise.
In den alten Büchern steht, was weise ist:
Sich aus dem Streit der Welt halten und die kurze Zeit
Ohne Furcht verbringen
Auch ohne Gewalt auskommen
Böses mit Gutem vergelten
Seine Wünsche nicht erfüllen, sondern vergessen
Gilt für weise."

[Bertol Brecht, An die Nachgeborenen]

"Nos livros antigos está escrito o que é a sabedoria:
Se manter afastado dos conflitos do mundo
É passar sem medo
O curto tempo que se tem para viver.
Seguir seu caminho sem violência
Pagar o mal com o bem.
Não satisfazer os desejos, mas esquecê-los.
Sabedoria é isso!"

[Bertol Brecht, Aos que vierem depois de nós]

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos inúmeros ouvintes e leitores das versões que evoluíram para essa versão final. Ao meu pai, por sua orientação e inestimáveis auxílios. Ao Gabriel por suas minuciosas revisões. Ao Alexandre por sua leitura solícita. Ao Francisco por seu entusiasmo na descoberta de relações com a geometria projetiva. Ao meu irmão, raro gênio, dedico o apêndice e agradeço a dica da demonstração. Por fim agradeço ao meu orientador por ter me ajudado a fazer um trabalho do qual me orgulho muito e que durante toda sua elaboração sempre soube indicar os melhores textos.

Resumo

O presente trabalho de fim de curso trata de um tópico da obra "Produção de Mercadorias por Meio de Mercadorias: Prelúdio a uma Crítica da teoria econômica". Trata do método que simplifica o cálculo dos preços relativos dentro de um sistema de preços não linear. Apresentaremos a relação salário-lucro como uma propriedade intrínseca de um sistema econômico viável. Isto posto, estudamos a mudança engenhosa feita sobre o modelo dos preços. A mudança do salário como variável exógena para o lucro. Veremos com isso que o sistema se torna um sistema linear.

Conteúdo

1 Introdução

O objetivo do presente trabalho é fazer uma leitura acompanhada da obra de Sraffa "Produção de mercadorias por meio de mercadorias: Prelúdio a uma crítica da teoria econômica."[1]. O que seria isto? Trata-se de seguir passo a passo os argumentos do autor visando elucidar algumas passagens e permitir uma compreensão do livro.

O livro só veio a ser publicado em 1960. Foram portanto mais de trinta anos que Sraffa levou para escrever menos de 100 páginas.

Sraffa mesmo diz:

> "Estas alusões dão, incidentalmente, alguma idéia sobre o desproporcional período de tempo durante o qual esteve em preparação um trabalho tão breve."
>
> [Sraffa — p. 4]

Por mais que Sraffa considere breve, não se trata de um trabalho ligeiro. De fato, a profundidade do texto parece ser infinita e diversas aproximações são possíveis. Uma abordagem qualitativa poderia envolver um estudo da Abordagem Clássica do Excedente[2]. Ainda dentro de um estudo qualitativo, seria possível estudar as implicações que a teoria tem sobre as teorias marginalistas e os debates que emergiram dela[3].

Por ouro lado, ainda que focalizando aspectos matemáticos da obra, é possível elaborar estudos específicos[4].

Não faremos isso aqui. A presente monografia se concentra na leitura do texto, visando a compreensão dos seus detalhes.

Buscou-se dotar o leitor dos elementos básicos para pensar as questões que envolvem certas elaborações matemáticas que permeiam o texto. Isso não quer dizer que foram evitadas as discussões dos conceitos econômicos. A apresentação desses conceitos evolui juntamente com os problemas matemáticos e procura ser fiel à visão geral do autor.

Encontramos já no prefácio alguns indícios de sua visão geral, o ponto de vista adotado:

> "Esse ponto de vista, que é dos economistas clássicos, de Adam Smith a Ricardo, tem estado submerso e foi esquecido desde o advento do método 'marginalista'."
>
> [Sraffa, p. 3] [5]

[1] Foram utilizadas duas versões para as citações: uma versão em inglês [Sraffa 1960] e outra em português [Sraffa 1980[1960]].

[2] Para uma apresentação do paradigma clássico, veja [Eatwell e Panico 1987] e [Garegnani 1987].

[3] Por exemplo, [Eatwell 2000], [Schefold 2000], [Garegnani 2000], [Garegnani 2007], [Garegnani 2007], [Samuelson 1987] e [Samuelson 2000].

[4] Veja [Velupillai 2007] para um estudo do caráter construtivista da obra de Sraffa, [Bellino 2004] para um estudo do caráter auxiliar da mercadoria Padrão, ou ainda, para um estudo de uma demonstração do que ficou conhecido como a prova do gradiente, [Salvadori 2007].

[5] Algumas citações não correspondem exatamente à versão portuguesa. O autor confrontou a tradução com o texto original e, em algumas ocasiões, optou por uma tradução própria, mais aderente ao texto original.

Mesmo Sraffa fala muito pouco do seu ponto de vista, mas isso não nos impede de iniciar a leitura. De fato, espera-se que o domínio das questões apresentadas nessa monografia capacite o leitor a um melhor discernimento das importantes questões de fundo. Encorajamos aquele que concluir a leitura a avançar por esses caminhos.

No capítulo 1, apresentamos o esquema circular numa economia de subsistência. O conceito de sistema produtivo, preços, mercado e reprodução são abordados não em sua totalidade, mas no nível compatível com o problema exposto.

No capítulo 2, tratamos de economias que produzem com excedente. Introduzimos o salário e o lucro, que até então não tinham razão para figurar em nosso modelo. Em seguida, tratamos das implicações da variação do salário sobre a mudança dos preços num contexto de homogeneidade ou heterogeneidade das proporções entre o trabalho e os meios de produção utilizados na produção das mercadorias.

O último capítulo trata do sistema Padrão. Nele apresentamos a construção e a desconstrução desse auxiliar teórico. Pode-se reconhecer o Teorema de Perron-Frobenius nesse capítulo. Todavia, tal conhecimento matemático não é exigido do leitor.

De fato, exigimos do leitor apenas conhecimentos elementares de álgebra linear. Tudo o que fugiu desse escopo foi posto em apêndice. No apêndice B, pode-se encontrar uma etapa importante da demonstração do teorema que está por trás do capítulo 5 do livro de Sraffa, a demonstração da existência de um sistema Padrão obtido a partir de multiplicadores positivos. O apêndice A trata da pergunta acerca da independência linear do sistema de preços de uma economia de subsistência quando dele retiramos uma equação.

Ao final da leitura, o leitor terá maior familiaridade para lidar com os 5 primeiros capítulos da obra "Produção de mercadorias por meio de mercadorias."

Poder-se-ia objetar a ausência do capítulo 6. Tal é compreensível, uma vez que com esse sexto capítulo teríamos completado a leitura da parte 1 da obra. Isso não foi feito pelo único motivo de concentrar a atenção do leitor sobre um método de calcular os preços relativos da economia.

2 Sistemas Econômicos[6]

2.1 Produção para subsistência [*Sraffa — Cap. 1*]

§1 (Dois produtos)[7]

Pensamos um sistema econômico como uma coleção de indústrias que transformam insumos em produtos no período de um ano. Os produtos se transformarão nos insumos necessários para a produção e nos meios de subsistência dos trabalhadores através de trocas realizadas ao final do ano, num mercado.

Nos sistemas considerados, cada indústria produz apenas um produto. Podemos representar um sistema econômico da seguinte forma:

indústria do trigo:	280 Trigos	+	12 Ferros	→	400 Trigos
indústria do ferro:	120 Trigos	+	8 Ferros	→	20 Ferros
Totais:	400 Trigos	+	20 Ferros		

Estamos indicando que a indústria do trigo utiliza 280 Trigos e 12 Ferros como insumos e produz ao final do ano 400 Trigos. Para ser mais precisos, deveríamos dizer 280 quilos de trigo e 12 toneladas de ferro. Ou seja, precisaríamos fazer uma referência à unidade física a que essas quantidades se referem. Não faremos isso aqui, com o intuito de reduzir a notação. É importante que se diga isso, pelo menos uma vez.

Investigamos as propriedades do sistema em reprodução. Isso significa que exigimos que o nosso sistema econômico se repita da mesma forma, ano após ano. A partir dessa condição, extrairemos os demais raciocínios. Dessa forma, não trataremos de variações nas quantidades produzidas ou consumidas.

Esse modo de pensar põe à luz a visão do processo econômico como um fluxo circular. Uma mercadoria é ao mesmo tempo insumo e produto. Note que, como o consumo total de cada bem é igual à produção total do respectivo bem, não há excedente. Tudo o que foi produzido deve ser utilizado como insumo para garantir a reprodução do sistema. No mercado que ocorre ao final do ano, a indústria do trigo precisa de 12 unidades de ferro e a indústria do ferro precisa de 120 unidades de trigo. Logo, as trocas devem se dar a uma taxa de 1 F (1 unidade de ferro) por 10 T (10 unidades de trigo), posto que as trocas ocorridas no mercado devem restabelecer as condições iniciais para o início de um novo ciclo.

[6] Quando citarmos Sraffa nesse trabalho, citamos apenas a página e não a obra. Isso não causará confusão posto que todas as citações do autor são retiradas do mesmo livro: "Produção de mercadorias por meio de mercadorias" de 1960.

[7] Indicaremos assim ao leitor a correspondência entre o assunto tratado no trabalho e o parágrafo da obra de Sraffa.

Estando no mercado, o preço do ferro é 10 vezes maior do que o preço do trigo. O que importa para nós são os preços relativos. Eles traduzem as taxas de troca. Conseguimos calcular os preços relativos nesse caso simples.

Vejamos uma maneira de representar o sistema de preços obtido a partir do sistema econômico dado. Denotaremos por p_t, p_f os preços do trigo e do ferro, respectivamente. Assim temos que:

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(Lt)} & 280p_t & + & 12p_f & = & 400p_t \\ \text{(Lf)} & 120p_t & + & 8p_f & = & 20p_f \end{array}$$

Esse sistema indica que o valor obtido pela venda deve igualar o valor necessário para repor os insumos. Desenvolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{array}{lrcr} \text{(Lt')} & 12p_f & = & 120p_t \\ \text{(Lf')} & 120p_t & = & 12p_f \end{array}$$

As duas equações dão o mesmo resultado, isto é,

$$p_f = 10p_t.$$

§2 (Três ou mais produtos)

Considere agora o seguinte exemplo para sedimentar o modo de calcular os preços relativos através desse sistema de equações lineares. Neste caso, trata-se de uma economia composta por três indústrias: uma de trigo (T), uma de ferro (F) e uma de porcos (P). O exemplo, que extraímos do livro, é:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 240\text{ T} & + & 12\text{ F} & + & 18\text{ P} & \rightarrow & 450\text{ T} \\ 90\text{ T} & + & 6\text{ F} & + & 12\text{ P} & \rightarrow & 21\text{ F} \\ 120\text{ T} & + & 3\text{ F} & + & 30\text{ P} & \rightarrow & 60\text{ P} \\ \hline 450\text{ T} & & 21\text{ F} & & 60\text{ P} & & \end{array}$$

O sistema de preços é:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(Lt)} & 240p_t & + & 12p_f & + & 18p_p & = & 450p_t \\ \text{(Lf)} & 90p_t & + & 6p_f & + & 12p_p & = & 21p_f \\ \text{(Lf)} & 120p_t & + & 3p_f & + & 30p_p & = & 60p_f \end{array}$$

pondo $p_t = 1$ temos:

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{(Lt)} & 12p_f & + & 18p_p & = & 210 \\ \text{(Lf)} & 90 & + & 12p_p & = & 15p_f \end{array}$$

Isolando p_f na primeira equação, obtemos:

$$12p_f = 210 - 18p_p$$

que é o mesmo que:

$$15p_f = 262,5 - 22,5p_p$$

Agora, substituindo em (Lf):

$$90 + 12p_p = 262,5 - 22,5p_p$$

obtemos:

$$34,5p_p = 172,5.$$

Logo $p_p = 5$ e assim voltamos a equação de (Lf):

$$15p_f = 90 + 12p_p = 90 + 60 = 150.$$

Donde $p_f = 10$.

Lembrando que $p_t = 1$, os preços relativos da economia são:

$$10p_t = p_f = 2p_p.$$

Antes porém de prosseguir, vale notar que nessa economia já não se torna mais possível a troca dois a dois como mecanismo de reprodução social. De fato, note que a indústria do trigo precisa adquirir 12 ferros, mas para tanto deverá trocá-los por 120 trigos. Entretanto a indústria do ferro precisa apenas de 90 trigos e não faria a troca. Para realizar esse reordenamento das mercadorias, será necessário um comércio triangular. A organização de mercado ao final do ano resolve esse problema de forma direta. Afinal, bastará para cada indústria garantir um poder de compra que a capacite recompor os seus meios de produção para recomeçar o ano.

§3 (Caso geral)

Agora podemos generalizar para k bens, isto é, considere o seguinte sistema econômico:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_a & + & B_a & + & \cdots & + & K_a & \rightarrow & A \\ A_b & + & B_b & + & \cdots & + & K_b & \rightarrow & B \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ A_k & + & B_k & + & \cdots & + & K_k & \rightarrow & K \\ \hline \text{A} & & \text{B} & & \cdots & & \text{K} & & \end{array}$$

Onde:

$$\begin{cases} A_a & : \text{quantidade do bem } a \text{ destinado à produção do bem } a; \\ A_b & : \text{quantidade do bem } a \text{ destinado à produção do bem } b; \\ \vdots & \\ A_k & : \text{quantidade do bem } a \text{ destinado à produção do bem } k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_a & : \text{quantidade do bem } b \text{ destinado à produção do bem } a; \\ B_b & : \text{quantidade do bem } b \text{ destinado à produção do bem } b; \\ \vdots & \\ B_k & : \text{quantidade do bem } b \text{ destinado à produção do bem } k; \end{cases}$$

e assim por diante. Note que todas as quantidades são conhecidas por hipótese. Note também que indicamos com letras minúsculas as indústrias que produzem um determinado bem, e que notamos a quantidade de um bem com letra maiúscula.

As equações anteriores descrevem os métodos de produção das k indústrias. Por se tratar de uma economia de subsistência, temos que:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_a & + & A_b & + & \cdots & + & A_k & = & A \\ B_a & + & B_b & + & \cdots & + & B_k & = & B \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ K_a & + & K_b & + & \cdots & + & K_k & = & K \end{array}$$

Logo as equações de preços se tornam:

$$\begin{array}{rlllllll} \text{(La)} & p_aA_a + & p_bB_a + & \cdots & + & p_kK_a = & p_aA \\ \text{(Lb)} & p_aA_b + & p_bB_b + & \cdots & + & p_kK_b = & p_bB \\ & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \text{(Lk)} & p_aA_k + & p_bB_k + & \cdots & + & p_kK_k = & p_kK \end{array}$$

Aqui vale notar uma possível anomalia. Considere o seguinte sistema econômico com dois produtos e duas indústrias:

indústria do trigo:	20 Trigos +	0 Ferros	$\rightarrow$	20 Trigos
indústria do ferro:	0 Trigos +	5 Ferros	$\rightarrow$	5 Ferros
Totais:	20 Trigos +	5 Ferros		

Trata-se de uma economia de subsistência, mas ela é de tal sorte constituída que troca alguma precisa ser feita ao final do ano. Não havendo troca, não há mercado. Queremos excluir esse caso, logo exigimos que nenhuma indústria ou grupo industrial possa se reproduzir sem utilizar algum insumo produzido pelas demais indústrias. Exigimos portanto que haja uma interdependência entre as indústrias do nosso sistema econômico. Por mais que não seja necessário supor que uma mercadoria a, por exemplo, entre diretamente na produção das demais, exigimos que todas as indústria utilizem essa mercadoria direta ou indiretamente (por exemplo, através do consumo de alguma mercadoria que utiliza a).

Para ficar mais claro, considere o seguinte sistema econômico:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
400\text{ T} & + & 10\text{ F} & + & 0\text{ P} & \rightarrow & 450\text{ T} \\
50\text{ T} & + & 20\text{ F} & + & 10\text{ P} & \rightarrow & 60\text{ F} \\
0\text{ T} & + & 30\text{ F} & + & 10\text{ P} & \rightarrow & 20\text{ P} \\
\hline
450\text{ T} & & 60\text{ F} & & 20\text{ P} & &
\end{array}$$

Trata-se de um sistema de subsistência. Note que a indústria do trigo não utiliza porcos *diretamente*. Todavia, como ela utiliza ferros para produzir trigo e a produção de ferros utiliza diretamente porcos, há utilização *indireta* de porcos para a produção de trigo.

Voltando ao caso geral, como todas as indústrias do sistema econômico utilizam o bem a, seja direta ou indiretamente (através do consumo de um bem que utilize o bem a) então, pondo $p_a = 1$, o sistema fica com $k - 1$ incógnitas e, além disso, todo bem que utiliza a para ser produzido terá o seu preço maior do que zero.

Esse ponto aparentemente trivial é crucial para a boa construção do nosso modelo, afinal preços negativos ou nulos não têm sentido econômico algum. Vejamos então porque a positividade do preço do bem a implica na positividade de todos os demais preços.

No caso de dois bens, isso pode ser visto facilmente pois as equações de preço resultam em:

$$\begin{array}{rcrcl}
p_a A_a & + & p_b B_a & = & p_a A \\
p_a A_b & + & p_b B_b & = & p_b B
\end{array}$$

Como B_a e A_b são maiores do que zero, temos que a primeira linha do sistema pode ser reescrita da seguinte forma:

$$p_b B_a = p_a(A - A_a) = p_a A_b > 0 \ ,$$

donde concluímos que p_b é positivo. A segunda igualdade da equação acima é conseqüência das condições da reprodução simples, *i.e.* $A_a + A_b = A$.

Para ver isso no caso geral (k indústrias), podemos fazer um raciocínio seqüencial: tomamos o preço do bem a igual a um e notamos que:

$$p_b B_a + p_c C_a + \cdots + p_k K_a = p_a(A - A_a) = p_a(A_b + A_c + \cdots + A_k) > 0,$$

o que nos garante a existência de pelo menos uma outra mercadoria com preço positivo, digamos que seja a mercadoria b.

Dessa forma temos duas mercadorias com preços positivos. Tomando as duas primeiras equações do sistema de preços e somando, obtemos:

$$p_c(C_a + C_b) + \cdots + p_k(K_a + K_b) = p_a(A - A_a - A_b) + p_b(B - B_a - B_b) > 0$$

donde concluímos que mais uma mercadoria (digamos c) tem preço positivo. Prosseguindo dessa forma, concluímos que todas as mercadorias tem preços positivos.

Vejamos mais um detalhe do sistema de preços: a dependência/independência linear de suas equações. Como

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
\text{(La')} & A_a p_a & + & B_a p_b & + & \cdots & + & K_a p_k & - & A p_a & = & 0 \\
\text{(Lb')} & A_b p_a & + & B_b p_b & + & \cdots & + & K_b p_k & - & B p_b & = & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\text{(Lk')} & A_k p_a & + & B_k p_b & + & \cdots & + & K_k p_k & - & K p_k & = & 0
\end{array}$$

e ao somar todas as equações, temos que:

$$\begin{aligned}
&(La' + Lb' + \cdots + Lk') = \\
&p_a(A_a + \cdots + A_k - A) + p_b(B_a + \cdots + B_k - B) + \cdots + p_k(K_a + \cdots + K_k - K) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, o sistema não é linearmente independente.

Entretanto, ao retirarmos do sistema a k-ésima equação, obtemos um sistema de equações lineares linearmente independentes. Qual a importância disso? Lembremos que um sistema de equações lineares possui única solução quando o determinante da matriz associada é diferente de zero ou, o que é equivalente, quando as linhas do sistema são vetores linearmente independentes, isto é, que a única combinação linear das linhas que resulta no vetor nulo seja a combinação onde todos os coeficientes são nulos.[8] A independência linear garante a *existência* de um conjunto de preços *positivos* compatíveis com a reprodução e a *unicidade* dos preços relativos.

2.2 Produção com excedente [***Sraffa* — *Cap. 2***]

§4 (A taxa de lucro)

Abordaremos agora o caso em que há excedente econômico. Nos aproximamos efetivamente de uma economia mercantil capitalista. As equações de quantidades do sistema anterior eram de tal sorte que as quantidades produzidas igualavam o consumo necessário das indústrias, isto é:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_a & + & A_b & + & \cdots & + & A_k & = & A \\
B_a & + & B_b & + & \cdots & + & B_k & = & B \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
K_a & + & K_b & + & \cdots & + & K_k & = & K
\end{array}$$

[8] O leitor que quiser ver uma demonstração da independência linear das $k-1$ equações restantes pode consultar o apêndice A.

Agora temos um caso diferente. pois temos excedente. Assim:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_a & + & A_b & + & \cdots & + & A_k & \leq & A \\ B_a & + & B_b & + & \cdots & + & B_k & \leq & B \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ K_a & + & K_b & + & \cdots & + & K_k & \leq & K \end{array}$$

onde pelo menos uma das desigualdades é estrita.

Neste caso, torna-se preciso tratar a distribuição do excedente. Isso será tratado através do uso de duas categorias típicas do sistema capitalista: lucro e salário. A distribuição se dará a princípio por meio da taxa de lucro da economia. A taxa de lucro é a relação entre o valor do excedente apropriado pelos detentores dos meios de produção dessa indústria e o dispêndio com insumos (meios de produção).

A título de exemplo, o excedente apropriado pela indústria a é dado por $p_aA-(p_aA_a+p_bB_a+\cdots+p_kK_a)$. A taxa de lucro da indústria a (r_a) é dada por:

$$r_a = \frac{p_aA - (p_aA_a + p_bB_a + \cdots + p_kK_a)}{(p_aA_a + p_bB_a + \cdots + p_kK_a)}$$

Assim, as antigas equações de preço se tornam:

$$\begin{array}{lccccccccl} \text{(La)} & (A_ap_a & + & B_ap_b & + & \cdots & + & K_ap_k)(1+r_a) & = & Ap_a \\ \text{(Lb)} & (A_bp_a & + & B_bp_b & + & \cdots & + & K_bp_k)(1+r_b) & = & Bp_b \\ & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ \text{(Lk)} & (A_kp_a & + & B_kp_b & + & \cdots & + & K_kp_k)(1+r_k) & = & Kp_k \end{array}$$

Aqui, antes de prosseguirmos, cabe notar a precisão e o cuidado da linguagem de Sraffa. Ele evita usar o termo lucro como a remuneração do capital (conceito muito mais familiar). Por que isso é feito? Ainda não conhecemos os preços relativos do sistema. Não podemos somar bananas com maçãs! Enquanto desconhecermos os preços relativos do sistema, não poderemos agregar os diversos insumos que compõem os meios de produção de cada indústria. Sem preços relativos, como poderíamos falar de quantidade de capital? Sraffa reconhece a dificuldade:

> "[...] o excedente (ou lucro) deve ser distribuído em proporção aos meios de produção (ou capital) adiantados em cada indústria, e tal proporção entre dois agregados de bens heterogêneos (em outras palavras, a taxa de lucro) não pode ser determinada antes que conheçamos os preços dos bens."
>
> [Sraffa — p. 9]

De fato, a determinação da distribuição do excedente tem de ocorrer ao mesmo tempo que a determinação dos preços relativos. Mas precisamos entender como se dá essa distribuição. Sraffa adota a hipótese de que essa distribuição se dá segundo uma proporção uniforme em relação ao valor dos insumos adiantados. A uniformidade de taxa de lucro (r) — assim chamaremos essa proporção uniforme — captaria a operação das forças da concorrência capitalista.

Não faz sentido supor que uma indústria possa manter permanentemente lucros mais elevados do que as outras, pois se assim o fosse, haveria estímulo a um movimento intersetorial incompatível com uma condição de reprodução. Os preços que asseguram a uniformidade da taxa de lucro são chamados preços de produção. Desvios com relação aos preços de produção não serão considerados. Trabalhamos aqui com uma forma bem simples do modelo pois visamos a compreensão de seus mecanismos gerais.

Com a hipótese de uniformidade da taxa de lucro, vale que $r_a = r_b = \ldots = r_k = r$. Finalmente, obtemos as equações de preço:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\text{(La)} & (A_a p_a & + & B_a p_b & + & \cdots & + & K_a p_k)(1+r) & = & Ap_a \\
\text{(Lb)} & (A_b p_a & + & B_b p_b & + & \cdots & + & K_b p_k)(1+r) & = & Bp_b \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \quad \vdots & & \vdots \\
\text{(Lk)} & (A_k p_a & + & B_k p_b & + & \cdots & + & K_k p_k)(1+r) & = & Kp_k
\end{array}
$$

§5 (Exemplo de taxa de lucro)

Consideremos a seguinte economia:

280 Trigos	+	12 Ferros	→	575 Trigos
120 Trigos	+	8 Ferros	→	20 Ferros
400 trigos		20 Ferros		

Nesse caso, as equações de preço se tornam:

$$
\begin{array}{lcrcr}
(280\ p_t & + & 12\ p_f)(1 + \text{r}) & = & 575 \text{ Trigos} \\
(120\ p_t & + & 8\ p_f)(1 + \text{r}) & = & 20 \text{ Ferros}
\end{array}
$$

Veja que $p_t = 1$, $p_f = 15$ e $r = 25\%$ é uma solução do sistema de preços associado. De fato, verifique que:

$$(280 + 12 \times 15)1,25 = 575 = 575 \times 1$$

e

$$(120 + 8 \times 15)1,25 = 300 = 20 \times 15$$

§6 (Produtos básicos e não básicos)

Da existência de um excedente, surge uma nova possibilidade: a produção de bens de luxo, *i.e.*, bens que não entram na produção dos demais nem direta nem indiretamente. Por exemplo:

280 Trigos	+	12 Ferros	→	575 Trigos
120 Trigos	+	8 Ferros	→	20 Ferros
100 Trigos	+	0 Ferros	→	10 Broas
500 trigos		20 Ferros		

Aqui temos uma terceira indústria, que produz broas de trigo a partir de trigo. Como as duas primeiras indústrias são as mesmas da situação do parágrafo §5, $p_t = 1$, $p_f = 15$ e $r = 25\%$ tem que ser parte da solução para o sistema de preços decorrente. O preço da broa pode então ser determinado a partir do conhecimento destes valores. Logo, o setor de broas tem um papel passivo na determinação das demais variáveis do sistema e, por conseguinte, uma melhoria tecnológica nesse setor não traria nenhuma mudança na taxa de lucro do sistema.

É a partir daí que Sraffa divide os bens em básicos e não básicos. Os básicos são aqueles que entram direta ou indiretamente na produção de todos os demais bens e os não-básicos são aqueles que não são básicos, *i.e.*, que não são utilizados para a produção de pelo menos um bem.

Tendo em vista a distinção entre básicos e não básicos, Sraffa supõe que "[...] qualquer sistema contém, no mínimo, um produto básico." [Sraffa — p.10].

Essa hipótese têm um significado que vai além de uma mera exigência formal. A exigência de um bem básico diz respeito à concepção clássica de que a sociedade econômica em consideração é uma sociedade mercantil. Os produtos nessa sociedade são produzidos para a troca e só mediante a troca é que a sociedade consegue se reproduzir. Assim, estamos estudando sociedades onde a divisão do trabalho é elemento constitutivo. Nos nossos exemplos simples, isso quer dizer que alguns irão produzir trigo enquanto outros irão produzir ferro. A troca será portanto elemento *necessário* nesse modelo.[9]

§7 (Nota terminológica)

Como dito anteriormente, Sraffa tem muito cuidado com os termos que ele emprega ao longo de sua obra. Grande parte dos problemas que ele salienta giram em torno do fato de que as mercadorias produzidas também são utilizadas na produção. Elas habitam dois mundos. Elas são, ao mesmo tempo, produto e insumo. É essa circularidade dos processos produtivos que Sraffa destaca no título da obra. Trata-se da produção de mercadorias (produtos) por meio de mercadorias (insumos). Se em um momento a elevação do preço de uma mercadoria qualquer parece trazer uma elevação da taxa de lucro da indústria que o produz, não podemos esquecer que o lucro será calculado sobre o valor dos meios de produção e, como essa mercadoria é utilizada como insumo de outras mercadorias (e

[9] Esse ponto merece ser mencionado não somente por si, mas também por comparação à teoria neoclássica, onde a troca nos modelos de equilíbrio geral não tem o mesmo papel. Isto é, é possível que os agentes não necessitem fazer troca alguma a depender das dotações iniciais. Todavia, essa discussão não pertence ao escopo dessa monografia.

talvez dela própria), ela pertence aos meios de produção. Uma variação do seu preço implica numa variação dupla: tanto no excedente apropriado pela indústria quanto na base sobre a qual a taxa de lucro é calculada (isto é, o valor dos meios de produção).

Vejamos um caso simples onde isso pode ser observado. Considere que a indústria do trigo opera nas seguintes condições:

$$6F \rightarrow 60T$$

Suponha que $p_t = 1$ e $p_f = 5$. Assim temos que a taxa de lucro da indústria t (r_t) é dada por:

$$r_t = \frac{60 - 30}{30} = 100\%.$$

Se houver uma mudança no preço do trigo (estamos apenas considerando essa mudança para explicar os dois mundos em que o trigo habita), não apenas o excedente apropriado muda, como o valor dos meios de produção mudará. De fato, suponha que o preço do trigo passe a ser 2, e que o preço do ferro passe a ser 15:

$$r'_t = \frac{120 - 90}{90} = 33,3\%.$$

E, justamente por habitarem dois mundos, o seu tratamento exige uma especial atenção. Segundo Sraffa:

> "Parece oportuno, chegado a este estágio, explicar por que as relações que satisfazem as condições de produção têm sido denominadas 'valores' ou 'preços' e não, como poder-se-ia pensar mais apropriado, 'custos de produção'.
>
> Esta última denominação seria mais adequada em relação aos produtos *não* básicos, pois, conforme o que foi visto na seção anterior, sua relação de troca é simplesmente um reflexo do que deve ser pago pelos meios de produção, trabalho e lucro para produzi-los — não há dependência mútua."
>
> [Sraffa — p. 10–11]

É preciso portanto de um termo melhor do que "custos de produção", posto que evitamos o caráter unilateral e buscamos dar conta dessa interdependência. Utilizaríamos mais apropriadamente os termos "preços de produção" ou "preços naturais" ou ainda "preço necessário" . Sraffa entretanto prefere os termos "preços" ou "valores" por serem mais curtos.

Além disso, existe uma carga muito forte nos termos "custos de produção" e "capital". Essa carga decorre do fato de os termos se terem ligado com a suposição de que se referem a algo que pode ser medido independentemente dos preços (e em uma etapa anterior a eles). Por essa razão, Sraffa não os utilizará em seu texto. Sraffa indica novamente que suas preocupações com os termos estão intimamente ligadas com seus objetivos teóricos:

> "Visto que um dos objetivos deste trabalho consiste em libertar-se [dos pressupostos de capital como quantidade calculável antes dos preços relativos], a eliminação dos termos pareceu ser o único modo de não prejudicar o tema."
>
> [Sraffa — p. 11]

§8 (Salário de subsistência e salário excedente)

Vamos introduzir uma sutileza teórica. Até agora, consideramos os salários como uma remuneração que garantia a subsistência dos trabalhadores. Vinhamos tratando os salários como um insumo da mesma natureza que o ferro que compõe o arado na plantação do trigo. Vamos levar em conta, a partir de agora, que os salários podem absorver uma parcela do excedente social produzido. Os salários tem portanto um duplo caráter: por um lado, são insumo para a produção, sendo tecnologicamente determinados e, por outro, absorvem uma parcela do excedente social, sendo portanto socialmente determinados. O tratamento mais adequado a esse objeto seria separar o valor devido a cada componente, *i.e.*, dividir o salário nas suas respectivas componentes (a subsistência e o excedente). Se isso fosse feito, somente a parcela referente ao excedente apropriado pelos salários seria variável.

Embora Sraffa explique essa dupla natureza dos salários e indique a possibilidade desse tratamento mais preciso, ele decide por aderir à pratica consagrada, qual seja, a de desconsiderar este duplo caráter do salário e tratá-lo inteiramente como variável.

Por um lado, isso simplifica o modelo, mas causa uma perda a ser contemplada. Como todas as indústrias empregam trabalho e, dado que alguns bens fazem parte da subsistência dos trabalhadores (bens-salário), ao considerarmos os salários como variáveis, retiramos dos insumos os bens-salário. Suponha que o salário de subsistência dos trabalhadores em uma determinada sociedade consista exclusivamente de trigo. O que estamos dizendo é que, se antes uma parcela do salário (trigo) compunha os insumos necessários da indústria de porcos, tal como o insumo ferro, agora (onde consideramos todo o salário como variável) esta parte do trigo não poderá mais figurar como insumo da indústria de porcos. Com isso, corremos o risco de perder bens básicos. Lembremos que só tratamos de economias que possuam pelo menos *um* bem básico. Além disso, avanços tecnológicos nesses bens não afetarão diretamente os preços e os lucros das indústrias.

Entretanto, os bens-salário são bens básicos. Como então? Nosso tratamento dos salários como não integrantes dos insumos não levaria a uma perda dessa característica? Bem, se a influência não pode ser percebida diretamente, ela deve acontecer por caminhos indiretos. E da seguinte forma: um avanço tecnológico reduziria os salários e afetaria por conseqüência todos os preços e a taxa de lucro do sistema. Segundo Sraffa:

> "Os bens de primeira necessidade são, entretanto, essencialmente básicos, e, se se impede que exerçam sua influência sobre os preços e lucros sob essa

denominação, é preciso permitir que a exerçam por caminhos tortuosos (por exemplo, estabelecendo um limite sob o qual os salários não podem descer; um limite que cairia com qualquer melhora nos métodos de produção dos bens de primeira necessidade, trazendo consigo um aumento na taxa de lucros e uma mudança nos preços dos demais produtos)."

[Sraffa — p. 12]

§9 (Salários pagos do produto)

Consideraremos também, a partir de agora, que os salários serão pagos ao final do período de produção, isto é, ao final do ano. Como consequência, a taxa de lucro não incidirá sobre os salários pagos, já que o lucro incide apenas sobre o valor adiantado dos meios de produção. Aqui, Sraffa abandona uma idéia dos economistas clássicos. Ele abandona a idéia de que os salários adiantados compõem o capital.

No entanto, nós não somos obrigados a adotar essa hipótese, somos livres para escolher qual forma nos é mais conveniente. Essa escolha dependerá sempre do ambiente econômico no qual a análise será desenvolvida. Se na nossa sociedade os salários são pagos ao final do mês, então adotaremos essa modelagem; se não, adotaremos os salários como componente dos gastos com insumos e sobre ele incindirá a taxa de lucro. Ao longo do trabalho, seguiremos o tratamento do autor.

§10 (Quantidade e qualidade do trabalho)

A quantidade de trabalho empregada em cada indústria deve ser representada explicitamente, uma vez que deixamos de considerar os salários como insumos produtivos. Supomos que os diversos tipos de trabalhos possam ser uniformizados, ou seja, que as diferenças em qualidade possam ser tratadas como diferenças em quantidade, de forma que toda unidade de trabalho possa ser paga pelo mesmo salário.

Chamaremos de $L_A, L_B, \ldots, L_K$ às quantidades de trabalho empregadas nas indústrias $a, b, \ldots, k$ respectivamente. E definimos o total de trabalho realizado pela sociedade no ano por:

$$L_T = L_A + L_B + \cdots + L_K.$$

Daí obtemos:

$$L_a = \frac{L_A}{L_T}; L_b = \frac{L_B}{L_T}; \ldots; L_k = \frac{L_K}{L_T}$$

novas variáveis que integrarão as equações do sistema de preços (e não as $L_A, \ldots$). Note que:

$$L_a + L_b + \cdots + L_k = 1.$$

Chamaremos de w o salário pago por L_T que, tal como os preços, será expresso em termos do padrão escolhido.

§11 (Equações de produção)

Agora que inserimos o trabalho, o sistema econômico é representado por:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
A_a & + & B_a & + & \cdots & + & K_a & + & L_a & \rightarrow & A \\
A_b & + & B_b & + & \cdots & + & K_b & + & L_b & \rightarrow & B \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_k & + & B_k & + & \cdots & + & K_k & + & L_k & \rightarrow & K \\
\hline
A^+ & & B^+ & & \ldots & & K^+ & & 1 & &
\end{array}$$

Dessa forma, obtemos as seguintes equações de preço:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{(La)} & (A_a p_a & + & B_a p_b & + & \cdots & + & K_a p_k)(1+r) & + & wL_a & = & Ap_a \\
\text{(Lb)} & (A_b p_a & + & B_b p_b & + & \cdots & + & K_b p_k)(1+r) & + & wL_b & = & Bp_b \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\text{(Lk)} & (A_k p_a & + & B_k p_b & + & \cdots & + & K_k p_k)(1+r) & + & wL_k & = & Kp_k
\end{array}$$

Onde ainda se verificam as condições de viabilidade do sistema econômico, quais sejam:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A^+ & = & A_a & + & A_b & + & \cdots & + & A_k & \leq & A \\
B^+ & = & B_a & + & B_b & + & \cdots & + & B_k & \leq & B \\
 & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
K^+ & = & K_a & + & K_b & + & \cdots & + & K_k & \leq & K
\end{array}$$

§12 (A renda nacional num sistema de auto-reposição)

O excedente (S) do sistema econômico é:

$$S = (A - A^+, B - B^+, \ldots, K - K^+).$$

A Renda nacional é o valor do excedente produzido. Seguindo Sraffa, igualaremos a Renda nacional a 1:

$$(A - A^+)p_a + (B - B^+)p_b + \cdots + (K - K^+)p_k = 1.$$

Ao fixarmos o valor da Renda nacional igual a 1, estabelecemos um padrão de medida. Os salários e os preços serão medidos em relação a esse padrão. Com isso, obtemos uma equação a mais.

Temos portanto $k+1$ equações e $k+2$ incógnitas (k preços, w e r). Como descobrir os valores das incógnitas do sistema? Aqui, é preciso redobrar a atenção: não se trata de um sistema de equações lineares, não podemos garantir ainda que, pela independência linear das equações, ao fixarmos uma das variáveis, obteremos as demais como conseqüência, como fizemos no caso da economia de subsistência.

Ainda não podemos entender totalmente a frase que encerra o capítulo 2:

“O resultado de adicionar o salário como uma das variáveis é que o número destas passa a exceder em um o número de equações do sistema, que por sua vez pode se mover com um grau de liberdade; e se uma das variáveis for fixada, as demais também estarão fixadas”

[Sraffa — p. 11]

3 Sraffa: O cálculo dos preços relativos

3.1 Proporções entre o trabalho e os meios de produção [*Sraffa — Cap. 3*]

§13 (Os salários como proporção da renda nacional)

Nós vamos agora atribuir diferentes valores a w, variando de 1 a 0. Nosso objetivo é compreender o comportamento dos preços e dos lucros decorrente dessa variação. Os métodos de produção empregados, por sua vez, permanecem os mesmos.

Cabe observar porque o salário varia entre 1 e 0. Em primeiro lugar, ressaltamos que o valor do excedente foi fixado em 1. Se w é 1, todo o excedente será absorvido pelos trabalhadores sob a forma de salários (trata-se de um caso extremo, mas de grande uso teórico). Qualquer outro valor do salário (digamos 0,5) representa a parcela do excedente produzido que será absorvido pelos salários (no caso, a metade). No outro extremo, ($w = 0$) temos que todo o excedente é absorvido sob a forma de lucros pelas indústrias.

§14 (Os valores quando toda a renda nacional vai para os salários)

Pondo $w = 1$, a totalidade do excedente vai para os salários e não há lucro. É como se estivéssemos numa economia de subsistência. Retornamos ao sistema de equações lineares com que começamos. A única diferença reside no fato de que antes o salário estava embutido nos insumos enquanto que agora ele se encontra destacado como salário pago por tempo trabalhado.

Nesse nível de salário, os preços relativos são dados em proporção à quantidade de trabalho contida direta e indiretamente na produção dos bens em questão.

Vejamos essa afirmação em maior detalhe num caso extremamente simples. O caso geral envolveria um cálculo muito extenso e trabalhoso e não seria pertinente nesse momento. Tomemos uma economia que produz trigo (T) por meio de ferro e Ferro (F) por meio de trigo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0\text{T} & + & 8\text{ F} & + & 0{,}6\text{L} & \longrightarrow & 4\text{T} \\ 2\text{T} & + & 0\text{ F} & + & 0{,}4\text{L} & \longrightarrow & 16\text{F} \end{array}$$

Supondo que todo o excedente seja pago aos trabalhadores sob a forma de salários, temos $w = 1$ e $r = 0$. As equações de preços se tornam:

$$\begin{array}{cccccc} \text{(Lt)} & 8p_f & + & 0{,}6 & = & 4p_t \\ \text{(Lf)} & 2p_t & + & 0{,}4 & = & 16p_f \end{array}$$

Da última equação:

$$8p_f = \frac{0,4 + 2p_t}{2},$$

e da primeira

$$2p_t = \frac{0,6 + 8p_f}{2},$$

temos de volta à primeira equação:

$$4p_t = 0,6 + \frac{1}{2}\Big(0,4 + 2p_t\Big).$$

Continuando a substituição, obtemos:

$$4p_t = 0,6 + \frac{1}{2}\Big(0,4 + \frac{1}{2}\Big(0,6 + 8p_f\Big)\Big).$$

Prosseguindo indefinidamente, obtemos uma série do tipo:

$$4p_t = 0,6 + \frac{0,4}{2} + \frac{0,6}{4} + \frac{0,4}{8} + \frac{0,6}{16} + \cdots$$

Trata-se de uma série geométrica com os tempos de trabalho direto (0,6) e os tempos de trabalho indireto (demais termos) necessários para a produção do bem.

Assim, obtemos:

$$p_t = \frac{1}{4}\left(\left(0,6 + \frac{0,4}{2}\right)\frac{1}{1 - 1/4}\right) = \frac{1}{4}\left(0,8 \times \frac{4}{3}\right) = \frac{0,8}{3}.$$

Da mesma forma, procedemos para o ferro e obtemos o seu preço como a soma do trabalho direta e indiretamente necessários para a sua produção. O que vimos nesse caso simples pode ser estendido para economias mais complexas. Assim, quando todo o excedente vai para os trabalhadores, sabemos calcular os preços relativos pelo tempo de trabalho contido direta e indiretamente nos produtos.

§15 (Variação nas proporções entre o trabalho e os meios de produção)

Em seguida, Sraffa pensa a redistribuição do excedente diante de uma redução de w. Como resultado dessa variação, surgirá uma taxa de lucro positiva. O que ocorrerá com os preços relativos?

Segundo Sraffa:

> "A chave do movimento de preços relativos que segue a uma variação no salário consiste na desigualdade das proporções em que o trabalho e os meios de produção são empregados nas distintas indústrias."
>
> [Sraffa — p. 14]

Para ver isso, chamemos de M_i o valor dos meios de produção da indústria i:

$$A_i p_a + B_i p_b + \cdots + K_i p_k = M_i.$$

Estamos dizendo que a relação fundamental para mudança de preços é a relação entre as proporções de utilização de trabalho (L_i) e o valor dos meios de produção (M_i) das indústrias do sistema. Vejamos. A equação de preços para a indústria i é:

$$(A_i p_a + B_i p_b + \cdots + K_i p_k)(1 + r_i) + wL_i = M_i(1 + r_i) + wL_i = p_i I$$

Quando $w = 1$ (e portanto $r_i = 0$), isso se reduz a:

$$M_i + L_i = p_i I.$$

Diminuindo w sem permitir que os preços se alterem, o excedente absorvido por cada indústria será dado pelo valor que deixa de ser pago em salários. Temos portanto:

$$M_i(1 + r_i) + wL_i = p_i I = M_i + L_i,$$

logo

$$M_i\, r_i = (1 - w)L_i.$$

Denotando a relação entre trabalho e valor dos meios de produção por $Rel_i = L_i/M_i$, obtemos

$$r_i = (1 - w)Rel_i.$$

Se todas essas relações forem as mesmas, não haverá mudanças de preços decorrente de uma variação salarial, pois todas as taxas de lucro serão iguais. Se houver alguma que seja diferente, necessariamente os preços relativos terão de variar a fim de restabelecer a uniformidade da taxa de lucro.

Como o papel dos preços no nosso modelo é assegurar a reprodução do sistema atendendo a hipótese da uniformidade das taxas de lucro, no caso em que as relações entre trabalho e meios de produção são as mesmas, não há razão nenhuma para que os preços mudem.[10]

§16 ("Indústrias com déficit" e "indústrias com excedente")

Suponhamos que os preços fiquem inalterados diante de uma queda no salário, numa economia em que há diferentes relações entre trabalho e meios de produção (nem todos os Rel_i's são iguais). Em conseqüência, as indústrias que utilizam proporcionalmente menos trabalho terão uma taxa de lucro inferior às indústrias que utilizam proporcionalmente

[10]Um leitor atento e minucioso poderia, mesmo concordando com o fato de não haver estímulo econômico para a mudança dos preços, se sentir incomodado com o argumento e perguntar: "Mas haverá algo que obrigue que os preços permaneçam os mesmos?". A pergunta é válida e a resposta é afirmativa. Os preços terão de continuar os mesmos, pois existe, para um dado salário de um certo sistema econômico, um único vetor de preços que garante a reprodução (o que *ainda* não foi provado).

mais trabalho, pois as primeiras deixarão de pagar em salários proporcionalmente menos do que as últimas.

Os preços não podem, portanto, permanecer inalterados. A questão fica clara se entendermos o papel dos preços relativos no sistema com que estamos lidando. Os preços são os distribuidores do excedente entre os setores. Quando o salário cai, todos os preços devem ser recalculados, mas podemos chegar lá aos poucos. Como assim? Sraffa raciocina por etapas. Suponha que os preços ainda não se alteraram. Se alguma indústria obtiver uma taxa de lucro maior, os preços do sistema como um todo deverão se alterar. Por mais que não saibamos ainda *como* irão se alterar os preços, a percepção de que essa variação se dá na medida em que existe uma heterogeneidade das taxas de lucro do sistema é fundamental para entender o espaço que Sraffa dedica ao que ele chamou de proporção crítica.

§17 (Uma proporção crítica)

Assim obtemos um primeiro resultado: se há desigualdade da proporção entre o uso de trabalho e de meios de produção nas indústrias, a fim de que a taxa de lucro seja a mesma em todos os setores, os preços terão de mudar. Mesmo sem saber os novos preços relativos e a taxa de lucro do sistema, podemos saber que a indústria com menor proporção de trabalho por meios de produção terá o menor lucro do sistema. Pelo mesmo motivo, podemos saber que o preço da indústria mais intensa em trabalho terá o maior lucro do sistema.

Aqui já podemos ensaiar a idéia de que deve haver uma indústria cuja proporção de trabalho por meios de produção apresenta um valor especial. Que valor é esse? É o ponto que corresponde à taxa de lucro da economia. Essa relação entre trabalho e meios produtivos marca a linha entre indústrias com "déficit" (menor lucro do que o lucro da economia) e as indústrias com "superávit" (maior lucro do que o lucro da economia).

Sraffa termina assim a seção:

> "Qualquer que seja o valor preciso desta 'proporção' num sistema particular, pode-se dizer, *a priori*, que num sistema que inclua duas ou mais indústrias básicas, a indústria com a mais baixa proporção entre o trabalho e os meios de produção seria uma indústria com 'déficit' e a que tivesse a proporção mais alta seria uma indústria com 'superávit'."
>
> [Sraffa — p. 15]

§18 (Variação de preços para restabelecer o equilíbrio)

O problema com o qual nos deparamos consiste em descobrir o novo vetor de preços e a nova taxa de lucros do sistema diante de uma redução do salário. Pensamos portanto que os preços relativos dos bens produzidos pelas indústrias com "superávit" (isto é, uma taxa de lucro superior à taxa de lucro média do sistema) e pelas indústrias com "déficit" mudarão a fim de restabelecer a uniformidade da taxa de lucro. Lembramos que a relação entre preço do produto produzido e meios de produção empregados tem um papel fundamental nesse ajustamento. Sraffa analisa o fluxo de bens entre as indústrias. Vale notar que nesse modelo os preços nada mais são do que o meio pelo qual se realiza a distribuição do produto físico do sistema, isto é, das "coisas" produzidas. E é pensando nesses termos que Sraffa afirma:

> "Consideremos a situação de uma indústria com 'déficit', quando o salário é reduzido. Uma elevação no preço do produto em relação aos meios de produção ajudaria a eliminar o 'déficit', visto que liberaria uma parte da cota do produto bruto da indústria que estava sendo distribuída para financiar a reposição dos meios de produção agora mais baratos; e assim se incrementaria a quantidade disponível para ser distribuída como salários e lucros."
>
> [Sraffa — p. 15]

Elevando o valor da produção da indústria a com relação ao valor dos seus meios de produção, temos dois efeitos: uma menor parcela da produção da indústria a será alocada para pagar seus meios de produção, liberando uma maior quantidade para o pagamento de lucros e salários; enquanto que uma menor parcela do produto produzido se torna capaz de atingir o valor necessário a ser distribuído como lucros na indústria.

Esse trecho pode ficar mais claro com o uso da seguinte equação:

$$A = x + y + z,$$

onde

x é a quantidade de produtos vendida para pagar os meios de produção;

y é a quantidade de produtos vendida para pagar os lucros; e

z é a quantidade de produtos vendida para pagar os salários.

Como a equação de preços da indústria a pode ser posta da seguinte forma:

$$p_a A = M_a + rM_a + wL_a = p_a x + p_a y + p_a z,$$

identificando

$$p_a x = M_a$$
$$p_a y = rM_a$$
$$p_a z = wL_a$$

poderemos entender com maior clareza a passagem de Sraffa:

> "[...] com uma redução salarial seriam necessárias variações nos preços para restabelecer o equilíbrio em cada uma das indústrias com 'déficit' e em cada indústria com 'superávit'.
>
> Para alcançar esse objetivo espera-se que, em primeiro lugar, entre em jogo a relação de preços entre cada produto e seus meios de produção. Consideremos a situação de uma indústria com 'déficit', quando o salário é reduzido. Uma elevação no preço do produto em relação aos meios de produção ajudaria a eliminar o 'déficit', visto que liberaria uma parte da cota do produto bruto da indústria que estava sendo destinada a financiar a reposição dos meios de produção agora mais baratos; e assim se incrementaria a quantidade disponível para ser distribuída como salários ou lucros. A alta do preço levaria, por si mesma, a um incremento na magnitude (e não simplesmente no valor) daquela parte do produto da indústria que fica disponível para ser distribuída, apesar do fato de os métodos de produção terem permanecido invariáveis.
>
> Outro efeito da elevação do preço do produto em relação aos meios de produção consistiria, naturalmente, em ajudar a que uma dada quantidade do produto tenda a alcançar a taxa de lucro requerida.
>
> Em segundo lugar, e independentemente disto, quando mais forte fosse a elevação no preço do produto relativo ao trabalho, menor seria a quantidade do mesmo absorvida pelo salário.
>
> De modo semelhante, os movimentos de preços numa direção oposta poderiam levar à absorção do excedente que, em outro caso, apareceriam numa indústria que utilizasse uma alta 'proporção' entre trabalho e meios de produção."
>
> [Sraffa — p. 15–16]

§19 (Relações de preços entre o produto e os meios de produção)

Não podemos entretanto afirmar que uma indústria que teve déficit terá o seu preço elevado em relação a seus meios de produção quando for permitido o restabelecimento dos preços pois é preciso considerar a variação dos preços dos outros bens. Pode ser até que o seu preço se reduza em relação aos seus meios de produção. Isso dependerá dos bens consumidos por essa indústria e da variação de seus preços em função da proporção de trabalho por meios de produção empregados na produção desses bens. O que houve? Como poderia o preço de uma indústria que teve déficit não elevar o seu preço em relação aos seus meios de produção? A resposta consiste em lembrar que o excedente da indústria a $(p_aA - M_a)$ vai pagar salários e lucros. O preço do produto pode cair em relação aos seus meios de produção contanto que ele se eleve em relação ao salário, liberando mais unidades de produto para pagar os lucros.

Não sabemos a priori se os preços irão subir ou descer com relação aos seus meios de produção. Eles podem inicialmente descer, mas diante de uma nova queda do salário eles poderiam subir, ou vice-versa.

§20 (Relações de preços entre o produtos)

Essa análise é válida não somente para a relação entre meios de produção e o preço do produto como é válida para as relações entre os preços de diversos produtos e o preço do produto em questão. Sraffa anuncia a complexidade dessas relações entre preços:

> "Em conseqüência, os movimentos de preços relativos de dois produtos vêm a depender não apenas das 'proporções' entre trabalho e meios de produção pelas quais foram respectivamente produzidos, mas também das 'proporções' pelas quais estes meios foram, por sua vez, produzidos e também das 'proporções' mediante as quais estes meios de produção daqueles meios de produção foram produzidos, e assim sucessivamente."
>
> [Sraffa — p. 16]

Cabe olhar novamente para o título da obra: Produção de mercadoria por meio de mercadorias. Esse é o ponto que dá origem às complicações. Notemos mais uma vez o cuidado de Sraffa. Ele não escreve proporções, mas "proporções". Por que as aspas? Por que as proporções só poderiam ser legitimamente calculadas uma vez que conhecêssemos os preços. Mas é justamente isso que procuramos!

Retomemos a nossa busca. A que se deve a mudança de preços no sistema? Por que ela ocorre? Ela ocorre para restabelecer o equilíbrio da distribuição do excedente entre as indústrias diante de uma alteração do salário. Guardemos isso por enquanto.

§21 (Uma proporção recorrente)

Consideremos a indústria que se encontra na exata proporção entre trabalho e meios de produção. Uma relação mais intensa em trabalho significaria que essa indústria é superavitária, enquanto que uma relação mais intensa em meios de produção a deixaria numa condição de deficitária. Essa proporção é a proporção que marca a fronteira entre superavitários e deficitários.

Suponha que não somente a indústria se encontra nessa exata proporção, mas que seus meios de produção também foram produzidos por indústrias nessa proporção e assim por diante.

A mercadoria assim produzida não alteraria o seu preço relativamente aos seus meios de produção diante de uma mudança do salário. Suponhamos que, diante de uma queda do salário, a mercadoria em questão eleva o seu preço. Assim, as demais indústrias que lhes fornecem os meios de produção também terão de elevar o seu preço na mesma proporção uma vez que elas estão na mesma situação que a nossa indústria. Portanto o valor dos seus meios de produção irá se elevar na mesma proporção que o preço do produto em questão. Logo a relação entre preço da mercadoria e meios de produção se mantém inalterada.

§22 (Razão de equilíbrio e taxa máxima de lucro)

A essa proporção de fronteira entre deficitários e superavitários daremos o nome de *proporção Padrão*. Para identificar a proporção Padrão, vamos passar a lidar com razões entre quantidades homogêneas. Não teremos dificuldade em obter nesse caso a relação entre trabalho e meios de produção, uma vez que a divisão de quantidades homogêneas pode ser feita através de um cálculo direto.

Vejamos concretamente no seguinte exemplo:

$$\begin{aligned} 2T + L &\to 4T \\ w &= 1/2 \\ S &= 2T \\ L &= 1 \\ (w \cdot L)S &= 1T \end{aligned}$$

Temos uma economia que produz trigo a partir de trigo. O salário absorve metade do excedente produzido.

Chamemos a relação entre o excedente e meios de produção de ϕ:

$$\phi = 2T/2T = 1.$$

A relação entre trabalho e meios de produção (Rel) é:

$$Rel = 1T/2T = 0,5,$$

que também será a proporção Padrão posto que há apenas uma indústria.

Esse caso é visivelmente muito mais fácil de lidar do que o caso em que existem múltiplas indústrias operando com diferentes proporções entre trabalho e meios de produção. Nosso objetivo é conseguir calcular essa proporção Padrão no caso geral, da mesma forma que nesse simples modelo do Trigo.

Considere o caso em que $w = 0$. Assim, todo o excedente vai para os lucros. A relação em todas as indústrias entre excedente absorvido pela indústria e meios de produção será igual à relação entre lucros e meios de produção, posto que todo excedente vira lucro.

Essa relação é a taxa máxima de lucro do sistema. Aqui nós encontramos uma relação especial.

Vejamos com calma e com detalhe o argumento de Sraffa:

> "Quando fazemos o salário igualar a zero e a totalidade do produto líquido ir para os lucros, a razão-valor entre o produto líquido e os meios de produção em cada indústria coincidem necessariamente com a taxa geral de lucro. Por mais diferentes que possam ser entre si em outros níveis de salário, nesse nível as 'razões-valor' de todas as indústrias são iguais."
>
> [Sraffa — p. 17]

Note que essa relação (ϕ) é uma relação capaz de ser invariante a mudanças no salário. É isso que estamos procurando. Uma relação que seja dada pelas condições técnicas do sistema e, portanto, independa do nível dos salários. Esse trecho da obra de Sraffa é importante pois é justamente aí que surge a intuição de como resolver o sistema complexo que deixamos de lado, pouco antes.

> "Daqui se conclui que a única 'razão-valor' que pode não variar ante mudanças no salário, e que é, portanto, capaz de ser 'recorrente' no sentido definido na seção 21 é aquela que é igual à taxa de lucro que corresponde ao salário zero. E *essa* é a razão equilibradora."
>
> [Sraffa — pp. 17-18]

Vejamos o argumento. A indústria que produz utilizando a mesma relação entre trabalho e meios de produção que os seus fornecedores para um nível de salário dado, terá a relação entre seu preço e o valor dos seus meios de produção inalterado para qualquer nível de salário. Isto posto, quando o salário for zero, a relação entre o excedente e os meios de produção ϕ será a taxa máxima de lucro do sistema. Chamemos de R a essa taxa máxima, que também será a relação Padrão.

Logo:

$$R = \frac{p_a A - M_a}{M_a} = \frac{p_a A}{M_a} - 1.$$

Observe que Sraffa chama de razão equilibradora o que chamamos de relação Padrão.

3.2 A mercadoria Padrão [*Sraffa — Cap. 4*]

§23 ("Uma medida invariável de valor")

Chegamos agora ao capítulo que resolve o problema de determinação dos preços. Ao longo do capítulo, construiremos uma mercadoria que nos permitirá compreender as flutuações de preço. Essa mercadoria será para nós uma medida para as demais. Chegando ao seu final, poderemos calcular a solução do sistema de preços com que nos deparamos e que não soubemos resolver.

Quando medimos algo em termos de outra coisa, precisamos saber o que é essa outra coisa. Quando medimos uma sala, utilizamos de uma fita métrica. Como saber se a sala 102 é maior (em área) do que a sala 223? Bem, vejamos quantos metros quadrados cada uma tem. O metro não varia de uma sala para a outra. Isso permite a comparação.

Mas no caso do sistema econômico, medir um preço através de um outro preço é uma tarefa que não permite uma comparação muito nítida. Afinal, uma variação no salário provocará, em princípio, variações em todos os preços. É como se o metro mudasse de tamanho quando saímos de uma sala para a outra.

Segundo Sraffa:

> "A necessidade de ter que expressar o preço de uma mercadoria em termos de outra que é escolhida arbitrariamente como padrão, complica o estudo dos movimentos de preços que acompanham uma mudança na distribuição. Torna-se impossível dizer, ante qualquer flutuação particular de preços, se ela surge como conseqüência das peculiaridades da mercadoria que está sendo medida, ou se surge das peculiaridades da mercadoria adotada como padrão de medida."
>
> [Sraffa — p. 19]

A mercadoria Padrão, cujo modo de calcular estamos em vias de elaborar, nos dará uma "fita métrica" para as flutuações dos preços relativos. Ela nos permitirá uma medida muito mais apurada dos efeitos de variações nos salários sobre os preços relativos e sobre a taxa de lucro. Para ser exato, ela permitirá o seu cálculo. Além disso, por possuir uma certa invariância (que estudaremos com mais detalhe na seqüência), ela nos permitirá uma mudança nas variáveis exógenas do sistema. Até agora, vínhamos trabalhando tratando o salário como variável exógena. As relações que descobriremos através da mercadoria Padrão nos permitirão considerar a taxa de lucro como variável exógena, o que simplifica muito o cálculo dos preços relativos.

Para ver isso, repetimos aqui o sistema de preços. Note que o conhecimento prévio de r torna o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} A_a & B_a & \dots & K_a \\ A_b & B_b & \dots & K_b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_k & B_k & \dots & K_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_a \\ p_b \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} (1+r) + w \begin{pmatrix} L_a \\ L_b \\ \vdots \\ \text{Ł}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ap_a \\ Bp_b \\ \vdots \\ Kp_k \end{pmatrix}.$$

§25 (Construção de tal mercadoria: exemplo)

Precisaremos modificar o nosso sistema de equações, de modo a chegarmos a um novo sistema obtido do primeiro por transformações lineares. Então, nesse novo sistema, poderemos aprender algo sobre o sistema original. E com esse aprendizado, poderemos resolver o problema de determinar os preços relativos e a taxa de lucro.

Considere o seguinte sistema econômico:

(1)	90 F	+	120 C	+	60 T	+	3/16 L	→	180 F
(2)	50 F	+	125 C	+	150 T	+	5/16 L	→	450 C
(3)	40 F	+	40 C	+	200 T	+	8/16 L	→	480 T
Totais	180 F		285 C		410 T		1 L		

Esse sistema econômico produz ferro (F), carvão (C) e trigo (T). Temos que :

$$S = (0\text{F}, 165\text{C}, 70\text{T}).$$

Considere agora o sistema que obtemos por uma multiplicação linear das linhas do sistema anterior. Multiplicamos a primeira linha por 1 a segunda por $\frac{3}{5}$ e a terceira por $\frac{3}{4}$. Assim, obtemos:

(1q)	90 F	+	120 C	+	60 T	+	3/16 L	→	180 F
(2q)	30 F	+	75 C	+	90 T	+	3/16 L	→	270 C
(3q)	30 F	+	30 C	+	150 T	+	6/16 L	→	360 T
Totais	150 F		225 C		300 T		12/16L		

Note que a produção agregada do sistema $P = (180\text{F}, 270\text{C}, 360\text{T})$ apresenta uma relação especial com o consumo agregado dos meios de produção $CI = (150\text{F}, 225\text{C}, 300\text{T})$.

De fato:

$$270/180 = 225/150 = 1,5$$
$$360/180 = 300/150 = 2$$

A mercadoria que procuramos deve ser composta de ferro, carvão e trigo nas seguintes proporções:

$$1\text{F} : 1,5\text{C} : 2\text{T}.$$

§26 (Definição de mercadoria-padrão)

O sistema econômico obtido por multiplicações das linhas por escalares positivos que atender a essa conformação, isto é, cuja proporção entre os bens produzidos seja igual à proporção entre os meios de produção consumidos no agregado recebe o nome de *sistema Padrão*. O produto produzido por esse sistema é o *Produto Padrão* e qualquer múltiplo desse vetor de quantidades é uma *mercadoria Padrão*. Tal mercadoria consiste numa cesta, uma composição de diversas mercadorias produzidas pela sociedade. Cabe destacar que essa composição não é uma mercadoria efetivamente produzida por uma indústria, mas consiste numa cesta de bens que possui um conjunto de propriedades que nos permitirão compreender de maneira privilegiada a flutuação dos preços de reprodução.

Exige-se que a quantidade total de trabalho do sistema Padrão seja a mesma que a do sistema original. No nosso caso, devemos multiplicar cada indústria por $16/12 = 4/3$. Assim:

(1Q)	120 F	+	160 C	+	80 T	+	4/16 L	→	240 F
(2Q)	40 F	+	100 C	+	120 T	+	4/16 L	→	360 C
(3Q)	40 F	+	40 C	+	200 T	+	8/16 L	→	480 T
Totais	200 F		300 C		400 T		1 L		

A renda nacional ou o excedente do sistema é $S = (40\text{F}, 60\text{C}, 80\text{T})$. Chamaremos esse vetor de produto líquido Padrão.

§27 (Excedente percentual igual)

Num sistema Padrão qualquer, por definição, a proporção entre os bens produzidos é a mesma entre os meios de produção consumidos. Assim temos:

$$P = (A : B : \ldots : K)$$
$$CI = (A^+ : B^+ : \ldots : K^+)$$

onde

$$\frac{A}{A^+} = \frac{B}{B^+} = \frac{C}{C^+} = \cdots = \frac{K}{K^+}.$$

Pondo

$$\lambda = \frac{A}{A^+},$$

obtemos:

$$P = \lambda CI.$$

No nosso caso:

$$(240, 360, 480) = 1,20 \cdot (200, 300, 400).$$

§28 (A Razão padrão (R) entre o produto líquido e os meios de produção)

Chamaremos de *Razão padrão* a razão dada por $\dfrac{S}{CI} = \lambda - 1 = R$. Sraffa diz:

> “A possibilidade de falar de uma razão entre as duas coleções de mercadorias heterogêneas, sem necessidade de reduzi-las a uma medida comum de preço, deriva naturalmente de que ambas as coleções estão construídas nas mesmas proporções — isto é, de que são, de fato, quantidades da mesma mercadoria composta.”
>
> [Sraffa — p. 21]

Se calcularmos a relação entre quantidades homogêneas a partir dos preços, ela não se alterará. De fato, escrevendo

$$\begin{aligned} S &= R \cdot CI \\ S &= (A - A^+, B - B^+, \ldots, K - K^+) = (A^s, B^s, \ldots, K^s) \\ A^s &= R \cdot A^+ \\ B^s &= R \cdot B^+ \\ &\vdots \\ K^s &= R \cdot K^+ \end{aligned}$$

temos que:

$$\begin{aligned} p_a A^s + p_b B^s + \cdots + p_k K^s &= p_a R A^+ + p_b R B^+ + \cdots + p_k R K^+ \\ &= R(p_a A^+ + p_b B^+ + \cdots + p_k K^+). \end{aligned}$$

Logo, para qualquer vetor de preços $\mathbf{p} = (p_a, p_b, \ldots, p_k)$:

$$\mathbf{p}^\top S = p_a A^s + p_b B^s + \cdots + p_k K^s = R(p_a A^+ + p_b B^+ + \cdots + p_k K^+) = R\mathbf{p}^\top CI.$$

Encontramos uma relação que não varia por mudanças nos preços.

Como diz Sraffa:

> “A razão entre os valores dos dois totais seria inevitavelmente sempre igual à razão entre as quantidades de seus diversos componentes.”
>
> [Sraffa — p. 21]

Sraffa está quase pronto para nos apresentar um referencial para os preços, uma fita métrica. Ele prossegue dizendo:

> “Assim, no sistema Padrão, a razão entre o produto líquido e os meios de produção seria a mesma, quaisquer que fossem as variações registradas na divisão do produto líquido entre salários e lucros, e quaisquer que fossem as conseqüentes variações de preços.”
>
> [Sraffa — p. 21]

Cabe notar que o caso em que trabalhamos com a mercadoria Padrão não é o mesmo daquele em que todas as relações Trabalho-Capital ($L_i/M_i = Rel_i$) são iguais. Naquele caso, os preços permaneciam os mesmos; aqui, os preços estão variando. A função que tem a mercadoria Padrão é permitir que compreendamos essa variação de preços.

§29 (Razão-padrão e taxas de lucro)

Vamos agora tratar das variações do salário. Suponhamos que a divisão do produto líquido Padrão entre salários e lucros seja em frações da mercadoria Padrão. Por exemplo, quando $w = 1/3$, o total da mercadoria Padrão absorvido pelos salários será $S/3$, onde S é o excedente, em termos físicos, do sistema Padrão. A razão disso é que, assim procedendo, continuaremos sendo capazes de contar com uma relação invariante às mudanças de preços.

Segundo Sraffa:

> "[...] a taxa de lucro resultante estaria na mesma proporção em relação à razão Padrão do sistema, em que estava a parte destinada aos lucros em relação ao produto líquido total."
>
> [Sraffa — p. 22]

Afinal, a massa de lucro da economia (Π) é o que resta do excedente após o pagamento dos salários, ou seja, $\Pi = (1 - w)S$. Como a taxa de lucro é dada por $r = \frac{\Pi}{CI}$ e, no caso em que o pagamento de salários é proporcional ao excedente em termos físicos, teremos a possibilidade de obter a taxa de lucro com um cálculo direto antes de conhecermos os preços. E da definição de R:

$$r = \frac{\Pi}{CI} = \frac{(1 - w)S}{CI} = (1 - w)R.$$

Se todo o excedente fosse para os lucros, isto é, se $w = 0$, então a taxa de lucro do sistema igualaria a razão Padrão, isto é, $r = R$.

Pela construção feita, podemos perceber que a taxa de lucros do sistema Padrão é dada por uma relação envolvendo apenas quantidades físicas (S e CI), sendo portanto independente dos preços.

§30 (Relação entre o salário e a taxa de lucro no sistema-padrão)

Obtivemos acima que:

$$r = R(1 - w).$$

Temos portanto uma relação salário-lucro linear que permite o cálculo de r antes e independentemente dos preços.

§31 (Relação estendida a qualquer sistema)

Sim, mas em que isso nos ajuda a calcular os preços relativos e a taxa de lucro do sistema original?

Estamos tentando descobrir os preços relativos de um determinado sistema econômico (chamaremos de sistema econômico original). Não conseguimos lidar com a não linearidade do sistema, desenvolvemos um conjunto de raciocínios que aparentemente se desviavam do objetivo (os preços relativos). Descobrimos uma relação. Nesse ponto, Sraffa escreve:

> "Tal relação é de interesse apenas se se puder demonstrar que sua aplicação não está limitada ao sistema-padrão imaginário, mas sim que é capaz de ser estendida ao sistema econômico observado."
>
> [Sraffa — p. 22]

Qual o papel da mercadoria Padrão? A dúvida procede. Mais do que ser o componente do sistema Padrão, a mercadoria Padrão é uma cesta de bens através da qual calculamos os salários. Mesmo que não estejamos no sistema Padrão, podemos medir os salários nessa unidade. Não temos por que achar que, no sistema original, uma vez que certa quantidade da mercadoria Padrão for destinada aos salários, possamos calcular a taxa de lucro. Mais do que isso, não temos por que supor que a relação entre lucros e meios de produção seja a mesma obtida pelo cálculo em quantidades físicas que fizemos no sistema Padrão. Como os sistemas se comunicam? Sraffa mesmo responde:

> "Mas o sistema efetivo compõe-se das mesmas equações básicas que o sistema Padrão, apenas em diferentes proporções; de modo que, uma vez dado o salário, a taxa de lucro se determina em ambos os sistemas, independentemente das proporções das equações em cada um deles. Proporções particulares, tais como as proporções-padrão, podem dar transparência a um sistema e tornar visível o que está oculto, mas não podem alterar suas propriedades matemáticas."
>
> [Sraffa — p. 23]

e continua:

> "A relação linear entre o salário e a taxa de lucro manter-se-á portanto, em todos os casos, com a única condição de que o salário se expresse em termos do produto-padrão. A mesma taxa de lucro que no sistema-padrão se obtém como uma razão entre *quantidades* de mercadorias, resultará, no sistema efetivo, da razão de valores agregados."
>
> [Sraffa — p. 23]

§32 (Exemplo)

De posse desse conhecimento, podemos agora calcular os preços relativos do sistema original. Para tanto, bastará calcular para cada w:

$$r = R(1 - w).$$

Mas como calcular R? Basta obter o sistema Padrão associado e descobrir a razão em que uma mercadoria consumida excede o seu consumo como meios de produção. Ou, na notação que estamos utilizando, basta calcular $A^s/A^+ = R$ como vimos acima. Mas esse cálculo precisa ser feito no sistema Padrão.

Voltando ao sistema Padrão que obtivemos do exemplo:

(1Q)	120 F	+	160 C	+	80 T	+	4/16 L	→	240 F
(2Q)	40 F	+	100 C	+	120 T	+	4/16 L	→	360 C
(3Q)	40 F	+	40 C	+	200 T	+	8/16 L	→	480 T
Totais	200 F		300 C		400 T		1 L		

Tomando $w = 0,75$, temos que $r = 5\%$ (lembre que $R = 20\%$) e o cálculo dos preços relativos se torna possível:

$$\begin{pmatrix} 120 & 160 & 80 \\ 40 & 100 & 120 \\ 40 & 40 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_t \\ p_f \\ p_p \end{pmatrix} (1,05) + 0,75 \begin{pmatrix} 4/16 \\ 4/16 \\ 8/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240p_f \\ 360p_c \\ 480p_t \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, os preços do sistema são:

$$p_f = 0,0109$$
$$p_c = 0,0044$$
$$p_t = 0,0038.$$

Vale notar que, embora $w = 75\%$ tenha sido medido com relação ao excedente do sistema Padrão, isso não significa que a massa de lucros absorvida seja igual a 25% da renda Padrão.De fato, uma vez que conhecemos a taxa de lucro e os preços, podemos calcular a proporção dos lucros em termos do excedente do sistema Padrão. Isso se deve às diferenças entre o valor do excedente dos sistemas.

No sistema Padrão,

$$Y_{\text{padrão}} = \mathbf{p}^\top S = 40p_f + 60p_c + 80p_t = 1;$$

já no sistema original,

$$Y_{\text{original}} = \mathbf{p}^\top S = 0p_f + 165p_c + 70p_t = 0,9877.$$

Logo, a massa de lucros é:

$$Y_{\text{original}} - w = 0,9877 - 0,75 = 0,2377.$$

A parcela destinada aos lucros é portanto:

$$\frac{Y_{\text{original}} - w}{Y_{\text{original}}} = \frac{0,2377}{0,9877} = 0,24066.$$

Nas palavras de Sraffa:

> "Mas enquanto a participação dos salários será igual em valor a $\frac{3}{4}$ da renda nacional padrão, não se deduz que a participação dos lucros será equivalente ao restante $\frac{1}{4}$ da renda-padrão. A participação dos lucros consistirá no que tenha sobrado da renda nacional *efetiva*, depois de deduzir dela o equivalente de $\frac{3}{4}$ da renda nacional *Padrão* para salários: e os preços deverão ser tais que façam com que o valor do que vá para lucros seja igual a 5% do valor dos meios de produção efetivos da sociedade."
>
> [Sraffa — p. 23]

§33 (Construção da mercadoria Padrão: o sistema q)

Passemos ao caso geral. Considere o seguinte sistema econômico "original":

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A_a & + & B_a & + & \cdots & + & K_a & + & L_a & \to & A \\
A_b & + & B_b & + & \cdots & + & K_b & + & L_b & \to & B \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_k & + & B_k & + & \cdots & + & K_k & + & L_k & \to & K \\
\hline
A^+ & & B^+ & & \cdots & & K^+ & & 1 & &
\end{array}$$

O sistema de preços derivado do sistema econômico original (sistema esse que devemos resolver) é:

$$\begin{array}{l|lllllllll}
\text{(La)} & (A_a p_a & + & B_a p_b & + & \cdots & + & K_a p_k)(1+r) & + & wL_a = Ap_a \\
\text{(Lb)} & (A_b p_a & + & B_b p_b & + & \cdots & + & K_b p_k)(1+r) & + & wL_b = Bp_b \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \quad \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\
\text{(Lk)} & (A_k p_a & + & B_k p_b & + & \cdots & + & K_k p_k)(1+r) & + & wL_k = Kp_k
\end{array}$$

que corresponde à seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} A_a & B_a & \dots & K_a \\ A_b & B_b & \dots & K_b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_k & B_k & \dots & K_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_a \\ p_b \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} (1+r) + w \begin{pmatrix} L_a \\ L_b \\ \vdots \\ L_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ap_a \\ Bp_b \\ \vdots \\ Kp_k \end{pmatrix}$$

Lembrando da nossa equação de referência:

$$p_a(A - A^+) + p_b(B - B^+) + \cdots + p_k(K - K^+) = \mathbf{p}^\top S = 1.$$

Temos portanto $k+2$ incógnitas e $k+1$ equações. Quando fixarmos w poderemos, descobrir o valor das demais incógnitas?

Para melhor lidar com esse sistema não linear, buscamos k multiplicadores adequados para construir o sistema Padrão associado. A condição a ser atendida é que o vetor da produção agregada (P) esteja nas mesmas proporções que o vetor dos meios de produção (CI). Ou seja, queremos derivar do sistema original a partir de multiplicações por escalares positivos (q_i) um novo sistema tal que:

$$\begin{array}{l|lllllllll}
\text{(Qa)} & (A_a q_a & + & A_b q_b & + & \cdots & + & A_k q_k)(1+R) & = & A q_a \\
\text{(Qb)} & (B_a q_a & + & B_b q_b & + & \cdots & + & B_k q_k)(1+R) & = & B q_b \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\text{(Qk)} & (K_a q_a & + & K_b q_b & + & \cdots & + & K_k q_k)(1+R) & = & K q_k
\end{array}$$

onde, como diz Sraffa:

> "Para completar o sistema é necessário definir a unidade em que vão ser expressos os multiplicadores; e visto que desejamos que a quantidade de trabalho empregado no sistema-padrão seja a mesma que no sistema efetivo (seção 26), definimos a unidade mediante uma equação adicional que incorpora esta condição, a saber:
>
> $$L_a q_a + L_b q_b + \cdots + L_k q_k = 1."$$
>
> [Sraffa — p. 24]

Temos pois um número de $k+1$ equações que determinam os k multiplicadores e R.

§34 (A renda nacional Padrão como unidade)

A resolução do sistema de equações acima nos dá uma lista de multiplicadores: $\mathbf{q} = (q'_a, q'_b, \ldots, q'_k)$. Ao aplicarmos esses multiplicadores ao sistema original, obtemos o sistema Padrão associado a ele:

$$\begin{array}{l|lllllllllll}
(L'a) & A_a q'_a & + & B_a q'_a & + & \cdots & + & K_a q'_a & \rightarrow & A q'_a & = & A' \\
(L'b) & A_b q'_b & + & B_b q'_b & + & \cdots & + & K_b q'_b & \rightarrow & B q'_b & = & B' \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(L'k) & A_k q'_k & + & B_k q'_k & + & \cdots & + & K_k q'_k & \rightarrow & K q'_k & = & K' \\
\hline
 & A'^+ & & B'^+ & & \cdots & & K'^+ & & & &
\end{array}$$

Daqui derivamos o produto líquido Padrão:

$$S = (A' - A'^{+}, B' - B'^{+}, \dots, K' - K'^{+}),$$

O sistema de preços obtido a partir do sistema Padrão é:

$$\begin{array}{r|lllllllllll}
\text{(La)} & q'_a[(A_a p_a & + & B_a p_b & + & \cdots & + & K_a p_k)(1+r) & + & wL_a] & = & q'_a A p_a \\
\text{(Lb)} & q'_b[(A_b p_a & + & B_b p_b & + & \cdots & + & K_b p_k)(1+r) & + & wL_b] & = & q'_b B p_b \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \quad \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\text{(Lk)} & q'_k[(A_k p_a & + & B_k p_b & + & \cdots & + & K_k p_k)(1+r) & + & wL_k] & = & q'_k K p_k
\end{array}$$

A escollha do que igualaremos a 1 (o nosso numerário) nos dará a nossa última equação necessária para a resolução do sistema acima:

$$p_a(A' - A'^{+}) + p_b(B' - B'^{+}) + \dots + p_k(K' - K'^{+}) = 1.$$

§35 (Exclusão dos não-básicos)

Imagine um bem não-básico, como as broas que produzíamos no começo. As broas não entram de forma alguma nos meios de produção, logo, como no sistema Padrão tem de haver uma proporção entre o produto final e os meios de produção consumidos, percebemos que o sistema Padrão não poderá produzir broas, uma vez que ele não consome broas.

O mesmo vale para os demais bens não-básicos produzidos. O multiplicador dessas indústrias será também zero, de forma que o sistema Padrão obtido produzirá apenas bens básicos.

3.3 Unicidade do sistema Padrão [*Sraffa — Cap. 5*]

§36 (Introdução)

Chegamos agora em um ponto importante. Ao descobrirmos que existe um modo de obter a solução do sistema particular apresentado acima, nos perguntamos se, para qualquer sistema econômico, é possível achar esses multiplicadores que nos levam do sistema original ao sistema Padrão. Além disso, se conseguirmos descobrir que, para cada valor de salário, existe uma única taxa de lucro e que, para cada taxa de lucro, existe um único salário, poderemos fazer uma mudança engenhosa. Deixaremos de considerar como exógeno o salário e passaremos a supor conhecida a taxa de lucro. Com isso, o nosso sistema que era não linear se torna linear e portanto, para fins de cálculo, muito mais simples.

Resta para nós saber se é sempre possível chegar num sistema Padrão a partir de um sistema econômico viável qualquer. Como diz Sraffa na abertura do capítulo cinco:

> "Nas cinco seções seguintes, tratar-se-á de provar que sempre há um modo e não mais do que um modo, de transformar um dado sistema econômico em um sistema Padrão: em outras palavras, que há sempre um conjunto de multiplicadores, e apenas um, que, se aplicado às várias equações ou indústrias que compõem o sistema, terá o efeito de reordená-la em tais proporções que a composição das mercadorias dos meios de produção totais e a do produto total sejam idênticas."
>
> [Sraffa — p. 26]

§37 (Sempre é possível a transformação num sistema Padrão)

Vejamos como podemos a partir de qualquer sistema econômico viável obter um sistema Padrão por meio da multiplicação por escalares positivos apropriados. Veremos apenas uma indicação de como obter esse sistema econômico. Tentaremos uma aproximação mais intuitiva para o caminho que nos leva a descobrir a existência de um tal sistema Padrão. Vamos por partes.

Ponhamo-nos diante de um sistema econômico (viável) qualquer:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
A_a & + & B_a & + & \cdots & + & K_a & + & L_a & \to & A \\
A_b & + & B_b & + & \cdots & + & K_b & + & L_b & \to & B \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_k & + & B_k & + & \cdots & + & K_k & + & L_k & \to & K \\
\hline
A^+ & & B^+ & & \cdots & & K^+ & & 1 & &
\end{array}$$

onde a condição de viabilidade nos dá que:

$$\begin{aligned}
A^+ &\leq A \\
B^+ &\leq B \\
&\vdots \\
K^+ &\leq K
\end{aligned}$$

Assim, chegaremos ao sistema Padrão associado ao sistema econômico dado, por meio dos seguintes passos:

1) Ajustamos as proporções das indústrias do sistema (*i.e.* multiplicamos as linhas (La), (Lb), ..., (Lk), por constantes positivas apropriadas) de tal forma que seja produzido excedente em todas as indústrias. Lembre do exemplo que demos no parágrafo 32:

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
(1) & 90\text{ F} & + & 120\text{ C} & + & 60\text{ T} & + & 3/16\text{ L} & \rightarrow & 180\text{ F} \\
(2) & 50\text{ F} & + & 125\text{ C} & + & 150\text{ T} & + & 5/16\text{ L} & \rightarrow & 450\text{ C} \\
(3) & 40\text{ F} & + & 40\text{ C} & + & 200\text{ T} & + & 8/16\text{ L} & \rightarrow & 480\text{ T} \\
\hline
\text{Totais} & 180\text{ F} & & 285\text{ C} & & 410\text{ T} & & 1\text{ L} & &
\end{array}$$

Esse sistema, embora viável, não produz excedente em todas as indústrias. De fato, a indústria de ferro não produz mais do que o consumo de ferro por todas as indústrias.

Uma vez que a todas as indústrias do sistema econômico estejam produzindo excedente podemos passar para o próximo estágio.

2) Mantendo constantes todos os insumos utilizados pelas indústrias, vamos reduzir a produção agregada até que o excedente de alguma mercadoria seja eliminado. Essa redução deve ser feita através de cortes proporcionais na produção agregada. Ou seja, vamos multiplicar o vetor $P = (A, B, \dots, K)$ por um certo α de forma que o vetor $\alpha P - (A^+, B^+, \dots, K^+)$ tenha alguma coordenada igual a zero e nenhuma coordenada negativa.

3) Se houver excedente de alguma mercadoria (isto é, se não forem todas as coordenadas iguais a zero) volte para **1)**, caso contrário, isto é, caso todo o excedente tenha sido eliminado na etapa precedente, então multiplicamos o produto final uniformemente, de tal sorte que restabelecemos um excedente em todas as indústrias. O sistema obtido é o sistema Padrão.

Desta forma, descrevemos de modo inicial o método que Sraffa propõe para entender que sempre é possível, a partir de um sistema econômico viável, obter um sistema Padrão por meio de multiplicação por escalares positivos. Esses escalares são solução do sistema q:

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
\text{(Qa)} & (A_a q_a & + & A_b q_b & + & \cdots & + & A_k q_k)(1+R) & = & A q_a \\
\text{(Qb)} & (B_a q_a & + & B_b q_b & + & \cdots & + & B_k q_k)(1+R) & = & B q_b \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\text{(Qk)} & (K_a q_a & + & K_b q_b & + & \cdots & + & K_k q_k)(1+R) & = & K q_k
\end{array}$$

§38 (Por que surge a questão da unicidade?)

Gostaríamos ainda de saber se existe um único sistema Padrão associado a um dado sistema econômico. Isso é importante para concluirmos a unicidade da taxa máxima de lucro e com isso chegarmos a conclusões acerca da relação entre as variáveis distributivas (r e w). Segundo Sraffa:

> "Para demostrar que apenas um destes conjuntos representa um modo possível de reordenação das indústrias num sistema Padrão, é suficiente provar

que não pode haver mais do que um valor de R ao qual corresponde um conjunto de valores de q, todos positivos."

[Sraffa — p. 27]

Devemos notar que poderia haver uma outra solução do sistema q, o que, em tese, nos daria um outro sistema Padrão. O que Sraffa está enfatizando é que, qualquer outra solução terá de conter multiplicadores (um dos q's) negativos, o que viola a definição do sistema Padrão.

§39 (Preços positivos em todos os níveis de salário)

Supondo que conhecemos o valor de w, para todo conjunto de multiplicadores que levam a um sistema Padrão, temos associado a ele um conjunto de preços que permitem a reposição dos meios de produção. Lembramos que os preços devem ser positivos, para que haja sentido econômico.

Se $w = 1$, os preços estarão em proporção ao custo do trabalho direto e indireto necessário para a produção. Diminuído continuamente o salário de 1 para 0, os preços se moverão continuamente também, de forma que antes de se tornarem negativos eles deverão passar pelo zero. Entretanto, enquanto w e r forem maiores do que zero, nenhum bem poderá ter preço zero, a menos que o preço de alguma outra mercadoria que componha os seus meios de produção seja negativo. Assim, como nenhum dos preços pode se tornar zero antes que algum dos demais se torne negativo, nenhum dos preços pode ser o primeiro a chegar a zero. Logo nenhum dos preços se tornará negativo. A frase de Sraffa é a seguinte:

> "Assim, visto que nenhum p pode tornar-se negativo antes de qualquer outro, nenhum pode tornar-se negativo."
>
> [Sraffa — p. 28]

§40 (Equações de Produção com salário zero)

Como último argumento preliminar à demonstração da unicidade do sistema Padrão, vamos reescrever as equações de preços para $w = 0$:

$$
\begin{array}{r|ccccccc}
\text{(La)} & (A_a p_a & + & B_a p_b & + \cdots + & K_a p_k)(1+R) & = & A p_a \\
\text{(Lb)} & (A_b p_a & + & B_b p_b & + \cdots + & K_b p_k)(1+R) & = & B p_b \\
 & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \quad \vdots & & \vdots \\
\text{(Lk)} & (A_k p_a & + & B_k p_b & + \cdots + & K_k p_k)(1+R) & = & K p_k
\end{array}
$$

Ou, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} A_a & B_a & \dots & K_a \\ A_b & B_b & \dots & K_b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_k & B_k & \dots & K_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_a \\ p_b \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} (1+R) = \begin{pmatrix} Ap_a \\ Bp_b \\ \vdots \\ Kp_k \end{pmatrix}$$

onde R é a taxa máxima de lucro (lembre-se que todo o excedente econômico é destinado aos lucros quando $w = 0$).

§41 (Conjunto único de multiplicadores positivos)

Vamos mostrar que não pode haver senão um conjunto de multiplicadores positivos. Seja R' um valor de R ao qual correspondem preços positivos $(p'_a, p'_b, \dots, p'_k)$ e multiplicadores positivos $(q'_a, q'_b, \dots, q'_k)$ e seja R'' um **outro** valor de R ao qual correspondem $(p''_a, p''_b, \dots, p''_k)$ e $(q''_a, q''_b, \dots, q''_k)$. Mostraremos que algum dos q''_i 's é negativo.

Escrevendo as equações de preço para $w = 0$, $R = R'$ e $p_i = p'_i$, obtemos:

$$\begin{array}{r|ccccccccc} \text{(La)} & (A_a p'_a & + & B_a p'_b & + & \cdots & + & K_a p'_k)(1+R') & = & Ap'_a \\ \text{(Lb)} & (A_b p'_a & + & B_b p'_b & + & \cdots & + & K_b p'_k)(1+R') & = & Bp'_b \\ & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ \text{(Lk)} & (A_k p'_a & + & B_k p'_b & + & \cdots & + & K_k p'_k)(1+R') & = & Kp'_k \end{array}$$

Multiplicamos cada linha por q''_i:

$$\begin{array}{r|ccccccccc} q''_a\text{(La)} & q''_a(A_a p'_a & + & B_a p'_b & + & \cdots & + & K_a p'_k)(1+R') & = & q''_a Ap'_a \\ q''_b\text{(Lb)} & q''_b(A_b p'_a & + & B_b p'_b & + & \cdots & + & K_b p'_k)(1+R') & = & q''_b Bp'_b \\ & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ q''_k\text{(Lk)} & q''_k(A_k p'_a & + & B_k p'_b & + & \cdots & + & K_k p'_k)(1+R') & = & q''_k Kp'_k \end{array}$$

Somando todas as linhas, chegamos a:

$$\begin{aligned} \big[q''_a(A_a p'_a + B_a p'_b + \cdots + K_a p'_k) + q''_b(A_b p'_a + B_b p'_b + \cdots + K_b p'_k) + \cdots \\ + q''_k(A_k p'_a + B_k p'_b + \cdots + K_k p'_k)\big](1+R') = \\ = q''_a Ap'_a + q''_b Bp'_b + \cdots + q''_k Kp'_k \end{aligned} \tag{1}$$

Vamos escrever as equações do sistema q para $R = R''$ e $q_i = q''_i$:

$$\begin{array}{r|ccccccccc} \text{(Qa)} & (A_a q''_a & + & A_b q''_b & + & \cdots & + & A_k q''_k)(1+R'') & = & Aq''_a \\ \text{(Qb)} & (B_a q''_a & + & B_b q''_b & + & \cdots & + & B_k q''_k)(1+R'') & = & Bq''_b \\ & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \text{(Qk)} & (K_a q''_a & + & K_b q''_b & + & \cdots & + & K_k q''_k)(1+R'') & = & Kq''_k \end{array}$$

e multipliquemos cada linha por p'_i

$$\begin{array}{r|lllllllll}
p'_a(\mathrm{Qa}) & p'_a(A_a q''_a & + & A_b q''_b & + & \cdots & + & A_k q''_k)(1+R'') & = & p'_a A q''_a \\
p'_b(\mathrm{Qb}) & p'_b(B_a q''_a & + & B_b q''_b & + & \cdots & + & B_k q''_k)(1+R'') & = & p'_b B q''_b \\
 & \quad\vdots & & \quad\vdots & & \ddots & & \quad\vdots & & \quad\vdots \\
p'_k(\mathrm{Qk}) & p'_k(K_a q''_a & + & K_b q''_b & + & \cdots & + & K_k q''_k)(1+R'') & = & p'_k K q''_k
\end{array}$$

Somando todas as linhas chegamos a:

$$\begin{aligned}
\big[p'_a(A_a q''_a + A_b q''_b + \cdots + A_k q''_k) + p'_b(B_a q''_a + B_b q''_b + \cdots + B_k q''_k) + \cdots +& \\
p'_k(K_a q''_a + K_b q''_b + \cdots + K_k q''_k)\big](1+R'') =& \\
= p'_a A q''_a + p'_b B q''_b + \cdots + p'_k K q''_k&
\end{aligned} \tag{2}$$

As somas que aparecem no lado direito de (1) e (2) são idênticas, enquanto que, do lado esquerdo, todas as somas entre colchetes são iguais. A única diferença entre (1) e (2) é que $R' \neq R''$. Portanto, as duas equações só poderão ser iguais se elas forem iguais a zero. Posto que todos os preços são positivos, temos que algum dos q''_i 's é negativo.

Sraffa recupera o raciocínio feito até então:

> "Isso prova que, *se* existe um conjunto de valores positivos para os p's não pode existir mais do que um conjunto de valores positivos para os q's.
>
> Havíamos visto anteriormente (na seção 37), que há sempre um conjunto de q's positivos e que há sempre um conjunto de p's positivos."
>
> [Sraffa — p. 28]

Não esqueçamos de ler a seguinte nota de pé de página (nota essa imprescindível para o argumento da próxima seção):

> "Mediante argumentação similar simplesmente introduzindo os p'''s e os q''s em lugar dos p''s e q'''s, demonstra-se que, se há um conjunto de valores positivos para os q's, não pode haver mais de um conjunto de valores positivos para os p's."
>
> [Sraffa — pg. 29]

Finalmente, lemos com Sraffa que:

> "Podemos concluir, portanto, que sempre há um valor de R, e apenas um, ao qual corresponde um conjunto de multiplicadores positivos (os q's) que transformarão um dado sistema econômico num sistema Padrão."
>
> [Sraffa — pp. 28-29]

§42 (Multiplicadores positivos correspondentes ao ***mais baixo*** valor de R)

Agora, sabemos que existe um único sistema Padrão derivado de um dado sistema econômico. Ainda não completamos o nosso objetivo (tratar a taxa de lucros como exógena). Precisamos, portanto, continuar mais um pouco. Mostraremos agora que o valor de R ao qual correspondem os únicos multiplicadores positivos, e também o único ao qual correspondem preços positivos, é o menor dos valores possíveis de R.

Seja R' o valor de R que corresponde aos multiplicadores positivos e suponhamos que existe um valor menor de R, digamos R'' ao qual correspondem preços positivos. Como exemplo, façamos $R' = 15\%$ e $R'' = 10\%$. Lembremos do nosso antigo sistema com w e r:

$$\begin{array}{r|lllllllll}
\text{(La)} & (A_a p_a & + & B_a p_b & + & \cdots & + & K_a p_k)(1+r) & + & wL_a = Ap_a \\
\text{(Lb)} & (A_b p_a & + & B_b p_b & + & \cdots & + & K_b p_k)(1+r) & + & wL_b = Bp_b \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\text{(Lk)} & (A_k p_a & + & B_k p_b & + & \cdots & + & K_k p_k)(1+r) & + & wL_k = Kp_k
\end{array}$$

Pagaremos aos salários uma quantidade de mercadoria Padrão que, como sabemos, corresponde ao sistema Padrão cuja proporção Padrão única é R'. Para tanto, vejamos o sistema de preços do sistema Padrão associado a R', obtido pelos multiplicadores $(q'_a, q'_b, \ldots, q'_k)$.

$$\begin{array}{r|lllllllll}
\text{(Qa)} & q'_a(A_a p'_a & + & B_a p'_b & + & \cdots & + & K_a p'_k)(1+r) & + & q'_a wL_a = q'_a Ap'_a \\
\text{(Qb)} & q'_b(A_b p'_a & + & B_b p'_b & + & \cdots & + & K_b p'_k)(1+r) & + & q'_b wL_b = q'_b Bp'_b \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\text{(Qk)} & q'_k(A_k p'_a & + & B_k p'_b & + & \cdots & + & K_k p'_k)(1+r) & + & q'_k wL_k = q'_k Kp'_k
\end{array}$$

Lembramos que a renda nacional de um sistema econômico viável qualquer é dada por:

$$(A - A^+)p_a + (B - B^+)p_b + \cdots + (K - K^+)p_k,$$

onde A (B, ..., K) é a quantidade produzida pela indústria do bem a (b, ..., k) e A^+ (B^+, ..., K^+) é o consumo agregado dessa mercadoria.

Lembramos também que

$$q'_a L_a + q'_b L_b + \cdots + q'_k L_k = 1.$$

Substituiremos os termos que representam os gastos com salários com quantidades proporcionais de mercadoria Padrão, de forma que os gastos com salários em relação a renda nacional Padrão seja:

$$L_a w + L_b w + \cdots + L_k w = 1 - R''/R'.$$

É importante frisar que esse pagamento está sendo feito em termos físicos.

Como $R'' < R'$, é possível esse gasto com salários. No nosso caso:

$$L_a w + L_b w + \cdots + L_k w = 1 - 10/15 = 1/3.$$

Para melhor entender esse passo, basta vejamos o que isso acarreta no sistema associado a R'. A relação salário-lucro nos dá:

$$r = R'(1 - 1/3) = 10\%$$

e, além disso, os preços encontrados serão todos positivos. Ou seja, escolhemos w de forma que o sistema original tenha sua taxa de lucro (r) igual à taxa máxima de lucro R'' do sistema derivado por multiplicação pelo vetor $\mathbf{q}'' = (q_i'')$.

Mas, para o sistema correspondente a R'', à taxa de 10%, o valor do salário deve ser nulo. Ora, este é composto por uma cesta de produtos determinada no sistema Padrão, com quantidades positivas de produtos. Para que o seu valor seja 0, algum dos preços terá de ser negativo.

Diante desse resultado, Sraffa escreve:

> "Isso implica, como de fato já dissemos na seção anterior, que entre os preços que correspondem a R'', *alguns devem ser negativos e outros positivos*."
>
> [Sraffa — p. 29]

E portanto conclui:

> "Os dois conjuntos de soluções dão assim o mesmo valor (10%) para r, mas dão dois conjuntos diferentes de preços."
>
> [Sraffa — p. 29]

Chegamos a uma contradição posto que, ao fixarmos $r = 10\%$, o sistema que antes não era linear se torna linear e portanto, como se trata de um sistema bem determinado, possui única solução, mas acabamos de exibir duas diferentes soluções! Sraffa conclui:

> "Assim R', o valor de R ao qual correspondem todos os preços positivos, não pode ser maior e portanto deve ser menor do que qualquer outro valor R'', ao qual correspondem alguns preços positivos e alguns preços negativos."
>
> [Sraffa — p. 30]

§43 (Produto Padrão substituído pela quantidade de trabalho equivalente)

Sraffa abre esse ponto com uma colocação que merece nossa atenção:

"O sistema Padrão é uma construção puramente auxiliar. Deveria ser, portanto, possível apresentar os elementos essenciais do mecanismo que estamos considerando sem recorrer a ele."

[Sraffa — p. 30]

Sraffa já nos previne contra a tentação de atribuir um papel impróprio ao sistema Padrão. Ele é um constructo teórico cuja única finalidade é auxiliar a descoberta de certas relações que não estão aparentes no sistema original. Como o sistema Padrão é constituído pelas mesmas equações do sistema original, essas relações se estendem ao sistema original. Que relações foram aprendidas com base no sistema Padrão auxiliar?

Em primeiro lugar, temos a relação salário-lucro. Se nosso numerário for o produto líquido Padrão, então o salário (medido em termos dessa unidade) e o lucro guardam uma relação de proporção que não depende de preços. A relação salário-lucro é:

$$r = R'(1 - w).$$

Ela pode ser deduzida de forma simples a partir da equação obtida pela soma de todas as equações no sistema de preços do sistema Padrão:

$$\left(p_a A^+ + p_b B^+ + \cdots + p_k K^+\right)(1 + r) + w \times 1 = p_a A + p_b B + \cdots + p_k K. \tag{3}$$

Temos as seguintes relações válidas para todos os bens, mas que expressamos apenas para o bem produzindo na indústria a:

$$A = (1 + R')A^+ \qquad \therefore \qquad A - A^+ = R'A^+$$

Como o numerário que estamos utilizando é o excedente do sistema Padrão, temos:

$$\left(p_a(A - A^+) + p_b(B - B^+) + \cdots + p_k(K - K^+)\right) = 1.$$

Substituindo o trabalho total pelo numerário (ambos normalizados a 1):

$$\begin{aligned}&\left(p_a A^+ + p_b B^+ + \cdots + p_k K^+\right)(1 + r)\\ &\qquad + w\left(p_a(A - A^+) + p_b(B - B^+) + \cdots + p_k(K - K^+)\right)\\ &\qquad\qquad = p_a A + p_b B + \cdots + p_k K\end{aligned}$$

e usando as relações ($A - A^+ = R'A^+$ e $A = (1 + R')A^+$), obtemos:

$$\begin{aligned}&\left(p_a A^+ + p_b B^+ + \cdots + p_k K^+\right)(1 + r)\\ &\qquad + wR'\left(p_a A^+ + p_b B^+ + \cdots + p_k K^+\right)\\ &\qquad\qquad = (1 + R')\left(p_a A^+ + p_b B^+ + \cdots + p_k K^+\right)\end{aligned}$$

Como $p_a A^+ + p_b B^+ + \cdots + p_k K^+ > 0$, temos:

$$1 + r + R'w = 1 + R',$$

donde:

$$r = R' - wR' = (1 - w)R',$$

onde R' é a constante do sistema Padrão (ao qual correspondem os multiplicadores positivos).

Reciprocamente, se a relação salário-lucro é dessa forma, o numerário tem que ser o produto líquido Padrão. De fato, vejamos em detalhe. Voltando a equação (3), temos:

$$\left(p_a A^+ + p_b B^+ + \cdots + p_k K^+\right)(1 + r) + w = p_a A + p_b B + \cdots + p_k K.$$

Daí obtemos, usando $A = A^+ + A^s$ e $A^s = A^+ R'$:

$$\Big(p_a A^s + p_b B^s + \cdots + p_k K^s\Big)\frac{r}{R'} + w = (p_a A^s + p_b B^s + \cdots + p_k K^s)$$

e por fim

$$w = \left(1 - \frac{r}{R'}\right)\Big(p_a A^s + p_b B^s + \cdots + p_k K^s\Big).$$

Já que a relação salário-lucro pode ser escrita como:

$$w = \frac{R' - r}{R'},$$

concluímos que:

$$(p_a A^s + p_b B^s + \cdots + p_k K^s) = 1.$$

Logo o numerário é o valor do excedente do sistema Padrão.

Ao impormos uma relação salário-lucro dessa forma, já estaremos portanto definindo o nosso numerário. Agora, para encontrar o valor de R' não precisamos dos multiplicadores do sistema q. Basta colocarmos $w = 0$ e resolver o sistema original. O valor encontrado de r será a taxa máxima de lucro do sistema R'. Vale a pena lembrar deste comentário de Sraffa:

> "A condição anterior é suficiente para assegurar que o salário e os preços das mercadorias expressam-se em termos do produto líquido Padrão. E é curioso que fiquemos, assim, capacitados para usar um padrão sem sequer saber do que se compõe."
>
> [Sraffa — p. 30]

Mas Sraffa se esforça ainda por se libertar do uso de um padrão desconhecido, ele busca o concreto, em suas palavras:

> "Dispomos, entretanto, de uma medida mais tangível para os preços das mercadorias que torna possível deslocar o produto líquido Padrão até mesmo dessa função atenuada."
>
> [Sraffa — p. 30]

Como fazer isso? Vamos seguir o argumento. Para uma dada taxa de lucro, sem que tenhamos que conhecer os preços, podemos estabelecer uma relação entre o produto líquido Padrão e a quantidade de trabalho que pode ser comandada. A quantidade de trabalho comandável (ou abreviadamente quantidade de trabalho) vai variar em sentido inverso ao salário padrão (w). Se o trabalho anual do sistema original é igualado a 1, a quantidade equivalente de trabalho comandado derivada da relação conhecida é:

$$1/w = R'/(R' - r).$$

Ou seja, ao final do ano, tendo vendido todo o excedente social, cujo valor é 1, poderemos comandar $1/w$ anos de salário.

Veremos que a quantidade de trabalho tem as propriedades desejadas de uma medida das flutuações dos preços. Ela nos permite observar o quanto o preço de cada bem variou em função de suas condições de produção (quase como se nós estivéssemos observando "no vácuo" as mudanças de preços). De fato, a quantidade de trabalho varia seguindo uma regra simples que é independente de preços.

O produto líquido Padrão entretanto ainda é o meio pelo qual os salários são expressos. Sraffa, com o objetivo de ganhar total autonomia do sistema Padrão, diz:

> "A última utilização restante do produto líquido Padrão é como meio em termos do qual se expressa o salário; e neste não parece que exista algum modo de substituí-lo."
>
> [Sraffa — p. 31]

Para eliminar de vez o sistema Padrão será necessário tratar w como um número que ajuda a definir a quantidade de trabalho que é a unidade dos preços (uma vez fixada a taxa de lucro). Sraffa nos diz:

> "Se desejarmos eliminá-lo completamente, deveremos deixar de considerar w como uma expressão do salário e tratá-lo, em vez disso, como um número puro que ajude a definir a quantidade de trabalho que, à taxa de lucro dada, constitua a unidade de preços: então, sendo expressos os preços das mercadorias em termos da quantidade de trabalho, poderemos encontrar seu salário [o do trabalho] em termos de qualquer mercadoria, tomando o recíproco do preço dessa mercadoria."
>
> [Sraffa — p. 31]

O salário se tornou portanto o inverso da quantidade de trabalho para nós e agora podemos chegar a uma mudança importante no tratamento do sistema e das variáveis exógenas.

§44 (O salário ou a taxa de lucro como variável independente)

Ao longo dos últimos argumentos, nós deixamos de tratar o salário como dado e passamos a calculá-lo em função de uma dada taxa de lucro.

Aqui estamos fazendo uma mudança que tem implicações para o cálculo dos preços relativos mas também tem inúmeros desdobramentos para a parte que está por trás do modelo. Sraffa não deixa de argumentar também esse aspecto:

> "A escolha do salário como a variável independente nas fases preliminares foi devida ao que considerávamos como consistente em mercadorias de primeira necessidade específicas, determinadas por condições fisiológicas ou sociais que são independentes dos preços ou da taxa de lucro. Mas tão logo se admita a possibilidade de variação na divisão do produto, esta consideração perde grande parte de sua força. E quando o salário é considerado como 'dado' em termos de um padrão mais ou menos abstrato, e não adquire um significado definido até que os preços das mercadorias sejam determinados, a posição se inverte. A taxa de lucro, como uma razão, tem significado que é independente de qualquer preço e pode ser, portanto, 'dada' antes que os preços sejam fixados. É, assim, suscetível de ser determinada fora do sistema de produção, em particular pelo nível das taxas monetárias de juros.
>
> Nas seções seguintes a taxa de lucro será, portanto, tratada como variável exógena"
>
> [Sraffa — p. 31]

Está acima praticamente todo o ponto 44 de Sraffa. Vale notar que o capítulo 5 de Sraffa realiza 3 grandes movimentos: demonstra a existência e unicidade do sistema Padrão, afirma a qualidade de auxiliar do sistema Padrão para o raciocínio e propõe a troca da variável independente (antes o salário, agora a taxa de lucro).

A não linearidade do sistema que impunha uma dificuldade para o cálculo efetivo dos preços de reprodução agora está superada. Transformação do sistema não linear em linear e a intercambialidade das variáveis w e r tem implicações como acabamos de ver que vão além desse simples cálculo. Elas abrem espaço para a discussão monetária. Sraffa consegue dessa forma sair do contexto da homogeneidade das relações trabalho por meios de produção ($Rel_i = Rel_j$), incorporando a abordagem clássica e a transportando para um contexto muito mais geral.

4 Conclusão

O presente trabalho se ocupou de elucidar os elementos necessários para a leitura de "Produção de Mercadorias por meio de mercadorias". De fato, foi feito um acompanhamento ponto a ponto dos primeiros cinco capítulos do livro. Com isso, espera-se que esteja lançada a base para leituras subsequentes.

Podemos agora olhar de longe, para a estrutura geral do texto.

Em primeiro lugar, define-se o ambiente em que se está pensando o problema de determinação dos preços relativos. Nesse contexto, evolui-se gradativamente de um modelo de subsistência para um modelo com excedente. Essa evolução traz duas novas categorias para a consideração, o salário e o lucro. Além disso, torna-se necessária uma abordagem mais elaborada, posto que, pelo modo pelo qual vínhamos tratando as variáveis, o sistema ficava não linear. Após um conjunto de raciocínios mais simples, sem ainda recorrer ao sistema Padrão, Sraffa avança idéias sobre a importância da relação entre o trabalho empregado em cada indústria e o valor pago pelos meios de produção desta (o que chamamos ao longo do texto de Rel_j para a indústria j).

Após esse primeiros raciocínios, Sraffa elabora um exemplo onde se constrói um sistema Padrão e se calcula a relação salário-lucro. Ainda no capítulo 4, Sraffa apresenta a idéia de encontrar um conjunto de multiplicadores que conduzam um sistema viável ao sistema Padrão.

Por fim, no capítulo 5, o mais complexo em termos matemáticos, e de enorme importância para a teoria de Sraffa, é apresentada a existência e a unicidade do sistema Padrão. Feito isso, Sraffa declara o caráter auxiliar desse sistema e elabora argumentos que permitem considerar a taxa de lucro como exógena e com isso os preços, que antes não podíamos calcular, se tornam facilmente calculáveis.

Este é o aspecto fundamental que deve um estudante da obra reter. Sraffa consegue, herdando as categorias de análise dos clássicos, avançar uma mudança na variável exógena do modelo e com isso não apenas simplifica as técnicas necessárias para a resolução do problema (o que já tem interesse em si mesmo) como a consideração de r como variável exógena ilumina o caráter monetário da sua teoria de preços relativos, posto que r é determinado pelas instituições monetárias.

Referências

[Bellino 2004]BELLINO, E. On sraffa's standard commodity. *Cambridge Journal of Economics*, v. 28, n. 1, p. 121–132, 2004.

[Eatwell 2000]EATWELL, J. Revisionist findings on Sraffa: Comment. In: KURZ, H. (Ed.). *Critical Essays on Piero Sraffa's Legacy in Economics*. Austria: Cambridge University Press, 2000. p. 45–48.

[Eatwell e Panico 1987]EATWELL, J.; PANICO, C. Sraffa, Piero. In: EATWELL, J.; MILGATE, M.; NEWMAN, P. (Ed.). *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*. [S.l.]: London & New York. Macmillan and Stockton Press, 1987. v. 4, p. 445–451.

[Garegnani 1987]GAREGNANI, P. Surplus approach to value and distribution. In: EATWELL, J.; MILGATE, M.; NEWMAN, P. (Ed.). *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*. [S.l.]: London & New York. Macmillan and Stockton Press, 1987. v. 4, p. 560–574.

[Garegnani 2000]GAREGNANI, P. Revisionist findings on Sraffa: Comment. In: KURZ, H. D. (Ed.). *Critical Essays on Piero Sraffa's Legacy in Economics*. Austria: Cambridge University Press, 2000. p. 48–68.

[Garegnani 2007]GAREGNANI, P. Professor Samuelson on Sraffa and the Classical Economists. *Euro Journal of History of Economic Thought*, v. 14, n. 2, p. 181–241, jun 2007.

[Garegnani 2007]GAREGNANI, P. Samuelson's misses: a rejoinder. *Euro Journal of History of Economic Thought*, v. 14, n. 3, p. 573–585, set 2007.

[Lima 2008]LIMA, E. L. *Análise Real*. Estrada Dona Castorina 110: IMPA, 2008.

[Salvadori 2007]SALVADORI, H. D. K. . N. On the collaboration between sraffa and besicovitch: The 'proof of gradient'. *Leoditta*, p. 260–275, 2007.

[Samuelson 1987]SAMUELSON, P. A. Sraffian economics. In: EATWELL, J.; MILGATE, M.; NEWMAN, P. (Ed.). *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*. Austria: London & New York. Macmillan and Stockton Press, 1987. v. 4, p. 452–460.

[Samuelson 2000]SAMUELSON, P. A. Revisionist findings on Sraffa: Reply. In: KURZ, H. D. (Ed.). *Critical Essays on Piero Sraffa's Legacy in Economics*. Austria: Cambridge University Press, 2000. p. 87–102.

[Schefold 2000]SCHEFOLD, B. Revisionist findings on Sraffa: Comment. In: KURZ, H. D. (Ed.). *Critical Essays on Piero Sraffa's Legacy in Economics*. Austria: Cambridge University Press, 2000. p. 69–87.

[Sraffa 1960]SRAFFA, P. *Production of commodities by means of commodities: Prelude to a critique of economic theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1960.

[Sraffa 1980[1960]]SRAFFA, P. *Produção de Mercadorias por meio de Mercadorias: Preludio a uma crítica da teoria econômica*. [S.l.]: Abril S.A., 1980[1960].

[Velupillai 2007]VELUPILLAI, K. Sraffa's mathematical economics — a *constructive* interpretation. In: COMINO, S. (Ed.). *Discussion Papers*. Trento – Italia: Università degli Studi – Dipartimento di Economia, 2007. v. 2. 31 pp.

Apêndice

> "The concerns in [Production of commodities by means of commodities] is the *solvability of equation systems* and whenever existence or uniqueness proofs are considered, they are either spelled out in completeness, albeit from a *non-formal, non-classical*, point of view, or detailed hints are given, usually in the form of examples, to complete the necessary proofs in required generalities."
>
> [Velupillai — Sraffa's Mathematical Economics: a constructive interpretation]

Este apêndice tem por fim exprimir em linguagem formal alguns argumentos de "Produção de mercadorias por meio de mercadorias". Sua leitura, embora não seja imprescindível para a compreensão das linhas gerais da argumentação de Sraffa, é todavia imprescindível para quem quer compreender com exatidão a determinação dos preços relativos, seja no modelo de subsistência, de que trata o apêndice A, seja no caso de excedente, onde além de utilizarmos o conhecimento dos preços relativos do modelo de subsistência, precisamos estabelecer a existência de um sistema Padrão, o que será feito no apêndice B.

Essa tarefa requer, talvez, outra disposição do leitor. Além de ter em mente o modelo econômico proposto no livro, os argumentos aqui abordados têm uma carga matemática mais densa e, portanto, uma dose de paciência e minúcia será requerida.

A A independência linear das $(k-1)$ equações do sistema com k equações

Lembramos o sistema econômico de subsistência que estamos estudando. Trata-se de um sistema de indústrias interligadas, isto é, não há um subconjunto próprio de indústrias que seja capaz de se sustentar. Todas as indústrias consomem (direta ou indiretamente) a produção das demais; todos os bens são básicos.

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_a & + & B_a & + & \dots & + & K_a & \rightarrow & A \\
A_b & + & B_b & + & \dots & + & K_b & \rightarrow & B \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
A_k & + & B_k & + & \dots & + & K_k & \rightarrow & K
\end{array}$$

Numa economia de subsistência vale que:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_a & + & A_b & + & \dots & + & A_k & = & A \\
B_a & + & B_b & + & \dots & + & B_k & = & B \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
K_a & + & K_b & + & \dots & + & K_k & = & K
\end{array}$$

Esse sistema dá origem às seguintes equações:

$$\begin{array}{l|ccccccccc}
\text{(La)} & p_aA_a & + & p_bB_a & + & \dots & + & p_kK_a & = & p_aA \\
\text{(Lb)} & p_aA_b & + & p_bB_b & + & \dots & + & p_kK_b & = & p_bB \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\text{(Lk)} & p_aA_k & + & p_bB_k & + & \dots & + & p_kK_k & = & p_kK
\end{array}$$

Como

$$\begin{array}{l|ccccccccc}
\text{(La')} & (A_a-A)p_a & + & B_ap_b & + & \dots & + & K_ap_k & = & 0 \\
\text{(Lb')} & A_bp_a & + & (B_b-B)p_b & + & \dots & + & K_bp_k & = & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\text{(Lk')} & A_kp_a & + & B_kp_b & + & \dots & + & (K_k-K)p_k & = & 0
\end{array}$$

em termos matriciais temos que:

$$\begin{pmatrix} A_a-A & B_a & \dots & K_a \\ A_b & B_b-B & \dots & K_b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_k & B_k & \dots & K_k-K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_a \\ p_b \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somando todas as linhas da matriz, resulta a dependência linear dos vetores linha, pois $A = A_a + A_b + \cdots + A_k$, e assim por diante:

$$(La') + (Lb') + \ldots + (Lk') = 0.$$

Tiramos do sistema a última linha. Afirmamos que agora o sistema de j $(= k-1)$ equações é linearmente independente. Pensando na submatriz formada pelas j linhas, temos:

$$\begin{array}{c} (La'') \\ (Lb'') \\ \vdots \\ (Lj'') \end{array} \begin{pmatrix} A_a-A & B_a & \dots & J_a \\ A_b & B_b-B & \dots & J_b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_j & B_j & \dots & J_j-J \end{pmatrix}$$

Queremos mostrar que essas linhas são L.I, isto é, que se existem escalares λ_a, λ_b, ..., λ_j tais que:

$$\lambda_a(La'') + \lambda_b(Lb'') + \ldots + \lambda_j(Lj'') = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \tag{4}$$

então

$$\lambda_a = \lambda_b = \ldots = \lambda_j = 0.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que λ_a é o máximo dos λ_i's e que $\lambda_a > 0$.

Podemos escrever (4) como:

$$\begin{pmatrix} \lambda_a(A_a - A) + \lambda_b A_b + \ldots + \lambda_j A_j \\ \lambda_a B_a + \lambda_b(B_b - B) + \ldots + \lambda_j B_j \\ \vdots \\ \lambda_a J_a + \lambda_b J_b + \ldots + \lambda_j(J_j - J) \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lembrando que $A = A_a + A_b + \ldots + A_j + A_k$, podemos reescrever a primeira linha como:

$$\left[(\lambda_b - \lambda_a)A_b + \cdots + (\lambda_j - \lambda_a)A_j - \lambda_a A_k\right] = 0. \tag{5}$$

Como $\lambda_a \geq \lambda_i$ todos os coeficientes (dos A_i's) são menores do que ou iguais a zero. Sendo a soma igual a zero, (e $A_i \geq 0$) é necessário que cada termo seja zero.

Mas algum A_i é diferente de zero: senão, a indústria a seria uma indústria isolada do sistema. Supomos sem perda de generalidade que sejam A_b, A_c, $\ldots$, A_g todos diferentes de zero. Assim, concluímos de:

$$(\lambda_r - \lambda_a)A_r = 0$$

que $\lambda_r = \lambda_a$ para todo $r = b, c, \ldots, g$.

Sabemos que $\lambda_b = \lambda_a \geq \lambda_i$ para todo i. Logo a linha correspondente à indústria b pode ser reescrito da mesma forma:

$$\left[(\lambda_a - \lambda_b)B_a + \cdots + (\lambda_j - \lambda_b)B_j - \lambda_b B_k\right] = 0.$$

Donde concluímos analogamente que todos os termos dessa soma são nulos.

Prosseguindo esse raciocínio para todas as indústrias, concluímos que para todos os λ_r's ($r = b, c, \ldots, g$) isso também é válido. Como alguma das indústrias (digamos h) que não foram contempladas pelo nosso argumento vende para alguma das indústrias do subsistema ($a, b, \ldots, g$), temos que algum $H_r \neq 0$ donde $\lambda_h = \lambda_r$.

Continuando o argumento, obtemos que todos os λ_i são iguais. Se eles fossem diferentes de zero, a igualdade (4) dá:

$$(La'') + (Lb'') + \ldots + (Lj'') = 0.$$

A soma acima, e as equações análogas a (5), implicam que:

$$A_k = B_k = \ldots = J_k = 0.$$

Mas isso é um absurdo, pois a indústria k compra de pelo menos uma das indústrias a, b, $\ldots$, j. Logo, os coeficientes têm todos de ser iguais a zero e o sistema é linearmente independente.

B A construção do sistema Padrão

O principal objetivo desse apêndice é detalhar o argumento que Sraffa apresenta no parágrafo §37—Construção de um sistema Padrão é sempre possível. Lembremos da equação de preços do sistema original:

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
\text{(La)} & (A_a p_a & + & B_a p_b & + & \cdots & + & K_a p_k)(1+r) & + & wL_a & = & Ap_a \\
\text{(Lb)} & (A_b p_a & + & B_b p_b & + & \cdots & + & K_b p_k)(1+r) & + & wL_b & = & Bp_b \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \quad \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\text{(Lk)} & (A_k p_a & + & B_k p_b & + & \cdots & + & K_k p_k)(1+r) & + & wL_k & = & Kp_k
\end{array}
$$

Buscamos um conjunto de multiplicadores positivos que, ao serem aplicados às equações de preços do sistema original, apresente a simplicidade das equações derivadas de um sistema Padrão. Sempre existem esses multiplicadores? Vejamos um caso em que sim:

(1)	90 F	+	120 C	+	60 T	+	3/16 L	→	180 F
(2)	50 F	+	125 C	+	150 T	+	5/16 L	→	450 C
(3)	40 F	+	40 C	+	200 T	+	8/16 L	→	480 T
Totais	180 F		285 C		410 T		1 L		

Olhamos para o excedente do sistema original:

$$S = (0F, 165C, 70T).$$

Vejamos agora um sistema derivado (isto é, obtido a partir de multiplicações por escalares das linhas) do sistema original:

(1q)	90 F	+	120 C	+	60 T	+	3/16 L	→	180 F
(2q)	30 F	+	75 C	+	90 T	+	3/16 L	→	270 C
(3q)	30 F	+	30 C	+	150 T	+	6/16 L	→	360 T
Totais	150 F		225 C		300 T		12/16 L		

O sistema derivado apresenta o seguinte excedente:

$$S = (30F, 45C, 60T).$$

Note que:

$$\frac{180}{150} = \frac{270}{225} = \frac{360}{300} = 1,20$$

ou seja, as proporções do consumo agregado dos meios de produção em relação às quantidades produzidas no sistema derivado são iguais. Há, portanto, uma homogeneidade entre o consumo dos meios de produção e as quantidades produzidas. Isso nos permite, como vimos no parágrafo §29, o cálculo da taxa de lucro do sistema antes de conhecer os preços relativos. Toda solução do sistema derivado é também uma solução do sistema original, uma vez que um é obtido do outro por meio de multiplicações por escalares positivos. Esse ponto é importante e deve ser ressaltado. O que buscamos são os preços relativos do sistema econômico. O sistema econômico original e o derivado dão origem ao mesmo sistema de preços. Tomemos o exemplo que demos acima. O sistema de preços do sistema original é:

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
(1) & 90p_f & + & 120p_c & + & 60p_t(1+r) & + & (3/16)w & = & 180p_f \\
(2) & 50p_f & + & 125p_c & + & 150p_t(1+r) & + & (5/16)w & = & 450p_f \\
(3) & 40p_f & + & 40p_c & + & 200p_t(1+r) & + & (8/16)w & = & 480p_f
\end{array}$$

e o sistema de preços associado ao sistema derivado é:

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
(1) & 90p_f & + & 120p_c & + & 60p_t(1+r) & + & (3/16)w & = & 180p_f \\
(2) & 30p_f & + & 75p_c & + & 90p_t(1+r) & + & (3/16)w & = & 270p_f \\
(3) & 30p_f & + & 30p_c & + & 150p_t(1+r) & + & (6/16)w & = & 360p_f
\end{array}$$

Os sistemas de preços podem parecer diferentes, mas são iguais, pois cada linha de um pode ser obtida a partir da linha correspondente do outro por multiplicações escalares positivas e isso não altera as equações.

Lembremo-nos da abertura do parágrafo §37:

> " Pode ser demonstrado, mediante um experimento imaginário, que qualquer sistema econômico efetivo do tipo que temos considerado pode ser sempre transformado num sistema Padrão."
>
> [Sraffa, p. 26]

Nosso objetivo nesse apêndice é, portanto, provar que o 'experimento imaginário' de Sraffa está correto. Faremos isso por etapas: em primeiro lugar transcreveremos inteiramente o parágrafo §37, onde tal experimento é apresentado; depois o dissecaremos e por fim provaremos as afirmações nele contidas.

Segundo Sraffa:

> "(O experimento se dá através de dois passos que se alternam. Um consiste em variar as proporções das indústrias; o outro consiste em reduzir na mesma proporção as quantidades produzidas por todas as indústrias, deixando sem variações as quantidades utilizadas como meios de produção.)
>
> Começamos ajustando as proporções das indústrias do sistema de tal modo que se produza de cada mercadoria básica uma quantidade maior do que a estritamente necessária para sua reposição.

Imaginemos, depois, que o produto de todas as indústrias se reduz gradualmente mediante sucessivos e pequenos cortes proporcionais, sem interferir nas quantidades de trabalho e meios de produção que empregam.

Tão logo os cortes reduzam a produção de qualquer mercadoria ao nível mínimo requerido para a reposição, reajustamos as proporções das indústrias de modo que se registre de novo um excedente de cada produto (enquanto se mantém constante a quantidade de trabalho empregada no total). Isto pode ser feito sempre que houver um excedente de algumas mercadorias e nenhum déficit.

Continuemos com tal alternação de reduções proporcionais com o restabelecimento de um excedente para cada produto até que alcancemos o ponto em que os produtos tenham sido reduzidos em tal medida que é exatamente possível a reposição geral sem deixar nada como produto excedente.

Visto que os produtos de todas as indústrias foram reduzidos na mesma proporção para alcançar esta posição, podemos agora restabelecer as condições originais de cada produção aumentando a quantidade produzida em cada indústria a uma taxa uniforme; por outro lado, não perturbamos as proporções às quais as indústrias foram trazidas. A taxa uniforme que restabelece as condições originais de produção é R e as proporções alcançadas pelas indústrias são as proporções do sistema Padrão."

[Sraffa – pp. 26 – 27]

Podemos separar as etapas do experimento da seguinte forma:

A: Ajustar as proporções das indústrias criando um excedente em cada uma delas.

B: Fazer cortes *proporcionais* do excedente até que uma das indústrias produza exatamente o quanto é consumido pelo sistema. Não são permitidas mudanças no lado esquerdo do sistema durante essa etapa.

C: Havendo excedente em alguma indústria, volte para **A**; caso contrário, vá para **D**.

D: Restabelecer o excedente uniformemente chegando ao sistema Padrão.

Devemos responder às seguintes perguntas:

Q1: É possível criar um excedente em todas as indústrias?

Q2: Cortar o excedente não nos afasta do sistema original?

Q3: Chegaremos a **D**?

Q4: Esse aumento uniforme da quantidade produzida nos conduz a um sistema derivado?

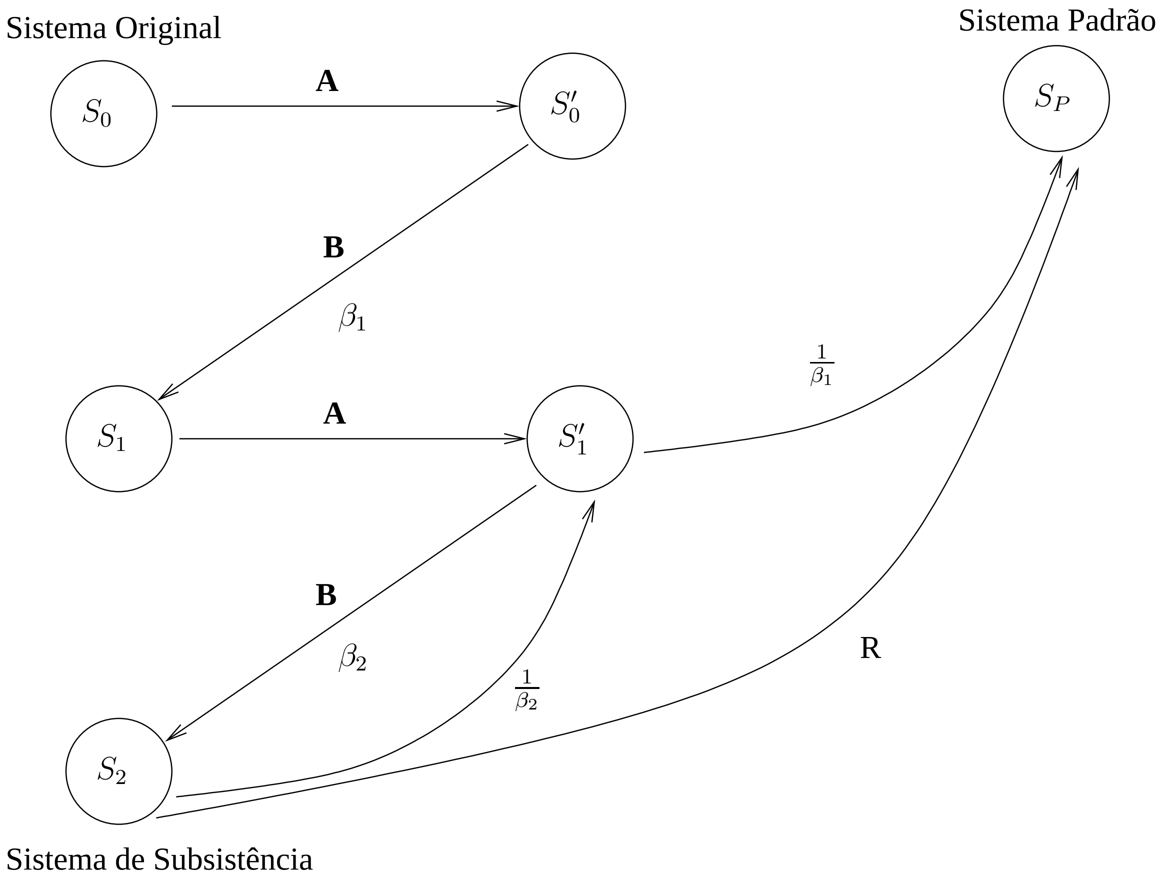

Figura 1: Esquema do experimento imaginário.

Sugerimos um olhar atento para a figura 1 que ilustra as suas etapas do experimento imaginário:

Se nós respondermos corretamente essas 4 questões, teremos atingido o nosso objetivo nesse apêndice. Uma vez demonstrada a existência do sistema Padrão, completa-se o objetivo do capítulo 5.

Como a demonstração da etapa **A** envolve muitos passos, faremos um quadro que destaca seu elementos fundamentais. A finalidade é permitir que o leitor use a tabela 1 como um mapa à medida em que for lendo a construção do argumento:

A			
1	**2**	**3**	**4**
$\delta_1, \delta_2, \dots \delta_r$	$\Lambda_T \xrightarrow{\alpha} L_T$	$\rho_1, \rho_2 \dots \rho_i$	$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$

Tabela 1: Passos da etapa **A**

Lembremo-nos das condições impostas ao sistema econômico:

1: Viabilidade − Um sistema é viável se ele ou algum derivado seu produzir mais do que consome. Embora isso pareça simples, pode causar confusões. Vejamos em detalhe:

12 T	+	10 F	→	30 T
8 T	+	10 F	→	20 F
20 T		20 F		

Tabela 2: Sistema **1**

O Sistema **1** é viável, como podemos ver com facilidade, pois 20 T $\leq$ 40 T e 20 F $\leq$ 20 F

Considere agora:

12 T	+	10 F	→	30 T
24 T	+	30 F	→	60 F
36 T		40 F		

Tabela 3: Sistema **2**

Esse Sistema **2** produz 30 trigos e consome 36. Logo, esse sistema produz menos do que consome. Entretanto ele é viável, pois existe um sistema derivado dele (Sistema **1**) que é viável. Para ver isso basta notar que o Sistema **1** pode ser obtido do Sistema **2** pela divisão da sua segunda linha por 3.

Leiamos o comentário de Sraffa sobre sistemas viáveis:

> "Essa formulação pressupõe que o sistema esteja num estado de auto-reposição; mas todo sistema do tipo considerado pode ser levado a tal estado simplesmente mediante a variação das proporções em que as equações individuais entram nele. (Os sistemas que assim se comportam, com um excedente serão discutidos na seção 4 e seguintes. Sistemas que são incapazes de se comportar assim em quaisquer proporções e que apresentam um déficit na produção de algumas mercadorias em relação a seu consumo, mesmo que nenhuma tiver um excedente, não representam sistemas econômicos viáveis e não são considerados.)"
>
> [Sraffa, p. 8]

2: Bens básicos – Só consideramos os bens básicos, pois os bens não básicos não desempenham papel algum na determinação dos lucros da economia. Multiplicamos, de início, as equações dos bens não básicos por zero. Além disso, supomos a existência de ao menos uma mercadoria básica nos sistemas considerados.

Passemos à primeira das perguntas:

[**Q1**:] É sempre possível criar um excedente em todas as indústrias?

Partimos de um sistema econômico viável que possui ao menos um bem básico. Suponha que estamos diante do seguinte sistema econômico onde todas as mercadorias são básicas:

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
 & A_a & + & B_a & + & \ldots & + & K_a & \rightarrow & A \\
 & A_b & + & B_b & + & \ldots & + & K_b & \rightarrow & B \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & A_k & + & B_k & + & \ldots & + & K_k & \rightarrow & K \\
\hline
\text{Totais} & A^+ & & B^+ & & & & K^+ & &
\end{array}
$$

Todas essas mercadorias são básicas. Temos também que:

$$
\begin{aligned}
A^+ &\leq A \\
B^+ &\leq B \\
&\vdots \\
K^+ &\leq K
\end{aligned}
$$

Só faz sentido perguntar se é possível distribuir o excedente entre todas as indústrias se *houver* tal excedente. Ou seja, no caso em que todas as equações acima são igualdades, não há o que fazer em **A** e passamos para **D**. Logo, a pergunta só faz sentido quando pelo menos uma das equações é uma desigualdade estrita.

Da mesma forma, se todas as desigualdades forem estritas **A** já está satisfeita e podemos ir para **B** para cortar o excedente. Se voltarmos para **A** então teremos um conjunto não vazio de desigualdades estritas e de igualdades.

Construiremos dois conjuntos Y e $S.Y$ é o conjunto de todas as indústrias cuja produção se iguala ao consumo agregado do bem produzido por ela.

Mais formalmente, sendo x uma indústria do sistema, X a sua produção e X^+ o consumo agregado do bem x, temos:

$$x \in Y \Leftrightarrow X^+ = X$$

S é a coleção das indústrias que produzem com excedente. Ou seja, valendo-se da mesma notação:

$$x \in S \Leftrightarrow X^+ < X$$

Nós teremos respondido nossa primeira pergunta se mostrarmos que é possível alterar as proporções produzindo um excedente em todas as indústrias. Ou seja, se mostrarmos ser possível tornar Y um conjunto vazio por meio de multiplicações escalares no sistema que estamos trabalhando.

Uma vez que possuímos um conjunto finito de indústrias, se nós pudermos mostrar uma operação que retira de Y pelo menos uma indústria então, após um número finito de aplicações desta operação, teremos transformado Y no conjunto vazio, e poderemos passar para a etapa de corte do excedente, a etapa **B**.

Antes de mostrar que tal é possível, nós ordenaremos as indústrias de acordo com suas taxas de excedente:

$$\gamma_x = \frac{X}{X^+}$$

Para toda indústria x pertencente a Y, $\gamma_x = 1$

A partir de agora não iremos mais usar letras e sim números para representar as indústrias. Logo, se antes tínhamos $(A, B, \ldots, K)$, agora teremos $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$.

Faremos, portanto, uma alteração natural. Usaremos o índice $i \in N$ para representar a indústria numerada por esse índice.

$$\gamma_i = \frac{I_i}{I_i^+}$$

Dessa mudança de notação decorre uma outra também natural, mas que expomos por motivos de clareza. A antiga notação do sistema econômico era:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_a & + & B_a & + & \ldots & + & K_a & \rightarrow & A \\
A_b & + & B_b & + & \ldots & + & K_b & \rightarrow & B \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
A_k & + & B_k & + & \ldots & + & K_k & \rightarrow & K \\
\hline
A^+ & & B^+ & & & & K^+ & &
\end{array}$$

A nova notação é:

$$\begin{array}{ccccccccc}
I_{11} & + & I_{12} & + & \ldots & + & I_{1n} & \rightarrow & I_1 \\
I_{21} & + & I_{22} & + & \ldots & + & I_{2n} & \rightarrow & I_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
I_{n1} & + & I_{n2} & + & \ldots & + & I_{nn} & \rightarrow & I_n \\
\hline
I_1^+ & & I_2^+ & & & & I_n^+ & &
\end{array}$$

Onde:

$$\begin{cases}
I_{11} & : \text{quantidade do bem } I_1 \text{ usado para produzir } I_1; \\
I_{12} & : \text{quantidade do bem } I_2 \text{ usado para produzir } I_1; \\
\vdots & \\
I_{1n} & : \text{quantidade do bem } I_n \text{ usado para produzir } I_1;
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
I_{21} & : \text{quantidade do bem } I_1 \text{ usado para produzir } I_2; \\
I_{22} & : \text{quantidade do bem } I_2 \text{ usado para produzir } I_2; \\
\vdots & \\
I_{2n} & : \text{quantidade do bem } I_n \text{ usado para produzir } I_2;
\end{cases}$$

e assim por diante. Note que isso é apenas uma mudança de notação.

Queremos nessa nova notação ordenar os γ_i das respectivas indústrias (Ind_i) em ordem crescente.

A ordenação pode ser esquematizada na seguinte tabela:

Y	Ind_1	$\longrightarrow$	$\gamma_1 = 1$
	Ind_2	$\longrightarrow$	$\gamma_2 = 1$
	$\vdots$		
	Ind_i	$\longrightarrow$	$\gamma_i = 1$
S	Ind_{i+1}	$\longrightarrow$	$\gamma_{i+1} > 1$
	Ind_{i+2}	$\longrightarrow$	$\gamma_{i+2} \geq \gamma_{i+1}$
	$\vdots$		
	Ind_n	$\longrightarrow$	$\gamma_n \geq \gamma_{n-1}$

Agora, multiplicamos as primeiras i equações por $(1+\delta)$, sendo $\delta > 0$ tão pequeno quanto desejarmos. Um vez que tenhamos multiplicado as indústrias de Y por $(1+\delta)$, temos que γ_j aumenta para algum $j \in 1, 2, \ldots, i$. De fato, existe uma indústria em S que consome alguma das mercadorias produzidas pelas indústrias de Y. Se não fosse assim, então as indústrias de Y não seriam básicas. Portanto, existe ao menos uma indústria de Y que "exporta" para os grupo das indústrias S. Isso significa que essa indústria (chamemo-la de indústria l) terá sua produção elevada a uma taxa superior ao seu consumo, portanto ela passa a pertencer a S. O que acontece com os γ_j para $j \in i+1, i+2, \ldots, n$? Já que o aumento nas indústrias de Y aumenta o consumo das mercadorias produzidas pelas indústrias de S, teremos que γ_j não se elevará e ao menos um irá diminuir. Devemos escolher δ de forma que todas as indústrias de S continuem em S. Isso é sempre possível, já que $\gamma_j(\delta)$ é uma função contínua de δ. Afinal:

$$\gamma_j = \frac{I_j}{I_j^+}$$

Lembremos que I_j é constante e que I_j^+ aumenta para todo $j > i$, já que:

$$I_j^+ = (1+\delta)(I_{j,1} + I_{j,2} + \ldots + I_{j,i}) + I_{j(i+1)} + \ldots + I_{j,n}$$

Uma vez que nós fizermos essa multiplicação nós teremos aumentado em pelo menos um o número de indústrias com excedente. Repetindo essa operação r vezes ($r \leq i$) teremos $Y = \emptyset$.

Leiamos as indicações de Sraffa novamente:

> "(O experimento se dá através de dois passos que se alternam. Um consiste em variar as proporções das indústrias; o outro consiste em reduzir na mesma

proporção as quantidades produzidas por todas as indústrias, deixando sem variações as quantidades utilizadas como meios de produção.)”

Começamos ajustando as proporções das indústrias do sistema de tal modo que se produza de cada mercadoria básica uma quantidade maior do que a estritamente necessária para sua reposição.”

[Sraffa — p.26]

Acaso nós seguimos essa indicação? Sim. Nós alteramos somente as proporções das indústrias do sistema multiplicando por escalares positivos. Mas isso foi alcançado às custas de um aumento da quantidade de trabalho da economia. Para atender às condições postas por Sraffa, será necessário restabelecer a quantidade de trabalho da economia original. Lembremos do sistema original com os bens *não-básicos* excluídos. Somemos o trabalho:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_T$$

Após as multiplicações, a quantidade agregada de trabalho empregada aumentou: se antes a chamávamos de L_i agora a chamaremos de Λ_i. Representamos essa mudança através da seguinte flecha:

$$L_i \rightsquigarrow \Lambda_i,$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i = \Lambda_T.$$

Por fim, multiplicamos cada indústria por L_T/Λ_T. Ao final, teremos feito apenas uma redistribuição do trabalho entre as indústrias. Note que essa divisão final é importante pois ela faz com que a quantidade agregada de trabalho empregada fique igual à que tínhamos quando começamos,*i.e.*, L_T.

Passemos à segunda questão:

[**Q2**:]Cortar o excedente não nos afasta do sistema original?

Sim, uma vez que fazemos cortes no excedente sem modificar o lado esquerdo do sistema, não estaremos mais num sistema derivado. Lembre-se que o sistema derivado é um sistema que obtemos por multiplicação por escalares das linhas do sistema original. Mas não nos preocupemos ainda com esse ponto. Se nós soubermos o quanto foi cortado em cada etapa, poderemos recuperar o excedente de forma a obter um sistema derivado. Ao final nós teremos atingido um sistema derivado do sistema original (no caso este será o ‘sistema Padrão’, vide figura 1).

A terceira questão é mais complexa e exigirá de nós o conhecimento de alguns conceitos de topologia (essencialmente conjuntos abertos, fechados e conexos). Se tais conceitos não forem familiares ao leitor, recomendamos o capítulo 1 do livro Análise na Reta volume 2 do Elon Lages Lima [Lima 2008].

[**Q3**:] Chegaremos a **D**?

Suponha que estamos em **A**:

	Ind_1	$\longrightarrow$	$\gamma_1 = 1$
Y	Ind_2	$\longrightarrow$	$\gamma_2 = 1$
	$\vdots$		
	Ind_i	$\longrightarrow$	$\gamma_i = 1$
	Ind_{i+1}	$\longrightarrow$	$\gamma_{i+1} > 1$
S	Ind_{i+2}	$\longrightarrow$	$\gamma_{i+2} \geq \gamma_{i+1}$
	$\vdots$		
	Ind_n	$\longrightarrow$	$\gamma_n \geq \gamma_{n-1}$

O conjunto Y não é vazio. Faremos sucessivas multiplicações das indústrias em Y por $(1 + \delta)$. Numeremos as operações. O primeiro δ da série de multiplicações, nós chamaremos de δ_1. Assim, temos δ_1, δ_2,..., δ_r, onde $r \leq i$. Isto porque ao final de cada etapa o conjunto Y perde pelo menos um elemento.

Depois de termos transformado o conjunto Y no conjunto vazio ($\emptyset$) nós alteramos o consumo agregado de trabalho (que agora representamos por Λ_T). Nós iremos reduzir uniformemente o sistema de modo a recuperar o consumo agregado de trabalho com que começamos (L_T). Isso pode ser feito através de uma multiplicação de todas as indústrias pela mesma constante $\alpha = \frac{L}{\Lambda_T}$.

Nós chegaremos a **D** somente quando tivermos eliminado todo o excedente do sistema. Neste caso, todos os γ_is serão iguais a 1.

Na etapa **B** o corte proporcional será realizado em uma taxa conhecida. Ordenando os γ_i's $(1 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \ldots \leq \gamma_n)$ o corte proporcional será dado por:

$$\beta_1 = \frac{1}{\gamma_1} = \frac{I_1^+}{I_1}$$

Isso é evidente, pois qualquer corte superior faria com que a primeira indústria se tornasse deficitária. Se alcançamos **D** nessa última etapa então $\gamma_M = \max \gamma_i, 1 \leq i \leq n$ é igual a 1. Podemos reformular a pergunta **Q3**: chegaremos em algum momento a um ponto onde o γ_M se torna 1? É uma espécie de propriedade de convergência que queremos obter do experimento.

Lembremos da frase de Sraffa:

> "Continuemos com tal alternação de reduções proporcionais com o restabelecimento de um excedente para cada produto até que alcancemos o ponto

em que os produtos tenham sido reduzidos em tal medida que é exatamente possível a reposição geral sem deixar nada como produto excedente.”

Refinaremos novamente a notação. Contaremos as etapas do experimento:

$\gamma_{i,0}$ é a proporção original entre a produção e o consumo agregado da mercadoria i

e

$\gamma_{i,t}$ é a proporção entre a produção e o consumo agregado da mercadoria i após t alternações entre cortes proporcionais e restabelecimento do excedente em cada indústria (que consiste em fazer **B**—**A** t vezes).

$\gamma_{M,t}$ é o maior valor de γ_i na etapa t.

A questão que buscamos responder pode ser refraseada nos seguintes termos:

$$\gamma_{M,t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$$

Seja U o conjunto formado por todos os $\gamma_{M,t}$ que o experimento pode gerar.

Nós iremos mostrar que o conjunto U é um conjunto não vazio, fechado e aberto num conjunto da forma $[1, M]$[11] e daí concluiremos que ele é o conjunto todo. Assim, saberemos que $1 \in U$.

Antes de criar U, vamos refinar a escolha dos δ's que fizemos em **A**. Após as operações de multiplicação por $1 + \delta_j$ sucedidas de uma redução na proporção de $\alpha = \frac{L_T}{\Lambda_T}$ nós encontramos um conjunto de multiplicadores ρ_j tais que:

Y	$\emptyset$		
S	$Ind_1\rho_1$	$\longrightarrow$	$1 = \gamma_{1,0} \rightsquigarrow \Gamma_{1,0} > 1$
	$Ind_2\rho_2$	$\longrightarrow$	$1 = \gamma_{2,0} \rightsquigarrow \Gamma_{2,0} > 1$
	$\vdots$		
	$Ind_i\rho_i$	$\longrightarrow$	$1 = \gamma_{i,0} \rightsquigarrow \Gamma_{i,0} > 1$
	$Ind_{i+1}\rho_{i+1}$	$\longrightarrow$	$\gamma_{i+1,0} \rightsquigarrow \Gamma_{i+1,0}$
	$Ind_{i+2}\rho_{i+2}$	$\longrightarrow$	$\gamma_{i+2,0} \rightsquigarrow \Gamma_{i+2,0}$
	$\vdots$		
	$Ind_n\rho_n$	$\longrightarrow$	$\gamma_{n,0} \rightsquigarrow \Gamma_{n,1}$

Observe que não há indústrias em Y, isto é, $Y = \emptyset$. Além disso, $\Gamma_{j,0} \leq \gamma_{j,0}$ se $j > i$. O conjunto $\{\Gamma_{1,0}, \ldots, \Gamma_{i,0}, \Gamma_{i+1,0}, \ldots, \Gamma_{n,0}\}$ não está necessariamente em ordem crescente. Mas isso pode ser facilmente resolvido. Sempre é possível ordenar um conjunto finito de números reais. Mas existe um problema mais complexo. Quão grande se tornaram os $\Gamma_{j,0}$ para $j \leq i$? Não queremos que eles cresçam sem restrições. De fato, queremos igualar

[11] O conceito de conjunto aberto e conjunto fechado é diferente do conceito de aberto em um conjunto e fechado em um conjunto, esse conceito encontra-se bem explicado em [Lima 2008].

todos os Γ's. Mesmo que não façamos isso no primeiro passo, pediremos, como antes, que os ρ_j's (que dependem dos δ_i's, $\rho_j = 1$ para $j > i$) sejam tais que $\Gamma_{j,0} < \gamma_{i+1,0}$. Olhemos as fórmulas que definem os γ's e os Γ's:

$$\gamma_{j,0} = I_j(I_{j,1} + I_{j,2} + \ldots + I_{j,n})^{-1}$$

$$\Gamma_{j,0} = \rho_j I_j(\rho_1 I_{j,1} + \rho_2 I_{j,2} + \ldots + \rho_n I_{j,n})^{-,1}$$

Então podemos ver que $\Gamma_{j,0}$ é uma função contínua de $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$.

Para $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ (note that $\rho_{i+1} = \rho_{i+2} = \ldots = \rho_n = 1$) a lista de n termos $\Gamma_{1,0}, \ldots, \Gamma_{i,0}, \Gamma_{i+1,0}, \ldots, \Gamma_{n,0}$ tem a propriedade de que todos os primeiros i termos são maiores do que 1.

Podemos então fazer o corte da parte **B** e obter novos γ's. O corte será uma multiplicação por $\frac{1}{\Gamma_m}$ onde Γ_m é o menor dos Γ_i após a etapa **A**. Qualquer corte superior a isso deixaria as indústrias que têm taxa de excedente iguais a Γ_m numa situação deficitária.

Isso nos leva para a próxima etapa. Agora encontramos novos $\gamma_{j,1}$. Antes de prosseguir cabe notar que podemos definir uma função contínua:

$$F_t(\delta_{1,t}, \delta_{2,t}, \ldots, \delta_{n,t}) = \gamma_{M,t+1}$$

Como funciona essa função? Para o sistema no estágio t (t vezes após a aplicação do par de etapas **A**—**B**) temos as indústrias de Y_t que produzem exatamente o que é consumido pela sociedade e as indústrias de S_t que produzem com excedente.

Cada indústria será multiplicada por um certo $\rho_{i,t} = (1 + \delta_{1,t}) \times \cdots \times (1 + \delta_{r_i,t})$, onde r_i é o número de operações necessárias para fazer com que a indústria i se torne uma indústria que produz com excedente. Esses produtos são diferentes para cada indústria. De fato, só serão multiplicadas por $(1+\delta_{1,t})$ as indústrias que estão em Y_t. As indústrias que continuaram em Y_t serão multiplicadas por $(1+\delta_{2,t})$. E assim sucessivamente. Ao final recuperamos o trabalho agregado da sociedade com uma multiplicação de todas as indústrias por $\alpha_t = L_{T,t}/\Lambda_{T,t}$.

Agora fazemos o corte da fase **B**.

Desse processo emergem os $\gamma_{i,t+1}; i = 1, 2, \ldots n$. Queremos escolher o maior número dessa lista. A função máximo é contínua, logo associamos continuamente para o conjunto de δ's um certo $\gamma_{M,t+1}$.

esquematicamente:

$$F_t : \boxed{\quad \delta_{i,t} \quad} \longrightarrow \alpha_t \longrightarrow \{\gamma_{i,t}\} \xrightarrow{\max} \boxed{\quad \gamma_{M,t+1} \quad}$$

Lembramos que U e o conjunto dos valores máximos de γ's que podem ser obtidos seguindo o experimento (isto é, os valores da imagem de F_t). Como nosso experimento tem em $t = 0$ um certo $\gamma_{M,0}$, U é não vazio. Evidentemente U está contido no intervalo fechado $[1,\ \gamma_{M,0}]$. De fato, $\gamma_{M,1}$ não corresponde à relação entre excedente produzido e consumo agregado de uma indústria de Y (pois $\gamma_{j,1} < \gamma_{0,i+1}$ para $j \leq i$). Como vimos $\gamma_{j,1} \leq \gamma_{j,0}$ para $i+1 \leq j \leq n$. Logo $\gamma_{M,1} \leq \gamma_{M,0}$. Logo os γ's das indústrias de Y não crescem tanto (ficam menores do que $\gamma_{0,i+1}$) e os γ's das indústrias de S diminuem.

Para ver isso basta rever a passagem **A**—**B** e notar que todos os excedentes se reduzem em um valor positivo. Lembre-se que a multiplicação que gera o excedente em **A** já é capaz de reduzir os γ_j para $i+1 \leq j \leq n$. Se esse não for o caso, o corte em **B** fará uma redução positiva. Como F_1 é contínua e tem domínio conexo (de fato, basta tomar o bloco $[0,1]^n$ como domínio de F_1), temos a validade do teorema do valor intermediário, isto é, todos os valores entre $F(0,0,\ldots,0) = \gamma_{M,0}$ e $F_1(\delta_{1,1},\delta_{2,1},\ldots,\delta_{n,1})$ são atingíveis, logo temos o intervalo da forma $(\gamma_{M,1},\gamma_{M,0}]$ em U onde $\gamma_{M,1} < \gamma_{M,0}$, uma vizinhança aberta para todos os valores menores do que $\gamma_{M,0}$ e maiores do que $\gamma_{M,1}$. Para todo t temos que $(\gamma_{M,t+1},\gamma_{M,t}] \subset U$ e assim concluímos que $(\gamma_{M,t},\gamma_{M,0}] \subset U$, e que U é aberto em $[1,\gamma_{M,0}]$.

Mostrando que U é fechado teremos mostrado que U é aberto e fechado em $[1,\gamma_{M,0}]$. Logo, é todo o intervalo e, portanto, $1 \in U$. Considere $\gamma_{M,t} = F_t(\delta_{1,t},\delta_{2,t},\ldots,\delta_{n,t})$ a função contínua que associa a cada conjunto de multiplicadores o maior valor de γ. Como os valores dos δ's variam em um conjunto limitado e fechado ($[0,1]^n$) temos que $U = F(K)$. Logo, como a imagem de conjunto compacto por função contínua é compacta, temos que $F(K)$ é compacto, em particular é fechado em $[1,\gamma_{M,0}]$

Se $\gamma_{M,t} = 1$ então o sistema chegou a **D** e, portanto, trata-se agora de restabelecer o excedente. Como podemos guardar na memória os corte que fizemos em cada etapa de **B**, temos que o aumento por etapas do excedente nos faz voltar à um sistema derivado do anterior.

Por exemplo, suponha que fizemos 2 etapas de **A—B**, na primeira cortamos o excedente por β_1 na segunda por β_2. Chegamos a **D** e passamos por 3 sistemas econômicos não equivalentes: o Original, o obtido após o primeiro corte e o obtido após o segundo corte (que está em subsistência). Multiplicando o último sistema por $\frac{1}{\beta_2}$ voltamos a um sistema derivado do sistema obtido após o primeiro corte.

Aqui cabe olhar novamente para a figura 1 apresentada no início do apêndice B. Temos que $S_t \sim S'_t$ (o símbolo $\sim$ quer dizer que os sistemas são equivalentes), pois a operação realizada em **A** consiste apenas numa multiplicação por escalares positivos das indústrias em S_t.

Multiplicando por $\frac{1}{\beta_1}$ voltamos a um sistema derivado do sistema obtido antes do primeiro corte. Isto nos reconduz a um sistema derivado do sistema original, evidentemente ele é um sistema Padrão. Vemos que $R = (\frac{1}{\beta_1})(\frac{1}{\beta_2})$. E isso conclui a demonstração.